

Atelier : les mathématiques dans la formation des ingénieurs

Avenilde Romo-Vázquez et Safouana Tabiou

Résumé

Cet atelier a pour but de présenter la place des mathématiques dans la formation des futurs ingénieurs. Pour cela, nous nous appuyons sur une recherche en cours abordant ce sujet dans une formation professionnelle à l'Institut Universitaire Professionnalisé d'Évry et sur le travail consacré à l'élaboration et à la mise en place des ingénieries pédagogiques, appelées APA-MATH (apprentissage mathématique par l'action) dans l'enseignement des mathématiques à l'École des Mines de Nantes. L'article présente d'abord la problématique générale de la place à accorder aux mathématiques dans une formation d'ingénieurs, il propose ensuite l'analyse de documents concernant la transformée de Laplace – concept mathématique intervenant dans différentes institutions liées à la formation des ingénieurs – et enfin les dispositifs pédagogiques APA-MATH sont présentés.

Introduction

La place à accorder aux mathématiques dans la formation des futurs ingénieurs est un sujet qui a été l'objet de débats depuis le début de ces formations et dont le contexte actuel demande de nouvelles réflexions. Cet atelier a pour objectif de montrer la complexité et la généralité de cette problématique et d'analyser ensuite des choix pour aborder une notion mathématique : la transformée de Laplace, dans les enseignements de mathématiques et d'automatique – discipline intermédiaire. Nous nous appuyons pour cela sur une recherche en cours abordant ce sujet dans une formation professionnelle à l'Institut Universitaire Professionnalisé (I.U.P.) d'Évry et sur le travail consacré à l'élaboration et à la mise en place des ingénieries pédagogiques, appelées APA-MATH (apprentissage mathématique par l'action) dans l'enseignement des mathématiques à l'École des Mines de Nantes. L'article est organisé en trois parties, la première est consacrée à la présentation de la problématique de la place des mathématiques dans la formation d'ingénieurs, la deuxième porte sur une activité d'analyse des documents consacrés à la notion de transformée de Laplace et la troisième sur une activité autour d'une APA-MATH conçue pour aborder cette même notion.

La place à accorder aux mathématiques dans la formation d'ingénieurs

La question de la place à accorder aux mathématiques dans la formation des ingénieurs, des contenus qui doivent être abordés dans cette formation et de la façon dont ils doivent être abordés et articulés avec les autres domaines de la formation, est une question que l'on voit posée dès la mise en place de telles formations. Pour illustrer ce qui précède, on considère le cas de l'École Polytechnique (Belhoste, 1994) et plus précisément, les premiers modèles de formation qui ont été mis en place successivement au sein de cette institution afin de constituer la formation la plus adaptée aux besoins professionnels des futurs ingénieurs. Trois modèles de formation ont existé pendant la période de 1794 à 1850 :

- **Le modèle encyclopédiste** : ce modèle proposé par Monge s'appuie sur l'idéal encyclopédiste qui conçoit une possible alliance entre les sciences et les arts. Les applications ont un rôle privilégié dans ce modèle : « c'est le principe d'application qui hiérarchise les sciences et les arts et qui détermine l'organisation

du cursus » (Belhoste, 1994, p. 2)

- **Le modèle de Laplace** : les enseignements d'applications sont supprimés sous la pression des Écoles d'applications récemment créées (1795). Les méthodes analytiques pénètrent les enseignements de la mécanique, la physique, la théorie de machines, la géodésie et les probabilités. L'analyse prend donc un rôle dominant dans l'enseignement de l'École ; l'enseignement de mathématiques se constitue comme un enseignement autonome qui précède tout enseignement.
- **Le modèle de Le Verrier** : la pratique devient l'axe organisateur des enseignements, « le seul critère est l'utilité pour les applications, et tout développement de pure théorie sera systématiquement écarté » (Belhoste, 1994, p. 28)

Ces modèles, brièvement décrits, mettent en évidence les conflits entre théorie et pratique qui les sous-tendent et la difficulté à concevoir un modèle de formation adapté aux besoins de la pratique. Ces conflits se retrouvent au cœur des débats menés au sein de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques (ICMI selon son sigle en anglais), dans un contexte plus général et international. À l'occasion de la réunion de cette commission à Paris en 1914, une conférence sur le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur est présentée par Maurice d'Ocagne. Dans cette dernière, d'Ocagne se prononce pour une formation mathématique solide susceptible de fournir des outils mathématiques nécessaires pour la pratique professionnelle, même si, dans la pratique ordinaire de l'ingénieur, les besoins mathématiques sont plutôt élémentaires.

Ces conflits entre théorie et pratique, mis en évidence précédemment, semblent s'atténuer avec le développement des sciences de l'ingénieur, ainsi qu'avec l'évolution du paradigme théorie-application, qu'on peut faire correspondre au modèle de Laplace, vers un paradigme théorie-modélisation (Pollak, 1988) qui semble plus apte à répondre aux besoins de la pratique. Cependant, ces rapports sont transformés aujourd'hui, par l'omniprésence des logiciels qui modifient la nature technique du travail professionnel de l'ingénieur (Kent, 2007), les contraintes de la pratique imposant une division de travail mathématique et sollicitant différents niveaux de formation mathématique (Kent et Noss, 2002), l'utilisation dans la pratique des modèles mathématiques « types », plus que la création de nouveaux modèles (Bissell et Dillon, 2000). Dans ce nouveau contexte, les formations doivent s'adapter mais cette adaptation ne peut pas se limiter au seul choix des contenus ; elle doit permettre d'établir des liens étroits entre la formation mathématique et celle de Sciences de l'ingénieur et problématiser l'intégration de la technologie.

Pour aborder cette problématique générale et complexe, nous nous proposons dans cet article d'identifier les processus de circulation des connaissances mathématiques et d'analyser différents documents qui font intervenir la notion de transformée de Laplace.

Quelles mathématiques vivent dans quelles institutions ?

L'enseignement de mathématiques dans une formation d'ingénieurs devient, comme mentionné plus haut, autonome dans le modèle de Laplace ainsi que dans de nombreux modèles de formation qui en découlent, en France et dans le monde. Les connaissances mathématiques à l'intérieur des institutions de formation circulent via différentes institutions¹, l'enseignement de mathématiques, l'enseignement de sciences de l'ingénieur et la profession. Nous faisons l'hypothèse que, dans une formation d'ingénieurs, les besoins professionnels sont pris en compte au moins dans une certaine mesure, autrement dit cette institution ne peut pas être complètement ignorée. Dans sa conférence, d'Ocagne illustre différents problèmes issus de la « pratique » qui ont eu besoin de mathématiques avancées afin d'être résolus. Ces

¹ Dans le sens de Chevallard (1992).

problèmes sont des problèmes fondateurs de sciences de l'ingénieur et on peut donc se poser la question du type de transformations qui sont opérés sur ces connaissances pour résoudre ces problèmes, pour constituer une discipline intermédiaire et pour être ensuite l'objet d'enseignement. Afin d'aborder ce qui précède et compte tenu de ce que les mathématiques dans cette formation sont considérées en tant que discipline de service – un outil pour les sciences de l'ingénieur et pour la pratique – nous proposons deux activités d'analyse de documents qui abordent la notion de la transformée de Laplace. Dans la première activité, deux documents sont proposés : le premier document constitue le chapitre 2 d'un cours d'automatique d'une formation d'ingénieurs en IUT (Institut Universitaire Technologique) et le deuxième est le chapitre 9 d'un livre de mathématiques pour l'ingénieur qui aborde la même notion. Dans la deuxième activité, l'analyse porte également sur deux documents : le premier est un dispositif didactique « APA-MATH » qui a pour objectif d'enseigner la transformée de Laplace et le deuxième est la production d'une équipe d'élèves à ce dispositif. Ces deux activités sont présentées ci-dessous.

Analyse des documents portant sur la notion de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une notion qui occupe une place importante dans l'enseignement de mathématiques et de sciences de l'ingénieur, telle que l'automatique, dans différentes institutions de formation de futurs ingénieurs.

L'activité d'analyse de deux documents, décrits plus haut, a pour objectif d'identifier les transpositions opérées par les auteurs de ces documents, compte tenu des contraintes de l'enseignement de mathématiques pour le premier document et de l'enseignement de sciences de l'ingénieur pour le deuxième.

Activité 1

Analyser deux documents consacrés à la notion de la transformée de Laplace. Les documents sont les suivants :

1. Transformation de Laplace et applications (D1) (Annexe 1)
2. Transformation de Laplace. Relation Équation Différentielle – Fonction de Transfert (D2) (Annexe 2)

L'objectif de l'analyse est de distinguer les différentes manières de présenter cette notion dans chaque document, le tableau ci-dessous vous permettra de guider l'analyse.

Introduction Comment est introduite la notion?	- Motivation mathématique - Motivation pour les applications	D1
		D2
Définition	- Formelle - non formelle	D1
		D2
Problème d'existence	- Général - Cas particulier	D1
		D2
Propriétés fondamentales	- Réduites à quelques formules supposées utiles - Traitement mathématique	D1
		D2
Résultats fondamentaux (l'inversion, convolution...)	- Apparaissent en fonction des besoins (sans démonstration) - Traitement mathématique	D1
		D2

Tableau 1 – Grille d'analyse de documents portant sur la notion de transformée de Laplace

La grille d'analyse ci-dessus constitue une première entrée, très générale, pour analyser ces deux institutions, enseignement de mathématiques et enseignement d'automatique. Les documents, eux-mêmes, ne sont pas des photocopiés d'un cours ordinaire ; ils sont des documents d'appui dont le discours technologique dans le sens de Chevallard se veut éclairant, compte tenu des difficultés des étudiants ; les contraintes de l'institution d'enseignement tels que le temps n'ont pas d'effet ni sur l'organisation ni sur la taille du discours, ce qui nous a fait choisir ces deux documents.

La grille d'analyse propose de comparer ces deux documents relativement à la manière d'introduire, de définir, de problématiser l'existence, de présenter les propriétés fondamentales et d'aborder la transformée inverse de la transformée de Laplace. Cette analyse, comme nous l'avons signalé, n'est pas approfondie, mais afin d'illustrer les différences entre ces deux documents nous présentons ci-après la définition de la transformée de Laplace qui est donnée dans chacun d'eux.

Définition de la transformée de Laplace dans le cours d'automatique

Dans le cours d'automatique (Annexe 2), la définition mathématique de la transformée de Laplace est introduite par une explication qui fait intervenir, dans un langage non mathématique, deux niveaux d'abstraction : « monde symbolique » et « monde réel ».

« À toute fonction $f(t)$ dans notre monde réel correspondra une fonction $F(p)$ dans le monde symbolique. Cette fonction sera appelée : *image* de $f(t)$. Inversement $f(t)$ sera appelée *originale* de $F(p)$. Ce passage du monde réel au monde symbolique est défini par la transformée de Laplace suivante :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = \text{image de } f(t) \gg (1)$$

La définition est donnée en utilisant le symbolisme mathématique usuel. Cependant, ni l'existence de la transformée ni celle de la transformée inverse ne sont problématisées. Au mieux, on peut penser que la validation de l'existence est implicitement attribuée à l'automatique en tant que discipline intermédiaire. La définition donnée est immédiatement contextualisée :

« Une tension $v(t)$ dans le monde réel deviendra $V(P)$ dans le monde symbolique
Un débit $q(t)$ deviendra $Q(P)$
Une vitesse angulaire $w(t)$ deviendra $\Omega(P)$ » (p. 8)

On notera que les exemples proposés, la tension, le débit et la vitesse angulaire, relèvent de sciences de l'ingénieur spécifiques (électricité, hydraulique, mécanique). Les grandeurs physiques sont identifiées de manière naturelle comme des fonctions du temps. Ainsi, le monde réel dont il est question renvoie aux modèles mathématiques des grandeurs en jeu dans les sciences de l'ingénieur spécifiques².

Définition de la transformée de Laplace dans le livre de mathématiques pour l'ingénieur

Contrairement au cours précédent, dans ce livre (Annexe 1), la transformée est introduite en mettant l'accent sur l'existence de l'intégrale.

« Soit $f(t)$ une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t définie pour $t \geq 0$. Si la fonction $f(t)$ est définie dans tout l'intervalle infini $-\infty < t < +\infty$, on demande que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. En

² Ces disciplines sont dites spécifiques afin de les différencier de l'automatique considérée ici comme la discipline générale. Ces qualifications ne sont donc pas figées.

plus, on suppose que la fonction $f(t)$ est continue par morceaux dans l'intervalle $0 \leq t < +\infty$. Pour assurer l'existence de certaines intégrales, on impose à la fonction $f(t)$ la restriction qu'il existe des constantes réelles $M > 0$ et σ_0 telles que

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} \quad (9.1)^3$$

pour toute valeur de t prise dans l'intervalle $0 \leq t < +\infty$. La plus petite valeur de σ_0 pour laquelle l'inégalité (9.1) est satisfaite est appelée **abscisse de convergence** de $f(t)$.

Considérons maintenant l'intégrale impropre

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (9.2)$$

où $p = \sigma + j\omega$ est un nombre complexe. Si la fonction $f(t)$ vérifie la condition (9.1) et $\text{Re } p = \sigma > \sigma_0$, alors la convergence de l'intégrale est assurée :

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma - \sigma_0)t} dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_0}, \quad \sigma > \sigma_0, \quad (9.3)$$

puisque $|\exp(j\omega t)| = 1$. Ainsi l'intégrale (9.2) existe, et elle définit une certaine fonction de p que l'on désigne par $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Cette fonction est dite **transformée de Laplace** unilatérale ou **image** de $f(t)$, tandis que $f(t)$ est appelée **original** de $F(p)$. Le fait que $F(p)$ est l'image de la fonction $f(t)$ est notée de la manière suivante : $f(t) \rightarrow F(p) \gg (p.91)$

La transformée est définie dans le cadre des fonctions d'une variable complexe ; la démonstration de la convergence de l'intégrale impropre, contrairement au cours précédent, est présentée. Notons la différence de présentation de la transformée de Laplace dans ces deux documents : dans le premier, les mathématiques interviennent à un niveau d'outil, l'auteur du cours met l'accent sur la puissance de cette transformation et non sur la consistance mathématique de sa définition. Dans le deuxième, l'intérêt est inverse, c'est la consistance mathématique qui intéresse et ensuite la puissance en tant qu'outil.

La transformée inverse de Laplace, est du point de vue de l'enseignement de mathématiques, une question plus délicate qui demande des choix : l'aborder en s'appuyant sur le théorème des résidus et en se situant dans la théorie de fonctions holomorphes ou à partir du théorème qui énonce que la transformée inverse de Fourier appliquée à la transformée de Fourier d'une fonction f est égale à $2\pi f$, en se situant dans l'analyse de Fourier. Dans le document extrait du livre de mathématiques pour l'ingénieur (Annexe 1), la transformée inverse de Laplace n'est pas abordée, c'est le dictionnaire d'images qui en est proposé, tandis que dans le deuxième elle est à peine présentée à partir de la méthode des résidus (issue de la théorie de fonctions holomorphes).

Ce qui précède est présenté afin de montrer la complexité qu'entraînent les transpositions de mathématiques dans les enseignements de mathématiques et de manière encore plus importante dans les cours de sciences de l'ingénieur. Les choix possibles, ici mentionnés, pour aborder la transformée de Laplace inverse mettent en évidence la difficulté des

³ Numérotation originale.

mathématiques associées ainsi que la difficulté de les faire rentrer dans des enseignements soumis à nombreuses contraintes y compris celle du temps.

Analyse de l'APA-MATH portant sur la notion de transformée de Laplace

À partir de l'activité précédente, on va considérer dans l'activité 2, l'institution de l'enseignement des mathématiques, particulièrement celle concernant une école d'ingénieurs. Nous proposons ainsi l'analyse de deux documents : le premier porte sur une activité APA-MATH consacrée à la transformée de Laplace (Annexe 3) et le deuxième la production des élèves correspondant à cette APA-MATH (Annexe 4). L'analyse de ces documents a pour objectif de mettre en évidence les caractéristiques de ce dispositif d'enseignement, du modèle de formation auquel il est associé et d'analyser à partir de la production des élèves leurs potentialités et limites.

Activité 2

À partir des documents donnés, remplir le tableau ci-dessous :

	Document 1	Document 2
Auteur		
But de l'activité		
Concepts en jeu		
Objectifs d'apprentissage		
Moment du cours		

Dans les écoles d'ingénieurs, qui recrutent essentiellement des élèves issus des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE), les buts des apprentissages en mathématiques – classées dans les sciences fondamentales – requièrent de l'élève des capacités de mise en fonctionnement des connaissances. La plupart des élèves éprouvent de nombreuses difficultés à dépasser le simple niveau d'application de leurs connaissances.

En partant de l'hypothèse que les situations de résolution de problèmes favorisent la construction par l'apprenant lui-même de ses propres compétences, l'École des Mines de Nantes (EMN), qui fait partie du groupe des écoles des Mines, crée et expérimente des ingénieries pédagogiques plus ou moins durables dont le but est de rapprocher le plus possible l'apprentissage des mathématiques du métier d'ingénieur. Ces situations d'apprentissage appelées génériquement « apprentissage par l'action en mathématiques » : APA-MATH combinent les méthodes traditionnelles (cours magistral – TD) à des apprentissages actifs et collaboratifs, dont les scénarios privilégient les capacités à contextualiser des connaissances mathématiques et à les transposer.

Le premier texte est un problème (intitulé le toboggan tautochrone (Annexe 3)) proposé à des élèves de la première année de l'EMN. Il s'agit d'élèves recrutés sur concours à la fin de la première année de CPGE (niveau Sup). Ces élèves ont utilisé des tables et quelques propriétés de la transformée de Laplace dans des enseignements de sciences de l'ingénieur. Il s'agit souvent d'un outil sans aucune définition conceptuelle. Le scénario du problème avait pour but de faire découvrir l'objet mathématique (problème de convergence et la recherche de l'abscisse de sommabilité) et d'établir certaines propriétés fondamentales en mobilisant des acquis sur l'intégrale généralisée et l'intégrale double (puisque la modélisation conduisait à une convolution). Toutes les propriétés établies sont en relation avec le modèle et résultent de la recherche de stratégie à mettre en œuvre pour progresser dans la résolution du problème posé.

On n'hésite pas à admettre des propriétés ou des résultats trouvés dans la documentation mise à disposition. Ainsi, le résultat fondamental sur la transformée d'une convolution a été

admis et la question principale se ramenait dès lors à la recherche d'une inverse. Des hypothèses simplificatrices permettent dans certains cas de trouver cette dernière dans la table mais en fin de compte, l'élève se retrouve face à de nombreuses questions sur cette transformation, et l'on cherche à créer ainsi un besoin de nouveau savoir.

Ce besoin de nouveau savoir sur la transformée de Laplace se fera en deuxième année (niveau L3) sous la forme d'un projet APA-MATH. Ici, le but est de mettre l'élève dans une situation d'acquisition de connaissances mathématiques nouvelles et en toute autonomie. Le cahier des charges impose au groupe d'élèves (5 à 8 élèves) de produire un cours de mathématiques sur la transformée de Laplace en tant qu'intégrale dépendant d'un paramètre et ses applications avec des exemples tirés de leur vécu dans les enseignements de disciplines utilisatrices (automatique, électronique numérique, physique), en établissant une analogie avec la transformée de Fourier.

Ces exemples illustrent le but des APA-MATH : partir des acquis en sciences de l'ingénieur sur un objet mathématique pour amener l'étudiant avec une réelle activité mathématique vers la décontextualisation et le concept. Il est attendu que les étudiants acquièrent également une plus grande familiarité avec les domaines d'intervention et la dialectique outil/objet.

Les APA-MATH essayent de rapprocher l'enseignement des mathématiques des vrais usages de l'ingénieur car dans ce métier, l'ingénieur devra approfondir, contextualiser des mathématiques déjà acquises; il éprouvera aussi le besoin d'acquérir de nouvelles connaissances en toute autonomie, et une capacité de synthèse est également requise.

Conclusion

Nous sommes parties d'une problématique générale et complexe à partir des premiers modèles de formations élaborés à l'École Polytechnique, institution de formation d'ingénieurs emblématique et des travaux menés au sein de la CIEM. Nous avons ensuite mis en évidence la complexité d'accorder une place aux mathématiques dans la formation d'ingénieurs dans le contexte actuel où les logiciels modifient les besoins mathématiques de la pratique et nécessitent une problématisation au sein de ces formations. Les activités portant sur les analyses de documents concernant l'enseignement de la transformée de Laplace nous permettent de mettre en évidence des caractéristiques de diverses institutions qui participent à la circulation de savoirs mathématiques au sein d'une formation d'ingénieurs. La première activité nous permet de montrer les différents choix opérés par une institution « proche » d'un enseignement de mathématiques et un cours de sciences de l'ingénieur (proche, dans le sens où le document n'est pas un photocopié du cours). Les discours technologiques (dans le sens de Chevallard, 1999) accompagnant la présentation de la transformée de Laplace dans ces deux documents obéissent à des intérêts et contraintes différentes. Le premier est basé sur les contraintes de l'institution mathématique, montrer les hypothèses d'existence, les propriétés et les démonstrations avec la rigueur mathématique. On notera que les applications sont intégrés à la présentation théorique de la transformée et que contrairement à un cours de mathématiques la transformée inverse n'est pas abordée, elle est admise et mobilisée à travers l'utilisation de tables. Le deuxième porte sur un discours qui est centré sur les applications de la transformée dans l'automatique, le langage et la rigueur ne sont pas ceux usuels en cours de mathématiques. Finalement, l'analyse sur le dispositif APA-MATH met en évidence les préoccupations directes de l'enseignement de cette notion, la prise en compte du métier et la difficulté à faire vivre le concept dans une formation dont l'application précède son enseignement. L'APA-MATH est perçu comme une activité intéressante par les étudiants, l'objectif est de donner du sens à la notion dans l'institution mathématique à partir d'un problème de modélisation. Ce qui interroge c'est la connexion entre l'enseignement de

mathématiques et celui de sciences de l'ingénieur. Il semble que les associations et connexions entre ces deux enseignements et celles entre théorie et pratique restent à la charge des étudiants. Ces activités essaient de montrer l'intérêt des éléments théoriques intervenant dans une modélisation mathématique en contexte, cependant l'intérêt n'est pas de résoudre le problème mais de présenter la notion mathématique. Ceci est contraire à ce qui domine dans un enseignement de sciences de l'ingénieur dont l'intérêt est de résoudre des problèmes sans s'intéresser à la légitimité de l'outil utilisé en elle-même, mais par rapport à son efficacité. Un travail collaboratif entre les enseignements de mathématiques et de sciences de l'ingénieur peut favoriser la compréhension des étudiants en complétant dès l'enseignement la dialectique objet/outil (Douady, 1987).

Avenilde Romo Vázquez

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot - Paris 7

romo@math.jussieu.fr

Safouana Tabiou

École des Mines de Nantes

safouana.tabiou@emn.fr

Références

- Arbenz K., Wohlhauser A. (1990). *Méthodes mathématiques pour l'ingénieur 2 : compléments d'analyse*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Belhoste B. (1994). Un modèle à l'épreuve. L'École Polytechnique de 1794 au Second Empire. In Belhoste, B., Dalmedico, A., & Picon, A. (eds), *La formation Polytechnicienne 1774 – 1994*, pp.9-30. Paris : Dunod.
- Bissell C. & Dillon C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the Learning of Mathematics*, 20(3), 3-11.
- Chevallard (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73-111.
- Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221-266.
- Douady R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
- Howson G., Kahane J. P., Lauginie P., de Turckheim E. (Eds.) (1988). *Mathematics as a Service Subject*. Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI Study).
- Kent P. (2007). Learning Advanced Mathematics: The case of Engineering courses. Contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In Lester, K., F. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 1042-1051). Charlotte, NC: Information Age Pub
- Kent P., & Noss R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp. 39/1-39/7). London U.K.
- Pian J. (1999). Diagnostic des connaissances en mathématiques des étudiants du Capes, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. *Cahiers Didirem* (34). Institut de Recherches pour l'Enseignement des Mathématiques. Université Paris VII.
- Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject – why? In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject*. (pp. 28-34). Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI study).
- Straka, G. (dir.). (2000). *Conceptions of self-directed learning: theoretical and conceptionnal considerations*. Berlin, Waxmann.

- Tabiou, S., Gossiaux, P.B., Bot, L. (2003). Une expérience pédagogique d'enseignement des mathématiques en école d'ingénieurs: In *Actes du 2^{ième} colloque Questions de pédagogies dans l'enseignement supérieur : réflexions, projets et pratique*, Brest.
- Tabiou, S., Gossiaux, P.B., Jézégou, A. (2007). Contribution des apprentissages collectifs à la performance individuelle des élèves-ingénieurs. In Frenay, M., Raucen, B. & Wouters. P. *Pédagogies actives : enjeux et conditions. Actes du 4^{ième} colloque sur les questions de pédagogies dans l'enseignement supérieur*. Louvain, Presses Universitaires de Louvain, 607-617.

Annexe 1. Extrait du chapitre 9 intitulé « Transformation de Laplace et applications »

92

Compléments d'analyse

On note aussi $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$, respectivement $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$.

Il s'ensuit immédiatement de la définition de la transformée de Laplace (9.4) que la transformation de Laplace est une opération *linéaire*. En effet, si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ admettent des transformées de Laplace :

$$f(t) \longrightarrow F(p)$$

$$g(t) \longrightarrow G(p),$$

alors

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \longrightarrow \lambda F(p) + \mu G(p), \quad (9.5)$$

où λ et μ sont des facteurs constants quelconques.

9.2 TRANSFORMÉE DE LAPLACE DE QUELQUES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

9.2.1 Fonction échelon unité

La fonction $u(t)$ ainsi définie

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (9.6)$$

s'appelle fonction *échelon unité*. Son graphe est représenté dans la figure 9.1.

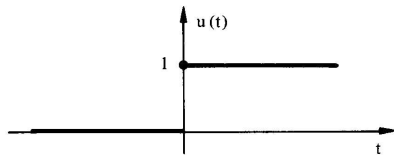


Fig. 9.1

Alors, selon la définition (9.4), la transformée de Laplace $U(p)$ de $u(t)$ égale

$$U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad (9.7)$$

pourvu que $\operatorname{Re} p > 0$. On dit que le *domaine de convergence* de la transformée $U(p)$ est le demi-plan droite $\operatorname{Re} p > 0$.

Transformation de Laplace

93

9.2.2 Fonctions exponentielles et trigonométriques

Soit $f(t) = e^{-\alpha t}$, $0 \leq t < \infty$. Alors

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-(\alpha+p)t}}{(\alpha+p)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+p}, \quad (9.8)$$

si $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \alpha$.

De ce résultat, il découle immédiatement la transformation de Laplace de $\sin \omega t$.

En effet :

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$

d'où, en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace (9.5):

$$\sin \omega t \longrightarrow \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad (9.9)$$

si $\operatorname{Re} p > 0$.

De même, on trouve la transformée de Laplace de $\cos \omega t$. On a

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2},$$

et par conséquent :

$$\cos \omega t \longrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad (9.10)$$

si $\operatorname{Re} p > 0$.

9.2.3 Impulsion de Dirac

En partant de la définition de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ (§ 8.4.2):

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta_{\alpha}(t),$$

où

$$\Delta_{\alpha}(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{pour } 0 \leq t \leq \alpha, \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{pour } t \text{ ailleurs} \end{cases},$$

on a

$$\delta(t) \longrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-p\alpha}}{\alpha p},$$

et en développant $\exp(-p\alpha)$ en série de Taylor :

$$e^{-p\alpha} = 1 - p\alpha + \frac{p^2 \alpha^2}{2} - \frac{p^3 \alpha^3}{6} + \dots,$$

on trouve pour la transformée de Laplace de $\delta(t)$:

$$\delta(t) \longrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ 1 - \frac{p\alpha}{2} + \frac{p^2 \alpha^2}{6} - \dots \right\} = 1. \quad (9.11)$$

9.3.3 Théorème de convolution

Lors de la résolution d'équations différentielles par la méthode utilisant la transformation de Laplace, on se servira souvent de l'intégrale de convolution. Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions qui s'annulent pour $t < 0$. Alors leur *intégrale de convolution* $h(t)$ est définie par la relation

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (9.21)$$

En partant de la définition (9.4), on trouve pour l'image $H(p)$ de $h(t)$:

$$H(p) = \int_0^\infty h(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right\} e^{-pt} dt \quad (9.22)$$

Cette dernière intégrale est une intégrale double, étendue sur le domaine limité par les droites $\tau = 0$ et $\tau = t$ (fig. 9.2).

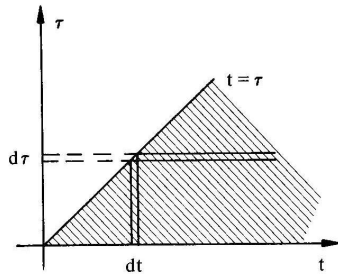


Fig. 9.2

Changeant l'ordre de l'intégration dans l'intégrale (9.22), on obtient

$$H(p) = \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_\tau^\infty g(t-\tau) e^{-pt} dt \right\} d\tau,$$

et en effectuant le changement de variable $t - \tau = \eta$ dans l'intégrale intérieure de cette dernière intégrale double, on arrive à

$$\begin{aligned} H(p) &= \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_0^\infty g(\eta) e^{-p(\eta+\tau)} d\eta \right\} d\tau = \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^\infty g(\eta) e^{-p\eta} d\eta = F(p) G(p). \end{aligned}$$

Ainsi on a trouvé le *théorème de convolution* qui exprime :

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \longrightarrow F(p) G(p). \quad (9.23)$$

9.3.4 Théorème de la valeur finale

Le *théorème de la valeur finale* exprime :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p), \quad (9.24)$$

si les limites indiquées existent.

Pour démontrer ce théorème, on reprend la règle (9.13) pour l'image de la dérivée :

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = p F(p) - f(0).$$

En laissant tendre p vers zéro dans cette dernière équation, on obtient

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0),$$

d'où la relation (9.24).

9.3.5 Dérivation de l'image

Soit $f(t) \rightarrow F(p)$. Alors on dispose de la *règle pour la dérivation de l'image* :

$$t f(t) \longrightarrow - \frac{dF(p)}{dp} \quad (9.25)$$

Notons d'abord, sans démonstration, que si $f(t)$ vérifie la condition (9.1), l'image de $t f(t)$ existe et possède le même domaine de convergence que $F(p)$. Par définition, on a

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

et, d'après la règle de Leibnitz pour dériver sous le signe d'intégrale :

$$\frac{dF(p)}{dp} = - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt,$$

ce qui prouve la règle (9.25). On établit facilement la règle générale :

$$t^n f(t) \longrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \quad (9.26)$$

9.3.6 Théorème de la valeur initiale

On part de la règle (9.13) pour la dérivée :

$$\frac{df(t)}{dt} \longrightarrow p F(p) - f(0),$$

Annexe 2. Extrait du chapitre 1 intitulé « Transformation de Laplace. Relation Équation Différentielle – Fonction de Transfert »

Chapitre 1

Transformation de Laplace.

Relation Équation Différentielle - Fonction de Transfert.

1.1 Transformée de Laplace, définition, conventions

Les intérêts de cette transformation sont: une simplification très importante des solutions mathématiques recherchées et une généralisation facile de certains résultats.

Elle consiste à étudier le comportement des systèmes (caractérisé dans notre **monde réel** par des fonctions du temps t) dans un **monde symbolique** où la variable n'est plus le temps t mais une variable symbolique p .

A toute fonction $f(t)$ dans notre monde réel correspondra une fonction $F(p)$ dans le monde symbolique. Cette fonction sera appelée: *image* de $f(t)$. Inversement $f(t)$ sera appelée: *originale* de $F(p)$. Ce passage du monde réel au monde symbolique est défini par la transformée de Laplace suivante:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \text{image de } f(t)$$

Par convention nous adopterons toujours les lettres minuscules pour les fonctions du temps et leurs homologues majuscules pour les images. Exemples:

Une tension $v(t)$ dans le monde réel deviendra $V(p)$ dans le monde symbolique.

Un débit $q(t)$ deviendra $Q(p)$.

Une vitesse angulaire $\omega(t)$ deviendra $\Omega(p)$.

Ainsi si on oublie de préciser la variable (t ou p) dont dépend la fonction, on peut le savoir simplement grâce à cette convention.

Au début l'introduction de ce monde symbolique (donc irréel) vous paraît une chose très abstraite donc difficile à dominer. Mais très vite vous constaterez que des opérations difficiles à faire dans notre monde réel comme par exemple la résolution d'une équation différentielle, devient une opération élémentaire dans ce monde symbolique. Petit à petit on découvre que la vie dans ce monde symbolique est beaucoup plus simple.

Par contre, une grave erreur à ne pas commettre serait de faire apparaître dans une même expression les variables t et p ! Elles n'appartiennent pas au même monde!!!

Nous allons maintenant examiner les principales propriétés de la Transformée de Laplace. Seules ces propriétés doivent être connues. Il ne sera jamais demandé de calculer une transformée. Vous pourrez donc très vite oublier cette intégrale bornée!

1.2 Somme de fonctions, multiplication par une constante

Dans l'expression de l'intégrale de Laplace (voir page précédente), si on remplace $f(t)$ par une somme de fonctions:

$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ on pourra séparer l'intégrale en une somme de trois intégrales correspondant chacune à l'image d'une des trois fonctions. Ainsi:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)] = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p)$$

De même, si on multiplie $f(t)$ par une constante k , on peut sortir cette constante de l'intégrale et on en déduit que l'image est simplement multipliée par k :

$$\mathcal{L}[k f(t)] = k F(p)$$

L'image d'une somme de fonctions est la somme des images. Si on multiplie la fonction par une constante, l'image est multipliée par la même constante. Si on s'arrêtait là, ça n'aurait aucun intérêt cette transformée!

1.3 Dérivation et intégration

1.3.1 Dérivation d'une fonction: soit $g(t)$ la dérivée de $f(t)$. On veut exprimer $G(p)$ en fonction de $F(p)$.

$$\mathcal{L} g(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt$$

On va intégrer par partie: on pose $u = e^{-pt}$ et $g(t) dt = dv$
d'où $du = -p e^{-pt} dt$ et $v = f(t)$ puisque $g(t)$ est la dérivée de $f(t)$:

$$\mathcal{L} g(t) = \left[e^{-pt} f(t) \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = p F(p) - f(0)$$

Donc dans le monde symbolique, la dérivation d'une fonction consiste à la multiplier par p et ensuite retrancher une constante correspondant à la valeur initiale de la fonction originale.

Si on extrapole le résultat précédent aux dérivées successives de $f(t)$, on obtient:

$$\mathcal{L} f(t) = F(p)$$

$$\mathcal{L} f'(t) = p F(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L} f''(t) = p[p F(p) - f(0)] - f'(0)$$

$$\mathcal{L} f'''(t) = p[p[p F(p) - f(0)] - f'(0)] - f''(0)$$

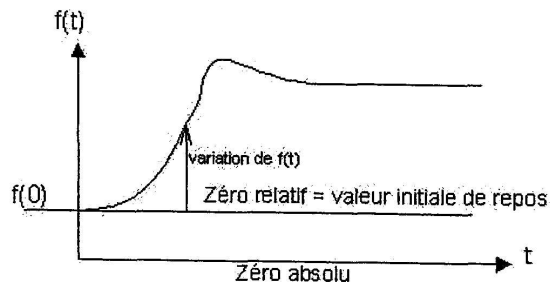
On se rend compte que ça se complique beaucoup à cause des conditions initiales non nulles.

Ainsi, nous nous placerons toujours (aussi bien en théorie qu'en pratique) dans des conditions qui vont simplifier énormément les résultats ci-dessus.

Nous nous placerons toujours dans l'hypothèse suivante: le système qui va générer la fonction $f(t)$ en réponse à une excitation d'entrée doit être initialement au **repos** c'est-à-dire que $f(t)$ doit être **constant** avant qu'on applique un signal de commande.

Ainsi dans les expressions précédentes: $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ et de façon générale toutes les valeurs initiales des dérivées successives de $f(t)$ sont nulles.

Seule subsiste la valeur $f(0)$ qui n'est pas nulle. Il suffira de considérer que les fonctions du temps calculées (théorie) ou enregistrées (pratique) ne seront pas comptées à partir du zéro absolu mais seront comptées à partir de la valeur initiale de repos.



Autrement dit, ce qui nous intéresse c'est la **variation** de $f(t)$ par rapport à sa valeur initiale de repos.

Exemple: si on enregistre la température de l'eau dans une casserole à partir du moment où on allume le réchaud, le zéro absolu est loin! Ce que l'on va enregistrer c'est la variation de température à partir de la valeur initiale de repos qui correspond à la température ambiante.

Il faudra toujours respecter ces conditions. Ainsi la notion de dérivation dans le monde symbolique devient un jeu d'enfant:

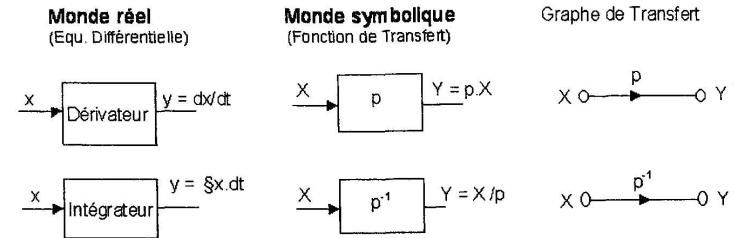
$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) \quad \text{avec } f(0) = 0 \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n \cdot F(p)$$

Le calcul de la dérivée 7^{ème} d'une fonction du temps $f(t)$ quelconque est très long et fastidieux. Dans le monde symbolique, il suffit de multiplier l'image de $f(t)$ par p^7 .

1.3.2 Intégration d'une fonction. Nous venons de voir que, en respectant les conditions sur les valeurs initiales nulles, dans le monde symbolique la dérivation d'une fonction consiste à multiplier son image par p . Si maintenant on intègre la fonction obtenue après dérivation, on doit retrouver la fonction initiale: ainsi il faut rediviser par p donc multiplier par $1/p$. Il vient:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t).dt\right] = \left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

1.3.3 Nous pouvons dès maintenant introduire la notion de Fonction de Transfert à propos du dérivateur et de l'intégrateur. Nous introduirons également la représentation d'une fonction de transfert par un graphe de transfert. Ces notions seront reprises très en détails dans le chapitre 4, mais cela ne pose aucune difficulté de les découvrir maintenant.



On remarque que dans le monde symbolique pour exprimer la sortie d'un système, il suffit de multiplier l'entrée par la fonction de transfert du système.
La fonction de transfert du dérivateur est: $Y/X = p$ et celle de l'intégrateur est $Y/X = 1/p$

1.3.4 Exemples physiques de dérivateurs et d'intégrateurs.

Exemples électriques:

Prenons une self d'inductance L traversée par un courant instantané $i(t)$.

La tension instantanée à ses bornes sera $v(t) = L \cdot di(t)/dt$

En posant $V(p) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ et $I(p) = \mathcal{L}\{i(t)\}$ on obtient: $V(p) = L \cdot p \cdot I(p)$ et la fonction de transfert de la self est alors $V(p)/I(p) = Lp$.

Prenons maintenant un condensateur de capacité C dans les mêmes conditions d'expérience. On aura $v(t) = 1/C \cdot \int i(t)dt$

Remarque: Le symbole $\int$ doit se lire: Somme de 0 à t (c'est une intégrale).

Donc $V(p) = 1/C \cdot I(p)/p$ et la fonction de transfert du condensateur est alors $V(p)/I(p) = 1/Cp$.

L'inductance est un dérivateur de courant et la capacité est un intégrateur de courant.

Exemples mécaniques analogues:

Prenons une masse M se déplaçant à une vitesse instantanée $v(t)$.

La force $f(t)$ qu'elle engendrera est proportionnelle à son accélération donc à la dérivée de sa vitesse: $f(t) = M \cdot dv(t)/dt$ d'où $F(p) = M \cdot p \cdot V(p)$ et la fonction de transfert de la masse est alors $F/V = Mp$.

Faisons la même expérience avec un ressort de raideur R . Cette fois la force instantanée engendrée est proportionnelle à l'élongation du ressort c.à.d. à la position instantanée de l'extrémité déplacée. La vitesse $v(t)$ étant la dérivée de la position, la position est donc l'intégrale de la vitesse. Ainsi $f(t) = R \cdot \int v(t)dt$ d'où $F(p) = R \cdot V(p)/p$ et la fonction de transfert du ressort est alors $F/V = R/p$.

La masse est un dérivateur de vitesse et le ressort est un intégrateur de vitesse.

Exemple hydraulique.

Prenons un récipient de section S . On le remplit avec un débit instantané $q(t)$.

Le volume instantané contenu sera l'intégrale du débit et la hauteur de liquide $h(t)$ est égale au volume divisé par la section du récipient: $h(t) = 1/S \cdot \int q(t)dt$ d'où $H(p) = 1/S \cdot Q(p)/p$ et la fonction de transfert du récipient est alors $H/Q = 1/Sp$.

Le récipient est un intégrateur de débit.

Vous remarquerez l'analogie parfaite avec le condensateur.

De même en thermique nous parlons de capacité thermique. Il existe des analogies de

Annexe 3. Extrait de l'APA – MATH concernant la transformée de Laplace

2 Le problème

A leurs plus belles heures, certains régimes ultra-communistes très soucieux d'égalité avaient installé dans leurs jardins publics des toboggans tautochrones. Pour les non-hellénistes, un tel toboggan a la particularité suivante : quelle que soit la hauteur d'où on part sur le toboggan (sans élan), on met le même temps T pour arriver en bas.

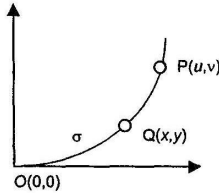
Le but de ce TDD (noté) sera de retrouver la forme du toboggan tautochrone.

Votre production finale devra être une représentation graphique de ce toboggan.

Pour trouver une équation (cartésienne ou équation paramétrique) de la courbe recherchée, il sera nécessaire de nous familiariser, au cours de la résolution avec deux nouveaux outils mathématiques, qui vous seront par ailleurs très utiles dans plusieurs autres domaines des sciences de l'ingénieur et de la physique: il s'agit de la convolution et la transformation de Laplace; deux types très usuels d'intégrales dépendant d'un paramètre.

3 Le toboggan tautochrone: modélisation

Une représentation simple d'un morceau du toboggan dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé:



Si on note P de coordonnées (u, v) le point de départ sur le toboggan, $Q(x, y)$ le point courant et $O(0, 0)$ le point d'arrivée, on peut écrire la conservation de l'énergie (potentielle + cinétique) entre P et Q :

$$mgv + 0 = mgy + \frac{1}{2}m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \text{ où } \sigma \text{ représente l'abscisse curviligne entre } O \text{ et } Q$$

De cela, on tire $\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)}$, en tenant compte du fait que l'abscisse curviligne décroît avec le temps.

$$\text{Donc } T(v) = \int_0^{T(v)} dt = \int_{\sigma(v)}^{\sigma(0)} -\frac{d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} = \text{temps mis partant de P pour atteindre O, et le}$$

problème du toboggan tautochrone revient à établir que $T(v)$ est fonction une constante T, pour un profil bien spécifique du toboggan (condition de tautochronie).

Or, σ est une fonction croissante de y donc $d\sigma = f(y)dy$ où $f(y) = \frac{d\sigma}{dy}(y)$.

On tire de tout cela $T(v) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^v \frac{f(y)}{\sqrt{v-y}} dy$; c'est une intégrale dépendant du paramètre v .

Il nous suffit de trouver la fonction $f(y)$ répondant à la condition de tautochronie ci-dessus, pour en déduire alors une équation du toboggan. En effet, on a

$$f(y) = \frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \text{ donc } \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = f^2(y) - 1.$$

4 Découverte d 'outils nouveaux: la convolution et la transformation de Laplace

Lorsque l'on considère un système "entrée-sortie" linéaire

On établit que si les fonctions sont continues par morceaux (ou dans le cas général, localement intégrables), on a la relation $s(t) = \int_0^t h(t-x)e(x)dx = \int_0^t h(x)e(t-x)dx$. Dans un tel problème, on

connaît deux des trois fonctions, et on recherche la troisième. De telles équations sont connues sous le nom d'équation intégral-différentielles, et décrivent des modèles très courants.

En pratique, il y a des avantages à appréhender cette relation comme une "loi de composition algébrique" que l'on note *; dès lors, $s(t) = \int_0^t h(t-x)e(x)dx = \int_0^t h(x)e(t-x)dx$ devient

$s(t) = h * e(t) = e * h(t)$. La relation intégrale devient une opération algébrique, que l'on appelle produit de convolution, et on change dès lors, une équation intégral-différentielle en une équation algébrique.

Le produit de convolution est une opération définie pour des séries ou des fonctions intégrables. Cette opération intervient naturellement dans de nombreuses situations. Elle sert au calcul des lois de probabilité, notamment. Dans le cas des fonctions, on se place généralement sur un ensemble de fonctions intégrables, qui muni de l'addition, du produit par un scalaire et de la convolution devient est une algèbre (associative). On dit alors que l'on a une de convolution. L'étude des algèbres de convolution est une branche importante des mathématiques appliquées. Dans cette théorie, on s'intéresse particulièrement aux opérateurs qui appliqués à un produit de convolution donne le produit ordinaire des transformées. Parmi ces opérateurs, la transformation de Laplace est incontournable.

Ainsi, dans notre système "entrée sortie" linéaire, si on applique la transformation de Laplace, $s(t) = h * e(t) = e * h(t)$ deviendra $S(x) = H(x)E(x)$, où S , E et H sont les transformées de Laplace de s , e , et h . Dans la littérature des systèmes "entrée-sortie", H est connu sous le nom de fonction de transfert.

La transformation de Laplace est particulièrement utile dans la résolution des équations différentielles linéaires, une illustration simple est proposée en bilan et perspectives.

Annexe 4. Extrait de la production d'une équipe d'élèves à l'APA – MATH portant sur la transformée de Laplace

I. Définitions et propriétés

Définition de la Transformée de Laplace

Soit f une fonction de L^+ et $\sigma(f)$ son abscisse de convergence. On appelle *Transformée de Laplace* de f et on note $L(f)$ (ou F), la fonction de la variable complexe définie pour tout p tel que $\operatorname{Re}(p) > \sigma(f)$ par

$$L(f) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{(-pt)} dt$$

Remarque explicative : $\operatorname{Re}(p) > \sigma(f)$ est la condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de l'intégrale (infinie). En effet, comparons f à une exponentielle du type e^{ct} , c étant un réel. $e^{ct} e^{-pt} = e^{[c-\operatorname{Re}(p)]t} e^{i\operatorname{Im}(p)t}$. $t \rightarrow e^{i\operatorname{Im}(p)t}$ est bornée. La convergence de l'intégral de 0 à $+\infty$ est donc liée au premier terme. Il est nécessaire et suffisant que $c-\operatorname{Re}(p) < 0$ i.e $c < \operatorname{Re}(p)$ pour assurer cette convergence.

On aboutit ainsi à la définition suivante :

L'*abscisse de convergence* de f est la borne inférieure des réels c tels que : pour tout $t \geq A$, $|f(t)| \leq M \cdot \exp(ct)$

Propriétés :

* Holomorphie :

$f \in L^+$ alors la fonction $F(p)=L(f)(p)$ est holomorphe sur le demi-plan ouvert $\{p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \sigma(f)\}$.

Sa dérivée est :

$$F'(p) = L(-tf) = \int_0^{+\infty} -t \cdot f(t) e^{(-pt)} dt$$

* Linéarité :

Soit f et g sont deux fonctions de L^+ et α, β deux réels, on a immédiatement par linéarité de l'intégrale :

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

* Décalage :

Si f est dans L^+ et a un réel, on voit facilement que $t \rightarrow e^{(at)} f(t)$ est encore dans L^+ et on a immédiatement :

$$L(e^{(at)} f(t))(p) = L(f)(p-a)$$

* Retard :

Si f est dans L^+ et $t_0 \geq 0$, on voit facilement que $t \rightarrow f(t-t_0)$ est encore dans L^+ et on a immédiatement par changement de variable :

$$L(f(t-t_0))(p) = \exp(-pt_0) L(f)(p)$$

* Changement d'échelle :

Si f est dans L^+ et $a > 0$, on voit facilement que $t \rightarrow f(at)$ est encore dans L^+ et on a immédiatement par changement de variable

$$L(f(at))(p) = \frac{1}{a} L(f)\left(\frac{p}{a}\right)$$