Atelier : autour de l'enseignement de l'intégrale

Jean-Luc Dorier et Marc Rogalski

Résumé

Ce texte propose la synthèse de la réflexion sur l'enseignement de la notion d'intégrale menée dans l'atelier autour de deux questions : d'une part les rapports entre intégrales et mesures des grandeurs, d'autre part l'enseignement de l'intégrale au lycée. Sur le premier point la mesure des grandeurs a été envisagée comme thème pouvant donner lieu à une ou des situations fondamentales pour la construction de l'intégrale. À partir d'un exemple, une première décontextualisation a été opérée en termes de mesure des grandeurs, en faisant apparaître la « procédure intégrale », puis la « procédure de l'accroissement différentiel », avant une deuxième décontextualisation en termes de théories mathématiques de l'intégration (plusieurs étant possibles). La deuxième partie s'appuie sur le travail de doctorat de Tran Luong (2006) et plus particulièrement sur une synthèse succincte de l'analyse de l'enseignement de l'intégrale au lycée de 1970 à nos jours et sur un questionnaire passé par des enseignants.

I. Introduction

La présentation de l'atelier dans l'annonce du colloque était la suivante :

> L'atelier aura pour objectif de réfléchir sur certaines des questions suivantes :
>
> 1. Quels changements dans l'étude de l'intégrale au passage terminale-université ? Comment articuler les deux concepts de primitive et d'intégrale ? Quelle place pour les sommes de Riemann, celles de Darboux ?
> 2. Quelles relations entre aire et intégrale simple (en L1) ou intégrale double (L2) ? Les notions d'aire et volume sont-elles à étudier à l'université ? Quand ? Dans quel contexte (ensembles quarrables, cubables, ou Lebesgue-intégrables…) ?
> 3. Quelles relations entre l'intégrale en mathématiques et l'intégrale en physique ? Quels rapports avec la mesure des grandeurs géométriques et physiques ?
> 4. Quelle place pour l'histoire de l'intégrale (Archimède, Cavalieri, des problèmes de géométrie à des problèmes sur des fonctions, …) ?
> 5. Quelle est la nature épistémologique du concept d'intégrale ?
> 6. Des questions plus pointues sur le sens et l'usage du "dx", la capacité à calculer des aires concrètes…
>
> Dans une première partie, les participants étudieront des situations mettant en jeu l'intégrale, où certaines de ces questions interviendront.
> Dans une deuxième partie, on fera le point sur quelques pistes de réflexion sur les questions ainsi soulevées, et peut-être sur d'autres.

Présentation des choix retenus pour l'atelier

Bien entendu il était hors de question, en deux heures, d'aborder toutes ces questions. Nous nous sommes donc centrés sur deux questions, les points 3 et 6.

(1) La première partie a porté sur les rapports entre l'intégrale et la mesure des grandeurs, comme thème pouvant donner lieu à une ou des situations fondamentales pour la construction de l'intégrale. Le choix étant fait, sur ce point, de faire d'abord travailler les participants sur la situation de Denise Grenier, Marc Legrand et Françoise Richard (Grenier, Legrand & Richard, 1986, Legrand 1990), puis d'opérer une première décontextualisation en termes de mesure des grandeurs, en faisant apparaître la « procédure intégrale », puis la « procédure de

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 39-58.

l'accroissement différentiel », et de terminer par une deuxième décontextualisation en termes de théories mathématiques de l'intégration (plusieurs étant possibles).

(2) Cette partie de l'atelier est basée sur le travail de doctorat de Tran Luong (2006)[1]. Dans un premier temps, nous présentons une synthèse succincte de l'analyse de l'enseignement de l'intégrale au lycée de 1970 à nos jours. Dans un deuxième temps, nous présentons un questionnaire passé par des enseignants sur lequel les participants de l'atelier ont été amenés à travailler, ainsi qu'une brève analyse des réponses des enseignants français dans le cadre de la thèse.

II. Intégrale et mesure des grandeurs

II.1. Présentation de la situation

Nous avons démarré l'atelier en présentant, dans le transparent ci-dessous, le thème de travail des participants pour le point (1).

Atelier sur l'intégrale

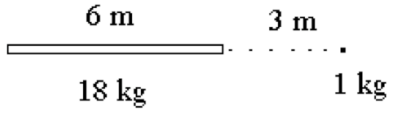
Le problème suivant est posé à des étudiants de L1 qui n'ont pas encore vu le cours sur l'intégration :

On rappelle la loi de l'attraction universelle : "deux masses ponctuelles m et m' à une distance r s'attirent avec une force d'intensité

$$F = G\, mm'/r^2 ,$$

où G est la constante de l'attraction universelle.

Avec quelle force un mince barreau rectiligne de 6 m de longueur et dont la masse est 18 kg attire-t-il une masse ponctuelle de 1 kg située dans son prolongement à 3 m de l'une de ses extrémités ?



On se propose d'analyser cette situation.

* Prévoir ce que vont faire spontanément beaucoup d'étudiants.

* Quelles réactions du milieu constitué de l'ensemble des étudiants et de l'enseignant peuvent permettre une remise en cause du principe mis ainsi en œuvre spontanément ?

* Quels développements de la situation peuvent mener vers une « procédure intégrale » alors d'abord outil de résolution ?

* Peut-on imaginer une autre procédure, de nature différentielle ?

Que donnerait la confrontation des deux ?

* Quelle institutionnalisation ?

Les participants ont travaillé quelque temps sur cette situation (sans avoir le temps d'aborder toutes les questions posées), puis on a proposé une synthèse, que nous résumons ci-dessous, renvoyant pour plus de détails à (Rogalski *et al.*, 2001) et (Rogalski, 2009).

II.2. Synthèse par la procédure intégrale

La physique semble pouvoir fournir beaucoup de situations d'introduction à l'intégrale par la mesure des grandeurs, mais l'exigence que les étudiants puissent avec leurs moyens proposer des solutions, et que la situation leur renvoie des réponses, risque d'en limiter le choix. Celle

[1] Thèse en co-tutelle réalisé sous les directions conjointes d'Annie Bessot et de Jean-Luc Dorier, pour la France et Tien Le Van pour le Viêt Nam. Toute la partie de cette thèse qui concerne le Viêt Nam et la comparaison entre les deux pays a été laissée de côté dans cet atelier, qui ne rend compte que d'une petite part du travail.

proposée par Grenier, Legrand et Richard semble pour l'instant la meilleure, c'est pourquoi nous l'avons choisie.

Les étudiants ne peuvent démarrer une solution au problème posé qu'en réinvestissant une connaissance qui a déjà marché en physique : on concentre la masse du barreau en son centre de gravité. On peut prévoir de déstabiliser cette approche en faisant pivoter le barreau de 90 degrés, mais en général ce n'est pas nécessaire : la proposition de recommencer la procédure du centre de gravité avec chaque moitié du barreau et de sommer surgit naturellement… et elle donne un résultat différent. Elle apparaît donc trop grossière, et la proposition de découper en 4, 8, 16… suit alors, et donne des résultats tous différents mais ordonnés. L'idée de convergence des résultats s'impose alors, ainsi que l'idée de majorations et minorations (éventuellement avec intervention de l'enseignant), en concentrant toute la masse de chacun des morceaux de la barre à une de ses extrémités.

On peut ensuite renforcer la prise de conscience d'une « procédure intégrale » : découper, encadrer, sommer, « passer à la limite », en utilisant d'autres exemples de mesure de grandeurs géométriques ou physiques : voir Grenier, Legrand & Richard (1986) et Rogalski *et al*. (2001). Citons pêle-mêle : le calcul d'une consommation électrique, le calcul du moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe, la force exercée par l'eau sur un barrage, le volume de divers solides, le rendement d'un dispositif hydraulique, le calcul d'une énergie cinétique…

II.2.a. Décontextualisation par la mesure des grandeurs

Une première décontextualisation de la « procédure intégrale » travaillée initialement sur quelques exemples peut être présentée comme suit, via *la mesure des grandeurs-produits en physique*.

Les formules usuelles suivantes sont valables quand les premiers facteurs sont constants ou ponctuels :

densité constante × volume = masse ;
hauteur constante × longueur de la base = aire ;
hauteur constante × aire de la base = volume ;
vitesse constante × temps = distance parcourue ;
force constante × déplacement (colinéaire) = travail ;
pression constante × surface = force ;
(distance constante à un axe)^2 × masse ponctuelle = moment d'inertie ;
(inverse de la distance constante)^2 × produit des masses ponctuelles = attraction.

Certaines de ces formules, en fait, définissent une grandeur physique « produit » à partir d'autres lorsque les premiers facteurs sont constants. D'autres cherchent à calculer de telles grandeurs « produit » à partir d'une formule d'une théorie physique.

Généralisons maintenant ces situations. Les deuxièmes facteurs sont associés à des « domaines » Ω sur lesquels sont définis les premiers facteurs, *supposés maintenant être des fonctions f non constantes* : densité ou pression en un point d'un volume Ω, hauteur au-dessus d'un point de la base Ω, pression en un point d'une surface Ω, distance d'un point de Ω à l'axe, etc … De plus on peut définir la « mesure » m(A) d'une partie A de Ω, ou du moins d'une classe de parties de Ω : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de Ω.

On se propose donc de savoir à quelles conditions on peut mesurer, ou même définir une grandeur I(Ω, f) ou $\int_\Omega f\,dm$ *attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω et la fonction f définie sur ce domaine.*

Les conditions raisonnables pour parler de la grandeur cherchée sont les 3 principes qui suivent, issus de considérations physiques ; le premier renvoie à la définition du type de

grandeur étudiée, les deux autres en sont des propriétés, dont le sens est immédiat sur les exemples cités :

(**1**) *si f est constante* (f = C), I(Ω, f) = C × mesure(Ω) [les formules ci-dessus !] ;

(**2**) *l'additivité par rapport au domaine* (une « relation de Chasles ») : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de mesure nulle (par exemple vide), alors I(Ω, f) = I(Ω_1, f) + I(Ω_2, f) ;

(**3**) la croissance : si $f \leq g$, I(Ω, f) ≤ I(Ω, g).

Chaque fois qu'on a à calculer une grandeur de la forme I(Ω, f) vérifiant les principes (1), (2), (3), on procédera de la façon suivante, comme on l'a fait avec le barreau :

* on découpe l'ensemble Ω en « petits » morceaux Ω_i ;

* on encadre la fonction f entre mi et Mi sur Ω_i (ses bornes inférieures et supérieures) ;

* par sommation, on peut encadrer I(Ω, f) par des « sommes inférieures » et « supérieures » :

$$\Sigma\, m_i\, mesure(\Omega_i) \text{ et } \Sigma\, M_i\, mesure(\Omega_i) ;$$

* enfin, on essaie de passer à la limite en prenant des Ω_i de plus en plus petits.

La procédure intégrale est donc formée de ces 4 étapes :

Découpage, encadrement, sommation, passage à la limite

Cette procédure amène ainsi à encadrer $I(\Omega, f)$ entre $\sum m_i\, mesure(\Omega_i)$ et $\sum M_i\, mesure(\Omega_i)$, avec des Ω_i disjoints (ou ne se coupant que selon des ensembles de mesure nulle).

II.2.b. Décontextualisation mathématique

On obtient ainsi ce qu'on appelle *l'intégrale des fonctions étagées* $\sum \lambda_i$ indicatrice(Ω_i), et on souhaite passer à la limite pour obtenir l'intégrale d'autres fonctions, par exemple de fonctions continues … si cela marche ! Mathématiquement, il faut préciser un peu plus la nature des ensembles Ωi et la nature de leur mesure, d'une part, et quel type de limite on souhaite prendre, de l'autre.

En se bornant au cas Ω = [a, b], seul envisageable en première année d'université, on a deux choix "raisonnables" pour chacune de ces deux questions :

(**a1**) les Ωi sont des intervalles, et leur mesure est leur longueur ;

(**a2**) les Ωi sont les éléments d'une tribu, avec pour mesure la mesure de Lebesgue ;

(**b1**) l'approximation se fait en approchant uniformément f par des fonctions étagées (on prend une condition de Cauchy pour la norme uniforme, en supposant f bornée) ;

(**b2**) l'approximation se fait directement au moyen de l'intégrale (la condition de Cauchy dit que l'intégrale d'une certaine fonction étagée doit être petite).

En recoupant ces deux choix, et en abandonnant la condition d'encadrement, qui n'est plus utile (comme l'a bien montré le grand témoin[2]), dans le premier et le quatrième cas, on trouve 4 théories classiques de l'intégration :

(**a1b1**) : l'intégrale des fonctions réglées ;

(**a1b2**) : l'intégrale de Darboux des fonctions bornées Darboux-intégrables (c'est aussi l'intégrale de Riemann) ;

(**a2b1**) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables bornées (c'est la définition initiale de Lebesgue) ;

(**a2b2**) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions Lebesgue-intégrables.

Nous n'allons pas les développer ici, l'important est que la procédure intégrale développée colle d'une part avec la mesure des grandeurs en physique, et de l'autre fournisse une formulation mathématique polysémique, apte à rendre compte de plusieurs théories mathématiques de l'intégrale, celle de la première année (essentiellement l'intégrale de Darboux) et celle de Lebesgue pour la suite des études.

[2] Il s'agit d'André Bellaïche, maître de conférences à l'université Paris Diderot.

Nous proposons maintenant un autre type de synthèse, qui s'appuierait sur une autre manière de faire évoluer la situation du barreau.

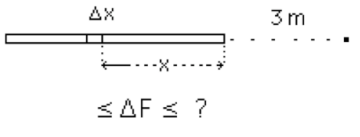
II. 3. Synthèse par la procédure de l'accroissement différentiel

L'enjeu est ici de motiver le lien intégrale-primitive, via la procédure de l'accroissement différentiel pour mesurer des grandeurs

Si on reprend le problème du barreau, et qu'on calcule ce que donne la méthode pour un découpage en n parties égales, on fait deux constats. D'une part, la différence entre la somme de Darboux majorante et la somme de Darboux minorante, facile à calculer, vaut $16G/9n$ et tend bien vers 0 quand $n\to\infty$, ce qui laisse bien augurer de l'existence d'une « limite » entre les sommes majorantes et les minorantes, c'est-à-dire l'existence de la mesure cherchée pour la force : l'intégrale.

D'autre part l'expression de l'une ou l'autre de ces sommes ne permet absolument pas de trouver la limite : on trouve par exemple pour la minoration et la majoration les expressions suivantes : $s_n = 2n\ G \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^2}$ et $S_n = 2n\ G \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+2k)^2}$, dont les limites quand n tend vers l'infini n'ont rien d'évident *a priori*.

C'est l'occasion de proposer la « procédure de l'accroissement différentiel » : appelant $F(x)$ la contribution de la masse de la portion de la barre entre les points d'abscisses 0 et x, on évalue l'accroissement ΔF quand on passe de x à $x + \Delta x$. On l'encadre comme dans la procédure intégrale, et on trouve que $\Delta F/\Delta x$ a pour limite $3G/(x+3)^2$. On obtient ainsi $F'(x)$, et la détermination de F(6) se fait à l'aide d'une primitive simple. On obtient ainsi une valeur numérique, qui bien sûr va être égale aux limites des quantités s_n et S_n.



La décontextualisation présente alors deux faces. D'une part on peut multiplier les exemples de mesure de grandeur en physique ou géométrie qui peuvent s'effectuer par cette procédure (moment d'inertie d'un cylindre, force de l'eau sur un barrage plan, volume d'un solide de révolution, etc.). De l'autre, dégager le théorème mathématique sous-jacent : la dérivée de l'intégrale d'une fonction continue considérée comme fonction de sa borne supérieure est la fonction elle-même.

II.4. Conclusion

En définitive, cette approche fournit de bonnes situations fondamentales, des situations de référence, et permet d'associer aux concepts à enseigner (intégrales et primitives) des images et des sens à la fois contextualisés et suffisamment généraux pour être réinvestis en physique comme en mathématiques. Pour plus de détails et d'exemples, voir (Rogalski *et al.*, 2001) et (Rogalski, 2009).

III. Enseignement de l'intégrale au lycée

III.1. Évolution de l'enseignement depuis les mathématiques modernes

L'analyse dont il est brièvement fait état ici porte sur l'évolution de l'enseignement de l'intégrale en classe de terminale scientifique (fin du secondaire, 18 ans) depuis 1970 en France. Nous distinguons trois grandes périodes :

1. Mathématiques modernes (1970-1980)
2. Contre-réforme (1980-2002)
3. Période actuelle (après 2002).

Nous donnons en annexe 1 un tableau synthétisant les éléments essentiels des organisations mathématiques à l'œuvre durant les 3 périodes.

Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur la définition de l'intégrale et les méthodes d'intégration, le calcul de primitives, en particulier l'usage des signes $\int$ et *dx*, le calcul d'aire, et enfin les liens explicites dans ces programmes entre les 3 notions d'intégrale, de primitive et d'aires.

Durant les trois périodes considérées, la définition de l'intégrale évolue. Dans la première période (1970-1980), l'intégrale est définie par la limite commune de sommes de Riemann ou par les fonctions en escalier. Ainsi, l'étude de l'existence d'une intégrale peut être demandée au baccalauréat. Cependant, cette étude se restreint à la vérification de la continuité de la fonction à intégrer sur l'intervalle d'intégration.

Dans la deuxième période (1980 – 2002), l'intégrale est définie par la formule de Newton - Leibniz ($\int_a^b f(t) = F(b)-F(a)$), évitant ainsi toute étude de l'intégrabilité.

Dans la troisième et dernière période (2002-2006), l'intervention parallèle de l'aire sous la courbe et des suites adjacentes dans la définition de l'intégrale apporte une double approche : l'intégrale (d'une fonction continue positive) est à la fois l'aire sous une courbe et la limite commune de deux suites adjacentes (qui ne sont pas très bien précisées). L'intégrabilité réapparaît, mais sa trace est infime et limitée à une allusion dans le cours.

Ainsi dans les trois périodes, l'étude de l'intégrabilité et donc la problématique du calcul des grandeurs sont éludées, c'est pourtant elles qui fondent le thème de l'intégration au sein de l'analyse. L'enseignement privilégie le calcul de primitives et celui d'intégrales en le coupant de sa raison d'être.

Malgré les différences, durant les trois périodes seules les techniques de primitivation ou anti dérivation, c'est-à-dire de reconnaissance directe d'une dérivée connue (répertoriée) et d'intégration par parties sont étudiées. Le changement de variables n'est quasiment jamais abordé.

À la lumière de l'approche anthropologique de Chevallard, nous avons également examiné l'usage des signes ou ostensifs $\int$ et *dx* dans l'enseignement de l'intégrale et des primitives (cf. Tran Luong, Bessot & Dorier, à paraître). Cette question est importante pour comprendre la nature des tâches et des techniques à l'œuvre dans cet enseignement.

En effet, la modélisation du savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelations entre objets pose « le problème de la 'nature' des objets mathématiques et celui de leur 'fonction' dans l'activité mathématique » (Bosch et Chevallard 1999).

> Un « objet ostensif –du latin ostendre, 'montrer, présenter avec insistance'– pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. » (Op. cité, p. 90)

Dans les usages humains, les objets ostensifs se distinguent des objets non ostensifs par le fait qu'ils peuvent être concrètement manipulés.

> « [...] la mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs (Ibid., 92)

La valence instrumentale d'un ostensif (ou l'instrumentalité d'un ostensif) est son fonctionnement comme instrument permettant d'accomplir une tâche.

> [...] un objet ostensif y est considéré d'abord comme un instrument possible de l'activité humaine, c'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer

> des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail. (Ibid, 107)

La valence sémiotique d'un ostensif (ou la sémioticité d'un ostensif) est son fonctionnement comme signe.

Pour ce qui concerne le calcul des primitives, dans la période des mathématiques modernes, les deux notations $\int f(x)dx$ (1) et $\int_a^x f(t)dt$ + C (2) sont utilisées. (1) permet de présenter l'intégration par parties comme une méthode de calcul d'une intégrale indéfinie et (2) comme technique pour le calcul de primitives (2).

De plus, (1) permet de faire vivre une technique, que l'on peut qualifier de changement de variable implicite, justifiée par l'élément technologique

$$\int g(x)dx = G(x) \Rightarrow \int g(u(x))u'(x)dx = G(u(x))$$

alors que (2) ne permet qu'une technique de primitivation.

Depuis 1980, l'absence de l'ostensif $\int$ pour noter les primitives limite le calcul de primitives à la seule technique de primitivation, non seulement plus rien n'est possible en lien avec le changement de variables, mais il est aussi impossible techniquement d'utiliser l'intégration par parties comme méthode de calcul de primitive.

La valence instrumentale de l'ostensif *dx*, en lien avec le changement de variables par la formule $du = u'(x)dx$, n'existe pas. La valence sémiotique qui fait référence au calcul infinitésimal ou différentiel est très peu présente. Ainsi le *dx*, n'a pour seule fonction que de rappeler la variable d'intégration.

Le calcul d'aire est présent dans les trois périodes et occupe une place importante. Les surfaces en jeu sont quasiment toujours représentées explicitement par une notation du genre $\{M(x,y)/\ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$, ce qui évite la mise en jeu de connaissances sur la représentation analytique ou l'ordre et des ambiguïté de formulation liée à des expressions du genre « calculer l'aire comprise entre les courbes… et les axes… », au détriment cependant d'une réelle réflexion des élèves.

À toutes les périodes également des liens sont faits entre les trois pôles intégrale, primitive et aire. Cependant, comme le souligne Daniel Perrin (2005), le lien entre primitive et aire est mal problématisé.

> Dans tous ces programmes (après 1980), l'intégrale $\int_a^b f(t)$ est définie comme la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. L'existence d'une telle primitive est admise pour une fonction f continue (en 1997, le mot continu ayant disparu, seules les fonctions dérivables ont une primitive !)
> Du côté des aires, voici ce que dit le programme 1997 :
> Définition de $\int_a^b f(t)$ à partir d'une primitive F.
> Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.
> L'interprétation en question n'est pas évidente, sauf à refaire le chemin en sens inverse (partir de l'aire et montrer que l'aire sous la courbe est une primitive).
> […] Je suis en désaccord avec cette façon de faire, essentiellement parce que l'introduction par les primitives est parachutée et déconnectée de la notion d'aire ! (Perrin 2005, 3-4)

Ainsi, avec quelques nuances, mais à toutes les périodes les liens entre aire et intégrale sont faits : l'intégrale est un outil pour le calcul d'aire et une interprétation géométrique peut permettre de calculer certaines intégrales.

De même que les liens entre intégrale et primitive, dans le sens que les primitives servent à calculer des intégrales grâce à la formule de Newton-Leibniz et l'intégrale sert à trouver des primitives par la notion d'intégrale dépendant de la borne supérieure.

Mais jamais le lien direct entre aire et primitive n'est exploité. Or, le fait que, d'une part, les aires sont atteignables par les intégrales et que, d'autre part, le calcul des intégrales est possible grâce aux primitives entraîne que les primitives sont le moyen de calculer les aires. Or, en général, on justifie les choses à l'envers dans une courte introduction, qu'on oublie très vite. Nous laissons la parole à Perrin pour conclure :

> Le programme 2002 a le mérite essentiel de remettre la notion d'aire au cœur de la notion d'intégrale. Je suis d'accord avec son point de départ et je m'en félicite. Mais je trouve qu'il est rédigé en dépit du bon sens, au moins sur deux points.
> D'abord, ce programme a voulu se démarquer du programme précédent qui définissait l'intégrale comme différence de deux valeurs d'une primitive et c'était justifié à mon avis. Mais comme c'est souvent le cas, la réaction a été trop brutale et la notion de primitive a été indûment rejetée à la fin.
> Ensuite, on a vraiment l'impression en lisant ce programme, que les auteurs du programme sont en permanence le cul entre deux chaises, partagés qu'ils sont entre des soucis contradictoires :
> • l'idée que sans les "sommes de Riemann" il n'est pas de théorie rigoureuse de l'intégrale,
> • la crainte (justifiée) que cette théorie soit trop difficile pour des élèves de terminale.
> Le résultat est un programme mal où l'on ne démontre rien, où le lien primitive-intégrale arrive trop tard et où l'aspect numérique est absent. (Ibid., 8).

III.2. Analyse d'un questionnaire enseignant

Afin d'avoir une idée de la façon dont les enseignants de terminale préparent leur cours sur les intégrales et font leur choix de présentation dans les contraintes du programme, nous avons conçu un questionnaire qui a été proposé à des enseignants vietnamiens et français. Nous nous intéressons ici seulement aux réponses des 14 enseignants français de terminale S obtenues entre 2003 et 2005.

Durant l'atelier, le questionnaire a été soumis aux participants qui ont pu le commenter, question par question. Nous avons ensuite présenté les résultats obtenus dans le travail de thèse. Bien sûr, le peu de réponses obtenues en France ne permet pas de tirer de grandes généralités ou de faire un traitement statistique, il permet toutefois d'attester de tendances ou de variabilités.

Le questionnaire est reproduit dans son entier en annexe 2, dans une version toutefois compacte, la version que les enseignants ont reçue étant plus aérée pour permettre les réponses. Nous renvoyons à la thèse (Tran Luong, 2006) pour des résultats détaillés et donnons ci-dessous une analyse succincte.

Dans une première question on demandait aux enseignants de dire les liens qu'ils faisaient en cours entre aire et intégrale, intégrale et primitive et enfin aire et primitive. Le tableau suivant rend compte des réponses obtenues.

Aire ⇆ Intégrale	• Le calcul de l'aire (sous la courbe) mène à la définition de l'intégrale (*3 réponses*) • L'intégrale d'une fonction continue positive est une aire (*9 réponses*) • L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe) (*10 réponses dont 9 communes avec la précédente*) • L'aire sert à interpréter géométriquement l'intégrale (*1 réponse commune avec 1*).
Intégrale ⇆ primitive	• Sur un intervalle fermé, borné, la connaissance d'une primitive d'une fonction permet de calculer son intégrale à travers la formule de Newton - Leibniz (*9 réponses*) • L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) permet de calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné. (*6 réponses dont 2 communes*)
Aire ⇆ primitive	• L'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction en question (*1 réponse*) • L'aire et la primitive sont indirectement liées par l'intermédiaire de l'intégrale (*10 réponses*)

On retrouve donc ici des réponses en grande partie conformes aux programmes, avec absence de lien direct entre aire et primitive à une exception près qu'il importe de noter. Par ailleurs, on voit bien que ce qui domine est une conception de l'intégrale permettant de calculer l'aire et de la primitive permettant de calculer les intégrales.

Dans une deuxième question, on demandait de citer la plus facile et la plus difficile des propriétés de l'intégrale, en donnant une raison. Dans l'annexe 3, nous avons listé, à l'appui d'une analyse d'un manuel de 2002, les diverses propriétés sur les intégrales conformes au programme de 2002 en terminale S. Dans le tableau qui suit, nous donnons de façon synthétique les réponses obtenues.

Propriétés	**facile**	**difficile**
Relation de Chasles	7	
Linéarité	3	1
Ordre et intégration	3	4
Inégalité de la moyenne		3
Intégrale dépendant de la borne supérieure et primitive	1	1
Formule Newton - Leibniz		
Intégration par parties		2
Aire et primitive		1

On voit que la relation de Chasles est largement plébiscitée, mais c'est à peu près le seul résultat clair, sauf peut-être la difficulté relative de l'inégalité de la moyenne, avec à la fois des arguments en faveur de la facilité d'enseignement et de la facilité pour son apprentissage.. Les propriétés d'ordre sur les intégrales en fonction de l'ordre sur les fonctions obtiennent des résultats contrastés, attestant de leur nouveauté comme partie explicite des nouveaux programmes.

On demandait ensuite aux enseignants de citer les différentes techniques d'intégration enseignées en les classant par ordre de difficulté. Dans l'annexe 4, nous avons listé toutes les techniques d'intégration conformes au programme (toujours d'après notre analyse du manuel de 2002). Le tableau ci-dessous résume les réponses des enseignants.

	N° d'ordre (facile → difficile)
1	Calcul d'une intégrale au moyen d'un calcul d'aire
2	Linéarité et lecture directe du tableau des primitives usuelles
3	Primitivation de u'/u , $u'e^u$, $u'u^n$
4	Intégration par parties
5	Calcul à l'aide d'une autre intégrale (intégrales associées) ou d'autres propriétés (parité, périodicité...)

La propriété qui arrive en tête a de quoi choquer. Il n'est en effet, comme le souligne Perrin, en général pas aisé de calculer une intégrale à l'aide d'une aire, c'est bien le contraire, via les primitives, qui est une facilité ! On voit là un effet de l'inversion du rapport entre aire et intégrale. Pour le reste les résultats sont conformes au programme.

Dans la deuxième partie du questionnaire on proposait un exercice non routinier aux enseignants, dont nous reproduisons l'énoncé ci-dessous :

Exercice 1

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur R :

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	3	↘	1	↗ 2

On définit la fonction F qui, à tout réel x, associe $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Étudier le sens de variation de la fonction F sur R.

Cet exercice qui utilise une fonction seulement connue par son tableau de variations n'est pas classique au sens où on n'en trouve pas du même type dans les manuels. Il est cependant conforme aux programmes de 2000, où en classe de seconde on dit qu'une fonction « peut être définie par une courbe, un tableau de données ou une formule ». Un tableau de variations est plus informatif qu'un tableau de données et proche de la donnée d'une courbe. De fait, cet exercice s'inspire d'un ensemble d'exercices proposés par l'inspection générale en 2004 et visant à faire évoluer les pratiques des enseignants. Bien entendu, il est hors de question de penser trouver une expression algébrique de la primitive *F*. Pour pouvoir étudier les variations de *F*, il faut avoir des informations sur le signe de *f*, ce que l'on peut déduire du tableau de variations. Cependant, ce tableau ne donne pas directement les informations nécessaires sur le signe de *f*. Il faut pouvoir déduire du tableau que *f* s'annule en une seule valeur *a* strictement négative, qu'elle est négative avant *a* et positive après. Ceci peut se déduire soit par une lecture graphique, si on trace une allure de la courbe à partir du tableau de variations, soit par le théorème des valeurs intermédiaires. Par ailleurs, si on veut déterminer les limites de *F* en l'infini, il est assez facile de voir que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, puisque $f(x) > 1$ pour $x \geq 0$. Par contre, il est plus délicat de voir que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$, puisqu'il faut déduire du fait que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, par exemple, qu'il existe *M* tel que pour tout $x \leq M, f(x) \leq -1/2$.

Une des difficultés essentielles ici est qu'il faut bien distinguer le type d'informations nécessaires sur *f* pour pouvoir déduire les informations sur *F*. La confusion entre signe et variations risque d'être source de difficulté.

Nous avons demandé aux enseignants s'ils proposeraient cet exercice à leurs élèves. Il y en a 11 qui répondent « oui », contre 3 qui refusent. On peut donc en déduire que les changements de programmes sur les fonctions ont eu un effet important sur les pratiques des enseignants. Néanmoins, 10 enseignants (dont les 3 refusant l'exercice) signalent qu'ils rajouteraient une question intermédiaire, demandant explicitement aux élèves de démontrer l'existence d'une unique valeur annulant *f*. On retrouve ici une tendance bien connue à segmenter les tâches, typique de la peur des enseignants que leurs élèves n'y arrivent pas, mais conduisant à une déproblématisation des activités. Finalement seuls, 4 enseignants accepteraient de poser l'exercice tel quel. On leur demandait ensuite de rédiger la solution qu'ils attendaient d'un bon élève à cet exercice. Tous rédigent une solution entièrement analytique, sans appel au graphique et aucun ne signale la question des limites en l'infini (voir un exemple en annexe 5). On voit donc que le contrat institutionnel est uniforme et fort. Enfin on leur demandait d'évaluer le pourcentage de réussite en fin d'année et les difficultés. Les réponses sur le pourcentage de réussite sont résumées dans le tableau suivant :

0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	Moy.
4	2	1	0	1	2	1	1	1	0	35%

Quant aux arguments sur les difficultés, les voici :

- Il est difficile de lier la variation de *F* au signe de *f*, à travers la formule *F'(x) = f(x)* (8)
- Il est difficile de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation *f*(x) = 0 (4)
- La fonction *F* est définie par une intégrale dépendant de la borne supérieure (2)
- Confusion entre sens de variation et signe d'une fonction (2)
- Fonction définie par un tableau de variations, pas d'expression algébrique (1)

C'est donc bien la difficulté lié au double jeu sur le signe et les variations qui est repérée prioritairement, pas le fait que la fonction ne soit pas définie par une expression algébrique.

Nous proposions ensuite un exercice avec une réponse d'élève. Dans l'exercice, la fonction n'est connue que par son tableau de variations et on demande un encadrement de l'intégrale. La réponse de l'élève s'appuie sur une représentation graphique, mais est tout à fait correcte, sauf que les aires sont évaluées graphiquement et non entièrement justifiées par des arguments analytiques. On demandait aux enseignants de noter la réponse de l'élève sur 5. Le tableau suivant résume les réponses :

Note	1	2	3	4	5	Moyenne	Écart-type
Effectif	0	0	2	4	8	4.43	0.73

On voit donc que cet élève serait dans l'ensemble bien noté. Ceci montre aussi une évolution dans les mentalités des enseignants. De plus, deux enseignants ne font aucun commentaire, deux reprochent tout de même le manque de rigueur, mais les dix autres font des remarques élogieuses : « L'idée de faire un dessin me semble correspondre à l'esprit du programme » ou « Cet élève a très bien compris le lien entre l'aire et l'intégrale. La résolution utilisant une représentation graphique me paraît très bonne ».

Voici par ailleurs, quelques commentaires ajoutés par les enseignants : « Le graphique ne vient pas naturellement à l'idée des élèves si on ne le suggère pas », « Ils ne penseraient pas à passer au graphique », « L'encadrement par les aires semblerait plus évident si on donnait un graphique à la place du tableau », « Tout élève qui trace la courbe de f pourrait arriver à cette solution ». Les réponses à la dernière question sont résumées dans l'annexe 6.

IV. Conclusions

À l'issue de cet atelier, on peut insister sur quelques points.

(1) Le lien entre l'intégrale et la mesure des grandeurs (aire et certains volumes en terminale, diverses grandeurs physiques à l'université) est mal pris en compte à toutes les étapes de l'enseignement. L'ingénierie proposée au niveau universitaire n'a pas encore de pendant au niveau du lycée, c'est là une piste de recherche à développer. Dans ce sens, la mise en parallèle des deux parties de cet atelier met bien à jour cette différence entre les deux ordres d'enseignement.

(2) Les problèmes soulevés par l'usage des divers ostensifs liés à l'intégration sont loin d'être simples, et appellent des études didactiques approfondies, en particulier au niveau universitaire.

(3) Divers autres points, parmi ceux évoqués dans la présentation de l'atelier, sont entièrement à étudier. Citons en particulier deux questions : Quelle compréhension des notions d'aire et volume doivent avoir les futurs enseignants du secondaire ? Que peut apporter aux recherches didactiques sur l'intégration une analyse de son développement historique, en particulier le passage de la mesure des grandeurs par les méthodes de Cavalieri au concept d'intégrale d'une fonction ?

Jean-Luc Dorier
Équipe DiMaGe, Université de Genève
Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Marc Rogalski
Laboratoire André Revuz, Université Paris Diderot et Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences et Technologies de Lille et CNRS
marc.rogalski@upmc.fr

Références

Bosch M. & Chevallard Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 79 – 119.

Grenier D. Legrand M. & Richard F. (1986). *Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année*. Cahiers de didactique des mathématiques n°22, IREM, Université Paris-Diderot.

Legrand M. (1990). Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale. In Artigue *et al*. (eds.) *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année.* Commission Inter-IREM Université, pp. 205-220.

Perrin D. (2005). Aires, intégrales et primitives dans les programmes de lycée et en formation des maîtres. In *Actes de la Commission inter IREM 2nd cycle*, fichier 24 http://www3.acclermont.fr/pedago/maths/pages/secondcycle/Actes_de_la_Commission_Inter_IREM_Second_Cycle.htm

Rogalski M., avec la collaboration de Pouyanne N. et Robert A. (2001). *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Paris : Ellipses éditions.

Rogalski M. (2009). Trois entrées dans l'intelligibilité de contenus à enseigner en mathématiques. In De Hosson C. & Robert A. (éd.) *Actes de la journée 2008 de l'École Doctorale Savoirs Scientifiques : épistémologie, histoire, didactique*. Paris : Editions Paris-Diderot.

Tran Luong C.K., Bessot A. & Dorier, J.-L. (à paraître). dx et $\int$ ostensifs pour questionner l'enseignement des intégrales. In A. Bronner et al. (eds.*) Actes du 2ième Colloque International sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Uzès 31 oct-2 nov 07.

Tran Luong C. K. (2006). *La notion d'intégrale dans l'enseignement mathématique au lycée : une étude comparative entre la France et le Viêt-Nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Annexe 1. Organisations mathématiques à propos de l'intégrale sur trois périodes en France

1. Maths modernes (1970-80) – 2. Contre réforme (1980-2002) – 3. Depuis 2002

Définition de l'intégrale	1. Sommes de Riemann / Fonctions en escalier 2. Formule de Newton - Leibniz 3. Suites adjacentes
Notation pour primitive : *Présence ou non de l'ostensif* $\int$	1. $\int f(x)dx$ / $\int_a^x f(t)dt + C$ 2 et 3. Absence
Méthodes d'intégration pour l'intégrale indéfinie / calcul de primitive (**T1**)	1. **ET0** (Changement de variable implicite) + Intégration par parties ou Primitivation + Intégration par parties 2 et 3. Primitivation
Méthodes d'intégration pour l'intégrale [définie] (**T2**)	1. ET0 (Changement de variable implicite) + Intégration par parties ou Primitivation + Intégration par parties 2 et 3. Primitivation + Intégration par parties
Calcul approché (**T3**)	1. Absence 2. Présence 3. Présence (en liaison avec **T11**)
Encadrement d'intégrale (**T11**)	1 et 2. Présence (en liaison avec étude de suites) 3. Présence (en liaison avec **T3**)
Calcul d'aire (**T5**)	Présence d'un système d'inéquations qui **évite** des connaissances algébriques
Autres applications (**T4, T6, T7, T8, T9, T10**)	1. Calcul de volume, centre de gravité, moment d'inertie (**T7, T8, T9**) 2 et 3. Calcul de volume (**T7**)
Liens entre aire, primitive, intégrale	**Inchangés** durant trois périodes Primitive → Intégrale → Aire Intégrale → Primitive Aire → Intégrale Aire → Primitive Primitive → Aire
Notion et notation différentielle	1. Présence : notation différentielle 2 et 3. Absence : notion de différentielle.

Types de tâches

T1 Calculer $\int f(x)dx$ (ou déterminer les primitives d'une fonction)

T2. Calculer $\int_a^b f(x)dx$

T3. Calculer approximativement $\int_a^b f(x)dx$

T4. Calculer la longueur d'un arc
T5. Calculer l'aire d'une surface plane
T6. Calculer l'aire d'une surface de révolution
T7. Calculer le volume d'un corps
T8. Trouver le centre de gravité d'une plaque homogène
T9. Trouver le moment d'inertie d'une plaque homogène
T10. Calculer le travail d'une force variable
T11. Démontrer une inégalité sur des intégrales

Annexe 2. Questionnaire enseignants

Lycée : Ville :
Depuis combien d'années enseignez-vous en terminale S :
Quel(s) manuel(s) utilisez-vous ?

Partie I

A- Caractérisez par une phrase les liens que vous faites entre :
Aire et Intégrale :
Intégrale et primitive :
Aire et Primitive

B- Citez la propriété de l'intégrale qui vous semble
la plus facile :
Pourquoi ?
la plus difficile :
Pourquoi ?

C- Citez les différentes techniques d'intégration que vous avez enseignées en les rangeant par ordre de difficultés :

Partie II

Exercice 1
On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur R :

x	-∞	0	2	+∞
f(x)	-1	3	1	2

On définit la fonction F qui, à tout réel x, associe F(x) = $\int_0^x f(t)dt$.

Étudier le sens de variation de la fonction F sur R.
a) Proposeriez-vous un tel exercice à vos élèves de terminale ? oui / non
Éventuellement quelles modifications y apporteriez-vous :

b) Rédigez la solution à cet exercice que vous attendez d'un bon élève de Terminale :

c) Estimez le pourcentage d'élèves de vos classes en fin de Terminales capables de résoudre cet exercice en explicitant les difficultés que vous prévoyez :

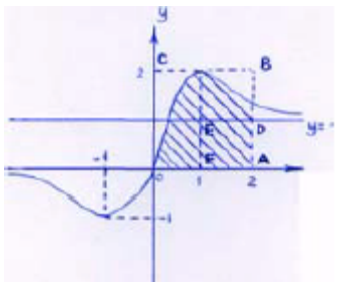
Exercice 2

On donne le tableau de variations d'une fonction définie et dérivable sur **R :**

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↘		↗	0	↘		↗	1
			-1						

Déterminer deux entiers strictement positifs a et b tels que a ≤ $\int_0^2 f(x)dx$ ≤ b.

Voici la solution d'un élève de Terminale :



Comme f est positive sur [0; 2], $\int_0^2 f(x)dx$ est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2.
Du graphique, on tire que :

1 = aire(ADEF) ≤ $\int_0^2 f(x)dx$ ≤ aire(OABC) = 4

Donc pour a = 1 et pour tout entier b ≥ 4, on a :

a ≤ $\int_0^2 f(x)dx$ ≤ b

Notez cette solution sur 5 (Veuillez cocher la case correspondante)

(Mauvais <----------> Excellent)

1 2 3 4 5

Commentaires :

Partie III

Donnez deux exemples concrets du type d'exercices Calculer $\int_a^b f(x)dx$, l'un que vous considérez comme facile, l'autre comme difficile. (Vous pouvez bien sûr utiliser votre manuel).

- Exercice facile :
Pourquoi :

- Exercice difficile :
Pourquoi :

Annexe 3. Propriétés de l'intégrale d'après Bréal 2002

Intégrale et aire	Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle *[a, b] (a ≤ b)*. L'intégrale de *f* entre *a* et *b* est égale à l'aire (en unités d'aire) du domaine caractérisé par le système d'inéquations : $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x). \end{cases}$
Valeur moyenne	Soit f une fonction continue sur un intervalle I. *a* et *b* sont deux éléments de I tels que $a < b$. La valeur moyenne de *f* sur *[a, b]* est le nombre réel égal à : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
Relation de Chasles	Soit f une fonction continue sur un intervalle I et *a, b, c* trois réels quelconques de l'intervalle I : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
Linéarité	Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. *a* et *b* deux réels de I et *k* un réel quelconque, $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
Ordre et intégration	Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. *a* et *b* sont deux éléments de I tels que $a \le b$. Si *f* est positive sur *[a, b],* alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Si *f* est négative sur *[a, b],* alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$. Si pour tout réel *x* de *[a, b], f(x) ≤ g(x)*, alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.
Inégalité de la moyenne	Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, m et M deux réels. Si a ≤ b et si pour tout x∈[a, b], m ≤ f(x) ≤ M, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Si, pour tout x∈I, |f(x)| ≤ M, alors $\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \le M\|b-a\|$.
Intégrale dépendant de la bsup et primitive	Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et *a* un élément de I. La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive sur I de la fonction de *f* qui s'annule en *a*.
Formule de Newton-Leibniz	Soit f une fonction continue sur un intervalle I et *F* une primitive de *f* sur I. Si *a* et *b* sont deux éléments quelconques de I, alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Intégration par parties	Soit u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I. Si *a* et *b* sont deux éléments quelconques de I, alors : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.
Intégrale et volume	On considère un solide délimité par les plans d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ (où *a* et *b* sont des réels tels que $a \le b$). On désigne par *B(z)* la section plane de ce solide avec le plan perpendiculaire à *(Oz)* de cote *z (a ≤ z ≤ b) S(z)* l'aire de la section *B(z)*. Le volume *V*, en unités de volume, de ce solide est égal à : $V = \int_a^b S(z)dz$.

Annexe 4. Techniques d'intégration (Bréal, 2002)

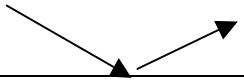
• $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx$, une primitive F de f est connue - $\boldsymbol{\tau}$: $F \circ u$ est une primitive de $(f \circ u)u'$
• $\int_a^b \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ - $\boldsymbol{\tau}$: $\frac{Ax+B}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{C}{x-\alpha} + \frac{D}{x-\beta}$
• $\int_a^b x^{\alpha} \ln x dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$ - $\boldsymbol{\tau}$: $u = \ln x$, $dv = x^{\alpha}dx$
• $\int_a^b P(x) \ln x dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = \ln x$, $dv = P(x)dx$
• $\int_a^b P(x) \cos(\alpha x + \beta)dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = P(x)$, $dv = \cos(\alpha x + \beta)dx$
• $\int_a^b P(x) \sin(\alpha x + \beta)dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = P(x)$, $dv = \sin(\alpha x + \beta)dx$
• $\int_a^b P(x)e^{\alpha x+\beta}dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = P(x)$, $dv = e^{\alpha x+\beta}dx$
• $\int_a^b e^x \cos x dx$, $\int_a^b e^x \sin x dx$ - $\boldsymbol{\tau}$: Intégration par parties à deux reprises
• $\int_a^b x(\ln x)^n dx$, $n \in \mathbf{N}$ - $\boldsymbol{\tau}$: $u = x(\ln x)^n$, $dv = dx$
Intégrales associées : calcul de deux intégrales I, J à travers le calcul de $\alpha I + \beta J$, $\gamma I + \delta J$ et la résolution d'un système d'équations à deux inconnues
Calcul d'une intégrale à l'aide d'un calcul d'aire
Calcul d'une intégrale par linéarisation

Annexe 5. Solution attendue exercice 1

Cette solution est proposée par un enseignant français.

f est dérivable sur **R** donc *f* est continue sur **R.**
F est une primitive de *f* sur **R** donc *F* est dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = f(x)$.
Les variations de *F* dépendent du signe de *F'* donc de *f*.
f est continue sur **R** donc sur $]-\infty, 0[$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $f(0) = 3$ et $0 \in]-1, 3[$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$. *f* est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$ donc $\forall x < \alpha$, $f(x) < f(\alpha)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$. *f* est strictement croissante sur $]\alpha, 0]$ donc $\forall x \in]\alpha, 0]$, $f(\alpha) < f(x) \leq f(0)$, c'est-à-dire $f(x) > 0$. Le tableau de variations de *f* indique $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
On en déduit le tableau de signe de *f* puis les variations de *F*.

x	$-\infty$ $\quad\alpha\quad$ $+\infty$
Signe de f'	- 0 +
Variations de F	

Annexe 6. Partie III du questionnaire

Exercices jugés faciles

Intégrales	Nb	Raison du choix
$\int_a^b \sum_{i=1}^n k_i f_i(x)dx$, f_i étant figurée dans le tableau des primitives usuelles. *Exemple* : $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx$	8	Linéarité, calcul de primitive immédiat.
$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx$, f étant figurée dans le tableau des primitives usuelles. *Exemple* : $\int_0^1 3xe^{x^2+3}dx$	2	Primitivation facile. $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_a^b f(u)du = F(x)\Big\|_a^b$
$\int_{-1}^1 (t+2)e^{-t}dt$, $\int_0^\pi x\sin x dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$, $\int_0^1 xe^x dx$	2	L'intégration par parties est évidente.
$\int_{\pi/2}^\pi \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}dx$	1	Lecture inverse de formule de dérivée : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

Exercices jugés difficiles

Intégrale	Nb	Raison du choix
• $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$, $\int_1^e \frac{e^x}{1+e^x}dx$, $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ • $\int_1^e \ln x$	5	Forme *u'u* ou intégration par parties n'est pas évidente
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x$	3	Difficultés pour linéariser $\cos^3 x$.
$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}dx$	1	Double intégration par parties Nombreuses erreurs de signe dans les calculs
I = $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$, J = $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$. Démontrer que I + J = 3π/4 et I = J. Calculer I, J.	1	La résolution peut de plus nécessiter plusieurs niveaux de démonstration.
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx$	1	Introduction d'un paramètre. Intégration par parties indirecte : $I_n = 1 - nJ_n$, $J_n = e^{-n\pi/2} + nI_n$. Résolution d'un système linéaire à deux inconnues.
$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$	1	Sans expliquer
Étant donnée la fonction *f* définie sur [-1, π/2] par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } x\in[-1,0] \\ \cos x & \text{si } x\in[0,\pi/2] \end{cases}$ Calculer l'aire de la surface plane délimitée par la courbe représentative de *f* et l'axe des abscisses.	1	Il faut « mélanger » deux techniques de calcul pour répondre.