Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité

Françoise Chenevetot-Quentin, Brigitte Grugeon-Allys et Élisabeth Delozanne

Résumé

Cet article est consacré à l'adaptation à différents niveaux de la scolarité obligatoire d'un diagnostic cognitif dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Nous sommes parties de précédents travaux ayant conduit à l'élaboration d'un outil de diagnostic cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin 3ème / début 2nde. Ensuite, en nous appuyant d'une part sur un modèle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire et, d'autre part, sur l'organisation mathématique du domaine algébrique dans les programmes du collège, nous avons montré qu'il est possible de transférer à un autre niveau scolaire le premier outil de diagnostic et la définition du profil cognitif de l'élève en algèbre élémentaire. Des exemples concernant deux classes de 5ème viennent appuyer cette analyse.

Introduction et problématique

Beaucoup d'enseignants éprouvent des difficultés à gérer l'hétérogénéité des connaissances des élèves et à différencier l'enseignement dans un domaine donné, notamment dans le domaine de l'algèbre élémentaire.

Dans des travaux antérieurs (Delozanne et *al*., 2005a), nous avons mis au point un outil de diagnostic, d'abord un outil papier / crayon (Grugeon, 1997), puis un logiciel, appelé *Pépite* (Jean et *al*., 1998), qui construit en partie automatiquement un profil cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin de 3ème / début de 2nde à partir de ses réponses à un test spécialement conçu à cet effet.

Dans le travail présenté ici, nous nous intéressons au transfert de cet outil de diagnostic à d'autres niveaux de la scolarité obligatoire. Ce transfert s'appuie d'une part sur une analyse épistémologique et didactique de la compétence algébrique et, d'autre part, sur une analyse des programmes reposant sur l'approche anthropologique.

Nous explicitons d'abord le modèle de la compétence algébrique construit pour analyser à la fois les rapports institutionnels, *via* les programmes, et les rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire, *via* le test diagnostique. Ensuite, nous décrivons les modalités du diagnostic et son adaptation à différents niveaux. Puis, nous présentons les stéréotypes, classes de profils cognitifs équivalents en algèbre, et les variables didactiques retenues pour les adapter selon les divers niveaux considérés. Enfin, nous proposons des exemples de géographie cognitive pour deux classes de 5ème. Pour conclure, nous discutons des résultats de ce travail et nous abordons les perspectives de recherche dégagées par cette étude.

Un modèle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire

Afin d'étudier à la fois les rapports personnels des élèves et les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire, Grugeon (1995 & 1997) a défini une sorte de *référence,* précisant les enjeux d'apprentissage en fin de scolarité obligatoire. S'appuyant sur des travaux théoriques du champ de la didactique de l'algèbre, Grugeon a établi un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique attendue en fin de scolarité obligatoire (Grugeon, 1995 & 1997).

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris-Diderot. pp. 141-149.

Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de Douady (1986).

Sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution. Cette dimension *outil* de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, des problèmes de modélisation et des problèmes « d'arithmétique traditionnelle » visant la mise en équation. Cependant, parmi ces différents types de problèmes, l'utilisation de l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques revêt une importance toute particulière.

Sur le plan *objet*, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques afin que leur manipulation formelle redonne sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. C'est pourquoi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.

Au niveau scolaire considéré (enseignement secondaire), deux éléments supplémentaires interviennent également dans l'évaluation de la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique (Vergnaud, 1987 ; Kieran, 1992) ;
- L'efficacité algébrique requiert, d'une part, une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et au niveau structural (Sfard, 1991) et, d'autre part, une capacité à adapter l'interprétation des expressions à la variété des usages visés.

Cette approche permet ainsi de caractériser les types de problèmes du champ conceptuel de l'algèbre, les objets mis en jeu dans leur résolution (lettres : variables, inconnues, indéterminées, expressions algébriques, formules, équations, identités) et leurs propriétés, les représentations associées en lien avec les différents registres de représentations du domaine algébrique. Cette étude pointe des ruptures potentielles en jeu dans l'entrée dans la pensée algébrique, tant du point de vue de la construction de la rationalité mathématique à travers la résolution de problèmes (passage de la preuve pragmatique à la preuve mathématique, mobilisation des lettres pour modéliser des relations entre les objets d'un système intra ou extra mathématique), que du point de vue de la capacité à adapter l'interprétation des expressions mises en jeu aux usages visés.

Une structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique, structurée à partir de ces différents aspects, est alors organisée autour des composantes suivantes : la mobilisation des lettres de façon adaptée à la résolution d'un type de problème du champ de l'algèbre en lien avec le rapport arithmétique / algèbre et le niveau de rationalité algébrique, la gestion entre différents registres de représentation, la flexibilité dans le calcul algébrique.

Diagnostic et adaptation à différents niveaux

Test diagnostique à la fin de la scolarité obligatoire (3ème / 2nde)

Le premier test diagnostic réalisé, construit selon cette analyse, visait à construire le profil cognitif en algèbre d'un élève à la fin de la scolarité obligatoire (niveau fin de 3ème / début de 2nde). Il est composé de 20 tâches diagnostiques choisies en croisant à la fois les différents aspects du modèle de la compétence algébrique, pris comme référence, et les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes pour généraliser (un item), modéliser (7 items), prouver (3 items) ou mettre en équation (2 items) dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique) mais aussi des exercices techniques de calcul (8 items) ou de reconnaissance (6 items) impliquant différents types de tâche des programmes de collège et de seconde (produire des expressions ou des formules, mettre en équation, prouver des propriétés, calculer la valeur d'expressions, développer, factoriser des expressions, résoudre des équations).

Comment adapter ce test à d'autres niveaux scolaires en prenant en compte les programmes officiels relatifs à chaque niveau ?

L'organisation mathématique du domaine algébrique dans les programmes du collège

Les programmes officiels des collèges spécifient les finalités et les objectifs de l'enseignement de l'algèbre élémentaire à ces niveaux scolaires. Ils façonnent en partie les rapports institutionnels à l'algèbre qui vont modeler les rapports personnels des élèves. En effet, ils déterminent les objets de savoir mobilisés et utilisés dans les solutions attendues pour la résolution des problèmes travaillés à chaque niveau de l'enseignement. Les programmes explicitent les contenus, listent les capacités exigibles à un niveau donné.

En s'appuyant sur l'approche anthropologique (Chevallard, 2002), l'étude des programmes permet d'expliciter les organisations mathématiques impliquées dans la résolution des problèmes proposés à un niveau donné : types de tâches et types de techniques attendues, relativement aux éléments technologiques et théoriques visés. Depuis 2005, dans le domaine numérique, les programmes définissent le rôle des problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation, pour montrer l'insuffisance du numérique à exprimer une propriété de façon générale et la nécessité d'introduire les lettres comme variable préalablement au statut d'inconnue. Ils précisent la complexité des objets intervenant dans la résolution : expressions algébriques, formules, équations et les propriétés du cadre algébrique à mobiliser pour chaque niveau scolaire considéré. Le tableau 1 résume l'évolution de la compétence algébrique au fil des programmes officiels du collège.

Niv	Objets	Capacités	Champs de problèmes
5ème	Expressions littérales du premier degré, à une ou plusieurs variables. Formules. Identités impliquant des expressions du premier degré.	Produire une expression littérale. Utiliser une expression littérale (pour calculer). Sur des exemples numériques ou littéraux, utiliser les égalités $k\ (a+b) = ka + kb$ et $k\ (a-b) = ka - kb$ dans les deux sens. Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.	Problèmes montrant la nécessité d'introduire les lettres comme variable préalablement au statut d'inconnue en lien avec le numérique et de travailler l'écriture globale parenthésée.
4ème	Expressions du type $(ax+b)(cx+d)$. Formules, fonctions linéaires. Identités impliquant des expressions du type $(ax+b)(cx+d)$. Équations du type $ax+b = cx+d$.	Calculer la valeur numérique littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. Réduire une expression littérale à une variable, de type donné (cf. programmes 2005). Développer, factoriser une expression. Résoudre une équation du type $ax+b=cx+d$. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	*Extension du champ :* Introduction des problèmes de mise en équation. Calcul algébrique avec une complexité supérieure des expressions et une évolution des techniques utilisées.

3ème	*Idem* a^{n}, *a* entier positif non nul, *n* entier relatif. $\sqrt{a}$, *a* nombre positif. Identités remarquables. Équations du type $(ax+b)(cx+d)=0$. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.	Déterminer l'expression algébrique de fonctions linéaire ou affine. Développer, factoriser une expression de type donné (cf. programmes 2005). Résoudre des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue, des systèmes. Résoudre une équation mise sous la forme $A(x)B(x) = 0$ où *A* et *B* sont deux expressions du premier degré. Mettre en équation un problème conduisant à une équation, une inéquation, ou un système de deux équations du premier degré.	*Nouvelle extension du champ :* Introduction des fonctions. Calcul algébrique avec prise en compte d'une complexité plus grande et de nouveaux objets.

Tableau 1 - Évolution de la compétence algébrique dans les programmes du collège

C'est pourquoi nous caractérisons les tâches diagnostiques par : les types de tâches / types de techniques, les cadres et registres de représentation, la complexité des expressions en jeu. De plus, nous prenons également en compte le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (disponible, mobilisable ou technique) dans la résolution des tâches diagnostiques. C'est l'appui sur ces variables didactiques qui nous permet d'adapter le diagnostic à d'autres niveaux de la scolarité.

Adaptation du diagnostic à différents niveaux

Nous nous intéressons ici à l'adaptation du premier test à d'autres niveaux scolaires. Ainsi, à partir du test *Pépite* de niveau fin de 3ème / début de 2nde décrit précédemment, peut-on transférer les choix réalisés pour construire un test d'algèbre élémentaire qui soit adaptable à chaque niveau de la scolarité obligatoire ? Ici, nous présentons cette adaptation pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème.

La faisabilité de cette adaptation repose sur l'enrichissement successif des différents aspects de la compétence algébrique travaillés au cours de la scolarité. Cet enrichissement apparaît clairement dans le tableau 1. L'adaptation se traduit ainsi par l'évolution des types de tâches et des objets de l'algèbre présents dans les problèmes (production de formules, généralisation, preuve, mise en équation). Les types de tâches et les objets à évaluer sont décrits dans les programmes du collège, à travers les contenus et les capacités exigibles. Ces derniers permettent de définir, pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème, les tâches diagnostiques recouvrant le programme de 5ème : partie 1 « organisation et gestion de données, fonctions » et partie 2 « nombres et calculs ».

La transposition du test initial en un test pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème, test papier / crayon constitué de 12 tâches diagnostiques, s'appuie sur les variables didactiques définies précédemment comme suit :

- Nature des types de tâches / types de techniques en jeu : présence de tous les types de tâches sauf la mise en équation (la résolution d'une équation s'appuyant sur le test d'une identité) ;
- Complexité des expressions : expressions algébriques du premier degré du type $a(cx+d)$ avec un seul niveau de parenthèse ;
- Cadres et registres de représentation en jeu : plus de poids donné au cadre numérique dans des tâches de calcul ou de production d'expressions parenthésées ;
- Niveau de mise en fonctionnement : peu de tâches mettant en jeu la flexibilité dans l'interprétation des expressions (structurale / procédurale) pour choisir l'expression la

plus adaptée au calcul visé.

La robustesse du modèle de conception des tests est liée au recouvrement de l'étendue du champ conceptuel de l'algèbre aux différents niveaux scolaires.

Stéréotypes et parcours d'apprentissages adaptés à différents niveaux

Un stéréotype (Delozanne et *al*., 2005b) est défini comme une classe de profils équivalents, c'est à dire un ensemble de profils pour lesquels les compétences algébriques des élèves peuvent être jugées suffisamment proches pour bénéficier d'un diagnostic similaire et travailler sur des situations d'apprentissages adaptées ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage.

<table>
<tr><th>Composante</th><th>Notation</th><th>Objectif</th><th>Niveaux de compétence</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Usage de l'algèbre</td><td rowspan="4">UA</td><td rowspan="4">Étudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve</td><td>Niveau 1 : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.</td></tr>
<tr><td>Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique non adaptée.</td></tr>
<tr><td>Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.</td></tr>
<tr><td>Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Traduction d'une représentation à une autre</td><td rowspan="3">TA</td><td rowspan="3">Étudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre</td><td>Niveau 1 : Traduction correcte.</td></tr>
<tr><td>Niveau 2 : Traduction pas toujours adaptée.</td></tr>
<tr><td>Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence entre le modèle et la situation.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Calcul algébrique</td><td rowspan="3">CA</td><td rowspan="3">Étudier la capacité à calculer algébriquement</td><td>Niveau 1 : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).</td></tr>
<tr><td>Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.</td></tr>
<tr><td>Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.</td></tr>
</table>

Tableau 2 - Caractérisation d'un stéréotype

Pour spécifier le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire, trois composantes ont été privilégiées (Delozanne et *al*., 2005b) :

- L'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (UA) ;
- La flexibilité à traduire algébriquement des représentations en articulation entre différents cadres (géométrique, graphique, langage naturel) et inversement (TA) ;

- La flexibilité et l'adaptabilité dans l'interprétation des expressions dans les usages variés du calcul algébrique (CA).

Pour chacune de ces trois composantes, différents niveaux de compétences ont été identifiés et traduisent des seuils à dépasser pour acquérir un aspect de la compétence relativement à une composante donnée. Ils sont présentés dans le tableau 2.

Définir le stéréotype d'un élève consiste alors à attribuer un niveau de compétence selon chacune des trois composantes. Les stéréotypes sont calculés à partir des réponses des élèves à des types de tâches adaptés au niveau considéré.

Ce modèle peut-il être utilisé, voire complété, pour définir le stéréotype des élèves à différents niveaux ? La structure des stéréotypes est-elle exploitable à différents niveaux scolaires ?

En début d'apprentissage de l'algèbre, le calcul algébrique s'ancre sur la compétence numérique des élèves, c'est-à-dire sur leur capacité à produire, à interpréter, des expressions numériques et à les calculer. La transposition du test *Pépite*, depuis le niveau fin de 3ème / début de 2nde jusqu'au niveau fin de 5ème / début de 4ème, nous a donc conduit à faire évoluer la caractérisation d'un stéréotype. En effet, pour prendre en compte l'importance du cadre numérique en début d'apprentissage, nous avons complété les trois composantes du stéréotype par la composante CN « calcul numérique ». CN est structurée en 3 niveaux, obtenus en transposant ceux organisant la composante CA (cf. tableaux 2 et 3).

Calcul numérique	CN	Étudier la capacité à calculer numériquement	*Niveau 1* : Traitement numérique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation liées à une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

Tableau 3 - Caractérisation de la composante numérique

L'introduction de cette nouvelle composante nous semble essentielle pour penser le choix des situations d'apprentissage adaptées aux différents stéréotypes des élèves d'une classe et prendre en compte des leviers possibles ou des conceptions erronées à faire évoluer.

En particulier, nous pouvons faire l'hypothèse qu'une composante CN « calcul numérique » de niveau 3 risque d'être un obstacle à l'entrée dans la pensée algébrique et nécessite la mise en place de situations d'apprentissage spécifiques du cadre numérique.

Exemples de géographie cognitive pour deux classes

Le test de niveau fin 5ème / début de 4ème a été soumis, au milieu du 2ème trimestre de l'année scolaire 2006 / 2007, à deux classes de 5ème gérées par le même professeur de mathématiques.

Les figures 1 et 2 ci-après présentent la géographie cognitive (ensemble des stéréotypes des élèves) obtenue pour les deux classes, la classe de 5ème 2, qui comprend 18 élèves et la classe de 5ème 7, qui compte 20 élèves.

Cette analyse permet de retrouver la géographie de la classe pressentie par le professeur de mathématiques qui qualifiait ces deux classes, situées dans un collège de centre ville, de très hétérogènes et de mettre en évidence certaines cohérences de fonctionnement et difficultés des élèves.

Le test permet de mettre en évidence pour les deux classes que :

- Une majorité d'élèves (16 pour la 5ème 2 et 18 pour la 5ème 7) ne mobilisent pas de lettres pour prouver ou modéliser et travaillent dans le numérique (UA4), n'ayant pas encore négocié la transition arithmétique algèbre. Deux élèves seulement produisent des expressions algébriques en cohérence avec la situation, dans des problèmes mettant en jeu la disponibilité de l'outil algébrique. Ces résultats montrent la pertinence de la hiérarchisation établie entre les quatre niveaux de la composante UA ;
- 9 élèves (3 pour la 5ème 2, 6 pour la 5ème 7) ne respectent pas les priorités opératoires et la structure des expressions numériques (CN3), ce qui semble provoquer un ancrage incorrect du calcul algébrique (CA3). Ces résultats justifient l'existence de la composante CN ;
- La majorité des élèves (13 pour la 5ème 2 et 11 pour la 5ème 7) ont des résultats corrélés pour les composantes CN2 et CA2 (sauf pour 5 élèves). Ces résultats attestent que les connaissances numériques constituent un point d'appui réel pour la construction des compétences en calcul algébrique.

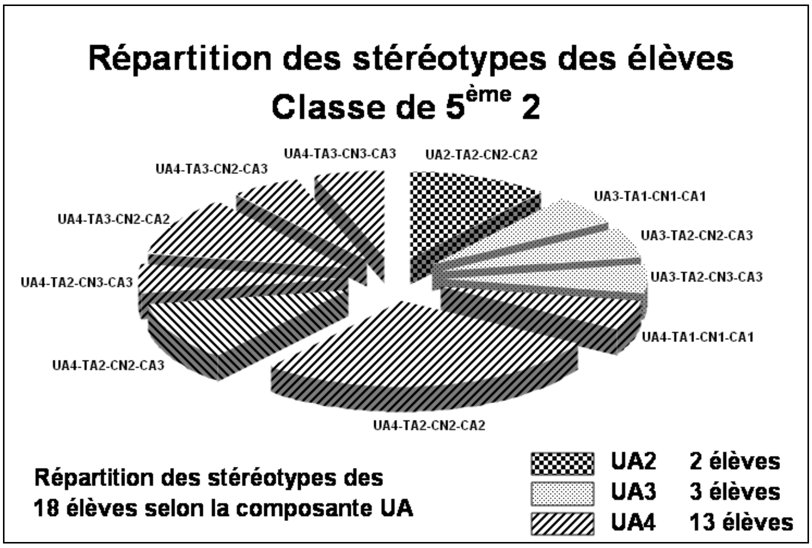

Figure 1 - Géographie cognitive de la classe de 5ème 2

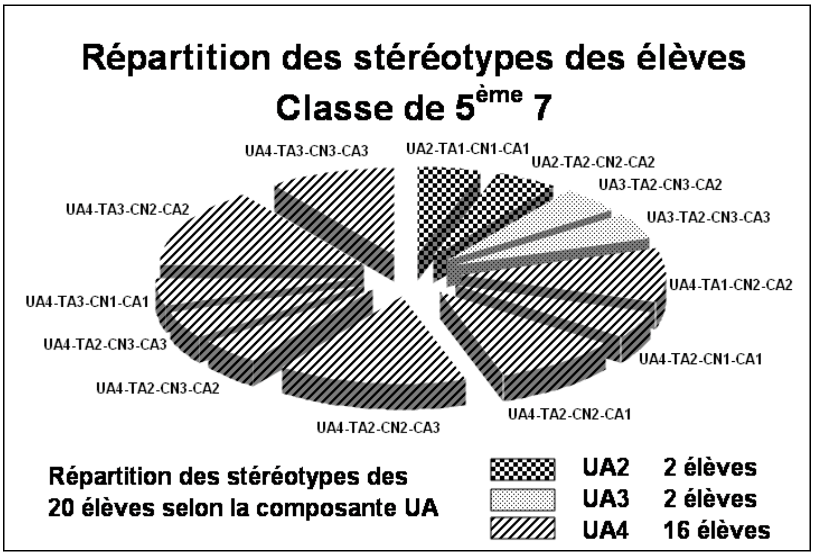

Figure 2 - Géographie cognitive de la classe de 5ème 7

Conclusion

Comment adapter un test diagnostic en algèbre élémentaire à d'autres niveaux de la scolarité en prenant en compte les programmes à chaque niveau ? L'étude exploratoire qui précède a permis de montrer qu'il est possible de transférer à un autre niveau scolaire un diagnostic en algèbre élémentaire. De même, les stéréotypes, définis comme des classes de profils équivalents, constituent un modèle qui peut également être adapté à différents niveaux de la scolarité pour réguler l'enseignement et gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. Nous poursuivons maintenant nos travaux selon les quatre axes qui suivent.

Premièrement, au-delà de ces résultats, les enseignants pointent que la durée excessive de passation du test peut être un obstacle à une utilisation plus large dans les classes en dépit de l'intérêt didactique manifeste du test pour définir des parcours d'apprentissage individualisés. Pour optimiser l'efficience du diagnostic, il est nécessaire de définir un critère pour minimiser le nombre de tâches composant de tels tests diagnostiques : comment avoir un diagnostic fiable avec un nombre restreint d'exercices ?

Deuxièmement, comme l'ont montré Morlaix et Suchaut (2007) pour l'école primaire, s'intéresser à l'évolution des compétences des élèves et tenter de prédire cette évolution est un problème central de politique éducative. En effet, les activités spécifiques de remédiation doivent être précoces pour éviter que les difficultés d'apprentissage ne s'installent et concourent à placer l'élève en situation d'échec. Ainsi, existe-t-il des tâches prédictives des compétences algébriques des élèves, à la fois pour réguler l'enseignement / apprentissage au niveau scolaire considéré mais aussi pour prévoir leur réussite ultérieure ? Nous pouvons faire l'hypothèse que l'analyse didactique précédente et la mise en perspective des approches anthropologique, épistémologique et cognitive permettront de pointer des ruptures potentielles en jeu dans la construction des rapports personnels à l'algèbre élémentaire et de choisir les types de tâches prédictifs de l'évolution future de l'élève.

Troisièmement, les résultats exposés ci-dessous ont été élaborés à partir d'un test papier / crayon, analysé manuellement. Il reste donc à automatiser le diagnostic pour construire automatiquement les stéréotypes des élèves à différents niveaux de la scolarité.

Quatrièmement, il reste surtout à définir des activités de remédiation adaptées aux différents profils cognitifs des élèves en s'appuyant sur les stéréotypes et sur les caractéristiques personnelles des élèves.

Françoise Chenevotot-Quentin
Université d'Artois, Laboratoire André Revuz
francoise.chenevotot@lille.iufm.fr

Brigitte Grugeon-Allys
Université d'Amiens, Laboratoire André Revuz
brigitte.grugeon@amiens.iufm.fr

Élisabeth Delozanne
LIP6 - L'UTES, UPMC Paris Universités
elisabeth.delozanne@lip6.fr

Références

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. In J-L. Dorier et al. (Eds), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 Août 2001,* pp. 3-22. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Delozanne E., Grugeon B. et *al*. (2005a). Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT, *Rapport de recherche, Programme « École et Sciences Cognitives : les apprentissages et leur dysfonctionnement » du MRT*.

Delozanne E., Vincent C., Grugeon B., Gélis J.-M., Rogalski J., Coulange L. (2005b). From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra, In G. Richards (Ed.), *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005*, pp. 262-269, Chesapeake, VA: AACE.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n°2, 5-31.

Grugeon B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Revue de Didactique des Mathématiques,* Vol.17, n°2, 167-210.

Grugeon B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Jean S., Delozanne E., Jacoboni P., Grugeon B. (1998). Cognitive profile in elementary algebra: the PÉPITE test interface. *IFIP-TC-3 Official Journal Education and Information Technology,* Vol. 3, 1-15.

Kieran C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Douglas A. Grouws (ed), pp. 390-419, New York Macmillan.

Morlaix S., Suchaut B. (2007). Apprentissages des élèves à l'école élémentaire: les compétences essentielles à la réussite scolaire. *Notes de l'IREDU, n°07/01, mars 2007*, http://www.u-bourgogne.fr/IREDU

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.

Vergnaud G., Cortès A., Favre-Artigue P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp. 259-288. Éditions La Pensée Sauvage.

Site de Pépite : Logiciel disponible gratuitement à l'adresse : http://pépite.univ-lemans.fr