Atelier : recherche et enseignement universitaires en mathématiques, interactions actuelles et possibles

Carl Winsløw

Résumé

L'enseignement universitaire des mathématiques touche un public assez restreint, dont la plus grande partie s'oriente vers d'autres études que les mathématiques pures ou appliquées. Il est donc tout à fait compréhensible que, même si l'on dispose d'un nombre croissant de travaux sur le contexte universitaire, celui-ci ne fait pas l'objet d'une activité de recherche comparable à celle qui est vouée à l'enseignement général. La relation entre discipline scolaire et discipline scientifique a néanmoins occupé un rôle central tout au long du développement de la didactique. Ainsi, Brousseau (1986) utilise la différence entre chercheur et enseignant pour rendre compte du travail épistémologique à accomplir pour le dernier. Sans suivre les traces du chercheur – dont les conditions sont le plus souvent éloignées de celles de l'élève – Brousseau observe que l'activité de l'élève peut ressembler, parfois, à celle du chercheur. Dans cet article, on se penchera sur les questions de recherche et d'enseignement universitaires, notamment à partir de données provenant d'une étude comparative (Madsen & Winsløw, 2009) des pratiques d'enseignant-chercheurs danois en mathématiques et en géographie physique. Nous proposons, pour orienter le travail, un cadre d'analyse lié à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999).

Introduction

C'est une spécificité importante pour les universités d'employer ce qui en français s'appelle des « enseignants-chercheurs », à savoir des personnes qui exercent à la fois deux activités *a priori* distinctes : la recherche dans un domaine spécialisé X, et l'enseignement dans un domaine Y normalement lié (sinon identique) à X. Dans les universités, ces deux formes de pratiques sont donc liées, dans la personne de l'enseignant-chercheur, dans le quotidien de celui-ci. Le lien existe aussi du point de vue des étudiants, pour lesquels la perspective de devenir des chercheurs de Y existe comme une option de carrière future. Finalement, les contenus et les méthodes enseignés sont plus proches de ceux de la recherche contemporaine que dans l'enseignement scolaire, tout particulièrement en mathématiques où la quasi-totalité de l'enseignement pré-universitaire porte sur des savoirs établis avant 1900.

La distance manifeste entre « mathématiques académiques » et « mathématiques scolaires », mais aussi les relations actuelles et potentielles qu'elles entretiennent, constituent un thème classique en didactique des mathématiques (e.g. Chevallard, 1985 ; Brousseau, 1986). Par exemple, Brousseau utilise la différence entre chercheur et enseignant pour rendre compte du travail épistémologique à accomplir pour ce dernier. Grosso modo, le chercheur part de « questions » (souvent, à chercher elles aussi) pour chercher des « réponses » qu'il formulera ensuite sous la forme « officielle » du savoir savant. L'enseignant part du savoir savant – souvent profondément transformé par une tradition didactique et curriculaire – pour trouver des « questions » pour l'élève, à travailler avec lui, questions qui devront à la fois être accessibles pour l'élève et rendre possible un apprentissage dont le résultat est, dans une certaine mesure, consistant avec le savoir visé. Sans suivre les traces du chercheur – dont les conditions sont le plus souvent éloignées de celles de l'élève – Brousseau observe que l'activité de l'élève peut ressembler, parfois, à celle du chercheur. En effet, une grande partie des produits de l'ingénierie didactique portent les traces de cette idée métaphorique de mettre l'élève en « situation de recherche ». Métaphorique, car personne ne peut ignorer les différences entre la position épistémologique, institutionnelle et temporelle de l'élève, et celle du chercheur.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 59-67.

Pour l'étudiant de mathématiques, cette différence est parfois moins évidente, et, paradoxalement, il en est de même pour une similitude éventuelle. La transposition didactique opère sur une distance moins grande, au moins en principe ; en même temps, il paraît juste de dire que l'étudiant vit peu, tout au long des programmes de licence, l'expérience d'un chercheur. Ainsi, Burton (2004, p. 198) note, dans le contexte d'une enquête à grande échelle avec des mathématiciens britanniques, qu' « il existe un écart monstrueux entre l'expérience de mathématiciens des connaissances mathématiques et l'expérience des étudiants (the gap between mathematicians' views of mathematical knowing and that encountered by learners is monstrous) ». Or, à partir d'un certain moment – qui n'est pas très bien défini – l'expérience de recherche devient, et est censée devenir, possible pour les étudiants. Dans le contexte américain par exemple, on voit l'émergence d'efforts soutenus pour avancer ce moment, pour des raisons variées. L'expression *undergraduate research* désigne en particulier un dispositif qui permettrait à l'étudiant débutant de s'engager dans des projets plus ou moins authentiques de recherche. Cette idée n'est pas sans soulever des réserves et de vrais problèmes pour l'enseignant-chercheur.

Dans cet atelier, nous avons travaillé ces questions, notamment à partir de données provenant d'une étude (Madsen & Winsløw, 2009) des pratiques d'enseignants-chercheurs danois en mathématiques et en géographie physique, mais aussi et en priorité, en puisant dans l'expérience des participants (en tant qu'enseignants, enseignants-chercheurs, ou bien étudiants de mathématiques, que ce soit leur occupation présente ou antérieure). Nous avons proposé un cadre d'analyse lié à la théorie anthropologique du didactique (la TAD, cf. Chevallard, 1999) pour orienter le travail.

Un sujet vif dans les recherches sur l'enseignement supérieur

Dans la branche des sciences de l'éducation portant sur l'enseignement supérieur (*higher education* en anglais), l'hypothèse d'un « nexus » (relations ou influences immanentes et mutuelles entre deux entités *a priori* distinctes) a été examinée dans des centaines de publications. Par exemple, Neumann (1992) a trouvé « une conviction forte qu'il existe une relation symbiotique entre l'enseignement et la recherche » parmi les administrateurs académiques de l'Australie. Elle a identifié trois « *niveaux* » de description de ce nexus :

(1) le nexus *tangible*, où l'enseignement doit se référer aux savoirs et aux méthodes d'une science dans son état actuel ;

(2) le nexus *intangible*, concernant les effets sur les modes de travail dans les situations d'enseignement qui résultent du fait que l'enseignant est aussi chercheur ;

(3) un nexus *global* qui se situe au niveau institutionnel (plutôt qu'individuel), dans le sens de dépendances et de corrélations entre enseignement et recherche à ce niveau.

À propos du nexus global, un grand nombre d'études ont essayé de montrer des corrélations (positives ou négatives) entre la *qualité* de la recherche et de l'enseignement d'une université, ce qui demande de définir une mesure de ces qualités et d'avoir un bon nombre d'universités où de telles études ont été faites. L'intérêt institutionnel est clair : par exemple, si l'on peut démontrer une simple corrélation positive - l'excellence de la recherche d'une université apporte plus ou moins automatiquement un enseignement excellent - alors on peut se focaliser sur le développement de la recherche. Ou au contraire, si on trouve une corrélation négative – la bonne recherche étant accompagnée d'un enseignement médiocre, et vice-versa – on pourra abandonner toute stratégie visant uniquement l'un des deux. Or, dans un article « clé » dans le domaine, Hattie et Marsh (1996) ont extrait de 58 études de ce type une totalité de 498 coefficients de corrélation, dont la moyenne (calculée par rapport à l'importance des études sous-jacentes à chaque terme) était statistiquement nulle. Ils ont conclu que la corrélation générale entre la qualité de la recherche et celle de l'enseignement est zéro, et dans ce cas il sera plus utile d'investiguer les modes de relations qui existent entre elles pour renforcer les corrélations positives (p. 533). En effet, dix ans plus tôt, Elton (1986, p. 300) a conjecturé l'impossibilité d'éclaircir, par les méthodes quantitatives et au niveau de l'institution, la question sur les relations possibles entre enseignement et recherche. Il suggère ensuite que :

> « It is necessary to distinguish between three activities - teaching, scholarship and research. It is then likely that at this [the individual, auth.] level teaching and research can fertilize each other, but only through the mediation of scholarship. » (p. 303)

Ainsi, *scholarship* (mot difficile à traduire en français – « travail érudit » ou « étude personnelle ») est proposé comme un facteur sous-jacent soutenant également l'enseignement et la recherche. Il est à noter que *scholarship* se situe pour ces auteurs au niveau individuel, tout comme les niveaux (1) et (2) de Neumann. À ce niveau, la spécificité disciplinaire s'impose.

Cela nous amène à considérer non pas l'existence et le caractère d'un nexus automatique et général, mais plutôt les conditions et les modalités d'un soutien mutuel des deux formes de pratiques au niveau d'un enseignant-chercheur ou d'une équipe d'enseignants-chercheurs, et de veiller à remarquer les spécificités de leur domaine de travail (pour nous, les mathématiques ; voir Madsen & Winsløw (2009) pour une étude comparée avec les géosciences).

Une approche anthropologique

Rasmussen et *al*. (2005) rappellent comment le « scholarship » avancé en mathématiques supérieures est une *activité* non seulement cognitive mais aussi communicative. Cela est vrai également pour la recherche et pour l'enseignement (que les auteurs considèrent comme des cas spéciaux) ; il faut également prendre en compte leur contingence par rapport aux institutions afin de mieux comprendre leur interaction. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers l'approche anthropologique du didactique (cf. Chevallard, 1999 pour les détails). Avec une adaptation (sinon un bouleversement) considérable apportée par des idées avancées par Bosch et Gascòn (2002), nous proposons de considérer les deux activités à partir de deux types d'organisations praxéologiques :

- Les organisations mathématiques (OM) dont les tâches (travaillées par les étudiants comme par les enseignants-chercheurs) sont mathématiques dans le sens usuel (portent sur des objets mathématiques), avec les techniques, technologies et théories associées ;
- Les organisations didactiques (OD) dont les tâches (assumées par l'enseignant) sont celles qui contribuent à introduire les étudiants dans une OM donnée, en se servant de techniques didactiques qui sont ensuite articulées dans une technologie didactique et, en principe, sauront être analysées voire même justifiées dans le cadre d'une théorie didactique.

La transposition didactique, en partie et localement réalisée par l'OD, se situe dans le passage d'une organisation mathématique régionale OM_m dans laquelle travaille le chercheur à une organisation locale OM_e dans laquelle l'étudiant est susceptible d'être introduit. Les liens entre OM_e et les organisations locales de OM_m où l'enseignant-chercheur trouve la matière de ses recherches se situent normalement au niveau technologico-théorique, avec des tâches et des techniques différentes. De l'autre côté, l'OD comprend parmi ses tâches « organiser » OM_e (souvent en partant de structures existantes relativement bien établies), ainsi que initier et organiser le travail de l'étudiant avec OM_e. Le travail de l'enseignant-chercheur sur OM_m et OD *interagit* donc avec le travail de l'étudiant :

$$(OM_m – OD) \leftrightarrow OM_{e.}$$

Les parenthèses indiquent que le lien entre OM_m et OD est direct et immédiat pour l'enseignant-chercheur, et que l'ensemble se lie plus indirectement (et parfois, de façon plus faible) à l'organisation mathématique du côté des étudiants. C'est dans ce schème que nous allons chercher les différents niveaux du nexus dont parle Neumann :

- Entre les *tâches d'enseignement* (relevant de l'OD) et les *tâches de recherche* (OM_m) : ceux-ci coexistent et se distribuent temporellement dans le travail de l'enseignant-chercheur ; on parlera d'un nexus minimal venant de contraintes extérieures pour ce travail ;
- Entre *techniques mathématiques* d'OM_m et *techniques didactiques* (OD) : par exemple pour construire les tâches d'OM_e, ou pour produire et communiquer des éléments technologico-théoriques d'OM_e ; on parlera d'un *nexus implicite* (proche de ce que Neumann appellent *nexus intangible* dans la mesure où celui-ci reste inarticulé) ;
- Entre *technologies et théories didactiques* (comme pratiquées et conçues par l'enseignant) et les spécificités du bloc technologico-théorique d'OM_m qui pourrait expliquer et justifier les choix de pratiques de l'OD, y compris ceux qui relèvent de la construction de l'OM_e ; comme ces relations se situent entièrement au niveau technologico-théorique on parlera de *nexus explicite* (qui sera donc proche du *nexus tangible* dans le sens de Neumann).

Notons que le nexus minimal est toujours présent en supposant que l'enseignant-chercheur est ce que le nom dit, c'est-à-dire qu'il enseigne et fait la recherche (une condition évidente pour considérer la relation au niveau individuel). Par contre, le nexus minimal n'implique pas d'autre lien perçu par l'enseignant entre ces tâches que d'être deux composantes de son travail.

Dans l'atelier, ces catégories n'ont pas pu être expliquées ni utilisées avec plus de détails que les principes suivants pour analyser les deux cas : le nexus minimal est constitué par les contraintes perçues en conséquence de la cohabitation des deux activités, par exemple quand le mathématicien parle d'elles comme « rivales » dans l'occupation de son temps. Quand les deux pratiques semblent se soutenir (l'expérience provenant de la recherche semble utile dans le travail d'enseignement, ou l'inverse), sans que cela relève de principes théoriques (spécifiques au mathématique et au didactique) pour le mathématicien : on y voit des éléments de nexus implicite ; quand, au contraire, le soutien est identifié par l'enseignant-chercheur comme relevant de principes théoriques (par exemple la structure de l'OM_m justifie certains choix par rapport à la construction de l'OM_e), on a affaire au nexus explicite.

Une étude empirique – et deux « cas » extraits des données

Les deux organisations OM_m et OD représentent des pratiques largement contrôlées par les mathématiciens, et il s'agit ici d'étudier leurs interactions. Alors que les pratiques de l'OD sont en partie « publiques » (en partie parce que ces pratiques incluent aussi le travail de préparation, de corrections de devoirs etc.), le bloc technologico-théorique l'est moins, dans la mesure où il existe (par exemple, dans les discours de comités de l'enseignement et dans les conversations informelles). À l'inverse, le bloc technologico-théorique de l'OM_m est voué à la publication et peut donc, dans ses états affinés, être librement étudié. Mais le bloc *pratique* de l'OM_m est difficile à observer : souvent, la recherche se fait par un individu seul ou par un couple de chercheurs. Pour observer leurs pratiques, il faudrait donc accéder à un espace plus ou moins « privé ». Les rares études de pratiques de recherche mathématiques, comme Burton (2004) et Misfeldt (2006), sont basées sur des entretiens avec les mathématiciens (qui parlent de leurs pratiques de recherche), tout comme les données discutées ici. La nouveauté de nos recherches consiste à analyser ces données avec le modèle praxéologique et avec l'intention explicite d'étudier le nexus MO_m – OD (y compris le nexus implicite).

Contexte

Nos données proviennent d'entretiens semi structurés avec 5 enseignant-chercheurs de l'Université de Copenhague (3 professeurs d'université, 2 maîtres de conférences). La grille des entretiens (*interview guide*) a fixé la structure générale de l'entretien, en vue de faire expliciter successivement aux interviewés :

(1) leur propre recherche, et plus spécifiquement les composantes praxéologiques d'un projet récent ;

(2) leur enseignement, et plus spécifiquement les composantes praxéologiques de leur travail sur un cours de niveau licence, enseigné l'année précédente ;

(3) les liens qu'ils voient entre (1) et (2), en regardant successivement les niveaux de nexus minimal, implicite et explicite, et en cernant les effets de ces liens sur le travail des étudiants (MO_e), naturellement, comme perçu par les interviewés.

Notre intérêt principal est bien sûr dans la partie (3), mais les deux autres parties de l'interview ont été utiles, aussi bien pour établir des références concrètes que pour éviter un discours trop marqué par des idéaux ou convictions sans lien avec la réalité vécue des interviewés. Les données ont ensuite été transcrites et codées selon un système correspondant au modèle théorique (pour plus de détails, voir Madsen & Winsløw, 2009).

Dans cet atelier, nous avons étudié des extraits assez courts de deux interviews, en vue d'illustrer la problématique et l'usage du modèle théorique. Ces extraits ont été présentés aux participants de l'atelier et sont décrits dans les sections suivantes.

Cas 1

NN est professeur d'analyse et mathématique physique ; il était à Princeton avant de rejoindre Copenhague. Il décrit comme projet de recherche un problème sur les particules chargées, sur lequel il a réfléchi pendant 10 à 15 ans, avec plusieurs phases de progrès, et qu'il a finalement résolu en trouvant une application surprenante de techniques mathématiques provenant d'un autre de ses travaux. Sa force en tant que chercheur est « une grande boîte d'outils mathématiques » qui lui sert pour les problèmes de physique théorique. Son enseignement est situé actuellement au début du programme (analyse et algèbre linéaire), où il est chargé de cours pour des centaines d'étudiants. Pendant l'automne, cela prend presque tout son temps ; le reste de l'année, il a peu d'enseignement (un ou deux petits cours avancés). Pour lui, l'intérêt de l'enseignement réside surtout dans la recherche ou la construction de « bons » exercices à poser aux étudiants. Il décrit plusieurs exemples, comme celui qui suit. Selon lui, la difficulté est de pousser les étudiants à leurs limites, sans pour autant créer trop de frustrations. Parfois, il lui arrive d'y trouver lui-même des défis mathématiques avec un rapport (plutôt faible) avec son domaine de recherche ; mais la plupart du temps, il y a une « concurrence » entre les deux tâches (bien qu'il trouve du plaisir dans les deux).

Dans le contexte du cours d'analyse de première année, NN dit :

> « Nous essayons de leur donner des tâches relativement ouvertes. (…) C'est-à-dire, où ce n'est pas qu'un exercice, avec une question et un point spécifique dans le manuel auquel on se réfère pour trouver une solution unique. (…) Par exemple, nous leur demandons de calculer π en utilisant la formule pour une fonction, comme arctan ou quelque chose comme ça, qui donne π en un point, et puis on se sert de la série de Taylor en un point où ils le savent [la valeur de la fonction]. Cela, je dirais, est un exercice complètement standard. Ils apprennent aussi à estimer l'erreur. Mais alors, nous allons plus loin et demandons « est-ce que vous pouvez avec certitude trouver les 100 premiers décimaux, en vous servant de cette méthode ? ». Ou bien on leur demande quand ils peuvent être sûrs d'avoir trouvé les 100 premiers décimaux. (…) Et ça, nous leur posons comme une tâche ouverte parce que nous ne savons pas nous-mêmes, bien sûr nous pouvons [savoir], mais nous ne considérons même pas en avance ce que sera la solution

> parfaite, parce que nous ne cherchons pas la solution parfaite, nous cherchons à les faire réfléchir sur les problèmes impliqués dans cette tâche [il explique les difficultés pour évaluer l'erreur dans ce cas]. S'ils se mettent dans cette problématique, nous sentons que nous avons obtenu beaucoup. (…) Nous prenons un exercice standard, et nous l'ouvrons quelque peu (…) afin de voir jusqu'où on peut aller avec ce type de tâche. (…) Ce n'est pas de la recherche, toutes les questions que nous leur donnons sont susceptibles d'être résolues par n'importe quel mathématicien. Mais pour eux, ils peuvent le vivre comme de la recherche. (…) Il faut leur faire vivre l'expérience d'avoir à explorer un terrain par eux-mêmes. Donc, le processus de recherche, nous sentons qu'ils l'ont. »

Un autre exemple issu du cours d'algèbre linéaire paraît, lui, plus proche de la recherche parce que les enseignants ne connaissent pas ou n'ont pas trouvé la solution : quel est le plus petit déterminant positif d'un « sudoku » rempli ? (Réponse : 405 ; avec l'aide des enseignants, on a *démontré* que, pour un sudoku A, det$A$ est divisible par 405 ; puis un étudiant a trouvé un sudoku avec det$A$ = 405, en utilisant *Maple*).

Sur la relation entre enseignement et recherche, NN conclut :

> « Là où les deux choses se séparent, c'est que, à un moment donné, ce qui fait ma recherche est rarement ce que j'enseigne. Il y a un conflit de temps que l'on ne peut nier. Mais je trouve les deux marrantes, même si ce sont mes propres recherches, que je trouve bien entendus les plus marantes, parce que là c'est moi-même qui joue, alors que, dans l'autre, j'essaye de faire jouer les étudiants. Et là, parfois, je voudrais plus de temps… mais j'aime bien enseigner aussi, et sentir que je peux profiter de mes mathématiques. »

Cas 2

MM est algébriste. Après 7 années comme maître de conférences à Essen en Allemagne, il est maintenant professeur à Copenhague. Il travaille sur le programme dit « de Langland » sur les représentations du groupe de Galois « absolu » des nombres rationnels, un objet en soi quasi intraitable. D'après lui, les recherches commencent avec la construction d'hypothèses puis de conjectures, mais le « noyau dur », c'est de construire les preuves. Il enseigne au niveau licence comme au niveau master. Le plus élémentaire est un cours sur « les méthodes de la mathématique », en première année. Il trouve le niveau de ces étudiants de plus en plus « choquant ». Il arrive à MM de devoir expliquer des choses très simples, comme l'identité $(a+b)^2$ = …. Les étudiants sont en général mal préparés quand ils arrivent aux séances d'exercices, mais MM estime que c'est parce qu'ils n'arrivent pas à démarrer la résolution. À un moment plus avancée de l'étude, il y a eu un certain « filtrage », et donc ça va mieux ; mais le niveau général du programme a été réduit au point que, même au niveau master, il est tout à fait exclu de seulement s'approcher de quelque chose qui a un rapport avec les recherches de MM :

> « Le manuel est un peu spécial, car il y a peu de preuves (…) dans la pratique, les étudiants ne peuvent pas [les construire eux-mêmes] (…) donc ce printemps j'ai écrit des notes pour le manuel, pour simplement suppléer au manuel, car, d'accord, les preuves ne sont pas là, les étudiants n'arrivent pas à les faire, et donc je dois les écrire, afin qu'ils puissent au moins les lire. (…) D'accord, les meilleurs peuvent le faire, mais dès qu'on est au-dessous du niveau de 13 (la note la plus élevée), c'est fini. (…) Par exemple, la première tâche que j'ai donnée, c'est du manuel, qui consiste à montrer que si x est impair, alors x^2 l'est aussi. (…) mais la moitié de la population a eu des problèmes, de gros problèmes (…) c'est ça le niveau qu'on a, à cause du lycée (…) il y a des choses que les étudiants n'arrivent pas à comprendre, par exemple la notion de borne supérieure. Quand on leur demande, à l'examen, ce qu'est une borne supérieure, ils ne savent pas répondre. »

N'y a-t-il donc pas de passerelles pour faire entrevoir aux étudiants ce qu'est la recherche ?

> « Par exemple, les nombres premiers, oui, il y en a dans mes recherches, mais c'est comme dire que pour construire un gratte-ciel, il faut du ciment. (…) Dans les mémoires, à la fin de la licence, si on leur demande de faire un projet de recherche, une chose est sûre : ce sera à l'enseignant de l'écrire. (…) En mathématiques, il y a plusieurs sujets (…) qui peuvent être hauts ou larges (…) il y a une différence dans le temps qu'il faut travailler pour arriver à comprendre les problèmes. Pour prendre mon cas, il m'a fallu cinq ans après la maîtrise pour comprendre les problèmes sur lesquels je travaille aujourd'hui. Je ne peux pas expliquer à un étudiant en licence de quoi il s'agit, ce serait absurde de le demander. »

Quels rapports concrets y-t-il donc, pour MM, entre recherche et enseignement ?

> « Dans les cours plus avancés c'est clair, il y a de plus en plus de moments où je peux apporter une perspective à ce que nous regardons, au cours magistral, leur raconter où ceci mène (…) L'enseignement, c'est aussi l'encadrement de mémoires de master (…) je ne peux exclure que dans le processus d'encadrer une thèse [*master*], on puisse arriver à penser à des choses, quoique cela ne m'est pas arrivé (…) j'ai appris beaucoup de choses en enseignant, mais rien d'utile pour la recherche. (…) Ce sont des problèmes d'une nature toute différente, très concrets, pratiques (…) s'en passer ne fera aucune différence pour la recherche. (…) Il y deux choses, quand même importantes (…) le choix des matières, où la perspective d'un chercheur est importante (…) par exemple pour la construction des nombres réels, il y a deux options, les suites de Cauchy et les coupures de Dedekind, et là, parce que j'ai une base dans la recherche, je sais qu'il faut utiliser les suites de Cauchy. (…) » [Note de CW : *« l'autre chose » où un chercheur est requis, même dans l'enseignement du début des études, semble être pour écrire des notes de cours*].

Des éléments de réactions et d'analyse

Il est clair que MM et NN ont des approches très différentes de l'enseignement et des étudiants, et que ces cas ont été choisis en partie parce qu'ils présentent des contrastes clairs : une multitude de questions surgit par rapport aux liens explicites et implicites avec les pratiques de recherche. Nous allons présenter une synthèse des résultats enrichie par le travail de l'atelier.

Pour MM, les métaphores de « hauteur » (comme le *gratte-ciel*) et de « niveau » servent à décrire la distance entre l'activité mathématique de MM en tant que chercheur et en tant qu'enseignant. Même pour les étudiants qui font leur thèse à la fin du master, il ne lui est pas arrivé d'intégrer ses recherches à ses tâches d'enseignant ; elles sont là, côte-à-côte, sans communication possible, sauf en de rares moments (au niveau master) où MM peut « raconter » (c'est-à-dire sans précision possible) comment l'OM_e est liée, de loin, à l'OM_m. Au niveau de la licence, il semble que les étudiants ne savent pas s'acquitter des tâches les plus simples que MM peut imaginer, telles que reproduire une définition. Plusieurs participants de l'atelier ont vivement critiqué le fait que, face à l'incapacité apparente des étudiants à construire les preuves que le manuel avait omises (sans doute à propos), MM leur vient en aide en leur proposant un « manuel » supplémentaire où ces preuves sont rédigées. Pour expliquer cette stratégie, on peut mentionner le fait que le cours en question se termine par un examen oral, où les étudiants sont censés présenter des preuves. Même si on peut se douter que certains d'entre eux ne feront que répéter celles du manuel, MM peut s'assurer, avec ses suppléments, qu'ils répètent au moins quelque chose de correct.

Pour NN aussi, l'OD et l'OM_m sur lesquelles il travaille à un moment donné sont « rarement » directement liées. Cependant, avec ses collègues enseignant un cours de première année de licence, il fait un réel effort pour donner aux étudiants une expérience de recherche, donc pour construire les tâches de l'OM_e de manière à ce que les étudiants vivent en quelque sorte un « processus de recherche », analogue à celui qu'il a avec l'OM_m. Pour le type de tâche OD « construire une tâche 'de recherche' pour l'OM_e », NN identifie une technique OD assez explicite (et donc faisant peut-être partie d'une technologie partagée avec ses collègues) : prendre une tâche routinière de l'OM_e et « l'ouvrir un peu ». Le fait est qu'il trouve ces tâches d'enseignement « marrants » (quoique « moins marrants » que son travail sur OM_m). Parfois, le travail sur une OM_e ainsi construit peut induire les enseignants dans un effort commun avec les étudiants, comme dans l'exemple des déterminants de *sudoku*. Le fait que NN insiste sur le fait que « ce n'est pas de la recherche » a été sujet d'une discussion entre des participants de l'atelier, où l'explication suivante a été proposée : les OM_m sont basées sur des tâches qui ne sont pas « susceptibles d'être résolues par n'importe quel mathématicien », et qui sont en plus articulées avec des organisations théoriques « en évolution ». Le dernier de ces critères est peut-être moins vrai pour les mathématiques appliquées ; en fait, la « boîte d'outils » de NN contient bien sûr des techniques classiques. En effet, la différence signalée par MM entre les sujets « hauts ou larges » s'applique en partie pour expliquer que NN trouve peut-être plus de ressemblances, au niveau technique, entre OD et l'OM_e d'un côté et l'OM_m de l'autre (ce qui est confirmé, d'ailleurs, par d'autres éléments des données).

On peut donc se demander si la question, en particulier du nexus implicite dont il s'agit ici, n'a pas des réponses différentes en fonction du « type » d'OM_m (« pur/dur » versus « appliqué »). Cela ne semble pas facilement confirmé par les résultats de nos autres interviews, mais l'hypothèse semble bien consistante avec les deux « cas ».

Les *conditions* pour un nexus explicite – liens entre « théorie et discours » des mathématiciens par rapport à l'OD et par rapport à l'OM_m – apparaissent clairement dans les propos de MM : les liens entre OM_m et OM_e apparaissent au fur et à mesure que les étudiants avancent vers les étages supérieurs du « gratte-ciel », et cette convergence semble être un élément inquestionnable de la « théorie » derrière son activité OD. Il peut sélectionner les contenus (blocs théoriques) de l'OD en fonction de ses connaissances théoriques de l'OM_m. On note en passant que ce lien est strictement à sens-unique, son travail sur l'OD ne pouvant apporter « rien d'utile pour la recherche » ; il ne s'agit donc pas d'un nexus complet. Les participants de l'atelier n'ont pas manqué de s'étonner qu'un algébriste pense qu'il « faut » utiliser les suites de Cauchy, plutôt que les coupures de Dedekind, pour une construction théorique des nombres réels. On peut supposer que MM est bien conscient de l'importance du premier point de vue dans les cours avancés d'analyse, et que cette conscience relève de son expérience d'étudiant plutôt que de son activité actuelle en tant que chercheur.

Finalement, je note que le cadre théorique fut introduit très rapidement lors de la présentation initiale de l'atelier et que cette introduction s'est avérée largement insuffisante pour les participants sans familiarité préalable avec la TAD. Pourtant, une explication plus simple des trois formes du nexus semble avoir servi pour orienter un peu la discussion, d'ailleurs animée, des groupes formés en vue de l'analyse des deux cas. Il s'agit des descriptions plus pragmatiques que voici :

- **Nexus minimal** : simple cohabitation de OD et de OM_m au niveau individuel où dans une équipe (et les contraintes/relations qui en découlent directement).
- **Nexus explicite** : par exemple, la sélection de contenus et d'exercices (OD) est conçue « selon » la structure d'OM_m (bloc théorique).
- **Nexus implicite** : relation au niveau des techniques (OD/OM), par exemple
  - techniques OD soutenus par techniques OM_m ;
  - technique OD : chercher interactions et parallélismes entre pratiques OM_m et OM_e.

Ainsi, le « conflit de temps » dont parle NN découle du nexus minimal (le temps réservé à l'OD n'est pas disponible pour l'OM_m). La mention, certes discutable, que « parce que j'ai une base dans la recherche, je sais qu'il faut utiliser les suites de Cauchy » s'interprète dans un premier temps comme un effet du nexus explicite perçu par MM. En deuxième instance, il faut noter que c'est plutôt un effet en apparence, en vue de son champ de recherche (l'algèbre), alors que la préférence pour le modèle de Cauchy est plutôt justifiée du point de vue de l'analyse, où le fait que **R** soit complet devient important, dès les premiers cours à l'université. En général, il faut distinguer *l'idée générale* du nexus explicite (qui apparaît dans les propos de tous les interviewés) d'effets concrets et réels, qui sont plus rares dans les entretiens.

Carl Winsløw
Institut for Naturfagenes Didaktik – Université de Copenhague
winslow@ind.ku.dk

Références

Barbé J., Bosch M., Espinoza L. et Gascón J. (2005). Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions at Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics* 59 (1-3), 235-268.

Bosch M., Gascón J. (2002). Organiser l'étude. 2. Théories et empiries. In Dorier J.-L. et *al.* (eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques*, pp. 23–40, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Burton L. (2004). *Mathematicians as enquirers*. Kluwer: Dordrecht.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-115.

Chevallard Y. (1985). La transposition didactique. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19 (2), 221-265.

Elton L. (1986). Research and teaching: symbiosis or conflict? *Higher Education* 15, 299-304.

Hattie J. & Marsh H. W. (1996). The relationship between teaching and research: a meta-analysis. *Review of Educational Research* 66 (4), 507-544.

Madsen L. M. & Winsløw C. (2009). Relations between teaching and research in physical geography and mathematics at research intensive universities. *International Journal of Science and Mathematics Education* 7, 741-763.

Misfeldt M. (2006). *Mathematical Writing*. Copenhagen: DPU Press.

Neumann R. (1992). Perceptions of the teaching-research nexus: a framework for analysis. *Higher Education* 23, 159-171.

Rasmussen C., Zandieh M., King K., Teppo A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7 (1), 51-73.

Winsløw C. (2006). Research and development of university level teaching: the interaction of didactical and mathematical organisations. In M. Bosch (ed.) European Research in Mathematics Education IV. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 1821-1830. Barcelona: Universitat Ramon Llull.