Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation

Richard Cabassut

Résumé

L'objectif de cette communication est de porter une réflexion théorique sur l'enseignement de la modélisation, dès l'école primaire. On étudiera les articulations entre le réel et les mathématiques, essentiellement dans deux étapes du processus de modélisation : construire le modèle et valider la solution réelle (qui est une interprétation de la solution mathématique). Ces articulations impliquent des connaissances, et des techniques qui ne relèvent pas du monde mathématique. À partir de l'étude de quelques exemples de mise en oeuvre en classe ou en formation, nous montrerons que dans le processus de modélisation, l'enseignement des mathématiques doit à la fois intégrer des connaissances et des techniques mathématiques, mais également des connaissances et des techniques extra-mathématiques : cette double transposition[1] questionne la nature des justifications des techniques utilisées et le contrat didactique réglant ces justifications.

Introduction

L'étude théorique est conduite à partir d'exemples de tâches de modélisation qui ont été produites dans le contexte du projet Comenius LEMA[2] Les informations prélevées sur ces tâches le sont soit dans le cadre d'une analyse a priori, soit grâce à des observations d'élèves lors de mises en oeuvre en classe, soit grâce à des observations de professeurs en formation ou de formateurs dans le cadre d'une formation à la modélisation pour professeurs d'école, également réalisés dans le cadre du projet LEMA. Dans un premier temps, on illustrera sur un exemple cette articulation entre le réel et les mathématiques mises en jeu dans la modélisation. Ensuite, on précisera la spécificité et la généricité de cette articulation en proposant deux éclairages théoriques : le cycle de modélisation de PISA et la théorie de la double transposition. Enfin, on précisera quelques problématiques de recherche.

Articulation entre réel et mathématiques sur un exemple

Illustrons sur un exemple l'articulation entre réel et mathématiques dans les étapes suivantes du processus de modélisation : construire un modèle du monde réel, traiter mathématiquement le problème, interpréter la solution mathématique en solution réelle et la valider.

---

[1] La notion de transposition renvoie aux travaux de Chevallard (1985) et celle de double transposition à Cabassut (2004). On peut estimer qu'en France, la modélisation est plus un objet paramathématique (au sens de Chevallard), c'est-à-dire n'est pas suffisamment désignée explicitement comme objet à enseigner. Dans d'autres pays, comme l'Allemagne, la modélisation est désignée explicitement comme un objet à enseigner, comme le montrent Garcia et al. (2007). Ici nous nous plaçons dans l'esprit de PISA et du projet LEMA qui désignent la modélisation comme un objet à enseigner. C'est sous cette hypothèse qu'il faut entendre ici l'expression « double transposition ». Nous expliquerons cette notion dans le corps de l'article.

[2] Le projet LEMA (Learning and education in and through modelling) est cofinancé par l'Union Européenne comme action Comenius 2-1. Des informations se trouvent sur le site www.lema-project.org. Le projet dure d'octobre 2006 à septembre 2009. Les représentants des partenaires du projet sont : Katja Maaß & Barbara Schmidt, University of Education Freiburg, Richard Cabassut, IUFM, Strasbourg, Fco. Javier Garcia & Luisa Ruiz, University of Jaen, Nicholas Mousoulides, University of Cyprus, Anke Wagner, University of Education, Ludwigsburg, Geoff Wake, The University of Manchester, Ödön Vancso & Gabriella Ambrus, Eötvös Lorand University, Budapest.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 235-244.

La tâche suivante a été proposée à une classe de CP (6-7 ans) : Les élèves de CP vont lire une histoire dans une classe de maternelle. Comment organiser cette lecture ?

Dans un premier temps les élèves doivent *construire un modèle du problème réel.* Indiquons au lecteur quelques informations sur le livre. Ces informations n'étaient bien entendu pas indiquées aux élèves. Le livre s'adresse à des élèves débutants en lecture. Il est constitué de 64 pages avec la couverture. La première de couverture est composée d'un dessin accompagné du titre du livre et du nom de l'auteur, la dernière de couverture contient un dessin et un résumé de l'histoire. La seconde page de couverture est blanche et est suivie d'une page qui reprend le titre et le nom de l'auteur. Puis suivent 61 pages (hors couverture) contenant soit un texte, soit un dessin sans texte, soit un dessin accompagné d'un texte. Le livre se termine sur une page où est écrit le seul mot « fin » suivi de pages blanches. Il y a 17 élèves dans la classe. Il n'y a aucune phrase à cheval sur deux pages. Un modèle consiste à ramener le problème à un problème de partage équitable d'un nombre d'objets (ici des pages à lire) en un certain nombre de parts (ici le nombre d'élèves de CP), avec éventuellement un reste. Ce modèle de partage équitable a déjà été pratiqué dans la classe et sera suggéré par des élèves au cours de la discussion. Cependant, dans la discussion qui a lieu en classe, des élèves proposent des modèles de partage qui ne sont pas équitables : des élèves pourront lire davantage de pages que d'autres, notamment s'ils ont envie de lire. Après discussion, orientée par le professeur, il est décidé de choisir le modèle de partage équitable du nombre de pages à lire. Ce modèle paraît plus « juste », chacun ayant le même nombre de pages à lire. Il n'a pas été proposé d'autres modèles, comme le partage équitable du nombre de mots à lire qui aurait montré la relativité de la notion de justice : est-il plus juste de se partager un nombre de pages ou un nombre de mots ? Remarquons que dans cette phase de construction du modèle certains arguments échangés sont extra-mathématiques : prise en compte des préférences (ceux qui aiment lire), situation déjà fréquentée pour le partage équitable, justice. Pour achever la construction du modèle il va falloir préciser les données dont on pense qu'elles sont utiles à la résolution du problème mathématique. Comme les élèves ont déjà rencontré des problèmes de partage équitable, certains évoquent le nombre d'élèves qui liront et le nombre de pages à lire. Tous les élèves se mettent d'accord sur le nombre d'élèves qui liront en choisissant le nombre d'élèves présents dans la classe au moment où ils se posent la question. On peut remarquer que ce nombre pourrait changer le jour où on ira lire effectivement dans la classe de maternelle. Mais aucun élève n'a envisagé cette difficulté. Par contre les groupes d'élèves feront des hypothèses différentes sur le nombre de pages à lire : certains compteront toutes les pages (même celles où il n'y a rien à lire) ; d'autres excluront la page de garde avec le titre du livre, celle du résumé, celle avec l'unique mot « fin », ou ne comportant que des illustrations. On voit donc que dans la construction d'un modèle, différents choix de modèles et d'hypothèses sur les données sont possibles : la justification de ces choix fait bien souvent appel à des arguments extra-mathématiques. Un exemple de modèle[3] mathématique du

[3] On peut se demander si le terme modèle n'est pas abusif, et s'il n'y a pas représentation plus que modélisation. Remarquons d'abord que nous évoquons la construction d'un « modèle mathématique du problème réel ». Un modèle mathématique d'un problème réel est donc un problème mathématique, simplifié par rapport au problème réel, qui est censé représenter le problème réel, et dont la résolution mathématique est censée permettre la solution du problème réel. Au départ, on est bien au niveau des intentions : on n'a pas la certitude d'une part qu'on saura résoudre le problème mathématique, et d'autre part que la résolution mathématique permettra une résolution du problème réel (il faudra encore franchir les étapes d'interprétation de la solution mathématique en solution réelle et de validation de cette solution réelle). Il est vrai qu'au niveau d'une classe de CP, les modèles restent très élémentaires. On considère ici qu'un modèle mathématique est une représentation simplifiée du problème réel, pour laquelle on pourra mettre en œuvre des techniques (qui pourront être justifiées mathématiquement) pour essayer de résoudre le problème (sans garantie de succès a priori) : dans notre exemple la distribution qui correspond à la correspondance terme à terme, le calcul pour vérifier que pour partager 49 pages entre 17 élèves, chaque élève reçoit 3 pages sauf deux élèves qui reçoivent deux pages car : 3x17=51 et 49+2=51 ; ou encore chaque élève reçoit 2 pages et il reste 15 pages car 2x17+15=49. Les expressions

problème est le suivant : comment partager 49 objets (ici des pages à lire qui seront représentées par les élèves par des cubes) de manière équitable en 17 parts (ici une part correspond à un élève) ?

Une fois son modèle et ses hypothèses précisés, chaque groupe d'élèves travaille sur *le traitement mathématique du problème mathématique* de partage équitable. Au niveau de cette classe de CP, différentes techniques de distribution sont proposées (un par un, deux par deux...), mobilisant différentes représentations de la situation (utilisation de cubes à distribuer pour représenter les pages, utilisation d'un dessin de la file des enfants auxquels sont associés des dessins de pages à lire). Nous évoquerons plus loin différentes techniques de prise en compte du reste de pages. Une solution mathématique est trouvée (ici le nombre équitable de pages lues par chaque élève avec éventuellement une procédure de lecture des pages restantes). Dans cette phase, les arguments et les techniques mobilisés sont en principe mathématiques.

Une fois la solution mathématique trouvée, il faut *interpréter la solution mathématique en solution réelle* dans la situation réelle. Ici l'interprétation est assez rapide car au niveau du CP les situations sont moins abstraites. Il faut réinterpréter les cubes ou les dessins dans la situation réelle.

Enfin, il faut *valider la solution réelle comme solution du problème réel et réfléchir.* Avec un critère pragmatique on peut effectivement distribuer à chaque élève les pages qu'il doit lire. Le succès de cette action validera ainsi la solution de partage équitable. Dans la classe de CP observée, chaque groupe a exposé sa solution. Certaines ont été rejetées car elles comportaient une contradiction par rapport à une hypothèse : on distribuait plus de pages que le livre n'avait, ou encore on ne lisait pas toutes les pages. L'invalidation reposait sur la mise en évidence d'une contradiction avec les hypothèses ou les conditions imposées par le problème. Les autres solutions retenues l'ont été par consensus, aucune contradiction n'étant mise en évidence. La différence entre solutions est relative au reste euclidien du nombre de pages à lire après avoir distribué le même nombre de pages à chaque élève. Dans une des solutions retenues quelques élèves doivent lire une page de plus par rapport aux autres pour que toutes les pages soient lues. Dans un autre cas, les pages de titre, de résumé de quatrième de couverture et la page avec le seul mot « fin » ont été prises en compte pour permettre à chaque élève d'avoir le même nombre exact de pages. On voit donc que la validation de la solution réelle peut se faire par une vérification empirique de la solution ou par consensus en l'absence de contradiction : on recourt à nouveau à des arguments extra-mathématiques. Notons que ces techniques de validation ou d'invalidation ne sont pas spécifiques à la modélisation. L'invalidation d'une démonstration mathématique peut reposer sur la mise en évidence d'une contradiction. Dans Cabassut (2005) nous avons montré que la validation d'une démonstration mathématique peut être réalisée par la cohabitation d'arguments mathématiques et d'arguments extra-mathématiques.

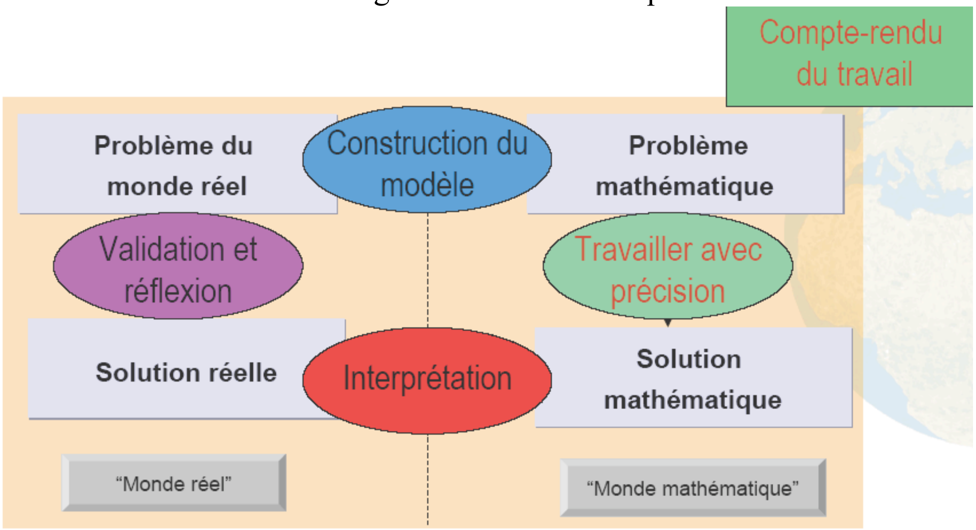
Au cours de la mise en commun collective, chaque groupe a pu *rendre compte de son travail.*

Nous allons maintenant éclairer théoriquement ces étapes pour mieux comprendre la problématique de l'articulation entre réel et mathématique**.**

« technique » et « justification mathématique de la technique » renvoient à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard. Si, par exemple, on décide de faire lire les élèves les uns après les autres, avec pour consigne qu'un élève s'arrête quand il est fatigué, en justifiant que certains se fatiguent plus que d'autres car ils ont des difficultés de lecture plus grandes, on conçoit donc l'équité non plus d'un point de vue mathématique, mais d'un point de vue psychologique ou cognitif. Les propos de cette note de bas de page sont bien entendu très discutables : rappelons que l'objectif de notre communication n'est pas de débattre des intéressantes notions de modèle et de modélisation, mais d'illustrer le phénomène de double transposition dans le processus de modélisation, au niveau de l'école primaire, à partir d'un cadre théorique adopté (et donc admis) : celui du cycle de modélisation de PISA.

Éclairage théorique sur la modélisation

Pour ce qui concerne la modélisation, nous adoptons le cycle de modélisation proposé par l'étude PISA (2006), elle-même inspirée par les travaux de Blum (1996), Schupp (1988), Niss (1999), Neubrand & *al.* (2001), et Pollak (1979), qui précise les étapes précédentes. Ce cadre théorique a été repris dans le cadre du projet Comenius LEMA de création d'une formation à la modélisation des enseignants de mathématiques.



L'étape « construire le modèle » est décrite par (PISA, 2006, p. 95-97, trad. R.C.[4]) en ces termes :

> « démarrer avec un problème situé dans la réalité, l'organiser en accord avec les concepts mathématiques et identifier les mathématiques importantes[5], ordonner graduellement la réalité à travers des processus comme faire des hypothèses, généraliser et formaliser, lesquels promeuvent les caractéristiques mathématiques de la situation et transforment le problème réel en un problème mathématique qui représente fidèlement la situation ».

L'étape « travailler avec précision » consiste à résoudre le problème mathématique. Les étapes d'interprétation, de validation et de réflexion consistent à

> « réfléchir au processus global de mathématisation et aux résultats. Ici les étudiants doivent interpréter les résultats avec une attitude critique et valider le processus global [...] Des aspects de ce processus de réflexion et de validation sont : comprendre les extensions et les limites des concepts mathématiques, réfléchir aux arguments mathématiques, expliquer et justifier les résultats, critiquer le modèle et ses limites » (PISA, 2006, p.96, trad. R.C.).

Il n'est pas dans notre intention de discuter ici de la pertinence du cadre théorique de PISA. Blum (1996, p. 18) propose par exemple un cycle de modélisation intercalant une étape passant par un modèle réel, entre le problème du monde réel et le problème mathématique. Le cadre théorique de PISA est donc plus simple et suffit à décrire les phénomènes que nous voulons mettre en évidence. De plus, c'est ce cadre théorique qui a été repris dans le projet LEMA. On pourrait également discuter des critères qui font que le problème mathématique « représente fidèlement la situation ». L'objet de cet article n'est pas d'étudier ces critères de

---

[4] Traduction de Richard Cabassut.

[5] Ici on a une difficulté pour l'école primaire où l'élève ne dispose pas encore de beaucoup de concepts mathématiques. C'est le cas de l'expérience du géant, que nous évoquerons plus loin, et pour laquelle les élèves ne disposaient pas du concept de proportionnalité. Il est vrai que PISA a essentiellement été pensé pour l'école secondaire.

fidélité. Il s'agit de montrer que les étapes du cycle de modélisation mettent en relation des connaissances et des techniques mathématiques (par exemple les techniques de partage équitable, ou de détermination de quatrième proportionnelle) et des connaissances ou des techniques du monde réel (par exemple savoir qu'il y a différents types de pages dans un livre, savoir que souvent le prix d'achat est proportionnel à la quantité achetée).

C'est dans cette articulation entre des connaissances et des techniques du monde réel et du monde mathématique que se situe la problématique de la double transposition (Cabassut, 2004). Dans Cabassut (2005, p. 403) nous avons illustré ce phénomène dans le domaine de la validation, où la validation mathématique s'articule avec la validation extra-mathématique. On retrouve, pour la modélisation, dans la construction du modèle, et dans la validation de la solution réelle produite, la cohabitation de connaissances, de techniques et d'arguments qui relèvent du monde mathématique et du monde réel.

Problématique de recherche

Nous allons illustrer cette problématique à partir de différents exemples.
La tâche suivante a été proposée à une classe de CM1 française.
Quelle est la taille approchée de la silhouette, dont on peut voir seulement un pied ?
Cette photo[6] a été prise dans un parc de loisirs.

Construire un modèle

Les élèves ne disposent pas du modèle expert de la proportionnalité et de ce point de vue cette situation peut être une situation-problème pour découvrir ce modèle. Concernant l'étape « construire un modèle » cette situation permet d'illustrer les points suivants.

Disponibilité du modèle

Soit les élèves disposent d'un modèle et ils doivent choisir dans le stock de modèles disponibles lequel ou lesquels s'accordent le mieux à la réalité. Quelles caractéristiques des modèles les élèves doivent-ils repérer ? (Et dans ce cas dans l'étude des modèles quelles caractéristiques sont-elles à mettre en avant ?) Quels éléments de la réalité les élèves doivent-ils repérer ? (Et dans ce cas quelles études de la réalité doit-on développer chez l'élève ?).

Soit les élèves ne disposent pas d'un modèle et ils doivent le construire et pour cela faire des hypothèses. Quelles hypothèses doivent-ils faire ? Comment former les élèves à faire les « bonnes » hypothèses ? On retrouve ici les compétences à développer dans le cadre des problèmes pour chercher de l'école primaire (DESCO, 2005). PISA (2006, p.98, trad. R.C.) distingue différents niveaux cognitifs :

- la compétence de reproduction qui « implique la reconnaissance, la remémoration, l'activation et l'exploitation de modèles familiers bien structurés ; l'interprétation en va-et-vient entre de tels modèles (et leurs résultats) et la réalité ; et une communication élémentaire sur les résultats des modèles » ;

[6] Photo publiée avec Copyright Richard Phillips 2001/2009 www.problempictures.co.uk

- la compétence de relation qui reprend la compétence précédente mais « dans des contextes qui ne sont pas trop complexes mais néanmoins différents de ce avec quoi les étudiants sont d'habitude familiers » ; la communication devient moins élémentaire ;
- la compétence de réflexion qui reprend la compétence précédente mais « dans des contextes qui peuvent être complexes et en grande partie différents de ce avec quoi les étudiants sont d'habitude familiers » ; l'interprétation en va-et-vient entre modèles et réalité : « collecte d'informations et de données, contrôle du processus de modélisation et validation des résultats du modèle. Ceci inclut aussi une réflexion à travers l'analyse, la critique et un engagement dans une communication plus complexe sur les modèles et la modélisation ».

Dans l'exemple de la classe de CM1, on est plutôt dans des compétences de réflexion et de connexion, puisque le modèle n'est pas disponible. On voit que c'est une activité cognitivement difficile, et qu'il faudra l'équilibrer avec des activités d'entraînement où le modèle disponible sera plus facile à choisir.

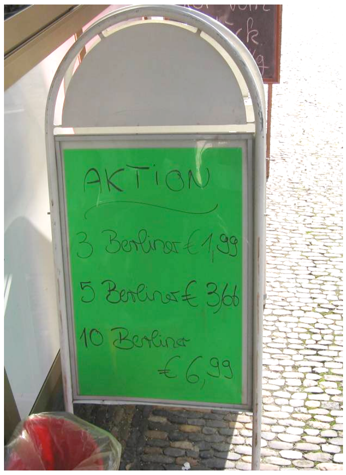
Connaissances du monde réel et hypothèses

Une des difficultés rencontrées par certains élèves est qu'ils n'ont pas de fréquentation sociale de certaines connaissances (comme la taille d'une personne adulte, la taille d'un pied d'adulte, l'évaluation de distances). Il en va de même pour certains modèles usuels du monde réel : la taille d'un individu est approximativement proportionnelle à celle de son pied, les dimensions sur une photo sont proportionnelles à celles de la réalité.

Dans cette situation ouverte, les élèves doivent impérativement faire des hypothèses supplémentaires pour pouvoir résoudre le problème. Il peut arriver que les hypothèses formulées soient contradictoires entre elles. Par exemple un groupe d'élèves a produit les démarches suivantes. Sur la photo on mesure 1cm pour le pied du bonhomme et l'homme mesure 7 fois son pied. Dans la réalité un pied mesure environ 30 cm et une personne environ 180 cm donc dans la réalité un homme est 6 fois plus grand que son pied. Il y a une différence de proportions entre la réalité et la photo ce qui contredit l'hypothèse de conservation des proportions dans une photo. Nous précisons bien « hypothèse de conservation des proportions entre la réalité et la photo dans une photo ». Nous savons que l'on peut modifier les dimensions d'une photo en opérant un agrandissement par exemple d'axe vertical (ce que certains professeurs effectuent parfois pour faire rentrer la photo dans une feuille A4 ; ce faisant ils détruisent la conservation des rapports entre la réalité et sa représentation sur une photo). Dans ce cas les proportions de longueur des chaussures (dans le sens horizontal) seront conservées alors que celles de hauteur des chaussures (dans le sens vertical) seront modifiées. Nous pouvons également remarquer sur la photo que les pieds des hommes sont en biais par rapport au plan de la photo. Mais aucun groupe d'élèves ne l'a remarqué.

Le choix des hypothèses et les raisons du choix sont très liées au contexte : nature du contexte, familiarité avec le contexte de la tâche, intérêt pour le contexte, composition du groupe d'élèves, moment de la tâche (dans la journée, dans la semaine, dans l'année ...), modèles mobilisables... Il est difficile d'expliquer à un élève qu'il n'a pas la liberté de faire certaines hypothèses car l'adoption d'un modèle implicite (ici rapport d'agrandissement constant entre la photo et la réalité) fixe ce rapport d'agrandissement dès qu'on émet une hypothèse sur une dimension de la réalité (en connaissant la dimension correspondante de la photo) : toutes les autres dimensions réelles sont alors fixées par rapport aux dimensions de la photo et on n'a plus de choix possible. Or il est assez difficile de savoir que les hypothèses choisies sont non contradictoires, aussi longtemps que l'on n'a pas rencontré de contradiction. L'histoire des mathématiques propose suffisamment d'exemples de preuves incorrectes qui ont tenu plusieurs années avant qu'on ne décèle de contradiction nécessitant un ajustement. Ce problème de la non contradiction n'est donc pas spécifique aux situations de modélisation.

Il peut arriver que le professeur lui-même ait une fréquentation insuffisante des modèles pratiqués dans la vie réelle, ce que nous illustrerons sur quelques exemples donnés en formation (Adjiage & Cabassut, 2008).

La tâche[7] du Berliner Anne est en vacances dans la forêt noire. Elle trouve une offre spéciale pour un type de pâtisserie appelé « Berliner » comme vous pouvez le voir sur la photo. Le boulanger propose le gâteau à 0,80 € l'unité. Si vous étiez le boulanger, auriez-vous proposé les mêmes prix sur l'affiche ? (On lit sur l'affiche : 3 Berliners 1,99 € ; 5 Berliners 3,66 € et 10 Berliners 6,99 €)		

Dans cette situation réelle il s'avère que de manière surprenante, il est moins cher d'acheter un Berliner isolé et trois fois un sachet de 3 Berliners, plutôt que d'acheter un sachet de 10 Berliners. On observe d'ailleurs que dans la vie réelle, l'achat en grande quantité n'est pas toujours meilleur marché à l'unité qu'en petites quantités. Il est donc certain que les modèles de proportionnalité ou de diminution du prix unitaire avec l'augmentation de la quantité achetée ne sont pas valables pour les Berliners. Sans doute d'autres modèles fondés sur les lois du marketing ou de la psychologie, justifient le choix de prix seuils comme 1,99 € sous le seuil psychologique de 2 € ou 6,99 € sous le seuil psychologique de 7 €. Il faudrait enquêter auprès du pâtissier pour connaître les justifications de ses choix de prix.

Comme on le voit à travers les exemples précédents, l'articulation entre réel et mathématique présente :

- des spécificités liées à la modélisation : les connaissances du monde réel (fréquentation des situations réelles, repérage des données pertinentes du monde réel, choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel), le lien entre le monde réel et les mathématiques (choix de représentation du monde réel, dans la réalité fréquentation de modèles mathématiques),
- des généricités communes à la résolution de problème (analogie entre le passage du problème réel au problème mathématique et les changements de cadres ou de registres en mathématiques, heuristique, traitement mathématique du problème mathématique, contrôle des solutions ...).

Valider une solution

Une difficulté apparaît dans les situations de modélisation lorsqu'on ne peut pas confronter la solution trouvée à la réalité. Dans l'exemple du pied du géant on ne dispose pas de la photo complète et le parc d'attractions se situe dans un pays étranger inconnu : la vérification expérimentale de la solution n'est pas possible.

[7] Photos aimablement mises à disposition par Katja Maass et les éditions Cornelsen, et extraites de : Maaß, Katja (2007): *Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen Scriptor (copyright).

La validation va donc s'effectuer uniquement sur des critères de non-contradiction (sachant que le fait de ne pas avoir découvert de contradiction ne signifie pas qu'il n'y en a pas) et de contrôle par le bon sens qui est étroitement lié à des connaissances sociales. Ce contrôle n'est pas évident et ne correspond pas à des critères mathématiques. Ici, un géant n'est pas sujet à fréquentation habituelle. Alors qu'en mathématiques, le contrôle de vérité sera un contrôle de cohérence déductive, le contrôle de bon sens sera un contrôle de plausibilité. Observons deux solutions proposées par deux groupes d'élèves.

Dans une première solution un groupe d'élèves a proposé les hypothèses et la solution suivantes. Sur la photo le pied du géant mesure 9 cm et le pied de l'homme 1 cm. Dans la réalité le pied d'un homme est environ 30 cm donc dans la réalité le pied du géant est 9 fois plus grand soit 270 cm. Or sur la photo l'homme a un pied de 1 cm et sa taille fait 7 cm donc il est 7 fois plus grand que son pied. Le géant a les mêmes proportions pied / hauteur donc sa hauteur est 7×270 cm = 1890 cm.

Dans une seconde solution proposée par un autre groupe d'élèves, sur la photo, le pied d'un homme mesure 1 cm et le pied du géant mesure 9 cm donc le pied du géant est 9 fois plus grand que le pied de l'homme. On suppose que c'est la même proportion pour la hauteur. Comme un homme mesure environ 180 cm le géant mesurera 9 fois plus soit 9×180 cm = 1620 cm.

Ces deux solutions seront validées alors qu'elles conduisent à des résultats différents. On voit bien que la validation est analogue à celle d'un énoncé conditionnel mathématique : sous cette condition la conclusion est vraie[8], sous réserve que les raisonnements utilisés soient valides et les théorèmes appliqués vrais.

Ouverture de l'énoncé

Considérons la tâche suivante proposée en formation qui illustre le cas d'un énoncé imprécis. La classe de CP va visiter l'Opéra et prend le tram à l'arrêt « Emile Mathis » pour descendre à l'arrêt « République ». Quel est le meilleur itinéraire à emprunter ?

Sur la carte de tram il y a deux itinéraires possibles. Les professeurs en formation se lancent dans différents calculs pour comparer le nombre de stations de chaque trajet, la distance des trajets, la durée des trajets. Certains introduisent des critères de confort : un trajet plus long est direct alors qu'un trajet plus court oblige à un changement de tram. Le formateur propose le modèle suivant. Jean choisit la ligne A car il passera devant un magasin de jouets et on pourra voir les jouets pendant l'arrêt du tram.

Cet exemple illustre différents modèles pour définir ce qui est meilleur. Souvent on qualifie de modèle, par rapport à une solution singulière, ce qui pourra être transféré dans des cas analogues. Faut-il favoriser les modèles basés sur le plaisir (voir le magasin de jouets), sur l'économie (distance la plus courte), sur la sécurité (pas de changements de ligne) ? Les raisons du choix seront des raisons extra-mathématiques, qui éventuellement se baseront sur des calculs mathématiques (chemin le plus court ...).

Il est certain que plus le problème est ouvert au niveau des hypothèses et de sa formulation, plus on risque d'obtenir des solutions différentes[9]. Ceci rappelle les paradoxes apparents lorsqu'on résout des problèmes mathématiques qui ne sont pas définis de manière précise (par exemple les paradoxes de Bertrand en probabilité). On voit donc, dans les deux étapes,

[8] Il y a bien sûr des différences de solutions liées aux approximations effectuées. La relation avec le monde réel favorise le travail sur les notions d'estimation, d'approximation, d'ordre de grandeur et de précision.

[9] Certains problèmes (par exemple un problème moral, esthétique ou juridique) sont difficiles à modéliser mathématiquement, et parfois même il n'est pas souhaitable qu'ils le soient. Il existe également, pour des problèmes, qui admettent des modélisations mathématiques, des possibilités de modélisation non mathématique, qui sont tout aussi pertinentes. Il faut tenir compte des objectifs fixés et des modèles mathématiques disponibles, notamment à l'école primaire.

construire le modèle et valider la solution, la spécificité de la modélisation liée aux connaissances du monde réel et de modèles de monde réel qui permettent d'émettre des hypothèses pour construire le modèle et de contrôler les solutions par plausibilité. Cependant les questions de formulation du problème peuvent engendrer des difficultés tant au niveau de la construction d'une solution mathématique qu'au niveau de sa validation, que l'on peut retrouver dans la résolution de problèmes mathématiques sans articulation avec le monde réel.

Certaines critiques adressées à ces problèmes estiment qu'ils sont trop ouverts et pas assez précis. C'est justement la nécessité de définir les limites du champ du problème, les données et les hypothèses à prendre à compte, en s'appuyant sur des connaissances extra-mathématiques (et bien entendu sur des connaissances mathématiques liées à l'intuition que l'on a d'un modèle mathématique potentiel) qui fait la spécificité du processus de modélisation. Vouloir ne considérer que des problèmes suffisamment précis, c'est s'orienter plus rapidement vers le traitement mathématique du problème mathématique, dans un environnement plus rassurant pour l'enseignant de mathématiques, car fonctionnant dans un contrat didactique et dans un milieu plus homogène, celui du monde mathématique.

Prendre en compte l'articulation entre le monde réel et les mathématiques oblige l'enseignant, et les élèves, à gérer des connaissances, des techniques et des justifications de techniques appartenant à deux mondes différents, le monde réel et le monde mathématique. C'est admettre dans le contrat qu'une justification non mathématique peut être autorisée dans l'étape de construction du modèle ou de validation de la solution réelle, alors qu'elle n'est pas autorisée dans le traitement mathématique du problème mathématique.

Conclusion

La modélisation met en jeu des connaissances, des techniques, des argumentations, articulant le monde réel et le monde mathématique. Dans la construction d'un modèle, si le modèle a déjà été fréquenté, on peut raisonner par analogie, en repérant des similitudes entre situations. Par contre, si le modèle est à construire, la gestion est plus aléatoire et va dépendre du contexte de la tâche de modélisation, et notamment des connaissances et des techniques du monde réel qui apparaissent dans la situation. Dans la validation de la solution réelle, il apparaît également une cohabitation entre des arguments mathématiques (vérification par le calcul du nombre de pages à distribuer), des arguments empiriques (mesure réelle de la hauteur d'une statue de géant dans un parc), des arguments de plausibilité (absence de contradiction, accord des participants, vérification sur des cas particuliers ...).

Cette articulation entre le monde réel et le monde mathématique met en jeu des compétences que l'on peut retrouver dans la résolution de problèmes mathématiques (problèmes pour chercher, heuristique, contrôle des solutions...). Elle peut mettre en jeu des compétences spécifiques à la modélisation, car issues des connaissances et des techniques du monde réel. Faut-il former à ces compétences de modélisation ?[10] Comment y former ?

Le projet LEMA (www.lema-project.org) propose un cours de formation des enseignants à la modélisation. Des expérimentations de ce cours ont été conduites dans différents pays et sont en voie d'évaluation. L'équipe de recherche ACODIS de l'IUFM d'Alsace étudie la mise en oeuvre de la tâche du Géant dans des classes. La recherche peut donc s'emparer du thème de la modélisation pour étudier les problématiques de la formation à la modélisation des enseignants et de l'enseignement de la modélisation : Quelles situations de formation et d'enseignement pour gérer l'articulation entre réel et mathématiques ? Quelles compétences développer pour gérer ces situations ? Quels effets sur le contrat didactique ?

[10] Certains peuvent s'opposer à ce que la modélisation apparaisse comme un objet à enseigner. Voir (Adjiage & Cabassut, 2008).

Richard Cabassut
Université de Strasbourg, Laboratoire de didactique André Revuz
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Références

Adjiage R., Cabassut R. (2008). La modélisation dans une perspective de formation et d'enseignement. In *Actes du XXXIVème Colloque Copirelem. Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?* Troyes, juin 2007, pp. 111-120. IUFM Champagne Ardenne.

Blum W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterrichtin der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, 32(2), 195-232.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée sauvage.

Cabassut R. (2004). Argumenter ou démontrer : continuité ou rupture didactique ? Les effets d'une double transposition, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 9, 153-174.

Cabassut R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne,* Thèse, Paris : I.R.E.M., Université Paris Diderot.

DESCO (2005). Les problèmes pour chercher. *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques.* Paris : CNDP.

Garcia F. J., Wake G., Maass K. (2007). Theory meets practice: working pragmatically within different cultures and tradition. In *Proceedings of the Thirteenth International Conference on The Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* Bloomington, IN, USA.

Neubrand M., Biehler R., Blum W., Cohors-Fresenborg E., Flade L., Knoche N., Lind D., Löding W., Möller G. & Wynands A. (Deutsche OECD/PISA- Expertengruppe Mathematik) (2001). "Grundlagen der Ergänzung des internationalen OECD/PISA- Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 33 (2).

Niss M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddaneise*, 9.

PISA (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA.* Publisher: OECD.

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In International Commission of Mathematics Instruction (ICMI) (Ed.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. 4, pp. 232-248). Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organisation (UNESCO).

Schupp H. (1988). "Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der sekundarstufe I zwischen tradition und neuen impulsen". *Der Mathematikunterricht 34* (6).