Un aperçu des recherches en didactique des mathématiques menées dans l'équipe DIDIREM : exemples et nouvelles questions

Aline Robert, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Corine Castela

Cet exposé introductif a pour ambition de donner accès aux questionnements de différents champs de recherches en didactique investis au sein de notre équipe à l'aide de plusieurs outils théoriques – Théorie de l'activité (A. Robert), Théorie des situations (M.J. Perrin) et Théorie anthropologique du didactique (C. Castela). Il ne s'agit pas de présenter de manière exhaustive les recherches en France, ni même dans l'équipe DIDIREM, encore moins les recherches internationales, mais bien d'illustrer à travers des exemples précis nos manières de poser et d'aborder les problèmes liés à l'enseignement des mathématiques.

Introduction (A. Robert)[1]

Souvent les mathématiciens interrogent les didacticiens sur la finalité de leurs travaux : une première réponse serait que nous travaillons à mieux comprendre ce qui se joue dans les apprentissages des mathématiques, à divers niveaux.

Comprendre veut dire entrer dans la réalité scolaire, c'est-à-dire dans tout ce qui concerne les apprentissages des élèves à l'école (du primaire à l'université) ; trouver des « bonnes » questions et des bonnes variables, des liens (et des dépendances entre variables), par exemple dégager les situations[2] développées dans une classe, repérer des procédures d'élèves récurrentes, ou encore répertorier et caractériser la suite des couples (exercice - travail organisé sur l'exercice), proposés aux élèves.

Comprendre veut dire chercher à mettre en évidence des corrélations, voire des relations partielles de causes à effets entre certaines pratiques et des apprentissages, concevoir des séances, effectuer et expliquer des diagnostics, mettre en évidence et tester des leviers si on pense en avoir trouvé. Cela amène à trouver des régularités et des variabilités – voire des modèles, par delà l'extrême diversité et la complexité, qui font que la réalité analysée n'est jamais réductible à une somme de composants partiels.

En un mot, comprendre c'est interroger, par delà les apparences et les fausses transparences, les relations entre enseignement et apprentissages, et avoir des nouveaux possibles à tester. Cela sous-entend de faire entrer en ligne de compte les mathématiques à enseigner, étudiées de manière spécifique, les élèves et les enseignants, dans leurs interrelations et avec les contraintes qui pèsent sur eux, notamment liées à leur environnement. Par exemple, un certain nombre de travaux actuels démontrent qu'efficacité et équité en classe ne s'improvisent pas, et sont même difficiles à conjuguer en même temps : quoi comprendre à ce sujet en mathématiques ?

Mais nos analyses ne visent pas à fournir des prescriptions : on pourrait dire que cela donne aux acteurs, les formateurs et les enseignants notamment, un réseau de questions, des manières d'interroger le système éducatif à différents niveaux, et des palettes de réponses, à charge ensuite à chacun de les adapter à ses propres possibilités, sur son terrain. Peut-être plus que d'autres chercheurs, il est vrai, nous ne dédaignons pas les conséquences de nos

[1] Nous avons choisi de laisser ce texte le plus proche possible de la présentation orale et ainsi de faire apparaître la répartition de la parole entre nous.

[2] Ce mot désigne ici à la fois les contenus mathématiques travaillés et la forme que prend le travail des élèves : il s'agit de reconstituer cet ensemble.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 11-36.

recherches, nous pouvons même partiellement les orienter en relation avec des besoins du système éducatif comme cela a été le cas avec l'introduction de travaux sur l'intégration des TICE, mais nous sommes toujours obligés de faire des détours par des analyses pour comprendre avant d'obtenir des résultats, souvent décalés, partiels et relatifs.

Cependant, et c'est là aussi que nos démarches peuvent différer de celles d'autres scientifiques (mathématiciens), notre « objet » comme on dit, c'est-à-dire ce sur quoi nous travaillons, n'est pas précisé a priori, il y a énormément de paramètres, il bouge au fur et à mesure que se développent les études. Il y a donc, comme dans toutes les sciences dites humaines ou sociales, des choix et des réductions à faire pour définir un objet de manière nécessairement partielle. Cela nécessite, pour être légitime, une inscription explicite dans un cadre théorique de référence, déjà existant ou créé. Ce peuvent être des modèles, servant alors de références aux analyses, ou des théories générales, à spécifier, donnant des outils (nous y reviendrons).

Par exemple, beaucoup de recherches en didactique (et c'est le cas dans la plupart des travaux de DIDIREM), négligent les facteurs affectifs individuels, comme la confiance en soi, ce qui ne veut pas dire que ces facteurs sont ignorés ou méprisés, bien au contraire. Cependant, ils introduisent une telle complexité supplémentaire qu'ils ne sont pas pris comme variables des recherches. Par exemple, on peut prendre acte du fait que les élèves d'origine sociale défavorisée ont souvent une grande demande de relations duelles avec l'enseignant, sans étudier explicitement l'effet de cette variable. Cela implique une hypothèse, implicite mais forte, de légitimité de cette réduction en relation avec nos analyses – hypothèse admise, et toujours à remettre en question. D'autres chercheurs n'adoptent pas cette hypothèse, et il est très intéressant de travailler avec eux (Blanchard-Laville et Nadot, 2000).

De plus, alors même que notre démarche est en partie expérimentale, ou au moins appuyée sur des observations de vrais élèves dans de vraies classes, ce que nous avançons ne peut être « prouvé » au sens mathématique du terme dans la mesure où nous ne nous plaçons pas dans un modèle entièrement mathématisé ; plusieurs détours sont utilisés, selon les expériences, selon les chercheurs, pour apporter des confirmations à ce que nous proposons. Ce peuvent être des convergences de résultats obtenus de différentes manières ; ou encore nous comparons prévisions et réalité, suite à une expérience élaborée avec des objectifs précis. D'autres chercheurs identifient des éléments du modèle qu'ils ont adopté (théorie des situations didactiques, théorie anthropologique du didactique) pour déduire des explications tirées du modèle, dégager des phénomènes et éventuellement rediscuter le modèle.

Nous établissons des régularités à différentes échelles. Voilà un exemple peu contestable mais limité - si un enseignant donne très rarement à chercher des exercices d'un type donné, il y aura une bonne partie des élèves qui risquent de ne pas apprendre la démarche correspondante. Nous mettons en évidence des variabilités : ainsi, des chercheurs ont pu établir que les pratiques d'enseignants en ZEP sont tellement contraintes qu'elles se stabilisent beaucoup plus vite qu'ailleurs (Peltier, 2004).

Les recherches françaises sont souvent qualitatives, et menées sur de petits effectifs, cependant dans d'autres pays, notamment en Italie ou dans le monde anglo-saxon, des études à plus grande échelle sont menées et il n'y a pas de rupture avec nos résultats.

Pour préciser tout cela, nous allons vous inviter à réfléchir à partir d'une vidéo tournée en classe de seconde dont nous allons donner quelques extraits. Il s'agit d'une démarche d'analyse locale qui est assez récente dans notre équipe (12 ans environ), corrélative à un élargissement de nos champs d'investigation et accompagnée d'un enrichissement de nos outils : par exemple, les changements de cadres de Régine Douady (1987) ont été complétés, le déroulement des séances, y compris ordinaires, est pris en compte d'une autre manière, et un certain nombre de travaux développent des analyses de pratiques d'enseignants avec des inférences en formation, par exemple pour des Professeurs des Écoles en Zone d'Éducation

Prioritaire (ZEP) (Peltier, 2004). Marie-Jeanne Perrin élargira ensuite le propos, en abordant des questions plus globales, illustrant d'autres aspects des travaux en didactique. Elle se placera ainsi à une autre échelle et vous invitera à réfléchir sur l'enseignement des mathématiques en primaire, où, là encore, les analyses se sont enrichies, avec une prise en compte permanente de la réflexion épistémologique, notamment sur les liens entre mathématiques et réalité.

Tous ces exemples mettront en évidence sur différents champs et à différentes échelles l'imbrication, dans tous nos travaux, d'analyses relevant des contenus à enseigner, des élèves et de leurs apprentissages, et des enseignants. Corine Castela élargira encore le propos en développant son point de vue à partir d'autres approches qui sont développées en France (dont plusieurs trouvent chez nous leur place, permettant de vraies discussions croisées) sur la question implicite posée au départ : qu'est-ce que la didactique ? Qu'est-ce que la pensée didactique ? Qu'est-ce que le questionnement didactique ?

1. Un exemple d'étude « locale » en seconde (A. Robert)

Cet exemple s'inscrit dans des analyses de séances de mathématiques ordinaires, qui articulent, au niveau de la classe (niveau local), les contenus donnés à travailler et les déroulements organisés par les enseignants. Les activités des élèves sont ainsi reconstituées à partir des tâches (énoncés) proposées par l'enseignant, et des déroulements qu'il provoque. Ces activités des élèves sont choisies dans nos recherches comme des intermédiaires légitimes pour accéder aux apprentissages ; elles sont analysées dans leur dimension « mise en fonctionnement des connaissances mathématiques », compte tenu du travail demandé ; elles sont conçues comme conséquence des choix des enseignants, choix de contenus mathématiques, choix de gestion ; elles permettent de remonter aux contraintes qui pèsent sur les professeurs et les amènent à ces choix. Ce type d'analyse permet d'aborder des alternatives éventuelles qui pourraient intervenir et de mettre en évidence des interrogations partagées par beaucoup de collègues, souvent liées aux contraintes institutionnelles et au métier, sans réponses définitives.

Un certain nombre de chercheurs de l'équipe ont développé des travaux dans cette direction, s'inspirant notamment d'une articulation des théories générales de Piaget et Vygostki, spécifiées aux mathématiques et à l'école, et prolongeant les travaux de Vergnaud et de Brousseau (cf. Vandebrouck, 2008).

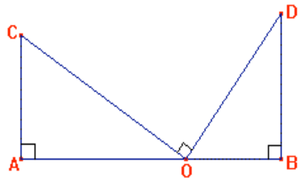
On utilise ici des extraits d'une vidéo tournée en seconde, il y a quelques années – les programmes ont un peu évolué depuis ; l'enseignant a placé la caméra lui-même au fond de la salle et l'a oubliée. Nous n'avons pas l'intention ni les moyens de faire une analyse complète. Nous ne rentrerons pas en particulier dans des considérations méthodologiques et ne nous vous convierons pas à partager nos analyses habituelles, d'abord celle des tâches que les élèves ont à faire, c'est-à-dire des mises en fonctionnement attendues de leurs connaissances, puis celle des activités possibles de ces élèves compte tenu des déroulements, pas plus que nous n'étendrons notre propos à une analyse de la notion à enseigner et de sa place dans les programmes, préalable pourtant nécessaire à nos analyses.

Il n'est pas question de juger quoi que ce soit – on n'en sait pas assez, ni sur l'ensemble des séances ni sur les élèves. On peut tout de même constater sur la vidéo que les élèves suivent, et même qu'ils n'hésitent pas à poser des questions, en s'acharnant le cas échéant. Nous voudrions seulement que vous compreniez certaines des questions que nous nous posons, le pourquoi de ces questions, et ce que représentent les réponses. Dans ce que disent professeur et élèves on trouve des exemples qui me semblent génériques de ce qui peut se passer en classe.

J'en profite pour remercier au passage le collègue filmé et tous ceux qui nous permettent d'analyser ainsi les séances de classe.

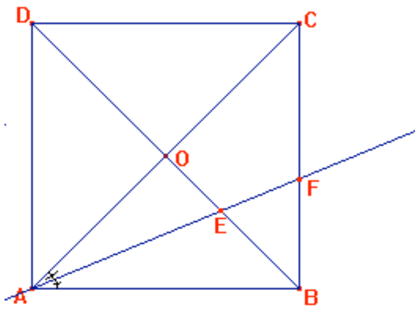
Exercice 1

Montrer que AOC et OBD sont semblables et [trouver le rapport de similitude]…



On démontre que les deux triangles sont semblables car ils ont deux angles respectivement égaux (l'angle droit et un autre). Pour cela on utilise le fait que :
AOC + COD + DOB = 180°
Donc AOC + DOB = 90°
Or AOC + OCA = 90°, d'où l'égalité OCA = DOB
Le rapport de similitude s'écrit OC/OD, ou OA/DB, ou AC/OB.

Exercice 2



ABCD est un carré, O le point d'intersection des diagonales, (AF) la bissectrice de CAB, E l'intersection de (AF) et de [OB].
Montrer que AOE et ABF sont semblables, calculer le rapport de similitude AB/OA [et trouver le rapport des aires]

On démontre que les deux triangles sont semblables car ils ont deux angles respectivement égaux (l'angle droit et un autre). L'angle droit vient de la propriété des diagonales d'un carré, l'autre égalité vient de la définition de la bissectrice (ou d'une propriété caractéristique). Le rapport de similitude vaut $\sqrt{2}$ et le rapport des aires 2.

Voici quelques questions relevant du champ didactique, de différents niveaux.

a) Le même théorème à appliquer et pourtant des réussites très différentes des élèves…

Les élèves ont appris le théorème suivant : « deux triangles sont semblables si deux angles respectifs sont égaux ». Or, la question où ce théorème doit être utilisé, restreinte à deux triangles rectangles, donc ne nécessitant de montrer qu'une seule égalité d'angles supplémentaires, est réussie dans le deuxième exercice et ratée dans le premier, alors même que la figure est moins complexe. Comment se fait-il que le même théorème ne soit bien appliqué qu'une fois ?

Voici les commentaires de l'enseignant : pour le premier exercice « Ce qui a cloché dans vos copies, c'est de montrer que ces angles étaient égaux et histoire d'être désagréable, les angles complémentaires c'est le programme de 5ème ». Et pour le deuxième exercice, le professeur explique : « Donc les triangles AOE et ABF avaient deux angles égaux donc ils étaient semblables ; et là, par contre, vous avez bien mieux vu heu cette démonstration, la bissectrice qui coupe l'angle en deux angles égaux, ça marche beaucoup mieux. »

Le professeur impute ainsi l'échec des élèves à appliquer le théorème dans le premier cas à l'oubli des angles complémentaires. Nous allons montrer comment une analyse didactique permet de compléter ce point de vue, limité à la mémoire. Il s'agit de repérer les connaissances à mettre en fonctionnement et les adaptations à mettre en œuvre, compte tenu de ce qui est dans le cours des élèves de la classe - c'est ce que nous appelons une analyse des tâches a priori.

On se rend compte que dans le premier exercice, il faut introduire une étape et un intermédiaire pour appliquer le théorème : il faut passer par le calcul d'une somme de trois angles qui est égale à 180°, il faut écrire une deuxième égalité d'angles dans un seul triangle, égalité à 90° (resp. 180°) de la somme des angles aigus (resp. des trois angles) d'un triangle rectangle et il faut ensuite utiliser la transitivité de l'égalité. À partir de deux égalités à 90° de deux sommes de deux angles dont un commun, on déduit l'égalité des deux autres angles concernés. C'est ici une propriété algébrique, mélangeant valeurs algébriques et numériques, qui vient s'immiscer dans un exercice géométrique.

Plus qu'une question d'oubli, il peut y avoir une difficulté pour les élèves liée à la manière d'utiliser le théorème à mobiliser (dont on peut penser que les élèves l'ont reconnu). Les élèves ont à faire une adaptation du théorème pour trouver leurs angles égaux, ils doivent introduire cet angle plat qui concerne des angles des deux triangles à la fois. Ils doivent faire appel à ces connaissances anciennes, supposées disponibles, sur les angles complémentaires, et une propriété algébrique (ici, le signe « égal » a un statut algébrique).

En revanche, dans le deuxième exercice, la reconnaissance des angles égaux se fait directement. Autrement dit, il n'intervient que des connaissances anciennes, supposées (à juste titre) mobilisables et pas d'autres adaptations pour appliquer le théorème.

On peut noter que la propriété algébrique de transitivité n'est pas soulignée en tant que telle, ni écrite au tableau. Cette éventuelle méconnaissance de la difficulté de l'algébrique se retrouve dans la phrase suivante de l'enseignant à la fin de la première question du premier exercice *« donc un gentil petit produit en croix nous permettait de calculer BD, ça vous pouvez tous le faire tranquille à la maison après… ».*

Les recherches sur l'algèbre (Grugeon, 2000 ; Lenfant, 2002) amènent en effet à développer une vigilance a priori non naturelle aux difficultés algébriques des élèves, dans la mesure où l'algèbre est tellement naturalisée pour les enseignants qu'ils peuvent en ignorer des difficultés pour les élèves, celles-ci peuvent alors rester en quelque sorte transparentes si l'enseignant ne fait pas exprès de les repérer.

Plus généralement, reconnaître qu'il faut utiliser une connaissance non indiquée peut être une source de difficulté, qui n'est pas seulement liée à la mémoire mais aussi au sens des connaissances. De plus, appliquer un théorème dont on a reconnu qu'il doit être utilisé n'est souvent pas un simple remplacement des données générales par des données particulières. Nous appelons « adaptations » des théorèmes du cours les transformations à faire pour réussir à les appliquer. Ici, par exemple, le premier cas de similitude, qui revient à démontrer que les triangles ont deux angles respectivement égaux, est appliqué dans deux exercices, avec des adaptations différentes – et des réussites différentes (et les élèves ne s'y sont pas trompés).

Introduire un intermédiaire ou une étape est une des adaptations difficiles pour les élèves, demandant une initiative et pas une « simple » reconnaissance. Nos recherches ont montré de plus qu'utiliser algébriquement la transitivité de l'égalité, même sans intermédiaire, est difficile en seconde. Les travaux montrent aussi la difficulté des élèves à mélanger des domaines de travail – ici géométrique/algébrique – voire à mélanger des connaissances antérieures, surtout si elles sont supposées disponibles, et des connaissances en cours d'acquisition. Cela peut expliquer la différence de réussite entre les deux exercices analysés mais il faut rester très prudent car on ne sait pas ce qui a déjà été cherché dans la classe.

Dépassant le cadre de la vidéo, on voit l'intérêt de ces analyses *a priori* en relation avec l'hypothèse plus générale que les différentes adaptations de leurs connaissances à mettre en œuvre non seulement ne font pas faire les mêmes activités mathématiques aux élèves et n'ont pas les mêmes incidences sur leurs apprentissages mais encore ne s'improvisent pas, demandent à être travaillées explicitement dans des exercices adéquats.

Il a été montré dans de nombreux travaux, par exemple dans la thèse de Julie Horoks, sur les triangles semblables (Horoks, 2008), que les exercices les mieux réussis en contrôle sont ceux qui ont été préparés en classe et répétés un certain nombre de fois (pas dans les mêmes énoncés, mais avec les mêmes adaptations). Cependant, trop de répétitions peuvent amener des élèves un peu fragiles à ne plus jamais changer de stratégie, même si cela s'impose dans l'exercice (Dumail, 2007).

b) Le rapport de similitude et la question des programmes

Dans les deux exercices, il s'agissait, après avoir démontré que les triangles étaient semblables, d'écrire le rapport des côtés. Voici l'extrait[3] de la correction correspondante dans le premier exercice :

> P. *Les côtés sont proportionnels. D'accord ? Alors on écrit directement, on n'écrit pas la rédaction pour les triangles semblables, on écrit directement les rapports que ça nous donne.*
>
> P. *Là aussi il y a eu des erreurs dans les rapports qui ont été proposés.*
>
> P. *Alors OA/OB.*
>
> Élève (au tableau) : Dans quel sens ?
>
> P. *Ça on s'en fiche le premier tu le mets dans le sens que tu veux mais est-ce que c'est OA et OB qui vont être les côtés qui vont correspondre.*
>
> Élève (au tableau) : AC et…
>
> P. ***Il faut se fier aux angles ; tu as montré que des angles étaient égaux. Par exemple comme il y a des triangles rectangles ici tu peux prendre les deux hypoténuses eux ça va être les côtés correspondants. L'hypoténuse est liée en C à un angle, l'angle correspondant sur l'autre triangle il est en O, ça va donner le côté CA et le côté OB.***
>
> *Donc le rapport c'est soit AC/OB soit OB/AC, tu commences par celui que tu veux mais c'est AC et OB qui sont liés, c'est OC et OD qui sont liés et puis c'est AO et BD qui sont liés. Il suffit de repérer les côtés qui joignent des angles égaux.*
>
> *Donc AC/OB ouais, OC/OD et le dernier c'est AO/BD voilà. Après il se trouve qu'on connaissait AO, on connaissait OB, on connaissait AC (...)*

On constate qu'interviennent la question du choix du premier côté à choisir, qui est traitée comme un simple « bruit », et la question du repérage des homologues. Il s'agit et de concevoir qu'il y a un problème pour associer les « bons » côtés et de trouver les homologues. L'enseignant indique très vite, à la fin, que les côtés joignant des angles respectivement égaux vont ensemble (sont homologues) sans le souligner ni comme une règle ni comme une méthode, sans utiliser le mot respectivement et sans écrire.

Le travail de thèse déjà cité (Horoks, 2008) a montré qu'il y a là un problème général de conception de la notion d'homologues, dont on peut se demander si elle n'est pas devenue artificielle, formelle dans le cadre des programmes actuels : en effet, on n'a pas le support des

---

[3] Dans tous les extraits de transcription, le discours du professeur est en italique et c'est le chercheur qui souligne ou introduit les caractères gras.

transformations, qui permettraient de concevoir la correspondance, de donner du sens à l'idée d'homologues, sans qu'il soit nécessaire d'exhiber la « bonne » correspondance pour résoudre le problème, bien entendu. De plus, trouver les homologues n'est pas toujours facile à faire, d'autant plus que les élèves n'ont plus l'idée que dans un triangle mesure des angles et longueur des côtés « augmentent » ensemble, ce qui pourrait les aider, entre autres, à deviner la correspondance. L'explication de l'enseignant (en gras dans le texte ci-dessus) n'est pas simple. Cette question des « trous » éventuels, voire des cohérences cachées est au cœur des recherches en didactique.

Revenons au deuxième exercice, comment trouver effectivement ce rapport de similitude ? Aucun élève ne l'a fait – alors même que le « bon » rapport de côtés à calculer est indiqué dans l'énoncé (il n'y a plus le choix des homologues). Voici la transcription (les interventions du professeur sont en italique).

Et puis il y avait ensuite [à] déterminer le rapport de similitude, le coefficient d'agrandissement/réduction si vous préférez, le coefficient de proportionnalité. Alors là vous m'avez écrit les rapports mais personne m'a trouvé la valeur du rapport. Alors D. est-ce que tu as une idée ?

Élève. C'est le coefficient de OE sur BF, de OA/FA, de FA/AB.

Ouais d'accord mais il nous faut cette valeur. Alors ce qui était dans l'énoncé c'était qu'on pouvait facilement faire le rapport OA/AB. OA qu'est-ce que c'est ?

Élève. C'est BA.

OA n'est pas égal à BA.

Élève. C'est le AB…

Julie ?

Élève. OA c'est OB.

OA = OB si on veut.

[…] Robin ?

Élève. AC divisé par 2.

Une première remarque ça peut être que OA c'est AC divisé par 2. Alors est-ce qu'on est capable d'exprimer AC en fonction de AB ? Kerlin ?

Élève. Non.

Arnaud ?

Élève. AC c'est racine 2 fois AB.

AC c'est racine carrée de 2 fois AB. Pourquoi ça Olivier ?

Élève …Parce que la longueur de la diagonale.

Parce qu'on est dans un carré et qu'on sait que dans un carré la longueur de la diagonale c'est le côté fois racine carrée de 2. Comment on démontre ça ? Allo.

Élève. On prend un carré de côté 1.

On prend un carré de 1de côté et on applique, Loïc.

Élève. Pythagore.

On applique Pythagore oui, exercice de 4ème on a progressé par rapport à tout à l'heure. Bien donc AC est égal à racine carrée de 2 fois AB. Alors en quatrième on refaisait la démonstration. On appliquait le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + BC^2$ égal à AC^2, AB est égal à AC, et puis ça nous faisait AC^2

égal 2 AB^2, on prenait la racine carrée et ça marchait très bien. Là, en seconde on a le droit de se permettre de dire qu'on connaît le résultat. Ainsi si AC égale racine carrée de 2 fois AB, que vaut AO, on l'a dit c'est la moitié.

AO égale racine carrée de 2 sur 2 AB. […] Ou si on préfère, AO sur AB égale racine carrée de 2 sur 2.

Voilà. Et justement AO sur AB, tu nous le disais tout à l'heure c'est lui le rapport de similitude, et cette fois-ci on a sa valeur.

Le professeur fait de nouveau allusion à l'oubli et à la mémoire. Nos analyses de tâches nous indiquent qu'il fallait là encore mobiliser des connaissances anciennes supposées disponibles mais en les adaptant – contrairement à la propriété (bien utilisée) de la bissectrice, supposée seulement mobilisable : le calcul du rapport de la demi-diagonale sur le côté dans un carré nécessite de reconnaître un triangle rectangle caché où on peut appliquer le théorème de Pythagore. Il y a donc une reconnaissance, un intermédiaire et un mélange de cadres, géométrique et numérique, alors qu'on n'a pas donné de données numériques dans l'énoncé.

Ainsi, plus généralement, l'analyse précise des mises en fonctionnement attendues, clarifie les activités mathématiques possibles des élèves. Elle peut non seulement permettre de diagnostiquer précisément des difficultés mais aussi, éventuellement, d'aider les élèves, en leur donnant des indications calibrées à leurs besoins, intermédiaires, par exemple s'ils ne démarrent pas, en essayant d'en dire ni trop ni trop peu. Cela nécessite d'interpréter le cheminement des élèves, et ce travail d'interprétation est facilité par les analyses a priori. Mais ces dernières permettent aussi d'ajouter au travail des élèves des commentaires appropriés, qui permettront peut-être un réinvestissement – ici sur la transitivité par exemple. On peut aussi laisser les élèves dégager ces méthodes, l'enjeu est d'arriver à dépasser les associations « simples », mettant en jeu la mémoire, et à intervenir de manière adéquate, pour que les élèves construisent quelque chose de nouveau, ou de plus général, à partir de leur travail – c'est ce que nous appelons des *aides constructives*. L'improvisation nécessaire à leur élaboration par l'enseignant en classe est aidée par les analyses a priori.

c) À propos des aires : le rôle du temps dans les apprentissages

Le professeur a donné en cours le théorème sur le rapport des aires de deux triangles semblables, théorème qui n'est pas du tout retenu par les élèves, semble-t-il. Il y a même un élève qui dit qu'il a étudié le cours mais qu'il n'a pas « vu » dans son cours ce théorème sur les aires de triangles semblables ! Même l'élève au tableau le redémontre d'ailleurs, et le professeur en est presque dépité : « je n'en demandais pas tant »… Et si c'était le contraire ? Si l'élève avait plus de facilités ici à redémontrer le théorème qu'à l'appliquer ?

Nous avons montré en effet dans de nombreuses recherches que les enseignants voudraient que les élèves appliquent un théorème, utilisé comme modèle à contextualiser, dès qu'il est dans le cours. Seulement l'apprentissage n'est pas linéaire ni immédiat, et il se peut que les élèves aient besoin de revenir à la démonstration, par eux-mêmes, plusieurs fois avant de s'approprier le théorème, c'est un résultat général.

d) Le mot de la fin…

Voici un petit extrait du dialogue professeur – élèves à la fin du calcul du rapport de similitude dans le deuxième exercice :

P. *« …j'attendais que par des calculs simples, ici c'est Pythagore en gros, on obtienne que AO sur AB ce soit racine carrée de 2 sur 2. Voilà. Est-ce c'était difficile ça ? …*

É. En fait ça a l'air simple oui mais j'avoue que j'y aurais même pas pensé.

P. *Pourtant il y a deux trois ans tu y pensais.*

É. Oui parce qu'on était en plein dedans, maintenant ça fait deux trois ans justement.

P. *Léa 7 fois 7.*

É. 49 non ce n'est pas ça.

P. *tu vois c'est en CM1 et tu t'en souviens encore pourtant.*

É. **Ouais c'est pas de l'appliquer qui est dur, c'est de savoir que c'est ça qui sert.**

P. *et alors on est là pour ça et je pense qu'un élève de seconde doit trouver ça facile, sinon c'est qu'on manque d'entraînement.* »

Les élèves ont ainsi tout à fait conscience de manquer d'une certaine disponibilité de leurs connaissances anciennes. La question qui se pose est double : est-ce une affaire d'entretien, de mémoire, voire de contrat, et quoi qu'il en soit, à qui revient l'entretien en question ? Pourquoi est-ce que les élèves n'apprennent pas ou oublient leur cours ? Est-ce seulement parce qu'ils seraient « paresseux » ?

e) Est-ce que les élèves sauront faire un exercice de ce type la prochaine fois ? Y a-t-il des alternatives ?

D'un côté des recherches (Felix, 2004) ont montré que c'est le travail en classe qui conditionne, au moins en partie, le travail à la maison, qui permet aux élèves d'avoir suffisamment d'idées pour le faire, pour s'y mettre sans efforts insurmontables et de manière efficace. Peut-être certains élèves n'arriveront-ils à apprendre leur cours qu'après en avoir eu besoin, au moins un peu. Est-ce qu'on peut apprendre sans avoir cherché ? Rappelons-nous Woody Allen parcourant les rues de New York en criant « j'ai la réponse mais qui a la question ? » Est-ce qu'on peut apprendre à appliquer un théorème sans que soit posé avant ni repris après le problème du choix de ce théorème, est-ce qu'on peut apprendre en ayant à sa disposition seulement des exemples où le théorème est utilisé sans commentaires ?

Ainsi, pour nous, apprendre un cours n'est pas un exercice de simple mémoire, ni seulement une question de temps à passer. Ou plutôt si l'apprentissage du cours se réduit à un exercice de mémoire, cela ne suffit pas à ce que les élèves réussissent à l'appliquer ! Cela peut même faire qu'ils y renoncent, par delà des raisons sociales, liées aux sollicitations externes à l'école et aux conditions de travail des élèves.

Par ailleurs, les recherches actuelles sur les séances de classe amènent à questionner, plus généralement, les aides des enseignants – par delà l'enrôlement et le maintien dans l'activité. Qu'est-ce que l'enseignant va choisir de dire, de souligner, et quand ? Par exemple, y a-t-il lieu de dégager ou non des méthodes un peu générales dans ce qui est exposé, avant la recherche des élèves ou après ? Certains enseignants pensent que ce travail de repérage des occasions d'utiliser un théorème, par exemple, est à la charge des élèves – des recherches ont montré que tous les élèves n'en sont même pas conscients et qu'il y a là souvent un travail spécifique possible pour les enseignants (cf. Castela, 2006).

Plus généralement, par delà le travail d'entretien, nous suggérons que les élèves ont à faire un travail de réorganisation des connaissances, lié à la conceptualisation des notions nouvelles. Il ne s'agit pas seulement de savoir à l'avance que tel ou tel chapitre va servir (en s'inscrivant dans un contrat) ou d'apprendre par cœur tel ou tel théorème et de le réviser pour ne pas l'oublier. Il s'agit d'apprendre à la fois le sens des nouvelles notions et les techniques qui permettent de les utiliser, et ce travail, qui remet en jeu régulièrement les connaissances déjà-là, est très difficile pour les élèves. On évoque quelquefois à ce sujet le caractère cumulatif des connaissances en mathématiques. Or, les enseignants ont très rarement le temps de revenir sur les connaissances anciennes, sous la pression de la nécessité de finir le programme avec des horaires réduits et des classes très hétérogènes. De plus les manuels ne proposent que peu d'exercices adéquats à cette réorganisation (Hache, 2008). Il y a là une source d'interrogations.

Nos travaux et nos hypothèses théoriques sur les apprentissages nous amènent à suggérer que des alternatives tiennent au fait de proposer des situations d'introduction des notions, susceptibles d'engager les élèves dans la construction du sens d'emblée, de faire investir et réinvestir les notions dans des situations variées permettant de rencontrer beaucoup d'adaptations, y compris des mélanges, et de dégager des méthodes au lieu, par exemple, de s'appuyer seulement sur le contrat, qui fait jouer l'intelligence des élèves mais hors mathématiques ou sur les associations simples entre énoncé et théorème.

f) Le sens des notions

Nous avons évoqué ci-dessus le sens des notions et leur introduction. Cela fait très longtemps que, très généralement, la didactique pose cette question de l'introduction des notions – des travaux relativement récents ont permis d'introduire une réflexion sur différents types de notions, en relation avec la plus ou moins grande difficulté à élaborer une bonne situation d'introduction. Ce sont notamment les notions qui sont en grand décalage par rapport aux connaissances déjà-là des élèves, souvent en relation avec une genèse difficile et très longue (Robert, 1998). Beaucoup de ces notions sont introduites dans le supérieur, elles sont exprimées dans un nouveau Formalisme Unificateur, simplificateur et Généralisateur : c'est le cas des espaces vectoriels, de la convergence des suites, mais aussi des fonctions et même de l'algèbre élémentaire.

Faire jouer pour ces notions une dialectique entre le caractère outil et le caractère objet par exemple, semble délicat – alors que ce levier peut être extrêmement productif pour des notions qui sont extensions de notions déjà-là ou qu'on peut présenter comme réponse à un problème (Brousseau, 2005 ; Douady, 1987). Les élèves n'ont pas encore eu accès aux outils, même partiels. Il est difficile d'élaborer un problème dont ces notions et elles seules permettent la résolution, avec des moyens de contrôle internes au problème. Les introductions demandent alors un travail spécifique d'investigation de la genèse de la notion et de mises au point d'un certain nombre de séances donnant lieu à un travail partiel des élèves, les amenant à recoller plus facilement les morceaux et à élaborer la nouvelle notion.

Première conclusion partielle

La didactique des mathématiques a ainsi parmi ses objectifs de poser de bonnes questions sur les contenus à enseigner et de proposer des outils adaptés pour les analyser, à partir de ce qui se passe en classe : sont en jeu notamment les connaissances à faire utiliser aux élèves dans les exercices et leurs adaptations ainsi que la gestion des séances. Repérer les activités des élèves (a maxima, a minima), les interpréter grâce aux analyses de tâches a priori et compte tenu des improvisations et autres interventions de l'enseignant en classe, sont des étapes importantes des recherches.

Mais les enseignants peuvent-ils profiter de ces recherches ? À quelles conditions ? Marie-Jeanne Perrin va maintenant s'intéresser aux savoirs nécessaires pour enseigner les mathématiques et relever quelques spécificités des questions qui se posent en primaire.

2. Les savoirs pour enseigner les mathématiques (M.J. Perrin)

Je voudrais commencer par prolonger l'exemple que vient de présenter Aline pour mettre l'accent sur les savoirs pour enseigner les mathématiques. J'aborderai ensuite la question de la spécificité du primaire et notamment de l'utilisation de situations issues de la réalité pour apprendre des mathématiques. J'élargirai enfin le propos à des questions concernant les méthodologies de recherche et les rapports entre la recherche en didactique et l'enseignement.

1) Un exemple pour poser la question des savoirs mathématiques du professeur de mathématiques

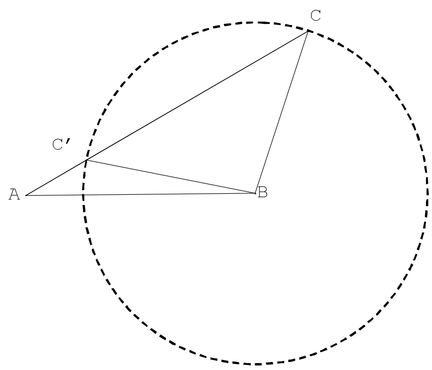
L'exemple présenté par Aline et les travaux qu'elle a évoqués amènent à poser plus largement la question des savoirs mathématiques nécessaires au professeur pour enseigner et qui ne se restreignent pas aux savoirs mathématiques « académiques » enseignés à l'université. En examinant d'un peu plus près la difficulté des élèves de seconde à identifier les points homologues pour traiter des triangles semblables (voire isométriques), on peut ainsi trouver l'exemple d'un tel savoir, présent dans l'enseignement de la géométrie jusqu'aux années 60 et qui semble perdu depuis. Perdu au point que cela peut amener un professeur débutant à se laisser piéger dans son cours qu'il a pourtant soigneusement préparé avec, notamment, les manuels. Ce fut le cas d'une stagiaire dont je dirigeais le mémoire :

Dans son cours, elle a énoncé les deux théorèmes[4] suivants :

Théorème 1 : Si deux triangles ont un côté égal et deux angles respectivement égaux, alors ces deux triangles sont isométriques.

Théorème 2 : Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors les triangles sont isométriques.

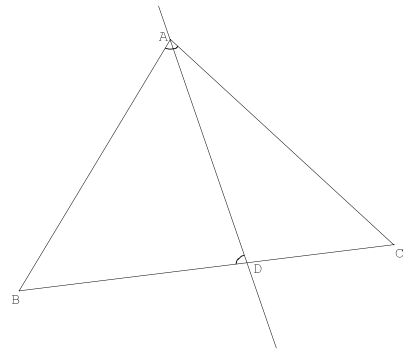
Pour le second, elle a donné un contre-exemple dans le cas où l'angle n'est pas compris entre les côtés (voir ci-contre).



On peut avoir deux triangles non isométriques ABC et ABC' tels que $\hat{A} = 30°$; AB = 8cm ; BC = BC' = 6cm.

Un élève lui a alors demandé si pour le premier théorème, le côté ne devait pas aussi être compris entre les angles. Le professeur a fait préciser ce qu'on savait sur la somme des angles d'un triangle pour conclure que le côté pouvait toujours être considéré comme entre deux angles égaux et que, pour un côté et deux angles on n'avait pas besoin de dire compris, mais sans voir l'importance du « respectivement » qui empêche la figure ci-contre où les deux triangles ont les trois angles égaux et un côté égal sans être pour autant isométriques :

AB = AB ; $B\hat{A}C = B\hat{D}A$; $A\hat{B}C = A\hat{B}D$



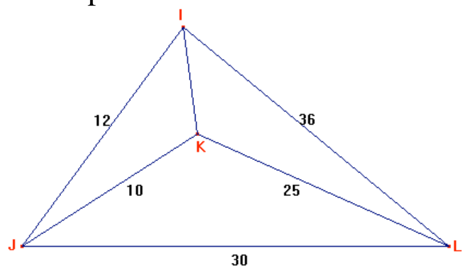
Les triangles ABD et ABC ne sont pas isométriques, mais semblables car ce ne sont pas les éléments homologues qui sont égaux.

Dans le cas des triangles semblables, on voit dans l'exemple montré par Aline et dans la thèse déjà citée (Horoks, 2008) que les élèves ont des difficultés pour identifier les points homologues et que les professeurs semblent avoir peu de ressources pour traiter ce problème. Pour appliquer les cas d'isométrie ou de similitude des triangles, il faut en effet repérer les éléments homologues. On recommande en général aux élèves d'écrire l'un sous l'autre les éléments qui se correspondent mais sans dire comment faire. Évidemment, on peut tricher en mettant les sommets dans le bon ordre pour nommer les triangles comme c'est le cas dans beaucoup d'exercices, mais si on ne triche pas ? Si on a des informations sur les angles, comme dans la vidéo, c'est assez facile parce qu'un angle correspond à un sommet.

[4] Ces énoncés sont empruntés au « Fractales », je ne dispose pas du texte réellement donné par la stagiaire à ses élèves.

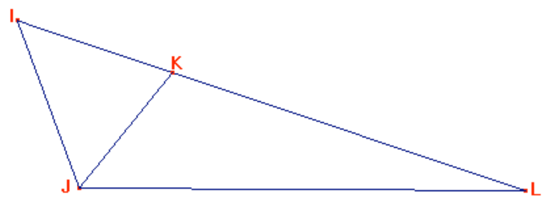
En revanche, si les informations portent sur les côtés, c'est plus difficile, surtout quand on n'a plus à sa disposition les théorèmes liant ordre des angles et ordre des côtés, comme c'était le cas dans les années 60. À mon avis, la difficulté vient aussi du fait que depuis la période des mathématiques modernes, il y a un interdit sur la prise d'informations sur la figure et d'ailleurs, comme il y a de plus en plus de figures fournies avec les exercices, on voit fleurir des textes avec figure fausse, parfois dessinée à main levée, sur laquelle il est impossible de prendre des informations visuelles. Voici un exercice, trouvé sur Internet et proposé à sa classe par la même PLC2, qui montre ces deux aspects :

Utiliser les informations données sur la figure ci-contre pour démontrer que les triangles IJL et JKL sont de même forme.



Le texte en soi est choquant (pour moi du moins) parce qu'il demande de montrer qu'un triangle avec un angle obtus est semblable à un triangle dont les trois angles sont aigus sur la figure fournie. Donc la figure est nécessairement fausse et on ne peut pas s'y fier pour associer les sommets (d'ailleurs 30 correspond sur la figure à une longueur supérieure à celle qui correspond à 36). Comment alors trouver les éléments homologues ? On peut ranger les côtés selon leur longueur mais un côté correspond à deux sommets indifférenciés, il faut donc nommer les côtés en choisissant un sens de parcours (i.e. en repartant de la dernière lettre du côté précédent) : IJ< JL < LI ; JK < KL < LJ (ou associer les sommets opposés à ces côtés) c'est-à-dire faire correspondre IJL et JKL.

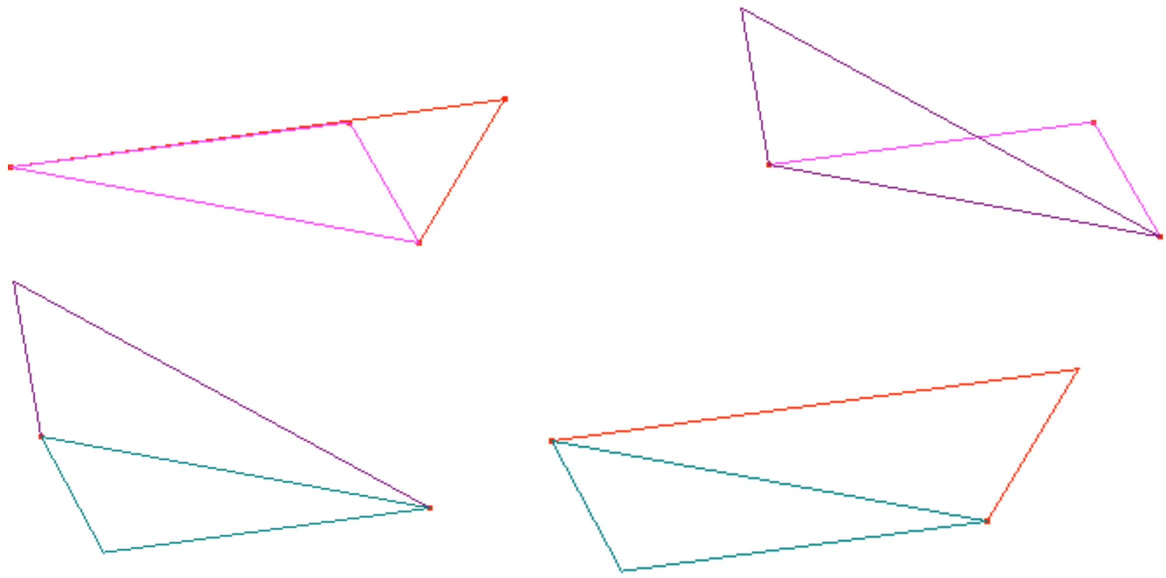
Donc s'ils sont semblables (et ils le sont, puisque $\frac{IJ}{JK} = \frac{12}{10}$ $\frac{JL}{KL} = \frac{30}{25}$ $\frac{LI}{LJ} = \frac{36}{30}$), les angles en L sont égaux, ce qui veut dire que K est sur LI, du moins si K et I sont du même côté de (JL). Il faut ici raisonner malgré la figure.



L'énoncé ne demande pas de construire une figure juste après résolution. La stagiaire n'avait pas vu que K était nécessairement sur [IL] et n'avait pas perçu la contradiction interne à l'énoncé entre le texte et la figure fournis. Mais pour en arriver à cette conclusion, mettre en correspondance les sommets, repérer ces contradictions et produire la nouvelle figure, quelles informations avons-nous prises sur la figure de l'énoncé ? Pour mieux le voir, examinons deux des énoncés du problème qui auraient pu être donnés sans fournir de figure :

Énoncé alternatif 1 : Les côtés IJ, JL et IL du triangle IJL mesurent respectivement 12, 30, 36 cm et les côtés KJ, KL et JL du triangle KJL 10, 25, 30 cm. Ces triangles sont-ils semblables ? Faire une figure.
Énoncé alternatif 2 : Les côtés du triangle IJL mesurent respectivement 12, 30, 36 cm et les côtés du triangle KJL 10, 25, 30 cm. Ces triangles sont-ils semblables ? Faire une figure.

Si on nomme les sommets sans préciser les positions relatives des points (énoncé alternatif 1), on a deux figures possibles (celle que j'ai faite et la symétrique par rapport à (JL), mais si on donne globalement les mesures des côtés des triangles (énoncé alternatif 2), on en a beaucoup plus : sur le côté commun on peut construire 4 petits triangles et 4 grands, et n'importe quelle association d'un petit triangle avec un grand convient. On a donc 4 figures possibles à symétrie près.



Fournir la figure permettait donc de répartir les mesures sur les côtés et de dire que I et K étaient du même côté de (JL).

Quels savoirs ont manqué à ce professeur débutant ? Quelle est la nature des savoirs que nous avons mis en œuvre pour faire cette petite analyse, et à quelle occasion les professeurs et les élèves peuvent-ils les apprendre ? On peut relever notamment :

- Les liens entre mesures des angles et des côtés dans un triangle ;
- La manière de nommer des triangles pour respecter l'ordre des longueurs des côtés ;
- Les informations qu'on est autorisé à lire sur une figure, notamment les positions relatives de points et droites.

Ces savoirs ne font pas (ou plus) partie du corpus explicite des définitions et théorèmes à enseigner mais ce sont des moyens d'utiliser la figure et de mettre en œuvre les autres savoirs géométriques. Les identifier et reconnaître leur importance pour l'utilisation des savoirs mathématiques proprement dits fait partie des savoirs du professeur que j'appellerai didactiques, parce qu'ils sont intimement liés à la fois aux mathématiques et à l'organisation de l'étude des élèves : ce ne sont pas nécessairement des savoirs à enseigner aux élèves, mais ils aident le professeur à identifier les difficultés des élèves, à poser les bonnes questions, à apporter des aides constructives (au sens où Aline l'a défini).

Certes, dans l'exemple, il s'agit d'un professeur débutant mais le même exercice peut être donné sans poser plus de questions sur la figure par un enseignant confirmé parce que, comme le montre Horoks (2008), la non prise en compte dans l'enseignement des moyens de rechercher les points homologues n'est pas le problème d'un enseignant particulier. Pour s'en convaincre, on peut consulter les manuels : je n'ai trouvé un travail explicite sur les éléments homologues que dans un seul des cinq ou six manuels de seconde que j'ai consultés ; il n'est pas parmi les plus utilisés et plusieurs noms de didacticiens figurent parmi les auteurs. Si on regarde les manuels des années 60, on s'aperçoit qu'il y a tout un travail sur le repérage des éléments homologues dans tous les chapitres de géométrie qui portent de manière implicite sur des transformations. Ainsi, les cas d'égalité des triangles alors étudiés en $5^{\text{ème}}$ abordaient déjà la question des points homologues qui était reprise au moment de l'étude du théorème de Thalès en $4^{\text{ème}}$ et des triangles semblables en $3^{\text{ème}}$. On passait beaucoup de temps en $5^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ à décrire les triangles et les relations entre angles et côtés ; par exemple, on savait qu'au plus grand angle est opposé le plus grand côté, ce qui facilite l'analyse de la figure puisqu'un côté a deux extrémités indifférenciées, ce qui n'est pas le cas des angles. La question de la reconnaissance des points homologues est un problème professionnel qui peut se régler par un savoir professionnel du professeur de mathématiques. Ce savoir manque d'autant plus que la plupart des enseignants actuels n'ont étudié ni les triangles isométriques ni les triangles semblables quand ils étaient élèves. L'organisation ancienne de l'enseignement amenait une réponse mais les notions ne reviennent pas dans les programmes de seconde avec la même organisation des savoirs qu'avant 1969. La réponse à apporter au problème est peut-être différente. D'autres exemples ont été mis à jour au fil des recherches, par exemple concernant les angles alternes internes (Cirade, 2008).

Une question essentielle, pour la recherche comme pour la formation, me semble donc la suivante : de quels savoirs et de quelles ressources les enseignants disposent-ils et ont-ils besoin pour préparer puis gérer la classe, adapter leur préparation dans l'urgence et exercer leur métier ?

Bien sûr, les savoirs mathématiques sont essentiels mais pour enseigner les mathématiques, il faut les connaître autrement que pour les comprendre pour soi-même ou les utiliser pour résoudre des problèmes. Le professeur a certes besoin aussi de savoirs pédagogiques transversaux qui ne réfèrent pas à un contenu précis. Les savoirs didactiques, qui nous intéressent plus particulièrement, lient le mathématique et le pédagogique. Parmi tous ces savoirs, il en est sans doute qui ne s'acquièrent que par la pratique de l'enseignement, mais il y a aussi des savoirs qui peuvent s'acquérir ou se développer hors de la pratique, par une formation comprenant éventuellement une anticipation ou une analyse de pratique. Beaucoup de ces savoirs restent à identifier ainsi que la manière dont les professeurs peuvent les acquérir. Ces questions, largement ouvertes en recherche, sont très importantes pour la formation.

2) Les savoirs mathématiques pour le professeur des écoles

La question du savoir mathématique du professeur est cruciale et difficile à tous les niveaux et encore plus en primaire pour au moins trois raisons :

- Les savoirs à enseigner sont naturalisés, automatisés et de ce fait plus difficiles à interroger ;
- Les mathématiques sont parfois moins visibles et imbriquées dans des contextes concrets d'où elles sont plus difficiles à dégager ;
- Enfin, les enseignants du primaire ne sont pas des spécialistes de mathématiques ; ils sont polyvalents et leur formation initiale en mathématiques est très diverse, disons que le noyau commun correspond à peu près à ce qu'on trouve dans les programmes jusqu'en classe de seconde.

a) Les travaux de Liping Ma

Liping Ma (1999), en comparant les pratiques d'enseignants du primaire en Chine et aux États-Unis, a constaté que les enseignants chinois, qui disposaient d'un savoir mathématique théorique moins étendu que les enseignants américains, dispensaient pourtant un enseignement plus riche et plus efficace. Ses travaux ont ainsi montré l'importance de ce qu'elle appelle le « profound understanding of fundamental mathematics » (PUFM), c'est-à-dire le fait d'être capable de faire beaucoup de liens entre les concepts du calcul élémentaire et aussi entre le calcul et les situations concrètes et de disposer de complexes où situations de référence et savoirs sont imbriqués : l'enseignant peut ainsi enrichir son enseignement et réagir de façon appropriée et constructive aux erreurs éventuelles des élèves.

b) Un exemple pour montrer l'imbrication du mathématique, du pédagogique et du didactique dans l'enseignement primaire

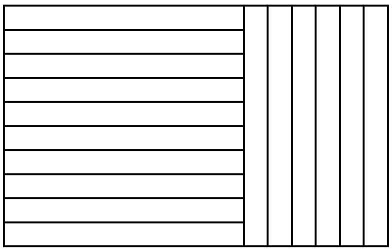
En effet, une des difficultés de l'enseignement primaire, du fait notamment des trois caractéristiques que j'ai citées, est que les notions mathématiques sont à utiliser pour traiter des problèmes concrets et qu'il peut être difficile pour l'enseignant de repérer ce qu'il est important de laisser à la charge des élèves et ce qui ne l'est pas pour que les élèves fassent des mathématiques. Je vais l'illustrer par un exemple rencontré dans une séance d'atelier de développement de pratiques pédagogiques (ADPP) préparée par 3 ou 4 stagiaires pour des élèves de CM2 :

Objectif des stagiaires : travailler les additions répétées dans les décimaux.
Choix d'un contexte : ranger des DVD dans une boîte à chaussures.
L'épaisseur d'un DVD est donnée (1,7 cm avec sa boîte)
La longueur de la boîte aussi (33 cm) ; sa largeur correspond à la hauteur d'un DVD.
Question : On veut ranger le plus possible de DVD dans la boîte. Combien peut-on en mettre ?

Ce choix de problème a été fait en ma présence, mais je n'ai pas participé à la suite de la préparation. J'ai assisté à la séance en classe. La stagiaire qui mène la séance a apporté la boîte et un grand nombre de DVD. Elle pose le problème collectivement en montrant la boîte, les DVD. Avec l'aide des élèves, elle constate qu'on peut ranger les DVD dans la boîte et mesure les dimensions utiles. Les élèves sont répartis en groupes et se mettent tout de suite au travail. Mais… La boîte et les DVD circulent dans la classe. Pour aider les élèves, la stagiaire distribue à chacun une représentation vue de dessus de la boîte.

Que peut-on alors attendre des élèves ? Quand la boîte arrive dans leur groupe, ils cherchent des manières de ranger le plus possible de DVD dans la boîte en utilisant les trois dimensions.

Sur la représentation, ils dessinent des DVD en utilisant les deux dimensions, cherchant toujours à en mettre le plus possible avec un certain nombre de dessins de ce type :



Or le problème mathématique visé par les stagiaires[5] (addition répétée de 1,7 et donc multiplication par un entier) ne se pose réellement qu'une fois qu'on a décidé de ranger tous les DVD verticalement dans le même sens, c'est alors un problème de dimension 1 : trouver combien de fois on peut reporter 1,7 cm dans 33 cm. La dévolution du problème mathématique visé ne peut donc avoir lieu que quand on a tranché le problème matériel du rangement des disques en décidant de les ranger tous verticalement de façon à pouvoir lire le titre au dos. Si l'on veut que tous les élèves aient suffisamment de temps à consacrer au problème mathématique visé, le travail en groupes ne doit donc commencer que quand cette définition du problème à traiter a été élucidée collectivement. Faute de cet accord préalable sur le problème à traiter, la distribution du matériel et d'une représentation en dimension 2 ramène les élèves sur le problème matériel. On voit ici comment le mathématique et le pédagogique sont imbriqués aussi bien dans le choix d'un problème et de l'organisation du travail des élèves que dans la gestion de la classe. À l'école élémentaire, les stagiaires croient bien faire en apportant du matériel plutôt qu'en se contentant de l'évoquer. Au fil des programmes et des instructions, on répète qu'il faut s'appuyer sur des situations concrètes qui aient du sens pour les jeunes élèves ; les professeurs des écoles stagiaires reviennent tous de leur premier stage en disant qu'ils ont appris qu'il faut faire manipuler les élèves. Mais que

[5] Le problème de l'optimisation du rangement peut effectivement se poser en utilisant les deux dimensions comme dans la figure, voire en utilisant les trois dimensions mais c'est alors un problème de recherche complexe qui n'était pas du tout le projet des stagiaires et aurait demandé une autre organisation de la classe ; d'ailleurs, en donnant la consigne, la stagiaire n'a mesuré avec les élèves que la longueur de la boîte et l'épaisseur d'un DVD.

veut dire concret, que faut-il manipuler, comment manipuler pour que les élèves apprennent des mathématiques ? Les injonctions pédagogiques actuelles disent qu'il est important de laisser chercher les élèves. Oui mais sur quel problème ?

c) Les mathématiques pour traiter des problèmes concrets / les problèmes concrets pour introduire les mathématiques

Dans l'exemple qui précède, les mathématiques sont utilisées pour traiter une situation concrète complexe (où il y a à décider quel traitement mathématique on veut appliquer la réalité concrète). Le problème des rapports avec la réalité se pose aussi pour l'introduction de notions mathématiques et il se pose en lien avec les théories sous-jacentes. Comment met-on en place, comment définit-on les premières bases des notions mathématiques sur lesquelles on construira la suite ? Comment trouver un milieu matériel qui permette d'introduire ces notions et de leur donner un sens transférable à d'autres situations ? Comment proposer une construction des notions mathématiques cohérente avec les mathématiques elles-mêmes et avec le développement cognitif de l'enfant ? Ces questions ont occupé les recherches en didactique depuis le début. Les rapports entre mathématiques et réalité seront abordés demain mais je voudrais déjà faire trois remarques.

1) <u>Pointer la différence entre une démarche descendante et une démarche ascendante</u>

On peut utiliser la réalité comme illustration : on part des notions mathématiques et on essaie de les illustrer par des situations concrètes, c'est-à-dire qu'on habille des notions ou des problèmes mathématiques par des contextes concrets ; on a un milieu matériel qui sert à montrer ces notions dans leur action sur un matériel concret, présent ou plus souvent évoqué ; dans ce cas, il faut souvent déjà connaître les mathématiques en jeu pour les voir dans le concret et si l'élève ne « voit » pas l'enseignant ne peut que recourir à l'ostension (voir Salin, 1999, 2008) pour les lui « montrer » dans le milieu. C'est par exemple ce qui se passait quand on enseignait le groupe de Klein ou groupe du matelas à l'école primaire. Un symbolisme introduit dans une situation était reporté sur une autre sans qu'on ait une véritable opérationnalité de la notion mathématique ainsi présentée. C'est un peu aussi ce qui se passe souvent pour les opérations arithmétiques introduites directement sur les nombres : par exemple, on introduit la division et sa technique en l'illustrant par un partage de bonbons ou un rangement d'œufs dans des boîtes. En général, le transfert dans des problèmes où l'opération prend un sens différent ne se fait pas facilement et il faut aussi apprendre les conditions d'emploi de l'opération. On enseigne donc le modèle et ses applications, c'est ce que j'appelle un modèle descendant.

La démarche ascendante consiste, elle, à partir de situations concrètes qu'on traite concrètement pour faire émerger un modèle mathématique qu'il s'agira de réinvestir dans d'autres situations concrètes qui n'ont peut-être rien à voir avec celle du départ. Ce réinvestissement permettra l'enrichissement des savoirs produits initialement. Mais alors comment faire pour que ce modèle mathématique soit réutilisable ? Y a-t-il des situations concrètes qui sont incontournables pour la création du sens d'un concept mathématique donné ? Y a-t-il des situations concrètes dans lesquelles on a la possibilité de dégager, au niveau des élèves, des éléments théoriques qui soutiennent la démarche et sont en cohérence avec une théorie mathématique ? C'est le genre de démarche et de questions qui sont étudiées par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et par la dialectique outil objet (Douady, 1987 & 1994).

Des éléments essentiels pour le transfert sont le vocabulaire et les symboles introduits, autrement dit, l'activité sémiotique développée autour de la situation concrète : on ne résout pas le problème seulement pour le résoudre mais pour créer des outils réutilisables dans d'autres problèmes. Plusieurs travaux ont montré l'importance des représentations intermédiaires entre la situation concrète et les notions mathématiques qui la modélisent (par exemple Perrin-Glorian, 1993 ; Sadovsky et Sessa, 2005). Ces représentations aident à isoler ce que le modèle mathématique prend en compte, comme l'exemple précédent le montre aussi. L'entrelacement entre le vocabulaire lié à la situation concrète et le vocabulaire mathématique et les symboles est essentiel pour la création du sens et le réinvestissement.

2) Souligner l'importance de l'existence d'une « théorie » permettant de faire le lien entre les situations concrètes de l'environnement socio-culturel des élèves et les notions mathématiques décontextualisées

Il est important pour la formation des enseignants qu'il existe une théorie mathématique de référence qui permette de justifier le lien entre les situations concrètes et les mathématiques introduites et qui gère les intermédiaires pour que les enseignants puissent disposer d'une compréhension profonde des concepts mathématiques élémentaires, comme le dit L. Ma. Or, et la thèse de Christine Chambris (2008) qui s'achève en donne l'exemple pour la numération, toutes les théories mathématiques ne se valent pas de ce point de vue et il se peut que certaines ne le permettent pas. Dans les années 70, on a écarté les grandeurs comme moyen de construire les nombres, en les sortant de l'arithmétique et en créant un domaine « mesures ». Elles ont même pendant une longue période complètement disparu des programmes du secondaire, l'aire et la longueur devenant des nombres. Depuis, les grandeurs ont progressivement réapparu dans les programmes mais elles n'ont pas retrouvé leur place dans la construction des opérations arithmétiques.

L'introduction des opérations directement sur les nombres ne permet pas de traiter les problèmes. Par exemple, la multiplication comme addition répétée de grandeurs n'est pas commutative. Il n'est déjà pas évident pour les élèves qu'on ait le même nombre de cerises dans quatre paniers contenant chacun douze cerises que dans douze paniers de 4 cerises ; cela demande de prendre une cerise dans chacun des premiers paniers pour les mettre dans le même panier, passant ainsi de la distribution des cerises dans des paniers différents au regroupement par paquets de 4. C'est encore moins évident qu'en mettant bout à bout douze segments de 4cm on obtient la même longueur qu'en mettant bout à bout 4 segments de 12cm puisqu'il faut passer par la constitution de cette nouvelle grandeur pour voir l'équivalence et que de plus ces manipulations concrètes différentes relèvent de la même opération. Cela se corse quand, de plus, cette opération permet aussi de calculer le prix de 24,3 litres d'essence à 1,5 euros le litre : comme l'a demandé une élève de CM2 à son professeur d'école qui est resté sec (il avait pourtant une licence de mathématiques) : pourquoi en multipliant des francs avec des litres, on a des francs ? D'autres auraient pu demander : pourquoi obtient-on l'aire en cm^2 d'un rectangle en multipliant ses dimensions en cm ? Comment comprendre ce calcul d'aire comme une addition répétée ? Comment comprendre le changement d'unités, le fait que les deux nombres et non un seul soient des nombres d'unités, des nombres mesurant des grandeurs ?

La thèse de Christine Chambris montre l'apport de traités comme ceux de Reynaud et de Bézout au 19ème siècle pour fonder l'enseignement classique des nombres à l'école primaire en cohérence avec les pratiques sociales de l'époque et l'absence actuelle d'une telle théorie mathématique compatible avec le développement cognitif des élèves et leur environnement socio-culturel ; elle en propose quelques éléments. La construction ensembliste des nombres est trop pauvre et trop éloignée des pratiques sociales où de plus l'usage des nombres pour traiter les grandeurs est devenu tout à fait opaque dans un monde numérique (par exemple, les pesées avec une balance électronique).

3) Les besoins plus grands en termes de savoirs didactiques des enseignants

La demande actuelle de s'appuyer sur le travail des élèves que ce soit avec une référence piagétienne ou vygotskienne, ou simplement parce que dans la société actuelle les élèves acceptent plus difficilement d'apprendre à l'école des savoirs dont ils ne voient pas tout de suite l'utilité, demande beaucoup plus de savoirs didactiques de la part des enseignants : la seule logique du savoir ne suffit pas quand on veut s'appuyer sur des productions d'élèves en réponse à des problèmes. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) a introduit le concept fondamental de milieu pour rendre compte de ce qui, dans une situation didactique, est reconnu par les élèves et le maître comme objectif, c'est-à-dire indépendant à la fois du maître et des élèves, et donc point d'appui possible pour la résolution d'un problème et pour argumenter. À l'école primaire, le milieu est souvent matériel, effectif ou évoqué ; plus tard, il est souvent composé de savoirs qui ne sont plus enjeu d'apprentissage, qui sont naturalisés. L'action sur le milieu et l'interprétation des rétroactions de ce milieu demandent de mettre en œuvre des connaissances. Les connaissances anciennes doivent permettre de comprendre ce qu'est une solution du problème à travers une stratégie de base qui amène une solution partielle au problème ; la recherche d'une solution plus économique ou plus complète peut amener la production de connaissances nouvelles. Dans les situations de classe réelles, on a rarement un milieu qui permet aux élèves de résoudre et de produire des connaissances nouvelles sans intervention du professeur. L'analyse fine de séances de classe montre d'une part que le professeur ou même les élèves modifient le milieu au cours de la résolution, d'autre part que les apprentissages effectifs des élèves ne sont pas toujours ceux prévus par le professeur (par exemple parce que les connaissances disponibles des élèves ne sont pas celles qui étaient attendues) – voir notamment les travaux d'Alain Mercier et Gérard Sensevy et d'autres chercheurs utilisant le même cadre théorique (Sensevy et Mercier, 2007), ou de Magali Hersant et moi-même (Hersant, 2004 ; Perrin-Glorian et Hersant, 2003 ; Hersant et Perrin-Glorian, 2005). Pour faire émerger le savoir à retenir des connaissances produites par les élèves dans la résolution d'un problème, le professeur a besoin d'adapter sa préparation et même souvent ses savoirs didactiques sur les élèves et le problème, pour coller au travail des élèves et pour coller au savoir à enseigner. Quels savoirs de référence pour ce travail délicat à chaud du professeur ?

3. Méthodologies pour des recherches

Place de l'ingénierie didactique

Nous avons, dans cette conférence, donné une grande place à l'étude de l'enseignant, domaine qui s'est beaucoup développé ces dix dernières années parce que la formation des enseignants est un enjeu essentiel pour améliorer l'enseignement et son efficacité. En effet, la recherche en didactique des mathématiques a pour objectif, à terme au moins, d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les recherches ont démarré en France et dans d'autres pays par des ingénieries didactiques où le chercheur prenait plus ou moins la place de l'enseignant dans la conception de suites de séances supposées améliorer l'apprentissage des élèves. Trente à quarante ans après les premiers travaux, la complexité du projet et la nécessité de mieux connaître le fonctionnement du système apparaît clairement à tous. Cependant, les rapports entre la recherche et ses effets sur le système d'enseignement, notamment par la diffusion des ingénieries didactiques produites par les recherches, restent difficiles à appréhender et à contrôler. Les évolutions ont été différentes selon les pays. On peut relever en gros deux philosophies pour essayer de faire bouger l'enseignement dans le bon sens :

– Développer des projets à grande échelle et former des enseignants en les faisant participer aux recherches, comme ce qui se passe en Italie dans la recherche pour l'innovation, et ainsi faire bouger les contraintes du système d'enseignement de l'intérieur, ce qui suppose sans doute qu'elles soient assez souples.

– Mieux comprendre le fonctionnement ordinaire du système et les contraintes pour comprendre d'une part comment on peut les faire bouger sans provoquer de catastrophes, d'autre part quels sont les besoins des enseignants et adapter la formation à ces besoins. C'est le point de vue qui domine en France depuis une bonne dizaine d'années. Les contraintes sont recherchées :
    – du côté des mathématiques elles-mêmes (il y a toujours une interrogation épistémologique forte dans les recherches en didactique),
    – du côté du fonctionnement de l'institution scolaire,
    – du côté du fonctionnement de la classe.

Les deux points de vue ne sont pas contradictoires. D'ailleurs, un moyen de révéler le fonctionnement ordinaire du système est de lui apporter une perturbation qui change les équilibres dans les savoirs et les pratiques des enseignants. C'est ainsi que les recherches qui se sont développées depuis 20 ans autour de l'intégration des nouvelles technologies (calculatrices, logiciels) dans l'enseignement des mathématiques, thème auquel est consacrée la matinée de demain, ont aussi apporté ces dernières années des informations sur les pratiques ordinaires des enseignants, avec ou sans ces technologies.

Quelle est l'unité d'analyse des recherches ?

Qu'on adopte l'un ou l'autre point de vue, dans les recherches en didactique, il s'agit comme l'a dit Aline, d'étudier une réalité très complexe, qu'on va pour cela découper en fonction de choix méthodologiques et théoriques. Une question importante pour la portée des résultats est celle de l'unité d'analyse qu'on se donne, autrement dit, où met-on la focale ? On a vu sur l'exemple des triangles semblables que l'analyse de difficultés d'élèves et d'enseignants particuliers sur une question précise peut nous amener à enquêter plus largement sur le savoir mathématique et son organisation en utilisant d'autres outils théoriques. L'exemple nous a ici amenés à élargir la focale pour considérer des questions de transposition didactique.

Ainsi, sur ce même sujet de l'étude du rôle de l'enseignant qu'a abordé Aline, d'autres points de vue théoriques amènent des éclairages différents et complémentaires. Au lieu de rechercher des régularités ou variabilités chez les individus, enseignants ou élèves, on cherche à étudier et caractériser le fonctionnement d'un système : le professeur et l'élève sont alors considérés par rapport à leurs attentes, leurs contraintes, internes ou externes à la classe, dans leurs rapports dissymétriques avec le savoir et en lien avec les objectifs d'enseignement et apprentissage qui leur sont assignés par l'institution scolaire et la société et qu'ils reprennent à leur compte. Ils sont ainsi vus eux-mêmes comme des systèmes en interaction ou comme des positions dans des institutions en prenant le terme « institution » dans un sens large : la classe elle-même, un niveau scolaire comme la classe de seconde, sont des institutions. Cela peut amener à mettre la focale sur les organisations mathématiques pour les situer par rapport à des possibles ou à la porter non sur les individus mais sur le contenu des interactions et sur les enjeux didactiques pour un professeur générique et un élève épistémique. Dans chacun des cadres, on peut de plus varier le grain d'analyse et choisir un plan très large ou examiner très finement à la loupe.

Les recherches menées dans l'équipe DIDIREM ont été variées, elles ont pris l'un ou l'autre des points de vue précédents, ont utilisé des cadres théoriques différents, pour certaines d'entre elles en essayant de les articuler.

3. Perspectives (C. Castela)

Le rôle de ce troisième temps est maintenant d'élargir la vision de la didactique des mathématiques que nous présentons dans cette conférence. Je vais le faire en donnant des coups de projecteur, nécessairement rapides vu le temps qui m'est imparti, sur certaines des orientations de la didactique des mathématiques française.

La didactique (dans la suite je sous-entendrai toujours qu'il s'agit de la didactique des mathématiques) est née comme la science des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage du savoir mathématique, son objet s'est aujourd'hui étendu à l'ensemble des phénomènes de diffusion de ce savoir. Elle est science fondamentale en ce sens qu'elle cherche à décrire et comprendre, science appliquée en ce sens qu'elle a comme visée de contribuer à améliorer le fonctionnement des systèmes étudiés.

La recherche didactique comme utilisatrice des savoirs mathématiques

Le premier point que je tiens à mettre en avant a déjà été bien illustré dans les deux interventions précédentes : dans les deux versants de son activité (comprendre et améliorer), la didactique utilise *des savoirs mathématiques* pour traiter des questions qui ne sont pas celles pour lesquelles les mathématiciens les ont élaborés ou les utilisent aujourd'hui.
A. Robert et M-J. Perrin l'ont clairement montré :

- Pour analyser les difficultés qu'ont les élèves dans l'utilisation des cas de similitude, elles se sont appuyées sur ce qu'elles savent elles-mêmes comme utilisatrices de ces théorèmes, sur des savoirs qui n'apparaissent pas dans les traités de mathématiques savantes et qui relèvent pourtant d'une expertise du praticien mathématicien.
- M-J. Perrin a évoqué la nécessité pour les enseignants du primaire de disposer d'une théorie des grandeurs adaptée à leur niveau de compétence mathématique et aux besoins de l'enseignement ; une reprise en l'état initial d'une ancienne théorie ne peut vraisemblablement pas suffire, est-ce une fonction de la recherche en mathématiques d'élaborer une telle théorie actualisée ? Je ne pense pas. Par contre et par définition, c'est une fonction de la recherche en didactique qui devrait donc idéalement dans ce cas associer chercheurs en didactique et chercheurs en mathématiques, ceux-ci acceptant de prendre provisoirement une posture didactique qui risque de ne guère contribuer à leur carrière.

Dans un tout autre contexte, la thèse d'A. Rossignol (1997) est un exemple analogue. Elle propose une nouvelle présentation des relations différentielles linéaires à coefficients constants, destinée d'abord à des élèves d'écoles d'ingénieurs, qui permet assez facilement aux étudiants d'établir, sans rien céder à la rigueur, les solutions d'une classe de problèmes englobant tous ceux qui sont habituels à ce niveau, dans ce domaine. Contrairement à ce qui est visé dans les mathématiques savantes qui recherchent toujours une validité maximale, il produit une théorie volontairement locale.

La didactique est donc un domaine d'activité qui utilise, voire produit des mathématiques non pas aux fins de faire progresser les mathématiques mais aux fins de faire progresser leur enseignement. En fait les exemples fourmillent, on pourrait dire que le mathématique est partout dense dans le didactique. Je ne développerai pas plus ce point de vue.

La dimension épistémologique de la recherche en didactique

Corrélativement à cette dimension mathématique, la didactique comporte une dimension épistémologique. Cette dimension est rendue incontournable par l'objet même de la didactique : elle s'intéresse à la diffusion des savoirs mathématiques, c'est-à-dire à ce qu'ils deviennent quand, produits par les mathématiciens, ils échappent au moins en partie à leur contrôle et circulent dans les différents mondes sociaux où ils sont utilisés. Ces circulations donnent lieu à des transformations des savoirs originels, ce qu'à la suite de Verret (1975), nous appelons des transpositions, transposition didactique quand l'utilisation en jeu est l'enseignement mais il existe également de multiples transpositions vers les usages par les autres sciences, par les professions, dans la vie quotidienne (Chevallard, 1994).

L'intérêt pour la transposition des savoirs mathématiques dans ces mondes non didactiques d'utilisation a été peu développé en France jusqu'à une période récente, ce qui n'est pas le cas d'autres pays comme la Grande-Bretagne ou l'Italie. Mais cet axe de recherche connaît maintenant un certain essor en France : l'école d'été de 2005 lui a consacré une partie de ses travaux, c'est un thème abordé au colloque de l'EMF (Espace mathématique Francophone) qui aura lieu à Dakar en 2009, et le présent colloque lui accorde une place importante.

Parce qu'elle prétend agir à l'interface entre producteurs et utilisateurs de mathématiques, la didactique se doit d'étudier ces phénomènes de transposition en prenant en compte dans ses analyses le point de vue de « l'orthodoxie mathématique contemporaine », celui de l'histoire des mathématiques ET celui des différents mondes d'utilisation. L'approche épistémologique des didacticiens est donc originale parce qu'elle ne se réfère pas au seul savoir savant : la confrontation avec des pratiques mathématiques professionnelles par exemple dépayse, elle permet de prendre conscience de certaines dimensions des pratiques savantes que l'habitude a rendues invisibles. Cette pratique est originale parce qu'elle est finalisée : il s'agit d'interroger la nature du savoir mathématique, à vrai dire plutôt des savoirs mathématiques, le savoir savant et ses transpositions, pour mieux les utiliser, en particulier pour mieux les enseigner.

Par exemple, Catherine Houdement et Alain Kuzniak (2000) ont développé une analyse des différentes formes et pratiques de la géométrie, en terme de paradigmes, qui permet d'analyser la différence des choix transpositifs effectués en France pour l'élémentaire et le secondaire, avec dans le premier cas, une géométrie des dessins instrumentés acceptant l'usage de certains de ces instruments pour la validation et dans le second cas, dès les premières années du collège, une géométrie d'objets abstraits modélisant les tracés aux instruments mais dont le seul mode de validation est la démonstration. Tout le monde ici est conscient de l'écart de la première de ces géométries à la seconde, au point qu'on pourra considérer la première comme non mathématique, ce qui se traduit en France par son éviction précoce (en tout cas jusqu'aux programmes actuellement en cours qui ont un peu changé les choses mais le contenu des nouveaux programmes du primaire laisse planer des doutes sur la pérennité de cet infléchissement). Les travaux développés par Houdement et Kuzniak permettent pour le moins d'exhiber le changement de paradigme entre école et collège, d'y faire réfléchir les professeurs et de concevoir un enseignement qui prenne en charge le passage de l'un à l'autre. Mais ils permettent également de prendre conscience du fait que le système français fait un choix entre plusieurs possibles puisqu'il rejette très tôt le premier paradigme. Pourtant, dans nombre de pratiques sociales, mesurer aux instruments, par exemple sur un plan à l'échelle, est une manière légitime d'obtenir des données nouvelles, avec dans certains cas, le besoin de contrôler les erreurs sur les mesures obtenues. C'est alors une géométrie de l'approché, de l'encadrement qui est attendue.

Pourquoi le système français privilégie-t-il une géométrie de l'exact, prohibant voire diabolisant le mesurage, ce qui la condamne à n'avoir que des rapports simulés ou évoqués au monde réel ? Cette question me servira de transition avec la troisième partie de mon intervention car on ne peut y répondre sans inscrire les phénomènes didactiques dans la société, puisque le choix français n'est pas général. Une recherche collaborative franco-chilienne menée dans le cadre de DIDIREM a par exemple montré que l'enseignement secondaire chilien a jusqu'en Première une position différente (Castela et *al*., 2006).

L'approche institutionnelle des phénomènes didactiques

Dans le cadre de ce point de vue rapide sur les travaux développés par la communauté française de recherches en didactique des mathématiques, il me paraît absolument essentiel d'insister sur la place qu'y occupe la prise en compte des aspects sociaux et institutionnels, ce notamment grâce aux outils développés par la Théorie Anthropologique du Didactique (pour un premier pas, voir Chevallard, 1992).

L'approche institutionnelle considère qu'en première instance les actions du professeur et des élèves sont déterminées par le réseau complexe des institutions de tailles très variables – l'établissement, le manuel, le collège, le système scolaire français, la société française (cela n'épuise pas la question) – dans lesquelles ces actions se déroulent. Ces institutions fournissent des ressources ET exercent des contraintes qui définissent un champ de possibles dans lequel les processus d'apprentissage et d'enseignement doivent ou ont tout intérêt à se situer. Les spécificités individuelles déterminent en deuxième instance la façon dont une personne se positionne relativement aux marges de manœuvre dont elle dispose. Certains travaux se consacrent uniquement à l'étude des déterminations institutionnelles. Ce n'est pas le cas de tous mais j'ai envie de dire que même dans le cas d'études cliniques comme celles qu'A. Robert a évoquées, une caractéristique de ce que je prendrai le risque de considérer comme un style français en didactique est de toujours prendre en compte la dimension institutionnelle dans les analyses avec, au cours de l'étude, des allers et retours entre les niveaux. Par exemple, il arrive que certains possibles prévus *a priori* n'apparaissent pas dans l'étude clinique ou n'y apparaissent qu'à la marge. On cherchera certes des interprétations au niveau des personnes mais on reviendra également à l'étude institutionnelle pour y repérer des déterminations négligées, pour la préciser en analysant de plus près les spécificités des institutions locales dans lesquelles agissent les personnes en jeu (par exemple, les caractéristiques de l'établissement particulier où travaille tel professeur – effet établissement mis en évidence au niveau générique par des travaux de sociologie de l'éducation mais que nous cherchons à spécifier dans le cas des mathématiques).

Cette approche a été introduite par Yves Chevallard pour lutter contre ce qu'il appelait les volontarismes pédagogiques. Il y a une écologie des systèmes didactiques déterminée par la chaîne des institutions concernées, une écologie qui fait que telle réforme décidée par une institution donnée n'est pas viable sans être accompagnée d'autres changements, souvent dans d'autres institutions. J'illustrerai ce propos par deux exemples.

Recherche et enseignement ordinaire

La communauté didactique française a découvert à ses dépens cette complexité : les séquences d'enseignement que nous expérimentions, je pense particulièrement aux travaux développés sous la direction de Guy Brousseau à l'école Michelet de Talence, ne diffusaient pas dans le monde enseignant ou n'y diffusaient qu'en perdant largement leur essence. Comprendre ce phénomène nous a conduits à une meilleure prise en compte des contraintes du métier d'enseignant, ce qui oriente les travaux dans différentes directions, qui peuvent adopter des points de vue assez opposés. À une extrémité d'un éventail qui comporte plus de deux possibilités bien entendu, le groupe de l'équipe DIDIREM qui se consacre au thème des pratiques enseignantes propose des changements de portée beaucoup plus modeste que les ingénieries initiales, espérant enclencher une spirale évolutive grâce à un tel premier pas (Robert et Rogalski, 2002). À l'opposé, les recherches qui se développent autour de la notion de PER (Parcours d'Étude et de Recherche) expérimentent des formes d'enseignement dont on peut estimer qu'elles représentent une vraie révolution culturelle mais en postulant que l'existence de marges de manœuvre pour les enseignants devrait permettre la diffusion de telles nouvelles pratiques (Chevallard, 2004 ; Équipe Ampères, 2007).

Par ailleurs, ces difficultés ont clairement fait apparaître la nécessité de concevoir une formation, initiale et continue, des enseignants qui les outillent mieux pour faire face dans des conditions supportables pour eux aux changements de pratiques dont nous continuons à penser qu'ils sont nécessaires.

Études comparatives inter-institutionnelles

Les déterminations institutionnelles touchent également le savoir enseigné, tant au niveau des contenus que des pratiques dont on vise l'apprentissage, comme nous l'avons vu avec la question des paradigmes géométriques. Les choix effectués dans un pays donné quant à l'enseignement des mathématiques résultent d'un processus soumis à de multiples contraintes émanant d'institutions spécifiques de ce pays. Ceci peut paraître une évidence. Pourtant, elle est ignorée du grand mouvement d'évaluation internationale qui se développe depuis quelques années avec des enquêtes comme PISA. Celles-ci s'appuient sur des outils dont l'élaboration est rien moins que transparente, et font des choix dont les déterminations et les références ne sont guère explicitées. Quelle conception des mathématiques, quelles visées de l'enseignement, ces enquêtes privilégient-elles de fait ? En quoi leur point de vue diffère-il du point de vue français ? Pourquoi ce choix français est-il ce qu'il est ? Que veut-on en changer ? Que peut-on en changer ? Moyennant quelles réformes touchant à quelles institutions ? Voilà toute une série de questions macro-didactiques auxquelles il serait raisonnable d'apporter au moins des éléments de réponses avant que d'engager les réformes qu'une simple lecture des classements nationaux semble inviter à mener d'urgence.

Deux axes de recherches primordiaux pour l'avenir

Pour finir, il me paraît important d'évoquer sans pouvoir développer mon propos deux directions spécifiques des recherches actuelles.

L'enseignement dans les secteurs défavorisés

Certains travaux, en liaison avec le réseau RESEIDA (Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages, Université Paris 8) commencent à s'intéresser à la contribution de l'enseignement des mathématiques aux processus de reproduction sociale, à la transformation des différences construites en dehors de l'école en hiérarchie scolaire. Les recherches de Perrin-Glorian (1993), puis Butlen et Pézard (2003) sur les élèves en grande difficulté ont été des précurseurs dans cette perspective. L'arrière-plan sociologique n'y était pas nécessairement explicite, mais leurs résultats sont entrés en résonance avec d'autres travaux de Sciences de l'éducation, notamment ceux qui sont développés par l'équipe ESCOL (Éducation et Scolarisation), je pense par exemple aux études consacrées par Bautier, Rochex et Charlot (1992) au rapport au savoir des enfants d'origine populaire. La centration sur les élèves a été mise en sommeil pendant quelques années pour focaliser le regard sur l'enseignant dans le contexte des ZEP (Zones d'Éducation Prioritaire). Mais actuellement, de nouvelles recherches reviennent sur le point de vue des élèves. Certaines s'intéressant par exemple aux conséquences différenciatrices des implicites de l'enseignement des mathématiques, ces apprentissages qu'il faut réaliser pour réussir et qui sont laissés à la charge des élèves, ce qui fait du travail personnel un objet auquel des recherches s'intéressent.

L'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques

Enfin, il n'est pas possible de ne pas mettre en avant le domaine des recherches portant sur l'utilisation des nouvelles technologies auquel est consacrée une partie de ce colloque.

Concernant l'emploi des logiciels et des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques, de nombreux travaux ont été réalisés. L'intégration des logiciels de géométrie dynamique a été et reste un objet particulièrement étudié, notamment à Grenoble, université dont sont issus les chercheurs qui ont créé le logiciel Cabri. Il me paraît intéressant de souligner que Cabri est né d'une collaboration étroite entre didacticiens et informaticiens, c'est aujourd'hui le cas pour des logiciels concernant l'enseignement de l'algèbre (voir l'atelier de Brigitte Grugeon). L'équipe DIDIREM a contribué de façon substantielle, et souvent en collaboration avec des chercheurs d'autres équipes, aux recherches dans ce domaine, avec notamment les travaux pionniers de Michèle Artigue, Jean-Baptiste Lagrange et Luc Trouche sur l'introduction du calcul formel et l'approche instrumentale. Ces travaux se sont étendus à d'autres technologies : tableurs, ressources en ligne et base d'exercices.

Ces recherches ont montré que, comme toujours, les choses étaient plus complexes que ce qu'on avait prévu, ces artefacts devant être l'objet d'un processus d'appropriation par les élèves pour leur utilisation mathématique et par les professeurs pour leur intégration dans l'enseignement.

Beaucoup plus récemment, des recherches ont commencé à s'intéresser à l'emploi des nouvelles sources d'information (Internet, Espace Numérique de travail) (voir, pour ce qui concerne les enseignants, les travaux de Georget (2006) et Emprin (2007) au sein de DIDIREM, ainsi que le travail de Gueudet, Soury-Lavergne et Trouche présenté dans ce colloque mais aussi Chevallard, 2004). Celles-ci changent radicalement la question des modalités de diffusion et d'apprentissage des savoirs. La formation à ce nouveau genre de pratiques d'étude est peut-être bien LA question didactique majeure, toutes disciplines confondues qu'il faudra affronter dans l'avenir. C'est en la pointant comme telle que je terminerai ce tour d'horizon en rappelant le caractère incomplet et subjectif de l'exercice auquel je me suis livrée.

4. En guise de conclusion

Nous avons choisi de préférer à une présentation plus complète, une incursion précise dans le champ de la didactique des mathématiques à travers quelques exemples détaillés.

Pour continuer, il faudrait développer l'exploration des travaux consacrés aux thèmes évoqués, aborder des axes de recherche non choisis dans cette conférence, et ce tout à la fois au niveau français et au niveau international. D'autres théories seraient convoquées, qui peuvent rencontrer partiellement celles que nous avons illustrées, d'autres domaines seraient investis, conceptions de situations de recherche pour les élèves, multiculturalisme, aspects sémiotiques, etc.

Nous espérons que notre introduction à la didactique des mathématiques à partir de quelques problématiques abordées dans l'équipe DIDIREM donnera envie au lecteur de se plonger plus avant dans tous ces travaux !

Aline Robert
Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz
aline.robert@math.uvsq.fr

Marie-Jeanne Perrin
Université d'Artois, Laboratoire de didactique André Revuz
glorian@math.jussieu.fr

Corine Castela
Université de Rouen, Laboratoire de didactique André Revuz
corine.castela@univ-rouen.fr

Références

Bautier E., Charlot B. et Rochex J-Y. (1992). *École et savoir dans les banlieues… et ailleurs*. Collection Formation des enseignants. Paris : Armand Colin.

Blanchard-Laville C., Nadot S. (2000). *Malaise dans la formation des enseignants*. L'Harmattan, Paris.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (2005). Recherches en éducation mathématique. *Bulletin de l'APMEP*, n°457, 213-224.

Butlen D. et Pézard M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23 (3), 41-78.

Castela C. (2006). Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de Première Scientifique. In *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques Année 2006*, 33-77. Paris : IREM Paris 7.

Castela C., Consigliere L., Guzman I., Houdement C., Kuzniak A., Rauscher J.C. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français. *Cahier de DIDIREM* Spécial n°6, IREM Paris 7.

Chambris C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématique* 12(1), 73-112.

Chevallard Y. (1994). Les processus de transposition didactique. In Arsac, Gréa, Grenier et Thiberghien (Eds), *La transposition didactique à l'épreuve,* 135-180. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In Actes de l'université Animath *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire,* APMEP (Ed), brochure 168.

Cirade G. (2008). Les angles alternes-internes : un problème de la profession. *Petit x 76,* 5-26.

Douady R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* vol 7 n°2, 5-31.

Douady R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères-IREM,* 15, 37-61.

Dumail A. (2007). La racine carrée en troisième, des enseignements aux apprentissages. *Cahier de DIDIREM* n°57, IREM Paris7-Denis Diderot.

Emprin F. (2007). *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*. Thèse, université Paris 7.

Équipe AMPERES (2007). La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques. In Gueudet et Matheron (Eds) *Actes du séminaire National de didactique des mathématiques, Année 2007*, pp. 33-77, IREM Paris 7, Paris.

Felix C. (2004). Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale*, 33, 89-100.

Georget J-P. (2006). Favoriser la pratique des activités de recherche dans les classes de cycle 3 de l'enseignement primaire : communauté de pratique, pratiques d'enseignants et échanges autour de ces pratiques. In *Actes du colloque EMF 2006*, Sherbrooke.

Grugeon B. (2000). L'algèbre au lycée et au collège. Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. In Grugeon, Guichard, Capponi, Janvier, Delgoulet (Eds) (2000) *L'algèbre au lycée et au collège. Actes des journées de formation de formateurs, pp. 5-39*. Boisseron, IREM de Montpellier.

Hache C. (2008). Le cas des manuels dans l'enseignement des mathématiques, in Vandebrouck F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants*, Toulouse : Octarès éditions.

Hersant M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*

Hersant M., & Perrin-Glorian M.J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 113-151.

Horoks J. (2006). *Les triangles semblables en classe de seconde: des enseignements aux apprentissages – Étude de cas*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Horoks J. (2008), Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en didactique des mathématiques,* 28/3, 379-416.

Houdement C., Kuzniak A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20(1), 89-115.

Lenfant A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher's understanding of fundamental mathematics in China and in the U.S*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Peltier M. (Ed.) (2004). *Dur, dur d'enseigner en ZEP*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Perrin-Glorian M-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les « classes faibles ». *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13 (1-2), 95-118.

Perrin-Glorian M.J., & Hersant M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques 23/2,* 217-276.

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* 18/2, 139-190.

Robert A., Rogalski M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x,* 60, 6-25.

Rossignol A. (1997). *Proposition pour une nouvelle approche des relations différentielles linéaires à coefficients constants*. Thèse. Université Toulouse 3.

Sadovsky P. et Sessa C. (2005). The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a *milieu* for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 85-112.

Salin M.H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. In Lemoyne, G. & Conne, F. (Eds) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 327-352. Les Presses de l'Université de Montréal.

Salin M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP,* 478, 647-670.

Sensevy G., & Mercier A. (Eds) (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Vandebrouck F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès éditions.

Verret M. (1975). *Le temps des études*. Paris : Librairie Honoré Champion.