Atelier : modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires

María Trigueros Gaisman

Résumé

Dans le but d'aider les élèves à mieux comprendre et appliquer les concepts mathématiques, quelques chercheurs dans le monde ont récemment fait porter leurs efforts vers l'utilisation des modèles du réel non seulement pour motiver les étudiants, mais aussi pour les aider dans leur apprentissage des mathématiques. Les réponses à la question "Comment introduire la modélisation dans l'enseignement ?" sont très variées. Dans cet atelier, nous discutons les problèmes qui se posent dans l'introduction de la modélisation à partir de deux exemples. Nous introduisons ensuite des éléments de la théorie APOS (action, processus, objet, schéma) que nous utilisons pour analyser des activités effectivement proposées dans des classes. Nous discutons enfin les avantages et les limites d'un enseignement appuyé sur la modélisation en nous référant à cette théorie didactique.

I. Introduction

Les résultats récents de la recherche en didactique des mathématiques ont dirigé l'attention vers le rôle que peut jouer le contexte des problèmes à résoudre dans la salle de classe où ils sont introduits afin d'aider les élèves à comprendre et à appliquer les concepts mathématiques. Récemment, quelques chercheurs autour du monde ont dirigé leurs efforts vers l'utilisation de modélisations du réel pas seulement pour motiver les étudiants, mais comme une manière de situer le savoir mathématique dans un contexte.

Les modèles mathématiques apparaissent justement quand on a besoin de répondre à des questions liées à une situation du réel, quand on a besoin de prendre des décisions ou quand il est nécessaire de prédire le comportement d'un phénomène physique ou social. Mais derrière l'idée de l'introduction de la modélisation du réel dans la salle de classe, il y a une hypothèse qui n'est pas toujours posée de manière explicite : on espère que quand les élèves trouvent des situations problématiques intéressantes ils seront capables de les représenter en utilisant des relations entre des variables mathématiques, qu'ils peuvent explorer et manipuler et que, ce faisant, ils pourront développer des idées importantes et puissantes que le professeur pourra diriger vers l'introduction des mathématiques à enseigner.

Les réponses à la question « Comment introduire la modélisation dans l'enseignement des mathématiques ? » sont très variées. Il y a des propositions très proches de la résolution de problèmes traditionnels, mais il y en a d'autres qui utilisent la conception d'expériences en classe, où la modélisation joue un rôle central, et où on espère que les étudiants puissent arriver à des idées mathématiques qui serviront à introduire les notions du cours qu'on désire enseigner. Mais, pour bien comprendre le rôle de la modélisation du réel dans la salle de classe on a besoin d'une réflexion autour de ce que la modélisation signifie dans les mathématiques et du rôle qu'elle peut prendre en l'introduisant dans la salle de classe.

La problématique de cet atelier est celle d'une introduction de la modélisation du réel avec l'intention de favoriser l'apprentissage des mathématiques des étudiants à l'université. Les questions posées d'emblée furent les suivantes : Comment introduire la modélisation dans l'enseignement à ce niveau ? La modélisation est-elle (seulement) une nouvelle version de la résolution de problèmes ? Quelle est la différence ? La modélisation peut-elle devenir un espace où les étudiants peuvent apprendre des mathématiques ? Est-il possible pour les

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 83-101.

étudiants d'arriver à des idées mathématiques intéressantes qui puissent servir pour introduire les matériaux du cours qu'on désire enseigner ?

Il y a eu récemment un effort de recherche sur les résultats didactiques de l'introduction de la modélisation dans la salle de classe (Barbosa, 2006 ; Blum & Niss, 1991 ; Blum *et al.,* 2006, 2007 ; Borromeo Ferri, 2006 ; Burkhardt, 2006 ; Chaachoua & Saglam, 2006 ; Galbraith & Clatworthy, 1990 ; Kaiser & Sriraman, 2006). Ces études ont des fondements théoriques didactiques divers. D'autre part, l'enseignement des mathématiques peut être conçu sur la base de divers modèles d'enseignement fondés sur des théories de didactique des mathématiques. Quelques-unes d'entre elles ont prouvé qu'elles étaient efficaces dans des expériences d'enseignement des mathématiques à l'université. Toutefois, ces modèles ne prennent, en général, pas en considération l'introduction de la modélisation de situations réelles comme une stratégie d'enseignement. Est-il possible alors de créer des situations de classe en utilisant la modélisation et une théorie didactique telle qu'APOS (que nous allons présenter plus loin) ? Comment le faire ?

Ces questions ont été discutées partiellement dans l'atelier. Nous avons commencé par travailler sur deux situations problématiques qui ont été utilisées en classe au Mexique. On a introduit deux situations à modéliser, on a discuté avec les participants des caractéristiques des problèmes en tant que situations de modélisation. Puis les participants ont essayé de les modéliser et ont posé diverses questions. Des éléments des théories APOS et « Models and Modeling » ont été alors introduits afin de motiver une analyse portant sur la façon dont les séances en classe ont été développées dans l'expérimentation avec les situations présentées.

Cet article commence par la présentation des situations de modélisation travaillées dans l'atelier. Nous rapportons ensuite le travail qui a suivi dans l'atelier. Les cadres théoriques sont alors introduits à travers les activités qui ont été discutées avec les participants. Une description de ce qu'on a trouvé avec les élèves dans la salle de classe est aussi présentée. Nous terminons enfin avec un bref commentaire critique sur les possibilités d'utilisation de la modélisation en classe de mathématiques à l'université, et les apports de la théorie APOS et de la théorie « Models and Modeling » pour concevoir les problèmes à modéliser et les activités à proposer. Ce qui permet de répondre à la question posée sur la possibilité d'utilisation de ces deux théories pour introduire la modélisation dans la salle de classe.

II. Présentation de deux situations de modélisation en début d'Université

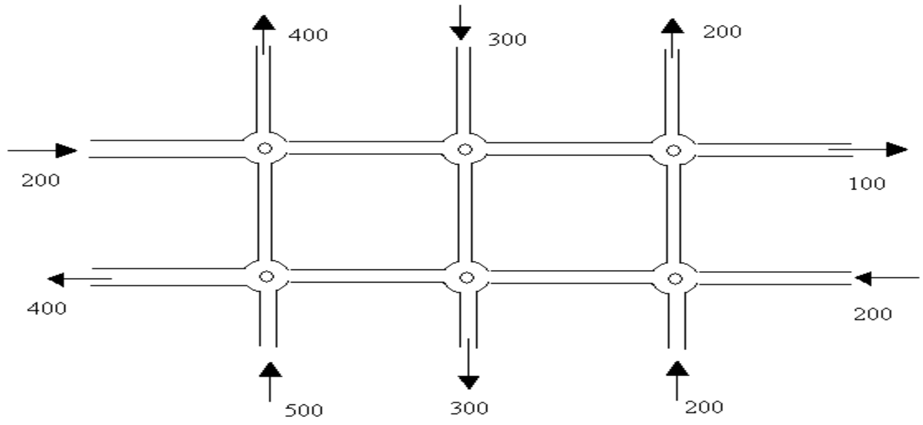
L'atelier a commencé par la présentation de deux problèmes simples, qui ont été travaillés dans un projet de recherche au Mexique. Les deux problèmes choisis peuvent être utilisés dans les premières années à l'université, et même dans les derniers cours de la terminale scientifique.

II.1. Un problème d'algèbre linéaire : problème de circulation

Dans une ville on a besoin de contrôler la circulation des véhicules au centre de la ville. Un schéma montre le réseau routier autour la zone où on l'on veut contrôler la circulation ainsi que la quantité de véhicules qu'on a estimé circuler à l'heure.

Pour travailler ce problème il est nécessaire de poser quelques hypothèses, l'une d'entre elles est que les véhicules ne peuvent pas s'arrêter aux points du réseau, une autre est qu'il n'y a pas de feux aux intersections (de façon à ce que les véhicules circulent sans s'arrêter). On est intéressé à faire l'analyse de la manière dont on peut gérer la circulation. Particulièrement, on cherche à répondre aux questions suivantes :

Est-il possible de fermer une ou plusieurs rues ? Lesquelles ? Si on désirait avoir le moins possible de circulation dans une rue spécifique, quel serait le minimum de véhicules qui doivent passer afin de maintenir une circulation normale dans le réseau ? Est-il possible d'imposer la restriction suivante : ne pas permettre la circulation de plus de 200 véhicules sur une rue en particulier ?



II.2. Un problème d'équations différentielles : problème de mémoire

Une enseignante préoccupée par la tendance actuelle de l'enseignement et par la question de la gestion de l'information par des individus, nous demande de faire une étude sur la mémoire à court terme. En particulier, elle est intéressée quant à la quantité d'information qu'un individu peut mémoriser, le temps pendant lequel il peut retenir l'information, quel genre d'information est plus difficile à mémoriser, et quels sont les facteurs dont la mémorisation dépend, comme par exemple l'âge, le temps consacré à mémoriser, la quantité d'information, ou le niveau scolaire de l'individu.

III. Deux cadres théoriques complémentaires

Le travail de recherche présenté dans l'atelier a utilisé deux cadres théoriques qu'on considère pouvoir être utilisés de manière complémentaire.

III.1. Modèles et Modélisation

L'introduction de la modélisation comme stratégie d'enseignement a pour objectif d'aider les étudiants à développer leurs idées mathématiques et à leur donner une signification. Dans le domaine de la didactique des mathématiques il existe diverses positions théoriques sur la modélisation ; l'une d'elles, appelée « Modèles et Modélisation » (Lesh & English, 2005) propose que, quand les étudiants travaillent sur la solution d'un problème du réel, il est possible de trouver des évidences de leurs connaissances et stratégies de résolution de problèmes à travers une méthodologie où les élèves expriment leur processus de solution dans des produits concrets. Selon ce cadre théorique, quand les étudiants travaillent sur un problème ouvert, ils expriment verbalement leurs pensées, en mettant en évidence des systèmes conceptuels qu'ils utilisent, des relations entre concepts qu'ils ont établis ou qui sont favorisés par le problème et la façon dont ils l'emploient. Les auteurs ont développé des critères pour analyser les situations pouvant être utilisées en classe. Selon ces auteurs, il est nécessaire d'utiliser en classe des situations réelles et complexes où les étudiants peuvent raisonner mathématiquement, en utilisant ce qui est déjà connu pour eux. Pour y réussir il est important que les étudiants développent des instruments conceptuels qui peuvent être utilisés pour prendre des décisions et les justifier.

Les auteurs ont explicité des critères que les situations choisies doivent satisfaire. Nous les avons brièvement commentés par rapport aux situations présentées dans l'atelier.

- **Principe de réalisme** : les étudiants peuvent-ils faire face à la situation en utilisant leurs connaissances et leurs expériences ?
- **Principe de construction du modèle :** Est-ce que la tâche permet de rencontrer une situation où on doit confronter le besoin de modifier, affiner ou d'étendre ses connaissances ?
- **Principe d'auto-évaluation :** les élèves peuvent-ils évaluer leur modèle à partir des résultats obtenus ?
- **Principe de documentation** : Est-il possible que les étudiants rendent manifeste leur raisonnement ?
- **Principe de généralisation :** Est- il possible d'utiliser le modèle dans d'autres situations ?
- **Principe de simplicité :** Est-ce que la situation à modéliser est, en principe, simple ?

Encore une fois, la situation de la circulation a été questionnée du point de vue du principe de réalité, mais nous avons trouvé que les autres principes étaient satisfaits par les deux situations.

III.2. La théorie APOS

La description qui suit de la théorie APOS a été prise textuellement de Trigueros & Oktaç (2005) jusqu'à la description de l'utilisation de la théorie. La théorie APOS prend comme cadre de référence épistémologique la théorie de Piaget. À partir des idées piagétiennes sur la façon de passer d'un état de connaissances à un autre, la théorie APOS s'intéresse à la construction des concepts mathématiques, en particulier ceux qui correspondent aux mathématiques universitaires (Asiala *et al.*, 1996 ; Czarnocha *et al.*, 1999 ; Trigueros & Oktaç, 2005 ; Weller *et al.*, 2003).

Comme c'est le cas pour n'importe quel autre changement d'idées d'un environnement à un autre, cette transposition de l'épistémologie à l'éducation implique des arrangements et de nouvelles définitions.

Dans la théorie APOS la construction de la connaissance mathématique passe par trois étapes principales : action, processus et objet. Le passage par ces trois étapes n'est pas nécessairement linéaire. Un individu peut rester longtemps à des étapes intermédiaires, voire être à une étape pour certains aspects d'un concept et à une autre pour d'autres aspects du concept. Ce qui est vraiment linéaire c'est que la forme de travail qu'un individu montre face à diverses situations problématiques est différente quand il répond d'une manière qui peut être caractérisée dans la théorie comme un processus ou au contraire comme un objet ou une action. Il est clair aussi que le type de réponses de l'individu dépend beaucoup des exigences cognitives du problème posé.

Le mécanisme principal dans la construction de la connaissance mathématique dans cette théorie est l'abstraction réfléchissante. Ce mécanisme est activé à travers les actions physiques ou mentales que l'individu réalise sur l'objet de connaissance, par le moyen de la réflexion du sujet lui-même sur ses actions. De même que dans la théorie de Piaget, l'interaction entre le sujet et l'objet de connaissance est considérée comme dialectique.

Un aspect important du modèle APOS, comme instrument de recherche mais aussi comme instrument d'enseignement, se trouve dans le fait que pour travailler avec le modèle il est nécessaire d'interpréter les concepts à apprendre du point de vue des mathématiques, ce qui doit suivre une logique qui est différente de celle qui est utilisée pour construire des concepts d'autres disciplines. Au-delà de la partie cognitive, la théorie inclut un composant qui incorpore la partie sociale de l'apprentissage. Dans cette dernière partie, on prend en compte l'importance pour la construction des connaissances de la collaboration entre les étudiants et le professeur, ainsi que l'importance de l'utilisation d'autres moyens comme la technologie.

Dans la théorie APOS on commence par une analyse des concepts mathématiques à étudier. Dans cette analyse, connue comme décomposition génétique du concept (Dubinsky, 1986), on met en relief les constructions qui peuvent être nécessaires à l'apprentissage.

Au départ ce sont les chercheurs qui proposent, sur la base de leur expérience dans la classe, une décomposition génétique du concept à étudier. Plus tard, à travers le processus de recherche, cette décomposition est affinée pour qu'elle s'approche de l'activité observée chez les étudiants quand ils travaillent avec le concept. Il est important de dire qu'il n'est pas possible de parler de LA décomposition génétique d'un concept, car elle dépend de la formulation qui a été faite par les chercheurs. Il est possible que diverses décompositions génétiques coexistent pour un même concept ; quelle que soit celle qui est retenue, il est important que ce soit un instrument qui décrive effectivement les observations des travaux des étudiants.

Une décomposition commence, comme on l'a déjà dit, par l'analyse des constructions du sujet quand il apprend un concept mathématique en termes de ce qui est observable. Ces constructions sont caractérisées par les noms : action, processus, objet et schéma.

Action

Une action est une transformation des objets que l'individu perçoit comme quelque chose d'externe. Autrement dit, un individu qui a une compréhension d'une transformation limitée à une conception-action ne peut exécuter la transformation qu'en réagissant à des indications externes qui lui donnent des détails sur les pas à suivre. Puisque la conception-action est très limitée, les actions déterminent le début crucial de la compréhension d'un concept.

Un exemple d'une conception-action sur la notion de « classe latérale » (à gauche ou à droite) d'un groupe en algèbre abstraite est le suivant. Prenons le groupe modulaire Z_{20} (les entiers {0,…,19} avec l'opération d'addition modulo 20) et le sous-groupe H = {0, 4, 8, 12, 16} des multiples de 4. Il n'est pas très difficile pour les étudiants de travailler avec les classes latérales telles que 2 + H = {2, 6, 10, 14, 18} car elles sont formées, soit par une liste explicite des éléments obtenus en additionnant 2 à chaque élément de H, soit en appliquant une règle, par exemple, « on commence par 2 et on ajoute 4 » ou bien en appliquant une condition explicite comme « le résidu de la division par 4 est 2 ». La compréhension d'une classe latérale » comme l'ensemble des opérations qu'on considère vraiment effectives pour obtenir un certain ensemble est une conception-action. Dans le cas de S (le groupe de toutes les permutations de n objets), il faut quelque chose de plus pour travailler avec les classes latérales car il n'y a pas de formules simples.

Un exemple d'action de la condition de fermeture sur un ensemble donné de vecteurs consiste à prendre deux vecteurs de l'ensemble, faire l'addition et vérifier si le résultat est un élément de l'ensemble.

Processus

Quand on répète une action et que l'on réfléchit sur elle, l'action peut s'intérioriser comme un processus. Cela veut dire qu'il y a une construction interne qui se produit, qui exécute la même action, mais cette fois-ci elle pas nécessairement dirigée par un stimulus externe. Un individu qui a une conception-processus d'une transformation peut réfléchir sur les pas de la transformation, les décrire ou même les inverser sans vraiment les effectuer. En comparaison avec une action, l'individu perçoit le processus comme quelque chose d'interne, placé sous son contrôle, au lieu d'une réponse à des impulsions externes.

En algèbre abstraite, une compréhension des « classes latérales » intériorisée comme un processus inclut de penser à la formation d'un ensemble à travers l'opération d'un élément fixe, sur tous les éléments d'un sous-groupe particulier. De plus, il n'est pas nécessaire d'effectuer les opérations, mais seulement de penser qu'elles s'effectuent.

Quand on a une conception-processus, on peut former des « classes latérales » dans des situations où il n'y a pas de formule. En algèbre linéaire, un exemple de processus se rencontre quand un étudiant est capable d'exprimer les étapes nécessaires pour déterminer, sans besoin de vérification, que l'addition de deux éléments d'un ensemble de vecteurs donnés est ou n'est pas un élément dans l'ensemble. On peut dire que le sujet a intériorisé les actions en processus. De la même façon, quand il est capable d'expliquer comment chaque axiome se vérifie (sans avoir besoin de calculer) pour qu'un ensemble donné soit un espace vectoriel, on dit qu'il montre une conception-processus.

Les étudiants peuvent construire différents processus en faisant diverses chaînes d'actions sur un objet, et ils peuvent aussi coordonner ces processus ou les généraliser pour obtenir un nouveau processus.

Objet

Quand un étudiant réfléchit sur les opérations appliquées sur un processus particulier, il se rend compte de la totalité du processus et perçoit le processus comme une transformation globale et il peut aussi construire par lui-même cette transformation. On dit alors que l'étudiant a encapsulé le processus pour construire un objet cognitif. On dit donc que l'étudiant a une conception-objet d'un concept mathématique s'il est capable de travailler avec cette idée comme une entité mathématique. Ceci prend en compte la capacité de faire des actions sur l'objet et de raisonner sur les propriétés de cet objet.

Les étudiants peuvent aussi renverser l'objet ou le désencapsuler pour travailler encore une fois avec le processus si nécessaire pour la solution d'un problème. Par exemple si x est un élément et H un sous-groupe du groupe G, et si un étudiant pense d'une manière générale à la classe latérale (à gauche) xH comme un processus dans lequel on fait opérer x sur chaque élément de H, ce processus peut être encapsulé en un objet xH. L'étudiant est alors capable de faire des opérations sur cet objet, aussi bien que de désencapsuler cet objet pour utiliser ce processus lorsque nécessaire.

En algèbre linéaire, un étudiant qui est capable de démontrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs est un sous-espace d'un espace vectoriel est très vraisemblablement en train de manifester une conception-objet du concept « combinaison linéaire ». Dans le cas du concept sous-espace, cette évidence peut inclure sa possibilité de déterminer si deux ensembles de vecteurs différents forment des sous-espaces équivalents.

Schéma

On appelle schéma d'un thème mathématique ou d'un concept plus général, la collection d'actions, de processus, d'objets et d'autres schèmes qui ont des liens entre eux de telle façon qu'ils forment pour l'étudiant un cadre cohérent. L'individu peut être ou ne pas être conscient du cadre qui rend les liens possibles. Pour que l'individu démontre que cette collection est cohérente, il est nécessaire qu'il soit capable de reconnaître les différentes situations où elle est applicable, qu'il puisse décider entre les types de problèmes qui peuvent être résolus en utilisant cette collection et ceux où elle ne sert pas et qu'il puisse connaître les capacités de la collection.

Les étudiants peuvent considérer un schéma comme un objet sur lequel l'on peut faire des actions. Quand les étudiants sont capables de considérer un schéma comme un objet on dit qu'ils ont thématisé le schéma. On a donc deux façons de construire des objets, soit par l'encapsulation d'un processus, soit par la thématisation d'un schéma.

III.2.1. APOS comme instrument didactique

Comme nous l'avons déjà mentionné, une décomposition génétique est construite par les chercheurs comme une première approximation pour modéliser l'apprentissage du concept mathématique en question. De plus, non seulement cette décomposition est utilisée dans la recherche, mais elle sert aussi comme instrument du projet d'enseignement. Le cycle ACE (Activités – Discussion en Classe – Exercices), comme nous le décrirons plus tard, se base sur les idées de cet instrument et tout est préparé pour que les étudiants puissent faire les constructions mentales prévues dans la décomposition génétique.

III.2.2. Visualisation en APOS

La représentation graphique et géométrique est considérée comme une partie intégrante de la construction des concepts. Le développement de la représentation demande aussi une intériorisation des actions, une encapsulation des processus et une construction des liens avec l'objet analytique. Quand on utilise la théorie APOS pour développer des activités et des matériels pour les étudiants, la représentation graphique est incluse soit dans la Discussion, soit dans les Activités.

Quand on considère que cette représentation joue un rôle important dans la construction des concepts, une partie centrale lui est consacrée. La théorie APOS se centre sur la visualisation des processus qui transforment les objets. Pendant que la visualisation des objets statiques est relativement facile à faire, la visualisation des processus dynamiques demande la construction mentale de ces processus sur des phénomènes statiques (Zazkis *et al.*, 1997).

III.2.3. Le rôle du professeur

Dans cette approche, pendant que les étudiants travaillent les activités en petits groupes, le professeur joue le rôle de guide : il aide les étudiants, il pose des questions. Il décide par avance des activités à utiliser en classe et de celles qui feront partie des devoirs. Dans la discussion, il aide à l'institutionnalisation des savoirs.

III.2.4. L'utilisation de la théorie APOS

La théorie APOS a été utilisée par un certain nombre de chercheurs provenant de nombreux pays pour étudier la façon dont les étudiants construisent divers concepts mathématiques. Peut-être que les travaux les plus connus sont ceux qui se réfèrent au concept de fonction, mais la théorie a été appliquée avec succès aux concepts de l'Analyse, de l'Algèbre Abstraite, des Équations Différentielles et de la Logique Mathématique. La théorie n'a pas été utilisée uniquement comme cadre théorique pour faire de la recherche, elle a été aussi appliquée à la préparation de matériels d'enseignement et de manuels universitaires. L'utilisation de ces matériels a été l'objet de projets de recherche qui ont montré qu'effectivement les étudiants qui les utilisent réussissent à faire les constructions prévues par la théorie, et par conséquent à apprendre les concepts avec plus de profondeur que les étudiants qui suivent d'autres méthodes (Weller, et al, 2003)

Mais, comment introduire la modélisation dans la théorie APOS qui ne la considère pas d'emblée ? Quels problèmes se posent par l'introduction de la modélisation de situations réelles dans la salle de classe ? Comment peut-on utiliser la modélisation en conjonction avec une théorie de la didactique des mathématiques, telle qu'APOS ?

III.2.5. La modélisation avec APOS. Premières idées

Comme on peut le voir à partir de ce que nous avons présenté sur le cadre théorique APOS, il n'y a aucune référence dans la théorie à la modélisation, comprise non pas comme modélisation de l'activité mathématique de l'élève, mais comme la mathématisation d'un problème du réel en termes mathématiques. La théorie a donc besoin d'une extension. Cependant, il est important de signaler que quand on se réfère à la modélisation, celle-ci n'est pas limitée aux situations en dehors des mathématiques, il est aussi possible de considérer des situations de modélisation qui peuvent être situées comme un problème qui se pose dans le domaine d'une situation mathématique. Et même les problèmes dits réels à travailler ne peuvent pas être séparés complètement de l'activité de construction des mathématiques.

Du point de vue de la théorie APOS on pourrait dire que la modélisation est importante, non seulement pour le résultat qu'on peut obtenir de la modélisation mais pour le processus même de modélisation et pour ce qui peut être fait avec la solution. De ce point de vue, ce qui nous intéresse c'est de rencontrer des situations qui soient utiles pour la construction des connaissances mathématiques. On peut alors commencer par se demander : Quelles sont les constructions impliquées dans l'activité de modélisation ?

Une première réponse peut être la suivante : En face d'un problème, l'individu doit coordonner les schémas qu'il a construits dans le domaine des mathématiques et dans d'autres domaines qui peuvent être utiles pour commencer à faire des actions d'exploration du problème. Ces schémas ou des composants de ces schémas lui permettent d'explorer la situation proposée et, possiblement, de donner une première réponse aux questions proposées par le problème. Par exemple, pour le problème de la circulation, l'exploration peut commencer par l'analyse du nombre d'autos qui rentrent dans le système et ceux qui en sortent afin de trouver s'il y a une rue qui peut être fermée ; dans la situation de la mémoire, il est possible d'utiliser un schéma de fonction et le coordonner avec ce qu'on connaît sur la mémoire pour faire un graphe d'une fonction qui pourrait modéliser la situation.

L'exploration peut être décrite en termes d'actions sur les éléments du schéma. Ces actions peuvent être intériorisées dans des processus où la situation est considérée de manière générale et où il est nécessaire de formuler quelques hypothèses pour la simplifier et pour chercher des éléments de réponse préliminaires, qui permettent de mieux la comprendre. Le résultat de la coordination de ces processus est un nouveau processus où les variables mathématiques liées à la situation sont choisies. Des actions ou processus nécessaires pour déterminer les relations entre ces variables sont faites, et il est alors possible d'obtenir une première mathématisation de la situation. Par exemple dans la première situation, il est possible de choisir les croisements des rues, ou les morceaux des rues comme des variables et d'établir leur lien avec les entrées et sorties du réseau ; dans la seconde, il est possible de considérer que ce que l'on peut mémoriser dépend du temps, que la quantité d'information mémorisée ne peut pas grandir indéfiniment, et que la façon dont l'information mémorisée change joue un rôle important.

Une fois que le problème a été représenté mathématiquement, l'individu dispose d'un modèle sur lequel il peut faire des actions, c'est-à-dire, qu'il peut l'encapsuler comme un objet. L'individu fait des actions sur ce modèle afin de l'analyser et de déterminer ses propriétés. Ces actions peuvent être intériorisées en des processus qui lui permettent de faire des coordinations avec ses schémas, pour transformer le modèle. La coordination de ces processus rend la construction de nouveaux schémas possible. Les processus de transformation et de coordination peuvent être thématisés dans un nouveau schéma. Quand cela arrive, l'individu peut faire des actions et des processus sur cet objet et répondre aux questions posées, analyser le modèle, le modifier, répondre à des nouvelles questions, généraliser le modèle et recommencer. De cette façon, un nouveau cycle apparaît et le processus va se répéter jusqu'au moment où le modèle trouvé permet de répondre de manière satisfaisante aux questions posées.

Les schémas qui sont utilisés pour faire des actions sur le modèle peuvent s'avérer insuffisants pour répondre aux questions intéressantes. C'est à ce point là que la décomposition génétique des concepts peut se révéler utile pour préparer des activités qui favorisent la réflexion des étudiants et la construction de nouveaux processus, objets ou schémas mathématiques. La raison d'être de ces activités doit se reconnaître par leur relation avec le travail sur le modèle mathématique.

Quand une nouvelle situation se présente, le schéma construit pour le développement d'un modèle particulier, peut être désencapsulé pour faire des actions sur la représentation du problème et des processus de comparaison du nouveau problème avec des modèles déjà connus. Le résultat de cette comparaison peut amener l'étudiant à conclure que deux situations problématiques se ressemblent par leur formulation mathématique et qu'en dépit du fait qu'elles soient différentes, elles ont la même structure en termes du modèle mathématique qui peut être utilisé pour les étudier.

IV. Le travail dans l'atelier

Les participants de l'atelier ont travaillé par groupes de trois ou quatre après la présentation des situations de modélisation. Chaque groupe a choisi un des problèmes afin de l'analyser en essayant de répondre aux questions suivantes :

1) Quelles sont les idées mathématiques qui peuvent être introduites avec ce problème ?
2) Si on veut l'utiliser en classe, qu'est ce qu'on ferait ?
3) Quelles sont les difficultés que les étudiants peuvent avoir quand ils travailleront avec le problème ?

IV.1. Discussion autour des situations

Les participants de l'atelier ont posé beaucoup de questions autour des problèmes posés. D'une part, les deux problèmes sont tout à fait différents en tant que situations de modélisation. Le problème de circulation peut être considéré comme une situation déjà modélisée, ou partiellement modélisée, alors que le deuxième problème présente une situation totalement ouverte, où il est nécessaire de discuter et de prendre de nombreuses décisions avant de proposer un modèle. De plus, dans le problème de la circulation, la présentation inclut des hypothèses. Dans une situation de modélisation du réel, ce sont les étudiants qui devraient les choisir. On s'est demandé dans l'atelier si la situation était vraiment une situation de modélisation.

Nous avons rappelé que les deux problèmes ont été utilisés en classe. Les décisions sur leur présentation avaient été déterminées par le niveau d'expérience des étudiants et aussi par le résultat des expériences préliminaires de leur utilisation avec des groupes similaires d'étudiants. Le problème de circulation a été présenté comme une situation complètement ouverte avec des groupes de différents niveaux d'étudiants dans un cours d'algèbre linéaire. Nous avons observé que pour les étudiants des sciences administratives le problème ouvert était difficile à gérer et que les discussions se centraient sur des aspects superficiels de la situation présentée. Nous avons alors décidé de présenter les hypothèses du problème pour diriger l'attention des étudiants vers les aspects de la situation qui pouvaient être le plus facilement modélisés. D'autres groupes, comme ceux d'étudiants de mathématiques, ont travaillé avec une présentation ouverte du problème et ont été capables de poser par eux-mêmes les hypothèses incorporées à la version du problème présenté dans l'atelier.

Les participants ont aussi analysé les deux problèmes du point de vue des critères de la théorie « Models and Modeling ». Après la discussion, nous avons décidé qu'en tant que situation problématique la situation ne devait pas être présentée déjà modélisée, même partiellement. Nous avons retravaillé ensuite sur les problèmes en petits groupes de participants et posé la question : quelles sont les idées mathématiques qui peuvent être introduites avec ces problèmes ?

IV.2. Analyse des situations du point de vue des mathématiques

L'analyse des situations, dans l'atelier, en termes des concepts mathématiques qu'on peut introduire en les utilisant a été très riche. La première situation était plus claire, car les hypothèses et quelques informations additionnelles étaient incluses dans la présentation même du problème. Il était très clair pour les participants qu'on pouvait la modéliser en utilisant un système d'équations linéaires. Il était clair aussi que les concepts qu'on pourrait introduire avec le modèle étaient ceux de solution de systèmes, matrices, et quelques notions de programmation linéaire.

La seconde situation peut être analysée en utilisant différents outils, par exemple les fonctions ou l'analyse. La connaissance de la classe où la situation a été introduite a permis de se rapporter aux équations différentielles de premier ordre. Les concepts que nous avions pensé introduire étaient le concept même d'équation différentielle, celui de solution et le statut des conditions initiales.

Après une brève discussion sur la modélisation des problèmes, les questions suivantes ont été présentées : Si l'on voulait l'utiliser en classe, qu'est ce que l'on ferait ? Quelles ont été les difficultés des étudiants dans la situation de classe ? Comment utiliser les éléments d'une théorie cognitive dans la situation de modélisation ?

Nous avons alors introduit quelques idées sur des cadres théoriques qui avaient été utilisés lors de nos expériences afin de les utiliser postérieurement dans l'analyse des activités présentées aux étudiants. Après la discussion autour des concepts mathématiques qui pouvaient être introduits avec chacune des situations, les cadres théoriques ont été présentés avec un bref commentaire des participants sur les deux théories et nous avons parlé un peu du travail des élèves.

Nous avons présenté aussi, dans l'atelier, une décomposition génétique pour les systèmes d'équations algébriques linéaires (Trigueros *et al.*, 2007). Nous avons analysé ensuite quelques activités qui ont été employées dans la salle de classe en utilisant les éléments des décompositions génétiques. Finalement nous avons brièvement introduit quelques résultats de la recherche avec les élèves et leurs difficultés, car les participants en ont montré de l'intérêt, mais ces questions n'ont pas été discutées dans l'atelier.

IV.3. Exemple de décomposition génétique et des activités analysées

On présente ici la décomposition génétique du concept d'équation différentielle du premier ordre (pour consulter celle des systèmes d'équations, voir Trigueros *et al.* 2007). Dans le cas du modèle de la mémoire, la décomposition génétique qui a été employée pour guider l'élaboration des activités était celle du concept d'équation différentielle de premier ordre.

Pour construire le schéma « solution d'une équation différentielle de premier ordre », il faut avoir construit d'abord les objets : ensemble, variable, équation algébrique, dérivée d'une fonction de variable réelle, intégrale d'une fonction de variable réelle, ainsi qu'un schéma de fonction.

Les processus de fonction de variable réelle, de dérivée et d'équation peuvent être coordonnés pour construire un nouveau processus où il est possible de considérer comme une équation une expression qui lie une fonction à sa dérivée et où l'inconnue est la fonction. Le processus peut s'encapsuler en un objet : une équation différentielle.

Pour construire l'objet solution de l'équation, il est nécessaire de faire des actions pour vérifier si une fonction donnée est solution d'une équation donnée ou pas. Ces actions sont intériorisées dans un processus où il est possible de considérer toutes les fonctions possibles qui sont solution d'une équation différentielle du premier ordre donnée. Ce processus est coordonné avec le processus ensemble pour construire l'ensemble de toutes les fonctions qui sont solution de l'équation différentielle, et ces processus peut s'encapsuler en l'objet « ensemble solution ».

Pour trouver des solutions d'une équation différentielle, il est nécessaire de faire des actions sur l'équation différentielle comme processus. Ces actions peuvent être des itérations en utilisant comme point de départ la condition initiale (actions numériques). Quand l'étudiant répète ces actions en prenant le dernier résultat comme point de départ, il peut construire un tableau pour montrer des points différents qui appartiennent de manière approximative à la fonction solution. Ces actions peuvent être intériorises en un processus qui permet l'approximation de la solution de l'équation pour une condition de départ donnée.

D'autres actions possibles peuvent être les suivantes : prendre un point de l'espace et utiliser l'équation donnée pour calculer la dérivée et la représenter comme un segment de droite sur le plan cartésien (actions graphiques). Quand ces actions se répètent pour plusieurs points, ils peuvent s'intérioriser en un processus qui permet de considérer tous les segments de droite qui pourraient se construire de cette façon et construire ainsi une représentation du champ des tangentes de l'équation. Ce processus peut se coordonner avec le processus de construction des courbes tangentes à ces segments et les considérer comme une représentation graphique de l'ensemble solution d'une équation donnée.

Une troisième construction à suivre consiste en des actions conduisant à l'intégration de l'équation différentielle, quand c'est possible, pour trouver une solution ou une famille de solutions. Ces actions peuvent être intériorisées en un processus pour trouver la solution d'une équation donnée. Tous ces processus peuvent être liés entre eux et avec l'objet équation différentielle et l'objet ensemble solution pour construire le schéma.

Exemples d'activités

I.3 Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction ? Quels renseignements nous donne-t-elle sur la fonction ?
- Pour les équations suivantes : x'=ax, x'=at-b, x'= ax + b…
- Utiliser cette information pour analyser comment la fonction solution change.
- Faire un graphe qui montre le comportement de la solution
- Que pouvez-vous dire de la concavité de la solution ?
- Est-ce que la solution a des maximums, des minimums ou des points d'inflexion ?
- Est-ce que la solution que vous avez trouvée est unique ? Pourquoi ?

I.8 Si f'= g(f(t)) on dit que l'équation est autonome. Quels sont celles des équations des activités antérieures qui sont autonomes ? Pourquoi ?
- Comment peut-on résoudre une équation autonome ? Justifier.

IV.4. Quelques difficultés des étudiants

Enfin, les premières difficultés des étudiants qui ont participé à la phase expérimentale ont été présentées.

- dans la situation de la circulation les élèves proposèrent immédiatement une solution à partir de calculs avec les nombres donnés ; ils ne savaient pas comment utiliser les hypothèses ; ils ont eu des difficultés avec la définition des variables et des paramètres.
- dans la situation de la mémoire, les élèves se demandèrent comment faire la mathématisation du problème, quelles hypothèses pouvaient aider à poser la situation d'une manière plus adéquate, ils ont montré des difficultés avec les notions de fonction et de variation ; ils ont eu besoin de questions pour les guider.

Avec le guidage du professeur, les élèves des deux classes sont arrivés à différents modèles mathématiques. Le travail sur les modèles a été combiné avec le traitement des activités conceptuelles produites en s'appuyant sur la théorie APOS. Nous décrivons maintenant le travail dans la salle de classe qui a été présenté très rapidement dans l'atelier.

V. Description du travail dans la salle de classe

Avant la classe, on commence en faisant ou en choisissant une décomposition génétique des concepts à introduire et une révision des principes donnés antérieurement pour choisir un modèle à travailler dans la salle de classe. On fait ensuite une analyse *a priori* pour prévoir quels seront les nouveaux besoins demandés par la situation à modéliser. Avec l'information obtenue, on crée des activités pour les étudiants.

Une fois dans la salle de classe, on commence par le travail sur le modèle. Les étudiants utilisent ce qu'ils ont appris pour explorer, modéliser et répondre aux questions intéressantes. Le travail sur le modèle peut nécessiter de nouveaux concepts. C'est précisément au moment où les étudiants en ont besoin que le professeur introduit les activités qu'il considère pertinentes. Les activités prévues peuvent être modifiées selon les besoins réels des étudiants identifiés en classe. Après le travail sur les concepts, on organise une discussion générale où chaque équipe présente ce qu'elle a fait jusqu'à ce moment-là, pendant que les autres étudiants et le professeur posent des questions ou font des recommandations. Ensuite, on reprend la manipulation du modèle, et quand il y en a besoin on utilise d'autres activités. Ce cycle peut se répéter jusqu'à ce qu'on arrive au but prévu – par l'enseignant – de l'activité de modélisation.

C'est de cette façon que nous avons donné une réponse aux questions : La modélisation peut-elle devenir un espace où les étudiants peuvent apprendre des mathématiques ? Est-il possible pour les étudiants d'arriver à des idées mathématiques intéressantes qui puissent servir pour introduire les matériaux du cours que l'on désire enseigner ?

V.1. Présentation de quelques résultats de la recherche

Il a été observé que le processus de discussion après chaque cycle de modélisation était utile. La discussion était un moment de réflexion et de justification où chaque groupe pouvait trouver des nouvelles idées pour retravailler le modèle.

Les cycles de modélisation : le cas du modèle de la mémoire

Dans le cas du modèle de la mémoire, on peut décrire les cycles de modélisation suivis de cette façon : Sélection des variables et discussion pour trouver des relations entre les variables ; introduction de la variation de la fonction comme une variable intéressante ; affinement du modèle et première analyse, recherche des solutions possibles et du rôle des paramètres ; expérimentation, représentation et analyse des donnés ; travail sur la présentation.

Pendant le premier cycle, les étudiants ont essayé de trouver une fonction avec le comportement qu'ils pensaient qui pouvait décrire l'évolution du processus de mémorisation. Quelques groupes ont introduit des représentations analytiques de fonctions possibles, d'autres ont utilisé des représentations graphiques. Les variables utilisées étaient toujours la quantité d'information mémorisée et le temps. La discussion sur la viabilité des différentes fonctions proposées a conduit les étudiants à considérer la nécessité d'introduire des hypothèses pour justifier la sélection d'une éventuelle fonction, et pour justifier l'emploi des deux variables. Ils ont discuté aussi sur quelques facteurs qui ont une incidence sur la mémorisation et comment les prendre en compte dans les modèles proposés. Puis, nous avons discuté sur le rôle des hypothèses dans le processus de modélisation.

Dans le second cycle, quelques groupes ont commencé à considérer la quantité totale d'informations à mémoriser, et ont introduit l'idée de variation en prenant en compte la différence entre la quantité d'informations qu'on pourrait mémoriser au début et la quantité d'informations qu'on pourrait mémoriser quand on a déjà mémorisé un certain nombre de données, de paroles ou d'informations. Les premiers modèles prenant en compte une relation entre la variation de la quantité d'informations, la quantité d'informations et le temps sont apparus. La question « Comment trouver une fonction qui satisfait la relation ? » fut posée. La discussion générale après ce cycle se focalisa sur l'équation différentielle posée et sa justification. Après cette discussion, la plupart des équipes ont considéré l'introduction de la variation de la quantité d'information et sa relation avec la fonction dans une même équation.

Des modèles différents ont été proposés pendant le cycle suivant. Avec l'aide de la professeure et d'autres élèves, chaque équipe a tenté de trouver la façon de réduire le nombre de paramètres introduits dans les modèles. Ils se sont demandé comment on pouvait justifier si le modèle était pertinent ou pas. Un résultat intéressant dans ce cycle était que quelques groupes ont utilisé leurs connaissances sur la dérivée d'une fonction pour essayer de faire un graphe, trouver une fonction solution et considérer si cette fonction était ou non adéquate. Quelques procédures numériques ont été essayées et une équipe a utilisé un graphe similaire à l'espace des phases comme représentation pour déterminer le comportement de la fonction. À ce moment, la professeure a introduit des activités dans lesquelles les connaissances d'analyse étaient utilisées pour faire des représentations numérique et graphique de la solution d'une équation différentielle du premier ordre. Les concepts et les définitions introduits dans les activités ont été utilisés par les étudiants pour représenter leurs modèles. Dans la discussion à la fin de ce cycle, la pertinence du modèle et des hypothèses a été considérée, et quelques définitions et théorèmes sur lesquelles les étudiants avaient déjà travaillé dans les activités conceptuelles ont été institutionnalisés.

Avec une première représentation de la solution, les élèves ont discuté le rôle des conditions initiales. C'était important car dans certains modèles suggérés par les étudiants ces conditions initiales étaient considérées dans l'équation différentielle. Les étudiants ont aussi essayé de trouver des solutions pour l'équation mais ils ont rencontré beaucoup de difficultés. La professeure a introduit de nouvelles activités pour travailler quelques techniques de résolution liées aux modèles. Les étudiants ont appliqué ces techniques aux modèles pour obtenir finalement l'ensemble solution. L'étape suivante fut de concevoir une expérience pour vérifier le modèle.

Les expériences furent très variées et intéressantes. Par exemple, une équipe qui avait présenté un modèle en deux parties, l'une pour décrire combien d'informations une personne peut apprendre dans une liste avec un certain temps d'étude, et l'autre pour décrire comment s'oublie l'information après l'avoir étudiée, a élaboré une expérience où des personnes d'âges différents devaient apprendre une liste de mots et les répéter dans l'ordre. Ils les questionnaient toutes les deux minutes d'étude, et notaient le nombre de mots répétés correctement. Quand les participants ont appris toute la liste, il leur était demandé toutes les cinq minutes de donner la liste et le nombre de mots rappelés était noté. Les méthodes pour calculer les valeurs des paramètres étaient aussi variées. Quelques équipes ont utilisé des méthodes numériques simples, d'autres des méthodes graphiques. Les méthodes utilisées n'étaient pas sophistiquées, mais ce n´était pas le but de l'activité de les développer, il était plutôt question que les élèves se rendent compte de leur utilité et des limitations possibles.

Finalement chaque équipe a préparé une présentation finale où les étudiants devaient faire une analyse critique du modèle choisi et dans le cas où le modèle n'était pas adéquat discuter les changements possibles à introduire.

Exemple de cycles suivis par des groupes d'étudiants

Dans l'atelier nous avons discuté les cycles suivis par deux groupes en particulier et nous avons analysé quelques-unes des activités conceptuelles introduites :

1) *Sélection des variables et utilisation des hypothèses pour rencontrer des relations entre les variables*

Groupe I

1. *Variables* : m, mt, c pour le nombre de mots qu'on doit mémoriser, le nombre total de mots, le nombre de mots qu'on connait au temps initial.
2. *Hypothèses* : apprentissage d'un poème, nombre de mots fixé, le nombre de mots mémorisés dépend du total de mots, de ce qu'on a déjà mémorisé, et des mots qu'on savait déjà originellement.
3. m = amt + bm + c

Groupe II

1. Variables : x nombre de numéros qu'on a appris à chaque temps t, X total de numéros à apprendre,
2. Hypothèses : Chaque personne apprend d'une façon particulière et cela peut changer avec le temps, de plus la personne oublie une proportion des numéros qu'elle a appris. Le changement du nombre de numéros en est la différence.

2) *Introduction de la variation comme une variable du problème*

Groupe I

1. Après quelques discussions ils introduisent la variation : « ce qu'on va apprendre au futur c'est comment m change ». Alors, mt —>m', m, c, et am' + bm+ c= mt »
2. Ils ne peuvent pas résoudre l'équation.

Groupe II

1. Introduction des hypothèses : Modèle : x' = A(t) – B(t)x
2. Ils ne peuvent pas résoudre l'équation.
3. Analyse des modèles et raffinement des modèles

Une fois que les étudiants ont proposé une mathématisation de la situation, on peut se demander : Comment faire pour qu'ils arrivent à des nouveaux concepts et réussissent à les apprendre ? Quels aspects de leur connaissance peuvent être pris comme point de départ pour l'introduction de nouveaux concepts ? C'est à ce point qu'une théorie didactique peut se révéler très utile. C'est ici qu'on introduit les activités produites en utilisant la théorie APOS.

Les cycles de modélisation : le cas du modèle de la circulation

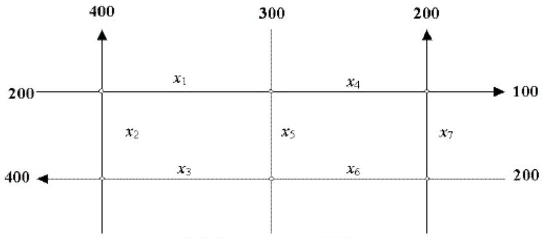
Le travail avec le modèle de circulation a suivi aussi des cycles qui peuvent se caractériser ainsi :

- Sélection de variables et relation entre variables
- Manipulation du système d'équations
- Représentation matricielle et manipulation algébrique
- Réponse aux questions spécifiques, représentation géométrique de l'espace de solutions

Dans ce cas, les élèves ont proposé des systèmes d'équations comme modèle mathématique de la situation. Ils connaissaient déjà les méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires, mais n'avaient jamais travaillé avec des systèmes où le nombre d'équations et de variables était si grand. Les activités conceptuelles proposées ont introduit la technique matricielle pour la solution des systèmes et la représentation graphique des équations linéaires et des systèmes, avec l'idée de faire évoluer le schéma de systèmes d'équations linéaires des étudiants :

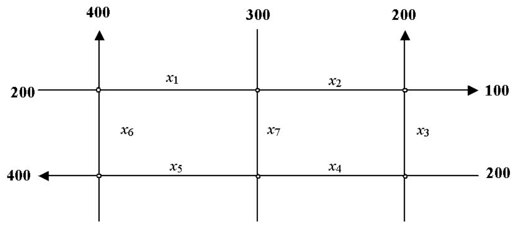
1) Modélisation

Groupe I



$$\begin{aligned}
x_2 + 200 &= 400 + x_1\\
500 + x_3 &= x_2 + 400\\
x_1 + 300 &= x_4 + x_5\\
x_5 + x_6 &= 300 + x_3\\
x_7 + x_4 &= 200 + 100\\
200 + 200 &= x_7 + x_6
\end{aligned}$$

Groupe II



$$\begin{aligned}
200 + x_6 &= 400 + x_1\\
x_1 + 300 &= x_2 + x_7\\
x_2 + x_3 &= 200 + 100\\
200 + 200 &= x_3 + x_4\\
x_7 + x_4 &= x_5 + 300\\
500 + x_5 &= 400 + x_6
\end{aligned}$$

2) Manipulation (avec beaucoup de difficultés, et même quelques groupes n'arrivent pas à trouver la solution)

Groupe III

$$\begin{array}{rrrrrrrcr}
x_1 & & & & & -x_6 & & = & -200\\
x_1 & -x_2 & & & & & -x_7 & = & -300\\
 & x_2 & +x_3 & & & & & = & 300\\
 & & x_3 & +x_4 & & & & = & 400\\
 & & & x_4 & -x_5 & & +x_7 & = & 300\\
 & & & & x_5 & -x_6 & & = & -100
\end{array}$$

Groupe II

$$\begin{array}{rrrrrrrcr}
-x_1 & & & & & +x_6 & & = & 200\\
x_1 & -x_2 & & & & & -x_7 & = & -300\\
 & x_2 & +x_3 & & & & & = & 300\\
 & & -x_3 & -x_4 & & & & = & -400\\
 & & & x_4 & -x_5 & & +x_7 & = & 300\\
 & & & & x_5 & -x_6 & & = & -100
\end{array}$$

3) Nouvelle technique et nouveaux concepts

Exemple d'Activités :

I. 4. Comment expliqueriez-vous à un autre étudiant que le vecteur x est une solution d'un système d'équations donné ?

II. 6. Résoudre le premier des systèmes suivants pas à pas. Utiliser la méthode d'addition des équations. Faire chaque pas dans une même colonne à gauche de la page du cahier.

- Répondre : Qu'est-ce qui change ? Qu'est-ce qui ne change pas ?

- Écrire un tableau avec les coefficients des variables et le terme indépendant dans la colonne à droite de la page.

- Comment pouvez- vous trouver un tableau qui ait les mêmes nombres que le second système à gauche à partir du premier tableau. Et pour le troisième ? Et les suivants ?

- On peut utiliser cette méthode pour résoudre le système plus systématiquement. On appelle le tableau Matrice augmentée du système, et la procédure Elimination Gaussienne.

- Écrire la matrice augmentée des autres systèmes.

- Résoudre les systèmes en utilisant uniquement l'élimination gaussienne.

- Combien de solutions ont chacun des systèmes ?

- Écrire chaque solution en termes des paramètres, s'il y a lieu.

i)
$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0\\
3x_2 + 8x_3 &= 8\\
-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
x_2 - 4x_3 &= 8\\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1\\
5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1
\end{aligned}$$

iii) $\begin{aligned} -x_1+5x_2+3x_3-2x_4&=4\\ 3x_1-x_2+3x_3-7x_4&=-3\\ 4x_1+2x_2-x_3+3x_4&=0\\ x_1+3x_2-4x_3+5x_4&=6 \end{aligned}$ ….

II. 7. Pour les matrices augmentées suivantes écrire le système correspondant…

II. 10. Montrer que la solution d'un système d'équations non homogène peut se trouver comme x = xh + xp où xh est la solution du système homogène et xp est une solution du système non homogène.

Les étudiants ont réussi à utiliser la méthode introduite pour résoudre les systèmes. Par exemple on trouvait :

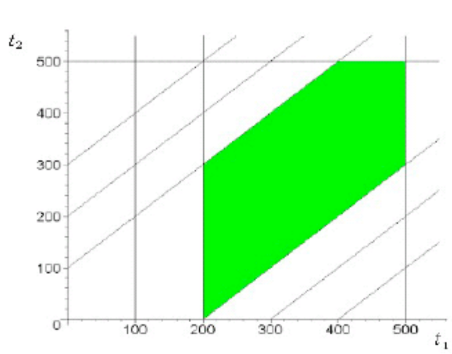
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -200\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -300\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 400\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 300\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \end{array}\right)$$

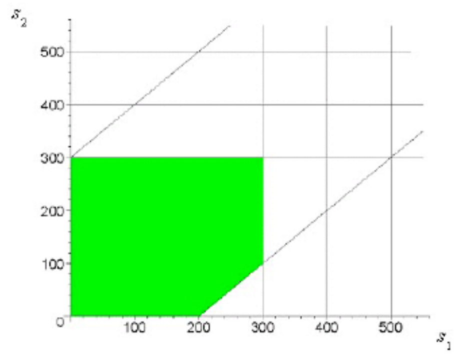
Réponse aux questions : nécessité de paramétrisation

$$:\ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200+t_1\\ 100+t_1-t_2\\ 200-t_1+t_2\\ 200+t_1-t_2\\ -100+t_1\\ t_1\\ t_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ 300-s_2\\ 100+s_2\\ 100+s_1+s_2\\ 200+s_1+s_2\\ 300-s_2 \end{pmatrix}$$

Les étudiants ont eu beaucoup de difficultés pour répondre à la deuxième des questions initiales, mais la professeure a proposé au groupe I de faire quelque chose comme la figure suivante (à gauche) avec la solution qu'on a rencontrée.

La professeure a demandé aux étudiants de comparer les solutions rencontrées en tant que solutions du même système, et en tant que représentations de la circulation dans les rues. Puis elle a suggéré de faire une figure comme celle proposée par le groupe I pour les autres solutions trouvées et de comparer ces figures. Elle a posé aussi les questions suivantes : Quelle forme de solution et quelle représentation sont les plus adéquates ? Pourquoi ?





V.2. Quelques considérations concernant la recherche

Pour les deux situations présentées, après chaque cycle, le travail des élèves a été conservé, les discussions des équipes et la discussion générale ont été décrites en utilisant des guides d'observation et enregistrées. Toute cette information est actuellement analysée avec plus de détail.

Les résultats trouvés jusqu'à présent dans la recherche sont cohérents avec les résultats d'autres chercheurs qui ont utilisé la modélisation dans l'enseignement des mathématiques : les étudiants sont motivés, ils développent des outils conceptuels, ils ont l'opportunité de réfléchir sur leurs propres connaissances. On a comparé les résultats dans les évaluations des étudiants qui ont suivi un cours comme celui présenté ici, avec des étudiants qui ont suivi des cours traditionnels. Dans les deux situations, on a trouvé que les étudiants qui ont eu l'opportunité de modéliser des situations en contexte, complétée par le traitement d'activités basées sur la décomposition génétique des concepts répondaient mieux aux questions conceptuelles et à celles où ils avaient besoin de prouver un théorème ; ils étaient aussi capables d'appliquer les idées sur la modélisation à la résolution de problèmes qui avaient la même structure que ceux travaillés en classe. Par contre, les étudiants qui avaient suivi un cours traditionnel avaient un meilleur contrôle des algorithmes de résolution des problèmes et des méthodes de résolution d'équations différentielles ou de systèmes d'équations linéaires, mais ils montraient beaucoup de difficultés avec les questions conceptuelles, les preuves et la résolution de problèmes.

La recherche sur ces deux exemples montre comment les deux cadres théoriques choisis peuvent être utilises de façon complémentaire pour planifier et gérer des expériences de modélisation dans la salle de classe.

V.3. Limitations

Bien que la modélisation comme outil d'enseignement puisse être intéressante et opportune vis-à-vis de l'apprentissage des élèves, il aussi nécessaire de prendre en considération quelques problèmes liés à son utilisation en classe.

On peut, par exemple, perdre l'orientation générale du cours. Le processus de modélisation peut amener l'intérêt des étudiants et du professeur aux questions propres de la modélisation ou diriger un problème dans une direction qui est en dehors du sujet qu'on désirait traiter. Il faut que le professeur, lui aussi, apprenne comment gérer la classe et comment délimiter le temps à utiliser et les thèmes à traiter.

Faire la décomposition génétique d'un concept ou d'un thème n'est pas facile. On peut trouver quelques décompositions génétiques dans la littérature. On peut les utiliser, ou au moins les prendre comme point du départ pour les affiner ou les changer. Mais pour la plupart des thèmes que l'on enseigne il n'y a pas de décompositions génétiques qu'on peut directement utiliser.

Une question qui est toujours pertinente quand on utilise une nouvelle méthode d'enseignement est l'élaboration d'une évaluation. On sait qu'il est important de prendre en considération le travail des étudiants pendant le processus de modélisation. Pour ce faire, on peut avoir besoin de chercher des formes alternatives d'évaluation.

Il faut aussi relever que quelques étudiants préfèrent la méthode traditionnelle d'enseignement. Leur résistance peut être un obstacle pour le travail en classe.

Il se peut que l'institutionnalisation des concepts faite au cours des sessions de discussion générale ne soit pas en relation directe avec ce qu'on trouve dans les manuels. Cette situation peut aussi être un obstacle pour l'apprentissage des élèves.

V. Réflexion finale

Dans notre recherche, nous avons trouvé que la décomposition génétique des concepts à enseigner est un instrument très utile pour guider la définition des activités à choisir quand on veut introduire et faire évoluer certains concepts. Nous avons utilisé aussi quelques idées du cadre théorique « Modèles et Modélisation » car nous avons trouvé qu'elles sont utiles pour étendre et pour évaluer les problèmes à proposer aux étudiants.

Pendant les études que nous avons faites jusqu'à ici, nous avons trouvé que ces deux cadres ont contribué d'une façon complémentaire comme guides des décisions d'enseignement que nous avons prises à chaque séance dans la classe, soit pour décider de l'orientation des activités, soit pour affiner la situation à modéliser ou pour choisir les outils conceptuels et de communication à développer par les élèves.

Nous avons appris dans ces expériences qu'il est toujours important d'introduire des discussions au sein de la classe pour faire une institutionnalisation des connaissances après chaque cycle. Au début, nous faisions une discussion sommaire à la fin du processus complet, mais nous avons remarqué que les questions qui étaient importantes pour les étudiants pouvaient s'oublier quand on les laissait sans réponse, et que les élèves préféraient formaliser peu à peu la théorie qu'on était en train d'introduire.

Nous avons trouvé que les étudiants avaient des opportunités d'utiliser et de montrer leurs connaissances quand on utilisait la modélisation pour l'enseignement des concepts. Ces connaissances ont été utilisées par les professeurs comme guide de leurs décisions, mais elles ont été aussi très utiles pour la recherche, car chaque session de modélisation devenait une source d'information importante sur l'évolution des étudiants.

Presque toutes les recherches sur l'utilisation de la modélisation dans la salle de classe montrent que les étudiants sont très motivés. Nous l'avons trouvé aussi. Les étudiants prennent en charge la situation et s'impliquent dans la résolution. Ils assument une responsabilité dans leur propre apprentissage.

Il s'est avéré que les productions des étudiants à chaque cycle de modélisation étaient très utiles pour évaluer les élèves, comme cela a été proposé par les auteurs du cadre « Models and Modeling ». L'information obtenue sur leur développement était très variée et diverse, ce qui a permis à notre avis, d'avoir aussi une opinion plus informée sur leur évolution.

Alors que l'idée principale de ces expériences était l'enseignement de mathématiques en utilisant la modélisation de situations du réel, nous avons constaté que l'activité de modélisation favorisait aussi la compréhension par les étudiants de la nature des mathématiques comme activité utile pour donner sens aux phénomènes de notre environnement.

Revenant à l'utilisation des deux cadres théoriques et d'après notre expérience, nous pouvons dire que la modélisation en elle même ne suffit pas pour introduire les concepts mathématiques à enseigner et pour aider les étudiant dans leur apprentissage. La modélisation fait apparaitre au sein des discussions des idées importantes et intéressantes, et fournit un contexte aux connaissances, mais de notre point de vue, ces idées doivent être approfondies. C'est là que l'utilisation d'une théorie cognitive offre un important potentiel. La théorie cognitive, APOS, offre un moyen pour designer des activités dont l'objectif est la réflexion sur les concepts qui sont apparus dans les discussions des étudiants, les faire évoluer, et établir des relations entre concepts. Avec les nouvelles connaissances, les étudiants peuvent retourner à la modélisation répondre à quelques unes des questions qu'ils avaient posées, reconstruire le modèle ou faire des généralisations. Ce cycle peut se répéter jusqu'à ce que les élèves et le professeur considèrent que le modèle remplit les conditions qu'on avait imposées et que les étudiants aient les connaissances espérés.

Le travail développé dans l'atelier présente un exemple d'une méthode où la modélisation peut devenir un espace où les étudiants peuvent apprendre les mathématiques et d'une théorie cognitive pouvant servir à introduire les matériaux du cours que l'on désire enseigner.

María Trigueros G.
ITAM/CINVESTAV
trigue@itam.mx

Références

Asiala M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D & Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II,* 3, 1-32.

Barbosa J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(2), 143-162.

Blum W., Galbraith P., Henn H-W., & Niss M.. (Eds.) (2006). *Applications and Modelling in Mathematics Education*. New ICMI Studies Series no. 10. New York: Springer.

Blum W. Galbraith P.L. Henn H.-W, & Niss M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (New ICMI Study Series, Vol. 10). New York: Springer.

Blum W., & Niss M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 22 (1), 37-68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 86-95.

Burkhardt H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195.

Chaachoua H., & Saglam A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching mathematics and its applications*, March 2006, 25, 15-22. Oxford University Press.

Czarnocha B., Dubinsky E., Prabhu V, & Vidakovic D. (1999). One Theoretical Perspective in Undergraduate Mathematics Education Research. In O. Zaslavsky, O. (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME* (Vol 1, pp. 95-110).

Dubinsky E. (1986). Reflective abstraction and mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* 5 (1), 55-92.

Galbraith P., & Clatworthy N. (1990), Beyond Standard Models - Meeting the Challenge of Modelling. *Educational Studies in Mathematics ,* 21 (2), 137-163.

Kaiser G., & Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302-310.

Kaiser G., Blomhoj M., & Sriraman B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 3(2), 82-85.

Lesh R., & English L. (2005). Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - The International Journal on Mathematics Education,* 37(6), 487- 489.

Trigueros M., & Oktaç A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, 157-176.

Trigueros M., Oktaç A. & Manzanero L. (2007). Understanding of systems of equations in Álgebra. *Proceedings of the 5th Congress of ERME, the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca, Cyprus.

Weller K., Dubinsky E., Loch S., McDonald M. A., Merkovsky R. R. (2003). Students. Performance and Attitudes in Courses Based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. *Research in Collegiate Mathematics Education,*V, 97-131.

Zazkis R., Dubinsky E., & Dauterman E. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435-457.