

Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2^{ème} et 3^{ème} années de primaire)

Christine Chambris

Résumé

Depuis la réforme des mathématiques modernes, grandeurs et nombres vivent séparés dans les mathématiques de l'école primaire française, mais il n'en a pas toujours été ainsi. En effet, une différence majeure entre les programmes de 1882 et 1923 pourtant peu différents est la volonté institutionnelle d'articuler système métrique et numération de position. Bien qu'un peu retravaillée, cette organisation a été maintenue dans les programmes de 1945 en vigueur jusqu'en 1970. Que sait-on de cette organisation ? S'agit-il de prendre appui sur le réel pour étudier la numération ? Si oui, comment ? Par ailleurs, l'évolution des pratiques sociales tant de mesurage que de calcul, les bouleversements dans les mathématiques savantes, la modification des théories de référence pour l'apprentissage rendent-ils vaine l'étude des organisations didactiques anciennes pour éclairer le présent ? Au contraire, l'hypothèse de l'existence, avant la réforme, de réseaux trophiques très développés que nous imaginons plutôt robustes mais qui auraient été détruits suffit-elle à rendre cette étude pertinente pour contribuer à éclairer les choix didactiques actuels ?

Introduction

Ce texte comporte trois parties. Dans une première partie introductive, nous présentons les questions que nous nous posons, le cadre théorique choisi pour les étudier et la méthodologie utilisée. Nous présentons ensuite des résultats et terminons par des conclusions et des questions.

Motivation

Les grandeurs constituent une sorte d'interface entre les mathématiques et le réel. Les grandeurs, c'est tout ce qui se mesure : longueur, masse, capacité, notamment. Le fait de savoir si elles appartiennent ou non aux mathématiques n'est pas une évidence. La réponse a pu varier au fil du temps.

On peut également affirmer que la place des grandeurs dans la définition savante des nombres a été modifiée au 19^{ème} siècle. On est passé d'une définition des nombres tirés des grandeurs (le nombre « trois quarts » est pensé comme résultant du fait de prendre une grandeur, de la partager en quatre et de prendre trois parties) à une définition à partir des entiers : trois quarts est la classe des couples d'entiers associés au couple (3 ; 4) par une certaine relation d'équivalence. Vers les années 1870, les nombres se sont ainsi émancipés des grandeurs au moment des constructions axiomatiques des ensembles de nombres.

Du point de vue de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, à partir de 1923, le programme demande d'articuler enseignement des nombres (notamment entiers) et du système métrique. Cette option est maintenue, même s'il y a des différences, dans le programme de 1945. En 1970, la réforme des « mathématiques modernes » (que nous nous contenterons de désigner dans la suite par « la réforme ») sépare les nombres des grandeurs dans l'enseignement primaire, probablement pour rapprocher l'enseignement élémentaire et la

construction savante évoquée précédemment. Cela se manifeste notamment par la création du domaine « mesure » dans le programme.

Par ailleurs, des études sur les connaissances des élèves actuels montrent des performances médiocres quant à l'utilisation « en contexte » de connaissances relatives à la numération de position (Parouty 2005) et un progrès des élèves dans toute la numération quand on les fait travailler sur des problèmes de numération « en contexte ». De plus, d'autres études semblent montrer une certaine déconnexion des connaissances « formelles » et « en contexte » pour ce qui concerne le système métrique (Chambris 2008, chapitre 5).

Compte-tenu de la rupture entre numération et grandeurs opérée par la réforme, susceptible d'avoir une incidence sur les connaissances des élèves actuels, et *a contrario* de liens, visibles dans les programmes, entre ces objets avant la réforme, nous cherchons à mieux comprendre quelle pouvait être la contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme. En particulier, avant la réforme, l'enseignement des grandeurs consistait-il seulement à enseigner des pratiques de la vie courante pour elles-mêmes ou, au contraire, contribuait-il à d'autres apprentissages plus conceptuels ?

Notre intention n'est pas de proposer de faire aujourd'hui ce qu'on faisait hier (si tant est que cela soit possible). Par ailleurs, même si notre projet a un rapport avec l'histoire, il ne s'agit pas non plus d'un projet historique mais bien didactique. En effet, dans la mesure où les objets d'enseignement que nous étudions ont une grande permanence dans les programmes d'enseignement, il nous semble pertinent, pour nourrir la réflexion sur l'enseignement actuel, de tenter de caractériser au mieux les relations entre étude des grandeurs et étude des nombres antérieures à la réforme et de repérer les apprentissages « théoriquement » favorisés par ces relations.

Cadre théorique

Nous considérons nos questions sous un angle écologique. Il s'agit de comprendre les relations entre les objets d'enseignement : comment vivent-ils, quelles relations entretiennent-ils entre eux ? Nos objets seront les grandeurs et les nombres. L'écologie des savoirs (Artaud 1997) est une facette de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard (Chevallard, 1991 & 2002 ; Bosch & Chevallard, 1999).

Nous utiliserons explicitement, comme élément de ce cadre théorique, la notion d'*organisation* (mathématique ou didactique), appelée aussi *praxéologie* (mathématique ou didactique). Une organisation (mathématique ou didactique) est un moyen pour décrire une pratique. Une organisation mathématique ou didactique se présente selon quatre composantes « empilées ». On a un *type de tâches*, c'est à dire un ensemble de tâches problématiques qui se ressemblent (en un certains sens). Ce type de tâches peut être traité par un moyen : la *technique*. Il s'agit de répondre à la question : comment fait-on pour traiter les tâches ? Le moyen (la technique) peut être justifié par une *technologie*, répondant donc à la question : pourquoi la technique fonctionne-t-elle ? La technologie s'inscrit dans un ensemble plus vaste : la *théorie*.

Méthodologie

Pour étudier notre question, à savoir comprendre la contribution de l'étude des grandeurs à l'apprentissage de la numération de position avant la réforme, nous utilisons la méthodologie suivante. Nos données sont des manuels scolaires du cours élémentaire des années 1900 à 1970, c'est-à-dire antérieurs à la réforme. Nous utilisons aussi un texte, le traité de Reynaud (Bezout & Reynaud, 1821), qui est reconnu aujourd'hui comme un texte de référence pour l'enseignement des mathématiques pour le début du 20^{ème} siècle (Neyret 1995). Nous

cherchons à caractériser, en termes anthropologiques, l'étude des grandeurs, de la numération de position et les relations, dans l'enseignement, entre ces deux objets avant la réforme.

Dans nos manuels, nous utilisons les sommaires, notamment pour repérer les progressions. Les parties « cours » des leçons permettent de repérer les techniques et les technologies. Les parties « exercices » (et les parties « cours » s'il y a des exercices corrigés) permettent d'identifier les types de tâches. Enfin, nous utilisons des connaissances didactiques actuelles relatives à la numération de position, aux grandeurs et tirées du cadre théorique, pour identifier des caractéristiques des apprentissages possibles avec l'organisation de l'étude que nous mettons à jour.

Éléments relatifs à l'articulation des études de la numération et du système métrique

Nous présentons maintenant nos résultats. Ils sont organisés selon trois pôles complémentaires : les progressions (ou plan de l'étude) accompagnées d'éléments technologiques, les types de tâches liés aux grandeurs, les caractéristiques des apprentissages possibles avec une telle organisation de l'étude.

Plan de l'étude et discours technologiques

Un système particulier pour désigner les nombres : la numération en unités

Avant de présenter les progressions que nous avons identifiées, nous présentons un système particulier pour désigner les nombres. Nous l'avons appelé : « la numération en unités ». Il s'agit de désigner les nombres en utilisant les mots « unités », « dizaines », « centaines », c'est-à-dire les noms des unités de la numération. Ainsi, parlera-t-on du nombre « six centaines trois unités ». Nous ne distinguons pas le fait d'écrire en lettres ou en chiffres le six et le trois. Ce système de désignation a différentes propriétés : il permet notamment de régulariser la numération orale. Ainsi, « trente » devient « 3 dizaines » (et « soixante-dix », « 7 dizaines »). Il n'est pas univoque, en ce sens qu'un nombre donné a plusieurs désignations dans la numération en unités : « 56 centaines » et « 5 milliers 6 centaines » désignent le même nombre. Il est également plus « souple » que la numération orale. Cette souplesse est probablement liée au fait qu'il n'est pas univoque. Ainsi, « dix cents » n'existe pas en numération orale. Quand on compte de cent en cent, après neuf cents, il y a mille, alors qu'en numération en unités, après « 9 centaines », il peut y avoir « 10 centaines ». Ce peu de souplesse de la numération orale n'est pas spécifique de la langue française, dans laquelle on utilise des mots différents, « cent » et « centaine », pour désigner respectivement le nombre à l'oral et le nom de l'unité. En anglais, où on utilise le même mot « hundred », « ten hundreds » ne relève pas de la numération orale (on dit « one thousand ») mais bien de la numération en unités.

Théorie de la numération de position dans le traité de Reynaud et dans les manuels

Nous en venons maintenant à présenter la théorie de la numération de position telle qu'elle apparaît dans le paragraphe 2 du traité de Reynaud (Bezout & Reynaud, 1821). Dans la théorie, on trouve une construction de la suite des nombres. Tout d'abord, cette construction se fait en utilisant la numération en unités. On construit les nombres en organisant une collection. On trouve d'abord le discours suivant : « Pour former les nombres, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même donne un nombre nommé *deux* (...) » On poursuit ainsi en ajoutant « une unité » à chaque nombre obtenu jusqu'au nombre « dix ». Ensuite,

« la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé dizaine¹ ». On poursuit en indiquant qu'on compte par dizaines comme on a compté par unités. Cela signifie qu'on compte une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, jusqu'à dix dizaines. À ce moment-là, on a donc construit les nombres de un à dix ainsi que les dizaines entières. La suite du discours consiste alors à combler les « trous » entre deux dizaines, en ajoutant les nombres de un à neuf. On a donc construit les nombres jusqu'à neuf dizaines neuf unités (et dix dizaines).

On poursuit ensuite en fabriquant une nouvelle unité : la centaine. Et on reprend le processus : on compte par centaines comme on compte par unités et dizaines. C'est-à-dire qu'on compte une centaine, deux centaines, jusqu'à dix centaines. On a alors construit les nombres de un à cent et les centaines entières. Le processus engagé pour les dizaines est poursuivi au niveau des centaines puisqu'on comble les « trous » entre deux centaines en ajoutant les 99 premiers nombres. Par exemple, entre trois et quatre centaines, on a : trois centaines et une unité, trois centaines et deux unités, trois centaines et une dizaine, trois centaines une dizaine et une unité. C'est-à-dire qu'entre deux centaines, on ajoute les nombres déjà construits. On poursuit ensuite le processus avec les milliers, etc.

Nous regardons maintenant les manuels scolaires. Nous constatons que dès 1900, et sans doute avant, les leçons de numération (ou les différentes rubriques qui composent une leçon) sont intitulées successivement : les unités, la dizaine, les dizaines, entre deux dizaines, la centaine, les centaines, entre deux centaines, le millier, les milliers, entre deux milliers, etc.² En regardant le détail du contenu de ces leçons, nous constatons que dans la leçon « Les unités » se retrouve le discours sur la construction des nombres de un à dix. Dans la leçon « La dizaine », on fabrique une nouvelle unité, la dizaine, et se retrouve le discours de mise en relation de la dizaine et des unités. Dans la leçon « Les dizaines », on va compter par dizaines, comme on a compté par unités et dans la leçon « Entre deux dizaines », on va définir les nombres entre deux dizaines en ajoutant les neuf premiers nombres, et ainsi de suite.

Dans le traité, à la construction algorithmique de l'ensemble des entiers s'ajoute l'élaboration de deux types de correspondance : l'une entre numération en unités et numération orale, l'autre entre numération en unités et numération de position.

La première consiste en une traduction terme à terme de la numération en unités vers la numération orale : 5 centaines se dit « cinq cents », 3 dizaines se dit « trente » donc 5 centaines 3 dizaines se dit « cinq cent trente ».

La deuxième consiste en l'énoncé d'une correspondance entre les unités de la numération et la place des chiffres dans la numération de position : « On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples ; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dizaines ; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines ; et ainsi de suite » (Bezout & Reynaud 1821, traité de Reynaud, §2).

Ces éléments sont présents dans les manuels, sous la forme de discours adaptés pour chaque ordre de la numération, de façon stricte jusqu'en 1945, avec des variations ensuite. Ainsi, jusqu'en 1945, l'étude de la numération de position suit la construction théorique de l'ensemble des entiers (plan, discours).

Venons-en à la présentation de la progression pour l'étude du système métrique dans les manuels. Commençons par préciser que cette progression n'est pas présente dans le livre de Reynaud (Bezout & Reynaud, 1821), même si dernier contient un chapitre sur le système métrique. Contrairement à ce que nous trouvons dans les manuels à partir des années 30, ce chapitre n'est pas organisé parallèlement à la numération.

¹ Orthographe d'époque.

² Il peut arriver en effet que, dans certains manuels, les rubriques du type « la dizaine » et « les dizaines » soient regroupées au sein d'une même leçon (ou encore les rubriques du type « les dizaines » et « entre deux dizaines »).

Progression et discours pour l'étude du système métrique dans les manuels

Les manuels du cours élémentaire, à partir de 1930 et jusqu'en 1970, présentent une progression particulière (avec variations) pour l'étude du système métrique. On observe un entrelacement des leçons des deux domaines. On a ainsi une sorte de progression « en crabe ».

De façon schématique, elle se présente comme suit :

- les unités, puis le **mètre** (et éventuellement le litre, le gramme) ;
- la dizaine, les dizaines, entre deux dizaines, puis le **décamètre** (et éventuellement le décalitre, le décagramme) ;
- la centaine, les centaines, entre deux centaines, puis l'**hectomètre** (et éventuellement l'hectolitre, l'hectogramme) ;
- le millier, les milliers, entre deux milliers, puis le **kilomètre**, (et éventuellement le kilogramme).

Cette progression est accompagnée par des discours récurrents pour l'étude du système métrique. Ils sont « isomorphes » à ceux de la numération. On a deux familles de discours :

1) Une première sur les relations entre unités métriques :

- un hectomètre vaut une centaine de mètres,
- un hectomètre vaut dix décamètres.

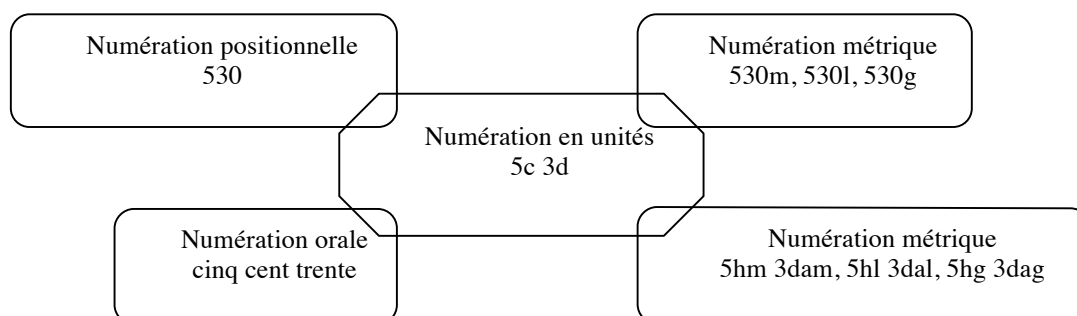
Pour exprimer ces relations, les manuels utilisent apparemment indifféremment les mots de la numération orale ou de la numération en unités ou encore la numération de position (cent, centaine ou 100 ; dix, dizaine ou 10).

2) Une deuxième sur les relations entre position, unités de la numération et unités métriques : « Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines. » (Boucheny & Guérinet 1930, p. 52) ou encore « Dans un nombre de mètres, le chiffre qui représente les hectomètres est au rang des centaines. » (Clap & Milliard 1934, p. 21)

Signalons que, contrairement à la numération, les progressions pour l'étude du système métrique présentent d'assez nombreuses variations. Si, pour au moins une grandeur (toujours la longueur), l'étude des unités métriques suit celle de la numération, pour les autres grandeurs la situation est plus variée. On peut d'ailleurs avoir une étude « ramassée » de toute la grandeur et toutes les unités de cette grandeur en une ou deux leçons, et les discours qui expriment la relation entre numération et système métrique n'existent alors pas toujours. On peut aussi avoir, pour certaines grandeurs, des leçons unité par unité, qui vont reprendre les différents éléments de numération *a posteriori*. Selon les manuels, l'étude de la monnaie (*via* le franc ou le centime, selon les époques, et les dizaines, centaines de ces unités) peut ou non être adjointe à l'étude des mètres, grammes et litres.

Retour sur la numération en unités

Nous voyons la première partie de la théorie de la numération comme une construction de la suite des nombres avec la numération en unités. Les autres discours relient les différentes numérations et la numération en unités. Cette dernière apparaît comme un pivot.



Des tâches pour étudier numération et système métrique

Les tâches liées au mesurage

Nous présentons maintenant les tâches liées au mesurage repérées dans les manuels. Pour ce faire, nous adoptons plusieurs point de vue : d'abord celui des pratiques de la vie courante, ensuite celui de l'étude de la numération. Il s'agit de montrer que ces tâches participent pleinement de l'enseignement de pratiques de la vie courante, mais qu'elles n'y sont pas réductibles, qu'elles contribuent aussi à des apprentissages plus conceptuels.

Nous en proposons d'abord une classification du point de vue des pratiques de la vie courante. Nous avons ainsi identifié trois dimensions :

1) Une première selon le rôle joué par l'instrument :

- estimer : l'élève ne dispose alors pas d'instrument ;
- mesurer : il s'agit d'utiliser les instruments usuels.

Parfois, une technique qui n'est probablement pas celle de la vie courante est proposée ; ainsi, pour mesurer 2 m, on porte 2 fois le mètre, on n'utilise pas le double mètre. Par ailleurs, nous faisons entrer dans cette catégorie la tâche suivante, qui consiste à comparer les grandeurs de différents instruments : « Vérifier que toutes les différentes sortes de litres ont la même capacité » (Boucheny & Guérinet, 1930, pp. 17-18) ;

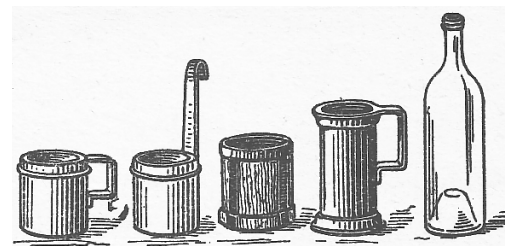


Fig. 12. — Différentes formes du litre.

- estimer puis vérifier en mesurant : ces tâches combinent les deux précédentes.

2) Une deuxième selon les places respectives de la mesure et de l'objet :

- étant donné un objet, donner sa mesure ;
- étant donné une mesure dans une unité, « fabriquer » l'objet.

3) Une troisième selon qu'on s'intéresse à l'égalité ou à l'ordre :

- on peut « trace[r] une ligne de 3 mètres de long (Clap & Milliard 1934, p. 18) » (égalité),
- on peut comparer à la grandeur d'un instrument en demandant, par exemple, de citer des objets plus lourds qu'un kilogramme (ordre).

À ces tâches de manipulation des grandeurs « objets » s'ajoutent des tâches d'évocation des pratiques de la vie courante liées aux grandeurs qui peuvent impliquer du mesurage. Ces tâches d'évocation peuvent faire explicitement référence aux instruments, elles peuvent aussi faire appel à des pratiques commerciales : citer des marchandises que l'on vend au poids. Nous considérons maintenant ces mêmes tâches de manipulation des grandeurs « objets », liées au mesurage, du point de vue de l'étude de la numération.

Dans la leçon sur l'hectogramme de Dumarqué & Renaud (1934), on demande de « Peser des objets de la classe avec la série des poids allant du g au poids de 500 g » ; les poids sont des « petits multiples des unités métriques » : 1, 2, 5. Il s'agit donc d'utiliser les nombres de 3 chiffres en relation avec les masses hectogrammes, décagrammes et grammes.

Les discours déjà évoqués rattachent les unités métriques à des positions. Ainsi, le discours, « dans un nombre de mètres, le chiffre qui représente les hectomètres est au rang des centaines (Clap & Milliard 1934, p. 21) », utilisé relativement à une situation de mesurage permet de relier « en contexte » 2 hm 3 m et 203 m ; de même pour les masses marquées, où un poids de 500 g doit d'abord être réinterprété comme un poids de 5 hg. Il ne s'agit en effet pas de poser une addition pour trouver la masse ou la longueur totale.

Ces tâches sont accompagnées d'autres qui visent clairement à enseigner les ordres de grandeur des unités métriques (et aussi d'un petit nombre entier d'unités métriques). Par exemple, Boucheny et Guérinet (1930) font soupeser des objets pour en trouver qui pèsent

plus ou moins d'un kilogramme ; ils demandent aussi de déterminer des lieux distants de 1 hm, 2 hm de la porte de l'école et font marquer les mètres sur une ligne droite que les élèves ont tracée au préalable.

Nous présentons maintenant un autre type de tâches : les conversions. Nous l'avons choisi car il est possible qu'il soit peu présent dans l'enseignement actuel de la numération. Nous pensons néanmoins qu'il jouait un rôle essentiel dans l'enseignement antérieur à la réforme et nous ne sommes pas convaincue qu'il ait été convenablement « remplacé » dans les organisations actuelles de l'étude de la numération³. Nous en profitons pour présenter des variations au sein de ce type de tâches, variations de contexte qui peuvent être étendues à d'autres types de tâches et qui nous semblent cruciales pour comprendre l'écologie des grandeurs et des nombres dans l'enseignement antérieur à la réforme, notamment pour préciser les interactions entre enseignement de pratiques de la vie courante et apprentissages plus conceptuels.

Le type de tâches « conversions »

Nous prenons l'exemple d'une relation de la numération, nous étudions les tâches autour du discours technologique : un millier c'est dix centaines. Il s'agit donc de convertir des centaines en milliers (ou l'inverse).

Une synthèse de l'étude des manuels nous permet de caractériser une progression dans le type de tâches au fur et à mesure des leçons de numération (et de système métrique) pour l'ordre donné (les milliers) :

- Dans la leçon « le millier » : combien faut-il ajouter de centaines à 200 pour faire un millier ?
- Dans la leçon « les milliers » : combien 3 milliers font-ils de centaines ?
- Dans la leçon « entre deux milliers » : combien y a-t-il de milliers dans 35 centaines ? (la réponse est 3 milliers 5 centaines ; la technique que nous avons reconstituée consiste à découper la tâche et à utiliser la leçon précédente : « 35 centaines » se décompose en 30 centaines et 5 centaines, qui font 3 milliers et 5 centaines) ;
- Enfin dans l'étude du système métrique, avec la leçon « le kilomètre » : écrire en hectomètres 3 km 5 hm.

À cette progression dans les difficultés liées strictement à la numération s'ajoutent des variations dans les contextes et les ostensifs (systèmes de désignation). Il ne s'agit pas forcément d'une véritable progression, mais d'éléments qui permettent d'utiliser une même connaissance dans différents contextes. Nous avons retenu les éléments suivants qui nous semblent significatifs :

- Combien de centaines dans 3 milliers ? (décontextualisé, numération en unités)
- Combien d'enveloppes font 30 paquets de cent enveloppes ? (contexte évoqué,

³ La réforme a provoqué un bouleversement majeur dans l'étude de la numération de position en France et nous interprétons les organisations mathématiques actuelles comme résultant de ce séisme. En particulier, il semble qu'un ensemble de raisons fait que la numération en unités a été très fortement dépréciée au moment de la réforme. Elle a été notamment qualifiée d'« ambiguë », crime de la pire espèce à l'époque des mathématiques modernes. Par ailleurs, l'introduction du travail dans les différentes bases modifie largement les tâches prescrites. Or, la numération en unités est spécifique de la base dix, elle n'existe pas « en bases » (on peut certes en inventer une pour chaque base mais le projet de l'époque consiste, avec les bases, à enseigner le caractère général de la numération de position – qui se passe donc de mot). De plus, il ne nous semble pas exagéré d'écrire qu'au moment de la réforme, en France notamment, « la manipulation des objets » a pu être considérée comme la solution miracle aux difficultés d'apprentissage. Et, dans une certaine mesure, « la manipulation des objets » a pris la place de « la manipulation dans le registre symbolique (constitué par la numération en unités) ». Ces différents éléments semblent pouvoir expliquer que les tâches – dont les conversions – et les technologies qui utilisent la numération en unités ont plus ou moins disparu au moment de la réforme et ne sont que partiellement réapparues depuis.

numérations de position et orale)

- Au cours d'une promenade, compter les bornes hectométriques entre deux bornes kilométriques (contexte matériel, numération métrique) ;
- Avec 1 kg de graines de betterave, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? (contexte évoqué, numérations métrique et de position).

Pour résumer

À partir des années 30, les manuels proposent une étude conjointe de la numération de position et du système métrique, qui est pilotée par un savoir mathématique savant relatif à la numération de position. Elle mobilise une progression très particulière qui s'est élaborée probablement en plusieurs étapes :

- d'abord pour la numération seule (avant 1923),
- l'étude du système métrique vient ensuite s'insérer dans la progression existante pour la numération (à partir de 1923).

Elle permet de relier des pratiques de la vie courante (dont le mesurage) à des connaissances décontextualisées, éventuellement conceptuelles, sur les nombres.

Nous en venons à des considérations sur les apports possibles d'une telle organisation du savoir sur les apprentissages des élèves. Pour ce faire, nous nous référons à des connaissances didactiques actuelles.

Apports sur les apprentissages des élèves

Sur l'apprentissage des grandeurs

Nous avons relevé, dans l'organisation du savoir telle qu'elle semble exister dans l'enseignement antérieur à la réforme, des tâches de comparaison et d'estimation dont nous pensons qu'elles contribuent à la connaissance des grandeurs et de leurs propriétés (Brun & Fluckiger, 2005).

En outre, la manipulation des instruments semble favoriser le report de l'unité plutôt que la lecture de graduation, même si cela peut s'opposer parfois à l'enseignement de pratiques de la vie courante.

Sur l'apprentissage des nombres et de la numération de position

Nous rapportons un extrait de la préface d'un manuel scolaire du cours élémentaire du début du siècle. Il n'est pas daté, mais antérieur à 1923 :

« À côté de nombreux exercices de lecture et d'écriture, nous avons proposé des exercices intéressants de formation et de décomposition des nombres, de mesurage et d'évaluation des grandeurs qui préparent au calcul mental et habituent à voir sous les chiffres la quantité qu'ils représentent. » (Mortreux & Mortreux, sd)

DeBlois (1996) se place sur le plan du développement cognitif. Elle souligne l'importance, pour la « compréhension » de la numération de position, d'être capable d'associer à chaque chiffre de l'écriture d'un nombre un « ordre de grandeur ». Nous considérons qu'on peut interpréter les apprentissages des ordres de grandeur des unités métriques reliés à des ordres de la numération comme participant d'un tel savoir.

Verschaeffel et De Corte (1996) évoquent, à propos de la connaissance des nombres, l'importance de développer la connaissance des ordres de grandeur. Comme le souligne un rapport des inspecteurs généraux sur les conférences pédagogiques en 1928, la connaissance des ordres de grandeur des unités métriques peut participer de cette connaissance :

« À l'heure où il s'agit de rendre mieux assises et plus générales des notions déjà acquises sur la numération et où il serait fastidieux et [vain] de manier des marrons, des billes, des « unités discrètes », la distance au village voisin, le poids d'un objet, la capacité d'un vase, peuvent aisément donner l'idée de mille, dix-mille, etc. » (cité par Butlen, 1985)

Sur les relations entre les connaissances (écologie)

Dans l'enseignement antérieur à la réforme, les relations entre les deux domaines (numération et système métrique) semblent particulièrement développées. Les moyens que nous avons repérés pour ce faire sont les suivants :

- Reprise de certains types de tâches : les conversions que nous avons évoquées, mais aussi des tâches relatives aux valeurs des différentes positions, qu'elles soient relatives au système métrique ou à la numération ;
- Grande proximité de certaines technologies et techniques permise par la numération en unités.

Au sein d'un domaine, on observe le développement des types de tâches :

- avec des tâches contextualisées ou non,
- avec des contextes et des ostensifs variés.

À propos des places respectives des pratiques de la vie courante et d'éléments plus conceptuels, il semble que, dans certains cas, on enseigne des techniques qui ne sont pas toujours des pratiques de référence pour la vie courante mais qui sont utiles pour la connaissance des grandeurs et des nombres (pour mesurer 2 m on porte 2 fois le mètre). Dans d'autres cas, au sein d'un domaine, l'évocation de pratiques de référence pour la vie courante (en contexte : « pour peser, on a utilisé un poids de 500 g, un poids de 200 g et un poids de 5 g et un poids de 1 g ... ») s'inscrit dans le développement d'un type de tâches qui contient aussi des tâches décontextualisées.

Par ailleurs, certaines tâches sont prises dans plusieurs chaînes trophiques⁴. Considérons la tâche qui apparaît dans les années 30 : trouver des objets plus ou moins lourds qu'un kilogramme et vérifier. Nous avons reconstitué les chaînes ou plutôt le réseau trophique dans lequel elle se trouve. En fait, nous allons montrer que cette tâche est utile dans quatre domaines de savoirs, c'est-à-dire quatre habitats. Cette tâche peut d'abord être interprétée comme une tâche de comparaison de grandeurs, de la masse en l'occurrence. Elle contribue ainsi à la connaissance de la grandeur masse. Le fait qu'on compare à « un kilogramme », et non deux objets entre eux, permet de l'inscrire dans la connaissance du système métrique : on apprend ainsi ce qu'est « un kilogramme ». Le fait qu'on vérifie, probablement en utilisant une balance et une masse marquée, permet de l'inscrire dans une connaissance des pratiques de la vie courante : utiliser une balance (ici en l'occurrence, connaître le déséquilibre) et connaître (reconnaître) la masse marquée du kilogramme. Enfin, cette tâche ne se situe pas n'importe où dans les manuels antérieurs à la réforme : elle apparaît juste après l'étude du millier. Le kilogramme est ainsi vu comme le millier de grammes, on a ainsi une « idée de mille », mille grammes, et cette tâche contribue alors à l'étude de la numération.

Conclusions et questions pour l'enseignement actuel

L'étude de l'enseignement des mathématiques au cours élémentaire avant la réforme montre une organisation globale des savoirs pour le bloc *système métrique, numération de position et pratiques de la vie courante qui impliquent la numération ou le système métrique*. On peut

⁴ Une chaîne trophique (du grec « *trophein* », nourrir) est une « sorte de chaîne alimentaire du type A se nourrit de B qui se nourrit de C... » pour les objets d'enseignement (Artaud, 1997). Aussi, paradoxalement, pour une tâche, le fait d'être dans une chaîne trophique, d'être utile à d'autres, d'être mangée par d'autres est un bon moyen d'exister.

sans doute parler de praxéologie globale. L'organisation ancienne fait ainsi exister de nombreuses chaînes trophiques tant au sein d'un domaine, la numération ou le système métrique, qu'entre les deux domaines. Dans cette organisation, le système de désignation « numération en unités » joue un rôle majeur. Par ailleurs, certaines pratiques de la vie courante ne sont pas enseignées telles quelles mais modifiées pour des besoins didactiques.

La situation actuelle est sans doute assez différente : séparation des grandeurs et des nombres dans les programmes, rôle mineur joué par la numération en unités notamment. Des études des connaissances des élèves actuels montrent certaines déconnexions dont on ne peut exclure qu'elles sont plus ou moins le produit de cette situation.

Dans quelle mesure ces connaissances sur l'enseignement ancien peuvent-elles nous être utiles pour réfléchir sur l'enseignement actuel ?

Un premier axe est plutôt d'ordre méthodologique. En effet, l'enseignement ancien a probablement une structure beaucoup plus « visible » que l'enseignement actuel, le premier axe consiste donc à utiliser ces connaissances pour poser des questions pour étudier l'enseignement actuel. Tel élément que nous avons identifié dans l'enseignement ancien existe-t-il dans l'enseignement actuel ? Si non, par quoi est-il éventuellement « remplacé » ? Ces questions peuvent être globales ou locales. Nous avons par exemple pointé le rôle de la théorie de la numération tant pour l'étude de la numération que celui du système métrique. Qu'en est-il d'une théorie de la numération dans l'enseignement actuel ? Nous avons aussi pointé une grande proximité dans la formulation des discours en numération et système métrique, qu'en est-il dans l'enseignement actuel ?

Deux autres axes concernent les éventuelles « transpositions » de certains éléments de l'enseignement ancien vers l'enseignement actuel, éléments dont nous pensons qu'ils sont peu répandus aujourd'hui mais qui semblaient utiles, hier, pour les apprentissages ou l'enseignement. Ces deux axes sont d'une part la pertinence, d'autre part la faisabilité, l'un n'étant pas nécessairement étranger à l'autre.

Nous avons utilisé des connaissances didactiques actuelles pour montrer la pertinence de certaines tâches anciennes sur un plan « théorique » : par exemple, les tâches d'estimation de grandeurs dans la connaissance de la numération. On peut penser que de telles tâches seraient encore pertinentes pour l'enseignement actuel et qu'elles n'existent plus ou peut-être qu'elles existent encore mais qu'elles ne jouent pas de rôle dans l'étude de la numération. La question de leur « transposition » est alors complexe car c'est notamment le fait qu'elles se trouvent dans les chaînes trophiques *ad hoc* qui rend ces tâches pertinentes du point de vue de la numération. Il ne s'agit donc pas tant de réintroduire ces tâches mais de les réintroduire au bon endroit, qui plus est dans un endroit qui n'existe peut-être pas aujourd'hui.

Nous pensons que notre étude permet notamment de repérer des conditions d'existence de certains objets qui participent de l'étude de faisabilité pour une éventuelle « transposition ». Comment faire, par exemple, pour transporter des réseaux trophiques ? Il est clair que nombre d'instruments de mesure anciens ont disparu mais notre étude montre qu'on n'enseigne pas que des pratiques de la vie courante, qu'on peut en détourner certaines pour des besoins didactiques. Nous avons identifié les services rendus (niches) par ces instruments anciens et, par suite, nous pouvons chercher, en conservant tout ou partie des niches, ce qui pourrait, « remplacer » les instruments anciens dans l'enseignement actuel.

Si notre étude permet de mettre en évidence des éléments pour la « transposition » de certaines connaissances, il est clair que cette question est en général très complexe et qu'elle engage notamment des dimensions culturelles et épistémologiques (notamment les conceptions des enseignants tant du point de vue de l'apprentissage que des mathématiques). Est-il par exemple pertinent de disposer d'une théorie pour appuyer chaque pas de l'étude de la numération ? Cela ne s'oppose-t-il pas à une certaine prise d'initiative des élèves dans les situations d'apprentissage ? Comment introduire, dans les pratiques des enseignants, une

théorie de la numération au plus près des tâches des élèves ? D'une certaine façon, accepter que les grandeurs contribuent à l'étude de la numération suppose probablement de renoncer à certaines conceptions des mathématiques véhiculées puissamment par la réforme et dont on peut faire le pari que certaines sont profondément ancrées dans les imaginaires mathématiques des enseignants.

Finalement, notre étude peut être vue comme un point de départ pour une étude comparative. Dans cette perspective, il va de soi qu'elle peut être utilement complétée par des études de ce qui se passe, aujourd'hui, dans d'autres pays que la France sur le même thème.

Christine Chambris

Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz

cchambris@free.fr

Références

- Artaud M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In Dorier J.-L., Perrin M.-J. et al. (Eds). *Actes de la 9^e école d'été de didactique des mathématiques*. 101-139. Houlgate : ARDM et IUFM de Caen.
- Bezout E., Reynaud A. A. L. (1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud*. Paris : Librairie pour les sciences. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table> (le 04/09/09).
- Bosch M., Chevallard Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Boucheny G., Guérinet A. (1930). *L'arithmétique au cours élémentaire (1^{ère} et 2^{ème} année)*. Paris : Librairie Larousse.
- Brun J., Fluckiger A. (2005). Conceptualisation et classes de problèmes dans le champ conceptuel de la mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(3), 349-402.
- Butlen D. (1985). *Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels*. Cahier de didactique des mathématiques. Paris : IREM de Paris 7.
- Chambris C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20^e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7). <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/> (le 04/09/09).
- Chevallard Y. (1991). *La transposition didactique avec un exemple d'analyse de la transposition didactique*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie et régulation. In Dorier J.-L. et al. (Eds) *Actes de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Clap C., Milliard P. (1934). *Cours élémentaire Arithmétique Système métrique Géométrie Calcul mental*. Paris : Librairie Delalain.
- DeBlois L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(1), 71-128.
- Dumarqué J., Renaud L. (1934). *Arithmétique Cours élémentaire* Paris : Librairie Delagrave.
- Mortreux X., Mortreux O. (sd, antérieur à 1923). *Nouvelle arithmétique des écoles primaires. Cours élémentaire. Édition pour le maître*. Paris : Belin.
- Neyret R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*. Thèse. Grenoble : Laboratoire Leibniz - IMAG - Université Joseph Fourier.
- Parouty V. (2005). Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. *Actes du XXXI^{ème} colloque sur la formation des maîtres. Commission Inter-IREM COPIRELEM*. Toulouse : IREM de Toulouse.
- Verschaffel L., De Corte E. (1996). Number and Arithmetic. In Bishop A. J., Clements K. (Eds) *International handbook of mathematics education, chapter 3*. 99-138 Dordrecht : Kluwer Academic Publishers

Textes officiels par ordre chronologique

Programmes des écoles primaires élémentaires du 23 février 1923.

Instructions relatives au nouveau plan d'études des écoles primaires élémentaires (20 juin 1923).

Programme des écoles primaires du 17 octobre 1945.

Instructions sur les programmes de l'école primaire du 7 décembre 1945.

Programme et instructions pour l'enseignement mathématique du 2 janvier 1970.