Interaction forte entre mathématiques et physique dans la transition lycée-université : des équations différentielles du premier ordre dans un enseignement de physique

Éléments d'analyse en termes de registres sémiotiques

Claude Cabot et Daniel Beaufils

Résumé

Nous présentons ici quelques éléments d'un travail portant sur les équations différentielles dans le cadre d'un module d'enseignement de physique de premier semestre de première année d'université (L1S1). Le fil conducteur de ce module est la modélisation des systèmes dépendant du temps et son outil principal sont les équations différentielles. La problématique est donc double : celle de l'articulation mathématiques-physique dans l'activité de modélisation et celle de la transition secondaire - supérieur puisque ce thème est en prolongement direct du programme de physique de la classe de terminale S. L'étude présentée ici repose sur des questionnaires exploratoires passés auprès d'étudiants de L1S1 à l'issue de cet enseignement, l'investigation étant centrée sur l'articulation des registres algébrique et graphique d'une part, et sur la correspondance mathématique - physique (lien entre cadres de rationalité). Les premiers résultats confirment les difficultés pressenties : absence de cohérence entre les différents registres sémantiques et entre les différents cadres de rationalité. Quelques pistes de réflexion sont proposées.

1 – Contexte, problématique et cadre théorique

1.1. En début de licence, un enseignement de physique qui s'appuie sur le réel et sur l'activité de modélisation.

En premier semestre de la première année de licence (L1S1), à Orsay, le module de physique *Lois d'évolution en physique* est centré sur la modélisation de phénomènes physiques (allant de la radioactivité à la mécanique du point matériel et aux circuits électriques), et aborde quelques situations non physiques telles la dynamique des populations. L'unité du module, sa cohérence, se fondent, non plus sur un thème de physique, mais sur l'activité de modélisation théorique, et plus spécifiquement, sur l'utilisation des équations différentielles (ED)[1]. Sont ainsi abordées les équations différentielles « classiques » du premier ordre, du second ordre, et quelques équations non linéaires (loi logistique, par exemple). Le contenu de ce module a été initialement élaboré[2] en continuité avec le programme de physique de la classe de terminale scientifique (TS)[3].

1.2. Au lycée, en TS, une interaction maths-physique à parfaire

Entrés en vigueur en 2002, les programmes scientifiques de la classe de terminale scientifique ont comporté une innovation importante : en physique, les phénomènes tels que la désintégration radioactive, la charge d'un condensateur à travers une résistance, l'effet d'un frottement fluide sur la chute d'un corps, sont étudiés dans leur régime transitoire aussi bien

[1] Cet aspect dérange souvent les étudiants, habitués à avoir affaire à un contenu de module homogène du point de vue du domaine disciplinaire, permettant d'approfondir ce domaine.
[2] Ce module a été conçu (avec la participation de D. Beaufils) par J.-P. Maillet physicien d'Orsay, responsable du module.
[3] La TS est la dernière année du secondaire, le L1S1 est le premier semestre à l'université.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 255-275.

que dans leur régime permanent, modélisés par des équations différentielles du premier ordre. L'étude de ce nouveau type d'équations est faite, en parallèle, au sein du programme de mathématiques[4] : leur introduction se fait sous la forme $y' = f(y,t)$, par extension progressive à partir de l'introduction de la fonction exponentielle comme fonction solution de l'équation $y' = y$, avec $f(0) = 1$. Le programme officiel de mathématiques spécifie : « *La présence [des équations différentielles], bien que modeste dans le libellé du programme, est fondamentale pour amener à la compréhension de la puissance des mathématiques pour la modélisation ; un travail conjoint avec les autres disciplines favorisera cet objectif* » (B.O.E.N, 2001).

Dans un travail de didactique portant sur l'introduction des équations différentielles dans les nouveaux programmes de 2002, F. Malonga (2008), soulignant que « [..] *l'interaction physique-mathématique est ici cruciale pour les deux disciplines* », interroge la réalité de la continuité didactique entre mathématiques et physique[5] et met le lien de la physique avec les mathématiques « *en question* » (Malonga, Beaufils et Parzysz, 2008). Ainsi, en physique de TS, en ce qui concerne la méthode de résolution de l'équation différentielle (ED), plutôt que de chercher à établir l'expression analytique de la grandeur étudiée, soit celle-ci est donnée[6], sous une forme générique ou non, soit c'est la méthode numérique d'Euler qui est mise en œuvre.

1.3. Continuité secondaire-supérieur et changements de pratiques

En termes de continuité secondaire-supérieur, le module de physique *Lois d'évolution*, présente un certain nombre de points communs avec la physique de TS mais a aussi des spécificités. Comme en Terminale, l'objet « équation différentielle » y est mis en avant comme constitutif de la modélisation, mais l'accent est mis sur le pouvoir prédictif à partir de la seule équation différentielle. Les modèles mathématiques utilisés à l'université sont aussi plus divers et les situations physiques analysées sous forme d'exercices plus sophistiqués.

De plus, la transition secondaire-supérieur s'accompagne de changements de « pratiques » dans la présentation et la manipulation des ED de premier ordre. En ce qui concerne la forme, la prise en considération de l'aspect linéaire amène, en physique du niveau L1S1, à écrire les équations différentielles, sous la forme $f(y, y') = g(t)$, c'est-à-dire en privilégiant la forme dite homogène et la résolution en fonction de la nature du « second membre ». Quant à la démarche de résolution d'une ED, elle fait partie des compétences attendues en s'appuyant sur les mathématiques : en physique de L1S1, on s'appuie sur une méthode analytique[7] qui fait explicitement référence aux connaissances de mathématiques.

Cette approche autour des ED du premier ordre a donc à faire face d'emblée aux difficultés rencontrées par les élèves au cours de leur cursus au lycée :

- difficulté liée à l'activité de modélisation elle-même (choix des paramètres pertinents, champ théorique sous-jacent, traduction mathématique des lois à appliquer, etc.),
- difficulté liée aux symboles et au vocabulaire qui, pour un même objet, diffèrent parfois notablement entre le cours de mathématiques et celui de physique,
- et, plus généralement, difficulté liée au fait, souvent éludé, que les mathématiques du

[4] Ce qui n'est pas le cas des ED du second ordre qui sont utilisées lors de l'étude des oscillateurs harmoniques mais qui ne figurent pas au programme de mathématiques.

[5] Au sens où des liens concrets peuvent être établis entre les deux disciplines, tout en faisant en sorte que chacune garde sa propre spécificité.

[6] On trouve par exemple, lors des évaluations de physique, dans le courant de l'année TS ou au baccalauréat, des énoncés avec des questions de la forme « *Montrer que la loi d'évolution est de la forme….* ».

[7] La méthode d'Euler est également utilisée dans le module de physique L1S1, mais en séances de TP sur ordinateur, et dans le but de comparer résultats de mesures et prédictions de modèles, avec une force de frottement dont la norme est proportionnelle soit à la norme de la vitesse, soit au carré de la vitesse.

physicien ne sont pas toujours celles du mathématicien[8].

1.4. Questions pratiques et cadres théoriques

La mise en place de ce module universitaire invitait donc à évaluer, en fin d'enseignement, les *connaissances et savoir-faire* des étudiants au niveau d'une vision globale des ED, et plus spécifiquement pour ce qui concerne celles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants, et à second membre constant non nul (ED1ASM). L'étude présentée ici repose sur des questionnaires exploratoires passés auprès d'étudiants de L1S1 à l'issue de cet enseignement.

La complexité des phénomènes de transition lycée-université entraîne leur analyse à la lumière de plusieurs cadres théoriques, complémentaires (Winslow, 2007). Pour situer notre approche, nous avons considéré principalement deux cadres théoriques. Pour prendre en compte le contexte institutionnel, la théorie anthropologique du didactique permet d'aborder la transition de façon assez globale (Chevallard, 1999). Pour prendre en compte les difficultés d'apprentissage auxquelles se heurtent les étudiants, on a recours aux représentations sémiotiques telles qu'étudiées par Duval (1995, 2006a), qui permettent une analyse plus locale de la question de la transition, dans la mesure où l'articulation des registres de représentation se fait en interaction avec le développement des connaissances sur les objets représentés (Perrin-Glorian, 2004).

Notre investigation était centrée sur l'articulation du registre graphique avec des registres discursifs (registre formel analytique, langage naturel), mais aussi sur la correspondance mathématique-physique avec quelques questions concernant spécifiquement la phénoménologie. L'utilisation des registres sémiotiques peut en effet constituer un outil puissant pour analyser l'apprentissage non seulement des mathématiques, mais aussi de la physique (Malafosse, 2002), sans pour autant négliger les exigences épistémologiques spécifiques à chaque discipline. Les registres sémiotiques ont donc été mis en relation avec des cadres de rationalité, tels que construits par Lerouge (1992) et repris par Malafosse, Lerouge et Dusseau (2001). Nous avons considéré plusieurs types de cadre de rationalité : les cadres culturels de mathématiques et de physique, disposant d'objets et de règles tels que reconnus par la communauté scientifique ; les cadres de médiation didactique construits pour la transposition des savoirs, et enfin le cadre personnel des élèves - dans la mesure où on peut le considérer comme cadre de rationalité, alors même qu'il est « le lieu d'expression de rationalités différentes, voire contradictoires » (Malafosse, Lerouge et Dusseau, 2001).

On abordera les notions de discontinuités inter-cadres**,** qui, souvent implicites, contribuent aux difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants, comme le constatent les didacticiens de la discipline. Il en est ainsi pour Malafosse *et al.* (2001), qui étudient la loi d'Ohm en fin de collège, et plus spécifiquement le passage expérience-théorie. Leur problématique, reprise récemment par Tourna (2008), conduit à souligner que les changements de cadre s'accompagnent, durant le processus de modélisation mathématique d'un phénomène physique, de discontinuités voire de ruptures entre registres sémiotiques.

Pour engager notre propos, il nous a semblé utile de structurer cette présentation en présentant tout d'abord (section 2) un exemple de situation physique qui peut être considérée comme situation « prototypique », puisqu'abordée aussi bien au lycée qu'en début d'université, avec un côté « concret » qui donne sens et permet de mieux intérioriser sa représentation. Cet exemple permet de donner à voir un support d'illustrations de concepts qui sont à la jonction des mathématiques et de la physique, et ce, en termes sémiotiques : registres discursifs (dont symbolismes autour de la forme analytique des ED), registres non discursifs

[8] Voir en section 2 les micro-ruptures de rationalité entre cadres.

(représentations graphiques). On y abordera les coordinations entre cadres, coordinations qui peuvent constituer une condition pour l'articulation physique-mathématiques, surtout quand il s'agit, comme c'est le cas ici, de modélisation mathématique d'une situation extraite du réel. Ces points seront repris ultérieurement et développés dans la partie *Analyse des questionnaires* (section 4).

2 – Relations entre aspects phénoménologiques et représentations mathématiques à travers une approche en termes de registres sémiotiques : un cas prototypique, la chute verticale dans un fluide

L'exemple de la chute verticale d'un corps dans le champ de pesanteur avec frottement fluide laminaire[9] est classique. Il peut être qualifié de « pseudo-concret » dans la mesure où l'expérience est décrite (sans être réellement exécutée[10]) avec, on peut l'imaginer, une bonne perception de la nature des objets. Une approche qualitative permet au physicien d'appréhender l'évolution de la vitesse dans le cas où la vitesse initiale est nulle (ou très faible) : au fur et à mesure que la valeur de la vitesse augmente, l'intensité de la force de freinage augmente également, jusqu'à compenser le poids apparent[11]. Alors, la somme des forces appliquées au système étant nulle, l'accélération est nulle également, et la vitesse reste ultérieurement constante : on a atteint le régime stationnaire (ou permanent), correspondant à la vitesse limite $v_{\lim}$.

Pour le mathématicien, ce point n'est pas si simple puisque la force de frottement ne compense jamais, mathématiquement, le poids apparent : la différence tend exponentiellement vers zéro. C'est le retour à la physique, à partir du modèle mathématique, avec la notion de précision de mesure ou de simple perception, qui justifie *a posteriori* le raisonnement *a priori* du physicien.

2.1. En TS et en L1S1, une même procédure pour la mise en équation, mais un traitement différent pour passer de l'ED aux solutions

La mise en équation en physique suit une démarche formalisée : choix du référentiel (supposé galiléen), définition du système, bilan des forces, application de la seconde loi de Newton (RFD) appliquée au centre d'inertie, choix du repère, projection sur un axe. Ceci permet d'aboutir à une équation différentielle du second ordre sur une variable algébrique, la position, qui est réécrite sous forme d'une équation différentielle du premier ordre sur la vitesse (la

[9] Pour rendre compte des frottements exercés par un fluide sur un objet en mouvement, on distingue habituellement le frottement fluide laminaire et le frottement fluide turbulent. Le choix entre ces deux modèles est lié à l'expérience. Typiquement, la force de frottement fluide laminaire, qui est de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$, correspond aux cas où la vitesse du corps n'est pas très élevée. Aux vitesses plus élevées, la force de frottement est fonction du carré de la vitesse (on a alors affaire à une équation différentielle non linéaire). Dans les faits, la force de frottement dépend a priori, de façon plus ou moins complexe (au sens large du terme…), non seulement des caractéristiques du corps en mouvement (vitesse, forme) mais aussi des caractéristiques du fluide (*a priori* : viscosité, masse volumique … Quand, de plus, on a affaire à un objet sphérique de rayon R, on peut montrer que, dans le cas du frottement fluide laminaire, la relation peut se mettre sous la forme $\vec{f} = -\mathrm{Cte}.\eta R\vec{v}$ où η représente le coefficient de viscosité du fluide. Quelques exemples considérés comme classiques : chute d'une gouttelette d'huile dans l'air, chute d'une petite bille d'acier dans un mélange eau-glycérine. On devrait pouvoir ajouter : ballons de baudruche dans l'air. L'exercice II du bac de juin 2009 traitait exactement de la situation que nous avons choisie de présenter comme situation « prototypique » en physique (chute verticale dans un fluide), pour les ED du premier ordre, avec second membre constant non nul.

[10] L'expérience est, par contre, en principe réalisée devant les élèves, voire par les élèves eux-mêmes en classe de terminale.

[11] Le poids apparent est la somme du poids et de la poussée d'Archimède, et constitue donc une force verticale constante.

composante de la vitesse selon l'axe considéré). Le champ de formation de l'ED (application de la RFD) est celui de la mécanique du point et conduit à une forme où seul le terme contenant la dérivée est dans le membre de gauche. Le champ de traitement est celui des mathématiques, il débute par une transformation pour pouvoir obtenir la forme d'une ED1ASM : on aboutit à l'ED[12] réduite

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$$ (cf. schéma et relations en Annexe 1)

Pour passer de l'ED aux solutions, le traitement analytique diffère selon qu'on envisage le contenu du programme et les compétences attendues en TS ou en L1S1. En physique de TS, le lien entre maths et physique n'est que modérément mis en œuvre et l'activité de « résolution » en physique n'est qu'une activité de « vérification » : on demande aux élèves de montrer que la solution est bien de la forme donnée, le travail consistant alors uniquement à identifier ce qui est appelé les « constantes » (Malonga, 2008).

En physique du L1S1, le traitement analytique consiste à (re)démontrer qu'un changement de « variable » (ici une fonction) permet de retrouver une forme homogène (second membre nul) : la fonction exponentielle est solution de $Y'=aY$, équation linéaire homogène. Revenir à la « variable » de départ permet de faire référence au théorème de mathématiques sous-jacent[13]. Le tableau ci-dessous présente une mise en perspective des formes analytiques de l'ED1ASM et de ses solutions : comparaisons des registres analytiques mathématiques utilisés en TS et en L1S1, avec la justification de leur usage.

	Équation différentielle : forme utilisée	Justification de la forme ED utilisée	Solutions de l'ED	Démarche utilisée pour passer de l'ED aux solutions
Maths TS : dans les manuels scolaires, cette ED est introduite comme prolongement de la présentation de la fonction exponentielle	$y'= f(y,x)$ $y' = ay + b$ avec a réel non nul, b réel	Suite à la présentation de $y'=ay$ et des caractéristiques de la fonction exponentielle solution de l'équation $y' = y$ avec $f(0) = 1$	$Ke^{ax} - b/a$	Démonstration : on cherche l'unique fonction constante (-b/a) solution de l'ED, on montre que les solutions sont de la forme $Ke^{ax} - b/a$
Physique L1S1 (assez largement discuté, et plusieurs fois repris)	$f(y, y') = g(t)$ y'=ay+b ou $y'+\lambda y = b$ ou $y'+\frac{1}{\tau}y = b$	En référence à la forme linéaire En appui avec la formule de radioactivité	$Ke^{-at} + b/a$ $Ke^{-\lambda t} + b/\lambda$ formule qui peut faire référence	Démonstration : par changement de fonction $z = y - b/\lambda$ pour se ramener à z'+az = 0

Tableau 1 -Les formes (décontextualisées) des ED1ASM et de leurs solutions entre Terminale S et L1S1

[12] Pour simplifier notre approche, dans ce texte et en Annexe 1, la poussée d'Archimède est négligée.

[13] « La solution générale d'une ED1ASM est la somme de la solution générale de l'équation homogène correspondante et d'une solution particulière de l'équation avec second membre » et on choisit toujours la solution stationnaire. Théorème que les étudiants n'aborderont en fait, en mathématiques, qu'au semestre suivant (L1S2).

2.2. La relation mathématiques-physique ne repose pas uniquement sur l'idée de complémentarité des disciplines

Le changement de cadre mathématiques-physique s'accompagne de variations, voire de discontinuités, certaines assez évidentes, d'autres plus insidieuses

Variations dans la variable utilisée : x en maths, t en physique : au-delà des aspects nominatif et dimensionnel[14], le temps a une connotation particulière, n'étant pas une variable comme une autre à travers la perception que l'on en a.

Variations dans les formes canoniques des ED : avec les ED1ASM, les formes $y' = ay + b$ (forme canonique utilisée en maths de terminale) et $y' + ay = b$ (forme canonique utilisée en physique de terminale, et en L1S1 en prenant en considération l'aspect linéaire[15]). La proximité de ces formes pourra être source de confusions dans la forme des solutions. Passer d'une présentation du type *y' = f(y,t)* à une présentation en « *premier et second membres* » *f(y',y) = g(t)* devrait obliger à négocier une transition, par exemple en explicitant la notion de linéarité qui constitue un point à préciser, si ce n'est au lycée, du moins en début d'université, en mathématiques et en physique[16].

L'élaboration d'une ED à partir de la phénoménologie permet de citer un autre exemple de *micro-ruptures de rationalité entre cadres : la notion de zéro*. En mathématiques, le zéro constitue un nombre comme un autre. En physique, une grandeur qui s'annule « physiquement » correspond à une situation spécifique. Ainsi, pour ce qui concerne les ED du premier ordre, les situations physiques sont différentes selon qu'il s'agit d'un cas avec second membre g(t) nul (ED homogène), ou d'une ED1ASM.

Concernant les solutions de l'ED, on peut noter l'existence d'un hiatus entre la présentation des physiciens et celle des mathématiciens. En effet, en mathématiques, le régime stationnaire est la solution pour laquelle $y' = 0$ et donc y = constante, ce qui constitue une solution particulière *indépendante* de la solution générale. La solution générale de l'équation (avec second membre) présente alors une *limite asymptotique,* mais qui, par nature, n'est donc jamais atteinte. En physique, on fait comme si le régime stationnaire était une partie de la solution, et qui plus est, une partie que l'on peut identifier dans la solution générale à partir d'une certaine date !

La nature dimensionnelle des objets en physique : elle peut servir d'appui pour aider à la transposition des relations d'un cadre de rationalité à l'autre.

En L1S1, certains enseignants choisissent comme forme canonique de l'ED1ASM, non pas $y' + ay = b$, mais $y' + \lambda y = b$, en substituant à *a,* la constante de désintégration radioactive notée traditionnellement λ, dont la dimension est $[T]^{-1}$, la fonction y' étant considérée comme la dérivée de y par rapport au temps. La forme étant alors plus nettement différente, elle peut être mieux distinguée de celle utilisée en TS. Dans le même esprit, avec toujours l'intention de donner davantage de sens à une expression symbolique, on peut également utiliser pour forme canonique de l'ED celle où figure explicitement la « constante de temps » $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$, soit

$$y' + \frac{y}{\tau} = b.$$

---

[14] Notons qu'en physique, x représente traditionnellement une longueur.
[15] On fait aussi le choix de la forme linéaire y'+ay=b en mathématiques, en licence (second semestre L1S2).
[16] Ainsi, en physique, on a l'habitude d'appeler fonction linéaire la fonction dite affine en mathématiques.

Entre mathématiques et physique, les symboles peuvent également différer en signe. Le symbole *a* est, pour les mathématiciens, un réel non nul. En physique, utiliser λ offre l'avantage d'afficher un signe positif. De plus, en L1S1, un éclairage spécial est porté sur la *représentation des paramètres de contrôle.* Dans l'ED $y'+\lambda y = b$, les paramètres de contrôle sont λ et *b*, déterminés dès lors que le système est lui-même déterminé[17]. L'accent est alors mis sur un aspect prédictif de l'ED elle-même : on a alors l'ordre de grandeur de la variation de la vitesse et celui de l'intervalle de temps caractéristique du phénomène.

2.3. Jeu de cadres de rationalité et jeu de registres autour du registre graphique : quels apports pour les mathématiques ?

Dans l'illustration que nous étudions, le double passage entre cadres phénoménologique/mathématique, et entre registres analytique/graphique, **peut contribuer à consolider quelques notions mathématiques.** Pour illustrer notre propos, on s'appuie sur les graphes de l'évolution de la vitesse *v* en fonction du temps, en soulignant le fait que, depuis quelques années, l'institution encourage le développement des compétences graphiques, du moins au lycée.

Consolidation de la notion de valeur algébrique

Pour un mouvement donné, la valeur algébrique de la vitesse dépend du choix de l'orientation de l'axe vertical sur lequel on projette le vecteur vitesse considéré. La mise en concordance nécessite, on va le voir, la coordination de registres schématique et graphique. Considérons un mouvement avec vitesse dirigée vers le bas, comme c'est le cas dans notre exemple de chute de gouttelettes dans un fluide. L'orientation de l'axe vertical sera en général choisie vers le bas (voir schéma de l'Annexe 1), puisqu'alors la valeur algébrique du vecteur vitesse est positive : la représentation graphique de l'évolution de la vitesse correspond à des valeurs algébriques positives (ci-dessous, figure 1). À l'inverse, si l'orientation de l'axe avait été choisie vers le haut, la projection du vecteur vitesse, pour le même mouvement, aurait eu une valeur algébrique négative (représentation graphique de droite : figure 2.)

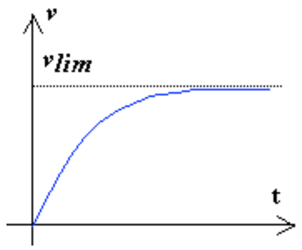


Figure 1

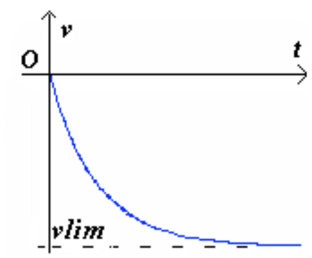


Figure 2

Lien entre registres graphique et analytique

Le graphe correspondant à la valeur $v_0 = 0$ (et $v_{\lim} > 0$), considéré comme illustration d'un aspect phénoménologique, peut servir de support visuel à la relation analytique $v(t) = v_{\lim}(1 - e^{-t/\tau})$ dont la forme est un classique de la physique[18].

Par ailleurs, un *couplage entre l'aspect prédictif de l'ED* (registre analytique) *et les solutions de l'ED* (représentation graphique), conduit à conforter la *conceptualisation de la*

---

[17] Pour notre exemple prototypique, λ= *k/m* et *b* = *g*.

[18] Même forme par exemple que celle de l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur quand il se charge à travers une résistance.

dérivée. Ainsi la détermination de l'accélération, par exemple à l'instant initial, entraîne un travail dans chacun de ces registres[19], et engage vers des activités de conversion, où le registre du langage naturel peut éventuellement jouer un rôle d'articulation. Le passage du graphique à l'écrit, rarement opéré, permet des opérations de vérification des activités cognitives et mathématiques.

Consolidation de la notion de valeur asymptotique

La valeur limite de la grandeur étudiée (ici la vitesse v_{lim}), est liée à la valeur des caractéristiques propres du système. L'observation d'un régime permanent, traduit de façon analytique (notion de valeur limite correspondant à $dy/dt = 0$, i. e. pour l'étude de la chute de la gouttelette, $dv/dt=0$) et de façon graphique (asymptote horizontale) permet de donner du sens[20] à ce qui est appelé « comportement asymptotique ».

Passage d'une famille de solutions à la solution

Parmi la famille de solutions possibles, c'est la connaissance de l'état du système à un instant donné qui permet d'identifier la courbe solution de l'ED. Autrement dit, dans le registre analytique, c'est la donnée (valeur de la grandeur à l'instant considéré, souvent l'instant initial) qui permet de déterminer la valeur de la constante d'intégration. Dans le registre graphique, spécifier ce qu'il est convenu d'appeler « les conditions initiales » – ici, la vitesse initiale - revient à fixer les coordonnées d'un point par lequel le graphe doit passer. Ainsi, deux valeurs différentes de la vitesse initiale correspondent à deux valeurs différentes de la constante d'intégration mais la valeur asymptotique, qui dépend des caractéristiques propres du système, reste inchangée.

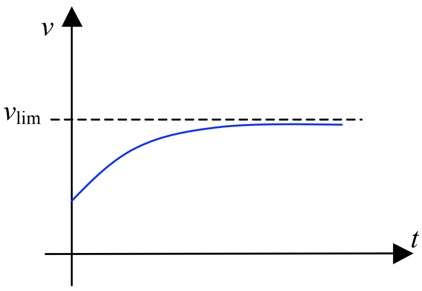


Figure 3

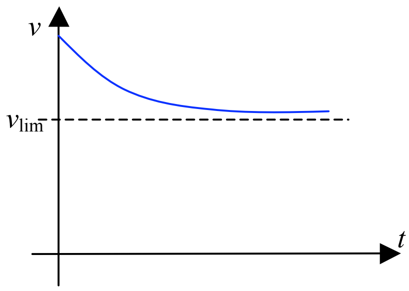


Figure 4

Sur la figure de droite est reportée l'évolution de la vitesse quand la vitesse initiale est inférieure à la vitesse limite (une approche qualitative serait semblable à celle développée antérieurement pour une vitesse initiale nulle, en début du paragraphe 2). Si la vitesse initiale est supérieure à la vitesse limite (on jette l'objet vers le bas avec une vitesse assez élevée, cas correspondant à la figure de gauche), la force de frottement initiale a une norme supérieure à celle du poids[21]. L'accélération initiale est donc un vecteur dirigé vers le haut, et comme elle signe la variation de la vitesse, la valeur de la vitesse va diminuer. La norme de la force de frottement va diminuer aussi, jusqu'à ce qu'elle compense le poids. Alors, l'accélération sera nulle, la vitesse limite atteinte (on vérifie sur le graphe que la tangente à l'origine a un coefficient directeur négatif, ce qui est cohérent avec le fait que l'accélération a une valeur algébrique négative, puisque l'axe vertical est orienté vers le bas).

[19] Calcul, dans le registre analytique, de dv/dt à l'instant initial, connaissant la valeur de la vitesse initiale ; détermination du coefficient directeur de la tangente à l'origine, pour le registre graphique.
[20] L'aspect prédictif de l'ED conduit à $v_{\text{lim}} = mg/k$
[21] ou du poids apparent si la poussée d'Archimède n'est pas négligeable.

La richesse possible de l'approche graphique appuyée sur la phénoménologie[22] permet en particulier de travailler sur les images mentales, dans la mesure où elles sont souvent des représentations sémiotiques intériorisées, comme le souligne Duval (2006a). Dans cette partie traitant de l'exemple de la chute de la gouttelette dans un fluide, nous avons essayé de montrer que les aspects phénoménologiques peuvent être l'occasion, si on s'en donne le dessein… et le temps, de manipuler des relations et des graphes, avec une double occurrence : des possibilités de transformation au sein même de chaque registre, analytique et graphique, et des possibilités de passage entre registres et entre cadres, qui peuvent permettre – entre autres – de donner davantage de sens à certaines notions mathématiques.

3 – Hypothèses de recherche. Méthodologie

La thématique de recherche sur les équations différentielles correspond à des approches diverses, aussi bien au collège (Malafosse, 2001) qu'au lycée ou à l'université (Moreno, 2006). Parmi ces approches, plusieurs traitent des aspects conjoints mathématiques et physique (entre autres, Malonga, 2006, 2008, Malonga *et al.*, 2008, et Rogalski, 2006).

En ce qui nous concerne, la mise en place du module de physique de L1S1 engageait à suivre l'évolution des étudiants au bout d'un semestre, et ce, à plusieurs niveaux :

- au niveau d'une vision globale des équations différentielles et plus spécifiquement celles du premier ordre linéaires à coefficients constants et à second membre constant non nul,
- au niveau des phénomènes/systèmes physiques qu'elles modélisent,
- et pour ce qui est plus spécifiquement des registres sémiotiques, au niveau de l'articulation des aspects analytique, graphique et phénoménologique, impliquant un jeu de cadres physique-mathématiques.

Dans le module d'enseignement concerné, c'est en effet dans le cadre d'activités de modélisation portant sur le réel (du physicien) que les ED sont introduites, donc en liaison directe avec une phénoménologie. Notons toutefois qu'il s'agit d'un module théorique, sans partie expérimentale proprement dite : la phénoménologie est soit celle rencontrée auparavant et donc réévoquée, soit une phénoménologique rapportée sous forme de données expérimentales, sous forme de tableaux numériques ou de graphiques[23].

Le but du travail de recherche est ici axé sur la manipulation des ED (obtention, traitement, analyse des solutions) avec la mise en jeu de divers types de registres, et des cadres de la physique et des mathématiques. Nos deux hypothèses de base consistent à supposer :

- que l'articulation des registres formel et graphique est formatrice, avec une prégnance particulière du registre graphique, très visuel,
- que les caractéristiques d'un phénomène perceptible – telle la chute verticale d'une gouttelette dans un fluide – fondent un cadre d'intelligibilité pour les représentations graphiques et le formalisme associé (équations). Elles peuvent constituer une situation-type qui peut servir de référence pour l'analyse et l'interprétation d'autres situations conduisant à un modèle mathématiquement voisin. En d'autres termes, la liaison avec des phénomènes physiques peut, dans une certaine mesure, donner aux étudiants des moyens d'interprétation conduisant à une meilleure compréhension de la notion d'équation différentielle et à de meilleures compétences dans le contrôle des solutions mathématiques.

[22] Cet aspect graphique est précieux, si l'on songe au très petit nombre d'approches graphiques proposées antérieurement aux élèves dans les manuels de mathématiques de TS – au mieux, un seul graphe représentant diverses courbes solutions.…

[23] On peut donc parler à ce niveau de « phénoménographie » (Beaufils, 2009).

Nous avons, sur trois ans, fait passer des questionnaires auprès des étudiants en fin de module de premier semestre de première année[24]. Ces questionnaires, chaque fois un peu différents, comportaient tous un jeu de questions permettant d'obtenir des informations sur ce que les étudiants avaient retenu, à propos des ED1ASM, en termes d'équation-type, de graphe correspondant et de phénomène physique de référence.

Afin d'éviter de générer un « effet évaluation » et pour solliciter le plus librement possible les idées des étudiants, il était bien évidemment indiqué que le questionnaire était anonyme et servait, non pas d'évaluation individuelle, mais à un objectif d'évolution du module. D'autre part, les formulations des questions étaient tournées spécifiquement ; les libellés de nombreuses questions étaient du type : « *Quelle forme analytique est pour vous la forme « de référence » pour l'écriture d'une telle équation différentielle* » ou « *si vous aviez à expliquer…* »

Suivant les années, et sous l'effet de contraintes organisationnelles, les populations ont été plus ou moins nombreuses et plus ou moins ciblées. Ce qui nous paraît important, c'est qu'indépendamment de ces différences, le bilan de l'analyse au niveau de la cohérence formalisme-graphique-phénoménologie est – on le verra – globalement le même.

Q1 - Un premier questionnaire en janvier 2006. Les conditions de passation du questionnaire ayant été assez hétérogènes, nous n'avons finalement retenu ici que les réponses de 51 étudiants d'une même section (IFIPS).
Q2 - En 2006-2007, un questionnaire a été passé sous forme informatisée en utilisant Wims[25], et présenté aux étudiants comme « Questionnaire de fin de module de physique ». Une centaine d'étudiants ont répondu.
Q3 - En 2007-2008, un questionnaire papier-crayon, assez restreint, centré sur les questions de cohérence entre équation/solution analytique/représentation graphique/systèmes modélisés. Il a été passé auprès d'une quarantaine d'étudiants de la population MPI (Maths Physique Info).

Dans notre premier semestre de licence (L1S1), on distingue en fait trois sections : maths-physique-informatique (dite portail MPI) et physique-chimie-sciences de la Terre (portail PCST), qui regroupaient cette année-là de l'ordre de 300 étudiants. Ni le portail s'adressant aux étudiants incluant de la biologie (BCST) ni la filière Ingénieurs IFIPS n'étaient concernés par le questionnaire Q2.

4 – Analyse des questionnaires en termes de registres sémiotiques

4.1. Écriture de l'ED : registre analytique formel

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, la forme canonique utilisée en mathématiques en classe de TS ($y' = ay + b$) n'est pas celle utilisée à l'université : que ce soit en physique ou en mathématiques[26], la forme couramment utilisée en licence pour les ED du premier ordre, est $y' + ay = b$ et plus généralement du type $f(y', y) = g(t)$.

Résultats des questionnaires

Le premier questionnaire Q1 comportait une question ouverte concernant la forme analytique de l'écriture d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre. Il a permis

[24] Nous avons également fait passer quelques questionnaires en début d'année, que nous n'évoquerons pas ici.
[25] Plate-forme WWW Interactive Multipurpose Server. Avec la participation de Mme Bernadette Perrin-Riou, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.
[26] En mathématiques, dans notre université, l'étude des ED n'est pas abordée durant le premier semestre de licence L1S1 (sauf enseignement optionnel), mais après.

de mettre en évidence que la forme de mathématiques de TS se révélait être encore une réponse fréquente en fin de module L1S1. Dans le questionnaire de l'année suivante, Q2, nous avons inclus une question fermée sur ce point (encadré ci-dessous, figure 5).

Quelle forme est pour vous la forme « de référence » pour une ED1ASM utilisée en physique ? (y' désignant la dérivée par rapport au temps de la fonction y)		
$y' = ay + b$,	$y' = ay$,	$y' = y + 1$
$y' + ay = b$,	$y' + ay + b = 0$,	$y' = f(y)$ (*f désignant une fonction quelconque)*

Figure 5 - Extrait du questionnaire Q2

Des réponses empreintes de « réminiscence de formes »…

Sur l'ensemble des 105 réponses obtenues, une première observation s'impose : pour l'identification d'une forme symbolique analytique correspondant à une telle ED, le taux d'erreur est faible[27].

Pour le choix de la forme analytique de l'ED, la forme vue en mathématiques en TS reste très prégnante. En effet, la répartition entre les diverses formes analytiques proposées se fait globalement à égalité entre la forme effectivement utilisée en physique durant le semestre L1S1 où il a été souvent question de « second membre constant (non nul) » et la forme utilisée en mathématiques en TS (voir figure 6).

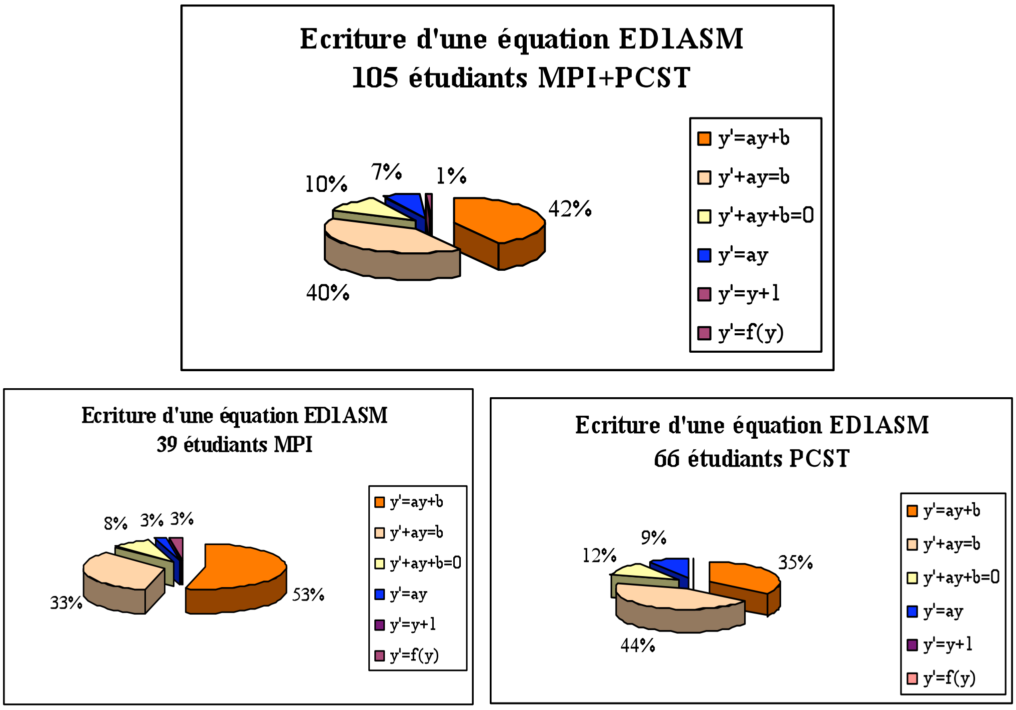


Figure 6

Le fait est encore plus net si on isole, au sein de cette population de 105 étudiants, les 39 étudiants qui sont inscrits en section maths-informatique -MPI – (voir figure) : c'est alors plus de 50% des réponses pour la forme utilisée en TS. On peut supposer que des étudiants ayant choisi une pré-orientation maths-informatique, se placent spontanément, même quand il s'agit

[27] Taux d'erreur inférieur à 10% (la réponse erronée la plus courante est $y'=ay$). Quant à la forme $y'= y+1$, proposée comme cas particulier, elle n'a jamais été choisie.

d'une situation liée à la physique, selon le point de vue des mathématiques[28]. Quant aux 66 étudiants inscrits en physique-chimie (PCST), il y en a encore le tiers à considérer comme forme de référence celle utilisée en mathématiques de TS.

4.2. Solutions de l'ED

La loi d'évolution d'une grandeur physique, solution d'une ED1ASM, présente une limite asymptotique (assimilée par les physiciens au régime stationnaire[29]). Ce comportement caractéristique se traduit dans la forme analytique de la solution, somme de deux ou trois termes dont un est constant et, de façon particulièrement manifeste, dans la représentation graphique par une asymptote horizontale. Un des objectifs des questionnaires était d'avoir des éléments d'appréciation pour savoir dans quelle mesure ces caractéristiques et leur cohérence globale avaient été assimilées par les étudiants.

Caractéristiques des solutions d'une ED1ASM

Allure des solutions dans le registre graphique

Avec la question « *Si vous vouliez dessiner l'allure d'une solution-type pour montrer ses caractéristiques, quel graphique feriez-vous ?* », le questionnaire Q1 a permis de récolter 51 graphiques tracés papier-crayon par les étudiants. Une vingtaine, soit 40%, comporte un tracé d'allure pour lequel, quand le temps est grand, la grandeur tend (de façon croissante ou décroissante) vers une valeur limite non nulle. Mais il y en a autant, soit 40%, qui montrent une exponentielle décroissante qui tend vers zéro – solution d'une ED1 homogène. Ce résultat affichait la même tendance que celle observée lors les évaluations académiques, et qui nous avait alertés.

L'année suivante, le questionnaire Q2 a permis de recueillir 80 graphes exploitables. Il était demandé de tracer le graphe correspondant à des solutions de l'ED1ASM [30]. La moitié des réponses correspondent à des réponses non correctes, qui sont de deux types : 22 réponses (25% du total) présentent une forme exponentielle « décroissante » avec asymptote en $y = 0$, qui correspond en fait aux solutions d'une ED1 homogène. Et autant de réponses (25% du total) consistent en une exponentielle de type $e^{\lambda t}$ ou $-e^{\lambda t}$; or une modélisation par une forme exponentielle exp(kt) avec $k > 0$ correspond, quand il s'agit d'une évolution temporelle, la variable t n'étant pas bornée, à une valeur de la grandeur tendant vers l'infini, donc à une « divergence », ce qui ne répond, dans les faits, à aucune situation physique d'évolution d'un phénomène physique au cours du temps.

Le troisième type de réponse, qui concerne un peu plus du tiers des étudiants, correspond à un graphe correct, avec une asymptote horizontale. Comme on peut le voir sur la figure de l'Annexe 2, ces graphes corrects se répartissent à égalité entre ceux où, à l'instant initial, la valeur de l'ordonnée est nulle, et ceux où la valeur de l'ordonnée est positive mais inférieure à la valeur de l'asymptote ; dans ces cas, la courbe est croissante[31]). Les graphes correspondant à une valeur initiale de l'ordonnée inférieure à la valeur de l'asymptote ne concernent que le cinquième des réponses correctes.

L'année suivante (Q3), les réponses papier-crayon sur le même sujet ont concerné 42 étudiants, parmi les meilleurs de la promotion. On a recueilli 75% de réponses correctes, avec

[28] Du moins, telle qu'elle a été vue par eux jusqu'ici puisqu'en mathématiques c'est bien la forme $y' + ay = b$ qui est utilisée à l'université, mais les étudiants ne la verront qu'en second semestre de licence (L1S2).

[29] Voir ce qui a été dit au paragraphe 2.2 sur la différence de point de vue entre mathématiciens et physiciens.

[30] Le tracé se faisait sur l'écran grâce à la souris, et était stocké en mémoire

[31] Bien évidemment, le terme exponentiel est toujours décroissant. Le passage du cas particulier détaillé au chapitre 2 ($v_0=0$), au cas général ($v_0 \neq 0$) peut s'écrire $v(t)= v_{lim}\,(1- e^{-\frac{t}{\tau}}) + v_0 . e^{-\frac{t}{\tau}} = v_{lim} + (v_0 - v_{lim})\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

évolution de la grandeur y vers une asymptote non nulle[32]. Les autres réponses regroupent la traditionnelle exponentielle décroissante vers zéro (10 réponses) et une courbe divergente, croissant vers l'infini (3 réponses).

Ceci conforte notre résultat précédent : l'allure caractéristique des courbes correspondant aux solutions d'une ED1ASM n'est pas assimilée par l'ensemble des étudiants de fin de premier semestre de licence, alors même qu'elle constitue déjà un point du programme au lycée, en TS, aussi bien en mathématiques qu'en physique

Évocation de l'allure du graphe dans le registre langage naturel

Il nous avait semblé intéressant, avant même de demander de tracer la représentation graphique (et avant de faire expliciter la relation formelle analytique des solutions), de faire en sorte qu'une première réponse concernant les solutions soit formulée dans le troisième registre disponible, celui du langage naturel. Le questionnaire Q2 a donc inclus une question ouverte sur la traduction en langage naturel de l'allure du graphe, non tracé, et dans un cadre qui se voulait décontextualisé.

> *Soit y(t), une fonction solution d'une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre constant non nul (ED1ASM).*
>
> *Décrivez en quelques mots l'allure d'un graphe d'une fonction y(t), en précisant ce qui, dans ce graphe, est caractéristique d'une solution d'une ED1ASM.*

L'objectif est notamment de savoir si les étudiants évoquent clairement l'existence d'une limite finie non nulle pour la grandeur étudiée avec une « allure d'exponentielle décroissante » vers la limite[33].

Parmi les 90 réponses fournies par des étudiants PCST-MPI primants[34] et non-primants, 85 % usent du mot « exponentielle » - sans plus de précision- mais ils ne sont que 10% à citer le mot « limite » … Ce résultat est à relier à la difficulté reconnue de l'utilisation de la langue naturelle en mathématiques, et plus précisément ici à l'exigence de verbaliser à partir de propositions non-discursives, qui plus est non tracées concrètement, et alors même qu'en ce qui concerne la notion de « limite », on peut considérer que le graphe n'est qu'une représentation tangible d'un idéal.

Registre formel analytique

La deuxième partie du questionnaire Q2 portait sur l'expression analytique de la solution correspondant à l'équation que l'étudiant(e) avait notée en première partie, et qui lui était rappelée sur l'écran de l'ordinateur.

> *À propos de l'écriture d'une solution d'une équation différentielle ED1ASM,*
> *quelle forme est pour vous la forme « de référence » pour une ED1ASM utilisée en physique ?*

Parmi les 44 étudiants de PCST (primants et non-primants) qui ont répondu[35]…

- un quart des étudiants répondent à cette question en réécrivant la forme de l'équation différentielle elle-même… il est vrai que la formulation de la question aurait dû reprendre le titre complet de la ligne du dessus et mentionner « *forme de référence pour une solution d'une ED1ASM* » …
- un tiers donnent une réponse ne comportant qu'un seul terme « oubli » de la valeur limite

[32] Si l'on s'intéresse à la cohérence solutions graphiques-solutions formelles, seules 20 de ces 29 réponses sont acceptables.

[33] La fonction peut être croissante ou décroissante vers l'asymptote, mais dans les deux cas, le terme « exponentiel » est décroissant (argument négatif).

[34] Primants : étudiants inscrits pour la première fois.

[35] Un souci d'informatique a limité le nombre de réponses obtenues, en particulier pour les MPI.

pour y),
- un tiers seulement écrivent une relation avec deux termes.

Et dans ce dernier cas, on observe beaucoup d'erreurs de signe (sur l'argument de l'exponentielle, sur la valeur limite…)

Cohérence globale

La cohérence au sein du registre formel, entre forme de l'équation différentielle et formule solution ($y' = ay + b$ et $Ce^{at} - b/a$, $y' + ay = b$ et $Ce^{-at} + b/a$ …) n'existe dans le questionnaire Q2 que pour quelques cas. Les réponses obtenues à partir du questionnaire Q3, où ce sont les meilleurs étudiants de la promotion MPI qui ont répondu, donnent la même impression : un peu plus de la moitié des étudiants (29 sur 47) donnent une solution en cohérence avec leur écriture de l'équation différentielle (sinon, on trouve des solutions avec exponentielle mais incorrectes). Il nous paraît clair que la proximité des formes et l'implicite des signes engendrent des confusions, en particulier concernant le signe de l'argument de l'exponentielle.

Pour ce qui est de la cohérence globale forme analytique de l'ED - formes analytique et graphique des solutions, cela semble relever de l'impossible…

4.3. À propos de phénomènes physiques

Choix, en physique, d'un phénomène de référence

L'un des objectifs des questionnaires était de savoir si les étudiants avaient gardé un exemple de physique qu'ils considéraient comme typique (prototypique). Le questionnaire Q2 a touché, sur ce thème, 79 étudiants.

> *Les équations différentielles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants, avec second membre constant non nul se rencontrent dans la modélisation de divers phénomènes en physique.*
>
> *À quel phénomène physique pensez-vous ? Soyez le plus précis possible dans votre réponse.*

Les réponses peuvent être catégorisées comme suit, selon le phénomène cité (entre parenthèses, nombre d'étudiants ayant fait cette réponse, sur un total de 79) : désintégration radioactive (35), condensateur (14), chute des corps (6), ressort ou autres oscillations (13), divers - justes ou erronés - (11). Ces réponses à propos du modèle physique semblent porter l'empreinte de L1S1 : cette année-là, les illustrations de radioactivité ont en effet été nombreuses. Cependant, et la nuance est d'importance, on a remarqué qu'il n'y avait aucune précision dans les réponses qui citent seulement « radioactivité » ou « décroissance radioactive »[36]. Or ces expressions peuvent faire référence à l'évolution de (au moins) deux grandeurs (voir schémas en Annexe 3). Ainsi, dans le cas où il s'agit d'une décroissance d'un noyau père A vers un noyau fils B non radioactif[37] , on étudie soit l'évolution temporelle du nombre de noyaux père $N_A(t)$, gérée par une ED homogène, et dont la solution est une exponentielle « décroissante » (cas vu en physique en Terminale) soit l'évolution temporelle du nombre de noyaux fils $N_B(t)$, gérée par une ED1ASM. Faute de précisions dans les réponses des étudiants, on ne peut savoir si elles sont ou non pertinentes. En tout état de cause, on peut légitimement craindre que le cas dit « de la radioactivité » corresponde implicitement au cas de la décroissance radioactive du noyau père, ce qui ne constitue pas dans notre cas une réponse correcte. Il en est de même pour la réponse « condensateur » : le

[36] et ce malgré notre demande de réponse précise… mais le questionnaire était long…

[37] Si le noyau B est lui-même radioactif (cas des filiations radioactives), l'évolution du nombre de noyaux B, NB(t), est gérée par une ED du premier ordre avec second membre non constant, de la forme g(t). Voir Annexe 3.

cas de la charge d'un condensateur est un exemple pertinent (ED1ASM), mais pas la décharge à travers une résistance (ED homogène).

On note que très peu de réponses font référence au cas de la chute verticale dans un fluide, qui a pourtant déjà été abordée au lycée, et qu'on peut considérer comme l'illustration d'une réalité tangible relativement facile à se représenter… L'année suivante, sujet de problème, puis sujet d'examen partiel ont été proposés sur ce thème. Et pourtant, lors du questionnaire Q3, en réponse à la question sur le choix du modèle physique, la phénoménologie du condensateur arrive largement en tête (30 réponses), puis la radioactivité (12 réponses) et seulement 2 réponses pour l'exemple de la chute freinée. Il est intéressant de noter ici que l'exemple de la mécanique n'est pas retenu, et que, de plus, pour ceux qui l'évoquent, la compréhension n'est pas suffisante puisque les deux réponses sont fausses du fait d'une confusion vitesse-position. Ce constat correspond à ce que l'on connaît par ailleurs : la mécanique newtonienne permet de rendre compte de phénomènes « concrets », mais est en tension avec les conceptions « spontanées ».

Au vu de ces résultats, on est amené à penser que l'hypothèse H2 - les caractéristiques d'un phénomène perceptible constituent un cadre d'intelligibilité - n'est pas valide, du moins dans les conditions d'enseignement qui avaient été celles des étudiants pendant le semestre…

Critères d'acceptation d'un comportement à même de modéliser un phénomène physique

Une des dernières questions posées aux étudiants (questionnaire Q2) avait pour objectif de compléter les informations déjà recueillies en faisant émerger les critères d'acceptation d'un comportement pouvant modéliser un phénomène physique.

Dans la troisième partie du questionnaire Q2, qui présentait plusieurs graphiques, on demandait si chacun d'eux pouvait ou non correspondre à la modélisation d'un phénomène physique. Le critère principal attendu – vu le contenu du module – était celui de non divergence. Il n'y a que la moitié des étudiants pour répondre que le graphe proposé (voir ci-dessous figure 7) ne peut pas correspondre à une solution physique (31 réponses sur 68), un quart déclarent ne pas savoir.

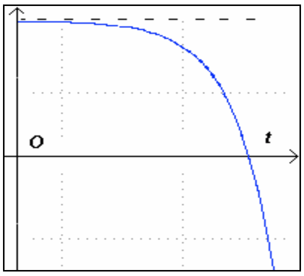


Figure 7

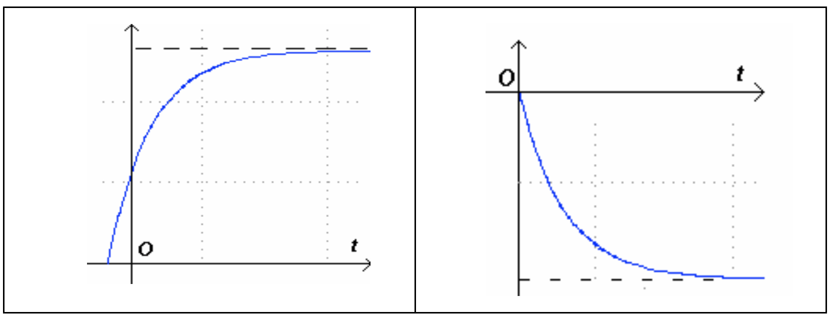


Figure 8 - Exemples de graphiques parmi ceux proposés à la 3ème question (Questionnaire Q2)

Parmi les autres éléments cherchés, figurait le critère lié à l'origine du temps. Le taux de réponses correctes chute de plus de la moitié (passant de 87 à 25%) quand on fait apparaître, sur une figure donnée, une portion de courbe en temps négatif (figure 8, figure de gauche).

Pour la figure de droite (figure 8), seuls 63% d'étudiants la déclarent comme pouvant correspondre à la modélisation d'un phénomène physique. On peut y voir un effet néfaste du choix habituel de situations/représentations prototypiques, où les grandeurs sont couramment choisies de façon à n'utiliser que le quart supérieur droit de l'espace graphique (valeurs algébriques positives)…

5 – Conclusion

Le constat global que nous retenons de ces investigations est qu'il semble bien qu'à chaque registre est associée une représentation « prototype », mais ce, de façon indépendante :

- pour le registre formel, une forme d'équation type est privilégiée - souvent celle vue en mathématiques de terminale, qui reste très prégnante,
- pour le registre graphique, un tracé est privilégié - mais ne correspond pas à l'équation donnée ; l'allure caractéristique des courbes correspondant aux solutions d'une ED1ASM n'est pas assimilée par l'ensemble des étudiants de fin de premier semestre de licence,
- et pour le référent empirique, un phénomène particulier physique est cité - mais qui ne correspond pas nécessairement aux caractéristiques de la solution…

Comment contribuer à rendre plus cohérente cette approche des ED du premier ordre ?

Un travail spécifique pourrait être intégré dans l'enseignement de physique de façon à rendre plus visibles l'existence et la coordination des registres, et à expliciter les liens entre cadres (phénoménologie/mathématiques) :

- aspect phénoménologique, fondé sur les caractéristiques des phénomènes physiques étudiés (régime transitoire, régime permanent, influence des paramètres, conditions initiales),
- registre graphique, basé sur la forme des graphes des solutions (types de monotonie, asymptotes, coefficient directeur à l'origine, place par rapport aux axes…).
- registre formel analytique des expressions des équations différentielles et de leurs solutions (manière de les écrire, justification des formes adoptées, rôle du "second membre", aspects linéaires, superpositions de solutions…).

Cela nous amène à proposer/préciser quelques *points de repère* aux enseignants pour aider un certain nombre d'étudiants à *« négocier » la rupture entre lycée et université*. Pour un rappel, voire un recadrage de la manipulation de l'équation différentielle du premier ordre avec second membre constant non nul, trois aspects complémentaires peuvent ici entrer en jeu :

1 - le formalisme analytique : la forme utilisée pour l'ED en mathématiques au lycée, $y' = ay + b$, est justifiée par des raisons principalement liées au choix de l'introduction de la fonction exponentielle, et doit être prise explicitement en compte si l'on veut passer à une présentation en « premier et second membre » telle que pratiquée à l'université (lien avec les aspects de linéarité) : il y a là une transition à négocier[38].

2 - Une approche plus « épistémologique » du point de vue de la physique, viserait une analyse plus centrée sur la sémantique et le lien avec le champ théorique de référence[39].

[38] Ce hiatus existe déjà en classe de terminale S entre l'enseignement de mathématique et celui de physique où la séparation disciplinaire l'emporte sur la cohérence des pratiques (Malonga, 2008).

[39] En effet, en mécanique newtonienne, la seconde loi de Newton ($F = ma$) conduit à écrire une équation différentielle sous la forme $y'' =\ldots$ ou, exprimée en fonction de la vitesse, sous la forme $y' = \ldots$, mettant dans le

Le champ d'élaboration de l'équation différentielle est alors à distinguer explicitement du champ de traitement (qui, lui, relève des mathématiques et peut/doit faire appel à une systématique d'écriture et de technique).

3 - La modélisation mathématique d'un phénomène physique, en soulignant la distinction entre les paramètres du modèle et les conditions initiales, qui pourrait être plus clairement opérée et mise en regard des aspects mathématiques (ensemble de solutions et « choix » de la valeur de la constante d'intégration). Dans ce contexte, la coordination entre représentation graphique et représentations discursives peut jouer un rôle important : le lien avec la nature du phénomène physique peut être systématiquement travaillé : grandeur non divergente, limite finie pour t → ∞, existence d'une asymptote horizontale non nécessairement confondue avec l'axe des abscisses ; ceci pourrait être envisagé sur des exemples où l'on peut simplement et naturellement faire varier la condition initiale ou les paramètres. Dans le même ordre d'idées, il convient de veiller à ce que la variété des exemples donnés, et la complexité sous-jacente des illustrations en connexion avec le réel, ne finisse pas par occulter les connaissances de bases relatives au traitement de l'ED du « 1er ordre à coefficient constant », qui n'est pas forcément vu sous un angle global et synthétique, comme on peut le déduire de l'analyse des réponses à nos questionnaires…

On peut ainsi préconiser un temps d'approche synthétique, qui donnerait à faire des liens (les points communs, les différences) entre formes des ED, modes de résolution et formes de solutions, en utilisant conjointement différents registres sémiotiques. Nous présentons ainsi, en Annexe 3, un exemple qui s'appuie sur ce que Duval appelle la reconnaissance discriminante (Duval, 2006b) - trois situations physiques (correspondant ici au même phénomène, la radioactivité) - et qui montre à la fois la variation de l'écriture algébrique d'une ED et la variation correspondante dans le registre graphique[40]. L'utilisation en parallèle du langage naturel, oral et/ou écrit, contribue à la justification des savoirs mathématiques sur ces situations physiques.

Il serait utile, pour mettre l'accent sur le rôle des représentations sémiotiques dans la construction des concepts, d'analyser plus en profondeur comment fonctionne chacun des registres sémiotiques, en particulier en cherchant à en identifier, pour certains cas, des éléments signifiants spécifiques et en cherchant des éléments d'appréciation pour mieux comprendre comment se fait le passage entre ces registres. Dans ce contexte, une nouvelle hypothèse, à tester, serait de chercher, en physique, à valoriser systématiquement à la fois l'approche d'un phénomène « prototype », qui serve de référence, et la phase de décontextualisation[41]. Une illustration de physique, dont on aura pris soin d'approfondir l'analyse, peut *a priori* servir de référence et contribuer à donner du sens à certains concepts mathématiques, en les incarnant (voir notre approche de la chute verticale dans un fluide, on peut aussi aborder des problèmes de radioactivité…).

Il nous semble que l'évolution du profil des étudiants encourage à développer aussi un travail sur les modes d'évaluation, qui constituent un des moyens de piloter partiellement, en amont, les modes d'apprentissage des étudiants. Tous ces aspects conduisent évidemment à poser la question de la formation initiale et continue des enseignants du supérieur.

« membre de droite », la cause des variations de vitesse. En électricité, l'étude d'un circuit RC ou RLC, suivant l'application de la loi des mailles (addition des tensions) conduit directement à une relation de la forme $f(y,y',y'')$ = constante avec le « fameux second membre ». Il y a là deux aspects épistémologiques de l'explication en physique : soit la recherche de « causes externes », soit la recherche de « relations internes », ces deux aspects étant souvent développés alternativement, et parfois, ensemble (Halbwachs, 1973).

[40] Suivant le même principe, on peut envisager un temps de présentation synthétique mettant en parallèle les ED du premier ordre et celles du second ordre.

[41] sans pour autant négliger la phase de recontextualisation, où l'apprenant fonctionne aussi par analogie, et développe des capacités d'initiative voire de contrôle.

Claude Cabot
IPN, Université Paris-Sud 11, Orsay
cabot@ipno.in2p3.fr

Daniel Beaufils
DidaScO, Université Paris-Sud 11, Orsay
daniel.beaufils@u-psud.fr

Références

Beaufils D. (2009). Le modèle et son phénoménographe. *Aster,* n°48 (à paraître).

BOEN (2001). Programme officiel mathématiques série TS, Bulletin officiel n°4, août 2001.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherche en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-266.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne : Peter Lang.

Duval R. (2006a). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII[e] colloque de COPIRELEM.* p. 67-89, IREM de Strasbourg

Duval R. (2006b). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numero Especial pp. 45-81. Clame (Mexico : Cinvestav-IPN).

Halbwachs F. (1973). L'histoire de l'explication en physique. In *L'explication dans les sciences*, J. Piaget dir., p72-102, Flammarion, Paris.

Lerouge A. (1992). *Représentation cartésienne, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez les élèves de collège*. Thèse de doctorat. Université de Montpellier II.

Malafosse D., Lerouge A. et Dusseau J.-M. (2001). Étude en inter-didactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : changement de cadre de rationalité, *Didaskalia* n°18, p. 61-98.

Malafosse D. (2002). Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique. *Recherches en didactique des Mathématiques,* vol 22, N°1, 31-76.

Malonga F. (2006). L'enseignement des équations différentielles à l'interface mathématiques - physique dans l'enseignement secondaire français. In Actes du colloque Espace mathématique francophone, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, volume 7.1.

Malonga F. (2008). *Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France.cas des équations différentielles du premier ordre*. Thèse, Université Paris 7 ou http://www.didasco.u-psud.fr/Documents/These_MalongaMoungabio08.pdf

Malonga F., Beaufils D. et Parzysz B. (2008). Les équations différentielles du premier ordre en physique en Terminale Scientifique : le lien avec les mathématiques en question Bulletin de l'Union des Physiciens BUP n° 904, p647-666

Moreno J. (2006). *Articulation des registres graphique et symbolique pour l'étude des équations différentielles avec Cabri Géomètre. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel*. Thèse. http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/theses/recentes/moreno

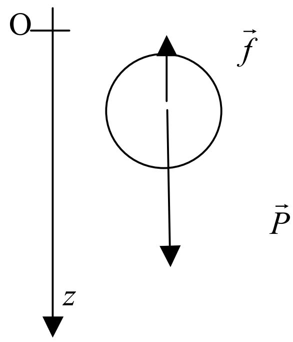
Perrin-Glorian M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol 9, 67-82, IREM de Strasbourg.

Rogalski M. (2006). Le rôle des mathématiques dans la mise en équation différentielle en physique : les procédures de l'accroissement différentiel dans les deux disciplines. Journée de l'IREM de Lille.

Tourna G. (2008). Activité cognitive d'interprétation. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 13, 93-111, IREM de Strasbourg.

Winsløw C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 12, 189-204, IREM de Strasbourg.

Annexe 1. Modélisation de la chute freinée : mouvement de gouttelettes dans l'air



Référentiel du laboratoire supposé galiléen.
Schématisation et bilan des forces sur le système

$\vec{P} = m\vec{g}$ *(on néglige ici la poussée d'Archimède)*

$\vec{f} = -k\vec{v}$

Application de la seconde loi de Newton :

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$

Choix d'un axe de projection : Oz.

Équation différentielle du second ordre sur la position : $ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} = mg + f_z$

Équation différentielle du premier ordre sur la vitesse : $m\dfrac{dv_z}{dt} = mg - kv_z$

Le schéma représente une gouttelette disposant d’une vitesse verticale orientée vers le bas : la force de frottement fluide est donc verticale et orientée vers le haut.

Annexe 2. Types de graphes non divergents produits par les étudiants

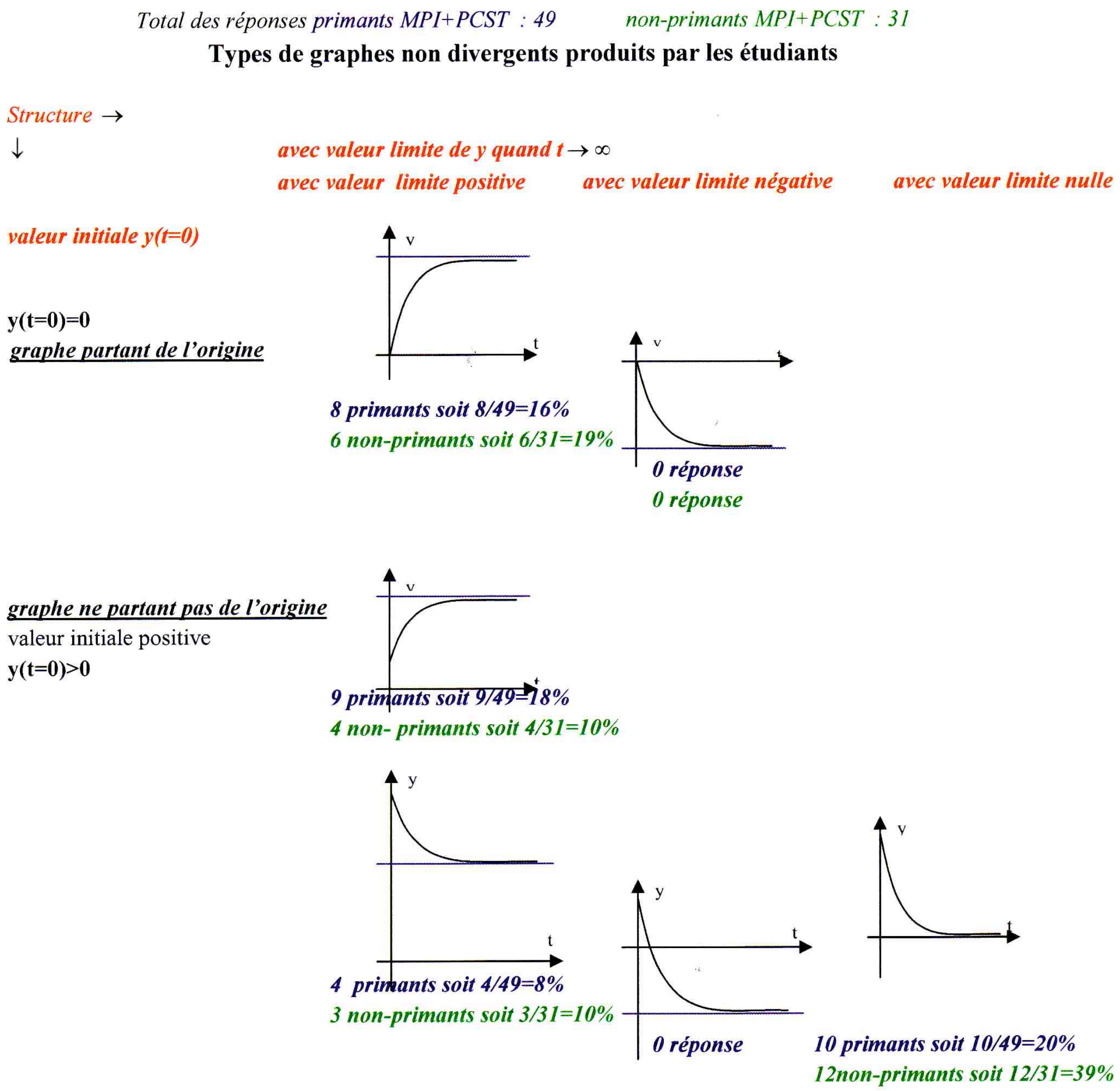
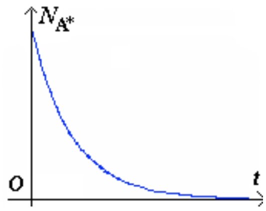


Figure rassemblant les différents graphes non divergents proposés par les étudiants lors du questionnaire Q2. Pour en faire une présentation synthétique, on a classé les graphes selon y_0, valeur initiale de la grandeur y (première ligne, y_0 nulle, seconde ligne y_0 positive).

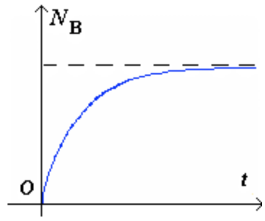
En bas, à droite : forme exponentielle « pure » décroissante correspondant à 22 réponses (soit 25% des réponses), qui constituent en fait une réponse non correcte dans le cas envisagé des ED avec second membre constant non nul (et seraient une réponse correcte à une ED1 homogène).

Annexe 3. Représentations graphiques de phénomènes expérimentaux : opportunité d'une approche synthétique

Décroissance radioactive : un phénomène physique, diverses situations, une reconnaissance discriminante du point de vue registres sémiotiques.



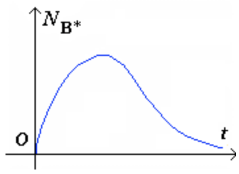
$y' + \lambda y = 0$



$y' + \lambda y = b$

A* → B

Noyau père — Noyau fils stable



$y' + \lambda y = f(t)$

A* → B*

Noyau père — Noyau fils radioactif

Évolution du nombre de noyaux présents en fonction du temps : schémas de principe avec $N_B(t = 0) = 0$ (voir commentaires dans la conclusion).