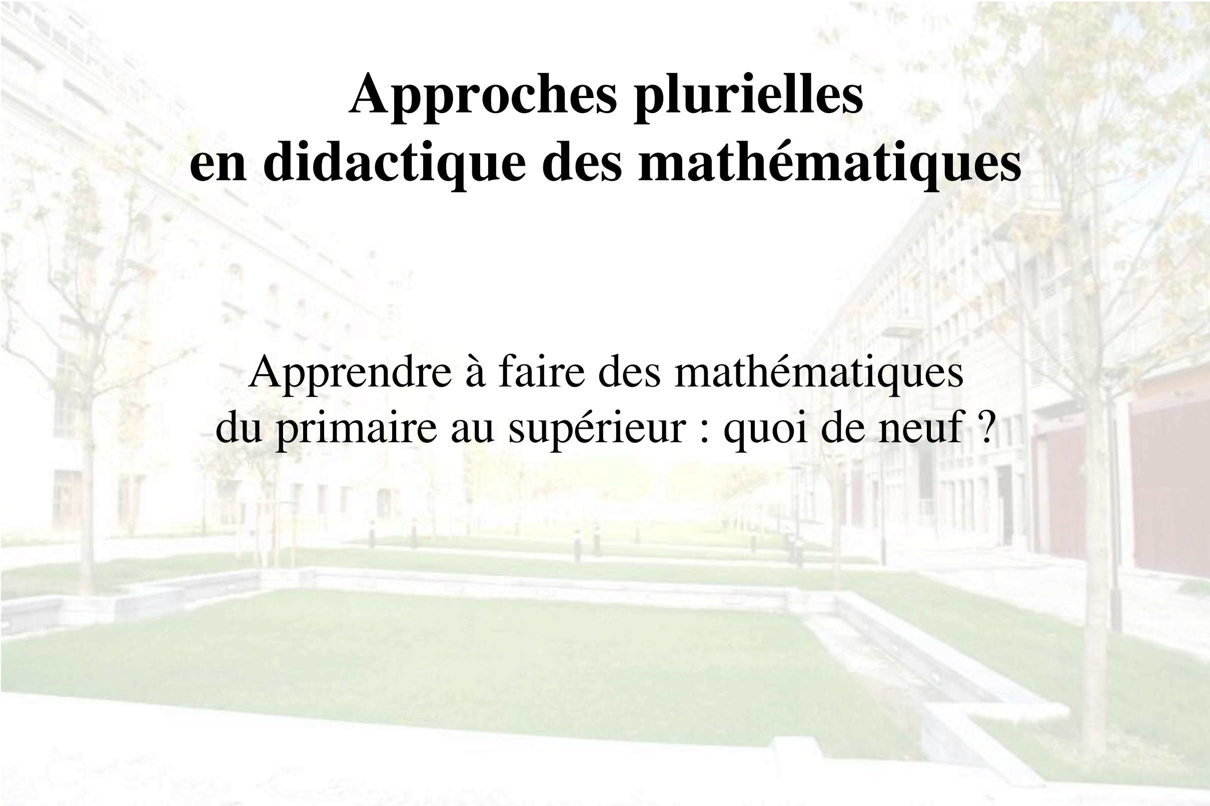


Approches plurielles en didactique des mathématiques

Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?

Colloque DIDIREM
4, 5 et 6 septembre 2008
Université Paris Diderot – Paris 7

C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (éd.)

Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

Remerciements

L'équipe DIDIREM et l'ensemble des participants tiennent à remercier les différentes institutions, sociétés et personnes, qui, par leur soutien logistique et/ou financier, ont permis le bon déroulement du colloque DIDIREM et l'édition de ces actes électroniques.

Nous remercions donc tout particulièrement :

- L'université Paris Diderot - Paris 7
- L'IREM de Paris 7
- L'ARDM
- L'université de Cergy-Pontoise
- L'IUFM de Créteil - Université Paris 12
- La MAIF
- Texas Instruments

Nous remercions également Guy Cousineau (Président de l'université Paris Diderot - Paris 7) et François Germinet (Vice-Président du Conseil Scientifique de l'Université de Cergy-Pontoise) pour leur participation à l'ouverture de la table ronde finale sur la formation des enseignants.

Merci à Jean Corréard / Label Indigo pour la fabrication de ces actes.

La réussite de ce colloque s'est également appuyée sur le travail du comité scientifique et du comité d'organisation qui en ont assuré la qualité scientifique, la préparation et le bon déroulement (voir liste des membres au dos), ainsi que sur la coordination de ces comités assurée par Marie-Jeanne Perrin et Aline Robert.

Enfin, ce colloque n'aurait pu se dérouler sans l'implication du personnel de l'IREM, Nicole Gillet qui en a assuré le secrétariat ainsi que Martine Lamy et Nadine Locufier.

Que chacun d'eux en soit tout particulièrement remercié.

Comité d'organisation

Christophe Hache, Mariam Haspekian, Julie Horoks, Alain Kuzniak, Pascale Masselot, Cécile Ouvrier-Buffet, Monique Pariès, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Aline Robert, Fabrice Vandebrouck.

Comité scientifique

Michèle Artigue, Université Paris Diderot – Paris 7
Paolo Boero, Université de Gênes
Paul Drijvers, Freudenthal Institute, Utrecht
Inés Gómez Chacón, Universidad Complutense de Madrid
Alain Kuzniak, Université d'Orléans, Laboratoire de didactique André Revuz
Jean-Baptiste Lagrange, Université de Reims Champagne-Ardenne
Maria Alessandra Mariotti, Université de Sienne
Bernard Parzysz, Université d'Orléans, Laboratoire de didactique André Revuz
Marie-Jeanne Perrin, Université d'Artois, Laboratoire de didactique André Revuz
Aline Robert, Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz
Janine Rogalski, CNRS Paris 8, Laboratoire de didactique André Revuz
Marc Rogalski, Université Lille 1, Laboratoire de didactique André Revuz
Kenneth Ruthven, Université de Cambridge
Rudolf Straesser, Institut für Didaktik der Mathematik, JLU Giessen
María Trigueros Gaisman, ITAM, Mexico
Carl Winsløw, Université de Copenhague.

SOMMAIRE

De l’équipe DIDIREM au Laboratoire André Revuz 7

Présentation du colloque 9

Conférence d’ouverture : Un aperçu des recherches en didactique des mathématiques menées dans l’équipe DIDIREM : exemples et nouvelles questions 11
Aline Robert, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Corine Castela

Thème : Enseignement des mathématiques au début de l’enseignement supérieur 37

Thème : Technologies numériques dans l’enseignement des mathématiques 119

Table ronde : Technologies numériques dans l’enseignement des mathématiques, où en est-on dans les recherches et dans leur intégration ? 185
Paul Drijvers, Jean-Baptiste Lagrange, Maria-Alessandra Mariotti, Kenneth Ruthven.
Coordination et animation : Michèle Artigue

Thème : Enseignement des mathématiques et appui sur le réel 209

Table ronde : Pourquoi et comment appuyer l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques sur le réel ? 295
Paolo Boero, Alain Kuzniak, Rudolf Straesser
Coordination et animation : Bernard Parzysz

Thème : Étude des pratiques enseignantes et formation des enseignants 313

Table ronde : Autour de la formation des enseignants 331
Denis Butlen, Francis Labroue, Claudie Missenard, Daniel Perrin, Inés Gómez Chacón
Coordination et animation : Aline Robert et Catherine Houdement

Programme du colloque 355

Liste des participants 357

De l'équipe DIDIREM au laboratoire André Revuz

Marie-Jeanne Perrin-Glorian et Aline Robert

L'équipe DIDIREM est née au sein de l'IREM de Paris 7 dans les années 80 autour d'un séminaire de bibliographie initié par Aline Robert et regroupant quelques jeunes chercheurs de l'époque, pour la plupart animateurs de l'IREM de Paris 7 (Michèle Artigue, François Colmez, Régine Douady, Marie-Jeanne Perrin, Jacqueline Robinet...). Elle est devenue officiellement équipe de recherche en didactique des mathématiques, rattachée à l'UFR de mathématiques de l'université Paris 7 en obtenant en 1989, dans le cadre de la contractualisation de la recherche universitaire, le statut de Jeune Équipe de la DRED, puis en 1992 celui d'Équipe d'Accueil. Son nom a été choisi par contraction de « Didactique » et « IREM ». Inutile donc de chercher la signification du premier « I » et du deuxième « D » !

Elle est devenue progressivement la principale équipe d'accueil du D.E.A. de didactique des disciplines créé à Paris 7 dès 1974-75. Lors de la contractualisation de 2004, ce D.E.A. s'est transformé en une filière recherche dans la spécialité mathématiques de la mention « Didactique des disciplines » d'un master (deuxième année) rattaché à l'école doctorale « Savoirs scientifiques : Épistémologie, Histoire des Sciences et Didactique ». Cette dernière regroupe les didactiques des disciplines scientifiques (mathématiques, sciences physiques, géographie) et l'histoire des sciences. En même temps, lui est associée une filière professionnelle de formation de formateurs, héritière d'un Diplôme Universitaire créé par Aline Robert et Nicolas Pouyanne à l'université de Versailles Saint Quentin.

En 2008, l'équipe DIDIREM regroupe une trentaine d'enseignants chercheurs de diverses institutions de la moitié Nord de la France (de Dunkerque à Tours et Besançon) et a de ce fait une structure de réseau. Elle accueille une trentaine d'étudiants en thèse, dont plusieurs en cotutelle avec diverses institutions dans le monde et des chercheurs post-doctoraux. Elle dispose également depuis sa création de collaborateurs privilégiés étroitement associés à ses activités tout en étant rattachés à des équipes de mathématiques.

L'équipe développe des recherches de type fondamental et appliqué dans le domaine de la didactique des mathématiques. Elle participe aussi de manière importante à la formation dans ce domaine : formation de chercheurs dans le cadre du master et encadrement de nombreuses thèses ; formation de formateurs dans le cadre du master, mais aussi dans des collaborations fréquentes avec l'IREM de Paris 7, devenu entre temps Paris-Diderot. Depuis sa création, elle a toujours eu le souci de garder des relations fortes avec l'UFR de mathématiques et de faire vivre un thème de recherche sur l'enseignement des mathématiques dans le supérieur, de la transition lycée-université à la formation des enseignants ou des ingénieurs.

Le colloque « Approches plurielles en didactique des mathématiques. Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ? » s'est voulu un reflet de la vie de l'équipe. Un des objectifs était de permettre des échanges scientifiques avec des chercheurs extérieurs, au niveau international, autour des thèmes de l'équipe ; un autre objectif était de favoriser des échanges avec le public plus large des collègues qui s'intéressent à l'enseignement des mathématiques ou à la formation des enseignants. Ainsi, deux demi-journées plus ouvertes, l'une au début du colloque, sur l'enseignement supérieur, l'autre à la fin, sur la formation des maîtres ont-elles été organisées.

Lors de la dernière contractualisation, en 2008, l'équipe DIDIREM a décidé de fusionner avec une autre équipe de Paris-Diderot, le Laboratoire de Didactique des Sciences Physiques qui assure la spécialité « Sciences physiques et chimiques » du même master. Le nouveau laboratoire ainsi créé en janvier 2009 a pris le nom de Laboratoire de didactique André Revuz, en hommage au fondateur de l'IREM, décédé le 27 octobre 2008, qui a beaucoup œuvré pour la naissance et le développement de la didactique à Paris 7.

Le colloque organisé par l'équipe pour ses 25 ans a donc marqué aussi la fin d'une période et l'entrée dans une nouvelle ère où, aux quatre grands thèmes de recherche de l'équipe DIDIREM (enseignement supérieur, intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques, étude des pratiques des enseignants, mathématiques et réalités), qui ont aussi été les thèmes du colloque, s'en ajoute un nouveau : enseignement des sciences physiques et chimiques. Gageons que c'est le début de nouvelles collaborations qui enrichiront les recherches en didactique des deux disciplines.

Présentation du colloque

L'enseignement du calcul en primaire est-il désuet ?
De quelle manière tenir compte dans l'enseignement de l'irruption massive des calculatrices et moyens informatiques dans la vie courante et la vie scientifique ?
Que peut-on proposer à nos étudiants actuels ?
Que penser de la liberté pédagogique ?
Autant de questions qui intéressent non seulement les enseignants de mathématiques de tous niveaux mais aussi le grand public et que les recherches en didactique des mathématiques abordent de manière spécifique.

Depuis 25 ans, l'équipe DIDIREM a engagé des travaux qui cherchent à apporter des réponses à des problèmes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, de l'école primaire à l'enseignement supérieur, y compris la formation des maîtres. Il s'agit de mieux comprendre ce qui se joue, en classe, au niveau des savoirs, tant du point de vue de l'enseignant que de celui des élèves. Cela demande une réflexion approfondie du triple point de vue des mathématiques à enseigner, de l'apprentissage des élèves et des contraintes d'un enseignement effectif, ce qui suppose une réflexion sur les contenus articulant approches épistémologique, cognitive et institutionnelle.

Les travaux de l'équipe sont aussi marqués par un croisement de différents cadres théoriques référant principalement aux théories didactiques développées en France ainsi qu'aux théories de l'apprentissage ou à l'ergonomie cognitive.

Ce colloque est centré sur des questions au cœur des recherches actuelles de l'équipe, dont certaines rencontrent aussi l'actualité. Son objectif est double :

- Il s'agit d'une part d'illustrer auprès d'un public plus large que celui des didacticiens comment sont étudiées en didactique certaines des questions concernant l'enseignement des mathématiques, d'expliciter quelles réponses peuvent être données et quelles interrogations restent sans réponse.
- Il s'agit d'autre part d'un colloque de recherche permettant aux membres de l'équipe d'interagir avec d'autres didacticiens venant de France ou d'ailleurs. Des moments différents viseront plus particulièrement l'un ou l'autre objectif.

Le colloque s'organise autour de quatre thèmes :

- Enseignement des mathématiques au début de l'enseignement supérieur ;
- Technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques ;
- Enseignement des mathématiques et appui sur le réel ;
- Étude des pratiques des enseignants de mathématiques.

Selon les thèmes, sont mis en place des ateliers, des présentations de communications ou des tables rondes.

Les travaux sur les thèmes sont complétés par une conférence introductive où sont abordées les problématiques de l'équipe et certaines de ses avancées, et par une table ronde de conclusion où différents acteurs de la formation confrontent leurs points de vue avec ceux de didacticiens.

Un aperçu des recherches en didactique des mathématiques menées dans l'équipe DIDIREM : exemples et nouvelles questions

Aline Robert, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Corine Castela

Cet exposé introductif a pour ambition de donner accès aux questionnements de différents champs de recherches en didactique investis au sein de notre équipe à l'aide de plusieurs outils théoriques – Théorie de l'activité (A. Robert), Théorie des situations (M.J. Perrin) et Théorie anthropologique du didactique (C. Castela). Il ne s'agit pas de présenter de manière exhaustive les recherches en France, ni même dans l'équipe DIDIREM, encore moins les recherches internationales, mais bien d'illustrer à travers des exemples précis nos manières de poser et d'aborder les problèmes liés à l'enseignement des mathématiques.

Introduction (A. Robert)[1]

Souvent les mathématiciens interrogent les didacticiens sur la finalité de leurs travaux : une première réponse serait que nous travaillons à mieux comprendre ce qui se joue dans les apprentissages des mathématiques, à divers niveaux.

Comprendre veut dire entrer dans la réalité scolaire, c'est-à-dire dans tout ce qui concerne les apprentissages des élèves à l'école (du primaire à l'université) ; trouver des « bonnes » questions et des bonnes variables, des liens (et des dépendances entre variables), par exemple dégager les situations[2] développées dans une classe, repérer des procédures d'élèves récurrentes, ou encore répertorier et caractériser la suite des couples (exercice - travail organisé sur l'exercice), proposés aux élèves.

Comprendre veut dire chercher à mettre en évidence des corrélations, voire des relations partielles de causes à effets entre certaines pratiques et des apprentissages, concevoir des séances, effectuer et expliquer des diagnostics, mettre en évidence et tester des leviers si on pense en avoir trouvé. Cela amène à trouver des régularités et des variabilités – voire des modèles, par delà l'extrême diversité et la complexité, qui font que la réalité analysée n'est jamais réductible à une somme de composants partiels.

En un mot, comprendre c'est interroger, par delà les apparences et les fausses transparences, les relations entre enseignement et apprentissages, et avoir des nouveaux possibles à tester. Cela sous-entend de faire entrer en ligne de compte les mathématiques à enseigner, étudiées de manière spécifique, les élèves et les enseignants, dans leurs interrelations et avec les contraintes qui pèsent sur eux, notamment liées à leur environnement. Par exemple, un certain nombre de travaux actuels démontrent qu'efficacité et équité en classe ne s'improvisent pas, et sont même difficiles à conjuguer en même temps : quoi comprendre à ce sujet en mathématiques ?

Mais nos analyses ne visent pas à fournir des prescriptions : on pourrait dire que cela donne aux acteurs, les formateurs et les enseignants notamment, un réseau de questions, des manières d'interroger le système éducatif à différents niveaux, et des palettes de réponses, à charge ensuite à chacun de les adapter à ses propres possibilités, sur son terrain. Peut-être plus que d'autres chercheurs, il est vrai, nous ne dédaignons pas les conséquences de nos

[1] Nous avons choisi de laisser ce texte le plus proche possible de la présentation orale et ainsi de faire apparaître la répartition de la parole entre nous.

[2] Ce mot désigne ici à la fois les contenus mathématiques travaillés et la forme que prend le travail des élèves : il s'agit de reconstituer cet ensemble.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 11-36.

recherches, nous pouvons même partiellement les orienter en relation avec des besoins du système éducatif comme cela a été le cas avec l'introduction de travaux sur l'intégration des TICE, mais nous sommes toujours obligés de faire des détours par des analyses pour comprendre avant d'obtenir des résultats, souvent décalés, partiels et relatifs.

Cependant, et c'est là aussi que nos démarches peuvent différer de celles d'autres scientifiques (mathématiciens), notre « objet » comme on dit, c'est-à-dire ce sur quoi nous travaillons, n'est pas précisé a priori, il y a énormément de paramètres, il bouge au fur et à mesure que se développent les études. Il y a donc, comme dans toutes les sciences dites humaines ou sociales, des choix et des réductions à faire pour définir un objet de manière nécessairement partielle. Cela nécessite, pour être légitime, une inscription explicite dans un cadre théorique de référence, déjà existant ou créé. Ce peuvent être des modèles, servant alors de références aux analyses, ou des théories générales, à spécifier, donnant des outils (nous y reviendrons).

Par exemple, beaucoup de recherches en didactique (et c'est le cas dans la plupart des travaux de DIDIREM), négligent les facteurs affectifs individuels, comme la confiance en soi, ce qui ne veut pas dire que ces facteurs sont ignorés ou méprisés, bien au contraire. Cependant, ils introduisent une telle complexité supplémentaire qu'ils ne sont pas pris comme variables des recherches. Par exemple, on peut prendre acte du fait que les élèves d'origine sociale défavorisée ont souvent une grande demande de relations duelles avec l'enseignant, sans étudier explicitement l'effet de cette variable. Cela implique une hypothèse, implicite mais forte, de légitimité de cette réduction en relation avec nos analyses – hypothèse admise, et toujours à remettre en question. D'autres chercheurs n'adoptent pas cette hypothèse, et il est très intéressant de travailler avec eux (Blanchard-Laville et Nadot, 2000).

De plus, alors même que notre démarche est en partie expérimentale, ou au moins appuyée sur des observations de vrais élèves dans de vraies classes, ce que nous avançons ne peut être « prouvé » au sens mathématique du terme dans la mesure où nous ne nous plaçons pas dans un modèle entièrement mathématisé ; plusieurs détours sont utilisés, selon les expériences, selon les chercheurs, pour apporter des confirmations à ce que nous proposons. Ce peuvent être des convergences de résultats obtenus de différentes manières ; ou encore nous comparons prévisions et réalité, suite à une expérience élaborée avec des objectifs précis. D'autres chercheurs identifient des éléments du modèle qu'ils ont adopté (théorie des situations didactiques, théorie anthropologique du didactique) pour déduire des explications tirées du modèle, dégager des phénomènes et éventuellement rediscuter le modèle.

Nous établissons des régularités à différentes échelles. Voilà un exemple peu contestable mais limité - si un enseignant donne très rarement à chercher des exercices d'un type donné, il y aura une bonne partie des élèves qui risquent de ne pas apprendre la démarche correspondante. Nous mettons en évidence des variabilités : ainsi, des chercheurs ont pu établir que les pratiques d'enseignants en ZEP sont tellement contraintes qu'elles se stabilisent beaucoup plus vite qu'ailleurs (Peltier, 2004).

Les recherches françaises sont souvent qualitatives, et menées sur de petits effectifs, cependant dans d'autres pays, notamment en Italie ou dans le monde anglo-saxon, des études à plus grande échelle sont menées et il n'y a pas de rupture avec nos résultats.

Pour préciser tout cela, nous allons vous inviter à réfléchir à partir d'une vidéo tournée en classe de seconde dont nous allons donner quelques extraits. Il s'agit d'une démarche d'analyse locale qui est assez récente dans notre équipe (12 ans environ), corrélative à un élargissement de nos champs d'investigation et accompagnée d'un enrichissement de nos outils : par exemple, les changements de cadres de Régine Douady (1987) ont été complétés, le déroulement des séances, y compris ordinaires, est pris en compte d'une autre manière, et un certain nombre de travaux développent des analyses de pratiques d'enseignants avec des inférences en formation, par exemple pour des Professeurs des Écoles en Zone d'Éducation

Prioritaire (ZEP) (Peltier, 2004). Marie-Jeanne Perrin élargira ensuite le propos, en abordant des questions plus globales, illustrant d'autres aspects des travaux en didactique. Elle se placera ainsi à une autre échelle et vous invitera à réfléchir sur l'enseignement des mathématiques en primaire, où, là encore, les analyses se sont enrichies, avec une prise en compte permanente de la réflexion épistémologique, notamment sur les liens entre mathématiques et réalité.

Tous ces exemples mettront en évidence sur différents champs et à différentes échelles l'imbrication, dans tous nos travaux, d'analyses relevant des contenus à enseigner, des élèves et de leurs apprentissages, et des enseignants. Corine Castela élargira encore le propos en développant son point de vue à partir d'autres approches qui sont développées en France (dont plusieurs trouvent chez nous leur place, permettant de vraies discussions croisées) sur la question implicite posée au départ : qu'est-ce que la didactique ? Qu'est-ce que la pensée didactique ? Qu'est-ce que le questionnement didactique ?

1. Un exemple d'étude « locale » en seconde (A. Robert)

Cet exemple s'inscrit dans des analyses de séances de mathématiques ordinaires, qui articulent, au niveau de la classe (niveau local), les contenus donnés à travailler et les déroulements organisés par les enseignants. Les activités des élèves sont ainsi reconstituées à partir des tâches (énoncés) proposées par l'enseignant, et des déroulements qu'il provoque. Ces activités des élèves sont choisies dans nos recherches comme des intermédiaires légitimes pour accéder aux apprentissages ; elles sont analysées dans leur dimension « mise en fonctionnement des connaissances mathématiques », compte tenu du travail demandé ; elles sont conçues comme conséquence des choix des enseignants, choix de contenus mathématiques, choix de gestion ; elles permettent de remonter aux contraintes qui pèsent sur les professeurs et les amènent à ces choix. Ce type d'analyse permet d'aborder des alternatives éventuelles qui pourraient intervenir et de mettre en évidence des interrogations partagées par beaucoup de collègues, souvent liées aux contraintes institutionnelles et au métier, sans réponses définitives.

Un certain nombre de chercheurs de l'équipe ont développé des travaux dans cette direction, s'inspirant notamment d'une articulation des théories générales de Piaget et Vygostki, spécifiées aux mathématiques et à l'école, et prolongeant les travaux de Vergnaud et de Brousseau (cf. Vandebrouck, 2008).

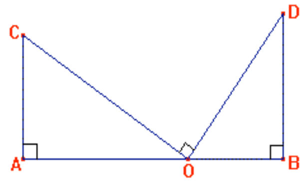
On utilise ici des extraits d'une vidéo tournée en seconde, il y a quelques années – les programmes ont un peu évolué depuis ; l'enseignant a placé la caméra lui-même au fond de la salle et l'a oubliée. Nous n'avons pas l'intention ni les moyens de faire une analyse complète. Nous ne rentrerons pas en particulier dans des considérations méthodologiques et ne nous vous convierons pas à partager nos analyses habituelles, d'abord celle des tâches que les élèves ont à faire, c'est-à-dire des mises en fonctionnement attendues de leurs connaissances, puis celle des activités possibles de ces élèves compte tenu des déroulements, pas plus que nous n'étendrons notre propos à une analyse de la notion à enseigner et de sa place dans les programmes, préalable pourtant nécessaire à nos analyses.

Il n'est pas question de juger quoi que ce soit – on n'en sait pas assez, ni sur l'ensemble des séances ni sur les élèves. On peut tout de même constater sur la vidéo que les élèves suivent, et même qu'ils n'hésitent pas à poser des questions, en s'acharnant le cas échéant. Nous voudrions seulement que vous compreniez certaines des questions que nous nous posons, le pourquoi de ces questions, et ce que représentent les réponses. Dans ce que disent professeur et élèves on trouve des exemples qui me semblent génériques de ce qui peut se passer en classe.

J'en profite pour remercier au passage le collègue filmé et tous ceux qui nous permettent d'analyser ainsi les séances de classe.

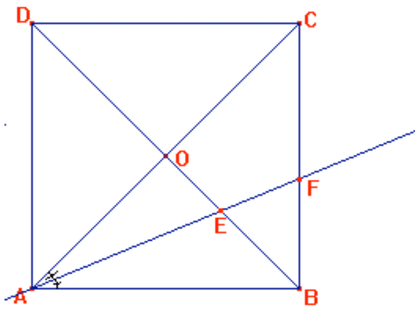
Exercice 1

Montrer que AOC et OBD sont semblables et [trouver le rapport de similitude]…



On démontre que les deux triangles sont semblables car ils ont deux angles respectivement égaux (l'angle droit et un autre). Pour cela on utilise le fait que :
AOC + COD + DOB = 180°
Donc AOC + DOB = 90°
Or AOC + OCA = 90°, d'où l'égalité OCA = DOB
Le rapport de similitude s'écrit OC/OD, ou OA/DB, ou AC/OB.

Exercice 2



ABCD est un carré, O le point d'intersection des diagonales, (AF) la bissectrice de CAB, E l'intersection de (AF) et de [OB].
Montrer que AOE et ABF sont semblables, calculer le rapport de similitude AB/OA [et trouver le rapport des aires]

On démontre que les deux triangles sont semblables car ils ont deux angles respectivement égaux (l'angle droit et un autre). L'angle droit vient de la propriété des diagonales d'un carré, l'autre égalité vient de la définition de la bissectrice (ou d'une propriété caractéristique). Le rapport de similitude vaut $\sqrt{2}$ et le rapport des aires 2.

Voici quelques questions relevant du champ didactique, de différents niveaux.

a) Le même théorème à appliquer et pourtant des réussites très différentes des élèves…

Les élèves ont appris le théorème suivant : « deux triangles sont semblables si deux angles respectifs sont égaux ». Or, la question où ce théorème doit être utilisé, restreinte à deux triangles rectangles, donc ne nécessitant de montrer qu'une seule égalité d'angles supplémentaires, est réussie dans le deuxième exercice et ratée dans le premier, alors même que la figure est moins complexe. Comment se fait-il que le même théorème ne soit bien appliqué qu'une fois ?

Voici les commentaires de l'enseignant : pour le premier exercice « Ce qui a cloché dans vos copies, c'est de montrer que ces angles étaient égaux et histoire d'être désagréable, les angles complémentaires c'est le programme de $5^{\text{ème}}$ ». Et pour le deuxième exercice, le professeur explique : « Donc les triangles AOE et ABF avaient deux angles égaux donc ils étaient semblables ; et là, par contre, vous avez bien mieux vu heu cette démonstration, la bissectrice qui coupe l'angle en deux angles égaux, ça marche beaucoup mieux. »

Le professeur impute ainsi l'échec des élèves à appliquer le théorème dans le premier cas à l'oubli des angles complémentaires. Nous allons montrer comment une analyse didactique permet de compléter ce point de vue, limité à la mémoire. Il s'agit de repérer les connaissances à mettre en fonctionnement et les adaptations à mettre en œuvre, compte tenu de ce qui est dans le cours des élèves de la classe - c'est ce que nous appelons une analyse des tâches a priori.

On se rend compte que dans le premier exercice, il faut introduire une étape et un intermédiaire pour appliquer le théorème : il faut passer par le calcul d'une somme de trois angles qui est égale à 180°, il faut écrire une deuxième égalité d'angles dans un seul triangle, égalité à 90° (resp. 180°) de la somme des angles aigus (resp. des trois angles) d'un triangle rectangle et il faut ensuite utiliser la transitivité de l'égalité. À partir de deux égalités à 90° de deux sommes de deux angles dont un commun, on déduit l'égalité des deux autres angles concernés. C'est ici une propriété algébrique, mélangeant valeurs algébriques et numériques, qui vient s'immiscer dans un exercice géométrique.

Plus qu'une question d'oubli, il peut y avoir une difficulté pour les élèves liée à la manière d'utiliser le théorème à mobiliser (dont on peut penser que les élèves l'ont reconnu). Les élèves ont à faire une adaptation du théorème pour trouver leurs angles égaux, ils doivent introduire cet angle plat qui concerne des angles des deux triangles à la fois. Ils doivent faire appel à ces connaissances anciennes, supposées disponibles, sur les angles complémentaires, et une propriété algébrique (ici, le signe « égal » a un statut algébrique).

En revanche, dans le deuxième exercice, la reconnaissance des angles égaux se fait directement. Autrement dit, il n'intervient que des connaissances anciennes, supposées (à juste titre) mobilisables et pas d'autres adaptations pour appliquer le théorème.

On peut noter que la propriété algébrique de transitivité n'est pas soulignée en tant que telle, ni écrite au tableau. Cette éventuelle méconnaissance de la difficulté de l'algébrique se retrouve dans la phrase suivante de l'enseignant à la fin de la première question du premier exercice *« donc un gentil petit produit en croix nous permettait de calculer BD, ça vous pouvez tous le faire tranquille à la maison après… »*.

Les recherches sur l'algèbre (Grugeon, 2000 ; Lenfant, 2002) amènent en effet à développer une vigilance a priori non naturelle aux difficultés algébriques des élèves, dans la mesure où l'algèbre est tellement naturalisée pour les enseignants qu'ils peuvent en ignorer des difficultés pour les élèves, celles-ci peuvent alors rester en quelque sorte transparentes si l'enseignant ne fait pas exprès de les repérer.

Plus généralement, reconnaître qu'il faut utiliser une connaissance non indiquée peut être une source de difficulté, qui n'est pas seulement liée à la mémoire mais aussi au sens des connaissances. De plus, appliquer un théorème dont on a reconnu qu'il doit être utilisé n'est souvent pas un simple remplacement des données générales par des données particulières. Nous appelons « adaptations » des théorèmes du cours les transformations à faire pour réussir à les appliquer. Ici, par exemple, le premier cas de similitude, qui revient à démontrer que les triangles ont deux angles respectivement égaux, est appliqué dans deux exercices, avec des adaptations différentes – et des réussites différentes (et les élèves ne s'y sont pas trompés).

Introduire un intermédiaire ou une étape est une des adaptations difficiles pour les élèves, demandant une initiative et pas une « simple » reconnaissance. Nos recherches ont montré de plus qu'utiliser algébriquement la transitivité de l'égalité, même sans intermédiaire, est difficile en seconde. Les travaux montrent aussi la difficulté des élèves à mélanger des domaines de travail – ici géométrique/algébrique – voire à mélanger des connaissances antérieures, surtout si elles sont supposées disponibles, et des connaissances en cours d'acquisition. Cela peut expliquer la différence de réussite entre les deux exercices analysés mais il faut rester très prudent car on ne sait pas ce qui a déjà été cherché dans la classe.

Dépassant le cadre de la vidéo, on voit l'intérêt de ces analyses *a priori* en relation avec l'hypothèse plus générale que les différentes adaptations de leurs connaissances à mettre en œuvre non seulement ne font pas faire les mêmes activités mathématiques aux élèves et n'ont pas les mêmes incidences sur leurs apprentissages mais encore ne s'improvisent pas, demandent à être travaillées explicitement dans des exercices adéquats.

Il a été montré dans de nombreux travaux, par exemple dans la thèse de Julie Horoks, sur les triangles semblables (Horoks, 2008), que les exercices les mieux réussis en contrôle sont ceux qui ont été préparés en classe et répétés un certain nombre de fois (pas dans les mêmes énoncés, mais avec les mêmes adaptations). Cependant, trop de répétitions peuvent amener des élèves un peu fragiles à ne plus jamais changer de stratégie, même si cela s'impose dans l'exercice (Dumail, 2007).

b) Le rapport de similitude et la question des programmes

Dans les deux exercices, il s'agissait, après avoir démontré que les triangles étaient semblables, d'écrire le rapport des côtés. Voici l'extrait[3] de la correction correspondante dans le premier exercice :

> P. *Les côtés sont proportionnels. D'accord ? Alors on écrit directement, on n'écrit pas la rédaction pour les triangles semblables, on écrit directement les rapports que ça nous donne.*
>
> P. *Là aussi il y a eu des erreurs dans les rapports qui ont été proposés.*
>
> P. *Alors OA/OB.*
>
> Élève (au tableau) : Dans quel sens ?
>
> P. *Ça on s'en fiche le premier tu le mets dans le sens que tu veux mais est-ce que c'est OA et OB qui vont être les côtés qui vont correspondre.*
>
> Élève (au tableau) : AC et…
>
> P. ***Il faut se fier aux angles ; tu as montré que des angles étaient égaux. Par exemple comme il y a des triangles rectangles ici tu peux prendre les deux hypoténuses eux ça va être les côtés correspondants. L'hypoténuse est liée en C à un angle, l'angle correspondant sur l'autre triangle il est en O, ça va donner le côté CA et le côté OB.***
>
> *Donc le rapport c'est soit AC/OB soit OB/AC, tu commences par celui que tu veux mais c'est AC et OB qui sont liés, c'est OC et OD qui sont liés et puis c'est AO et BD qui sont liés. Il suffit de repérer les côtés qui joignent des angles égaux.*
>
> *Donc AC/OB ouais, OC/OD et le dernier c'est AO/BD voilà. Après il se trouve qu'on connaissait AO, on connaissait OB, on connaissait AC (...)*

On constate qu'interviennent la question du choix du premier côté à choisir, qui est traitée comme un simple « bruit », et la question du repérage des homologues. Il s'agit et de concevoir qu'il y a un problème pour associer les « bons » côtés et de trouver les homologues. L'enseignant indique très vite, à la fin, que les côtés joignant des angles respectivement égaux vont ensemble (sont homologues) sans le souligner ni comme une règle ni comme une méthode, sans utiliser le mot respectivement et sans écrire.

Le travail de thèse déjà cité (Horoks, 2008) a montré qu'il y a là un problème général de conception de la notion d'homologues, dont on peut se demander si elle n'est pas devenue artificielle, formelle dans le cadre des programmes actuels : en effet, on n'a pas le support des

[3] Dans tous les extraits de transcription, le discours du professeur est en italique et c'est le chercheur qui souligne ou introduit les caractères gras.

transformations, qui permettraient de concevoir la correspondance, de donner du sens à l'idée d'homologues, sans qu'il soit nécessaire d'exhiber la « bonne » correspondance pour résoudre le problème, bien entendu. De plus, trouver les homologues n'est pas toujours facile à faire, d'autant plus que les élèves n'ont plus l'idée que dans un triangle mesure des angles et longueur des côtés « augmentent » ensemble, ce qui pourrait les aider, entre autres, à deviner la correspondance. L'explication de l'enseignant (en gras dans le texte ci-dessus) n'est pas simple. Cette question des « trous » éventuels, voire des cohérences cachées est au cœur des recherches en didactique.

Revenons au deuxième exercice, comment trouver effectivement ce rapport de similitude ? Aucun élève ne l'a fait – alors même que le « bon » rapport de côtés à calculer est indiqué dans l'énoncé (il n'y a plus le choix des homologues). Voici la transcription (les interventions du professeur sont en italique).

> *Et puis il y avait ensuite [à] déterminer le rapport de similitude, le coefficient d'agrandissement/réduction si vous préférez, le coefficient de proportionnalité. Alors là vous m'avez écrit les rapports mais personne m'a trouvé la valeur du rapport. Alors D. est-ce que tu as une idée ?*
>
> Élève. C'est le coefficient de OE sur BF, de OA/FA, de FA/AB.
>
> *Ouais d'accord mais il nous faut cette valeur. Alors ce qui était dans l'énoncé c'était qu'on pouvait facilement faire le rapport OA/AB. OA qu'est-ce que c'est ?*
>
> Élève. C'est BA.
>
> *OA n'est pas égal à BA.*
>
> Élève. C'est le AB…
>
> *Julie ?*
>
> Élève. OA c'est OB.
>
> *OA = OB si on veut.*
>
> […] Robin ?
>
> Élève. AC divisé par 2.
>
> *Une première remarque ça peut être que OA c'est AC divisé par 2. Alors est-ce qu'on est capable d'exprimer AC en fonction de AB ? Kerlin ?*
>
> Élève. Non.
>
> *Arnaud ?*
>
> Élève. AC c'est racine 2 fois AB.
>
> *AC c'est racine carrée de 2 fois AB. Pourquoi ça Olivier ?*
>
> Élève …Parce que la longueur de la diagonale.
>
> *Parce qu'on est dans un carré et qu'on sait que dans un carré la longueur de la diagonale c'est le côté fois racine carrée de 2. Comment on démontre ça ? Allo.*
>
> Élève. On prend un carré de côté 1.
>
> *On prend un carré de 1de côté et on applique, Loïc.*
>
> Élève. Pythagore.
>
> *On applique Pythagore oui, exercice de 4ème on a progressé par rapport à tout à l'heure. Bien donc AC est égal à racine carrée de 2 fois AB. Alors en quatrième on refaisait la démonstration. On appliquait le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, AB^2 +BC^2 égal à AC^2, AB est égal à AC, et puis ça nous faisait AC^2*

égal 2 AB^2, on prenait la racine carrée et ça marchait très bien. Là, en seconde on a le droit de se permettre de dire qu'on connaît le résultat. Ainsi si AC égale racine carrée de 2 fois AB, que vaut AO, on l'a dit c'est la moitié.

AO égale racine carrée de 2 sur 2 AB. […] Ou si on préfère, AO sur AB égale racine carrée de 2 sur 2.

Voilà. Et justement AO sur AB, tu nous le disais tout à l'heure c'est lui le rapport de similitude, et cette fois-ci on a sa valeur.

Le professeur fait de nouveau allusion à l'oubli et à la mémoire. Nos analyses de tâches nous indiquent qu'il fallait là encore mobiliser des connaissances anciennes supposées disponibles mais en les adaptant – contrairement à la propriété (bien utilisée) de la bissectrice, supposée seulement mobilisable : le calcul du rapport de la demi-diagonale sur le côté dans un carré nécessite de reconnaître un triangle rectangle caché où on peut appliquer le théorème de Pythagore. Il y a donc une reconnaissance, un intermédiaire et un mélange de cadres, géométrique et numérique, alors qu'on n'a pas donné de données numériques dans l'énoncé.

Ainsi, plus généralement, l'analyse précise des mises en fonctionnement attendues, clarifie les activités mathématiques possibles des élèves. Elle peut non seulement permettre de diagnostiquer précisément des difficultés mais aussi, éventuellement, d'aider les élèves, en leur donnant des indications calibrées à leurs besoins, intermédiaires, par exemple s'ils ne démarrent pas, en essayant d'en dire ni trop ni trop peu. Cela nécessite d'interpréter le cheminement des élèves, et ce travail d'interprétation est facilité par les analyses a priori. Mais ces dernières permettent aussi d'ajouter au travail des élèves des commentaires appropriés, qui permettront peut-être un réinvestissement – ici sur la transitivité par exemple. On peut aussi laisser les élèves dégager ces méthodes, l'enjeu est d'arriver à dépasser les associations « simples », mettant en jeu la mémoire, et à intervenir de manière adéquate, pour que les élèves construisent quelque chose de nouveau, ou de plus général, à partir de leur travail – c'est ce que nous appelons des *aides constructives*. L'improvisation nécessaire à leur élaboration par l'enseignant en classe est aidée par les analyses a priori.

c) À propos des aires : le rôle du temps dans les apprentissages

Le professeur a donné en cours le théorème sur le rapport des aires de deux triangles semblables, théorème qui n'est pas du tout retenu par les élèves, semble-t-il. Il y a même un élève qui dit qu'il a étudié le cours mais qu'il n'a pas « vu » dans son cours ce théorème sur les aires de triangles semblables ! Même l'élève au tableau le redémontre d'ailleurs, et le professeur en est presque dépité : « je n'en demandais pas tant »… Et si c'était le contraire ? Si l'élève avait plus de facilités ici à redémontrer le théorème qu'à l'appliquer ?

Nous avons montré en effet dans de nombreuses recherches que les enseignants voudraient que les élèves appliquent un théorème, utilisé comme modèle à contextualiser, dès qu'il est dans le cours. Seulement l'apprentissage n'est pas linéaire ni immédiat, et il se peut que les élèves aient besoin de revenir à la démonstration, par eux-mêmes, plusieurs fois avant de s'approprier le théorème, c'est un résultat général.

d) Le mot de la fin…

Voici un petit extrait du dialogue professeur – élèves à la fin du calcul du rapport de similitude dans le deuxième exercice :

P. *« …j'attendais que par des calculs simples, ici c'est Pythagore en gros, on obtienne que AO sur AB ce soit racine carrée de 2 sur 2. Voilà. Est-ce c'était difficile ça ? …*

É. En fait ça a l'air simple oui mais j'avoue que j'y aurais même pas pensé.

P. *Pourtant il y a deux trois ans tu y pensais.*

É. Oui parce qu'on était en plein dedans, maintenant ça fait deux trois ans justement.

P. *Léa 7 fois 7.*

É. 49 non ce n'est pas ça.

P. *tu vois c'est en CM1 et tu t'en souviens encore pourtant.*

É. **Ouais c'est pas de l'appliquer qui est dur, c'est de savoir que c'est ça qui sert.**

P. *et alors on est là pour ça et je pense qu'un élève de seconde doit trouver ça facile, sinon c'est qu'on manque d'entraînement.* »

Les élèves ont ainsi tout à fait conscience de manquer d'une certaine disponibilité de leurs connaissances anciennes. La question qui se pose est double : est-ce une affaire d'entretien, de mémoire, voire de contrat, et quoi qu'il en soit, à qui revient l'entretien en question ? Pourquoi est-ce que les élèves n'apprennent pas ou oublient leur cours ? Est-ce seulement parce qu'ils seraient « paresseux » ?

e) Est-ce que les élèves sauront faire un exercice de ce type la prochaine fois ? Y a-t-il des alternatives ?

D'un côté des recherches (Felix, 2004) ont montré que c'est le travail en classe qui conditionne, au moins en partie, le travail à la maison, qui permet aux élèves d'avoir suffisamment d'idées pour le faire, pour s'y mettre sans efforts insurmontables et de manière efficace. Peut-être certains élèves n'arriveront-ils à apprendre leur cours qu'après en avoir eu besoin, au moins un peu. Est-ce qu'on peut apprendre sans avoir cherché ? Rappelons-nous Woody Allen parcourant les rues de New York en criant « j'ai la réponse mais qui a la question ? » Est-ce qu'on peut apprendre à appliquer un théorème sans que soit posé avant ni repris après le problème du choix de ce théorème, est-ce qu'on peut apprendre en ayant à sa disposition seulement des exemples où le théorème est utilisé sans commentaires ?

Ainsi, pour nous, apprendre un cours n'est pas un exercice de simple mémoire, ni seulement une question de temps à passer. Ou plutôt si l'apprentissage du cours se réduit à un exercice de mémoire, cela ne suffit pas à ce que les élèves réussissent à l'appliquer ! Cela peut même faire qu'ils y renoncent, par delà des raisons sociales, liées aux sollicitations externes à l'école et aux conditions de travail des élèves.

Par ailleurs, les recherches actuelles sur les séances de classe amènent à questionner, plus généralement, les aides des enseignants – par delà l'enrôlement et le maintien dans l'activité. Qu'est-ce que l'enseignant va choisir de dire, de souligner, et quand ? Par exemple, y a-t-il lieu de dégager ou non des méthodes un peu générales dans ce qui est exposé, avant la recherche des élèves ou après ? Certains enseignants pensent que ce travail de repérage des occasions d'utiliser un théorème, par exemple, est à la charge des élèves – des recherches ont montré que tous les élèves n'en sont même pas conscients et qu'il y a là souvent un travail spécifique possible pour les enseignants (cf. Castela, 2006).

Plus généralement, par delà le travail d'entretien, nous suggérons que les élèves ont à faire un travail de réorganisation des connaissances, lié à la conceptualisation des notions nouvelles. Il ne s'agit pas seulement de savoir à l'avance que tel ou tel chapitre va servir (en s'inscrivant dans un contrat) ou d'apprendre par cœur tel ou tel théorème et de le réviser pour ne pas l'oublier. Il s'agit d'apprendre à la fois le sens des nouvelles notions et les techniques qui permettent de les utiliser, et ce travail, qui remet en jeu régulièrement les connaissances déjà-là, est très difficile pour les élèves. On évoque quelquefois à ce sujet le caractère cumulatif des connaissances en mathématiques. Or, les enseignants ont très rarement le temps de revenir sur les connaissances anciennes, sous la pression de la nécessité de finir le programme avec des horaires réduits et des classes très hétérogènes. De plus les manuels ne proposent que peu d'exercices adéquats à cette réorganisation (Hache, 2008). Il y a là une source d'interrogations.

Nos travaux et nos hypothèses théoriques sur les apprentissages nous amènent à suggérer que des alternatives tiennent au fait de proposer des situations d'introduction des notions, susceptibles d'engager les élèves dans la construction du sens d'emblée, de faire investir et réinvestir les notions dans des situations variées permettant de rencontrer beaucoup d'adaptations, y compris des mélanges, et de dégager des méthodes au lieu, par exemple, de s'appuyer seulement sur le contrat, qui fait jouer l'intelligence des élèves mais hors mathématiques ou sur les associations simples entre énoncé et théorème.

f) Le sens des notions

Nous avons évoqué ci-dessus le sens des notions et leur introduction. Cela fait très longtemps que, très généralement, la didactique pose cette question de l'introduction des notions – des travaux relativement récents ont permis d'introduire une réflexion sur différents types de notions, en relation avec la plus ou moins grande difficulté à élaborer une bonne situation d'introduction. Ce sont notamment les notions qui sont en grand décalage par rapport aux connaissances déjà-là des élèves, souvent en relation avec une genèse difficile et très longue (Robert, 1998). Beaucoup de ces notions sont introduites dans le supérieur, elles sont exprimées dans un nouveau Formalisme Unificateur, simplificateur et Généralisateur : c'est le cas des espaces vectoriels, de la convergence des suites, mais aussi des fonctions et même de l'algèbre élémentaire.

Faire jouer pour ces notions une dialectique entre le caractère outil et le caractère objet par exemple, semble délicat – alors que ce levier peut être extrêmement productif pour des notions qui sont extensions de notions déjà-là ou qu'on peut présenter comme réponse à un problème (Brousseau, 2005 ; Douady, 1987). Les élèves n'ont pas encore eu accès aux outils, même partiels. Il est difficile d'élaborer un problème dont ces notions et elles seules permettent la résolution, avec des moyens de contrôle internes au problème. Les introductions demandent alors un travail spécifique d'investigation de la genèse de la notion et de mises au point d'un certain nombre de séances donnant lieu à un travail partiel des élèves, les amenant à recoller plus facilement les morceaux et à élaborer la nouvelle notion.

Première conclusion partielle

La didactique des mathématiques a ainsi parmi ses objectifs de poser de bonnes questions sur les contenus à enseigner et de proposer des outils adaptés pour les analyser, à partir de ce qui se passe en classe : sont en jeu notamment les connaissances à faire utiliser aux élèves dans les exercices et leurs adaptations ainsi que la gestion des séances. Repérer les activités des élèves (a maxima, a minima), les interpréter grâce aux analyses de tâches a priori et compte tenu des improvisations et autres interventions de l'enseignant en classe, sont des étapes importantes des recherches.

Mais les enseignants peuvent-ils profiter de ces recherches ? À quelles conditions ? Marie-Jeanne Perrin va maintenant s'intéresser aux savoirs nécessaires pour enseigner les mathématiques et relever quelques spécificités des questions qui se posent en primaire.

2. Les savoirs pour enseigner les mathématiques (M.J. Perrin)

Je voudrais commencer par prolonger l'exemple que vient de présenter Aline pour mettre l'accent sur les savoirs pour enseigner les mathématiques. J'aborderai ensuite la question de la spécificité du primaire et notamment de l'utilisation de situations issues de la réalité pour apprendre des mathématiques. J'élargirai enfin le propos à des questions concernant les méthodologies de recherche et les rapports entre la recherche en didactique et l'enseignement.

1) Un exemple pour poser la question des savoirs mathématiques du professeur de mathématiques

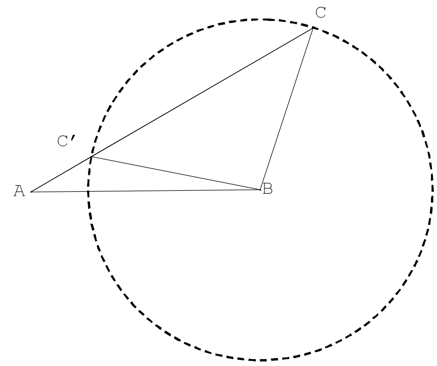
L'exemple présenté par Aline et les travaux qu'elle a évoqués amènent à poser plus largement la question des savoirs mathématiques nécessaires au professeur pour enseigner et qui ne se restreignent pas aux savoirs mathématiques « académiques » enseignés à l'université. En examinant d'un peu plus près la difficulté des élèves de seconde à identifier les points homologues pour traiter des triangles semblables (voire isométriques), on peut ainsi trouver l'exemple d'un tel savoir, présent dans l'enseignement de la géométrie jusqu'aux années 60 et qui semble perdu depuis. Perdu au point que cela peut amener un professeur débutant à se laisser piéger dans son cours qu'il a pourtant soigneusement préparé avec, notamment, les manuels. Ce fut le cas d'une stagiaire dont je dirigeais le mémoire :

Dans son cours, elle a énoncé les deux théorèmes[4] suivants :

Théorème 1 : Si deux triangles ont un côté égal et deux angles respectivement égaux, alors ces deux triangles sont isométriques.

Théorème 2 : Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors les triangles sont isométriques.

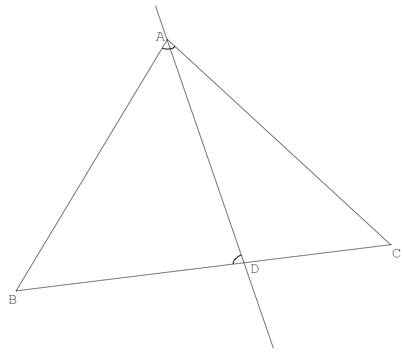
Pour le second, elle a donné un contre-exemple dans le cas où l'angle n'est pas compris entre les côtés (voir ci-contre).



On peut avoir deux triangles non isométriques ABC et ABC' tels que $\hat{A} = 30°$; AB = 8cm ; BC = BC' = 6cm.

Un élève lui a alors demandé si pour le premier théorème, le côté ne devait pas aussi être compris entre les angles. Le professeur a fait préciser ce qu'on savait sur la somme des angles d'un triangle pour conclure que le côté pouvait toujours être considéré comme entre deux angles égaux et que, pour un côté et deux angles on n'avait pas besoin de dire compris, mais sans voir l'importance du « respectivement » qui empêche la figure ci-contre où les deux triangles ont les trois angles égaux et un côté égal sans être pour autant isométriques :

AB = AB ; $B\hat{A}C = B\hat{D}A$; $A\hat{B}C = A\hat{B}D$



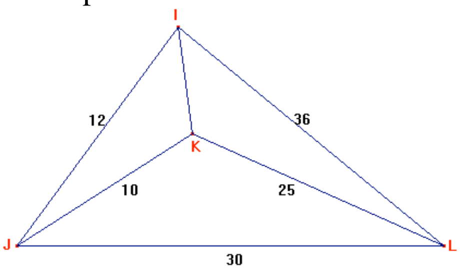
Les triangles ABD et ABC ne sont pas isométriques, mais semblables car ce ne sont pas les éléments homologues qui sont égaux.

Dans le cas des triangles semblables, on voit dans l'exemple montré par Aline et dans la thèse déjà citée (Horoks, 2008) que les élèves ont des difficultés pour identifier les points homologues et que les professeurs semblent avoir peu de ressources pour traiter ce problème. Pour appliquer les cas d'isométrie ou de similitude des triangles, il faut en effet repérer les éléments homologues. On recommande en général aux élèves d'écrire l'un sous l'autre les éléments qui se correspondent mais sans dire comment faire. Évidemment, on peut tricher en mettant les sommets dans le bon ordre pour nommer les triangles comme c'est le cas dans beaucoup d'exercices, mais si on ne triche pas ? Si on a des informations sur les angles, comme dans la vidéo, c'est assez facile parce qu'un angle correspond à un sommet.

[4] Ces énoncés sont empruntés au « Fractales », je ne dispose pas du texte réellement donné par la stagiaire à ses élèves.

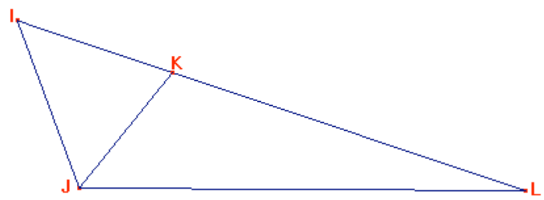
En revanche, si les informations portent sur les côtés, c'est plus difficile, surtout quand on n'a plus à sa disposition les théorèmes liant ordre des angles et ordre des côtés, comme c'était le cas dans les années 60. À mon avis, la difficulté vient aussi du fait que depuis la période des mathématiques modernes, il y a un interdit sur la prise d'informations sur la figure et d'ailleurs, comme il y a de plus en plus de figures fournies avec les exercices, on voit fleurir des textes avec figure fausse, parfois dessinée à main levée, sur laquelle il est impossible de prendre des informations visuelles. Voici un exercice, trouvé sur Internet et proposé à sa classe par la même PLC2, qui montre ces deux aspects :

Utiliser les informations données sur la figure ci-contre pour démontrer que les triangles IJL et JKL sont de même forme.



Le texte en soi est choquant (pour moi du moins) parce qu'il demande de montrer qu'un triangle avec un angle obtus est semblable à un triangle dont les trois angles sont aigus sur la figure fournie. Donc la figure est nécessairement fausse et on ne peut pas s'y fier pour associer les sommets (d'ailleurs 30 correspond sur la figure à une longueur supérieure à celle qui correspond à 36). Comment alors trouver les éléments homologues ? On peut ranger les côtés selon leur longueur mais un côté correspond à deux sommets indifférenciés, il faut donc nommer les côtés en choisissant un sens de parcours (i.e. en repartant de la dernière lettre du côté précédent) : IJ< JL < LI ; JK < KL < LJ (ou associer les sommets opposés à ces côtés) c'est-à-dire faire correspondre IJL et JKL.

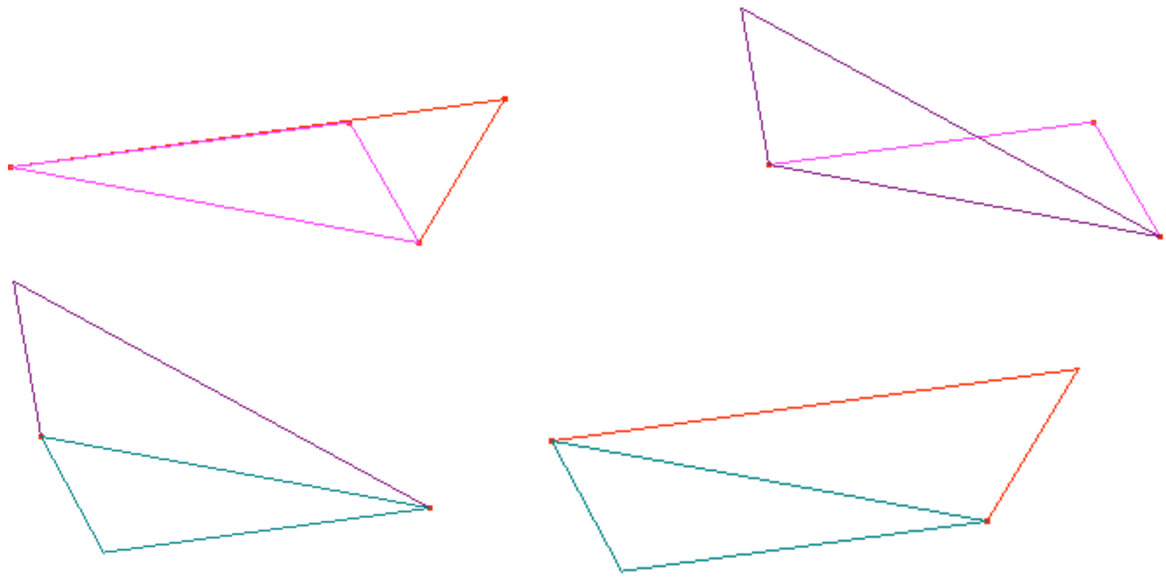
Donc s'ils sont semblables (et ils le sont, puisque $\frac{IJ}{JK}=\frac{12}{10}$ $\frac{JL}{KL}=\frac{30}{25}$ $\frac{LI}{LJ}=\frac{36}{30}$), les angles en L sont égaux, ce qui veut dire que K est sur LI, du moins si K et I sont du même côté de (JL). Il faut ici raisonner malgré la figure.



L'énoncé ne demande pas de construire une figure juste après résolution. La stagiaire n'avait pas vu que K était nécessairement sur [IL] et n'avait pas perçu la contradiction interne à l'énoncé entre le texte et la figure fournis. Mais pour en arriver à cette conclusion, mettre en correspondance les sommets, repérer ces contradictions et produire la nouvelle figure, quelles informations avons-nous prises sur la figure de l'énoncé ? Pour mieux le voir, examinons deux des énoncés du problème qui auraient pu être donnés sans fournir de figure :

Énoncé alternatif 1 : Les côtés IJ, JL et IL du triangle IJL mesurent respectivement 12, 30, 36 cm et les côtés KJ, KL et JL du triangle KJL 10, 25, 30 cm. Ces triangles sont-ils semblables ? Faire une figure.
Énoncé alternatif 2 : Les côtés du triangle IJL mesurent respectivement 12, 30, 36 cm et les côtés du triangle KJL 10, 25, 30 cm. Ces triangles sont-ils semblables ? Faire une figure.

Si on nomme les sommets sans préciser les positions relatives des points (énoncé alternatif 1), on a deux figures possibles (celle que j'ai faite et la symétrique par rapport à (JL), mais si on donne globalement les mesures des côtés des triangles (énoncé alternatif 2), on en a beaucoup plus : sur le côté commun on peut construire 4 petits triangles et 4 grands, et n'importe quelle association d'un petit triangle avec un grand convient. On a donc 4 figures possibles à symétrie près.



Fournir la figure permettait donc de répartir les mesures sur les côtés et de dire que I et K étaient du même côté de (JL).

Quels savoirs ont manqué à ce professeur débutant ? Quelle est la nature des savoirs que nous avons mis en œuvre pour faire cette petite analyse, et à quelle occasion les professeurs et les élèves peuvent-ils les apprendre ? On peut relever notamment :

– Les liens entre mesures des angles et des côtés dans un triangle ;
– La manière de nommer des triangles pour respecter l'ordre des longueurs des côtés ;
– Les informations qu'on est autorisé à lire sur une figure, notamment les positions relatives de points et droites.

Ces savoirs ne font pas (ou plus) partie du corpus explicite des définitions et théorèmes à enseigner mais ce sont des moyens d'utiliser la figure et de mettre en œuvre les autres savoirs géométriques. Les identifier et reconnaître leur importance pour l'utilisation des savoirs mathématiques proprement dits fait partie des savoirs du professeur que j'appellerai didactiques, parce qu'ils sont intimement liés à la fois aux mathématiques et à l'organisation de l'étude des élèves : ce ne sont pas nécessairement des savoirs à enseigner aux élèves, mais ils aident le professeur à identifier les difficultés des élèves, à poser les bonnes questions, à apporter des aides constructives (au sens où Aline l'a défini).

Certes, dans l'exemple, il s'agit d'un professeur débutant mais le même exercice peut être donné sans poser plus de questions sur la figure par un enseignant confirmé parce que, comme le montre Horoks (2008), la non prise en compte dans l'enseignement des moyens de rechercher les points homologues n'est pas le problème d'un enseignant particulier. Pour s'en convaincre, on peut consulter les manuels : je n'ai trouvé un travail explicite sur les éléments homologues que dans un seul des cinq ou six manuels de seconde que j'ai consultés ; il n'est pas parmi les plus utilisés et plusieurs noms de didacticiens figurent parmi les auteurs. Si on regarde les manuels des années 60, on s'aperçoit qu'il y a tout un travail sur le repérage des éléments homologues dans tous les chapitres de géométrie qui portent de manière implicite sur des transformations. Ainsi, les cas d'égalité des triangles alors étudiés en $5^{\text{ème}}$ abordaient déjà la question des points homologues qui était reprise au moment de l'étude du théorème de Thalès en $4^{\text{ème}}$ et des triangles semblables en $3^{\text{ème}}$. On passait beaucoup de temps en $5^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ à décrire les triangles et les relations entre angles et côtés ; par exemple, on savait qu'au plus grand angle est opposé le plus grand côté, ce qui facilite l'analyse de la figure puisqu'un côté a deux extrémités indifférenciées, ce qui n'est pas le cas des angles. La question de la reconnaissance des points homologues est un problème professionnel qui peut se régler par un savoir professionnel du professeur de mathématiques. Ce savoir manque d'autant plus que la plupart des enseignants actuels n'ont étudié ni les triangles isométriques ni les triangles semblables quand ils étaient élèves. L'organisation ancienne de l'enseignement amenait une réponse mais les notions ne reviennent pas dans les programmes de seconde avec la même organisation des savoirs qu'avant 1969. La réponse à apporter au problème est peut-être différente. D'autres exemples ont été mis à jour au fil des recherches, par exemple concernant les angles alternes internes (Cirade, 2008).

Une question essentielle, pour la recherche comme pour la formation, me semble donc la suivante : de quels savoirs et de quelles ressources les enseignants disposent-ils et ont-ils besoin pour préparer puis gérer la classe, adapter leur préparation dans l'urgence et exercer leur métier ?

Bien sûr, les savoirs mathématiques sont essentiels mais pour enseigner les mathématiques, il faut les connaître autrement que pour les comprendre pour soi-même ou les utiliser pour résoudre des problèmes. Le professeur a certes besoin aussi de savoirs pédagogiques transversaux qui ne réfèrent pas à un contenu précis. Les savoirs didactiques, qui nous intéressent plus particulièrement, lient le mathématique et le pédagogique. Parmi tous ces savoirs, il en est sans doute qui ne s'acquièrent que par la pratique de l'enseignement, mais il y a aussi des savoirs qui peuvent s'acquérir ou se développer hors de la pratique, par une formation comprenant éventuellement une anticipation ou une analyse de pratique. Beaucoup de ces savoirs restent à identifier ainsi que la manière dont les professeurs peuvent les acquérir. Ces questions, largement ouvertes en recherche, sont très importantes pour la formation.

2) Les savoirs mathématiques pour le professeur des écoles

La question du savoir mathématique du professeur est cruciale et difficile à tous les niveaux et encore plus en primaire pour au moins trois raisons :

- Les savoirs à enseigner sont naturalisés, automatisés et de ce fait plus difficiles à interroger ;
- Les mathématiques sont parfois moins visibles et imbriquées dans des contextes concrets d'où elles sont plus difficiles à dégager ;
- Enfin, les enseignants du primaire ne sont pas des spécialistes de mathématiques ; ils sont polyvalents et leur formation initiale en mathématiques est très diverse, disons que le noyau commun correspond à peu près à ce qu'on trouve dans les programmes jusqu'en classe de seconde.

a) Les travaux de Liping Ma

Liping Ma (1999), en comparant les pratiques d'enseignants du primaire en Chine et aux États-Unis, a constaté que les enseignants chinois, qui disposaient d'un savoir mathématique théorique moins étendu que les enseignants américains, dispensaient pourtant un enseignement plus riche et plus efficace. Ses travaux ont ainsi montré l'importance de ce qu'elle appelle le « profound understanding of fundamental mathematics » (PUFM), c'est-à-dire le fait d'être capable de faire beaucoup de liens entre les concepts du calcul élémentaire et aussi entre le calcul et les situations concrètes et de disposer de complexes où situations de référence et savoirs sont imbriqués : l'enseignant peut ainsi enrichir son enseignement et réagir de façon appropriée et constructive aux erreurs éventuelles des élèves.

b) Un exemple pour montrer l'imbrication du mathématique, du pédagogique et du didactique dans l'enseignement primaire

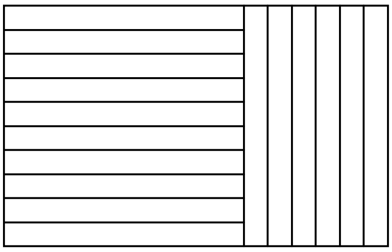
En effet, une des difficultés de l'enseignement primaire, du fait notamment des trois caractéristiques que j'ai citées, est que les notions mathématiques sont à utiliser pour traiter des problèmes concrets et qu'il peut être difficile pour l'enseignant de repérer ce qu'il est important de laisser à la charge des élèves et ce qui ne l'est pas pour que les élèves fassent des mathématiques. Je vais l'illustrer par un exemple rencontré dans une séance d'atelier de développement de pratiques pédagogiques (ADPP) préparée par 3 ou 4 stagiaires pour des élèves de CM2 :

Objectif des stagiaires : travailler les additions répétées dans les décimaux.
Choix d'un contexte : ranger des DVD dans une boîte à chaussures.
L'épaisseur d'un DVD est donnée (1,7 cm avec sa boîte)
La longueur de la boîte aussi (33 cm) ; sa largeur correspond à la hauteur d'un DVD.
Question : On veut ranger le plus possible de DVD dans la boîte. Combien peut-on en mettre ?

Ce choix de problème a été fait en ma présence, mais je n'ai pas participé à la suite de la préparation. J'ai assisté à la séance en classe. La stagiaire qui mène la séance a apporté la boîte et un grand nombre de DVD. Elle pose le problème collectivement en montrant la boîte, les DVD. Avec l'aide des élèves, elle constate qu'on peut ranger les DVD dans la boîte et mesure les dimensions utiles. Les élèves sont répartis en groupes et se mettent tout de suite au travail. Mais… La boîte et les DVD circulent dans la classe. Pour aider les élèves, la stagiaire distribue à chacun une représentation vue de dessus de la boîte.

Que peut-on alors attendre des élèves ? Quand la boîte arrive dans leur groupe, ils cherchent des manières de ranger le plus possible de DVD dans la boîte en utilisant les trois dimensions.

Sur la représentation, ils dessinent des DVD en utilisant les deux dimensions, cherchant toujours à en mettre le plus possible avec un certain nombre de dessins de ce type :



Or le problème mathématique visé par les stagiaires[5] (addition répétée de 1,7 et donc multiplication par un entier) ne se pose réellement qu'une fois qu'on a décidé de ranger tous les DVD verticalement dans le même sens, c'est alors un problème de dimension 1 : trouver combien de fois on peut reporter 1,7 cm dans 33 cm. La dévolution du problème mathématique visé ne peut donc avoir lieu que quand on a tranché le problème matériel du rangement des disques en décidant de les ranger tous verticalement de façon à pouvoir lire le titre au dos. Si l'on veut que tous les élèves aient suffisamment de temps à consacrer au problème mathématique visé, le travail en groupes ne doit donc commencer que quand cette définition du problème à traiter a été élucidée collectivement. Faute de cet accord préalable sur le problème à traiter, la distribution du matériel et d'une représentation en dimension 2 ramène les élèves sur le problème matériel. On voit ici comment le mathématique et le pédagogique sont imbriqués aussi bien dans le choix d'un problème et de l'organisation du travail des élèves que dans la gestion de la classe. À l'école élémentaire, les stagiaires croient bien faire en apportant du matériel plutôt qu'en se contentant de l'évoquer. Au fil des programmes et des instructions, on répète qu'il faut s'appuyer sur des situations concrètes qui aient du sens pour les jeunes élèves ; les professeurs des écoles stagiaires reviennent tous de leur premier stage en disant qu'ils ont appris qu'il faut faire manipuler les élèves. Mais que

[5] Le problème de l'optimisation du rangement peut effectivement se poser en utilisant les deux dimensions comme dans la figure, voire en utilisant les trois dimensions mais c'est alors un problème de recherche complexe qui n'était pas du tout le projet des stagiaires et aurait demandé une autre organisation de la classe ; d'ailleurs, en donnant la consigne, la stagiaire n'a mesuré avec les élèves que la longueur de la boîte et l'épaisseur d'un DVD.

veut dire concret, que faut-il manipuler, comment manipuler pour que les élèves apprennent des mathématiques ? Les injonctions pédagogiques actuelles disent qu'il est important de laisser chercher les élèves. Oui mais sur quel problème ?

c) Les mathématiques pour traiter des problèmes concrets / les problèmes concrets pour introduire les mathématiques

Dans l'exemple qui précède, les mathématiques sont utilisées pour traiter une situation concrète complexe (où il y a à décider quel traitement mathématique on veut appliquer la réalité concrète). Le problème des rapports avec la réalité se pose aussi pour l'introduction de notions mathématiques et il se pose en lien avec les théories sous-jacentes. Comment met-on en place, comment définit-on les premières bases des notions mathématiques sur lesquelles on construira la suite ? Comment trouver un milieu matériel qui permette d'introduire ces notions et de leur donner un sens transférable à d'autres situations ? Comment proposer une construction des notions mathématiques cohérente avec les mathématiques elles-mêmes et avec le développement cognitif de l'enfant ? Ces questions ont occupé les recherches en didactique depuis le début. Les rapports entre mathématiques et réalité seront abordés demain mais je voudrais déjà faire trois remarques.

1) Pointer la différence entre une démarche descendante et une démarche ascendante

On peut utiliser la réalité comme illustration : on part des notions mathématiques et on essaie de les illustrer par des situations concrètes, c'est-à-dire qu'on habille des notions ou des problèmes mathématiques par des contextes concrets ; on a un milieu matériel qui sert à montrer ces notions dans leur action sur un matériel concret, présent ou plus souvent évoqué ; dans ce cas, il faut souvent déjà connaître les mathématiques en jeu pour les voir dans le concret et si l'élève ne « voit » pas l'enseignant ne peut que recourir à l'ostension (voir Salin, 1999, 2008) pour les lui « montrer » dans le milieu. C'est par exemple ce qui se passait quand on enseignait le groupe de Klein ou groupe du matelas à l'école primaire. Un symbolisme introduit dans une situation était reporté sur une autre sans qu'on ait une véritable opérationnalité de la notion mathématique ainsi présentée. C'est un peu aussi ce qui se passe souvent pour les opérations arithmétiques introduites directement sur les nombres : par exemple, on introduit la division et sa technique en l'illustrant par un partage de bonbons ou un rangement d'œufs dans des boîtes. En général, le transfert dans des problèmes où l'opération prend un sens différent ne se fait pas facilement et il faut aussi apprendre les conditions d'emploi de l'opération. On enseigne donc le modèle et ses applications, c'est ce que j'appelle un modèle descendant.

La démarche ascendante consiste, elle, à partir de situations concrètes qu'on traite concrètement pour faire émerger un modèle mathématique qu'il s'agira de réinvestir dans d'autres situations concrètes qui n'ont peut-être rien à voir avec celle du départ. Ce réinvestissement permettra l'enrichissement des savoirs produits initialement. Mais alors comment faire pour que ce modèle mathématique soit réutilisable ? Y a-t-il des situations concrètes qui sont incontournables pour la création du sens d'un concept mathématique donné ? Y a-t-il des situations concrètes dans lesquelles on a la possibilité de dégager, au niveau des élèves, des éléments théoriques qui soutiennent la démarche et sont en cohérence avec une théorie mathématique ? C'est le genre de démarche et de questions qui sont étudiées par la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et par la dialectique outil objet (Douady, 1987 & 1994).

Des éléments essentiels pour le transfert sont le vocabulaire et les symboles introduits, autrement dit, l'activité sémiotique développée autour de la situation concrète : on ne résout pas le problème seulement pour le résoudre mais pour créer des outils réutilisables dans d'autres problèmes. Plusieurs travaux ont montré l'importance des représentations intermédiaires entre la situation concrète et les notions mathématiques qui la modélisent (par exemple Perrin-Glorian, 1993 ; Sadovsky et Sessa, 2005). Ces représentations aident à isoler ce que le modèle mathématique prend en compte, comme l'exemple précédent le montre aussi. L'entrelacement entre le vocabulaire lié à la situation concrète et le vocabulaire mathématique et les symboles est essentiel pour la création du sens et le réinvestissement.

2) Souligner l'importance de l'existence d'une « théorie » permettant de faire le lien entre les situations concrètes de l'environnement socio-culturel des élèves et les notions mathématiques décontextualisées

Il est important pour la formation des enseignants qu'il existe une théorie mathématique de référence qui permette de justifier le lien entre les situations concrètes et les mathématiques introduites et qui gère les intermédiaires pour que les enseignants puissent disposer d'une compréhension profonde des concepts mathématiques élémentaires, comme le dit L. Ma. Or, et la thèse de Christine Chambris (2008) qui s'achève en donne l'exemple pour la numération, toutes les théories mathématiques ne se valent pas de ce point de vue et il se peut que certaines ne le permettent pas. Dans les années 70, on a écarté les grandeurs comme moyen de construire les nombres, en les sortant de l'arithmétique et en créant un domaine « mesures ». Elles ont même pendant une longue période complètement disparu des programmes du secondaire, l'aire et la longueur devenant des nombres. Depuis, les grandeurs ont progressivement réapparu dans les programmes mais elles n'ont pas retrouvé leur place dans la construction des opérations arithmétiques.

L'introduction des opérations directement sur les nombres ne permet pas de traiter les problèmes. Par exemple, la multiplication comme addition répétée de grandeurs n'est pas commutative. Il n'est déjà pas évident pour les élèves qu'on ait le même nombre de cerises dans quatre paniers contenant chacun douze cerises que dans douze paniers de 4 cerises ; cela demande de prendre une cerise dans chacun des premiers paniers pour les mettre dans le même panier, passant ainsi de la distribution des cerises dans des paniers différents au regroupement par paquets de 4. C'est encore moins évident qu'en mettant bout à bout douze segments de 4cm on obtient la même longueur qu'en mettant bout à bout 4 segments de 12cm puisqu'il faut passer par la constitution de cette nouvelle grandeur pour voir l'équivalence et que de plus ces manipulations concrètes différentes relèvent de la même opération. Cela se corse quand, de plus, cette opération permet aussi de calculer le prix de 24,3 litres d'essence à 1,5 euros le litre : comme l'a demandé une élève de CM2 à son professeur d'école qui est resté sec (il avait pourtant une licence de mathématiques) : pourquoi en multipliant des francs avec des litres, on a des francs ? D'autres auraient pu demander : pourquoi obtient-on l'aire en cm^2 d'un rectangle en multipliant ses dimensions en cm ? Comment comprendre ce calcul d'aire comme une addition répétée ? Comment comprendre le changement d'unités, le fait que les deux nombres et non un seul soient des nombres d'unités, des nombres mesurant des grandeurs ?

La thèse de Christine Chambris montre l'apport de traités comme ceux de Reynaud et de Bézout au $19^{ème}$ siècle pour fonder l'enseignement classique des nombres à l'école primaire en cohérence avec les pratiques sociales de l'époque et l'absence actuelle d'une telle théorie mathématique compatible avec le développement cognitif des élèves et leur environnement socio-culturel ; elle en propose quelques éléments. La construction ensembliste des nombres est trop pauvre et trop éloignée des pratiques sociales où de plus l'usage des nombres pour traiter les grandeurs est devenu tout à fait opaque dans un monde numérique (par exemple, les pesées avec une balance électronique).

3) Les besoins plus grands en termes de savoirs didactiques des enseignants

La demande actuelle de s'appuyer sur le travail des élèves que ce soit avec une référence piagétienne ou vygotskienne, ou simplement parce que dans la société actuelle les élèves acceptent plus difficilement d'apprendre à l'école des savoirs dont ils ne voient pas tout de suite l'utilité, demande beaucoup plus de savoirs didactiques de la part des enseignants : la seule logique du savoir ne suffit pas quand on veut s'appuyer sur des productions d'élèves en réponse à des problèmes. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) a introduit le concept fondamental de milieu pour rendre compte de ce qui, dans une situation didactique, est reconnu par les élèves et le maître comme objectif, c'est-à-dire indépendant à la fois du maître et des élèves, et donc point d'appui possible pour la résolution d'un problème et pour argumenter. À l'école primaire, le milieu est souvent matériel, effectif ou évoqué ; plus tard, il est souvent composé de savoirs qui ne sont plus enjeu d'apprentissage, qui sont naturalisés. L'action sur le milieu et l'interprétation des rétroactions de ce milieu demandent de mettre en œuvre des connaissances. Les connaissances anciennes doivent permettre de comprendre ce qu'est une solution du problème à travers une stratégie de base qui amène une solution partielle au problème ; la recherche d'une solution plus économique ou plus complète peut amener la production de connaissances nouvelles. Dans les situations de classe réelles, on a rarement un milieu qui permet aux élèves de résoudre et de produire des connaissances nouvelles sans intervention du professeur. L'analyse fine de séances de classe montre d'une part que le professeur ou même les élèves modifient le milieu au cours de la résolution, d'autre part que les apprentissages effectifs des élèves ne sont pas toujours ceux prévus par le professeur (par exemple parce que les connaissances disponibles des élèves ne sont pas celles qui étaient attendues) – voir notamment les travaux d'Alain Mercier et Gérard Sensevy et d'autres chercheurs utilisant le même cadre théorique (Sensevy et Mercier, 2007), ou de Magali Hersant et moi-même (Hersant, 2004 ; Perrin-Glorian et Hersant, 2003 ; Hersant et Perrin-Glorian, 2005). Pour faire émerger le savoir à retenir des connaissances produites par les élèves dans la résolution d'un problème, le professeur a besoin d'adapter sa préparation et même souvent ses savoirs didactiques sur les élèves et le problème, pour coller au travail des élèves et pour coller au savoir à enseigner. Quels savoirs de référence pour ce travail délicat à chaud du professeur ?

3. Méthodologies pour des recherches

Place de l'ingénierie didactique

Nous avons, dans cette conférence, donné une grande place à l'étude de l'enseignant, domaine qui s'est beaucoup développé ces dix dernières années parce que la formation des enseignants est un enjeu essentiel pour améliorer l'enseignement et son efficacité. En effet, la recherche en didactique des mathématiques a pour objectif, à terme au moins, d'améliorer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les recherches ont démarré en France et dans d'autres pays par des ingénieries didactiques où le chercheur prenait plus ou moins la place de l'enseignant dans la conception de suites de séances supposées améliorer l'apprentissage des élèves. Trente à quarante ans après les premiers travaux, la complexité du projet et la nécessité de mieux connaître le fonctionnement du système apparaît clairement à tous. Cependant, les rapports entre la recherche et ses effets sur le système d'enseignement, notamment par la diffusion des ingénieries didactiques produites par les recherches, restent difficiles à appréhender et à contrôler. Les évolutions ont été différentes selon les pays. On peut relever en gros deux philosophies pour essayer de faire bouger l'enseignement dans le bon sens :

– Développer des projets à grande échelle et former des enseignants en les faisant participer aux recherches, comme ce qui se passe en Italie dans la recherche pour l'innovation, et ainsi faire bouger les contraintes du système d'enseignement de l'intérieur, ce qui suppose sans doute qu'elles soient assez souples.

– Mieux comprendre le fonctionnement ordinaire du système et les contraintes pour comprendre d'une part comment on peut les faire bouger sans provoquer de catastrophes, d'autre part quels sont les besoins des enseignants et adapter la formation à ces besoins. C'est le point de vue qui domine en France depuis une bonne dizaine d'années. Les contraintes sont recherchées :
    – du côté des mathématiques elles-mêmes (il y a toujours une interrogation épistémologique forte dans les recherches en didactique),
    – du côté du fonctionnement de l'institution scolaire,
    – du côté du fonctionnement de la classe.

Les deux points de vue ne sont pas contradictoires. D'ailleurs, un moyen de révéler le fonctionnement ordinaire du système est de lui apporter une perturbation qui change les équilibres dans les savoirs et les pratiques des enseignants. C'est ainsi que les recherches qui se sont développées depuis 20 ans autour de l'intégration des nouvelles technologies (calculatrices, logiciels) dans l'enseignement des mathématiques, thème auquel est consacrée la matinée de demain, ont aussi apporté ces dernières années des informations sur les pratiques ordinaires des enseignants, avec ou sans ces technologies.

Quelle est l'unité d'analyse des recherches ?

Qu'on adopte l'un ou l'autre point de vue, dans les recherches en didactique, il s'agit comme l'a dit Aline, d'étudier une réalité très complexe, qu'on va pour cela découper en fonction de choix méthodologiques et théoriques. Une question importante pour la portée des résultats est celle de l'unité d'analyse qu'on se donne, autrement dit, où met-on la focale ? On a vu sur l'exemple des triangles semblables que l'analyse de difficultés d'élèves et d'enseignants particuliers sur une question précise peut nous amener à enquêter plus largement sur le savoir mathématique et son organisation en utilisant d'autres outils théoriques. L'exemple nous a ici amenés à élargir la focale pour considérer des questions de transposition didactique.

Ainsi, sur ce même sujet de l'étude du rôle de l'enseignant qu'a abordé Aline, d'autres points de vue théoriques amènent des éclairages différents et complémentaires. Au lieu de rechercher des régularités ou variabilités chez les individus, enseignants ou élèves, on cherche à étudier et caractériser le fonctionnement d'un système : le professeur et l'élève sont alors considérés par rapport à leurs attentes, leurs contraintes, internes ou externes à la classe, dans leurs rapports dissymétriques avec le savoir et en lien avec les objectifs d'enseignement et apprentissage qui leur sont assignés par l'institution scolaire et la société et qu'ils reprennent à leur compte. Ils sont ainsi vus eux-mêmes comme des systèmes en interaction ou comme des positions dans des institutions en prenant le terme « institution » dans un sens large : la classe elle-même, un niveau scolaire comme la classe de seconde, sont des institutions. Cela peut amener à mettre la focale sur les organisations mathématiques pour les situer par rapport à des possibles ou à la porter non sur les individus mais sur le contenu des interactions et sur les enjeux didactiques pour un professeur générique et un élève épistémique. Dans chacun des cadres, on peut de plus varier le grain d'analyse et choisir un plan très large ou examiner très finement à la loupe.

Les recherches menées dans l'équipe DIDIREM ont été variées, elles ont pris l'un ou l'autre des points de vue précédents, ont utilisé des cadres théoriques différents, pour certaines d'entre elles en essayant de les articuler.

3. Perspectives (C. Castela)

Le rôle de ce troisième temps est maintenant d'élargir la vision de la didactique des mathématiques que nous présentons dans cette conférence. Je vais le faire en donnant des coups de projecteur, nécessairement rapides vu le temps qui m'est imparti, sur certaines des orientations de la didactique des mathématiques française.

La didactique (dans la suite je sous-entendrai toujours qu'il s'agit de la didactique des mathématiques) est née comme la science des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage du savoir mathématique, son objet s'est aujourd'hui étendu à l'ensemble des phénomènes de diffusion de ce savoir. Elle est science fondamentale en ce sens qu'elle cherche à décrire et comprendre, science appliquée en ce sens qu'elle a comme visée de contribuer à améliorer le fonctionnement des systèmes étudiés.

La recherche didactique comme utilisatrice des savoirs mathématiques

Le premier point que je tiens à mettre en avant a déjà été bien illustré dans les deux interventions précédentes : dans les deux versants de son activité (comprendre et améliorer), la didactique utilise *des savoirs mathématiques* pour traiter des questions qui ne sont pas celles pour lesquelles les mathématiciens les ont élaborés ou les utilisent aujourd'hui.
A. Robert et M-J. Perrin l'ont clairement montré :

- Pour analyser les difficultés qu'ont les élèves dans l'utilisation des cas de similitude, elles se sont appuyées sur ce qu'elles savent elles-mêmes comme utilisatrices de ces théorèmes, sur des savoirs qui n'apparaissent pas dans les traités de mathématiques savantes et qui relèvent pourtant d'une expertise du praticien mathématicien.
- M-J. Perrin a évoqué la nécessité pour les enseignants du primaire de disposer d'une théorie des grandeurs adaptée à leur niveau de compétence mathématique et aux besoins de l'enseignement ; une reprise en l'état initial d'une ancienne théorie ne peut vraisemblablement pas suffire, est-ce une fonction de la recherche en mathématiques d'élaborer une telle théorie actualisée ? Je ne pense pas. Par contre et par définition, c'est une fonction de la recherche en didactique qui devrait donc idéalement dans ce cas associer chercheurs en didactique et chercheurs en mathématiques, ceux-ci acceptant de prendre provisoirement une posture didactique qui risque de ne guère contribuer à leur carrière.

Dans un tout autre contexte, la thèse d'A. Rossignol (1997) est un exemple analogue. Elle propose une nouvelle présentation des relations différentielles linéaires à coefficients constants, destinée d'abord à des élèves d'écoles d'ingénieurs, qui permet assez facilement aux étudiants d'établir, sans rien céder à la rigueur, les solutions d'une classe de problèmes englobant tous ceux qui sont habituels à ce niveau, dans ce domaine. Contrairement à ce qui est visé dans les mathématiques savantes qui recherchent toujours une validité maximale, il produit une théorie volontairement locale.

La didactique est donc un domaine d'activité qui utilise, voire produit des mathématiques non pas aux fins de faire progresser les mathématiques mais aux fins de faire progresser leur enseignement. En fait les exemples fourmillent, on pourrait dire que le mathématique est partout dense dans le didactique. Je ne développerai pas plus ce point de vue.

La dimension épistémologique de la recherche en didactique

Corrélativement à cette dimension mathématique, la didactique comporte une dimension épistémologique. Cette dimension est rendue incontournable par l'objet même de la didactique : elle s'intéresse à la diffusion des savoirs mathématiques, c'est-à-dire à ce qu'ils deviennent quand, produits par les mathématiciens, ils échappent au moins en partie à leur contrôle et circulent dans les différents mondes sociaux où ils sont utilisés. Ces circulations donnent lieu à des transformations des savoirs originels, ce qu'à la suite de Verret (1975), nous appelons des transpositions, transposition didactique quand l'utilisation en jeu est l'enseignement mais il existe également de multiples transpositions vers les usages par les autres sciences, par les professions, dans la vie quotidienne (Chevallard, 1994).

L'intérêt pour la transposition des savoirs mathématiques dans ces mondes non didactiques d'utilisation a été peu développé en France jusqu'à une période récente, ce qui n'est pas le cas d'autres pays comme la Grande-Bretagne ou l'Italie. Mais cet axe de recherche connaît maintenant un certain essor en France : l'école d'été de 2005 lui a consacré une partie de ses travaux, c'est un thème abordé au colloque de l'EMF (Espace mathématique Francophone) qui aura lieu à Dakar en 2009, et le présent colloque lui accorde une place importante.

Parce qu'elle prétend agir à l'interface entre producteurs et utilisateurs de mathématiques, la didactique se doit d'étudier ces phénomènes de transposition en prenant en compte dans ses analyses le point de vue de « l'orthodoxie mathématique contemporaine », celui de l'histoire des mathématiques ET celui des différents mondes d'utilisation. L'approche épistémologique des didacticiens est donc originale parce qu'elle ne se réfère pas au seul savoir savant : la confrontation avec des pratiques mathématiques professionnelles par exemple dépayse, elle permet de prendre conscience de certaines dimensions des pratiques savantes que l'habitude a rendues invisibles. Cette pratique est originale parce qu'elle est finalisée : il s'agit d'interroger la nature du savoir mathématique, à vrai dire plutôt des savoirs mathématiques, le savoir savant et ses transpositions, pour mieux les utiliser, en particulier pour mieux les enseigner.

Par exemple, Catherine Houdement et Alain Kuzniak (2000) ont développé une analyse des différentes formes et pratiques de la géométrie, en terme de paradigmes, qui permet d'analyser la différence des choix transpositifs effectués en France pour l'élémentaire et le secondaire, avec dans le premier cas, une géométrie des dessins instrumentés acceptant l'usage de certains de ces instruments pour la validation et dans le second cas, dès les premières années du collège, une géométrie d'objets abstraits modélisant les tracés aux instruments mais dont le seul mode de validation est la démonstration. Tout le monde ici est conscient de l'écart de la première de ces géométries à la seconde, au point qu'on pourra considérer la première comme non mathématique, ce qui se traduit en France par son éviction précoce (en tout cas jusqu'aux programmes actuellement en cours qui ont un peu changé les choses mais le contenu des nouveaux programmes du primaire laisse planer des doutes sur la pérennité de cet infléchissement). Les travaux développés par Houdement et Kuzniak permettent pour le moins d'exhiber le changement de paradigme entre école et collège, d'y faire réfléchir les professeurs et de concevoir un enseignement qui prenne en charge le passage de l'un à l'autre. Mais ils permettent également de prendre conscience du fait que le système français fait un choix entre plusieurs possibles puisqu'il rejette très tôt le premier paradigme. Pourtant, dans nombre de pratiques sociales, mesurer aux instruments, par exemple sur un plan à l'échelle, est une manière légitime d'obtenir des données nouvelles, avec dans certains cas, le besoin de contrôler les erreurs sur les mesures obtenues. C'est alors une géométrie de l'approché, de l'encadrement qui est attendue.

Pourquoi le système français privilégie-t-il une géométrie de l'exact, prohibant voire diabolisant le mesurage, ce qui la condamne à n'avoir que des rapports simulés ou évoqués au monde réel ? Cette question me servira de transition avec la troisième partie de mon intervention car on ne peut y répondre sans inscrire les phénomènes didactiques dans la société, puisque le choix français n'est pas général. Une recherche collaborative franco-chilienne menée dans le cadre de DIDIREM a par exemple montré que l'enseignement secondaire chilien a jusqu'en Première une position différente (Castela et *al*., 2006).

L'approche institutionnelle des phénomènes didactiques

Dans le cadre de ce point de vue rapide sur les travaux développés par la communauté française de recherches en didactique des mathématiques, il me paraît absolument essentiel d'insister sur la place qu'y occupe la prise en compte des aspects sociaux et institutionnels, ce notamment grâce aux outils développés par la Théorie Anthropologique du Didactique (pour un premier pas, voir Chevallard, 1992).

L'approche institutionnelle considère qu'en première instance les actions du professeur et des élèves sont déterminées par le réseau complexe des institutions de tailles très variables – l'établissement, le manuel, le collège, le système scolaire français, la société française (cela n'épuise pas la question) – dans lesquelles ces actions se déroulent. Ces institutions fournissent des ressources ET exercent des contraintes qui définissent un champ de possibles dans lequel les processus d'apprentissage et d'enseignement doivent ou ont tout intérêt à se situer. Les spécificités individuelles déterminent en deuxième instance la façon dont une personne se positionne relativement aux marges de manœuvre dont elle dispose. Certains travaux se consacrent uniquement à l'étude des déterminations institutionnelles. Ce n'est pas le cas de tous mais j'ai envie de dire que même dans le cas d'études cliniques comme celles qu'A. Robert a évoquées, une caractéristique de ce que je prendrai le risque de considérer comme un style français en didactique est de toujours prendre en compte la dimension institutionnelle dans les analyses avec, au cours de l'étude, des allers et retours entre les niveaux. Par exemple, il arrive que certains possibles prévus *a priori* n'apparaissent pas dans l'étude clinique ou n'y apparaissent qu'à la marge. On cherchera certes des interprétations au niveau des personnes mais on reviendra également à l'étude institutionnelle pour y repérer des déterminations négligées, pour la préciser en analysant de plus près les spécificités des institutions locales dans lesquelles agissent les personnes en jeu (par exemple, les caractéristiques de l'établissement particulier où travaille tel professeur – effet établissement mis en évidence au niveau générique par des travaux de sociologie de l'éducation mais que nous cherchons à spécifier dans le cas des mathématiques).

Cette approche a été introduite par Yves Chevallard pour lutter contre ce qu'il appelait les volontarismes pédagogiques. Il y a une écologie des systèmes didactiques déterminée par la chaîne des institutions concernées, une écologie qui fait que telle réforme décidée par une institution donnée n'est pas viable sans être accompagnée d'autres changements, souvent dans d'autres institutions. J'illustrerai ce propos par deux exemples.

Recherche et enseignement ordinaire

La communauté didactique française a découvert à ses dépens cette complexité : les séquences d'enseignement que nous expérimentions, je pense particulièrement aux travaux développés sous la direction de Guy Brousseau à l'école Michelet de Talence, ne diffusaient pas dans le monde enseignant ou n'y diffusaient qu'en perdant largement leur essence. Comprendre ce phénomène nous a conduits à une meilleure prise en compte des contraintes du métier d'enseignant, ce qui oriente les travaux dans différentes directions, qui peuvent adopter des points de vue assez opposés. À une extrémité d'un éventail qui comporte plus de deux possibilités bien entendu, le groupe de l'équipe DIDIREM qui se consacre au thème des pratiques enseignantes propose des changements de portée beaucoup plus modeste que les ingénieries initiales, espérant enclencher une spirale évolutive grâce à un tel premier pas (Robert et Rogalski, 2002). À l'opposé, les recherches qui se développent autour de la notion de PER (Parcours d'Étude et de Recherche) expérimentent des formes d'enseignement dont on peut estimer qu'elles représentent une vraie révolution culturelle mais en postulant que l'existence de marges de manœuvre pour les enseignants devrait permettre la diffusion de telles nouvelles pratiques (Chevallard, 2004 ; Équipe Ampères, 2007).

Par ailleurs, ces difficultés ont clairement fait apparaître la nécessité de concevoir une formation, initiale et continue, des enseignants qui les outillent mieux pour faire face dans des conditions supportables pour eux aux changements de pratiques dont nous continuons à penser qu'ils sont nécessaires.

Études comparatives inter-institutionnelles

Les déterminations institutionnelles touchent également le savoir enseigné, tant au niveau des contenus que des pratiques dont on vise l'apprentissage, comme nous l'avons vu avec la question des paradigmes géométriques. Les choix effectués dans un pays donné quant à l'enseignement des mathématiques résultent d'un processus soumis à de multiples contraintes émanant d'institutions spécifiques de ce pays. Ceci peut paraître une évidence. Pourtant, elle est ignorée du grand mouvement d'évaluation internationale qui se développe depuis quelques années avec des enquêtes comme PISA. Celles-ci s'appuient sur des outils dont l'élaboration est rien moins que transparente, et font des choix dont les déterminations et les références ne sont guère explicitées. Quelle conception des mathématiques, quelles visées de l'enseignement, ces enquêtes privilégient-elles de fait ? En quoi leur point de vue diffère-il du point de vue français ? Pourquoi ce choix français est-il ce qu'il est ? Que veut-on en changer ? Que peut-on en changer ? Moyennant quelles réformes touchant à quelles institutions ? Voilà toute une série de questions macro-didactiques auxquelles il serait raisonnable d'apporter au moins des éléments de réponses avant que d'engager les réformes qu'une simple lecture des classements nationaux semble inviter à mener d'urgence.

Deux axes de recherches primordiaux pour l'avenir

Pour finir, il me paraît important d'évoquer sans pouvoir développer mon propos deux directions spécifiques des recherches actuelles.

L'enseignement dans les secteurs défavorisés

Certains travaux, en liaison avec le réseau RESEIDA (Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages, Université Paris 8) commencent à s'intéresser à la contribution de l'enseignement des mathématiques aux processus de reproduction sociale, à la transformation des différences construites en dehors de l'école en hiérarchie scolaire. Les recherches de Perrin-Glorian (1993), puis Butlen et Pézard (2003) sur les élèves en grande difficulté ont été des précurseurs dans cette perspective. L'arrière-plan sociologique n'y était pas nécessairement explicite, mais leurs résultats sont entrés en résonance avec d'autres travaux de Sciences de l'éducation, notamment ceux qui sont développés par l'équipe ESCOL (Éducation et Scolarisation), je pense par exemple aux études consacrées par Bautier, Rochex et Charlot (1992) au rapport au savoir des enfants d'origine populaire. La centration sur les élèves a été mise en sommeil pendant quelques années pour focaliser le regard sur l'enseignant dans le contexte des ZEP (Zones d'Éducation Prioritaire). Mais actuellement, de nouvelles recherches reviennent sur le point de vue des élèves. Certaines s'intéressant par exemple aux conséquences différenciatrices des implicites de l'enseignement des mathématiques, ces apprentissages qu'il faut réaliser pour réussir et qui sont laissés à la charge des élèves, ce qui fait du travail personnel un objet auquel des recherches s'intéressent.

L'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques

Enfin, il n'est pas possible de ne pas mettre en avant le domaine des recherches portant sur l'utilisation des nouvelles technologies auquel est consacrée une partie de ce colloque.

Concernant l'emploi des logiciels et des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques, de nombreux travaux ont été réalisés. L'intégration des logiciels de géométrie dynamique a été et reste un objet particulièrement étudié, notamment à Grenoble, université dont sont issus les chercheurs qui ont créé le logiciel Cabri. Il me paraît intéressant de souligner que Cabri est né d'une collaboration étroite entre didacticiens et informaticiens, c'est aujourd'hui le cas pour des logiciels concernant l'enseignement de l'algèbre (voir l'atelier de Brigitte Grugeon). L'équipe DIDIREM a contribué de façon substantielle, et souvent en collaboration avec des chercheurs d'autres équipes, aux recherches dans ce domaine, avec notamment les travaux pionniers de Michèle Artigue, Jean-Baptiste Lagrange et Luc Trouche sur l'introduction du calcul formel et l'approche instrumentale. Ces travaux se sont étendus à d'autres technologies : tableurs, ressources en ligne et base d'exercices.

Ces recherches ont montré que, comme toujours, les choses étaient plus complexes que ce qu'on avait prévu, ces artefacts devant être l'objet d'un processus d'appropriation par les élèves pour leur utilisation mathématique et par les professeurs pour leur intégration dans l'enseignement.

Beaucoup plus récemment, des recherches ont commencé à s'intéresser à l'emploi des nouvelles sources d'information (Internet, Espace Numérique de travail) (voir, pour ce qui concerne les enseignants, les travaux de Georget (2006) et Emprin (2007) au sein de DIDIREM, ainsi que le travail de Gueudet, Soury-Lavergne et Trouche présenté dans ce colloque mais aussi Chevallard, 2004). Celles-ci changent radicalement la question des modalités de diffusion et d'apprentissage des savoirs. La formation à ce nouveau genre de pratiques d'étude est peut-être bien LA question didactique majeure, toutes disciplines confondues qu'il faudra affronter dans l'avenir. C'est en la pointant comme telle que je terminerai ce tour d'horizon en rappelant le caractère incomplet et subjectif de l'exercice auquel je me suis livrée.

4. En guise de conclusion

Nous avons choisi de préférer à une présentation plus complète, une incursion précise dans le champ de la didactique des mathématiques à travers quelques exemples détaillés.

Pour continuer, il faudrait développer l'exploration des travaux consacrés aux thèmes évoqués, aborder des axes de recherche non choisis dans cette conférence, et ce tout à la fois au niveau français et au niveau international. D'autres théories seraient convoquées, qui peuvent rencontrer partiellement celles que nous avons illustrées, d'autres domaines seraient investis, conceptions de situations de recherche pour les élèves, multiculturalisme, aspects sémiotiques, etc.

Nous espérons que notre introduction à la didactique des mathématiques à partir de quelques problématiques abordées dans l'équipe DIDIREM donnera envie au lecteur de se plonger plus avant dans tous ces travaux !

Aline Robert
Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz
aline.robert@math.uvsq.fr

Marie-Jeanne Perrin
Université d'Artois, Laboratoire de didactique André Revuz
glorian@math.jussieu.fr

Corine Castela
Université de Rouen, Laboratoire de didactique André Revuz
corine.castela@univ-rouen.fr

Références

Bautier E., Charlot B. et Rochex J-Y. (1992). *École et savoir dans les banlieues… et ailleurs*. Collection Formation des enseignants. Paris : Armand Colin.

Blanchard-Laville C., Nadot S. (2000). *Malaise dans la formation des enseignants*. L'Harmattan, Paris.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (2005). Recherches en éducation mathématique. *Bulletin de l'APMEP*, n°457, 213-224.

Butlen D. et Pézard M. (2003). Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23 (3), 41-78.

Castela C. (2006). Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de Première Scientifique. In *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques Année 2006*, 33-77. Paris : IREM Paris 7.

Castela C., Consigliere L., Guzman I., Houdement C., Kuzniak A., Rauscher J.C. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français. *Cahier de DIDIREM* Spécial n°6, IREM Paris 7.

Chambris C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématique* 12(1), 73-112.

Chevallard Y. (1994). Les processus de transposition didactique. In Arsac, Gréa, Grenier et Thiberghien (Eds), *La transposition didactique à l'épreuve,* 135-180. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In Actes de l'université Animath *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire,* APMEP (Ed), brochure 168.

Cirade G. (2008). Les angles alternes-internes : un problème de la profession. *Petit x 76,* 5-26.

Douady R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* vol 7 n°2, 5-31.

Douady R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères-IREM,* 15, 37-61.

Dumail A. (2007). La racine carrée en troisième, des enseignements aux apprentissages. *Cahier de DIDIREM* n°57, IREM Paris7-Denis Diderot.

Emprin F. (2007). *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*. Thèse, université Paris 7.

Équipe AMPERES (2007). La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques. In Gueudet et Matheron (Eds) *Actes du séminaire National de didactique des mathématiques, Année 2007*, pp. 33-77, IREM Paris 7, Paris.

Felix C. (2004). Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale*, 33, 89-100.

Georget J-P. (2006). Favoriser la pratique des activités de recherche dans les classes de cycle 3 de l'enseignement primaire : communauté de pratique, pratiques d'enseignants et échanges autour de ces pratiques. In *Actes du colloque EMF 2006*, Sherbrooke.

Grugeon B. (2000). L'algèbre au lycée et au collège. Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. In Grugeon, Guichard, Capponi, Janvier, Delgoulet (Eds) (2000) *L'algèbre au lycée et au collège. Actes des journées de formation de formateurs, pp. 5-39*. Boisseron, IREM de Montpellier.

Hache C. (2008). Le cas des manuels dans l'enseignement des mathématiques, in Vandebrouck F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants*, Toulouse : Octarès éditions.

Hersant M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*

Hersant M., & Perrin-Glorian M.J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 113-151.

Horoks J. (2006). *Les triangles semblables en classe de seconde: des enseignements aux apprentissages – Étude de cas*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Horoks J. (2008), Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en didactique des mathématiques,* 28/3, 379-416.

Houdement C., Kuzniak A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20(1), 89-115.

Lenfant A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher's understanding of fundamental mathematics in China and in the U.S*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Peltier M. (Ed.) (2004). *Dur, dur d'enseigner en ZEP*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Perrin-Glorian M-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les « classes faibles ». *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13 (1-2), 95-118.

Perrin-Glorian M.J., & Hersant M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques 23/2,* 217-276.

Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* 18/2, 139-190.

Robert A., Rogalski M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x,* 60, 6-25.

Rossignol A. (1997). *Proposition pour une nouvelle approche des relations différentielles linéaires à coefficients constants*. Thèse. Université Toulouse 3.

Sadovsky P. et Sessa C. (2005). The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a *milieu* for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 85-112.

Salin M.H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants. In Lemoyne, G. & Conne, F. (Eds) *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 327-352. Les Presses de l'Université de Montréal.

Salin M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP,* 478, 647-670.

Sensevy G., & Mercier A. (Eds) (2007). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Vandebrouck F. (Ed.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès éditions.

Verret M. (1975). *Le temps des études*. Paris : Librairie Honoré Champion.

Thème : Enseignement des mathématiques au début de l'enseignement supérieur

Présentation du thème

Sur le fond d'une interrogation partagée dans beaucoup de pays, concernant la baisse du nombre d'étudiants en mathématiques et la modification de leurs connaissances quand ils arrivent à l'université, nous aborderons les questions suivantes et illustrerons comment cela peut avoir des conséquences dans le débat :

- Quelles sont les spécificités des contenus mathématiques dans l'enseignement supérieur et dans la transition secondaire/supérieur ? Quelles sont les conséquences pour les enseignements ?
- La didactique des mathématiques a été principalement développée dans le contexte de l'enseignement primaire et secondaire. Quelles sont les perspectives pour une didactique des mathématiques dans l'enseignement supérieur ?
- Interactions entre recherche et enseignement des mathématiques à l'université : une réalité pour les enseignants ? et pour les étudiants ?
- Utilisation des TIC à l'université : aides ou réductions pour les étudiants ? Conséquences pour l'enseignement et pour l'apprentissage possible et réalisé ?
- Les mathématiques comme élément des formations professionnelles : interactions, continuités et ruptures, par exemple dans la formation des ingénieurs.

Contributions

Autour de l'enseignement des intégrales 39
Marc Rogalski et Jean-Luc Dorier

Recherche et enseignement universitaire en mathématiques, interactions actuelles et possibles 59
Carl Winsløw

Enseigner les mathématiques avec WIMS à l'université 69
Fabrice Vandebrouck, Bernadette Perrin-Riou et Marie-Claude David

La modélisation de situations réelles et l'utilisation de la théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires 83
María Trigueros Gaisman

Les mathématiques dans la formation des ingénieurs 103
Avenilde Romo-Vázquez et Safouana Tabiou

Atelier : autour de l'enseignement de l'intégrale

Jean-Luc Dorier et Marc Rogalski

Résumé

Ce texte propose la synthèse de la réflexion sur l'enseignement de la notion d'intégrale menée dans l'atelier autour de deux questions : d'une part les rapports entre intégrales et mesures des grandeurs, d'autre part l'enseignement de l'intégrale au lycée. Sur le premier point la mesure des grandeurs a été envisagée comme thème pouvant donner lieu à une ou des situations fondamentales pour la construction de l'intégrale. À partir d'un exemple, une première décontextualisation a été opérée en termes de mesure des grandeurs, en faisant apparaître la « procédure intégrale », puis la « procédure de l'accroissement différentiel », avant une deuxième décontextualisation en termes de théories mathématiques de l'intégration (plusieurs étant possibles). La deuxième partie s'appuie sur le travail de doctorat de Tran Luong (2006) et plus particulièrement sur une synthèse succincte de l'analyse de l'enseignement de l'intégrale au lycée de 1970 à nos jours et sur un questionnaire passé par des enseignants.

I. Introduction

La présentation de l'atelier dans l'annonce du colloque était la suivante :

> L'atelier aura pour objectif de réfléchir sur certaines des questions suivantes :
>
> 1. Quels changements dans l'étude de l'intégrale au passage terminale-université ? Comment articuler les deux concepts de primitive et d'intégrale ? Quelle place pour les sommes de Riemann, celles de Darboux ?
> 2. Quelles relations entre aire et intégrale simple (en L1) ou intégrale double (L2) ? Les notions d'aire et volume sont-elles à étudier à l'université ? Quand ? Dans quel contexte (ensembles quarrables, cubables, ou Lebesgue-intégrables…) ?
> 3. Quelles relations entre l'intégrale en mathématiques et l'intégrale en physique ? Quels rapports avec la mesure des grandeurs géométriques et physiques ?
> 4. Quelle place pour l'histoire de l'intégrale (Archimède, Cavalieri, des problèmes de géométrie à des problèmes sur des fonctions, …) ?
> 5. Quelle est la nature épistémologique du concept d'intégrale ?
> 6. Des questions plus pointues sur le sens et l'usage du "dx", la capacité à calculer des aires concrètes…
>
> Dans une première partie, les participants étudieront des situations mettant en jeu l'intégrale, où certaines de ces questions interviendront.
> Dans une deuxième partie, on fera le point sur quelques pistes de réflexion sur les questions ainsi soulevées, et peut-être sur d'autres.

Présentation des choix retenus pour l'atelier

Bien entendu il était hors de question, en deux heures, d'aborder toutes ces questions. Nous nous sommes donc centrés sur deux questions, les points 3 et 6.

(1) La première partie a porté sur les rapports entre l'intégrale et la mesure des grandeurs, comme thème pouvant donner lieu à une ou des situations fondamentales pour la construction de l'intégrale. Le choix étant fait, sur ce point, de faire d'abord travailler les participants sur la situation de Denise Grenier, Marc Legrand et Françoise Richard (Grenier, Legrand & Richard, 1986, Legrand 1990), puis d'opérer une première décontextualisation en termes de mesure des grandeurs, en faisant apparaître la « procédure intégrale », puis la « procédure de

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 39-58.

l'accroissement différentiel », et de terminer par une deuxième décontextualisation en termes de théories mathématiques de l'intégration (plusieurs étant possibles).

(2) Cette partie de l'atelier est basée sur le travail de doctorat de Tran Luong (2006)[1]. Dans un premier temps, nous présentons une synthèse succincte de l'analyse de l'enseignement de l'intégrale au lycée de 1970 à nos jours. Dans un deuxième temps, nous présentons un questionnaire passé par des enseignants sur lequel les participants de l'atelier ont été amenés à travailler, ainsi qu'une brève analyse des réponses des enseignants français dans le cadre de la thèse.

II. Intégrale et mesure des grandeurs

II.1. Présentation de la situation

Nous avons démarré l'atelier en présentant, dans le transparent ci-dessous, le thème de travail des participants pour le point (1).

Atelier sur l'intégrale

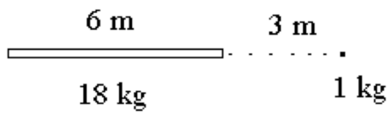
Le problème suivant est posé à des étudiants de L1 qui n'ont pas encore vu le cours sur l'intégration :

On rappelle la loi de l'attraction universelle : "deux masses ponctuelles m et m' à une distance r s'attirent avec une force d'intensité

$$F = G\, mm'/r^2 ,$$

où G est la constante de l'attraction universelle.

Avec quelle force un mince barreau rectiligne de 6 m de longueur et dont la masse est 18 kg attire-t-il une masse ponctuelle de 1 kg située dans son prolongement à 3 m de l'une de ses extrémités ?



On se propose d'analyser cette situation.

* Prévoir ce que vont faire spontanément beaucoup d'étudiants.

* Quelles réactions du milieu constitué de l'ensemble des étudiants et de l'enseignant peuvent permettre une remise en cause du principe mis ainsi en œuvre spontanément ?

* Quels développements de la situation peuvent mener vers une « procédure intégrale » alors d'abord outil de résolution ?

* Peut-on imaginer une autre procédure, de nature différentielle ?

Que donnerait la confrontation des deux ?

* Quelle institutionnalisation ?

Les participants ont travaillé quelque temps sur cette situation (sans avoir le temps d'aborder toutes les questions posées), puis on a proposé une synthèse, que nous résumons ci-dessous, renvoyant pour plus de détails à (Rogalski *et al.*, 2001) et (Rogalski, 2009).

II.2. Synthèse par la procédure intégrale

La physique semble pouvoir fournir beaucoup de situations d'introduction à l'intégrale par la mesure des grandeurs, mais l'exigence que les étudiants puissent avec leurs moyens proposer des solutions, et que la situation leur renvoie des réponses, risque d'en limiter le choix. Celle

[1] Thèse en co-tutelle réalisé sous les directions conjointes d'Annie Bessot et de Jean-Luc Dorier, pour la France et Tien Le Van pour le Viêt Nam. Toute la partie de cette thèse qui concerne le Viêt Nam et la comparaison entre les deux pays a été laissée de côté dans cet atelier, qui ne rend compte que d'une petite part du travail.

proposée par Grenier, Legrand et Richard semble pour l'instant la meilleure, c'est pourquoi nous l'avons choisie.

Les étudiants ne peuvent démarrer une solution au problème posé qu'en réinvestissant une connaissance qui a déjà marché en physique : on concentre la masse du barreau en son centre de gravité. On peut prévoir de déstabiliser cette approche en faisant pivoter le barreau de 90 degrés, mais en général ce n'est pas nécessaire : la proposition de recommencer la procédure du centre de gravité avec chaque moitié du barreau et de sommer surgit naturellement… et elle donne un résultat différent. Elle apparaît donc trop grossière, et la proposition de découper en 4, 8, 16… suit alors, et donne des résultats tous différents mais ordonnés. L'idée de convergence des résultats s'impose alors, ainsi que l'idée de majorations et minorations (éventuellement avec intervention de l'enseignant), en concentrant toute la masse de chacun des morceaux de la barre à une de ses extrémités.

On peut ensuite renforcer la prise de conscience d'une « procédure intégrale » : découper, encadrer, sommer, « passer à la limite », en utilisant d'autres exemples de mesure de grandeurs géométriques ou physiques : voir Grenier, Legrand & Richard (1986) et Rogalski *et al.* (2001). Citons pêle-mêle : le calcul d'une consommation électrique, le calcul du moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à son axe, la force exercée par l'eau sur un barrage, le volume de divers solides, le rendement d'un dispositif hydraulique, le calcul d'une énergie cinétique…

II.2.a. Décontextualisation par la mesure des grandeurs

Une première décontextualisation de la « procédure intégrale » travaillée initialement sur quelques exemples peut être présentée comme suit, via *la mesure des grandeurs-produits en physique*.

Les formules usuelles suivantes sont valables quand les premiers facteurs sont constants ou ponctuels :

> densité constante × volume = masse ;
> hauteur constante × longueur de la base = aire ;
> hauteur constante × aire de la base = volume ;
> vitesse constante × temps = distance parcourue ;
> force constante × déplacement (colinéaire) = travail ;
> pression constante × surface = force ;
> (distance constante à un axe)^2 × masse ponctuelle = moment d'inertie ;
> (inverse de la distance constante)^2 × produit des masses ponctuelles = attraction.

Certaines de ces formules, en fait, définissent une grandeur physique « produit » à partir d'autres lorsque les premiers facteurs sont constants. D'autres cherchent à calculer de telles grandeurs « produit » à partir d'une formule d'une théorie physique.

Généralisons maintenant ces situations. Les deuxièmes facteurs sont associés à des « domaines » Ω sur lesquels sont définis les premiers facteurs, *supposés maintenant être des fonctions f non constantes* : densité ou pression en un point d'un volume Ω, hauteur au-dessus d'un point de la base Ω, pression en un point d'une surface Ω, distance d'un point de Ω à l'axe, etc … De plus on peut définir la « mesure » m(A) d'une partie A de Ω, ou du moins d'une classe de parties de Ω : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de Ω.

On se propose donc de savoir à quelles conditions on peut mesurer, ou même définir une grandeur I(Ω, f) ou $\int_\Omega f\,dm$ *attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω et la fonction f définie sur ce domaine.*

Les conditions raisonnables pour parler de la grandeur cherchée sont les 3 principes qui suivent, issus de considérations physiques ; le premier renvoie à la définition du type de grandeur étudiée, les deux autres en sont des propriétés, dont le sens est immédiat sur les exemples cités :

(**1**) *si f est constante* (f = C), I(Ω, f) = C × mesure(Ω) [les formules ci-dessus !] ;

(**2**) *l'additivité par rapport au domaine* (une « relation de Chasles ») : si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de mesure nulle (par exemple vide), alors I(Ω, f) = I(Ω_1, f) + I(Ω_2, f) ;

(**3**) la croissance : si $f \leq g$, I(Ω, f) ≤ I(Ω, g).

Chaque fois qu'on a à calculer une grandeur de la forme I(Ω, f) vérifiant les principes (1), (2), (3), on procédera de la façon suivante, comme on l'a fait avec le barreau :

* on découpe l'ensemble Ω en « petits » morceaux Ω_i ;

* on encadre la fonction f entre mi et Mi sur Ω_i (ses bornes inférieures et supérieures) ;

* par sommation, on peut encadrer I(Ω, f) par des « sommes inférieures » et « supérieures » :

$$\Sigma\, m_i\, mesure(\Omega_i) \text{ et } \Sigma\, M_i\, mesure(\Omega_i)\ ;$$

* enfin, on essaie de passer à la limite en prenant des Ω_i de plus en plus petits.

La procédure intégrale est donc formée de ces 4 étapes :

Découpage, encadrement, sommation, passage à la limite

Cette procédure amène ainsi à encadrer *I(Ω, f)* entre $\sum m_i\, mesure(\Omega_i)$ et $\sum M_i\, mesure(\Omega_i)$, avec des Ω_i disjoints (ou ne se coupant que selon des ensembles de mesure nulle).

II.2.b. Décontextualisation mathématique

On obtient ainsi ce qu'on appelle *l'intégrale des fonctions étagées* $\sum \lambda_i$ indicatrice(Ω_i), et on souhaite passer à la limite pour obtenir l'intégrale d'autres fonctions, par exemple de fonctions continues … si cela marche ! Mathématiquement, il faut préciser un peu plus la nature des ensembles Ωi et la nature de leur mesure, d'une part, et quel type de limite on souhaite prendre, de l'autre.

En se bornant au cas Ω = [a, b], seul envisageable en première année d'université, on a deux choix "raisonnables" pour chacune de ces deux questions :

(**a1**) les Ωi sont des intervalles, et leur mesure est leur longueur ;

(**a2**) les Ωi sont les éléments d'une tribu, avec pour mesure la mesure de Lebesgue ;

(**b1**) l'approximation se fait en approchant uniformément f par des fonctions étagées (on prend une condition de Cauchy pour la norme uniforme, en supposant f bornée) ;

(**b2**) l'approximation se fait directement au moyen de l'intégrale (la condition de Cauchy dit que l'intégrale d'une certaine fonction étagée doit être petite).

En recoupant ces deux choix, et en abandonnant la condition d'encadrement, qui n'est plus utile (comme l'a bien montré le grand témoin[2]), dans le premier et le quatrième cas, on trouve 4 théories classiques de l'intégration :

(**a1b1**) : l'intégrale des fonctions réglées ;

(**a1b2**) : l'intégrale de Darboux des fonctions bornées Darboux-intégrables (c'est aussi l'intégrale de Riemann) ;

(**a2b1**) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables bornées (c'est la définition initiale de Lebesgue) ;

(**a2b2**) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions Lebesgue-intégrables.

Nous n'allons pas les développer ici, l'important est que la procédure intégrale développée colle d'une part avec la mesure des grandeurs en physique, et de l'autre fournisse une formulation mathématique polysémique, apte à rendre compte de plusieurs théories mathématiques de l'intégrale, celle de la première année (essentiellement l'intégrale de Darboux) et celle de Lebesgue pour la suite des études.

[2] Il s'agit d'André Bellaïche, maître de conférences à l'université Paris Diderot.

Nous proposons maintenant un autre type de synthèse, qui s'appuierait sur une autre manière de faire évoluer la situation du barreau.

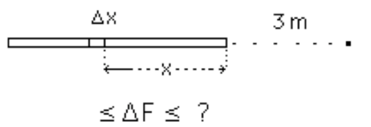
II. 3. Synthèse par la procédure de l'accroissement différentiel

L'enjeu est ici de motiver le lien intégrale-primitive, via la procédure de l'accroissement différentiel pour mesurer des grandeurs

Si on reprend le problème du barreau, et qu'on calcule ce que donne la méthode pour un découpage en n parties égales, on fait deux constats. D'une part, la différence entre la somme de Darboux majorante et la somme de Darboux minorante, facile à calculer, vaut $16G/9n$ et tend bien vers 0 quand $n\to\infty$, ce qui laisse bien augurer de l'existence d'une « limite » entre les sommes majorantes et les minorantes, c'est-à-dire l'existence de la mesure cherchée pour la force : l'intégrale.

D'autre part l'expression de l'une ou l'autre de ces sommes ne permet absolument pas de trouver la limite : on trouve par exemple pour la minoration et la majoration les expressions suivantes : $s_n = 2n\ G \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^2}$ et $S_n = 2n\ G \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n+2k)^2}$, dont les limites quand n tend vers l'infini n'ont rien d'évident *a priori*.

C'est l'occasion de proposer la « procédure de l'accroissement différentiel » : appelant $F(x)$ la contribution de la masse de la portion de la barre entre les points d'abscisses 0 et x, on évalue l'accroissement ΔF quand on passe de x à $x + \Delta x$. On l'encadre comme dans la procédure intégrale, et on trouve que $\Delta F/\Delta x$ a pour limite $3G/(x+3)^2$. On obtient ainsi $F'(x)$, et la détermination de $F(6)$ se fait à l'aide d'une primitive simple. On obtient ainsi une valeur numérique, qui bien sûr va être égale aux limites des quantités s_n et S_n.



La décontextualisation présente alors deux faces. D'une part on peut multiplier les exemples de mesure de grandeur en physique ou géométrie qui peuvent s'effectuer par cette procédure (moment d'inertie d'un cylindre, force de l'eau sur un barrage plan, volume d'un solide de révolution, etc.). De l'autre, dégager le théorème mathématique sous-jacent : la dérivée de l'intégrale d'une fonction continue considérée comme fonction de sa borne supérieure est la fonction elle-même.

II.4. Conclusion

En définitive, cette approche fournit de bonnes situations fondamentales, des situations de référence, et permet d'associer aux concepts à enseigner (intégrales et primitives) des images et des sens à la fois contextualisés et suffisamment généraux pour être réinvestis en physique comme en mathématiques. Pour plus de détails et d'exemples, voir (Rogalski *et al.*, 2001) et (Rogalski, 2009).

III. Enseignement de l'intégrale au lycée

III.1. Évolution de l'enseignement depuis les mathématiques modernes

L'analyse dont il est brièvement fait état ici porte sur l'évolution de l'enseignement de l'intégrale en classe de terminale scientifique (fin du secondaire, 18 ans) depuis 1970 en France. Nous distinguons trois grandes périodes :

1. Mathématiques modernes (1970-1980)
2. Contre-réforme (1980-2002)
3. Période actuelle (après 2002).

Nous donnons en annexe 1 un tableau synthétisant les éléments essentiels des organisations mathématiques à l'œuvre durant les 3 périodes.

Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur la définition de l'intégrale et les méthodes d'intégration, le calcul de primitives, en particulier l'usage des signes $\int$ et dx, le calcul d'aire, et enfin les liens explicites dans ces programmes entre les 3 notions d'intégrale, de primitive et d'aires.

Durant les trois périodes considérées, la définition de l'intégrale évolue. Dans la première période (1970-1980), l'intégrale est définie par la limite commune de sommes de Riemann ou par les fonctions en escalier. Ainsi, l'étude de l'existence d'une intégrale peut être demandée au baccalauréat. Cependant, cette étude se restreint à la vérification de la continuité de la fonction à intégrer sur l'intervalle d'intégration.

Dans la deuxième période (1980 – 2002), l'intégrale est définie par la formule de Newton - Leibniz ($\int_a^b f(t) = F(b)$-$F(a)$), évitant ainsi toute étude de l'intégrabilité.

Dans la troisième et dernière période (2002-2006), l'intervention parallèle de l'aire sous la courbe et des suites adjacentes dans la définition de l'intégrale apporte une double approche : l'intégrale (d'une fonction continue positive) est à la fois l'aire sous une courbe et la limite commune de deux suites adjacentes (qui ne sont pas très bien précisées). L'intégrabilité réapparaît, mais sa trace est infime et limitée à une allusion dans le cours.

Ainsi dans les trois périodes, l'étude de l'intégrabilité et donc la problématique du calcul des grandeurs sont éludées, c'est pourtant elles qui fondent le thème de l'intégration au sein de l'analyse. L'enseignement privilégie le calcul de primitives et celui d'intégrales en le coupant de sa raison d'être.

Malgré les différences, durant les trois périodes seules les techniques de primitivation ou anti dérivation, c'est-à-dire de reconnaissance directe d'une dérivée connue (répertoriée) et d'intégration par parties sont étudiées. Le changement de variables n'est quasiment jamais abordé.

À la lumière de l'approche anthropologique de Chevallard, nous avons également examiné l'usage des signes ou ostensifs $\int$ et dx dans l'enseignement de l'intégrale et des primitives (cf. Tran Luong, Bessot & Dorier, à paraître). Cette question est importante pour comprendre la nature des tâches et des techniques à l'œuvre dans cet enseignement.

En effet, la modélisation du savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelations entre objets pose « le problème de la 'nature' des objets mathématiques et celui de leur 'fonction' dans l'activité mathématique » (Bosch et Chevallard 1999).

> Un « objet ostensif –du latin ostendre, 'montrer, présenter avec insistance'– pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. » (Op. cité, p. 90)

Dans les usages humains, les objets ostensifs se distinguent des objets non ostensifs par le fait qu'ils peuvent être concrètement manipulés.

> « [...] la mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs (Ibid., 92)

La valence instrumentale d'un ostensif (ou l'instrumentalité d'un ostensif) est son fonctionnement comme instrument permettant d'accomplir une tâche.

> [...] un objet ostensif y est considéré d'abord comme un instrument possible de l'activité humaine, c'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer

> des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail. (Ibid, 107)

La valence sémiotique d'un ostensif (ou la sémioticité d'un ostensif) est son fonctionnement comme signe.

Pour ce qui concerne le calcul des primitives, dans la période des mathématiques modernes, les deux notations $\int f(x)dx$ (1) et $\int_a^x f(t)dt$ + C (2) sont utilisées. (1) permet de présenter l'intégration par parties comme une méthode de calcul d'une intégrale indéfinie et (2) comme technique pour le calcul de primitives (2).

De plus, (1) permet de faire vivre une technique, que l'on peut qualifier de changement de variable implicite, justifiée par l'élément technologique

$$\int g(x)dx = G(x) \Rightarrow \int g(u(x))u'(x)dx = G(u(x))$$

alors que (2) ne permet qu'une technique de primitivation.

Depuis 1980, l'absence de l'ostensif $\int$ pour noter les primitives limite le calcul de primitives à la seule technique de primitivation, non seulement plus rien n'est possible en lien avec le changement de variables, mais il est aussi impossible techniquement d'utiliser l'intégration par parties comme méthode de calcul de primitive.

La valence instrumentale de l'ostensif dx, en lien avec le changement de variables par la formule $du = u'(x)dx$, n'existe pas. La valence sémiotique qui fait référence au calcul infinitésimal ou différentiel est très peu présente. Ainsi le dx, n'a pour seule fonction que de rappeler la variable d'intégration.

Le calcul d'aire est présent dans les trois périodes et occupe une place importante. Les surfaces en jeu sont quasiment toujours représentées explicitement par une notation du genre $\{M(x,y)/\ a \leq x \leq b \text{ et } f(x) \leq y \leq g(x)\}$, ce qui évite la mise en jeu de connaissances sur la représentation analytique ou l'ordre et des ambiguïté de formulation liée à des expressions du genre « calculer l'aire comprise entre les courbes… et les axes… », au détriment cependant d'une réelle réflexion des élèves.

À toutes les périodes également des liens sont faits entre les trois pôles intégrale, primitive et aire. Cependant, comme le souligne Daniel Perrin (2005), le lien entre primitive et aire est mal problématisé.

> Dans tous ces programmes (après 1980), l'intégrale $\int_a^b f(t)$ est définie comme la différence $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. L'existence d'une telle primitive est admise pour une fonction f continue (en 1997, le mot continu ayant disparu, seules les fonctions dérivables ont une primitive !)
> Du côté des aires, voici ce que dit le programme 1997 :
> Définition de $\int_a^b f(t)$ à partir d'une primitive F.
> Dans le cas d'une fonction positive, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.
> L'interprétation en question n'est pas évidente, sauf à refaire le chemin en sens inverse (partir de l'aire et montrer que l'aire sous la courbe est une primitive).
> […] Je suis en désaccord avec cette façon de faire, essentiellement parce que l'introduction par les primitives est parachutée et déconnectée de la notion d'aire ! (Perrin 2005, 3-4)

Ainsi, avec quelques nuances, mais à toutes les périodes les liens entre aire et intégrale sont faits : l'intégrale est un outil pour le calcul d'aire et une interprétation géométrique peut permettre de calculer certaines intégrales.

De même que les liens entre intégrale et primitive, dans le sens que les primitives servent à calculer des intégrales grâce à la formule de Newton-Leibniz et l'intégrale sert à trouver des primitives par la notion d'intégrale dépendant de la borne supérieure.

Mais jamais le lien direct entre aire et primitive n'est exploité. Or, le fait que, d'une part, les aires sont atteignables par les intégrales et que, d'autre part, le calcul des intégrales est possible grâce aux primitives entraîne que les primitives sont le moyen de calculer les aires. Or, en général, on justifie les choses à l'envers dans une courte introduction, qu'on oublie très vite. Nous laissons la parole à Perrin pour conclure :

> Le programme 2002 a le mérite essentiel de remettre la notion d'aire au cœur de la notion d'intégrale. Je suis d'accord avec son point de départ et je m'en félicite. Mais je trouve qu'il est rédigé en dépit du bon sens, au moins sur deux points.
> D'abord, ce programme a voulu se démarquer du programme précédent qui définissait l'intégrale comme différence de deux valeurs d'une primitive et c'était justifié à mon avis. Mais comme c'est souvent le cas, la réaction a été trop brutale et la notion de primitive a été indûment rejetée à la fin.
> Ensuite, on a vraiment l'impression en lisant ce programme, que les auteurs du programme sont en permanence le cul entre deux chaises, partagés qu'ils sont entre des soucis contradictoires :
> • l'idée que sans les "sommes de Riemann" il n'est pas de théorie rigoureuse de l'intégrale,
> • la crainte (justifiée) que cette théorie soit trop difficile pour des élèves de terminale.
> Le résultat est un programme mal où l'on ne démontre rien, où le lien primitive-intégrale arrive trop tard et où l'aspect numérique est absent. (Ibid., 8).

III.2. Analyse d'un questionnaire enseignant

Afin d'avoir une idée de la façon dont les enseignants de terminale préparent leur cours sur les intégrales et font leur choix de présentation dans les contraintes du programme, nous avons conçu un questionnaire qui a été proposé à des enseignants vietnamiens et français. Nous nous intéressons ici seulement aux réponses des 14 enseignants français de terminale S obtenues entre 2003 et 2005.

Durant l'atelier, le questionnaire a été soumis aux participants qui ont pu le commenter, question par question. Nous avons ensuite présenté les résultats obtenus dans le travail de thèse. Bien sûr, le peu de réponses obtenues en France ne permet pas de tirer de grandes généralités ou de faire un traitement statistique, il permet toutefois d'attester de tendances ou de variabilités.

Le questionnaire est reproduit dans son entier en annexe 2, dans une version toutefois compacte, la version que les enseignants ont reçue étant plus aérée pour permettre les réponses. Nous renvoyons à la thèse (Tran Luong, 2006) pour des résultats détaillés et donnons ci-dessous une analyse succincte.

Dans une première question on demandait aux enseignants de dire les liens qu'ils faisaient en cours entre aire et intégrale, intégrale et primitive et enfin aire et primitive. Le tableau suivant rend compte des réponses obtenues.

Aire ⇆ Intégrale	• Le calcul de l'aire (sous la courbe) mène à la définition de l'intégrale (*3 réponses*) • L'intégrale d'une fonction continue positive est une aire (*9 réponses*) • L'intégrale sert à calculer l'aire (sous la courbe) (*10 réponses dont 9 communes avec la précédente*) • L'aire sert à interpréter géométriquement l'intégrale (*1 réponse commune avec 1*).
Intégrale ⇆ primitive	• Sur un intervalle fermé, borné, la connaissance d'une primitive d'une fonction permet de calculer son intégrale à travers la formule de Newton - Leibniz (*9 réponses*) • L'intégrale (dépendant de la borne supérieure) permet de calculer la primitive d'une fonction s'annulant en un point donné. (*6 réponses dont 2 communes*)
Aire ⇆ primitive	• L'aire variable sous la courbe est une primitive de la fonction en question (*1 réponse*) • L'aire et la primitive sont indirectement liées par l'intermédiaire de l'intégrale (*10 réponses*)

On retrouve donc ici des réponses en grande partie conformes aux programmes, avec absence de lien direct entre aire et primitive à une exception près qu'il importe de noter. Par ailleurs, on voit bien que ce qui domine est une conception de l'intégrale permettant de calculer l'aire et de la primitive permettant de calculer les intégrales.

Dans une deuxième question, on demandait de citer la plus facile et la plus difficile des propriétés de l'intégrale, en donnant une raison. Dans l'annexe 3, nous avons listé, à l'appui d'une analyse d'un manuel de 2002, les diverses propriétés sur les intégrales conformes au programme de 2002 en terminale S. Dans le tableau qui suit, nous donnons de façon synthétique les réponses obtenues.

Propriétés	**facile**	**difficile**
Relation de Chasles	7	
Linéarité	3	1
Ordre et intégration	3	4
Inégalité de la moyenne		3
Intégrale dépendant de la borne supérieure et primitive	1	1
Formule Newton - Leibniz		
Intégration par parties		2
Aire et primitive		1

On voit que la relation de Chasles est largement plébiscitée, mais c'est à peu près le seul résultat clair, sauf peut-être la difficulté relative de l'inégalité de la moyenne, avec à la fois des arguments en faveur de la facilité d'enseignement et de la facilité pour son apprentissage.. Les propriétés d'ordre sur les intégrales en fonction de l'ordre sur les fonctions obtiennent des résultats contrastés, attestant de leur nouveauté comme partie explicite des nouveaux programmes.

On demandait ensuite aux enseignants de citer les différentes techniques d'intégration enseignées en les classant par ordre de difficulté. Dans l'annexe 4, nous avons listé toutes les techniques d'intégration conformes au programme (toujours d'après notre analyse du manuel de 2002). Le tableau ci-dessous résume les réponses des enseignants.

	N° d'ordre (facile → difficile)
1	Calcul d'une intégrale au moyen d'un calcul d'aire
2	Linéarité et lecture directe du tableau des primitives usuelles
3	Primitivation de u'/u , $u'e^u$, $u'u^n$
4	Intégration par parties
5	Calcul à l'aide d'une autre intégrale (intégrales associées) ou d'autres propriétés (parité, périodicité...)

La propriété qui arrive en tête a de quoi choquer. Il n'est en effet, comme le souligne Perrin, en général pas aisé de calculer une intégrale à l'aide d'une aire, c'est bien le contraire, via les primitives, qui est une facilité ! On voit là un effet de l'inversion du rapport entre aire et intégrale. Pour le reste les résultats sont conformes au programme.

Dans la deuxième partie du questionnaire on proposait un exercice non routinier aux enseignants, dont nous reproduisons l'énoncé ci-dessous :

Exercice 1

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur R :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

On définit la fonction F qui, à tout réel x, associe $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Étudier le sens de variation de la fonction F sur R.

Cet exercice qui utilise une fonction seulement connue par son tableau de variations n'est pas classique au sens où on n'en trouve pas du même type dans les manuels. Il est cependant conforme aux programmes de 2000, où en classe de seconde on dit qu'une fonction « peut être définie par une courbe, un tableau de données ou une formule ». Un tableau de variations est plus informatif qu'un tableau de données et proche de la donnée d'une courbe. De fait, cet exercice s'inspire d'un ensemble d'exercices proposés par l'inspection générale en 2004 et visant à faire évoluer les pratiques des enseignants. Bien entendu, il est hors de question de penser trouver une expression algébrique de la primitive *F*. Pour pouvoir étudier les variations de *F*, il faut avoir des informations sur le signe de *f*, ce que l'on peut déduire du tableau de variations. Cependant, ce tableau ne donne pas directement les informations nécessaires sur le signe de *f*. Il faut pouvoir déduire du tableau que *f* s'annule en une seule valeur *a* strictement négative, qu'elle est négative avant *a* et positive après. Ceci peut se déduire soit par une lecture graphique, si on trace une allure de la courbe à partir du tableau de variations, soit par le théorème des valeurs intermédiaires. Par ailleurs, si on veut déterminer les limites de *F* en l'infini, il est assez facile de voir que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, puisque $f(x) > 1$ pour $x \geq 0$. Par contre, il est plus délicat de voir que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$, puisqu'il faut déduire du fait que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$, par exemple, qu'il existe M tel que pour tout $x \leq M, f(x) \leq -1/2$.

Une des difficultés essentielles ici est qu'il faut bien distinguer le type d'informations nécessaires sur *f* pour pouvoir déduire les informations sur *F*. La confusion entre signe et variations risque d'être source de difficulté.

Nous avons demandé aux enseignants s'ils proposeraient cet exercice à leurs élèves. Il y en a 11 qui répondent « oui », contre 3 qui refusent. On peut donc en déduire que les changements de programmes sur les fonctions ont eu un effet important sur les pratiques des enseignants. Néanmoins, 10 enseignants (dont les 3 refusant l'exercice) signalent qu'ils rajouteraient une question intermédiaire, demandant explicitement aux élèves de démontrer l'existence d'une unique valeur annulant *f*. On retrouve ici une tendance bien connue à segmenter les tâches, typique de la peur des enseignants que leurs élèves n'y arrivent pas, mais conduisant à une déproblématisation des activités. Finalement seuls, 4 enseignants accepteraient de poser l'exercice tel quel. On leur demandait ensuite de rédiger la solution qu'ils attendaient d'un bon élève à cet exercice. Tous rédigent une solution entièrement analytique, sans appel au graphique et aucun ne signale la question des limites en l'infini (voir un exemple en annexe 5). On voit donc que le contrat institutionnel est uniforme et fort. Enfin on leur demandait d'évaluer le pourcentage de réussite en fin d'année et les difficultés. Les réponses sur le pourcentage de réussite sont résumées dans le tableau suivant :

0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	Moy.
4	2	1	0	1	2	1	1	1	0	35%

Quant aux arguments sur les difficultés, les voici :

- Il est difficile de lier la variation de F au signe de f, à travers la formule $F'(x) = f(x)$ (8)
- Il est difficile de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ (4)
- La fonction F est définie par une intégrale dépendant de la borne supérieure (2)
- Confusion entre sens de variation et signe d'une fonction (2)
- Fonction définie par un tableau de variations, pas d'expression algébrique (1)

C'est donc bien la difficulté lié au double jeu sur le signe et les variations qui est repérée prioritairement, pas le fait que la fonction ne soit pas définie par une expression algébrique.

Nous proposions ensuite un exercice avec une réponse d'élève. Dans l'exercice, la fonction n'est connue que par son tableau de variations et on demande un encadrement de l'intégrale. La réponse de l'élève s'appuie sur une représentation graphique, mais est tout à fait correcte, sauf que les aires sont évaluées graphiquement et non entièrement justifiées par des arguments analytiques. On demandait aux enseignants de noter la réponse de l'élève sur 5. Le tableau suivant résume les réponses :

Note	1	2	3	4	5	Moyenne	Écart-type
Effectif	0	0	2	4	8	4.43	0.73

On voit donc que cet élève serait dans l'ensemble bien noté. Ceci montre aussi une évolution dans les mentalités des enseignants. De plus, deux enseignants ne font aucun commentaire, deux reprochent tout de même le manque de rigueur, mais les dix autres font des remarques élogieuses : « L'idée de faire un dessin me semble correspondre à l'esprit du programme » ou « Cet élève a très bien compris le lien entre l'aire et l'intégrale. La résolution utilisant une représentation graphique me paraît très bonne ».

Voici par ailleurs, quelques commentaires ajoutés par les enseignants : « Le graphique ne vient pas naturellement à l'idée des élèves si on ne le suggère pas », « Ils ne penseraient pas à passer au graphique », « L'encadrement par les aires semblerait plus évident si on donnait un graphique à la place du tableau », « Tout élève qui trace la courbe de f pourrait arriver à cette solution ». Les réponses à la dernière question sont résumées dans l'annexe 6.

IV. Conclusions

À l'issue de cet atelier, on peut insister sur quelques points.

(1) Le lien entre l'intégrale et la mesure des grandeurs (aire et certains volumes en terminale, diverses grandeurs physiques à l'université) est mal pris en compte à toutes les étapes de l'enseignement. L'ingénierie proposée au niveau universitaire n'a pas encore de pendant au niveau du lycée, c'est là une piste de recherche à développer. Dans ce sens, la mise en parallèle des deux parties de cet atelier met bien à jour cette différence entre les deux ordres d'enseignement.

(2) Les problèmes soulevés par l'usage des divers ostensifs liés à l'intégration sont loin d'être simples, et appellent des études didactiques approfondies, en particulier au niveau universitaire.

(3) Divers autres points, parmi ceux évoqués dans la présentation de l'atelier, sont entièrement à étudier. Citons en particulier deux questions : Quelle compréhension des notions d'aire et volume doivent avoir les futurs enseignants du secondaire ? Que peut apporter aux recherches didactiques sur l'intégration une analyse de son développement historique, en particulier le passage de la mesure des grandeurs par les méthodes de Cavalieri au concept d'intégrale d'une fonction ?

Jean-Luc Dorier
Équipe DiMaGe, Université de Genève
Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Marc Rogalski
Laboratoire André Revuz, Université Paris Diderot et Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences et Technologies de Lille et CNRS
marc.rogalski@upmc.fr

Références

Bosch M. & Chevallard Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 79 – 119.

Grenier D. Legrand M. & Richard F. (1986). *Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année*. Cahiers de didactique des mathématiques n°22, IREM, Université Paris-Diderot.

Legrand M. (1990). Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale. In Artigue *et al*. (eds.) *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année.* Commission Inter-IREM Université, pp. 205-220.

Perrin D. (2005). Aires, intégrales et primitives dans les programmes de lycée et en formation des maîtres. In *Actes de la Commission inter IREM 2nd cycle*, fichier 24 http://www3.acclermont.fr/pedago/maths/pages/secondcycle/Actes_de_la_Commission_Inter_IREM_Second_Cycle.htm

Rogalski M., avec la collaboration de Pouyanne N. et Robert A. (2001). *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Paris : Ellipses éditions.

Rogalski M. (2009). Trois entrées dans l'intelligibilité de contenus à enseigner en mathématiques. In De Hosson C. & Robert A. (éd.) *Actes de la journée 2008 de l'École Doctorale Savoirs Scientifiques : épistémologie, histoire, didactique*. Paris : Éditions Paris-Diderot.

Tran Luong C.K., Bessot A. & Dorier, J.-L. (à paraître). dx et ∫ ostensifs pour questionner l'enseignement des intégrales. In A. Bronner et al. (eds*.) Actes du 2ième Colloque International sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Uzès 31 oct-2 nov 07.

Tran Luong C. K. (2006). *La notion d'intégrale dans l'enseignement mathématique au lycée : une étude comparative entre la France et le Viêt-Nam*. Thèse en cotutelle France – Viêt-Nam, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville.

Annexe 1. Organisations mathématiques à propos de l'intégrale sur trois périodes en France

1. Maths modernes (1970-80) – 2. Contre réforme (1980-2002) – 3. Depuis 2002

Définition de l'intégrale	1. Sommes de Riemann / Fonctions en escalier 2. Formule de Newton - Leibniz 3. Suites adjacentes
Notation pour primitive : *Présence ou non de l'ostensif* $\int$	1. $\int f(x)dx$ / $\int_a^x f(t)dt + C$ 2 et 3. Absence
Méthodes d'intégration pour l'intégrale indéfinie / calcul de primitive (**T1**)	1. **ET0** (Changement de variable implicite) + Intégration par parties ou Primitivation + Intégration par parties 2 et 3. Primitivation
Méthodes d'intégration pour l'intégrale [définie] (**T2**)	1. ET0 (Changement de variable implicite) + Intégration par parties ou Primitivation + Intégration par parties 2 et 3. Primitivation + Intégration par parties
Calcul approché (**T3**)	1. Absence 2. Présence 3. Présence (en liaison avec **T11**)
Encadrement d'intégrale (**T11**)	1 et 2. Présence (en liaison avec étude de suites) 3. Présence (en liaison avec **T3**)
Calcul d'aire (**T5**)	Présence d'un système d'inéquations qui **évite** des connaissances algébriques
Autres applications (**T4, T6, T7, T8, T9, T10**)	1. Calcul de volume, centre de gravité, moment d'inertie (**T7, T8, T9**) 2 et 3. Calcul de volume (**T7**)
Liens entre aire, primitive, intégrale	**Inchangés** durant trois périodes Primitive → Intégrale → Aire Intégrale → Primitive Aire → Intégrale Aire → Primitive Primitive → Aire
Notion et notation différentielle	1. Présence : notation différentielle 2 et 3. Absence : notion de différentielle.

Types de tâches

T1 Calculer $\int f(x)dx$ (ou déterminer les primitives d'une fonction)

T2. Calculer $\int_a^b f(x)dx$

T3. Calculer approximativement $\int_a^b f(x)dx$

T4. Calculer la longueur d'un arc
T5. Calculer l'aire d'une surface plane
T6. Calculer l'aire d'une surface de révolution
T7. Calculer le volume d'un corps
T8. Trouver le centre de gravité d'une plaque homogène
T9. Trouver le moment d'inertie d'une plaque homogène
T10. Calculer le travail d'une force variable
T11. Démontrer une inégalité sur des intégrales

Annexe 2. Questionnaire enseignants

Lycée : Ville :
Depuis combien d'années enseignez-vous en terminale S :
Quel(s) manuel(s) utilisez-vous ?

Partie I

A- Caractérisez par une phrase les liens que vous faites entre :
Aire et Intégrale :
Intégrale et primitive :
Aire et Primitive

B- Citez la propriété de l'intégrale qui vous semble
la plus facile :
Pourquoi ?
la plus difficile :
Pourquoi ?

C- Citez les différentes techniques d'intégration que vous avez enseignées en les rangeant par ordre de difficultés :

Partie II

Exercice 1
On donne le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur R :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f(x)			3				2
		↗		↘		↗	
	-1				1		

On définit la fonction F qui, à tout réel x, associe F(x) = $\int_0^x f(t)dt$.
Étudier le sens de variation de la fonction F sur R.
a) Proposeriez-vous un tel exercice à vos élèves de terminale ? oui / non
Éventuellement quelles modifications y apporteriez-vous :

b) Rédigez la solution à cet exercice que vous attendez d'un bon élève de Terminale :

c) Estimez le pourcentage d'élèves de vos classes en fin de Terminales capables de résoudre cet exercice en explicitant les difficultés que vous prévoyez :

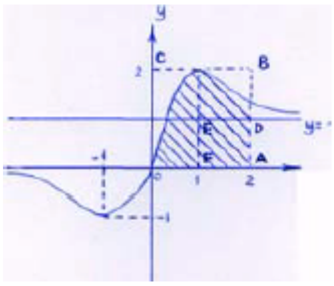
Exercice 2

On donne le tableau de variations d'une fonction définie et dérivable sur **R :**

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Déterminer deux entiers strictement positifs a et b tels que a ≤ $\int_0^2 f(x)dx$ ≤ b.

Voici la solution d'un élève de Terminale :



Comme f est positive sur [0; 2], $\int_0^2 f(x)dx$ est égale à l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 2.
Du graphique, on tire que :

$$1 = \text{aire}(ADEF) \leq \int_0^2 f(x)dx \leq \text{aire}(OABC) = 4$$

Donc pour a = 1 et pour tout entier b ≥ 4, on a :

$$a \leq \int_0^2 f(x)dx \leq b$$

Notez cette solution sur 5 (Veuillez cocher la case correspondante)
(Mauvais <-------------> Excellent)

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Commentaires :

Partie III

Donnez deux exemples concrets du type d'exercices $\boxed{\text{Calculer } \int_a^b f(x)dx}$, l'un que vous considérez comme facile, l'autre comme difficile. (Vous pouvez bien sûr utiliser votre manuel).

- Exercice facile :
Pourquoi :

- Exercice difficile :
Pourquoi :

Annexe 3. Propriétés de l'intégrale d'après Bréal 2002

Intégrale et aire	Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle *[a, b] (a ≤ b)*. L'intégrale de *f* entre *a* et *b* est égale à l'aire (en unités d'aire) du domaine caractérisé par le système d'inéquations : $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x). \end{cases}$
Valeur moyenne	Soit f une fonction continue sur un intervalle I. *a* et *b* sont deux éléments de I tels que *a* < *b*. La valeur moyenne de *f* sur *[a, b]* est le nombre réel égal à : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
Relation de Chasles	Soit f une fonction continue sur un intervalle I et *a, b, c* trois réels quelconques de l'intervalle I : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
Linéarité	Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. *a* et *b* deux réels de I et *k* un réel quelconque, $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
Ordre et intégration	Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. *a* et *b* sont deux éléments de I tels que $a \leq b$. Si *f* est positive sur *[a, b]*, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Si *f* est négative sur *[a, b]*, alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Si pour tout réel *x* de *[a, b]*, *f(x) ≤ g(x)*, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
Inégalité de la moyenne	Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, m et M deux réels. Si a ≤ b et si pour tout x∈[a, b], m ≤ f(x) ≤ M, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Si, pour tout x∈I, |f(x)| ≤ M, alors $\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert \leq M\lvert b-a\rvert$.
Intégrale dépendant de la bsup et primitive	Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I et *a* un élément de I. La fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive sur I de la fonction de *f* qui s'annule en *a*.
Formule de Newton-Leibniz	Soit f une fonction continue sur un intervalle I et *F* une primitive de *f* sur I. Si *a* et *b* sont deux éléments quelconques de I, alors : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$
Intégration par parties	Soit u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I. Si *a* et *b* sont deux éléments quelconques de I, alors : $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$
Intégrale et volume	On considère un solide délimité par les plans d'équations respectives *z = a* et *z = b* (où *a* et *b* sont des réels tels que $a \leq b$). On désigne par *B(z)* la section plane de ce solide avec le plan perpendiculaire à *(Oz)* de cote *z (a ≤ z ≤ b) S(z)* l'aire de la section *B(z)*. Le volume *V*, en unités de volume, de ce solide est égal à : $V = \int_a^b S(z)dz$.

Annexe 4. Techniques d'intégration (Bréal, 2002)

• $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx$, une primitive F de f est connue - $\boldsymbol{\tau}$: $F \circ u$ est une primitive de $(f \circ u)u'$
• $\int_a^b \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ - $\boldsymbol{\tau}$: $\frac{Ax+B}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{C}{x-\alpha} + \frac{D}{x-\beta}$
• $\int_a^b x^{\alpha} \ln x dx$, $\alpha \in \mathbf{R}$ - $\boldsymbol{\tau}$: $u = \ln x$, $dv = x^{\alpha}dx$
• $\int_a^b P(x) \ln x dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = \ln x$, $dv = P(x)dx$
• $\int_a^b P(x)\cos(\alpha x + \beta)dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = P(x)$, $dv = \cos(\alpha x + \beta)dx$
• $\int_a^b P(x)\sin(\alpha x + \beta)dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = P(x)$, $dv = \sin(\alpha x + \beta)dx$
• $\int_a^b P(x)e^{\alpha x+\beta}dx$, $P(x)$: polynôme de x - $\boldsymbol{\tau}$: $u = P(x)$, $dv = e^{\alpha x + \beta}dx$
• $\int_a^b e^x \cos x dx$, $\int_a^b e^x \sin x dx$ - $\boldsymbol{\tau}$: Intégration par parties à deux reprises
• $\int_a^b x(\ln x)^n dx$, $n \in \mathbf{N}$ - $\boldsymbol{\tau}$: $u = x(\ln x)^n$, $dv = dx$
Intégrales associées : calcul de deux intégrales I, J à travers le calcul de αI + βJ, γI + δJ et la résolution d'un système d'équations à deux inconnues
Calcul d'une intégrale à l'aide d'un calcul d'aire
Calcul d'une intégrale par linéarisation

Annexe 5. Solution attendue exercice 1

Cette solution est proposée par un enseignant français.

f est dérivable sur **R** donc f est continue sur **R.**
F est une primitive de f sur **R** donc F est dérivable sur **R** et $\forall x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = f(x)$.
Les variations de F dépendent du signe de F' donc de f.
f est continue sur **R** donc sur $]-\infty, 0[$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et $f(0) = 3$ et $0 \in]-1, 3[$.

D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$. f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$ donc $\forall x < \alpha$, $f(x) < f(\alpha)$, c'est-à-dire $f(x) < 0$. f est strictement croissante sur $]\alpha, 0]$ donc $\forall x \in]\alpha, 0]$, $f(\alpha) < f(x) \leq f(0)$, c'est-à-dire $f(x) > 0$. Le tableau de variations de f indique $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
On en déduit le tableau de signe de f puis les variations de F.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de f'	$-$	0	$+$
Variations de F	$\searrow$		$\nearrow$

Annexe 6. Partie III du questionnaire

Exercices jugés faciles

Intégrales	Nb	Raison du choix
$\int_a^b \sum_{i=1}^n k_i f_i(x)dx$, f_i étant figurée dans le tableau des primitives usuelles. *Exemple* : $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx$	8	Linéarité, calcul de primitive immédiat.
$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx$, f étant figurée dans le tableau des primitives usuelles. *Exemple* : $\int_0^1 3xe^{x^2+3}dx$	2	Primitivation facile. $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_a^b f(u)du = F(x)\Big\|_a^b$
$\int_{-1}^1 (t+2)e^{-t}dt$, $\int_0^\pi x\sin x dx$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$, $\int_0^1 xe^x dx$	2	L'intégration par parties est évidente.
$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}dx$	1	Lecture inverse de formule de dérivée : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$

Exercices jugés difficiles

Intégrale	Nb	Raison du choix
• $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$, $\int_1^e \frac{e^x}{1+e^x}dx$, $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ • $\int_1^e \ln x$	5	Forme *u'u* ou intégration par parties n'est pas évidente
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x$	3	Difficultés pour linéariser $\cos^3 x$.
$\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$	1	Double intégration par parties Nombreuses erreurs de signe dans les calculs
I = $\int_0^\pi \cos^4 x dx$, J = $\int_0^\pi \sin^4 x dx$. Démontrer que I + J = 3π/4 et I = J. Calculer I, J.	1	La résolution peut de plus nécessiter plusieurs niveaux de démonstration.
$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$	1	Introduction d'un paramètre. Intégration par parties indirecte : $I_n = 1 - nJ_n$, $J_n = e^{-n\pi/2} + nI_n$. Résolution d'un système linéaire à deux inconnues.
$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$	1	Sans expliquer
Étant donnée la fonction *f* définie sur [-1, π/2] par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \cos x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \end{cases}$ Calculer l'aire de la surface plane délimitée par la courbe représentative de *f* et l'axe des abscisses.	1	Il faut « mélanger » deux techniques de calcul pour répondre.

Atelier : recherche et enseignement universitaires en mathématiques, interactions actuelles et possibles

Carl Winsløw

Résumé

L'enseignement universitaire des mathématiques touche un public assez restreint, dont la plus grande partie s'oriente vers d'autres études que les mathématiques pures ou appliquées. Il est donc tout à fait compréhensible que, même si l'on dispose d'un nombre croissant de travaux sur le contexte universitaire, celui-ci ne fait pas l'objet d'une activité de recherche comparable à celle qui est vouée à l'enseignement général. La relation entre discipline scolaire et discipline scientifique a néanmoins occupé un rôle central tout au long du développement de la didactique. Ainsi, Brousseau (1986) utilise la différence entre chercheur et enseignant pour rendre compte du travail épistémologique à accomplir pour le dernier. Sans suivre les traces du chercheur – dont les conditions sont le plus souvent éloignées de celles de l'élève – Brousseau observe que l'activité de l'élève peut ressembler, parfois, à celle du chercheur. Dans cet article, on se penchera sur les questions de recherche et d'enseignement universitaires, notamment à partir de données provenant d'une étude comparative (Madsen & Winsløw, 2009) des pratiques d'enseignant-chercheurs danois en mathématiques et en géographie physique. Nous proposons, pour orienter le travail, un cadre d'analyse lié à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999).

Introduction

C'est une spécificité importante pour les universités d'employer ce qui en français s'appelle des « enseignants-chercheurs », à savoir des personnes qui exercent à la fois deux activités *a priori* distinctes : la recherche dans un domaine spécialisé X, et l'enseignement dans un domaine Y normalement lié (sinon identique) à X. Dans les universités, ces deux formes de pratiques sont donc liées, dans la personne de l'enseignant-chercheur, dans le quotidien de celui-ci. Le lien existe aussi du point de vue des étudiants, pour lesquels la perspective de devenir des chercheurs de Y existe comme une option de carrière future. Finalement, les contenus et les méthodes enseignés sont plus proches de ceux de la recherche contemporaine que dans l'enseignement scolaire, tout particulièrement en mathématiques où la quasi-totalité de l'enseignement pré-universitaire porte sur des savoirs établis avant 1900.

La distance manifeste entre « mathématiques académiques » et « mathématiques scolaires », mais aussi les relations actuelles et potentielles qu'elles entretiennent, constituent un thème classique en didactique des mathématiques (e.g. Chevallard, 1985 ; Brousseau, 1986). Par exemple, Brousseau utilise la différence entre chercheur et enseignant pour rendre compte du travail épistémologique à accomplir pour ce dernier. Grosso modo, le chercheur part de « questions » (souvent, à chercher elles aussi) pour chercher des « réponses » qu'il formulera ensuite sous la forme « officielle » du savoir savant. L'enseignant part du savoir savant – souvent profondément transformé par une tradition didactique et curriculaire – pour trouver des « questions » pour l'élève, à travailler avec lui, questions qui devront à la fois être accessibles pour l'élève et rendre possible un apprentissage dont le résultat est, dans une certaine mesure, consistant avec le savoir visé. Sans suivre les traces du chercheur – dont les conditions sont le plus souvent éloignées de celles de l'élève – Brousseau observe que l'activité de l'élève peut ressembler, parfois, à celle du chercheur. En effet, une grande partie des produits de l'ingénierie didactique portent les traces de cette idée métaphorique de mettre l'élève en « situation de recherche ». Métaphorique, car personne ne peut ignorer les différences entre la position épistémologique, institutionnelle et temporelle de l'élève, et celle du chercheur.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 59-67.

Pour l'étudiant de mathématiques, cette différence est parfois moins évidente, et, paradoxalement, il en est de même pour une similitude éventuelle. La transposition didactique opère sur une distance moins grande, au moins en principe ; en même temps, il paraît juste de dire que l'étudiant vit peu, tout au long des programmes de licence, l'expérience d'un chercheur. Ainsi, Burton (2004, p. 198) note, dans le contexte d'une enquête à grande échelle avec des mathématiciens britanniques, qu' « il existe un écart monstrueux entre l'expérience de mathématiciens des connaissances mathématiques et l'expérience des étudiants (the gap between mathematicians' views of mathematical knowing and that encountered by learners is monstrous) ». Or, à partir d'un certain moment – qui n'est pas très bien défini – l'expérience de recherche devient, et est censée devenir, possible pour les étudiants. Dans le contexte américain par exemple, on voit l'émergence d'efforts soutenus pour avancer ce moment, pour des raisons variées. L'expression *undergraduate research* désigne en particulier un dispositif qui permettrait à l'étudiant débutant de s'engager dans des projets plus ou moins authentiques de recherche. Cette idée n'est pas sans soulever des réserves et de vrais problèmes pour l'enseignant-chercheur.

Dans cet atelier, nous avons travaillé ces questions, notamment à partir de données provenant d'une étude (Madsen & Winsløw, 2009) des pratiques d'enseignants-chercheurs danois en mathématiques et en géographie physique, mais aussi et en priorité, en puisant dans l'expérience des participants (en tant qu'enseignants, enseignants-chercheurs, ou bien étudiants de mathématiques, que ce soit leur occupation présente ou antérieure). Nous avons proposé un cadre d'analyse lié à la théorie anthropologique du didactique (la TAD, cf. Chevallard, 1999) pour orienter le travail.

Un sujet vif dans les recherches sur l'enseignement supérieur

Dans la branche des sciences de l'éducation portant sur l'enseignement supérieur (*higher education* en anglais), l'hypothèse d'un « nexus » (relations ou influences immanentes et mutuelles entre deux entités *a priori* distinctes) a été examinée dans des centaines de publications. Par exemple, Neumann (1992) a trouvé « une conviction forte qu'il existe une relation symbiotique entre l'enseignement et la recherche » parmi les administrateurs académiques de l'Australie. Elle a identifié trois « *niveaux* » de description de ce nexus :

(1) le nexus *tangible*, où l'enseignement doit se référer aux savoirs et aux méthodes d'une science dans son état actuel ;

(2) le nexus *intangible*, concernant les effets sur les modes de travail dans les situations d'enseignement qui résultent du fait que l'enseignant est aussi chercheur ;

(3) un nexus *global* qui se situe au niveau institutionnel (plutôt qu'individuel), dans le sens de dépendances et de corrélations entre enseignement et recherche à ce niveau.

À propos du nexus global, un grand nombre d'études ont essayé de montrer des corrélations (positives ou négatives) entre la *qualité* de la recherche et de l'enseignement d'une université, ce qui demande de définir une mesure de ces qualités et d'avoir un bon nombre d'universités où de telles études ont été faites. L'intérêt institutionnel est clair : par exemple, si l'on peut démontrer une simple corrélation positive - l'excellence de la recherche d'une université apporte plus ou moins automatiquement un enseignement excellent - alors on peut se focaliser sur le développement de la recherche. Ou au contraire, si on trouve une corrélation négative – la bonne recherche étant accompagnée d'un enseignement médiocre, et vice-versa – on pourra abandonner toute stratégie visant uniquement l'un des deux. Or, dans un article « clé » dans le domaine, Hattie et Marsh (1996) ont extrait de 58 études de ce type une totalité de 498 coefficients de corrélation, dont la moyenne (calculée par rapport à l'importance des études sous-jacentes à chaque terme) était statistiquement nulle. Ils ont conclu que la corrélation générale entre la qualité de la recherche et celle de l'enseignement est zéro, et dans ce cas il sera plus utile d'investiguer les modes de relations qui existent entre elles pour renforcer les corrélations positives (p. 533). En effet, dix ans plus tôt, Elton (1986, p. 300) a conjecturé l'impossibilité d'éclaircir, par les méthodes quantitatives et au niveau de l'institution, la question sur les relations possibles entre enseignement et recherche. Il suggère ensuite que :

> « It is necessary to distinguish between three activities - teaching, scholarship and research. It is then likely that at this [the individual, auth.] level teaching and research can fertilize each other, but only through the mediation of scholarship. » (p. 303)

Ainsi, *scholarship* (mot difficile à traduire en français – « travail érudit » ou « étude personnelle ») est proposé comme un facteur sous-jacent soutenant également l'enseignement et la recherche. Il est à noter que *scholarship* se situe pour ces auteurs au niveau individuel, tout comme les niveaux (1) et (2) de Neumann. À ce niveau, la spécificité disciplinaire s'impose.

Cela nous amène à considérer non pas l'existence et le caractère d'un nexus automatique et général, mais plutôt les conditions et les modalités d'un soutien mutuel des deux formes de pratiques au niveau d'un enseignant-chercheur ou d'une équipe d'enseignants-chercheurs, et de veiller à remarquer les spécificités de leur domaine de travail (pour nous, les mathématiques ; voir Madsen & Winsløw (2009) pour une étude comparée avec les géosciences).

Une approche anthropologique

Rasmussen et *al*. (2005) rappellent comment le « scholarship » avancé en mathématiques supérieures est une *activité* non seulement cognitive mais aussi communicative. Cela est vrai également pour la recherche et pour l'enseignement (que les auteurs considèrent comme des cas spéciaux) ; il faut également prendre en compte leur contingence par rapport aux institutions afin de mieux comprendre leur interaction. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers l'approche anthropologique du didactique (cf. Chevallard, 1999 pour les détails). Avec une adaptation (sinon un bouleversement) considérable apportée par des idées avancées par Bosch et Gascòn (2002), nous proposons de considérer les deux activités à partir de deux types d'organisations praxéologiques :

- Les organisations mathématiques (OM) dont les tâches (travaillées par les étudiants comme par les enseignants-chercheurs) sont mathématiques dans le sens usuel (portent sur des objets mathématiques), avec les techniques, technologies et théories associées ;
- Les organisations didactiques (OD) dont les tâches (assumées par l'enseignant) sont celles qui contribuent à introduire les étudiants dans une OM donnée, en se servant de techniques didactiques qui sont ensuite articulées dans une technologie didactique et, en principe, sauront être analysées voire même justifiées dans le cadre d'une théorie didactique.

La transposition didactique, en partie et localement réalisée par l'OD, se situe dans le passage d'une organisation mathématique régionale OM_m dans laquelle travaille le chercheur à une organisation locale OM_e dans laquelle l'étudiant est susceptible d'être introduit. Les liens entre OM_e et les organisations locales de OM_m où l'enseignant-chercheur trouve la matière de ses recherches se situent normalement au niveau technologico-théorique, avec des tâches et des techniques différentes. De l'autre côté, l'OD comprend parmi ses tâches « organiser » OM_e (souvent en partant de structures existantes relativement bien établies), ainsi que initier et organiser le travail de l'étudiant avec OM_e. Le travail de l'enseignant-chercheur sur OM_m et OD *interagit* donc avec le travail de l'étudiant :

$$(OM_m - OD) \leftrightarrow OM_{e.}$$

Les parenthèses indiquent que le lien entre OM_m et OD est direct et immédiat pour l'enseignant-chercheur, et que l'ensemble se lie plus indirectement (et parfois, de façon plus faible) à l'organisation mathématique du côté des étudiants. C'est dans ce schème que nous allons chercher les différents niveaux du nexus dont parle Neumann :

- Entre les *tâches d'enseignement* (relevant de l'OD) et les *tâches de recherche* (OM_m) : ceux-ci coexistent et se distribuent temporellement dans le travail de l'enseignant-chercheur ; on parlera d'un nexus minimal venant de contraintes extérieures pour ce travail ;
- Entre *techniques mathématiques* d'OM_m et *techniques didactiques* (OD) : par exemple pour construire les tâches d'OM_e, ou pour produire et communiquer des éléments technologico-théoriques d'OM_e ; on parlera d'un *nexus implicite* (proche de ce que Neumann appellent *nexus intangible* dans la mesure où celui-ci reste inarticulé) ;
- Entre *technologies et théories didactiques* (comme pratiquées et conçues par l'enseignant) et les spécificités du bloc technologico-théorique d'OM_m qui pourrait expliquer et justifier les choix de pratiques de l'OD, y compris ceux qui relèvent de la construction de l'OM_e ; comme ces relations se situent entièrement au niveau technologico-théorique on parlera de *nexus explicite* (qui sera donc proche du *nexus tangible* dans le sens de Neumann).

Notons que le nexus minimal est toujours présent en supposant que l'enseignant-chercheur est ce que le nom dit, c'est-à-dire qu'il enseigne et fait la recherche (une condition évidente pour considérer la relation au niveau individuel). Par contre, le nexus minimal n'implique pas d'autre lien perçu par l'enseignant entre ces tâches que d'être deux composantes de son travail.

Dans l'atelier, ces catégories n'ont pas pu être expliquées ni utilisées avec plus de détails que les principes suivants pour analyser les deux cas : le nexus minimal est constitué par les contraintes perçues en conséquence de la cohabitation des deux activités, par exemple quand le mathématicien parle d'elles comme « rivales » dans l'occupation de son temps. Quand les deux pratiques semblent se soutenir (l'expérience provenant de la recherche semble utile dans le travail d'enseignement, ou l'inverse), sans que cela relève de principes théoriques (spécifiques au mathématique et au didactique) pour le mathématicien : on y voit des éléments de nexus implicite ; quand, au contraire, le soutien est identifié par l'enseignant-chercheur comme relevant de principes théoriques (par exemple la structure de l'OM_m justifie certains choix par rapport à la construction de l'OM_e), on a affaire au nexus explicite.

Une étude empirique – et deux « cas » extraits des données

Les deux organisations OM_m et OD représentent des pratiques largement contrôlées par les mathématiciens, et il s'agit ici d'étudier leurs interactions. Alors que les pratiques de l'OD sont en partie « publiques » (en partie parce que ces pratiques incluent aussi le travail de préparation, de corrections de devoirs etc.), le bloc technologico-théorique l'est moins, dans la mesure où il existe (par exemple, dans les discours de comités de l'enseignement et dans les conversations informelles). À l'inverse, le bloc technologico-théorique de l'OM_m est voué à la publication et peut donc, dans ses états affinés, être librement étudié. Mais le bloc *pratique* de l'OM_m est difficile à observer : souvent, la recherche se fait par un individu seul ou par un couple de chercheurs. Pour observer leurs pratiques, il faudrait donc accéder à un espace plus ou moins « privé ». Les rares études de pratiques de recherche mathématiques, comme Burton (2004) et Misfeldt (2006), sont basées sur des entretiens avec les mathématiciens (qui parlent de leurs pratiques de recherche), tout comme les données discutées ici. La nouveauté de nos recherches consiste à analyser ces données avec le modèle praxéologique et avec l'intention explicite d'étudier le nexus MO_m – OD (y compris le nexus implicite).

Contexte

Nos données proviennent d'entretiens semi structurés avec 5 enseignant-chercheurs de l'Université de Copenhague (3 professeurs d'université, 2 maîtres de conférences). La grille des entretiens (*interview guide*) a fixé la structure générale de l'entretien, en vue de faire expliciter successivement aux interviewés :

(1) leur propre recherche, et plus spécifiquement les composantes praxéologiques d'un projet récent ;

(2) leur enseignement, et plus spécifiquement les composantes praxéologiques de leur travail sur un cours de niveau licence, enseigné l'année précédente ;

(3) les liens qu'ils voient entre (1) et (2), en regardant successivement les niveaux de nexus minimal, implicite et explicite, et en cernant les effets de ces liens sur le travail des étudiants (MO_e), naturellement, comme perçu par les interviewés.

Notre intérêt principal est bien sûr dans la partie (3), mais les deux autres parties de l'interview ont été utiles, aussi bien pour établir des références concrètes que pour éviter un discours trop marqué par des idéaux ou convictions sans lien avec la réalité vécue des interviewés. Les données ont ensuite été transcrites et codées selon un système correspondant au modèle théorique (pour plus de détails, voir Madsen & Winsløw, 2009).

Dans cet atelier, nous avons étudié des extraits assez courts de deux interviews, en vue d'illustrer la problématique et l'usage du modèle théorique. Ces extraits ont été présentés aux participants de l'atelier et sont décrits dans les sections suivantes.

Cas 1

NN est professeur d'analyse et mathématique physique ; il était à Princeton avant de rejoindre Copenhague. Il décrit comme projet de recherche un problème sur les particules chargées, sur lequel il a réfléchi pendant 10 à 15 ans, avec plusieurs phases de progrès, et qu'il a finalement résolu en trouvant une application surprenante de techniques mathématiques provenant d'un autre de ses travaux. Sa force en tant que chercheur est « une grande boîte d'outils mathématiques » qui lui sert pour les problèmes de physique théorique. Son enseignement est situé actuellement au début du programme (analyse et algèbre linéaire), où il est chargé de cours pour des centaines d'étudiants. Pendant l'automne, cela prend presque tout son temps ; le reste de l'année, il a peu d'enseignement (un ou deux petits cours avancés). Pour lui, l'intérêt de l'enseignement réside surtout dans la recherche ou la construction de « bons » exercices à poser aux étudiants. Il décrit plusieurs exemples, comme celui qui suit. Selon lui, la difficulté est de pousser les étudiants à leurs limites, sans pour autant créer trop de frustrations. Parfois, il lui arrive d'y trouver lui-même des défis mathématiques avec un rapport (plutôt faible) avec son domaine de recherche ; mais la plupart du temps, il y a une « concurrence » entre les deux tâches (bien qu'il trouve du plaisir dans les deux).

Dans le contexte du cours d'analyse de première année, NN dit :

> « Nous essayons de leur donner des tâches relativement ouvertes. (…) C'est-à-dire, où ce n'est pas qu'un exercice, avec une question et un point spécifique dans le manuel auquel on se réfère pour trouver une solution unique. (…) Par exemple, nous leur demandons de calculer π en utilisant la formule pour une fonction, comme arctan ou quelque chose comme ça, qui donne π en un point, et puis on se sert de la série de Taylor en un point où ils le savent [la valeur de la fonction]. Cela, je dirais, est un exercice complètement standard. Ils apprennent aussi à estimer l'erreur. Mais alors, nous allons plus loin et demandons « est-ce que vous pouvez avec certitude trouver les 100 premiers décimaux, en vous servant de cette méthode ? ». Ou bien on leur demande quand ils peuvent être sûrs d'avoir trouvé les 100 premiers décimaux. (…) Et ça, nous leur posons comme une tâche ouverte parce que nous ne savons pas nous-mêmes, bien sûr nous pouvons [savoir], mais nous ne considérons même pas en avance ce que sera la solution

> parfaite, parce que nous ne cherchons pas la solution parfaite, nous cherchons à les faire réfléchir sur les problèmes impliqués dans cette tâche [il explique les difficultés pour évaluer l'erreur dans ce cas]. S'ils se mettent dans cette problématique, nous sentons que nous avons obtenu beaucoup. (…) Nous prenons un exercice standard, et nous l'ouvrons quelque peu (…) afin de voir jusqu'où on peut aller avec ce type de tâche. (…) Ce n'est pas de la recherche, toutes les questions que nous leur donnons sont susceptibles d'être résolues par n'importe quel mathématicien. Mais pour eux, ils peuvent le vivre comme de la recherche. (…) Il faut leur faire vivre l'expérience d'avoir à explorer un terrain par eux-mêmes. Donc, le processus de recherche, nous sentons qu'ils l'ont. »

Un autre exemple issu du cours d'algèbre linéaire paraît, lui, plus proche de la recherche parce que les enseignants ne connaissent pas ou n'ont pas trouvé la solution : quel est le plus petit déterminant positif d'un « sudoku » rempli ? (Réponse : 405 ; avec l'aide des enseignants, on a *démontré* que, pour un sudoku A, det$A$ est divisible par 405 ; puis un étudiant a trouvé un sudoku avec det$A$ = 405, en utilisant *Maple*).

Sur la relation entre enseignement et recherche, NN conclut :

> « Là où les deux choses se séparent, c'est que, à un moment donné, ce qui fait ma recherche est rarement ce que j'enseigne. Il y a un conflit de temps que l'on ne peut nier. Mais je trouve les deux marrantes, même si ce sont mes propres recherches, que je trouve bien entendus les plus marantes, parce que là c'est moi-même qui joue, alors que, dans l'autre, j'essaye de faire jouer les étudiants. Et là, parfois, je voudrais plus de temps… mais j'aime bien enseigner aussi, et sentir que je peux profiter de mes mathématiques. »

Cas 2

MM est algébriste. Après 7 années comme maître de conférences à Essen en Allemagne, il est maintenant professeur à Copenhague. Il travaille sur le programme dit « de Langland » sur les représentations du groupe de Galois « absolu » des nombres rationnels, un objet en soi quasi intraitable. D'après lui, les recherches commencent avec la construction d'hypothèses puis de conjectures, mais le « noyau dur », c'est de construire les preuves. Il enseigne au niveau licence comme au niveau master. Le plus élémentaire est un cours sur « les méthodes de la mathématique », en première année. Il trouve le niveau de ces étudiants de plus en plus « choquant ». Il arrive à MM de devoir expliquer des choses très simples, comme l'identité $(a+b)^2$ = …. Les étudiants sont en général mal préparés quand ils arrivent aux séances d'exercices, mais MM estime que c'est parce qu'ils n'arrivent pas à démarrer la résolution. À un moment plus avancée de l'étude, il y a eu un certain « filtrage », et donc ça va mieux ; mais le niveau général du programme a été réduit au point que, même au niveau master, il est tout à fait exclu de seulement s'approcher de quelque chose qui a un rapport avec les recherches de MM :

> « Le manuel est un peu spécial, car il y a peu de preuves (…) dans la pratique, les étudiants ne peuvent pas [les construire eux-mêmes] (…) donc ce printemps j'ai écrit des notes pour le manuel, pour simplement suppléer au manuel, car, d'accord, les preuves ne sont pas là, les étudiants n'arrivent pas à les faire, et donc je dois les écrire, afin qu'ils puissent au moins les lire. (…) D'accord, les meilleurs peuvent le faire, mais dès qu'on est au-dessous du niveau de 13 (la note la plus élevée), c'est fini. (…) Par exemple, la première tâche que j'ai donnée, c'est du manuel, qui consiste à montrer que si x est impair, alors x^2 l'est aussi. (…) mais la moitié de la population a eu des problèmes, de gros problèmes (…) c'est ça le niveau qu'on a, à cause du lycée (…) il y a des choses que les étudiants n'arrivent pas à comprendre, par exemple la notion de borne supérieure. Quand on leur demande, à l'examen, ce qu'est une borne supérieure, ils ne savent pas répondre. »

N'y a-t-il donc pas de passerelles pour faire entrevoir aux étudiants ce qu'est la recherche ?

> « Par exemple, les nombres premiers, oui, il y en a dans mes recherches, mais c'est comme dire que pour construire un gratte-ciel, il faut du ciment. (…) Dans les mémoires, à la fin de la licence, si on leur demande de faire un projet de recherche, une chose est sûre : ce sera à l'enseignant de l'écrire. (…) En mathématiques, il y a plusieurs sujets (…) qui peuvent être hauts ou larges (…) il y a une différence dans le temps qu'il faut travailler pour arriver à comprendre les problèmes. Pour prendre mon cas, il m'a fallu cinq ans après la maîtrise pour comprendre les problèmes sur lesquels je travaille aujourd'hui. Je ne peux pas expliquer à un étudiant en licence de quoi il s'agit, ce serait absurde de le demander. »

Quels rapports concrets y-t-il donc, pour MM, entre recherche et enseignement ?

> « Dans les cours plus avancés c'est clair, il y a de plus en plus de moments où je peux apporter une perspective à ce que nous regardons, au cours magistral, leur raconter où ceci mène (…) L'enseignement, c'est aussi l'encadrement de mémoires de master (…) je ne peux exclure que dans le processus d'encadrer une thèse [*master*], on puisse arriver à penser à des choses, quoique cela ne m'est pas arrivé (…) j'ai appris beaucoup de choses en enseignant, mais rien d'utile pour la recherche. (…) Ce sont des problèmes d'une nature toute différente, très concrets, pratiques (…) s'en passer ne fera aucune différence pour la recherche. (…) Il y deux choses, quand même importantes (…) le choix des matières, où la perspective d'un chercheur est importante (…) par exemple pour la construction des nombres réels, il y a deux options, les suites de Cauchy et les coupures de Dedekind, et là, parce que j'ai une base dans la recherche, je sais qu'il faut utiliser les suites de Cauchy. (…) » [Note de CW : *« l'autre chose » où un chercheur est requis, même dans l'enseignement du début des études, semble être pour écrire des notes de cours*].

Des éléments de réactions et d'analyse

Il est clair que MM et NN ont des approches très différentes de l'enseignement et des étudiants, et que ces cas ont été choisis en partie parce qu'ils présentent des contrastes clairs : une multitude de questions surgit par rapport aux liens explicites et implicites avec les pratiques de recherche. Nous allons présenter une synthèse des résultats enrichie par le travail de l'atelier.

Pour MM, les métaphores de « hauteur » (comme le *gratte-ciel*) et de « niveau » servent à décrire la distance entre l'activité mathématique de MM en tant que chercheur et en tant qu'enseignant. Même pour les étudiants qui font leur thèse à la fin du master, il ne lui est pas arrivé d'intégrer ses recherches à ses tâches d'enseignant ; elles sont là, côte-à-côte, sans communication possible, sauf en de rares moments (au niveau master) où MM peut « raconter » (c'est-à-dire sans précision possible) comment l'OM_e est liée, de loin, à l'OM_m. Au niveau de la licence, il semble que les étudiants ne savent pas s'acquitter des tâches les plus simples que MM peut imaginer, telles que reproduire une définition. Plusieurs participants de l'atelier ont vivement critiqué le fait que, face à l'incapacité apparente des étudiants à construire les preuves que le manuel avait omises (sans doute à propos), MM leur vient en aide en leur proposant un « manuel » supplémentaire où ces preuves sont rédigées. Pour expliquer cette stratégie, on peut mentionner le fait que le cours en question se termine par un examen oral, où les étudiants sont censés présenter des preuves. Même si on peut se douter que certains d'entre eux ne feront que répéter celles du manuel, MM peut s'assurer, avec ses suppléments, qu'ils répètent au moins quelque chose de correct.

Pour NN aussi, l'OD et l'OM_m sur lesquelles il travaille à un moment donné sont « rarement » directement liées. Cependant, avec ses collègues enseignant un cours de première année de licence, il fait un réel effort pour donner aux étudiants une expérience de recherche, donc pour construire les tâches de l'OM_e de manière à ce que les étudiants vivent en quelque sorte un « processus de recherche », analogue à celui qu'il a avec l'OM_m. Pour le type de tâche OD « construire une tâche 'de recherche' pour l'OM_e », NN identifie une technique OD assez explicite (et donc faisant peut-être partie d'une technologie partagée avec ses collègues) : prendre une tâche routinière de l'OM_e et « l'ouvrir un peu ». Le fait est qu'il trouve ces tâches d'enseignement « marrants » (quoique « moins marrants » que son travail sur OM_m). Parfois, le travail sur une OM_e ainsi construit peut induire les enseignants dans un effort commun avec les étudiants, comme dans l'exemple des déterminants de *sudoku*. Le fait que NN insiste sur le fait que « ce n'est pas de la recherche » a été sujet d'une discussion entre des participants de l'atelier, où l'explication suivante a été proposée : les OM_m sont basées sur des tâches qui ne sont pas « susceptibles d'être résolues par n'importe quel mathématicien », et qui sont en plus articulées avec des organisations théoriques « en évolution ». Le dernier de ces critères est peut-être moins vrai pour les mathématiques appliquées ; en fait, la « boîte d'outils » de NN contient bien sûr des techniques classiques. En effet, la différence signalée par MM entre les sujets « hauts ou larges » s'applique en partie pour expliquer que NN trouve peut-être plus de ressemblances, au niveau technique, entre OD et l'OM_e d'un côté et l'OM_m de l'autre (ce qui est confirmé, d'ailleurs, par d'autres éléments des données).

On peut donc se demander si la question, en particulier du nexus implicite dont il s'agit ici, n'a pas des réponses différentes en fonction du « type » d'OM_m (« pur/dur » versus « appliqué »). Cela ne semble pas facilement confirmé par les résultats de nos autres interviews, mais l'hypothèse semble bien consistante avec les deux « cas ».

Les *conditions* pour un nexus explicite – liens entre « théorie et discours » des mathématiciens par rapport à l'OD et par rapport à l'OM_m – apparaissent clairement dans les propos de MM : les liens entre OM_m et OM_e apparaissent au fur et à mesure que les étudiants avancent vers les étages supérieurs du « gratte-ciel », et cette convergence semble être un élément inquestionnable de la « théorie » derrière son activité OD. Il peut sélectionner les contenus (blocs théoriques) de l'OD en fonction de ses connaissances théoriques de l'OM_m. On note en passant que ce lien est strictement à sens-unique, son travail sur l'OD ne pouvant apporter « rien d'utile pour la recherche » ; il ne s'agit donc pas d'un nexus complet. Les participants de l'atelier n'ont pas manqué de s'étonner qu'un algébriste pense qu'il « faut » utiliser les suites de Cauchy, plutôt que les coupures de Dedekind, pour une construction théorique des nombres réels. On peut supposer que MM est bien conscient de l'importance du premier point de vue dans les cours avancés d'analyse, et que cette conscience relève de son expérience d'étudiant plutôt que de son activité actuelle en tant que chercheur.

Finalement, je note que le cadre théorique fut introduit très rapidement lors de la présentation initiale de l'atelier et que cette introduction s'est avérée largement insuffisante pour les participants sans familiarité préalable avec la TAD. Pourtant, une explication plus simple des trois formes du nexus semble avoir servi pour orienter un peu la discussion, d'ailleurs animée, des groupes formés en vue de l'analyse des deux cas. Il s'agit des descriptions plus pragmatiques que voici :

- **Nexus minimal** : simple cohabitation de OD et de OM_m au niveau individuel où dans une équipe (et les contraintes/relations qui en découlent directement).
- **Nexus explicite** : par exemple, la sélection de contenus et d'exercices (OD) est conçue « selon » la structure d'OM_m (bloc théorique).
- **Nexus implicite** : relation au niveau des techniques (OD/OM), par exemple
  - techniques OD soutenus par techniques OM_m ;
  - technique OD : chercher interactions et parallélismes entre pratiques OM_m et OM_e.

Ainsi, le « conflit de temps » dont parle NN découle du nexus minimal (le temps réservé à l'OD n'est pas disponible pour l'OM_m). La mention, certes discutable, que « parce que j'ai une base dans la recherche, je sais qu'il faut utiliser les suites de Cauchy » s'interprète dans un premier temps comme un effet du nexus explicite perçu par MM. En deuxième instance, il faut noter que c'est plutôt un effet en apparence, en vue de son champ de recherche (l'algèbre), alors que la préférence pour le modèle de Cauchy est plutôt justifiée du point de vue de l'analyse, où le fait que **R** soit complet devient important, dès les premiers cours à l'université. En général, il faut distinguer *l'idée générale* du nexus explicite (qui apparaît dans les propos de tous les interviewés) d'effets concrets et réels, qui sont plus rares dans les entretiens.

Carl Winsløw
Institut for Naturfagenes Didaktik – Université de Copenhague
winslow@ind.ku.dk

Références

Barbé J., Bosch M., Espinoza L. et Gascón J. (2005). Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions at Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics* 59 (1-3), 235-268.

Bosch M., Gascón J. (2002). Organiser l'étude. 2. Théories et empiries. In Dorier J.-L. et *al.* (eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques*, pp. 23–40, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Burton L. (2004). *Mathematicians as enquirers*. Kluwer: Dordrecht.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 33-115.

Chevallard Y. (1985). La transposition didactique. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19 (2), 221-265.

Elton L. (1986). Research and teaching: symbiosis or conflict? *Higher Education* 15, 299-304.

Hattie J. & Marsh H. W. (1996). The relationship between teaching and research: a meta-analysis. *Review of Educational Research* 66 (4), 507-544.

Madsen L. M. & Winsløw C. (2009). Relations between teaching and research in physical geography and mathematics at research intensive universities. *International Journal of Science and Mathematics Education* 7, 741-763.

Misfeldt M. (2006). *Mathematical Writing*. Copenhagen: DPU Press.

Neumann R. (1992). Perceptions of the teaching-research nexus: a framework for analysis. *Higher Education* 23, 159-171.

Rasmussen C., Zandieh M., King K., Teppo A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7 (1), 51-73.

Winsløw C. (2006). Research and development of university level teaching: the interaction of didactical and mathematical organisations. In M. Bosch (ed.) European Research in Mathematics Education IV. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 1821-1830. Barcelona: Universitat Ramon Llull.

Atelier : enseigner les mathématiques avec WIMS à l'université

Fabrice Vandebrouck, Bernadette Perrin-Riou et Marie-Claude David

Résumé

L'enseignement supérieur en Licence se trouve confronté à un certains nombre de défis, notamment celui de stimuler le travail personnel des étudiants, et nous essayons de relever modestement ces défis en intégrant un travail sur la base d'exercices en ligne WIMS dans nos enseignements. Dans cet article, nous présentons l'outil pédagogique WIMS, ainsi que nos dispositifs d'enseignements avec cet outil. Au-delà des résultats consensuels sur le travail des étudiants avec ces outils, nous nous interrogerons sur leurs apprentissages effectifs et les corrélations qu'il est possible de faire entre les types d'exercices travaillés avec WIMS et les performances réelles des étudiants. Il s'agit véritablement d'une question ouverte pour les didacticiens même s'il y a très localement certaines avancées que nous mettons en évidence.

Introduction

Le serveur WIMS (Web Interactive Multipurpose Server, http://wims.unice.fr/wims) est un serveur de ressources interactives d'exercices développé à l'origine par XIAO Gang depuis 1998 (Xiao, 2000) et d'usage libre. Il concerne aussi bien l'enseignement supérieur que les classes de l'enseignement secondaire et primaire. Dans ces actes, nous expliquons l'usage que nous faisons de ce serveur dans nos différents enseignements (de licence ou de préparation au CAPES) et rendons compte de façon organisée de réflexions qui ont été menées lors de l'atelier sur l'activité potentielle des étudiants avec WIMS. Ces réflexions sont corroborées par certains résultats que nous avons pu obtenir dans le cadre de recherches en didactique ou dans le cadre d'observations de classes ordinaires. Cela nous mène à des conclusions sur l'importance d'une scénarisation de l'usage de WIMS, en un sens que nous préciserons, dès que les exercices proposés aux étudiants dépassent une certaine complexité. Les deux premiers paragraphes concernent WIMS et les types d'exercices que l'on y trouve. Les deux suivants concernent plus directement l'activité des étudiants avec WIMS. Enfin, le dernier paragraphe expose différentes manières d'utiliser WIMS avec les étudiants.

Généralités sur WIMS

Le site originel WIMS se situe à l'Université de Nice, mais plusieurs sites miroirs existent maintenant en France et à l'étranger. La figure ci-après (figure 1) présente la page d'accueil du site WIMS d'Orsay.

Les ressources proposées, qui comprennent des cours interactifs, des outils de calcul ou de graphisme et surtout des exercices interactifs, sont originellement mathématiques et sont étendues maintenant à d'autres disciplines et d'autres langues depuis quelques années. Elles sont développées par des enseignants volontaires pour leurs propres élèves et mises ensuite à la disposition de tous. La communauté d'utilisateurs et de développeurs est soutenue depuis quelque temps par l'association WIMS EDU (http://wimsedu.info/).

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 69-82.

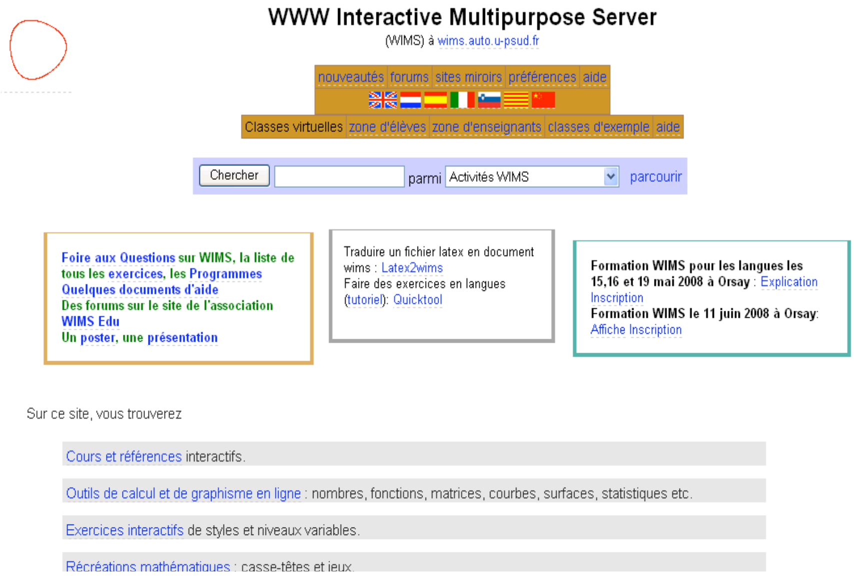


Figure 1 - La page d'accueil du site WIMS d'Orsay (http:wims.auto.u-psud.fr/wims)

Grâce à son interfaçage avec des logiciels de calcul formel et de dessin (Pari/GP[1], Maxima[2], Gap[3], Octave[4]), WIMS permet la programmation d'exercices sophistiqués disponibles à variations aléatoires. Ainsi, un étudiant peut refaire plusieurs fois le même exercice avec des variables numériques, des expressions algébriques ou encore des formes langagières des énoncés différentes ; en classe, des étudiants côte à côte ne travaillent pas sur le même énoncé d'un exercice. Voici l'exemple d'un exercice classique de deuxième année (L2) exécuté deux fois :

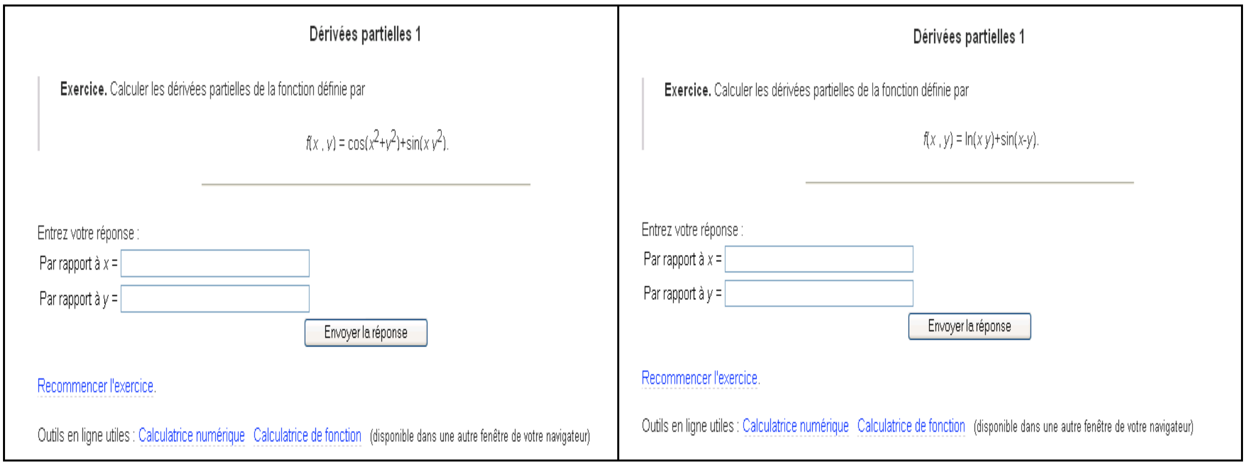


Figure 2 - Exercice « dérivée partielle 1 », exécuté deux fois par un étudiant

Les réponses attendues sont variées : valeurs numériques, vectorielles, matricielles, expressions algébriques, réponses par click sur une figure, réponses par des étiquettes, tracé de courbes, constructions géométriques et, bien sûr, réponses de type QCM. Le logiciel ne permet cependant pas d'analyser un texte rédigé et donc des démonstrations écrites. Les problèmes de prise en main du logiciel, qui peuvent être liés à des spécificités de codages

[1] Logiciel spécialisé dans le calcul arithmétique de haut niveau et numérique. Il est aussi utile pour l'arithmétique polynomiale univariée et l'algèbre linéaire.
[2] Logiciel spécialisé dans le calcul formel. Il est utile dans la simplification et la normalisation d'expressions formelles.
[3] Logiciel spécialisé dans la théorie des groupes.
[4] Logiciel spécialisé dans le calcul numérique, matriciel en particulier.

des réponses (implémentations de certaines fonctions mathématiques comme racine carrée par exemple, etc.) sont généralement rapidement surmontés par les étudiants.

WIMS attribue un score, nombre de points variant de 0 à 10, à chaque fois qu'un exercice est exécuté. Les exercices sont à correction automatique, c'est-à-dire que WIMS signifie à l'étudiant si sa réponse est correcte ou non. Il peut, selon les exercices et leur programmation, donner la bonne réponse à l'exercice exécuté, donner une correction entièrement détaillée et plus généralement fournir une rétroaction dont l'étudiant doit s'emparer pour exécuter une nouvelle fois l'exercice. Dans l'exemple ci-dessous, WIMS fournit une rétroaction graphique à une réponse d'un étudiant qui doit déterminer des valeurs réelles a_1 et a_2 pour que des fonctions f définies de part et d'autres de l'origine par deux expressions algébriques différentes soient continues et dérivables. Face à la rétroaction et à l'incohérence de sa proposition, l'étudiant peut alors relancer l'exercice mais il est confronté à une nouvelle fonction.

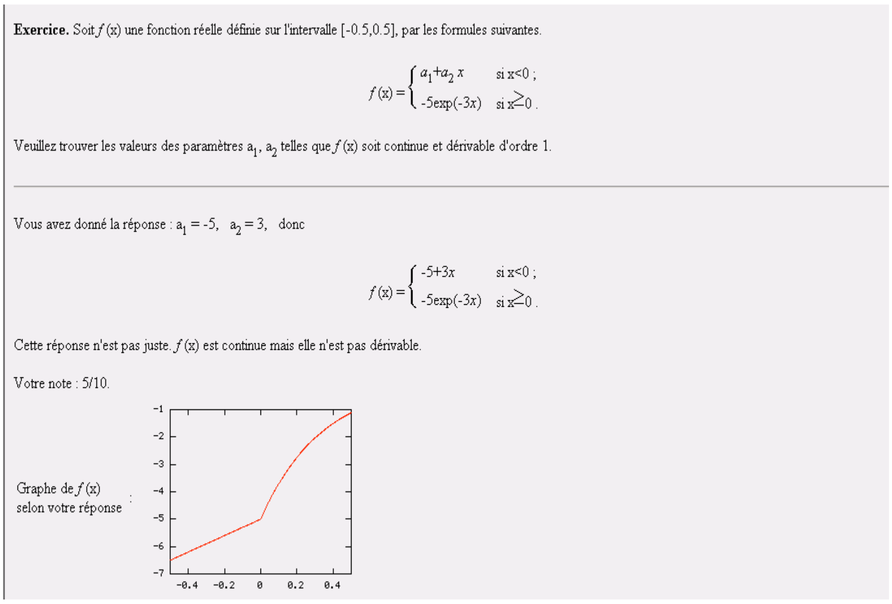


Figure 3 - L'exercice « joint » et sa rétroaction graphique

Certains exercices proposent enfin une aide qu'il est possible d'activer ou non. Les étudiants peuvent aussi utiliser des outils puissants de calcul formel pour répondre aux exercices : calculatrices numérique, fonctionnelle, matricielle, « solveuses » linéaires, dessins, etc.

Les exercices de la base WIMS sont classés par mots clefs, par niveaux de difficulté. Le serveur permet à l'enseignant de créer un espace privé, appelé « classe virtuelle », où il peut organiser le travail et où les notes sont enregistrées. Les étudiants s'y « loguent » à chaque session de travail. Les enseignants proposent des feuilles d'exercices (TD-WIMS) qu'ils élaborent en choisissant et en organisant des exercices de la banque d'exercices WIMS. La prise en main pour les enseignants est simple et la création d'une classe et de feuilles de TD WIMS est facile d'accès[5]. Ils ont la liberté de pondérer dans chaque feuille chacun des exercices et de recueillir la moyenne de chacun de leurs étudiants pour chaque exercice, pour chaque feuille de TD ou pour l'ensemble des feuilles de TD. De leur côté, les étudiants ont la liberté d'activer ou de suspendre l'enregistrement de leurs notes. Ils peuvent donc s'entraîner « à blanc » sur chacun des exercices des feuilles puis, lorsqu'ils se sentent prêts, ils peuvent activer l'enregistrement de leurs scores pour que les notes obtenues comptent dans leur moyenne.

[5] Des stages de formation sont proposés régulièrement. Voir le site de l'association.

Un aspect de la variété des exercices proposés par WIMS[6]

Certains des exercices disponibles actuellement sont des versions interactives d'exercices classiques de travaux dirigés traditionnels. Dans les exemples ci-dessous, les étudiants de première année doivent déterminer des matrices d'applications linéaires et des bases des noyaux. Cependant, ces versions sont sensiblement plus intéressantes que les versions classiques pour le travail des étudiants. Ceux-ci peuvent travailler plus à leur rythme que dans une séance de travaux dirigés traditionnelle et autant de temps qu'ils le désirent sur chacun des exercices. Ils peuvent également échanger entre eux, non pas sur les réponses attendues, qui ne sont pas les mêmes d'un étudiant à l'autre, mais plus sur les méthodes et les mathématiques en jeux.

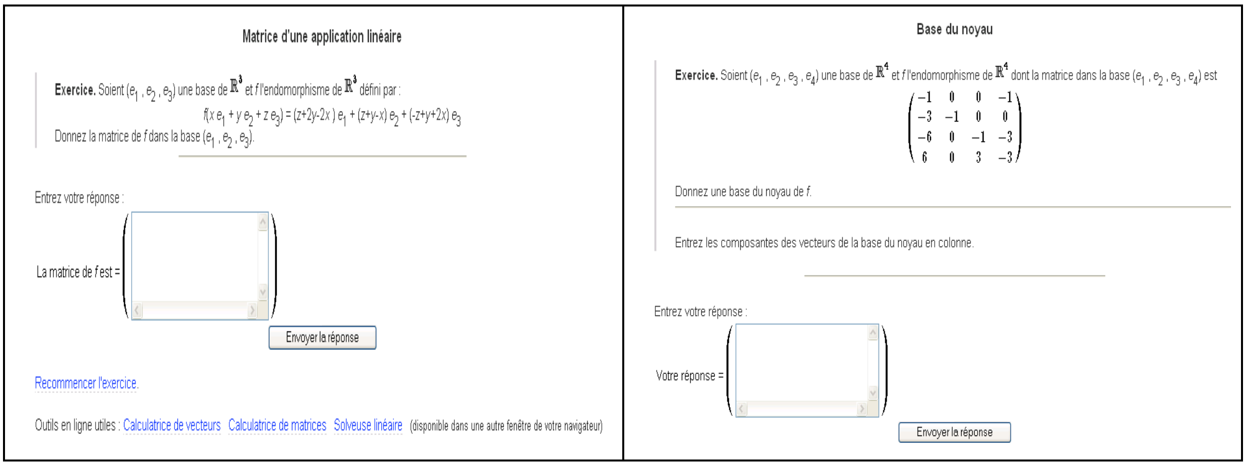


Figure 4 - Deux exercices classiques transférés dans WIMS

Des exercices exploitent plus directement les possibilités informatiques en permettant des tâches qui ne pourraient pas être proposées de multiples fois dans l'environnement papier-crayon comme les deux exercices ci-dessous. Dans l'un, l'étudiant doit mettre en correspondance des représentations graphiques en trois dimensions avec des expressions algébriques de fonctions de deux variables. Dans l'autre, il doit situer graphiquement dans le plan complexe l'affixe de complexes donnés algébriquement.

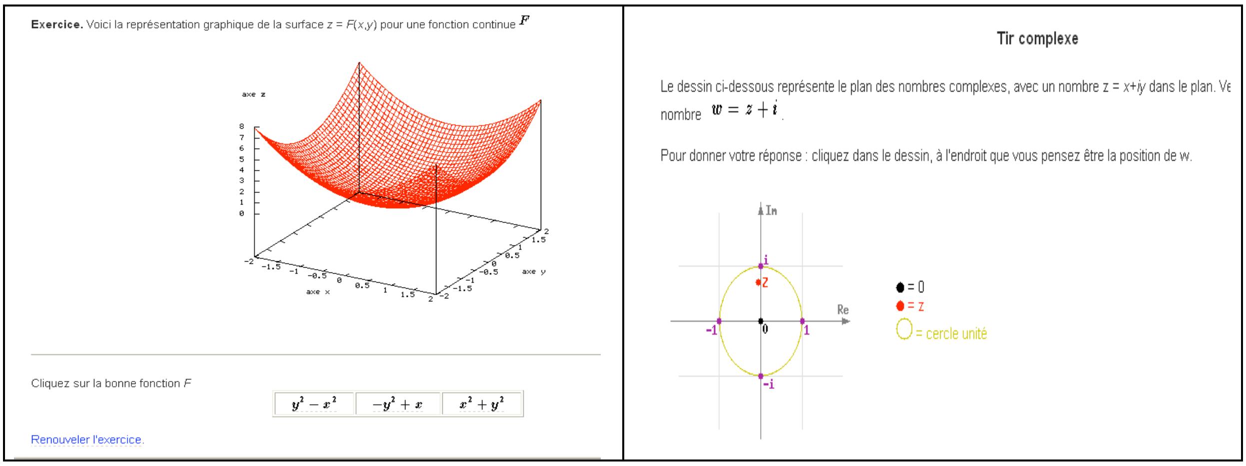


Figure 5 - Deux exercices exploitant les puissantes possibilités graphiques de WIMS

[6] Pour l'atelier, une classe virtuelle a été préparée sur le serveur de l'Université Paris Sud. Les participants y sont entrés avec un login et un mot de passe et ils y ont retrouvé une feuille d'exercices niveau lycée et une feuille d'exercices niveau L1 qui présentaient un choix varié d'exercices WIMS dont ceux présentés dans ces actes.

D'autres exercices permettent une activité mathématique qui ne pourrait pas du tout être proposée dans l'environnement traditionnel. C'est le cas de l'exercice suivant où l'étudiant de première année doit donner les valeurs entières des trois coefficients du développement limité d'ordre 3 en zéro pour une fonction donnée graphiquement. À chaque proposition, WIMS renvoie la courbe du polynôme de degré 3 correspondant à la réponse de l'étudiant. Celui-ci peut alors corriger en dix essais maximum les coefficients qu'il propose afin que le polynôme renvoyé graphiquement approxime au mieux la fonction au voisinage de zéro. Cela lui permet de visualiser l'effet des coefficients sur le polynôme ainsi que l'aspect uniquement local de l'approximation.

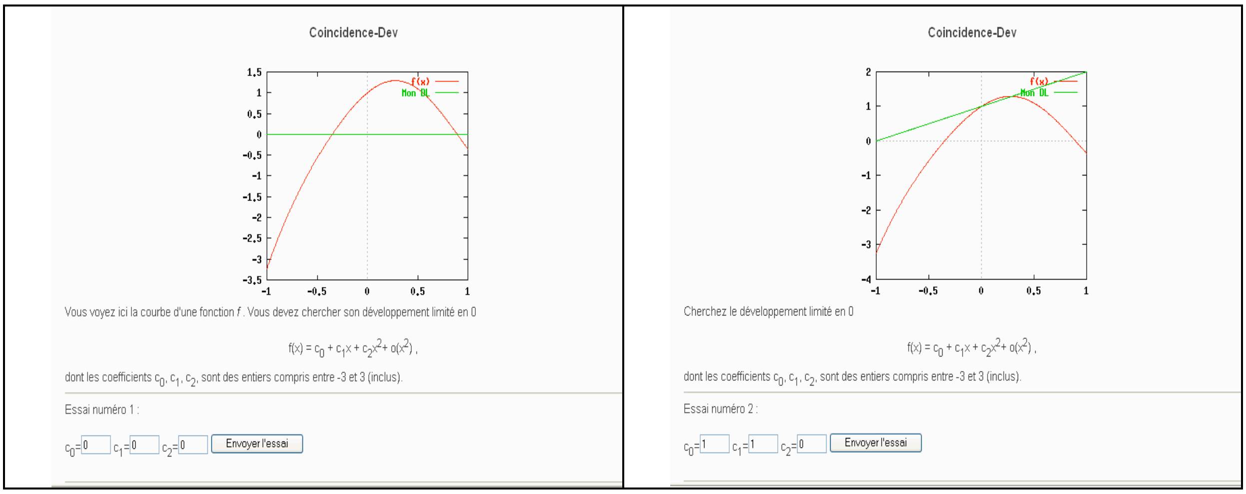


Figure 6 - L'exercice « coincidence Dev »

Le travail des étudiants avec WIMS

Depuis l'année 2003, nous avons expérimenté ou observé des étudiants travaillant avec WIMS à plusieurs niveaux d'enseignement, de la première à la troisième année d'Université, dans diverses Universités et sous différentes formes : d'un travail en séances de TP en salle informatique en présence de l'enseignant à un travail en totale autonomie des étudiants à leur domicile ou en salle libre service de l'Université. Ces expérimentations et observations ont donné lieu à un certains nombre de publications (Cazes et *al.*, 2005 ; Vandebrouck et Cazes, 2005 ; Hersant et Vandebrouck, 2006 ; ou encore Vandebrouck, 2007 & 2008).

Toutes ces expérimentations ont rapidement confirmé l'idée que les étudiants travaillent, sous réserve que la note moyenne fournie par WIMS à chaque feuille d'exercices soit prise en considération d'une façon ou d'une autre dans leur évaluation. Ces confirmations ont pu être mises en évidence de façon objective par l'étude des relevés de traces des étudiants permise par WIMS : temps totaux de connexions, durées de travail sur chacun des exercices etc. L'aspect aléatoire des énoncés, ainsi que l'interactivité immédiate du logiciel, ont très certainement un impact sur ce changement d'attitude des étudiants qui, beaucoup plus qu'en séance traditionnelle, deviennent actifs. Un changement de contrat didactique s'opère dans la classe : l'étudiant doit produire quelque chose, car sinon, rien ne se passe et rien n'assure que l'enseignant fournira des indications ou corrigera l'exercice comme c'est généralement toujours le cas en séance traditionnelle. Enfin, l'étudiant accepte certainement mieux l'éventuelle sanction du logiciel WIMS que celle du professeur, ce qui lui favorise encore son entrée en activité.

Des études plus fines des traces mettent aussi en évidence les rythmes différents effectivement adoptés par les étudiants et les grandes disparités quant à l'organisation de leur travail, que ce soit en autonomie ou en séances de TP accompagnées : certains étudiants peuvent refaire des exercices quand bien même ils les ont déjà réussis, certains font les exercices dans l'ordre alors que d'autres cherchent à faire les plus faciles en priorité. Certains étudiants relancent systématiquement et rapidement les exercices sur lesquels ils ont échoué ; d'autres au contraire réfléchissent a posteriori à ces exercices. Certains enfin utilisent spontanément un brouillon ou gardent des traces écrites rédigées de leur activité avec WIMS (énoncés et/ou solutions des exercices), d'autres non. Nul doute que le travail sur une base d'exercices comme WIMS donne une grande responsabilité aux étudiants face à leur apprentissage, qui peut contribuer encore à leur engagement dans l'activité mais peut aussi mettre en difficulté des étudiants faibles s'ils ne sont pas correctement accompagnés.

Un premier essai de croisement entre le type d'exercices WIMS et l'activité effective des étudiants

Nos observations directes ou par le biais des journaux de traces (Vandebrouck et Cazes, 2005) ont rapidement fait apparaître des caractéristiques d'exercices pour lesquels les étudiants progressent généralement avec WIMS jusqu'à la note maximale 10/10. Il s'agit d'exercices techniques, c'est-à-dire où les connaissances que peuvent mettre en fonctionnement les étudiants (théorèmes, méthodes, règles, etc.) sont explicitement appelées par les énoncés (niveau mobilisable selon Robert (1998) ou Robert et Rogalski (2004)). En outre, ces connaissances doivent nécessairement être mises en fonctionnement de façon immédiate ou avec très peu d'adaptations. Les exercices « matrice d'une application linéaire » et « base du noyau » proposés en L1 sont des exercices qui correspondent à cette caractérisation. L'exercice « dérivée partielle » de la figure 1, et proposé en L2, en est un autre : les connaissances « des règles de dérivations des fonctions à une variable » ou « de calcul des dérivées partielles » sont supposées mobilisables, avec l'adaptation liée au fait de traiter pour chaque dérivée partielle l'une des deux variables comme un paramètre dans le premier cas ou dans une application immédiate dans le second cas. La figure suivante montre le relevé des traces brutes de l'activité d'un étudiant ayant travaillé sur cet exercice, le premier de la sixième feuille de TD-WIMS à l'Université d'Orsay en 2003.

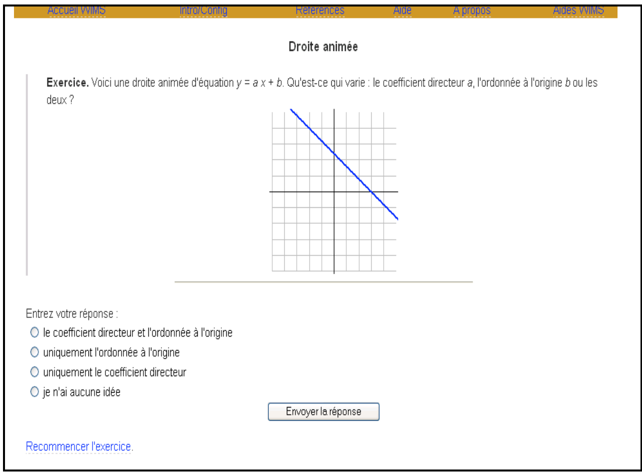
Heure	Feuille	Ex.	Etat	Score	Enreg.	Durée
10:16:21	6	1	new		noscore	
10:23:24	6	1	score	0	noscore	00:07:03
10:23:40	6	1	renew		noscore	00:00:16
10:27:45	6	1	score	10	noscore	00:04:05
10:27:47	6	1	renew			00:00:02
10:31:28	6	1	score	2		00:03:41
10:32:05	6	1	renew			00:00:37
10:34:51	6	1	score	10		00:02:46
10:34:53	6	1	renew			00:00:02
10:37:36	6	1	score	10		00:02:43

Figure 7 - Extrait d'un journal de traces d'un étudiant ayant travaillé sur « dérivée partielle 1 »

Dans la colonne « État » de ce journal, la mention « new » (ou « renew ») signifie que l'étudiant exécute l'exercice. La mention « score » signifie qu'il soumet une réponse au logiciel. La note donnée par WIMS est alors inscrite dans la colonne « Score ». L'état d'enregistrement « noscore » signifie que l'étudiant n'a pas activé l'enregistrement et donc qu'il s'entraîne sur l'exercice sans que sa note soit prise en compte pour l'évaluation. Le journal fait apparaître la progression de cet étudiant de la note 0 à la note 10. Il fait apparaître également que cet étudiant a mis 7mn03 pour obtenir sa première note 0 puis encore 4mn05 à la recherche suivante pour obtenir son premier 10. Ceci n'est pas un phénomène isolé. L'étude des fichiers de traces des 19 étudiants ayant travaillé sur cet exercice durant l'observation dont nous parlons montre que le temps de travail moyen sur l'exercice est de plus de 26mn, que le temps moyen pour soumettre la première réponse est de plus de 8mn et qu'enfin le temps moyen pour soumettre la première réponse correcte est de plus de 17mn.

La situation pour cet exercice n'est qu'un exemple, mais elle illustre une situation générale à propos de l'activité des étudiants sur ces exercices d'applications « assez immédiates » de connaissances au niveau mobilisable. La progression vers la réussite est toujours apparente mais les temps observés sont relativement longs. On peut penser que d'une part, en séance de TD traditionnelle, on ne laisserait pas les étudiants refaire autant de fois de tels exercices considérés habituellement comme faciles, en ne leur proposant qu'un seul calcul à traiter. D'autre part, on sous-estimerait probablement le temps nécessaire pour eux pour y arriver. Nous postulons que, sur ces exercices, les étudiants peuvent consolider les connaissances qu'ils mettent en fonctionnement, c'est-à-dire acquérir des bases solides, insister sur des exercices qui leurs posent problème, travailler la lecture des énoncés… à leur rythme et en autonomie.

L'exemple suivant va dans le même sens mais montre les limites au travail des étudiants sur des exercices d'applications immédiates. Il s'agit d'un exercice où une droite est animée suivant que son coefficient directeur est modifié (pivotement autour de son intersection avec l'axe des ordonnées), que son ordonnée à l'origine est modifiée (translations) ou que les deux sont modifiées. Cet exercice proposé à des étudiants de première année en 2004 à l'Université d'Évry Val d'Essonne ne permet de mettre en jeu que des connaissances très anciennes de la classe de troisième, connaissances supposées mobilisables et qui le sont bien chez quasiment tous les étudiants (un étudiant n'a tout de même pas réussi).



Nombre d'étudiants			
	23	02:22:05	temps total sur l'exercice
	23	00:06:11	temps moyen par étudiant
	23	00:00:50	durée moyenne du premier passage
	22	00:01:19	temps moyen pour avoir 10
	23	474	nombre de new
	23	462	nombre de scores
	23	8,19264225	moyenne des notes par étudiant
	14	5,71428571	moyenne des trois premières notes
	14	8,33333333	moyenne des trois dernières notes

Figure 8 - Exercice « droite animée » et statistiques traitées des traces d'activité d'étudiants

Les statistiques traitées des traces remettent en évidence le temps moyen relativement long pour que les étudiants réussissent l'exercice, ce qui paraît très surprenant mais peut être excusé par le fait qu'il s'agissait pour eux de leur premier exercice WIMS. Les étudiants, à une exception près, ont fort bien réussi cet exercice. Cependant, une étude des journaux de traces individuelles montre que certains étudiants ont refait à outrance cet exercice très simple (plus de 20 fois pour 5 d'entre eux avec un pic à 186 fois pour l'un des étudiants). Ceci s'explique par le fait que les étudiants sont très sensibles à la notation ou que cet exercice était mixé au sein d'une feuille de TD avec des exercices beaucoup plus difficiles à moins que plus simplement, ils ne l'aient trouvé ludique. Beaucoup d'étudiants, plutôt que d'affronter des exercices plus difficiles peuvent préférer, si elle n'est pas maximale, améliorer leur moyenne à un exercice très facile. Ceci met donc en garde contre les mélanges de niveaux de difficulté des exercices que l'on peut proposer aux étudiants dans les feuilles WIMS.

Des exemples de décalages entre l'activité attendue des étudiants et leur activité réelle

Des études plus fines que celles des journaux de traces ont été menées par le biais d'observations directes d'étudiants, de recueils de leurs feuilles de brouillon ou de copies d'examen. Elles ont permis de mettre en évidence des décalages d'activités, entre activité attendue et activité effective, parfois liés à la complexité des tâches mathématiques, mais aussi à l'implémentation informatique des exercices (qui n'est pas neutre), à des détournements plus ou moins intentionnels des exercices ou encore liés aux difficultés de l'élève à réguler seul son activité à partir des rétroactions logicielles (indications, corrections, bonnes réponses, solutions détaillées, etc.).

Le premier exemple est celui d'un étudiant d'Évry qui travaille en 2004 sur l'exercice « joint » (figure 3) pendant une séance de TP machine. Cet exemple peut être retrouvé dans Cazes et *al*. (2006). Cet exercice permet de mettre en fonctionnement, rappelons-le, des connaissances anciennes sur la continuité et la dérivabilité des fonctions de la variable réelle. Mais les étudiants peuvent aussi reconnaître que les fonctions proposées sont de classe C^1 sur les intervalles considérés et utiliser le théorème de prolongement d'une dérivée continue. Il s'agit d'une connaissance supposée disponible chez les étudiants mais qui est un enjeu d'apprentissage de la première année d'Université. Avec cette connaissance, il est alors suffisant de calculer les limites et les dérivées à droite et à gauche en 0 puis d'écrire qu'elles doivent être égales ; ce qui permet de calculer a_1 et a_2. Le journal des traces d'activité d'un étudiant de l'Université d'Évry, pendant une séance de TP machine, fait apparaître qu'il passe énormément de temps pour proposer des réponses correctes : 9 mn, 13 mn, 5 mn et 5mn. Sa copie d'examen, dans lequel un exercice similaire à l'exercice « joint » est demandé, montre que sa procédure n'est pas optimale.

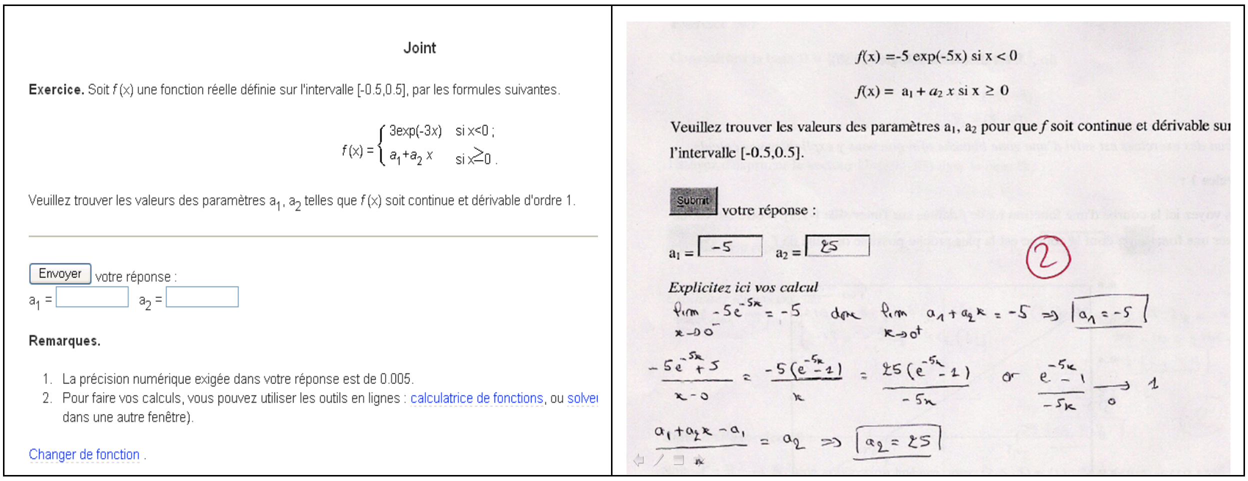


Figure 9 - Copie d'examen d'un étudiant sur l'exercice « joint »

On constate que l'étudiant développe bien l'activité attendue pour trouver la valeur manquante a_1. En revanche, pour calculer la dérivée à droite puis la dérivée à gauche, il utilise la limite du taux d'accroissement (connaissance ancienne mobilisable) alors qu'il lui suffirait d'appliquer les calculs de dérivées classiques dans les intervalles de définition (connaissance non disponible). Cela explique le temps considérablement long passé par lui à chaque essai de cet exercice pendant la séance de TP et qui le pénalise certainement pendant l'examen (puisqu'il lui reste moins de temps que ce que l'examinateur a prévu pour faire le reste du sujet). L'étudiant sait donc résoudre l'exercice mais n'a pas la stratégie optimale. WIMS ne peut effectivement valider que le résultat de l'activité de l'étudiant mais pas sa procédure. Ni les rétroactions logicielles, permettant une connexion entre deux points de vue, ni la présence du professeur ou des camarades pendant la séance de TP ne permettent malheureusement à l'étudiant d'améliorer sa stratégie. D'ailleurs, l'étudiant n'a pas lieu de remettre en cause sa procédure puisqu'elle fonctionne plus ou moins et qu'il ne sait pas qu'il peut l'améliorer. Le professeur ne s'aperçoit bien sûr pas de ce décalage pendant la séance. Ceci laisse donc déjà penser qu'il y a un manque après la séance WIMS, en terme de bilan de la séance et d'institutionnalisation des connaissances qui doivent être utilisées ou construites.

Le second exemple, dans le même contexte, est celui d'un exercice WIMS sous forme d'un QCM qui concerne les limites de suites numériques et la continuité des fonctions (figure 9). Il peut être retrouvé dans Vandebrouck (2006). Les connaissances à mettre en fonctionnement, qui sont enjeu d'apprentissage en première année d'université, doivent seulement être mobilisées (elles sont appelées explicitement par l'énoncé). Toutefois, il ne s'agit pas de les appliquer de façon immédiate. Les étudiants doivent adapter les assertions qu'ils ont dans leur cours liant limites de suites et continuité. Ici, la rétroaction limitée « mauvaise réponse / bonne réponse » ne permet pas à l'étudiant de se corriger de façon autonome et l'environnement QCM lui permet de détourner plus ou moins intentionnellement l'exercice.

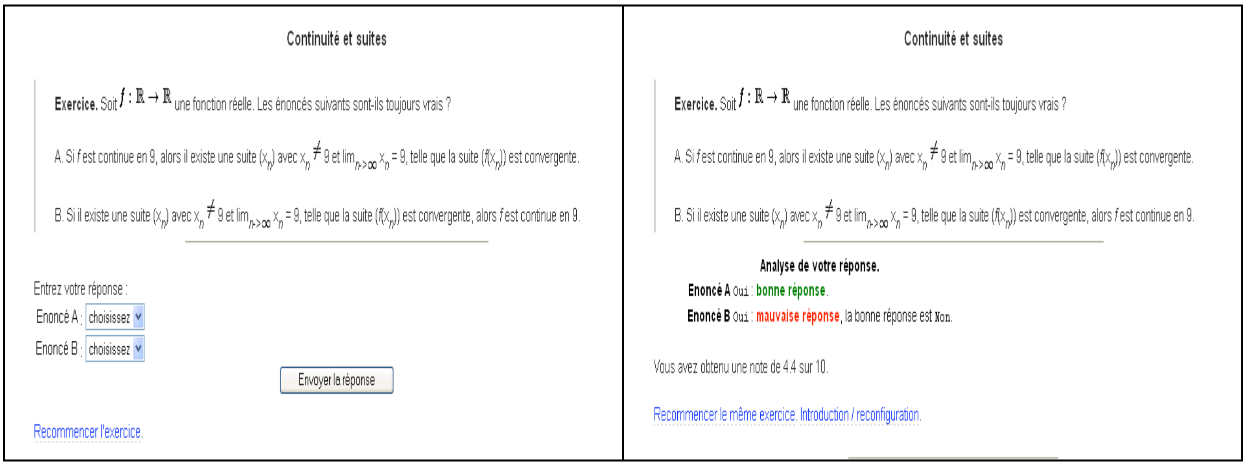


Figure 10 - Exercice « continuité et suites » et sa rétroaction

Le brouillon d'un étudiant met effectivement en évidence que l'étudiant, plutôt que de comprendre tous les liens mathématiques entre limites et continuité pour ensuite les appliquer, préfère relever les différents tirages proposés par WIMS au fil des essais et noter les réponses attendues pour ces tirages. Il profite donc de ce que WIMS lui donne les réponses attendues à chaque essai. Cela lui permet assez rapidement de répondre à coup sûr aux questions de WIMS mais lui fait travailler l'exercice d'une façon qui n'avait pas été anticipée.

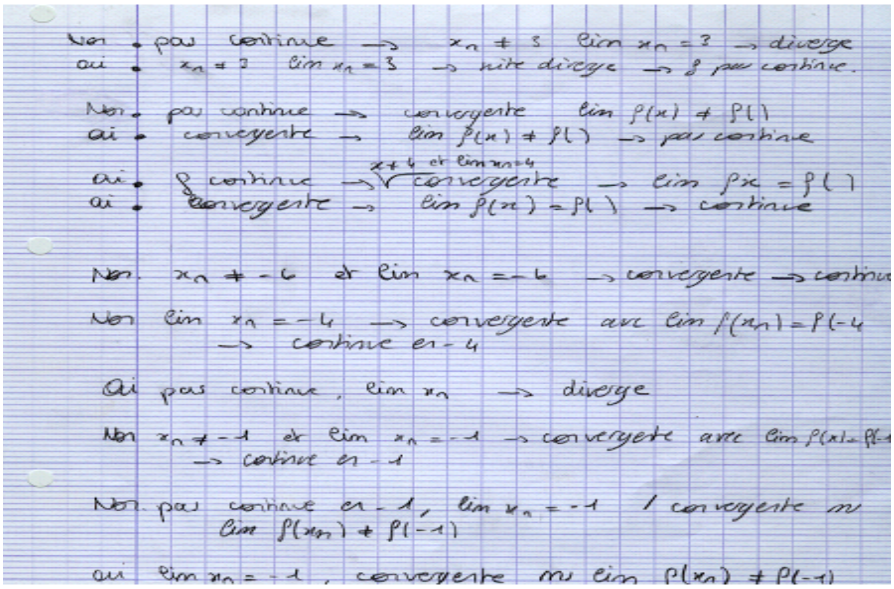


Figure 11 - Brouillon d'un étudiant ayant travaillé sur « continuité et suites »

Cette observation est corroborée par le fait que la même année, dans le cadre d'un travail en parallèle en France et au Brésil, des étudiants Brésiliens n'ayant pas les connaissances nécessaires pour répondre correctement à cet exercice ont pu obtenir les mêmes moyennes que les étudiants français.

Comme on le voit, le fait que WIMS ne propose généralement pas de corrections détaillées des exercices peut induire des activités non attendues dès que les tâches proposées sortent des applications immédiates que les étudiants savent bien opérer. Les étudiants peuvent alors avoir des stratégies d'élimination ou des stratégies d'essais-erreurs. Il y a donc une place pour des activités « intermédiaires », sur des mathématiques « modestes », où l'étudiant peut tester des propositions, peut-être plus qu'en environnement traditionnel. Mais l'absence des corrigés dérange généralement les étudiants. Cette absence peut être vue positivement puisque les étudiants activeraient les corrigés rapidement et travailleraient à partir de ces corrigés ; ce qui n'est pas non plus l'activité que l'on attend d'eux. Cette absence de corrigé pose cependant les problèmes que nous venons d'observer : les méthodes développées peuvent être problématiques et doivent être questionnées. Elles peuvent donner lieu à des procédures obsolètes ou des méthodes qui ne sont pas nécessairement celles attendues par l'enseignant. Les étudiants peuvent aussi profiter de la puissance de l'ordinateur et de sa neutralité face à leurs essais pour faire de multiples essais en se privant de réflexion préalable. Au-delà des exercices techniques du paragraphe précédent, WIMS impose de ne pas négliger un accompagnement des étudiants sous une forme ou sous une autre. C'est ce que nous développons dans le paragraphe suivant à travers nos enseignements.

Nos enseignements avec WIMS

Une utilisation de WIMS en complète autonomie concerne certains de nos enseignements à des publics hétérogènes à deux niveaux différents, par exemple en licence pluridisciplinaire[7] à l'Université Paris Diderot et en préparation au CAPES à l'Université Paris-Sud à Orsay. L'organisation de révisions en parallèle et en lien avec les séances traditionnelles permet aux étudiants qui ont des lacunes de se remettre à niveau, en autonomie, chez eux, sans prendre du temps d'enseignement en classe. Les exercices proposés aux étudiants ne doivent pas leur poser d'énormes difficultés (exercices techniques, applications relativement immédiates de

[7] 3ème année de licence pour des futurs professeurs des écoles.

connaissances anciennes ou en cours de révision) ce qui minimise les risques de décalages. Par exemple, en préparation au CAPES, on propose les exercices « matrice d'une application linéaire » et « base du noyau » qui font appel à des notions de base nécessaires aux étudiants et sur lesquelles l'enseignant choisit de ne pas revenir en cours. Les révisions de probabilité et le cours sur les graphes sont aussi accompagnés de feuilles d'exercices WIMS. Ainsi, les ressources et les sujets abordés sont de plus en plus nombreux. Pourtant, la participation des étudiants décroît comme elle décroît aussi dans les autres activités d'enseignement. Quelques séances de pratique accompagnée seraient nécessaires ainsi qu'une coordination explicite entre les cours classiques et le travail en libre service dans WIMS.

C'est le même principe en licence pluridisciplinaire à Paris Diderot où le niveau des étudiants entrants est très variable. Voici par exemple les commentaires de ces étudiants sur leur enseignement avec WIMS.

Des exercices intéressants (en rapport avec des concepts concrets), des exercices sur Internet aussi enrichissant.

Concernant le contrôle continu, le travail sur Wims était selon moi une excellente initiative qui permettait un entraînement et un travail personnels. Je regrette simplement qu'un tutorial plus clair n'ait été fait au préalable (notamment concernant la possibilité de suspension de l'enregistrement des notes) et que les consignes des exercices fussent parfois floues. Enfin les niveaux de difficultés des exercices étaient excessivement variés.

enseignement. Cependant les fichiers sur Internet furent une bonne idée.

J'ai trouvé ce cours particulièrement difficile car au sein de celui-ci nous ne sommes pas revenus sur les bases. Nous étions directement dans le vif des exercices et nous corrigions ceux-ci très rapidement par des théorèmes ou des dèfinitions très générales qui ne permettaient pas toujours de faire le lien avec les exercices. Par contre le contrôle continu sur logiciel est une bonne idée et permet de revoir de nombreuses notions de math que nous avons oublié pour la plupart. Donc un point très positif pour celui-ci.

Figure 12 - Commentaires d'étudiants de L3 pluridisciplinaire sur WIMS dans leur enseignement

L'utilisation de WIMS peut accompagner l'acquisition de notions nouvelles. En L1, à l'Université Paris Diderot, l'enseignement magistral des connaissances nouvelles est accompagné d'un travail sur WIMS. Tous les étudiants suivant le cours en amphithéâtre doivent travailler en supplément de leurs TD traditionnels et de leur cours sur des feuilles WIMS qui sont proposées par l'enseignant du cours magistral. Il s'agit cette fois de mettre en fonctionnement de façon relativement immédiate les connaissances nouvelles rencontrées en cours. Cependant, avant le travail des étudiants sur WIMS, certains des exercices WIMS qui peuvent être considérés comme difficiles sont traités au tableau à l'occasion d'exemples. Les étudiants poursuivent alors en autonomie le travail sous WIMS par des exercices chez eux qui là encore ne doivent plus leur poser d'énormes difficultés. Il s'agit simplement de leur faire travailler les connaissances de base nécessaires pour bien aborder les TD traditionnels.

En licence scientifique générale[8] à Orsay, une séance d'une heure en salle informatique précède une séance de TD classique. Le contenu des deux séances est fortement lié mais le travail fait dans l'une et l'autre est différent. Il est extrêmement profitable d'alterner les phases de préparation d'exercices dans WIMS et les phases de bilan afin de s'assurer que les étudiants n'évitent pas certaines des connaissances à mettre en fonctionnement, construisent bien ou consolident correctement les connaissances. Par exemple, il peut être plus facile de construire une justification d'un raisonnement quand celui-ci est connu sous forme

[8] 3ème année de licence pour des futurs professeurs des écoles.

algorithmique. L'enseignant propose des exercices plus difficiles à certains en même temps que des aides individualisées à d'autres. On peut aussi plus facilement sortir d'un cadre conventionnel et proposer des exercices ludiques : par exemple, nous avons introduit cette année dans le module d'arithmétique des exercices sur la numération dans l'Antiquité. Pour le module de géométrie, l'apport des exercices dans l'espace est très important. Ainsi, des exercices de section de cube par un plan permettent aux étudiants d'assimiler les trois actions utiles (relier deux points d'une même face, prolonger deux segments coplanaires pour créer un point d'intersection, tracer une parallèle sur une face parallèle) et de voir de nombreux exemples de section construite. On travaille ensuite sur la rédaction de tels exercices. De même, les exercices sur les polyèdres semi-réguliers les invitent à revenir sur les raisonnements combinatoires et leur permettent de manipuler les différents solides à la souris. Ils sont en général très satisfaits de ces séances. Ces séances créent aussi un environnement propice à une aide individualisée.

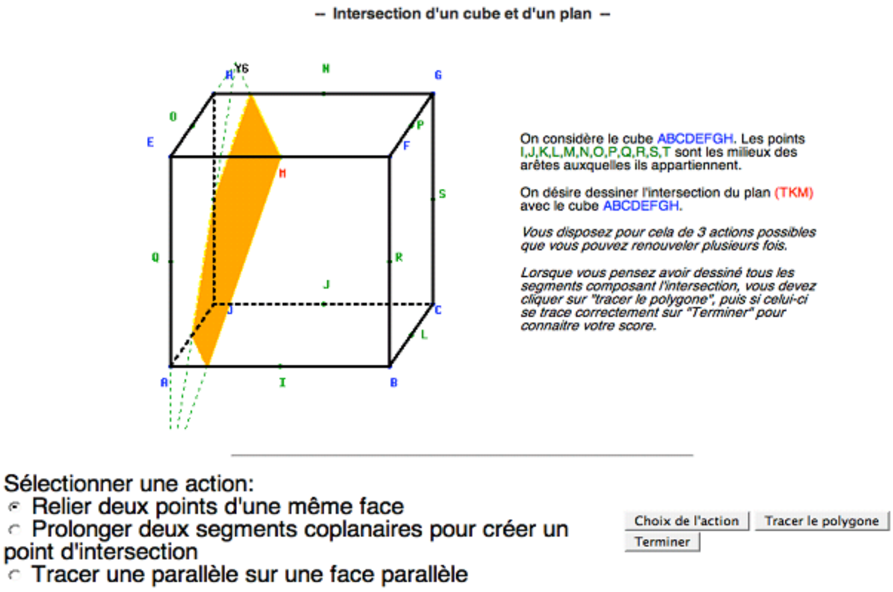


Figure 13 - Exercices WIMS sur la section de cubes par des plans

Le module de 25 heures d'algèbre effective s'adresse à un public différent : les étudiants de licence de Mathématiques fondamentales et appliquées (troisième année) à Orsay. Ce module de programmation à l'aide de logiciels de calculs formels s'appuie sur un cours théorique d'algèbre du premier semestre. Les étudiants sont invités à travailler seuls sur des feuilles d'algèbre et d'arithmétique WIMS portant sur le contenu de ce cours. Ce travail est pris en compte dans l'évaluation globale. L'expérience qui dure depuis trois ans est très positive : Sur douze étudiants (sur 26) ayant répondu au questionnaire d'évaluation, à la question « *Pensez-vous avoir appris quelque chose en algèbre ?* », 6 ont répondu un peu, 6 beaucoup. À la question « *Les exercices WIMS vous ont-ils permis de progresser ?* », les réponses sont :

- dans la feuille *Complexité* : oui (2) ; non (5) ; je ne sais pas (5)
- dans la feuille *Arithmétique* : oui (8) ; non (3) ; je ne sais pas (1)
- dans la feuille *Algèbre linéaire sur Z* : oui (10) ; non (2) ; je ne sais pas (0)

Il faut noter que la feuille *Algèbre linéaire sur Z* a un niveau théorique important et que ces notions abordées au premier semestre ne sont alors pas du tout acquises.

Conclusion

L'étude de la base d'exercice WIMS fait apparaître des exercices dont les tâches se rapprochent de celles que l'on pourrait trouver en environnement papier-crayon mais avec un potentiel différent puisque l'interactivité permet aux étudiants de travailler plus à leur rythme qu'en séance de travaux dirigés traditionnelle et autant de temps qu'ils le désirent sur chacun des exercices. Ils peuvent également échanger entre eux, non pas sur les réponses attendues mais sur les méthodes et les mathématiques en jeux. Certains exercices exploitent plus directement les possibilités informatiques, en particulier graphiques, en permettant des tâches induisant une activité mathématique qui ne pourrait pas être proposée dans l'environnement papier-crayon de façon aussi facile et variée.

Le travail fourni par les étudiants apparaît comme plus important en séance WIMS que pendant les séances de classe traditionnelle mais au terme de nos études plus didactiques sur plusieurs exemples, nous aboutissons à l'idée que ne peuvent être travaillés en totale autonomie que les exercices techniques au sens où nous l'avons défini plus haut. Les traces d'activité des étudiants montrent que ces exercices sont cependant loin d'être inutiles aux étudiants. Ces exercices ne seraient pas autant travaillés en séances traditionnelles et l'enseignant sous-estimerait probablement le temps nécessaire aux étudiants. Les exercices plus complexes mettant en jeu des connaissances nouvelles ou nécessitant de dépasser les applications immédiates auxquelles les étudiants sont habitués rendent cependant nécessaire une scénarisation de l'usage de WIMS. En effet, lorsque les connaissances utilisées ne sont plus disponibles chez les étudiants, les rétroactions du logiciel permettent rarement qu'elles le redeviennent, amenant à certains décalages comme nous en avons décrits plus haut. Nous avons ainsi justifié l'organisation que nous faisions de nos propres cours pour intégrer au mieux WIMS dans l'enseignement traditionnel et le travail des étudiants.

Fabrice Vandebrouck
Université Paris Diderot – Paris 7, Laboratoire de didactique André Revuz
vandebro@math.jussieu.fr

Bernadette Perrin-Riou
Université Paris Sud
bpr@math.u-psud.fr

Marie-Claude David
Université Paris Sud
mcld@math.u-psud.fr

Références

Cazes C. et *al*. (2006). Using E Exercises bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computer in Mathematics Learning*, 11 (3), 327-350.

Cazes C. et *al*. (2005). Utilisation de bases d'exercices en ligne: quelles conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques? Dans Castela C. et Houdement C. (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2005*. pp 177-212. ARDM et IREM de Paris 7.

Hersant M., Vandebrouck F. (2006). Bases d'exercices en ligne et phénomènes d'enseignement-apprentissage. *Repères IREM,* n° 62, 71-84.

Robert A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (2), 139-190.

Robert A., Rogalski M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repères IREM*, n° 54, 77-103.

Vandebrouck F. (Eds) (2008). *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès.

Vandebrouck F. (2007). Une base d'exercices en ligne dans la classe de mathématique: activité des élèves et pratiques des enseignants. Dans Gueudet G. et Matteron Y. (Eds) (2007). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 2007*. ARDM et IREM de Paris 7.

Vandebrouck F. (2006). Des phénomènes d'instrumentalisation pointés dans l'utilisation des bases d'exercices en classe. *EMF 2006, 27-31 Mai 2006*. Sherbrooke, Canada.

Vandebrouck F., Cazes C. (2005). Analyse de fichiers de traces d'étudiants : aspects didactiques. *STICEF*, Vol. 12, 229-267.

Xiao G. (2000). Interactive Mathematics Server. *Journal of online mathematics and its applications*.

Atelier : modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires

María Trigueros Gaisman

Résumé

Dans le but d'aider les élèves à mieux comprendre et appliquer les concepts mathématiques, quelques chercheurs dans le monde ont récemment fait porter leurs efforts vers l'utilisation des modèles du réel non seulement pour motiver les étudiants, mais aussi pour les aider dans leur apprentissage des mathématiques. Les réponses à la question "Comment introduire la modélisation dans l'enseignement ?" sont très variées. Dans cet atelier, nous discutons les problèmes qui se posent dans l'introduction de la modélisation à partir de deux exemples. Nous introduisons ensuite des éléments de la théorie APOS (action, processus, objet, schéma) que nous utilisons pour analyser des activités effectivement proposées dans des classes. Nous discutons enfin les avantages et les limites d'un enseignement appuyé sur la modélisation en nous référant à cette théorie didactique.

I. Introduction

Les résultats récents de la recherche en didactique des mathématiques ont dirigé l'attention vers le rôle que peut jouer le contexte des problèmes à résoudre dans la salle de classe où ils sont introduits afin d'aider les élèves à comprendre et à appliquer les concepts mathématiques. Récemment, quelques chercheurs autour du monde ont dirigé leurs efforts vers l'utilisation de modélisations du réel pas seulement pour motiver les étudiants, mais comme une manière de situer le savoir mathématique dans un contexte.

Les modèles mathématiques apparaissent justement quand on a besoin de répondre à des questions liées à une situation du réel, quand on a besoin de prendre des décisions ou quand il est nécessaire de prédire le comportement d'un phénomène physique ou social. Mais derrière l'idée de l'introduction de la modélisation du réel dans la salle de classe, il y a une hypothèse qui n'est pas toujours posée de manière explicite : on espère que quand les élèves trouvent des situations problématiques intéressantes ils seront capables de les représenter en utilisant des relations entre des variables mathématiques, qu'ils peuvent explorer et manipuler et que, ce faisant, ils pourront développer des idées importantes et puissantes que le professeur pourra diriger vers l'introduction des mathématiques à enseigner.

Les réponses à la question « Comment introduire la modélisation dans l'enseignement des mathématiques ? » sont très variées. Il y a des propositions très proches de la résolution de problèmes traditionnels, mais il y en a d'autres qui utilisent la conception d'expériences en classe, où la modélisation joue un rôle central, et où on espère que les étudiants puissent arriver à des idées mathématiques qui serviront à introduire les notions du cours qu'on désire enseigner. Mais, pour bien comprendre le rôle de la modélisation du réel dans la salle de classe on a besoin d'une réflexion autour de ce que la modélisation signifie dans les mathématiques et du rôle qu'elle peut prendre en l'introduisant dans la salle de classe.

La problématique de cet atelier est celle d'une introduction de la modélisation du réel avec l'intention de favoriser l'apprentissage des mathématiques des étudiants à l'université. Les questions posées d'emblée furent les suivantes : Comment introduire la modélisation dans l'enseignement à ce niveau ? La modélisation est-elle (seulement) une nouvelle version de la résolution de problèmes ? Quelle est la différence ? La modélisation peut-elle devenir un espace où les étudiants peuvent apprendre des mathématiques ? Est-il possible pour les

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 83-101.

étudiants d'arriver à des idées mathématiques intéressantes qui puissent servir pour introduire les matériaux du cours qu'on désire enseigner ?

Il y a eu récemment un effort de recherche sur les résultats didactiques de l'introduction de la modélisation dans la salle de classe (Barbosa, 2006 ; Blum & Niss, 1991 ; Blum *et al.,* 2006, 2007 ; Borromeo Ferri, 2006 ; Burkhardt, 2006 ; Chaachoua & Saglam, 2006 ; Galbraith & Clatworthy, 1990 ; Kaiser & Sriraman, 2006). Ces études ont des fondements théoriques didactiques divers. D'autre part, l'enseignement des mathématiques peut être conçu sur la base de divers modèles d'enseignement fondés sur des théories de didactique des mathématiques. Quelques-unes d'entre elles ont prouvé qu'elles étaient efficaces dans des expériences d'enseignement des mathématiques à l'université. Toutefois, ces modèles ne prennent, en général, pas en considération l'introduction de la modélisation de situations réelles comme une stratégie d'enseignement. Est-il possible alors de créer des situations de classe en utilisant la modélisation et une théorie didactique telle qu'APOS (que nous allons présenter plus loin) ? Comment le faire ?

Ces questions ont été discutées partiellement dans l'atelier. Nous avons commencé par travailler sur deux situations problématiques qui ont été utilisées en classe au Mexique. On a introduit deux situations à modéliser, on a discuté avec les participants des caractéristiques des problèmes en tant que situations de modélisation. Puis les participants ont essayé de les modéliser et ont posé diverses questions. Des éléments des théories APOS et « Models and Modeling » ont été alors introduits afin de motiver une analyse portant sur la façon dont les séances en classe ont été développées dans l'expérimentation avec les situations présentées.

Cet article commence par la présentation des situations de modélisation travaillées dans l'atelier. Nous rapportons ensuite le travail qui a suivi dans l'atelier. Les cadres théoriques sont alors introduits à travers les activités qui ont été discutées avec les participants. Une description de ce qu'on a trouvé avec les élèves dans la salle de classe est aussi présentée. Nous terminons enfin avec un bref commentaire critique sur les possibilités d'utilisation de la modélisation en classe de mathématiques à l'université, et les apports de la théorie APOS et de la théorie « Models and Modeling » pour concevoir les problèmes à modéliser et les activités à proposer. Ce qui permet de répondre à la question posée sur la possibilité d'utilisation de ces deux théories pour introduire la modélisation dans la salle de classe.

II. Présentation de deux situations de modélisation en début d'Université

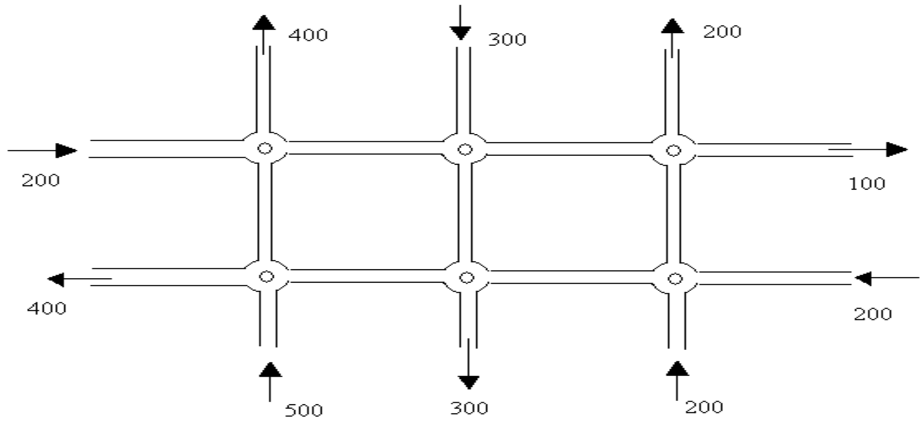
L'atelier a commencé par la présentation de deux problèmes simples, qui ont été travaillés dans un projet de recherche au Mexique. Les deux problèmes choisis peuvent être utilisés dans les premières années à l'université, et même dans les derniers cours de la terminale scientifique.

II.1. Un problème d'algèbre linéaire : problème de circulation

Dans une ville on a besoin de contrôler la circulation des véhicules au centre de la ville. Un schéma montre le réseau routier autour la zone où on l'on veut contrôler la circulation ainsi que la quantité de véhicules qu'on a estimé circuler à l'heure.

Pour travailler ce problème il est nécessaire de poser quelques hypothèses, l'une d'entre elles est que les véhicules ne peuvent pas s'arrêter aux points du réseau, une autre est qu'il n'y a pas de feux aux intersections (de façon à ce que les véhicules circulent sans s'arrêter). On est intéressé à faire l'analyse de la manière dont on peut gérer la circulation. Particulièrement, on cherche à répondre aux questions suivantes :

Est-il possible de fermer une ou plusieurs rues ? Lesquelles ? Si on désirait avoir le moins possible de circulation dans une rue spécifique, quel serait le minimum de véhicules qui doivent passer afin de maintenir une circulation normale dans le réseau ? Est-il possible d'imposer la restriction suivante : ne pas permettre la circulation de plus de 200 véhicules sur une rue en particulier ?



II.2. Un problème d'équations différentielles : problème de mémoire

Une enseignante préoccupée par la tendance actuelle de l'enseignement et par la question de la gestion de l'information par des individus, nous demande de faire une étude sur la mémoire à court terme. En particulier, elle est intéressée quant à la quantité d'information qu'un individu peut mémoriser, le temps pendant lequel il peut retenir l'information, quel genre d'information est plus difficile à mémoriser, et quels sont les facteurs dont la mémorisation dépend, comme par exemple l'âge, le temps consacré à mémoriser, la quantité d'information, ou le niveau scolaire de l'individu.

III. Deux cadres théoriques complémentaires

Le travail de recherche présenté dans l'atelier a utilisé deux cadres théoriques qu'on considère pouvoir être utilisés de manière complémentaire.

III.1. Modèles et Modélisation

L'introduction de la modélisation comme stratégie d'enseignement a pour objectif d'aider les étudiants à développer leurs idées mathématiques et à leur donner une signification. Dans le domaine de la didactique des mathématiques il existe diverses positions théoriques sur la modélisation ; l'une d'elles, appelée « Modèles et Modélisation » (Lesh & English, 2005) propose que, quand les étudiants travaillent sur la solution d'un problème du réel, il est possible de trouver des évidences de leurs connaissances et stratégies de résolution de problèmes à travers une méthodologie où les élèves expriment leur processus de solution dans des produits concrets. Selon ce cadre théorique, quand les étudiants travaillent sur un problème ouvert, ils expriment verbalement leurs pensées, en mettant en évidence des systèmes conceptuels qu'ils utilisent, des relations entre concepts qu'ils ont établis ou qui sont favorisés par le problème et la façon dont ils l'emploient. Les auteurs ont développé des critères pour analyser les situations pouvant être utilisées en classe. Selon ces auteurs, il est nécessaire d'utiliser en classe des situations réelles et complexes où les étudiants peuvent raisonner mathématiquement, en utilisant ce qui est déjà connu pour eux. Pour y réussir il est important que les étudiants développent des instruments conceptuels qui peuvent être utilisés pour prendre des décisions et les justifier.

Les auteurs ont explicité des critères que les situations choisies doivent satisfaire. Nous les avons brièvement commentés par rapport aux situations présentées dans l'atelier.

- **Principe de réalisme** : les étudiants peuvent-ils faire face à la situation en utilisant leurs connaissances et leurs expériences ?
- **Principe de construction du modèle :** Est-ce que la tâche permet de rencontrer une situation où on doit confronter le besoin de modifier, affiner ou d'étendre ses connaissances ?
- **Principe d'auto-évaluation :** les élèves peuvent-ils évaluer leur modèle à partir des résultats obtenus ?
- **Principe de documentation** : Est-il possible que les étudiants rendent manifeste leur raisonnement ?
- **Principe de généralisation :** Est- il possible d'utiliser le modèle dans d'autres situations ?
- **Principe de simplicité :** Est-ce que la situation à modéliser est, en principe, simple ?

Encore une fois, la situation de la circulation a été questionnée du point de vue du principe de réalité, mais nous avons trouvé que les autres principes étaient satisfaits par les deux situations.

III.2. La théorie APOS

La description qui suit de la théorie APOS a été prise textuellement de Trigueros & Oktaç (2005) jusqu'à la description de l'utilisation de la théorie. La théorie APOS prend comme cadre de référence épistémologique la théorie de Piaget. À partir des idées piagétiennes sur la façon de passer d'un état de connaissances à un autre, la théorie APOS s'intéresse à la construction des concepts mathématiques, en particulier ceux qui correspondent aux mathématiques universitaires (Asiala *et al.*, 1996 ; Czarnocha *et al.*, 1999 ; Trigueros & Oktaç, 2005 ; Weller *et al.*, 2003).

Comme c'est le cas pour n'importe quel autre changement d'idées d'un environnement à un autre, cette transposition de l'épistémologie à l'éducation implique des arrangements et de nouvelles définitions.

Dans la théorie APOS la construction de la connaissance mathématique passe par trois étapes principales : action, processus et objet. Le passage par ces trois étapes n'est pas nécessairement linéaire. Un individu peut rester longtemps à des étapes intermédiaires, voire être à une étape pour certains aspects d'un concept et à une autre pour d'autres aspects du concept. Ce qui est vraiment linéaire c'est que la forme de travail qu'un individu montre face à diverses situations problématiques est différente quand il répond d'une manière qui peut être caractérisée dans la théorie comme un processus ou au contraire comme un objet ou une action. Il est clair aussi que le type de réponses de l'individu dépend beaucoup des exigences cognitives du problème posé.

Le mécanisme principal dans la construction de la connaissance mathématique dans cette théorie est l'abstraction réfléchissante. Ce mécanisme est activé à travers les actions physiques ou mentales que l'individu réalise sur l'objet de connaissance, par le moyen de la réflexion du sujet lui-même sur ses actions. De même que dans la théorie de Piaget, l'interaction entre le sujet et l'objet de connaissance est considérée comme dialectique.

Un aspect important du modèle APOS, comme instrument de recherche mais aussi comme instrument d'enseignement, se trouve dans le fait que pour travailler avec le modèle il est nécessaire d'interpréter les concepts à apprendre du point de vue des mathématiques, ce qui doit suivre une logique qui est différente de celle qui est utilisée pour construire des concepts d'autres disciplines. Au-delà de la partie cognitive, la théorie inclut un composant qui incorpore la partie sociale de l'apprentissage. Dans cette dernière partie, on prend en compte l'importance pour la construction des connaissances de la collaboration entre les étudiants et le professeur, ainsi que l'importance de l'utilisation d'autres moyens comme la technologie.

Dans la théorie APOS on commence par une analyse des concepts mathématiques à étudier. Dans cette analyse, connue comme décomposition génétique du concept (Dubinsky, 1986), on met en relief les constructions qui peuvent être nécessaires à l'apprentissage.

Au départ ce sont les chercheurs qui proposent, sur la base de leur expérience dans la classe, une décomposition génétique du concept à étudier. Plus tard, à travers le processus de recherche, cette décomposition est affinée pour qu'elle s'approche de l'activité observée chez les étudiants quand ils travaillent avec le concept. Il est important de dire qu'il n'est pas possible de parler de LA décomposition génétique d'un concept, car elle dépend de la formulation qui a été faite par les chercheurs. Il est possible que diverses décompositions génétiques coexistent pour un même concept ; quelle que soit celle qui est retenue, il est important que ce soit un instrument qui décrive effectivement les observations des travaux des étudiants.

Une décomposition commence, comme on l'a déjà dit, par l'analyse des constructions du sujet quand il apprend un concept mathématique en termes de ce qui est observable. Ces constructions sont caractérisées par les noms : action, processus, objet et schéma.

Action

Une action est une transformation des objets que l'individu perçoit comme quelque chose d'externe. Autrement dit, un individu qui a une compréhension d'une transformation limitée à une conception-action ne peut exécuter la transformation qu'en réagissant à des indications externes qui lui donnent des détails sur les pas à suivre. Puisque la conception-action est très limitée, les actions déterminent le début crucial de la compréhension d'un concept.

Un exemple d'une conception-action sur la notion de « classe latérale » (à gauche ou à droite) d'un groupe en algèbre abstraite est le suivant. Prenons le groupe modulaire Z_{20} (les entiers {0,…,19} avec l'opération d'addition modulo 20) et le sous-groupe H = {0, 4, 8, 12, 16} des multiples de 4. Il n'est pas très difficile pour les étudiants de travailler avec les classes latérales telles que 2 + H = {2, 6, 10, 14, 18} car elles sont formées, soit par une liste explicite des éléments obtenus en additionnant 2 à chaque élément de H, soit en appliquant une règle, par exemple, « on commence par 2 et on ajoute 4 » ou bien en appliquant une condition explicite comme « le résidu de la division par 4 est 2 ». La compréhension d'une classe latérale » comme l'ensemble des opérations qu'on considère vraiment effectives pour obtenir un certain ensemble est une conception-action. Dans le cas de S (le groupe de toutes les permutations de n objets), il faut quelque chose de plus pour travailler avec les classes latérales car il n'y a pas de formules simples.

Un exemple d'action de la condition de fermeture sur un ensemble donné de vecteurs consiste à prendre deux vecteurs de l'ensemble, faire l'addition et vérifier si le résultat est un élément de l'ensemble.

Processus

Quand on répète une action et que l'on réfléchit sur elle, l'action peut s'intérioriser comme un processus. Cela veut dire qu'il y a une construction interne qui se produit, qui exécute la même action, mais cette fois-ci elle pas nécessairement dirigée par un stimulus externe. Un individu qui a une conception-processus d'une transformation peut réfléchir sur les pas de la transformation, les décrire ou même les inverser sans vraiment les effectuer. En comparaison avec une action, l'individu perçoit le processus comme quelque chose d'interne, placé sous son contrôle, au lieu d'une réponse à des impulsions externes.

En algèbre abstraite, une compréhension des « classes latérales » intériorisée comme un processus inclut de penser à la formation d'un ensemble à travers l'opération d'un élément fixe, sur tous les éléments d'un sous-groupe particulier. De plus, il n'est pas nécessaire d'effectuer les opérations, mais seulement de penser qu'elles s'effectuent.

Quand on a une conception-processus, on peut former des « classes latérales » dans des situations où il n'y a pas de formule. En algèbre linéaire, un exemple de processus se rencontre quand un étudiant est capable d'exprimer les étapes nécessaires pour déterminer, sans besoin de vérification, que l'addition de deux éléments d'un ensemble de vecteurs donnés est ou n'est pas un élément dans l'ensemble. On peut dire que le sujet a intériorisé les actions en processus. De la même façon, quand il est capable d'expliquer comment chaque axiome se vérifie (sans avoir besoin de calculer) pour qu'un ensemble donné soit un espace vectoriel, on dit qu'il montre une conception-processus.

Les étudiants peuvent construire différents processus en faisant diverses chaînes d'actions sur un objet, et ils peuvent aussi coordonner ces processus ou les généraliser pour obtenir un nouveau processus.

Objet

Quand un étudiant réfléchit sur les opérations appliquées sur un processus particulier, il se rend compte de la totalité du processus et perçoit le processus comme une transformation globale et il peut aussi construire par lui-même cette transformation. On dit alors que l'étudiant a encapsulé le processus pour construire un objet cognitif. On dit donc que l'étudiant a une conception-objet d'un concept mathématique s'il est capable de travailler avec cette idée comme une entité mathématique. Ceci prend en compte la capacité de faire des actions sur l'objet et de raisonner sur les propriétés de cet objet.

Les étudiants peuvent aussi renverser l'objet ou le désencapsuler pour travailler encore une fois avec le processus si nécessaire pour la solution d'un problème. Par exemple si x est un élément et H un sous-groupe du groupe G, et si un étudiant pense d'une manière générale à la classe latérale (à gauche) xH comme un processus dans lequel on fait opérer x sur chaque élément de H, ce processus peut être encapsulé en un objet xH. L'étudiant est alors capable de faire des opérations sur cet objet, aussi bien que de désencapsuler cet objet pour utiliser ce processus lorsque nécessaire.

En algèbre linéaire, un étudiant qui est capable de démontrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs est un sous-espace d'un espace vectoriel est très vraisemblablement en train de manifester une conception-objet du concept « combinaison linéaire ». Dans le cas du concept sous-espace, cette évidence peut inclure sa possibilité de déterminer si deux ensembles de vecteurs différents forment des sous-espaces équivalents.

Schéma

On appelle schéma d'un thème mathématique ou d'un concept plus général, la collection d'actions, de processus, d'objets et d'autres schèmes qui ont des liens entre eux de telle façon qu'ils forment pour l'étudiant un cadre cohérent. L'individu peut être ou ne pas être conscient du cadre qui rend les liens possibles. Pour que l'individu démontre que cette collection est cohérente, il est nécessaire qu'il soit capable de reconnaître les différentes situations où elle est applicable, qu'il puisse décider entre les types de problèmes qui peuvent être résolus en utilisant cette collection et ceux où elle ne sert pas et qu'il puisse connaître les capacités de la collection.

Les étudiants peuvent considérer un schéma comme un objet sur lequel l'on peut faire des actions. Quand les étudiants sont capables de considérer un schéma comme un objet on dit qu'ils ont thématisé le schéma. On a donc deux façons de construire des objets, soit par l'encapsulation d'un processus, soit par la thématisation d'un schéma.

III.2.1. APOS comme instrument didactique

Comme nous l'avons déjà mentionné, une décomposition génétique est construite par les chercheurs comme une première approximation pour modéliser l'apprentissage du concept mathématique en question. De plus, non seulement cette décomposition est utilisée dans la recherche, mais elle sert aussi comme instrument du projet d'enseignement. Le cycle ACE (Activités – Discussion en Classe – Exercices), comme nous le décrirons plus tard, se base sur les idées de cet instrument et tout est préparé pour que les étudiants puissent faire les constructions mentales prévues dans la décomposition génétique.

III.2.2. Visualisation en APOS

La représentation graphique et géométrique est considérée comme une partie intégrante de la construction des concepts. Le développement de la représentation demande aussi une intériorisation des actions, une encapsulation des processus et une construction des liens avec l'objet analytique. Quand on utilise la théorie APOS pour développer des activités et des matériels pour les étudiants, la représentation graphique est incluse soit dans la Discussion, soit dans les Activités.

Quand on considère que cette représentation joue un rôle important dans la construction des concepts, une partie centrale lui est consacrée. La théorie APOS se centre sur la visualisation des processus qui transforment les objets. Pendant que la visualisation des objets statiques est relativement facile à faire, la visualisation des processus dynamiques demande la construction mentale de ces processus sur des phénomènes statiques (Zazkis *et al.*, 1997).

III.2.3. Le rôle du professeur

Dans cette approche, pendant que les étudiants travaillent les activités en petits groupes, le professeur joue le rôle de guide : il aide les étudiants, il pose des questions. Il décide par avance des activités à utiliser en classe et de celles qui feront partie des devoirs. Dans la discussion, il aide à l'institutionnalisation des savoirs.

III.2.4. L'utilisation de la théorie APOS

La théorie APOS a été utilisée par un certain nombre de chercheurs provenant de nombreux pays pour étudier la façon dont les étudiants construisent divers concepts mathématiques. Peut-être que les travaux les plus connus sont ceux qui se réfèrent au concept de fonction, mais la théorie a été appliquée avec succès aux concepts de l'Analyse, de l'Algèbre Abstraite, des Équations Différentielles et de la Logique Mathématique. La théorie n'a pas été utilisée uniquement comme cadre théorique pour faire de la recherche, elle a été aussi appliquée à la préparation de matériels d'enseignement et de manuels universitaires. L'utilisation de ces matériels a été l'objet de projets de recherche qui ont montré qu'effectivement les étudiants qui les utilisent réussissent à faire les constructions prévues par la théorie, et par conséquent à apprendre les concepts avec plus de profondeur que les étudiants qui suivent d'autres méthodes (Weller, et al, 2003)

Mais, comment introduire la modélisation dans la théorie APOS qui ne la considère pas d'emblée ? Quels problèmes se posent par l'introduction de la modélisation de situations réelles dans la salle de classe ? Comment peut-on utiliser la modélisation en conjonction avec une théorie de la didactique des mathématiques, telle qu'APOS ?

III.2.5. La modélisation avec APOS. Premières idées

Comme on peut le voir à partir de ce que nous avons présenté sur le cadre théorique APOS, il n'y a aucune référence dans la théorie à la modélisation, comprise non pas comme modélisation de l'activité mathématique de l'élève, mais comme la mathématisation d'un problème du réel en termes mathématiques. La théorie a donc besoin d'une extension. Cependant, il est important de signaler que quand on se réfère à la modélisation, celle-ci n'est pas limitée aux situations en dehors des mathématiques, il est aussi possible de considérer des situations de modélisation qui peuvent être situées comme un problème qui se pose dans le domaine d'une situation mathématique. Et même les problèmes dits réels à travailler ne peuvent pas être séparés complètement de l'activité de construction des mathématiques.

Du point de vue de la théorie APOS on pourrait dire que la modélisation est importante, non seulement pour le résultat qu'on peut obtenir de la modélisation mais pour le processus même de modélisation et pour ce qui peut être fait avec la solution. De ce point de vue, ce qui nous intéresse c'est de rencontrer des situations qui soient utiles pour la construction des connaissances mathématiques. On peut alors commencer par se demander : Quelles sont les constructions impliquées dans l'activité de modélisation ?

Une première réponse peut être la suivante : En face d'un problème, l'individu doit coordonner les schémas qu'il a construits dans le domaine des mathématiques et dans d'autres domaines qui peuvent être utiles pour commencer à faire des actions d'exploration du problème. Ces schémas ou des composants de ces schémas lui permettent d'explorer la situation proposée et, possiblement, de donner une première réponse aux questions proposées par le problème. Par exemple, pour le problème de la circulation, l'exploration peut commencer par l'analyse du nombre d'autos qui rentrent dans le système et ceux qui en sortent afin de trouver s'il y a une rue qui peut être fermée ; dans la situation de la mémoire, il est possible d'utiliser un schéma de fonction et le coordonner avec ce qu'on connaît sur la mémoire pour faire un graphe d'une fonction qui pourrait modéliser la situation.

L'exploration peut être décrite en termes d'actions sur les éléments du schéma. Ces actions peuvent être intériorisées dans des processus où la situation est considérée de manière générale et où il est nécessaire de formuler quelques hypothèses pour la simplifier et pour chercher des éléments de réponse préliminaires, qui permettent de mieux la comprendre. Le résultat de la coordination de ces processus est un nouveau processus où les variables mathématiques liées à la situation sont choisies. Des actions ou processus nécessaires pour déterminer les relations entre ces variables sont faites, et il est alors possible d'obtenir une première mathématisation de la situation. Par exemple dans la première situation, il est possible de choisir les croisements des rues, ou les morceaux des rues comme des variables et d'établir leur lien avec les entrées et sorties du réseau ; dans la seconde, il est possible de considérer que ce que l'on peut mémoriser dépend du temps, que la quantité d'information mémorisée ne peut pas grandir indéfiniment, et que la façon dont l'information mémorisée change joue un rôle important.

Une fois que le problème a été représenté mathématiquement, l'individu dispose d'un modèle sur lequel il peut faire des actions, c'est-à-dire, qu'il peut l'encapsuler comme un objet. L'individu fait des actions sur ce modèle afin de l'analyser et de déterminer ses propriétés. Ces actions peuvent être intériorisées en des processus qui lui permettent de faire des coordinations avec ses schémas, pour transformer le modèle. La coordination de ces processus rend la construction de nouveaux schémas possible. Les processus de transformation et de coordination peuvent être thématisés dans un nouveau schéma. Quand cela arrive, l'individu peut faire des actions et des processus sur cet objet et répondre aux questions posées, analyser le modèle, le modifier, répondre à des nouvelles questions, généraliser le modèle et recommencer. De cette façon, un nouveau cycle apparaît et le processus va se répéter jusqu'au moment où le modèle trouvé permet de répondre de manière satisfaisante aux questions posées.

Les schémas qui sont utilisés pour faire des actions sur le modèle peuvent s'avérer insuffisants pour répondre aux questions intéressantes. C'est à ce point là que la décomposition génétique des concepts peut se révéler utile pour préparer des activités qui favorisent la réflexion des étudiants et la construction de nouveaux processus, objets ou schémas mathématiques. La raison d'être de ces activités doit se reconnaître par leur relation avec le travail sur le modèle mathématique.

Quand une nouvelle situation se présente, le schéma construit pour le développement d'un modèle particulier, peut être désencapsulé pour faire des actions sur la représentation du problème et des processus de comparaison du nouveau problème avec des modèles déjà connus. Le résultat de cette comparaison peut amener l'étudiant à conclure que deux situations problématiques se ressemblent par leur formulation mathématique et qu'en dépit du fait qu'elles soient différentes, elles ont la même structure en termes du modèle mathématique qui peut être utilisé pour les étudier.

IV. Le travail dans l'atelier

Les participants de l'atelier ont travaillé par groupes de trois ou quatre après la présentation des situations de modélisation. Chaque groupe a choisi un des problèmes afin de l'analyser en essayant de répondre aux questions suivantes :

1) Quelles sont les idées mathématiques qui peuvent être introduites avec ce problème ?
2) Si on veut l'utiliser en classe, qu'est ce qu'on ferait ?
3) Quelles sont les difficultés que les étudiants peuvent avoir quand ils travailleront avec le problème ?

IV.1. Discussion autour des situations

Les participants de l'atelier ont posé beaucoup de questions autour des problèmes posés. D'une part, les deux problèmes sont tout à fait différents en tant que situations de modélisation. Le problème de circulation peut être considéré comme une situation déjà modélisée, ou partiellement modélisée, alors que le deuxième problème présente une situation totalement ouverte, où il est nécessaire de discuter et de prendre de nombreuses décisions avant de proposer un modèle. De plus, dans le problème de la circulation, la présentation inclut des hypothèses. Dans une situation de modélisation du réel, ce sont les étudiants qui devraient les choisir. On s'est demandé dans l'atelier si la situation était vraiment une situation de modélisation.

Nous avons rappelé que les deux problèmes ont été utilisés en classe. Les décisions sur leur présentation avaient été déterminées par le niveau d'expérience des étudiants et aussi par le résultat des expériences préliminaires de leur utilisation avec des groupes similaires d'étudiants. Le problème de circulation a été présenté comme une situation complètement ouverte avec des groupes de différents niveaux d'étudiants dans un cours d'algèbre linéaire. Nous avons observé que pour les étudiants des sciences administratives le problème ouvert était difficile à gérer et que les discussions se centraient sur des aspects superficiels de la situation présentée. Nous avons alors décidé de présenter les hypothèses du problème pour diriger l'attention des étudiants vers les aspects de la situation qui pouvaient être le plus facilement modélisés. D'autres groupes, comme ceux d'étudiants de mathématiques, ont travaillé avec une présentation ouverte du problème et ont été capables de poser par eux-mêmes les hypothèses incorporées à la version du problème présenté dans l'atelier.

Les participants ont aussi analysé les deux problèmes du point de vue des critères de la théorie « Models and Modeling ». Après la discussion, nous avons décidé qu'en tant que situation problématique la situation ne devait pas être présentée déjà modélisée, même partiellement. Nous avons retravaillé ensuite sur les problèmes en petits groupes de participants et posé la question : quelles sont les idées mathématiques qui peuvent être introduites avec ces problèmes ?

IV.2. Analyse des situations du point de vue des mathématiques

L'analyse des situations, dans l'atelier, en termes des concepts mathématiques qu'on peut introduire en les utilisant a été très riche. La première situation était plus claire, car les hypothèses et quelques informations additionnelles étaient incluses dans la présentation même du problème. Il était très clair pour les participants qu'on pouvait la modéliser en utilisant un système d'équations linéaires. Il était clair aussi que les concepts qu'on pourrait introduire avec le modèle étaient ceux de solution de systèmes, matrices, et quelques notions de programmation linéaire.

La seconde situation peut être analysée en utilisant différents outils, par exemple les fonctions ou l'analyse. La connaissance de la classe où la situation a été introduite a permis de se rapporter aux équations différentielles de premier ordre. Les concepts que nous avions pensé introduire étaient le concept même d'équation différentielle, celui de solution et le statut des conditions initiales.

Après une brève discussion sur la modélisation des problèmes, les questions suivantes ont été présentées : Si l'on voulait l'utiliser en classe, qu'est ce que l'on ferait ? Quelles ont été les difficultés des étudiants dans la situation de classe ? Comment utiliser les éléments d'une théorie cognitive dans la situation de modélisation ?

Nous avons alors introduit quelques idées sur des cadres théoriques qui avaient été utilisés lors de nos expériences afin de les utiliser postérieurement dans l'analyse des activités présentées aux étudiants. Après la discussion autour des concepts mathématiques qui pouvaient être introduits avec chacune des situations, les cadres théoriques ont été présentés avec un bref commentaire des participants sur les deux théories et nous avons parlé un peu du travail des élèves.

Nous avons présenté aussi, dans l'atelier, une décomposition génétique pour les systèmes d'équations algébriques linéaires (Trigueros *et al.*, 2007). Nous avons analysé ensuite quelques activités qui ont été employées dans la salle de classe en utilisant les éléments des décompositions génétiques. Finalement nous avons brièvement introduit quelques résultats de la recherche avec les élèves et leurs difficultés, car les participants en ont montré de l'intérêt, mais ces questions n'ont pas été discutées dans l'atelier.

IV.3. Exemple de décomposition génétique et des activités analysées

On présente ici la décomposition génétique du concept d'équation différentielle du premier ordre (pour consulter celle des systèmes d'équations, voir Trigueros *et al.* 2007). Dans le cas du modèle de la mémoire, la décomposition génétique qui a été employée pour guider l'élaboration des activités était celle du concept d'équation différentielle de premier ordre.

Pour construire le schéma « solution d'une équation différentielle de premier ordre », il faut avoir construit d'abord les objets : ensemble, variable, équation algébrique, dérivée d'une fonction de variable réelle, intégrale d'une fonction de variable réelle, ainsi qu'un schéma de fonction.

Les processus de fonction de variable réelle, de dérivée et d'équation peuvent être coordonnés pour construire un nouveau processus où il est possible de considérer comme une équation une expression qui lie une fonction à sa dérivée et où l'inconnue est la fonction. Le processus peut s'encapsuler en un objet : une équation différentielle.

Pour construire l'objet solution de l'équation, il est nécessaire de faire des actions pour vérifier si une fonction donnée est solution d'une équation donnée ou pas. Ces actions sont intériorisées dans un processus où il est possible de considérer toutes les fonctions possibles qui sont solution d'une équation différentielle du premier ordre donnée. Ce processus est coordonné avec le processus ensemble pour construire l'ensemble de toutes les fonctions qui sont solution de l'équation différentielle, et ces processus peut s'encapsuler en l'objet « ensemble solution ».

Pour trouver des solutions d'une équation différentielle, il est nécessaire de faire des actions sur l'équation différentielle comme processus. Ces actions peuvent être des itérations en utilisant comme point de départ la condition initiale (actions numériques). Quand l'étudiant répète ces actions en prenant le dernier résultat comme point de départ, il peut construire un tableau pour montrer des points différents qui appartiennent de manière approximative à la fonction solution. Ces actions peuvent être intériorises en un processus qui permet l'approximation de la solution de l'équation pour une condition de départ donnée.

D'autres actions possibles peuvent être les suivantes : prendre un point de l'espace et utiliser l'équation donnée pour calculer la dérivée et la représenter comme un segment de droite sur le plan cartésien (actions graphiques). Quand ces actions se répètent pour plusieurs points, ils peuvent s'intérioriser en un processus qui permet de considérer tous les segments de droite qui pourraient se construire de cette façon et construire ainsi une représentation du champ des tangentes de l'équation. Ce processus peut se coordonner avec le processus de construction des courbes tangentes à ces segments et les considérer comme une représentation graphique de l'ensemble solution d'une équation donnée.

Une troisième construction à suivre consiste en des actions conduisant à l'intégration de l'équation différentielle, quand c'est possible, pour trouver une solution ou une famille de solutions. Ces actions peuvent être intériorisées en un processus pour trouver la solution d'une équation donnée. Tous ces processus peuvent être liés entre eux et avec l'objet équation différentielle et l'objet ensemble solution pour construire le schéma.

Exemples d'activités

I.3 Qu'est-ce que la dérivée d'une fonction ? Quels renseignements nous donne-t-elle sur la fonction ?
- Pour les équations suivantes : x'=ax, x'=at-b, x'= ax + b…
- Utiliser cette information pour analyser comment la fonction solution change.
- Faire un graphe qui montre le comportement de la solution
- Que pouvez-vous dire de la concavité de la solution ?
- Est-ce que la solution a des maximums, des minimums ou des points d'inflexion ?
- Est-ce que la solution que vous avez trouvée est unique ? Pourquoi ?

I.8 Si f'= g(f(t)) on dit que l'équation est autonome. Quels sont celles des équations des activités antérieures qui sont autonomes ? Pourquoi ?
- Comment peut-on résoudre une équation autonome ? Justifier.

IV.4. Quelques difficultés des étudiants

Enfin, les premières difficultés des étudiants qui ont participé à la phase expérimentale ont été présentées.

- dans la situation de la circulation les élèves proposèrent immédiatement une solution à partir de calculs avec les nombres donnés ; ils ne savaient pas comment utiliser les hypothèses ; ils ont eu des difficultés avec la définition des variables et des paramètres.
- dans la situation de la mémoire, les élèves se demandèrent comment faire la mathématisation du problème, quelles hypothèses pouvaient aider à poser la situation d'une manière plus adéquate, ils ont montré des difficultés avec les notions de fonction et de variation ; ils ont eu besoin de questions pour les guider.

Avec le guidage du professeur, les élèves des deux classes sont arrivés à différents modèles mathématiques. Le travail sur les modèles a été combiné avec le traitement des activités conceptuelles produites en s'appuyant sur la théorie APOS. Nous décrivons maintenant le travail dans la salle de classe qui a été présenté très rapidement dans l'atelier.

V. Description du travail dans la salle de classe

Avant la classe, on commence en faisant ou en choisissant une décomposition génétique des concepts à introduire et une révision des principes donnés antérieurement pour choisir un modèle à travailler dans la salle de classe. On fait ensuite une analyse *a priori* pour prévoir quels seront les nouveaux besoins demandés par la situation à modéliser. Avec l'information obtenue, on crée des activités pour les étudiants.

Une fois dans la salle de classe, on commence par le travail sur le modèle. Les étudiants utilisent ce qu'ils ont appris pour explorer, modéliser et répondre aux questions intéressantes. Le travail sur le modèle peut nécessiter de nouveaux concepts. C'est précisément au moment où les étudiants en ont besoin que le professeur introduit les activités qu'il considère pertinentes. Les activités prévues peuvent être modifiées selon les besoins réels des étudiants identifiés en classe. Après le travail sur les concepts, on organise une discussion générale où chaque équipe présente ce qu'elle a fait jusqu'à ce moment-là, pendant que les autres étudiants et le professeur posent des questions ou font des recommandations. Ensuite, on reprend la manipulation du modèle, et quand il y en a besoin on utilise d'autres activités. Ce cycle peut se répéter jusqu'à ce qu'on arrive au but prévu – par l'enseignant – de l'activité de modélisation.

C'est de cette façon que nous avons donné une réponse aux questions : La modélisation peut-elle devenir un espace où les étudiants peuvent apprendre des mathématiques ? Est-il possible pour les étudiants d'arriver à des idées mathématiques intéressantes qui puissent servir pour introduire les matériaux du cours que l'on désire enseigner ?

V.1. Présentation de quelques résultats de la recherche

Il a été observé que le processus de discussion après chaque cycle de modélisation était utile. La discussion était un moment de réflexion et de justification où chaque groupe pouvait trouver des nouvelles idées pour retravailler le modèle.

Les cycles de modélisation : le cas du modèle de la mémoire

Dans le cas du modèle de la mémoire, on peut décrire les cycles de modélisation suivis de cette façon : Sélection des variables et discussion pour trouver des relations entre les variables ; introduction de la variation de la fonction comme une variable intéressante ; affinement du modèle et première analyse, recherche des solutions possibles et du rôle des paramètres ; expérimentation, représentation et analyse des donnés ; travail sur la présentation.

Pendant le premier cycle, les étudiants ont essayé de trouver une fonction avec le comportement qu'ils pensaient qui pouvait décrire l'évolution du processus de mémorisation. Quelques groupes ont introduit des représentations analytiques de fonctions possibles, d'autres ont utilisé des représentations graphiques. Les variables utilisées étaient toujours la quantité d'information mémorisée et le temps. La discussion sur la viabilité des différentes fonctions proposées a conduit les étudiants à considérer la nécessité d'introduire des hypothèses pour justifier la sélection d'une éventuelle fonction, et pour justifier l'emploi des deux variables. Ils ont discuté aussi sur quelques facteurs qui ont une incidence sur la mémorisation et comment les prendre en compte dans les modèles proposés. Puis, nous avons discuté sur le rôle des hypothèses dans le processus de modélisation.

Dans le second cycle, quelques groupes ont commencé à considérer la quantité totale d'informations à mémoriser, et ont introduit l'idée de variation en prenant en compte la différence entre la quantité d'informations qu'on pourrait mémoriser au début et la quantité d'informations qu'on pourrait mémoriser quand on a déjà mémorisé un certain nombre de données, de paroles ou d'informations. Les premiers modèles prenant en compte une relation entre la variation de la quantité d'informations, la quantité d'informations et le temps sont apparus. La question « Comment trouver une fonction qui satisfait la relation ? » fut posée. La discussion générale après ce cycle se focalisa sur l'équation différentielle posée et sa justification. Après cette discussion, la plupart des équipes ont considéré l'introduction de la variation de la quantité d'information et sa relation avec la fonction dans une même équation.

Des modèles différents ont été proposés pendant le cycle suivant. Avec l'aide de la professeure et d'autres élèves, chaque équipe a tenté de trouver la façon de réduire le nombre de paramètres introduits dans les modèles. Ils se sont demandé comment on pouvait justifier si le modèle était pertinent ou pas. Un résultat intéressant dans ce cycle était que quelques groupes ont utilisé leurs connaissances sur la dérivée d'une fonction pour essayer de faire un graphe, trouver une fonction solution et considérer si cette fonction était ou non adéquate. Quelques procédures numériques ont été essayées et une équipe a utilisé un graphe similaire à l'espace des phases comme représentation pour déterminer le comportement de la fonction. À ce moment, la professeure a introduit des activités dans lesquelles les connaissances d'analyse étaient utilisées pour faire des représentations numérique et graphique de la solution d'une équation différentielle du premier ordre. Les concepts et les définitions introduits dans les activités ont été utilisés par les étudiants pour représenter leurs modèles. Dans la discussion à la fin de ce cycle, la pertinence du modèle et des hypothèses a été considérée, et quelques définitions et théorèmes sur lesquelles les étudiants avaient déjà travaillé dans les activités conceptuelles ont été institutionnalisés.

Avec une première représentation de la solution, les élèves ont discuté le rôle des conditions initiales. C'était important car dans certains modèles suggérés par les étudiants ces conditions initiales étaient considérées dans l'équation différentielle. Les étudiants ont aussi essayé de trouver des solutions pour l'équation mais ils ont rencontré beaucoup de difficultés. La professeure a introduit de nouvelles activités pour travailler quelques techniques de résolution liées aux modèles. Les étudiants ont appliqué ces techniques aux modèles pour obtenir finalement l'ensemble solution. L'étape suivante fut de concevoir une expérience pour vérifier le modèle.

Les expériences furent très variées et intéressantes. Par exemple, une équipe qui avait présenté un modèle en deux parties, l'une pour décrire combien d'informations une personne peut apprendre dans une liste avec un certain temps d'étude, et l'autre pour décrire comment s'oublie l'information après l'avoir étudiée, a élaboré une expérience où des personnes d'âges différents devaient apprendre une liste de mots et les répéter dans l'ordre. Ils les questionnaient toutes les deux minutes d'étude, et notaient le nombre de mots répétés correctement. Quand les participants ont appris toute la liste, il leur était demandé toutes les cinq minutes de donner la liste et le nombre de mots rappelés était noté. Les méthodes pour calculer les valeurs des paramètres étaient aussi variées. Quelques équipes ont utilisé des méthodes numériques simples, d'autres des méthodes graphiques. Les méthodes utilisées n'étaient pas sophistiquées, mais ce n´était pas le but de l'activité de les développer, il était plutôt question que les élèves se rendent compte de leur utilité et des limitations possibles.

Finalement chaque équipe a préparé une présentation finale où les étudiants devaient faire une analyse critique du modèle choisi et dans le cas où le modèle n'était pas adéquat discuter les changements possibles à introduire.

Exemple de cycles suivis par des groupes d'étudiants

Dans l'atelier nous avons discuté les cycles suivis par deux groupes en particulier et nous avons analysé quelques-unes des activités conceptuelles introduites :

1) *Sélection des variables et utilisation des hypothèses pour rencontrer des relations entre les variables*

Groupe I

1. *Variables* : m, mt, c pour le nombre de mots qu'on doit mémoriser, le nombre total de mots, le nombre de mots qu'on connait au temps initial.
2. *Hypothèses* : apprentissage d'un poème, nombre de mots fixé, le nombre de mots mémorisés dépend du total de mots, de ce qu'on a déjà mémorisé, et des mots qu'on savait déjà originellement.
3. m = amt + bm + c

Groupe II

1. Variables : x nombre de numéros qu'on a appris à chaque temps t, X total de numéros à apprendre,
2. Hypothèses : Chaque personne apprend d'une façon particulière et cela peut changer avec le temps, de plus la personne oublie une proportion des numéros qu'elle a appris. Le changement du nombre de numéros en est la différence.

2) *Introduction de la variation comme une variable du problème*

Groupe I

1. Après quelques discussions ils introduisent la variation : « ce qu'on va apprendre au futur c'est comment m change ». Alors, mt —>m', m, c, et am' + bm+ c= mt »
2. Ils ne peuvent pas résoudre l'équation.

Groupe II

1. Introduction des hypothèses : Modèle : x' = A(t) – B(t)x
2. Ils ne peuvent pas résoudre l'équation.
3. Analyse des modèles et raffinement des modèles

Une fois que les étudiants ont proposé une mathématisation de la situation, on peut se demander : Comment faire pour qu'ils arrivent à des nouveaux concepts et réussissent à les apprendre ? Quels aspects de leur connaissance peuvent être pris comme point de départ pour l'introduction de nouveaux concepts ? C'est à ce point qu'une théorie didactique peut se révéler très utile. C'est ici qu'on introduit les activités produites en utilisant la théorie APOS.

Les cycles de modélisation : le cas du modèle de la circulation

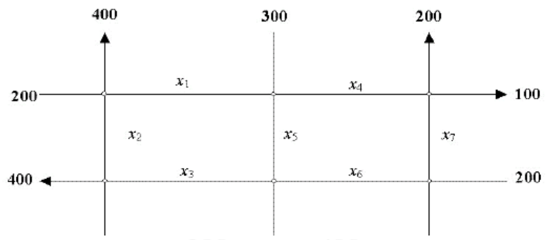
Le travail avec le modèle de circulation a suivi aussi des cycles qui peuvent se caractériser ainsi :

- Sélection de variables et relation entre variables
- Manipulation du système d'équations
- Représentation matricielle et manipulation algébrique
- Réponse aux questions spécifiques, représentation géométrique de l'espace de solutions

Dans ce cas, les élèves ont proposé des systèmes d'équations comme modèle mathématique de la situation. Ils connaissaient déjà les méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires, mais n'avaient jamais travaillé avec des systèmes où le nombre d'équations et de variables était si grand. Les activités conceptuelles proposées ont introduit la technique matricielle pour la solution des systèmes et la représentation graphique des équations linéaires et des systèmes, avec l'idée de faire évoluer le schéma de systèmes d'équations linéaires des étudiants :

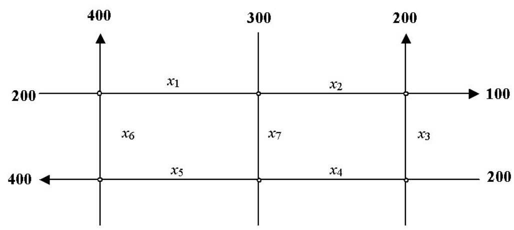
1) Modélisation

Groupe I



$$\begin{aligned} x_2+200 &= 400+x_1\\ 500+x_3 &= x_2+400\\ x_1+300 &= x_4+x_5\\ x_5+x_6 &= 300+x_3\\ x_7+x_4 &= 200+100\\ 200+200 &= x_7+x_6 \end{aligned}$$

Groupe II



$$\begin{aligned} 200+x_6 &= 400+x_1\\ x_1+300 &= x_2+x_7\\ x_2+x_3 &= 200+100\\ 200+200 &= x_3+x_4\\ x_7+x_4 &= x_5+300\\ 500+x_5 &= 400+x_6 \end{aligned}$$

2) Manipulation (avec beaucoup de difficultés, et même quelques groupes n'arrivent pas à trouver la solution)

Groupe III

$$\begin{array}{rrrrrrrcr} x_1 & & & & & -x_6 & & = & -200\\ x_1 & -x_2 & & & & & -x_7 & = & -300\\ & x_2 & +x_3 & & & & & = & 300\\ & & x_3 & +x_4 & & & & = & 400\\ & & & x_4 & -x_5 & & +x_7 & = & 300\\ & & & & x_5 & -x_6 & & = & -100 \end{array}$$

Groupe II

$$\begin{array}{rrrrrrrcr} -x_1 & & & & & +x_6 & & = & 200\\ x_1 & -x_2 & & & & & -x_7 & = & -300\\ & x_2 & +x_3 & & & & & = & 300\\ & & -x_3 & -x_4 & & & & = & -400\\ & & & x_4 & -x_5 & & +x_7 & = & 300\\ & & & & x_5 & -x_6 & & = & -100 \end{array}$$

3) Nouvelle technique et nouveaux concepts

Exemple d'Activités :

I. 4. Comment expliqueriez-vous à un autre étudiant que le vecteur x est une solution d'un système d'équations donné ?

II. 6. Résoudre le premier des systèmes suivants pas à pas. Utiliser la méthode d'addition des équations. Faire chaque pas dans une même colonne à gauche de la page du cahier.

- Répondre : Qu'est-ce qui change ? Qu'est-ce qui ne change pas ?

- Écrire un tableau avec les coefficients des variables et le terme indépendant dans la colonne à droite de la page.

- Comment pouvez- vous trouver un tableau qui ait les mêmes nombres que le second système à gauche à partir du premier tableau. Et pour le troisième ? Et les suivants ?

- On peut utiliser cette méthode pour résoudre le système plus systématiquement. On appelle le tableau Matrice augmentée du système, et la procédure Elimination Gaussienne.

- Écrire la matrice augmentée des autres systèmes.

- Résoudre les systèmes en utilisant uniquement l'élimination gaussienne.

- Combien de solutions ont chacun des systèmes ?

- Écrire chaque solution en termes des paramètres, s'il y a lieu.

i) $\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3 &= 0\\ 3x_2+8x_3 &= 8\\ -4x_1+5x_2+9x_3 &= -9 \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} x_2-4x_3 &= 8\\ 2x_1-3x_2+2x_3 &= 1\\ 5x_1-8x_2+7x_3 &= 1 \end{aligned}$

iii) $- x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -3$ ….
$4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$
$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 6$

II. 7. Pour les matrices augmentées suivantes écrire le système correspondant…

II. 10. Montrer que la solution d'un système d'équations non homogène peut se trouver comme x = xh + xp où xh est la solution du système homogène et xp est une solution du système non homogène.

Les étudiants ont réussi à utiliser la méthode introduite pour résoudre les systèmes. Par exemple on trouvait :

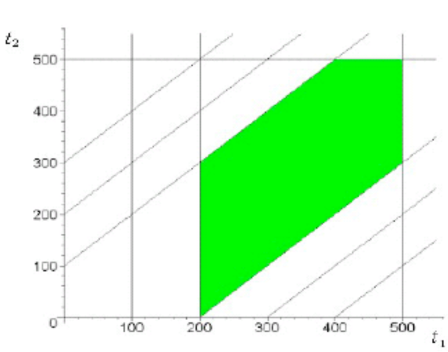
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -200 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -300 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -100 \end{array}\right)$$

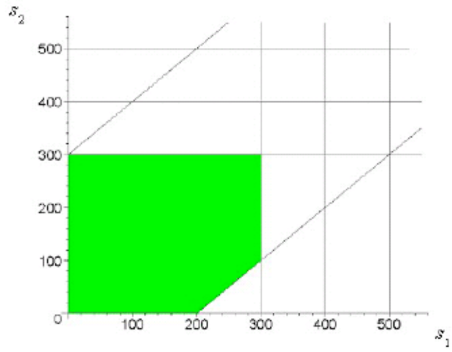
Réponse aux questions : nécessité de paramétrisation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 + t_1 \\ 100 + t_1 - t_2 \\ 200 - t_1 + t_2 \\ 200 + t_1 - t_2 \\ -100 + t_1 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ 300 - s_2 \\ 100 + s_2 \\ 100 + s_1 + s_2 \\ 200 + s_1 + s_2 \\ 300 - s_2 \end{pmatrix}$$

Les étudiants ont eu beaucoup de difficultés pour répondre à la deuxième des questions initiales, mais la professeure a proposé au groupe I de faire quelque chose comme la figure suivante (à gauche) avec la solution qu'on a rencontrée.

La professeure a demandé aux étudiants de comparer les solutions rencontrées en tant que solutions du même système, et en tant que représentations de la circulation dans les rues. Puis elle a suggéré de faire une figure comme celle proposée par le groupe I pour les autres solutions trouvées et de comparer ces figures. Elle a posé aussi les questions suivantes : Quelle forme de solution et quelle représentation sont les plus adéquates ? Pourquoi ?





V.2. Quelques considérations concernant la recherche

Pour les deux situations présentées, après chaque cycle, le travail des élèves a été conservé, les discussions des équipes et la discussion générale ont été décrites en utilisant des guides d'observation et enregistrées. Toute cette information est actuellement analysée avec plus de détail.

Les résultats trouvés jusqu'à présent dans la recherche sont cohérents avec les résultats d'autres chercheurs qui ont utilisé la modélisation dans l'enseignement des mathématiques : les étudiants sont motivés, ils développent des outils conceptuels, ils ont l'opportunité de réfléchir sur leurs propres connaissances. On a comparé les résultats dans les évaluations des étudiants qui ont suivi un cours comme celui présenté ici, avec des étudiants qui ont suivi des cours traditionnels. Dans les deux situations, on a trouvé que les étudiants qui ont eu l'opportunité de modéliser des situations en contexte, complétée par le traitement d'activités basées sur la décomposition génétique des concepts répondaient mieux aux questions conceptuelles et à celles où ils avaient besoin de prouver un théorème ; ils étaient aussi capables d'appliquer les idées sur la modélisation à la résolution de problèmes qui avaient la même structure que ceux travaillés en classe. Par contre, les étudiants qui avaient suivi un cours traditionnel avaient un meilleur contrôle des algorithmes de résolution des problèmes et des méthodes de résolution d'équations différentielles ou de systèmes d'équations linéaires, mais ils montraient beaucoup de difficultés avec les questions conceptuelles, les preuves et la résolution de problèmes.

La recherche sur ces deux exemples montre comment les deux cadres théoriques choisis peuvent être utilises de façon complémentaire pour planifier et gérer des expériences de modélisation dans la salle de classe.

V.3. Limitations

Bien que la modélisation comme outil d'enseignement puisse être intéressante et opportune vis-à-vis de l'apprentissage des élèves, il aussi nécessaire de prendre en considération quelques problèmes liés à son utilisation en classe.

On peut, par exemple, perdre l'orientation générale du cours. Le processus de modélisation peut amener l'intérêt des étudiants et du professeur aux questions propres de la modélisation ou diriger un problème dans une direction qui est en dehors du sujet qu'on désirait traiter. Il faut que le professeur, lui aussi, apprenne comment gérer la classe et comment délimiter le temps à utiliser et les thèmes à traiter.

Faire la décomposition génétique d'un concept ou d'un thème n'est pas facile. On peut trouver quelques décompositions génétiques dans la littérature. On peut les utiliser, ou au moins les prendre comme point du départ pour les affiner ou les changer. Mais pour la plupart des thèmes que l'on enseigne il n'y a pas de décompositions génétiques qu'on peut directement utiliser.

Une question qui est toujours pertinente quand on utilise une nouvelle méthode d'enseignement est l'élaboration d'une évaluation. On sait qu'il est important de prendre en considération le travail des étudiants pendant le processus de modélisation. Pour ce faire, on peut avoir besoin de chercher des formes alternatives d'évaluation.

Il faut aussi relever que quelques étudiants préfèrent la méthode traditionnelle d'enseignement. Leur résistance peut être un obstacle pour le travail en classe.

Il se peut que l'institutionnalisation des concepts faite au cours des sessions de discussion générale ne soit pas en relation directe avec ce qu'on trouve dans les manuels. Cette situation peut aussi être un obstacle pour l'apprentissage des élèves.

V. Réflexion finale

Dans notre recherche, nous avons trouvé que la décomposition génétique des concepts à enseigner est un instrument très utile pour guider la définition des activités à choisir quand on veut introduire et faire évoluer certains concepts. Nous avons utilisé aussi quelques idées du cadre théorique « Modèles et Modélisation » car nous avons trouvé qu'elles sont utiles pour étendre et pour évaluer les problèmes à proposer aux étudiants.

Pendant les études que nous avons faites jusqu'à ici, nous avons trouvé que ces deux cadres ont contribué d'une façon complémentaire comme guides des décisions d'enseignement que nous avons prises à chaque séance dans la classe, soit pour décider de l'orientation des activités, soit pour affiner la situation à modéliser ou pour choisir les outils conceptuels et de communication à développer par les élèves.

Nous avons appris dans ces expériences qu'il est toujours important d'introduire des discussions au sein de la classe pour faire une institutionnalisation des connaissances après chaque cycle. Au début, nous faisions une discussion sommaire à la fin du processus complet, mais nous avons remarqué que les questions qui étaient importantes pour les étudiants pouvaient s'oublier quand on les laissait sans réponse, et que les élèves préféraient formaliser peu à peu la théorie qu'on était en train d'introduire.

Nous avons trouvé que les étudiants avaient des opportunités d'utiliser et de montrer leurs connaissances quand on utilisait la modélisation pour l'enseignement des concepts. Ces connaissances ont été utilisées par les professeurs comme guide de leurs décisions, mais elles ont été aussi très utiles pour la recherche, car chaque session de modélisation devenait une source d'information importante sur l'évolution des étudiants.

Presque toutes les recherches sur l'utilisation de la modélisation dans la salle de classe montrent que les étudiants sont très motivés. Nous l'avons trouvé aussi. Les étudiants prennent en charge la situation et s'impliquent dans la résolution. Ils assument une responsabilité dans leur propre apprentissage.

Il s'est avéré que les productions des étudiants à chaque cycle de modélisation étaient très utiles pour évaluer les élèves, comme cela a été proposé par les auteurs du cadre « Models and Modeling ». L'information obtenue sur leur développement était très variée et diverse, ce qui a permis à notre avis, d'avoir aussi une opinion plus informée sur leur évolution.

Alors que l'idée principale de ces expériences était l'enseignement de mathématiques en utilisant la modélisation de situations du réel, nous avons constaté que l'activité de modélisation favorisait aussi la compréhension par les étudiants de la nature des mathématiques comme activité utile pour donner sens aux phénomènes de notre environnement.

Revenant à l'utilisation des deux cadres théoriques et d'après notre expérience, nous pouvons dire que la modélisation en elle même ne suffit pas pour introduire les concepts mathématiques à enseigner et pour aider les étudiant dans leur apprentissage. La modélisation fait apparaitre au sein des discussions des idées importantes et intéressantes, et fournit un contexte aux connaissances, mais de notre point de vue, ces idées doivent être approfondies. C'est là que l'utilisation d'une théorie cognitive offre un important potentiel. La théorie cognitive, APOS, offre un moyen pour designer des activités dont l'objectif est la réflexion sur les concepts qui sont apparus dans les discussions des étudiants, les faire évoluer, et établir des relations entre concepts. Avec les nouvelles connaissances, les étudiants peuvent retourner à la modélisation répondre à quelques unes des questions qu'ils avaient posées, reconstruire le modèle ou faire des généralisations. Ce cycle peut se répéter jusqu'à ce que les élèves et le professeur considèrent que le modèle remplit les conditions qu'on avait imposées et que les étudiants aient les connaissances espérés.

Le travail développé dans l'atelier présente un exemple d'une méthode où la modélisation peut devenir un espace où les étudiants peuvent apprendre les mathématiques et d'une théorie cognitive pouvant servir à introduire les matériaux du cours que l'on désire enseigner.

María Trigueros G.
ITAM/CINVESTAV
trigue@itam.mx

Références

Asiala M., Brown A., DeVries D., Dubinsky E., Mathews D & Thomas K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II,* 3, 1-32.

Barbosa J. C. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(2), 143-162.

Blum W., Galbraith P., Henn H-W., & Niss M.. (Eds.) (2006). *Applications and Modelling in Mathematics Education*. New ICMI Studies Series no. 10. New York: Springer.

Blum W. Galbraith P.L. Henn H.-W, & Niss M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (New ICMI Study Series, Vol. 10). New York: Springer.

Blum W., & Niss M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 22 (1), 37-68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 86-95.

Burkhardt H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 178-195.

Chaachoua H., & Saglam A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching mathematics and its applications*, March 2006, 25, 15-22. Oxford University Press.

Czarnocha B., Dubinsky E., Prabhu V, & Vidakovic D. (1999). One Theoretical Perspective in Undergraduate Mathematics Education Research. In O. Zaslavsky, O. (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME* (Vol 1, pp. 95-110).

Dubinsky E. (1986). Reflective abstraction and mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* 5 (1), 55-92.

Galbraith P., & Clatworthy N. (1990), Beyond Standard Models - Meeting the Challenge of Modelling. *Educational Studies in Mathematics ,* 21 (2), 137-163.

Kaiser G., & Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302-310.

Kaiser G., Blomhoj M., & Sriraman B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 3(2), 82-85.

Lesh R., & English L. (2005). Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik - The International Journal on Mathematics Education,* 37(6), 487- 489.

Trigueros M., & Oktaç A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, 157-176.

Trigueros M., Oktaç A. & Manzanero L. (2007). Understanding of systems of equations in Álgebra. *Proceedings of the 5th Congress of ERME, the European Society for Research in Mathematics Education*. Larnaca, Cyprus.

Weller K., Dubinsky E., Loch S., McDonald M. A., Merkovsky R. R. (2003). Students. Performance and Attitudes in Courses Based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle. *Research in Collegiate Mathematics Education,*V, 97-131.

Zazkis R., Dubinsky E., & Dauterman E. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435-457.

Atelier : les mathématiques dans la formation des ingénieurs

Avenilde Romo-Vázquez et Safouana Tabiou

Résumé

Cet atelier a pour but de présenter la place des mathématiques dans la formation des futurs ingénieurs. Pour cela, nous nous appuyons sur une recherche en cours abordant ce sujet dans une formation professionnelle à l'Institut Universitaire Professionnalisé d'Évry et sur le travail consacré à l'élaboration et à la mise en place des ingénieries pédagogiques, appelées APA-MATH (apprentissage mathématique par l'action) dans l'enseignement des mathématiques à l'École des Mines de Nantes. L'article présente d'abord la problématique générale de la place à accorder aux mathématiques dans une formation d'ingénieurs, il propose ensuite l'analyse de documents concernant la transformée de Laplace – concept mathématique intervenant dans différentes institutions liées à la formation des ingénieurs – et enfin les dispositifs pédagogiques APA-MATH sont présentés.

Introduction

La place à accorder aux mathématiques dans la formation des futurs ingénieurs est un sujet qui a été l'objet de débats depuis le début de ces formations et dont le contexte actuel demande de nouvelles réflexions. Cet atelier a pour objectif de montrer la complexité et la généralité de cette problématique et d'analyser ensuite des choix pour aborder une notion mathématique : la transformée de Laplace, dans les enseignements de mathématiques et d'automatique – discipline intermédiaire. Nous nous appuierons pour cela sur une recherche en cours abordant ce sujet dans une formation professionnelle à l'Institut Universitaire Professionnalisé (I.U.P.) d'Évry et sur le travail consacré à l'élaboration et à la mise en place des ingénieries pédagogiques, appelées APA-MATH (apprentissage mathématique par l'action) dans l'enseignement des mathématiques à l'École des Mines de Nantes. L'article est organisé en trois parties, la première est consacrée à la présentation de la problématique de la place des mathématiques dans la formation d'ingénieurs, la deuxième porte sur une activité d'analyse des documents consacrés à la notion de transformée de Laplace et la troisième sur une activité autour d'une APA-MATH conçue pour aborder cette même notion.

La place à accorder aux mathématiques dans la formation d'ingénieurs

La question de la place à accorder aux mathématiques dans la formation des ingénieurs, des contenus qui doivent être abordés dans cette formation et de la façon dont ils doivent être abordés et articulés avec les autres domaines de la formation, est une question que l'on voit posée dès la mise en place de telles formations. Pour illustrer ce qui précède, on considère le cas de l'École Polytechnique (Belhoste, 1994) et plus précisément, les premiers modèles de formation qui ont été mis en place successivement au sein de cette institution afin de constituer la formation la plus adaptée aux besoins professionnels des futurs ingénieurs. Trois modèles de formation ont existé pendant la période de 1794 à 1850 :

- **Le modèle encyclopédiste** : ce modèle proposé par Monge s'appuie sur l'idéal encyclopédiste qui conçoit une possible alliance entre les sciences et les arts. Les applications ont un rôle privilégié dans ce modèle : « c'est le principe d'application qui hiérarchise les sciences et les arts et qui détermine l'organisation

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 103-117.

du cursus » (Belhoste, 1994, p. 2)

- **Le modèle de Laplace** : les enseignements d'applications sont supprimés sous la pression des Écoles d'applications récemment créées (1795). Les méthodes analytiques pénètrent les enseignements de la mécanique, la physique, la théorie de machines, la géodésie et les probabilités. L'analyse prend donc un rôle dominant dans l'enseignement de l'École ; l'enseignement de mathématiques se constitue comme un enseignement autonome qui précède tout enseignement.
- **Le modèle de Le Verrier** : la pratique devient l'axe organisateur des enseignements, « le seul critère est l'utilité pour les applications, et tout développement de pure théorie sera systématiquement écarté » (Belhoste, 1994, p. 28)

Ces modèles, brièvement décrits, mettent en évidence les conflits entre théorie et pratique qui les sous-tendent et la difficulté à concevoir un modèle de formation adapté aux besoins de la pratique. Ces conflits se retrouvent au cœur des débats menés au sein de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques (ICMI selon son sigle en anglais), dans un contexte plus général et international. À l'occasion de la réunion de cette commission à Paris en 1914, une conférence sur le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur est présentée par Maurice d'Ocagne. Dans cette dernière, d'Ocagne se prononce pour une formation mathématique solide susceptible de fournir des outils mathématiques nécessaires pour la pratique professionnelle, même si, dans la pratique ordinaire de l'ingénieur, les besoins mathématiques sont plutôt élémentaires.

Ces conflits entre théorie et pratique, mis en évidence précédemment, semblent s'atténuer avec le développement des sciences de l'ingénieur, ainsi qu'avec l'évolution du paradigme théorie-application, qu'on peut faire correspondre au modèle de Laplace, vers un paradigme théorie-modélisation (Pollak, 1988) qui semble plus apte à répondre aux besoins de la pratique. Cependant, ces rapports sont transformés aujourd'hui, par l'omniprésence des logiciels qui modifient la nature technique du travail professionnel de l'ingénieur (Kent, 2007), les contraintes de la pratique imposant une division de travail mathématique et sollicitant différents niveaux de formation mathématique (Kent et Noss, 2002), l'utilisation dans la pratique des modèles mathématiques « types », plus que la création de nouveaux modèles (Bissell et Dillon, 2000). Dans ce nouveau contexte, les formations doivent s'adapter mais cette adaptation ne peut pas se limiter au seul choix des contenus ; elle doit permettre d'établir des liens étroits entre la formation mathématique et celle de Sciences de l'ingénieur et problématiser l'intégration de la technologie.

Pour aborder cette problématique générale et complexe, nous nous proposons dans cet article d'identifier les processus de circulation des connaissances mathématiques et d'analyser différents documents qui font intervenir la notion de transformée de Laplace.

Quelles mathématiques vivent dans quelles institutions ?

L'enseignement de mathématiques dans une formation d'ingénieurs devient, comme mentionné plus haut, autonome dans le modèle de Laplace ainsi que dans de nombreux modèles de formation qui en découlent, en France et dans le monde. Les connaissances mathématiques à l'intérieur des institutions de formation circulent via différentes institutions[1], l'enseignement de mathématiques, l'enseignement de sciences de l'ingénieur et la profession. Nous faisons l'hypothèse que, dans une formation d'ingénieurs, les besoins professionnels sont pris en compte au moins dans une certaine mesure, autrement dit cette institution ne peut pas être complètement ignorée. Dans sa conférence, d'Ocagne illustre différents problèmes issus de la « pratique » qui ont eu besoin de mathématiques avancées afin d'être résolus. Ces

[1] Dans le sens de Chevallard (1992).

problèmes sont des problèmes fondateurs de sciences de l'ingénieur et on peut donc se poser la question du type de transformations qui sont opérés sur ces connaissances pour résoudre ces problèmes, pour constituer une discipline intermédiaire et pour être ensuite l'objet d'enseignement. Afin d'aborder ce qui précède et compte tenu de ce que les mathématiques dans cette formation sont considérées en tant que discipline de service – un outil pour les sciences de l'ingénieur et pour la pratique – nous proposons deux activités d'analyse de documents qui abordent la notion de la transformée de Laplace. Dans la première activité, deux documents sont proposés : le premier document constitue le chapitre 2 d'un cours d'automatique d'une formation d'ingénieurs en IUT (Institut Universitaire Technologique) et le deuxième est le chapitre 9 d'un livre de mathématiques pour l'ingénieur qui aborde la même notion. Dans la deuxième activité, l'analyse porte également sur deux documents : le premier est un dispositif didactique « APA-MATH » qui a pour objectif d'enseigner la transformée de Laplace et le deuxième est la production d'une équipe d'élèves à ce dispositif. Ces deux activités sont présentées ci-dessous.

Analyse des documents portant sur la notion de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une notion qui occupe une place importante dans l'enseignement de mathématiques et de sciences de l'ingénieur, telle que l'automatique, dans différentes institutions de formation de futurs ingénieurs.

L'activité d'analyse de deux documents, décrits plus haut, a pour objectif d'identifier les transpositions opérées par les auteurs de ces documents, compte tenu des contraintes de l'enseignement de mathématiques pour le premier document et de l'enseignement de sciences de l'ingénieur pour le deuxième.

<u>Activité 1</u>

Analyser deux documents consacrés à la notion de la transformée de Laplace. Les documents sont les suivants :

1. Transformation de Laplace et applications (D1) (Annexe 1)
2. Transformation de Laplace. Relation Équation Différentielle – Fonction de Transfert (D2) (Annexe 2)

L'objectif de l'analyse est de distinguer les différentes manières de présenter cette notion dans chaque document, le tableau ci-dessous vous permettra de guider l'analyse.

Introduction Comment est introduite la notion?	- Motivation mathématique - Motivation pour les applications	D1
		D2
Définition	- Formelle - non formelle	D1
		D2
Problème d'existence	- Général - Cas particulier	D1
		D2
Propriétés fondamentales	- Réduites à quelques formules supposées utiles -Traitement mathématique	D1
		D2
Résultats fondamentaux (l'inversion, convolution…)	- Apparaissent en fonction des besoins (sans démonstration) - Traitement mathématique	D1
		D2

Tableau 1 – Grille d'analyse de documents portant sur la notion de transformée de Laplace

La grille d'analyse ci-dessus constitue une première entrée, très générale, pour analyser ces deux institutions, enseignement de mathématiques et enseignement d'automatique. Les documents, eux-mêmes, ne sont pas des polycopiés d'un cours ordinaire ; ils sont des documents d'appui dont le discours technologique dans le sens de Chevallard se veut éclairant, compte tenu des difficultés des étudiants ; les contraintes de l'institution d'enseignement tels que le temps n'ont pas d'effet ni sur l'organisation ni sur la taille du discours, ce qui nous a fait choisir ces deux documents.

La grille d'analyse propose de comparer ces deux documents relativement à la manière d'introduire, de définir, de problématiser l'existence, de présenter les propriétés fondamentales et d'aborder la transformée inverse de la transformée de Laplace. Cette analyse, comme nous l'avons signalé, n'est pas approfondie, mais afin d'illustrer les différences entre ces deux documents nous présentons ci-après la définition de la transformée de Laplace qui est donnée dans chacun d'eux.

Définition de la transformée de Laplace dans le cours d'automatique

Dans le cours d'automatique (Annexe 2), la définition mathématique de la transformée de Laplace est introduite par une explication qui fait intervenir, dans un langage non mathématique, deux niveaux d'abstraction : « monde symbolique » et « monde réel ».

> « À toute fonction $f(t)$ dans notre monde réel correspondra une fonction $F(p)$ dans le monde symbolique. Cette fonction sera appelée : *image* de $f(t)$. Inversement $f(t)$ sera appelée *originale* de $F(p)$. Ce passage du monde réel au monde symbolique est défini par la transformée de Laplace suivante :
>
> $$L[(f(t)] = F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}.f(t).dt = \textbf{\textit{image}} \text{ de } f(t) \text{ » (1)}$$

La définition est donnée en utilisant le symbolisme mathématique usuel. Cependant, ni l'existence de la transformée ni celle de la transformée inverse ne sont problématisées. Au mieux, on peut penser que la validation de l'existence est implicitement attribuée à l'automatique en tant que discipline intermédiaire. La définition donnée est immédiatement contextualisée :

> « Une tension $v(t)$ dans le monde réel deviendra $V(P)$ dans le monde symbolique
> Un débit $q(t)$ deviendra $Q(P)$
> Une vitesse angulaire $w(t)$ deviendra $\Omega(P)$ » (p. 8)

On notera que les exemples proposés, la tension, le débit et la vitesse angulaire, relèvent de sciences de l'ingénieur spécifiques (électricité, hydraulique, mécanique). Les grandeurs physiques sont identifiées de manière naturelle comme des fonctions du temps. Ainsi, le monde réel dont il est question renvoie aux modèles mathématiques des grandeurs en jeu dans les sciences de l'ingénieur spécifiques[2].

Définition de la transformée de Laplace dans le livre de mathématiques pour l'ingénieur

Contrairement au cours précédent, dans ce livre (Annexe 1), la transformée est introduite en mettant l'accent sur l'existence de l'intégrale.

> « Soit *f(t)* une fonction à valeurs réelles de la variable réelle *t* définie pour $t \geq 0$. Si la fonction *f(t)* est définie dans tout l'intervalle infini $-\infty < t < +\infty$, on demande que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. En

[2] Ces disciplines sont dites spécifiques afin de les différencier de l'automatique considérée ici comme la discipline générale. Ces qualifications ne sont donc pas figées.

plus, on suppose que la fonction *f(t)* est continue par morceaux dans l'intervalle $0 \le t < +\infty$. Pour assurer l'existence de certaines intégrales, on impose à la fonction *f(t)* la restriction qu'il existe des constantes réelles M > 0 et σ_0 telles que

$$|f(t)| \le Me^{\sigma_0 t} \qquad (9.1)^{3}$$

pour toute valeur de *t* prise dans l'intervalle $0 \le t < +\infty$. La plus petite valeur de σ_0 pour laquelle l'inégalité (9.1) est satisfaite est appelée ***abscisse de convergence*** de *f(t)*.

Considérons maintenant l'intégrale impropre

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \qquad (9.2)$$

où $p = \sigma + j\omega$ est un nombre complexe. Si la fonction *f(t)* vérifie la condition (9.1) et Re $p = \sigma > \sigma_0$, alors la convergence de l'intégrale est assurée :

$$\left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\right| = \left|\int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} f(t)dt\right| \le \int_0^\infty e^{-\sigma t}|f(t)|dt \le M\int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t}dt = \frac{M}{\sigma-\sigma_0}, \quad \sigma > \sigma_0, \quad (9.3)$$

puisque $|\exp(j\omega t)| = 1$. Ainsi l'intégrale (9.2) existe, et elle définit une certaine fonction de p que l'on désigne par F(p) :

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

Cette fonction est dite ***transformée de Laplace*** unilatérale ou **image** de *f(t)*, tandis que *f(t)* est appelée *original* de *F(p)*. Le fait que *F(p)* est l'image de la fonction *f(t)* est notée de la manière suivante : $f(t) \rightarrow F(p)$ » (p.91)

La transformée est définie dans le cadre des fonctions d'une variable complexe ; la démonstration de la convergence de l'intégrale impropre, contrairement au cours précédent, est présentée. Notons la différence de présentation de la transformée de Laplace dans ces deux documents : dans le premier, les mathématiques interviennent à un niveau d'outil, l'auteur du cours met l'accent sur la puissance de cette transformation et non sur la consistance mathématique de sa définition. Dans le deuxième, l'intérêt est inverse, c'est la consistance mathématique qui intéresse et ensuite la puissance en tant qu'outil.

La transformée inverse de Laplace, est du point de vue de l'enseignement de mathématiques, une question plus délicate qui demande des choix : l'aborder en s'appuyant sur le théorème des résidus et en se situant dans la théorie de fonctions holomorphes ou à partir du théorème qui énonce que la transformée inverse de Fourier appliquée à la transformée de Fourier d'une fonction *f* est égale à $2\pi f$, en se situant dans l'analyse de Fourier. Dans le document extrait du livre de mathématiques pour l'ingénieur (Annexe 1), la transformée inverse de Laplace n'est pas abordée, c'est le dictionnaire d'images qui en est proposé, tandis que dans le deuxième elle est à peine présentée à partir de la méthode des résidus (issue de la théorie de fonctions holomorphes).

Ce qui précède est présenté afin de montrer la complexité qu'entraînent les transpositions de mathématiques dans les enseignements de mathématiques et de manière encore plus importante dans les cours de sciences de l'ingénieur. Les choix possibles, ici mentionnés, pour aborder la transformée de Laplace inverse mettent en évidence la difficulté des

[3] Numérotation originale.

mathématiques associées ainsi que la difficulté de les faire rentrer dans des enseignements soumis à nombreuses contraintes y compris celle du temps.

Analyse de l'APA-MATH portant sur la notion de transformée de Laplace

À partir de l'activité précédente, on va considérer dans l'activité 2, l'institution de l'enseignement des mathématiques, particulièrement celle concernant une école d'ingénieurs. Nous proposons ainsi l'analyse de deux documents : le premier porte sur une activité APA-MATH consacrée à la transformée de Laplace (Annexe 3) et le deuxième la production des élèves correspondant à cette APA-MATH (Annexe 4). L'analyse de ces documents a pour objectif de mettre en évidence les caractéristiques de ce dispositif d'enseignement, du modèle de formation auquel il est associé et d'analyser à partir de la production des élèves leurs potentialités et limites.

<u>Activité 2</u>
À partir des documents donnés, remplir le tableau ci-dessous :

	Document 1	Document 2
Auteur		
But de l'activité		
Concepts en jeu		
Objectifs d'apprentissage		
Moment du cours		

Dans les écoles d'ingénieurs, qui recrutent essentiellement des élèves issus des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE), les buts des apprentissages en mathématiques – classées dans les sciences fondamentales – requièrent de l'élève des capacités de mise en fonctionnement des connaissances. La plupart des élèves éprouvent de nombreuses difficultés à dépasser le simple niveau d'application de leurs connaissances.

En partant de l'hypothèse que les situations de résolution de problèmes favorisent la construction par l'apprenant lui-même de ses propres compétences, l'École des Mines de Nantes (EMN), qui fait partie du groupe des écoles des Mines, crée et expérimente des ingénieries pédagogiques plus ou moins durables dont le but est de rapprocher le plus possible l'apprentissage des mathématiques du métier d'ingénieur. Ces situations d'apprentissage appelées génériquement « apprentissage par l'action en mathématiques » : APA-MATH combinent les méthodes traditionnelles (cours magistral – TD) à des apprentissages actifs et collaboratifs, dont les scénarios privilégient les capacités à contextualiser des connaissances mathématiques et à les transposer.

Le premier texte est un problème (intitulé le toboggan tautochrone (Annexe 3)) proposé à des élèves de la première année de l'EMN. Il s'agit d'élèves recrutés sur concours à la fin de la première année de CPGE (niveau Sup). Ces élèves ont utilisé des tables et quelques propriétés de la transformée de Laplace dans des enseignements de sciences de l'ingénieur. Il s'agit souvent d'un outil sans aucune définition conceptuelle. Le scénario du problème avait pour but de faire découvrir l'objet mathématique (problème de convergence et la recherche de l'abscisse de sommabilité) et d'établir certaines propriétés fondamentales en mobilisant des acquis sur l'intégrale généralisée et l'intégrale double (puisque la modélisation conduisait à une convolution). Toutes les propriétés établies sont en relation avec le modèle et résultent de la recherche de stratégie à mettre en œuvre pour progresser dans la résolution du problème posé.

On n'hésite pas à admettre des propriétés ou des résultats trouvés dans la documentation mise à disposition. Ainsi, le résultat fondamental sur la transformée d'une convolution a été admis et la question principale se ramenait dès lors à la recherche d'une inverse. Des hypothèses simplificatrices permettent dans certains cas de trouver cette dernière dans la table mais en fin de compte, l'élève se retrouve face à de nombreuses questions sur cette transformation, et l'on cherche à créer ainsi un besoin de nouveau savoir.

Ce besoin de nouveau savoir sur la transformée de Laplace se fera en deuxième année (niveau L3) sous la forme d'un projet APA-MATH. Ici, le but est de mettre l'élève dans une situation d'acquisition de connaissances mathématiques nouvelles et en toute autonomie. Le cahier des charges impose au groupe d'élèves (5 à 8 élèves) de produire un cours de mathématiques sur la transformée de Laplace en tant qu'intégrale dépendant d'un paramètre et ses applications avec des exemples tirés de leur vécu dans les enseignements de disciplines utilisatrices (automatique, électronique numérique, physique), en établissant une analogie avec la transformée de Fourier.

Ces exemples illustrent le but des APA-MATH : partir des acquis en sciences de l'ingénieur sur un objet mathématique pour amener l'étudiant avec une réelle activité mathématique vers la décontextualisation et le concept. Il est attendu que les étudiants acquièrent également une plus grande familiarité avec les domaines d'intervention et la dialectique outil/objet.

Les APA-MATH essayent de rapprocher l'enseignement des mathématiques des vrais usages de l'ingénieur car dans ce métier, l'ingénieur devra approfondir, contextualiser des mathématiques déjà acquises; il éprouvera aussi le besoin d'acquérir de nouvelles connaissances en toute autonomie, et une capacité de synthèse est également requise.

Conclusion

Nous sommes parties d'une problématique générale et complexe à partir des premiers modèles de formations élaborés à l'École Polytechnique, institution de formation d'ingénieurs emblématique et des travaux menés au sein de la CIEM. Nous avons ensuite mis en évidence la complexité d'accorder une place aux mathématiques dans la formation d'ingénieurs dans le contexte actuel où les logiciels modifient les besoins mathématiques de la pratique et nécessitent une problématisation au sein de ces formations. Les activités portant sur les analyses de documents concernant l'enseignement de la transformée de Laplace nous permettent de mettre en évidence des caractéristiques de diverses institutions qui participent à la circulation de savoirs mathématiques au sein d'une formation d'ingénieurs. La première activité nous permet de montrer les différents choix opérés par une institution « proche » d'un enseignement de mathématiques et un cours de sciences de l'ingénieur (proche, dans le sens où le document n'est pas un polycopié du cours). Les discours technologiques (dans le sens de Chevallard, 1999) accompagnant la présentation de la transformée de Laplace dans ces deux documents obéissent à des intérêts et contraintes différentes. Le premier est basé sur les contraintes de l'institution mathématique, montrer les hypothèses d'existence, les propriétés et les démonstrations avec la rigueur mathématique. On notera que les applications sont intégrés à la présentation théorique de la transformée et que contrairement à un cours de mathématiques la transformée inverse n'est pas abordée, elle est admise et mobilisée à travers l'utilisation de tables. Le deuxième porte sur un discours qui est centré sur les applications de la transformée dans l'automatique, le langage et la rigueur ne sont pas ceux usuels en cours de mathématiques. Finalement, l'analyse sur le dispositif APA-MATH met en évidence les préoccupations directes de l'enseignement de cette notion, la prise en compte du métier et la difficulté à faire vivre le concept dans une formation dont l'application précède son enseignement. L'APA-MATH est perçu comme une activité intéressante par les étudiants, l'objectif est de donner du sens à la notion dans l'institution mathématique à partir d'un problème de modélisation. Ce qui interroge c'est la connexion entre l'enseignement de mathématiques et celui de sciences de l'ingénieur. Il semble que les associations et connexions entre ces deux enseignements et celles entre théorie et pratique restent à la charge des étudiants. Ces activités essaient de montrer l'intérêt des éléments théoriques intervenant dans une modélisation mathématique en contexte, cependant l'intérêt n'est pas de résoudre le problème mais de présenter la notion mathématique. Ceci est contraire à ce qui domine dans un enseignement de sciences de l'ingénieur dont l'intérêt est de résoudre des problèmes sans s'intéresser à la légitimité de l'outil utilisé en elle-même, mais par rapport à son efficacité. Un travail collaboratif entre les enseignements de mathématiques et de sciences de l'ingénieur peut favoriser la compréhension des étudiants en complétant dès l'enseignement la dialectique objet/outil (Douady, 1987).

Avenilde Romo Vázquez
Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot - Paris 7
romo@math.jussieu.fr

Safouana Tabiou
École des Mines de Nantes
safouana.tabiou@emn.fr

Références

Arbenz K., Wohlhauser A. (1990). *Méthodes mathématiques pour l'ingénieur 2 : compléments d'analyse.* Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Belhoste B. (1994). Un modèle à l'épreuve. L'École Polytechnique de 1794 au Second Empire. In Belhoste, B., Dalmedico, A., & Picon, A. (eds), *La formation Polytechnicienne 1774 – 1994*, pp.9-30. Paris : Dunod.

Bissell C. & Dillon C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the Learning of Mathematics,* 20(3), 3-11.

Chevallard (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 12(1), 73-111.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221-266.

Douady R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7(2), 5-31.

Howson G., Kahane J. P., Lauginie P., de Turckheim E. (Eds.) (1988). *Mathematics as a Service Subject.* Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI Study).

Kent P. (2007). Learning Advanced Mathematics: The case of Engineering courses. Contribution to the NCTM Handbook chapter: Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In Lester, K., F. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 1042-1051). Charlotte, NC: Information Age Pub

Kent P., & Noss R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp. 39/1-39/7). London U.K.

Pian J. (1999). Diagnostic des connaissances en mathématiques des étudiants du Capes, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. *Cahiers Didirem* (34). Institut de Recherches pour l'Enseignement des Mathématiques. Université Paris VII.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject – why? In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject*. (pp. 28-34). Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI study).

Straka, G. (dir.). (2000). *Conceptions of self-directed learning: theoretical and conceptionnal considerations.* Berlin, Waxmann.

Tabiou, S., Gossiaux, P.B., Bot, L. (2003). Une expérience pédagogique d'enseignement des mathématiques en école d'ingénieurs: In *Actes du 2ième colloque Questions de pédagogies dans l'enseignement supérieur : réflexions, projets et pratique,* Brest.

Tabiou, S., Gossiaux, P.B., Jézégou, A. (2007). Contribution des apprentissages collectifs à la performance individuelle des élèves-ingénieurs. In Frenay, M., Raucent, B. & Wouters. P. *Pédagogies actives : enjeux et conditions. Actes du 4ième colloque sur les questions de pédagogies dans l'enseignement supérieur.* Louvain, Presses Universitaires de Louvain, 607-617.

Annexe 1. Extrait du chapitre 9 intitulé « Transformation de Laplace et applications »

On note aussi $F(p) = \mathscr{L}(f(t))$, respectivement $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(p))$.

Il s'ensuit immédiatement de la définition de la transformée de Laplace (9.4) que la transformation de Laplace est une opération ***linéaire***. En effet, si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ admettent des transformées de Laplace :

$$f(t) \longrightarrow F(p)$$
$$g(t) \longrightarrow G(p),$$

alors

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \longrightarrow \lambda F(p) + \mu G(p), \tag{9.5}$$

où λ et μ sont des facteurs constants quelconques.

9.2 TRANSFORMÉE DE LAPLACE DE QUELQUES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

9.2.1 Fonction échelon unité

La fonction $u(t)$ ainsi définie

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \tag{9.6}$$

s'appelle fonction ***échelon unité***. Son graphe est représenté dans la figure 9.1.

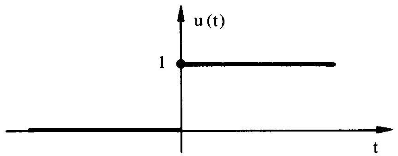


Fig. 9.1

Alors, selon la définition (9.4), la transformée de Laplace $U(p)$ de $u(t)$ égale

$$U(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}, \tag{9.7}$$

pourvu que $\operatorname{Re} p > 0$. On dit que le ***domaine de convergence*** de la transformée $U(p)$ est le demi-plan droite $\operatorname{Re} p > 0$.

9.2.2 Fonctions exponentielles et trigonométriques

Soit $f(t) = e^{-\alpha t}$, $0 \leqslant t < \infty$. Alors

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-pt}\,dt = -\left.\frac{e^{-(\alpha+p)t}}{(\alpha+p)}\right|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+p}, \tag{9.8}$$

si $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} \alpha$.

De ce résultat, il découle immédiatement la transformation de Laplace de $\sin \omega t$. En effet :

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$

d'où, en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace (9.5) :

$$\sin \omega t \longrightarrow \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \tag{9.9}$$

si $\operatorname{Re} p > 0$.

De même, on trouve la transformée de Laplace de $\cos \omega t$. On a

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2},$$

et par conséquent :

$$\cos \omega t \longrightarrow \frac{1}{2}\; \frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \tag{9.10}$$

si $\operatorname{Re} p > 0$.

9.2.3 Impulsion de Dirac

En partant de la définition de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ (§ 8.4.2) :

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \to 0} \Delta_\alpha(t),$$

où

$$\Delta_\alpha(t) = \begin{cases} 1/\alpha & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \alpha, \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{pour } t \text{ ailleurs} \end{cases},$$

on a

$$\delta(t) \longrightarrow \lim_{\alpha \to 0} \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha} e^{-pt}\,dt = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1-e^{-p\alpha}}{\alpha p},$$

et en développant $\exp(-p\alpha)$ en série de Taylor :

$$e^{-p\alpha} = 1 - p\alpha + \frac{p^2\alpha^2}{2} - \frac{p^3\alpha^3}{6} + \ldots,$$

on trouve pour la transformée de Laplace de $\delta(t)$:

$$\delta(t) \longrightarrow \lim_{\alpha \to 0} \left\{1 - \frac{p\alpha}{2} + \frac{p^2\alpha^2}{6} - \ldots\right\} = 1. \tag{9.11}$$

9.3.3 Théorème de convolution

Lors de la résolution d'équations différentielles par la méthode utilisant la transformation de Laplace, on se servira souvent de l'intégrale de convolution. Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions qui s'annulent pour $t < 0$. Alors leur ***intégrale de convolution*** $h(t)$ est définie par la relation

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{9.21}$$

En partant de la définition (9.4), on trouve pour l'image $H(p)$ de $h(t)$:

$$H(p) = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty \left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right\} e^{-pt}\,dt \tag{9.22}$$

Cette dernière intégrale est une intégrale double, étendue sur le domaine limité par les droites $\tau = 0$ et $\tau = t$ (fig. 9.2).

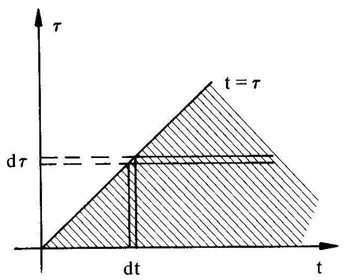


Fig. 9.2

Changeant l'ordre de l'intégration dans l'intégrale (9.22), on obtient

$$H(p) = \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt}\,dt\right\} d\tau,$$

et en effectuant le changement de variable $t - \tau = \eta$ dans l'intégrale intérieure de cette dernière intégrale double, on arrive à

$$H(p) = \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_0^\infty g(\eta)e^{-p(\eta+\tau)}\,d\eta\right\} d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^\infty g(\eta)e^{-p\eta}\,d\eta = F(p)G(p).$$

Ainsi on a trouvé le ***théorème de convolution*** qui exprime:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow F(p)G(p). \tag{9.23}$$

9.3.4 Théorème de la valeur finale

Le ***théorème de la valeur finale*** exprime:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p), \tag{9.24}$$

si les limites indiquées existent.

Pour démontrer ce théorème, on reprend la règle (9.13) pour l'image de la dérivée:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(0).$$

En laissant tendre p vers zéro dans cette dernière équation, on obtient

$$\lim_{p\to 0} \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f'(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0),$$

d'où la relation (9.24).

9.3.5 Dérivation de l'image

Soit $f(t) \to F(p)$. Alors on dispose de la ***règle pour la dérivation de l'image***:

$$t f(t) \longrightarrow -\frac{dF(p)}{dp} \tag{9.25}$$

Notons d'abord, sans démonstration, que si $f(t)$ vérifie la condition (9.1), l'image de $t f(t)$ existe et possède le même domaine de convergence que $F(p)$. Par définition, on a

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

et, d'après la règle de Leibnitz pour dériver sous le signe d'intégrale:

$$\frac{dF(p)}{dp} = -\int_0^\infty t f(t)e^{-pt}\,dt,$$

ce qui prouve la règle (9.25). On établit facilement la règle générale:

$$t^n f(t) \longrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \tag{9.26}$$

9.3.6 Théorème de la valeur initiale

On part de la règle (9.13) pour la dérivée:

$$\frac{df(t)}{dt} \longrightarrow pF(p) - f(0),$$

Annexe 2. Extrait du chapitre 1 intitulé « Transformation de Laplace. Relation Équation Différentielle – Fonction de Transfert »

Chapitre 1

Transformation de Laplace.
Relation Équation Différentielle - Fonction de Transfert.

1.1 Transformée de Laplace, définition, conventions

Les intérêts de cette transformation sont: une simplification très importante des solutions mathématiques recherchées et une généralisation facile de certains résultats.

Elle consiste à étudier le comportement des systèmes (caractérisé dans notre **monde réel** par des fonctions du temps t) dans un **monde symbolique** où la variable n'est plus le temps t mais une variable symbolique p.
A toute fonction f(t) dans notre monde réel correspondra une fonction F(p) dans le monde symbolique. Cette fonction sera appelée: *image* de f(t). Inversement f(t) sera appelée: *originale* de F(p). Ce passage du monde réel au monde symbolique est défini par la transformée de Laplace suivante:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}.f(t).dt = \textbf{\textit{image}} \text{ de } f(t)$$

Par convention nous adopterons toujours les lettres minuscules pour les fonctions du temps et leurs homologues majuscules pour les images. Exemples:
Une tension v(t) dans le monde réel deviendra V(p) dans le monde symbolique.
Un débit q(t) deviendra Q(p).
Une vitesse angulaire $\omega(t)$ deviendra $\Omega(p)$.
Ainsi si on oublie de préciser la variable (t ou p) dont dépend la fonction, on peut le savoir simplement grâce à cette convention.

Au début l'introduction de ce monde symbolique (donc irréel) vous paraît une chose très abstraite donc difficile à dominer. Mais très vite vous constaterez que des opérations difficiles à faire dans notre monde réel comme par exemple la résolution d'une équation différentielle, devient une opération élémentaire dans ce monde symbolique. Petit à petit on découvre que la vie dans ce monde symbolique est beaucoup plus simple.
Par contre, une grave erreur à ne pas commettre serait de faire apparaître dans une même expression les variables t et p! Elles n'appartiennent pas au même monde!!!

Nous allons maintenant examiner les principales propriétés de la Transformée de Laplace. Seules ces propriétés doivent être connues. Il ne sera jamais demandé de calculer une transformée. Vous pourrez donc très vite oublier cette intégrale bornée!

1.2 Somme de fonctions, multiplication par une constante

Dans l'expression de l'intégrale de Laplace (voir page précédente), si on remplace f(t) par une somme de fonctions:
$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ on pourra séparer l'intégrale en une somme de trois intégrales correspondant chacune à l'image d'une des trois fonctions. Ainsi:

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)] = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p)$$

De même, si on multiplie f(t) par une constante k, on peut sortir cette constante de l'intégrale et on en déduit que l'image est simplement multipliée par k:

$$\mathcal{L}[k.f(t)] = k.F(p)$$

L'image d'une somme de fonctions est la somme des images. Si on mutiplie la fonction par une constante, l'image est multipliée par la même constante. Si on s'arrêtait là, ça n'aurait aucun intérêt cette transformée!

1.3 Dérivation et Intégration

1.3.1 Dérivation d'une fonction: soit g(t) la dérivée de f(t). On veut exprimer G(p) en fonction de F(p).

$$\mathcal{L}\, g(t) = \int_0^{\infty} e^{-pt}.g(t).dt$$

On va intégrer par partie: on pose $u = e^{-pt}$ et $g(t).dt = dv$
d'où $du = -p.e^{-pt}.dt$ et $v = f(t)$ puisque g(t) est la dérivée de f(t):

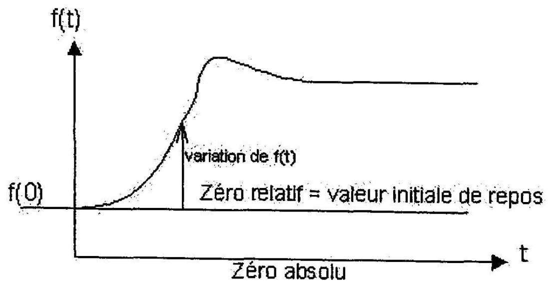
$$\mathcal{L}\, g(t) = \left[e^{-pt}.f(t)\right]_0^{\infty} + p\int_0^{\infty} e^{-pt}.f(t).dt = p.F(p) - f(0)$$

Donc dans le monde symbolique, la dérivation d'une fonction consiste à la multiplier p p et ensuite retrancher une constante correspondant à la valeur initiale de la fonction originale.
Si on extrapole le résultat précédent aux dérivées successives de f(t), on obtient:

$$\mathcal{L}\, f(t) = F(p)$$
$$\mathcal{L}\, f'(t) = p.F(p) - f(0)$$
$$\mathcal{L}\, f''(t) = p[p.F(p) - f(0)] - f'(0)$$
$$\mathcal{L}\, f'''(t) = p\{p[p.F(p) - f(0)] - f'(0)\} - f''(0)$$

On se rend compte que ça se complique beaucoup à cause des conditions initiales nc nulles.
Ainsi, nous nous placerons toujours (aussi bien en théorie qu'en pratique) dans des conditions qui vont simplifier énormément les résultats ci-dessus.

Nous nous placerons toujours dans l'hypothèse suivante: le système qui va générer la fonction f(t) en réponse à une excitation d'entrée doit être initialement au **repos** c'est-à dire que f(t) doit être **constant** avant qu'on applique un signal de commande.
Ainsi dans les expressions précédentes: $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$ et de façon générale toutes les valeurs initiales des dérivées successives de f(t) sont nulles.
Seule subsiste la valeur f(0) qui n'est pas nulle. Il suffira de considérer que les fonctio du temps calculées (théorie) ou enregistrées (pratique) ne seront pas comptées à par du zéro absolu mais seront comptées à partir de la valeur initiale de repos.



Autrement dit, ce qui nous intéresse c'est la **variation** de f(t) par rapport à sa valeur initiale de repos.

Exemple: si on enregistre la température de l'eau dans une casserole à partir du moment où on allume le réchaud, le zéro absolu est loin! Ce que l'on va enregistrer c'est la variation de température à partir de la valeur initiale de repos qui correspond à la température ambiante.

Il faudra toujours respecter ces conditions. Ainsi la notion de dérivation dans le monde symbolique devient un jeu d'enfant:

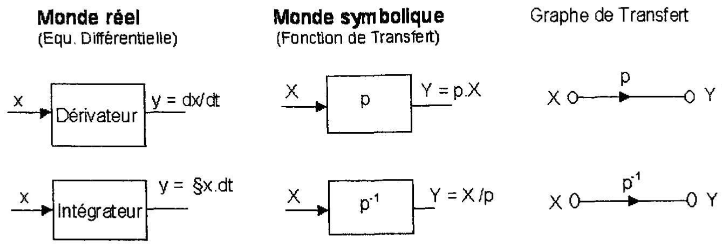
$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p.F(p) \quad \text{avec } f(0) = 0 \qquad \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p)$$

Le calcul de la dérivée $7^{\text{ème}}$ d'une fonction du temps f(t) quelconque est très long et fastidieux. Dans le monde symbolique, il suffit de multiplier l'image de f(t) par p^7.

1.3.2 Intégration d'une fonction. Nous venons de voir que, en respectant les conditions sur les valeurs initiales nulles, dans le monde symbolique la dérivation d'une fonction consiste à multiplier son image par p. Si maintenant on intègre la fonction obtenue après dérivation, on doit retrouver la fonction initiale: ainsi il faut rediviser par p donc multiplier par 1/p . Il vient:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t).dt\right] = \left[\frac{F(p)}{p}\right]$$

1.3.3 Nous pouvons dès maintenant introduire la notion de Fonction de Transfert à propos du dérivateur et de l'intégrateur. Nous introduirons également la représentation d'une fonction de transfert par un graphe de transfert.
Ces notions seront reprises très en détails dans le chapitre 4, mais cela ne pose aucune difficulté de les découvrir maintenant.



On remarque que dans le monde symbolique pour exprimer la sortie d'un système, il suffit de multiplier l'entrée par la fonction de transfert du système.
La fonction de transfert du dérivateur est: Y/X = p et celle de l'intégrateur est Y/X = 1/p

1.3.4 Exemples physiques de dérivateurs et d'intégrateurs.

Exemples électriques:
Prenons une self d'inductance L traversée par un courant instantané i(t).
La tension instantanée à ses bornes sera v(t) = L.di(t)/dt
En posant V(p) = *L* v(t) et I(p) = *L* i(t) on obtient: V(p) = L.pI(p) et la fonction de transfert de la self est alors V(p)/I(p) = Lp.
Prenons maintenant un condensateur de capacité C dans les mêmes conditions d'expérience. On aura v(t) = 1/C.§i(t)dt
Remarque: Le symbole § doit se lire: Somme de 0 à t (c'est une intégrale).
Donc V(p) = 1/C. I(p)/p et la fonction de transfert du condensateur est alors V(p)/I(p) = 1/Cp.
L'inductance est un dérivateur de courant et la capacité est un intégrateur de courant.

Exemples mécaniques analogues:
Prenons une masse M se déplaçant à une vitesse instantanée v(t).
La force f(t) qu'elle engendrera est proportionnelle à son accélération donc à la dérivée de sa vitesse: f(t) = M.dv(t)/dt d'où F(p) = M.pV(p) et la fonction de transfert de la masse est alors F/V = Mp.
Faisons la même expérience avec un ressort de raideur R. Cette fois la force instantanée engendrée est proportionnelle à l'élongation du ressort c.à.d. à la position instantanée de l'extrémité déplacée. La vitesse v(t) étant la dérivée de la position, la position est donc l'intégrale de la vitesse. Ainsi f(t) = R.§v(t)dt d'où F(p) = R.V(p)/p et la fonction de transfert du ressort est alors F/V = R/p.
La masse est un dérivateur de vitesse et le ressort est un intégrateur de vitesse.

Exemple hydraulique.
Prenons un récipient de section S. On le remplit avec un débit instantané q(t).
Le volume instantané contenu sera l'intégrale du débit et la hauteur de liquide h(t) est égale au volume divisé par la section du récipient: h(t) = 1/S.§q(t)dt d'où H(p) = 1/S.Q(p)/p et la fonction de transfert du récipient est alors H/Q = 1/Sp.
Le récipient est un intégrateur de débit.
Vous remarquerez l'analogie parfaite avec le condensateur.

De même en thermique nous parlons de capacité thermique. Il existe des analogies de

Annexe 3. Extrait de l'APA – MATH concernant la transformée de Laplace

2 Le problème

A leurs plus belles heures, certains régimes ultra-communistes très soucieux d'égalité avaient installé dans leurs jardins publics des toboggans tautochrones. Pour les non-hellénistes, un tel toboggan a la particularité suivante : **quelle que soit la hauteur d'où on part sur le toboggan (sans élan), on met le même temps T pour arriver en bas.**

(impulso)

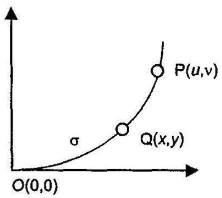
Le but de ce TDD (noté) sera de retrouver la forme du toboggan tautochrone.

Votre production finale devra être une représentation graphique de ce toboggan.

Pour trouver une équation (cartésienne ou équation paramétrique) de la courbe recherchée, il sera nécessaire de nous familiariser, au cours de la résolution avec deux nouveaux outils mathématiques, qui vous seront par ailleurs très utiles dans plusieurs autres domaines des sciences de l'ingénieur et de la physique: il s'agit de la convolution et la transformation de Laplace; deux types très usuels d'intégrales dépendant d'un paramètre .

3 Le toboggan tautochrone: modélisation

Une représentation simple d'un morceau du toboggan dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé:



Si on note P de coordonnées (u,v) le point de départ sur le toboggan, $Q(x,y)$ le point courant et O (0,0) le point d'arrivée, on peut écrire la conservation de l'énergie (potentielle + cinétique) entre P et Q :.

$mgv + 0 = mgy + \frac{1}{2}m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$, où σ représente l'abscisse curviligne entre O et Q

De cela, on tire $\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)}$, en tenant compte du fait que l'abscisse curviligne décroît avec le temps.

Donc $T(v) = \int_0^{T(v)} dt = \int_{\sigma(v)}^{\sigma(0)} -\frac{d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}}$ = temps mis partant de P pour atteindre O, et le problème du toboggan tautochrone revient à établir que $T(v)$ est fonction une constante T, pour un profil bien spécifique du toboggan (**condition de tautochronie**).

Or, σ est une fonction croissante de y donc $d\sigma = f(y)dy$ où $f(y) = \frac{d\sigma}{dy}(y)$.

On tire de tout cela $T(v) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^v \frac{f(y)}{\sqrt{v-y}}dy$; c'est une intégrale dépendant du paramètre v .

Il nous suffit de trouver la fonction $f(y)$ répondant à la condition de tautochronie ci-dessus, pour en déduire alors une équation du toboggan. En effet, on a

$$f(y) = \frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = f^2(y) - 1.$$

4 Découverte d 'outils nouveaux: la convolution et la transformation de Laplace

Lorsque l'on considère un système "entrée-sortie" linéaire

On établit que si les fonctions sont continues par morceaux (ou dans le cas général, localement intégrables), on a la relation $s(t) = \int_0^t h(t-x)e(x)dx = \int_0^t h(x)e(t-x)dx$. Dans un tel problème, on connaît deux des trois fonctions, et on recherche la troisième. De telles équations sont connues sous le nom d'équation intégro-différentielles, et décrivent des modèles très courants.

En pratique, il y a des avantages à appréhender cette relation comme une "loi de composition algébrique" que l'on note *; dès lors, $s(t) = \int_0^t h(t-x)e(x)dx = \int_0^t h(x)e(t-x)dx$ devient $s(t) = h * e(t) = e * h(t)$. La relation intégrale devient une opération algébrique, que l'on appelle produit de convolution, et on change dès lors, une équation intégro-différentielle en une équation algébrique.

Le produit de convolution est une opération définie pour des séries ou des fonctions intégrables. Cette opération intervient naturellement dans de nombreuses situations. Elle sert au calcul des lois de probabilité, notamment. Dans le cas des fonctions, on se place généralement sur un ensemble de fonctions intégrables, qui muni de l'addition, du produit par un scalaire et de la convolution devient est une algèbre (associative) . On dit alors que l'on a une de convolution. L'étude des algèbres de convolution est une branche importante des mathématiques appliquées. Dans cette théorie, on s'intéresse particulièrement aux opérateurs qui appliqués à un produit de convolution donne le produit ordinaire des transformées. Parmi ces opérateurs, la transformation de Laplace est incontournable.

Ainsi, dans notre système "entrée sortie" linéaire, si on applique la transformation de Laplace, $s(t) = h * e(t) = e * h(t)$ deviendra $S(x) = H(x)E(x)$, où S , E et H sont les transformées de Laplace de s, e, et h. Dans la littérature des systèmes "entrée-sortie", H est connu sous le nom de fonction de transfert.

La transformation de Laplace est particulièrement utile dans la résolution des équations différentielles linéaires, une illustration simple est proposée en bilan et perspectives.

Annexe 4. Extrait de la production d'une équipe d'élèves à l'APA – MATH portant sur la transformée de Laplace

I. Définitions et propriétés

Définition de la Transformée de Laplace

Soit f une fonction de L^+ et σ(f) son abscisse de convergence.
On appelle *Transformée de Laplace* de f et on note L(f) (ou F), la fonction de la variable complexe définie pour tout p tel que Re(p) > σ (f) par

$$\boxed{L(f) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{(-pt)}\,dt}$$

Remarque explicative : Re(p) > σ (f) est la condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de l'intégrale (infinie). En effet , comparons f à une exponentielle du type e^{ct}, c étant un réel. $e^{ct}e^{-pt} = e^{[c-Re(p)]t}e^{i*Im(p)t}$.
t → $e^{i*Im(p)t}$ est bornée. La convergence de l'intégral de 0 à + ∞ est donc liée au premier terme. Il est nécessaire et suffisant que *c-Re(p) < 0* i-e *c < Re(p)* pour assurer cette convergence.

On aboutit ainsi à la définition suivante :

L'*abscisse de convergence* de f est la borne inférieure des réels c tels que : pour tout t ≥A, |f(t)| ≤ M.exp(ct)

Propriétés :

*** Holomorphie :**
$f \in L^+$ alors la fonction F(p)=L(f)(p) est holomorphe sur le demi-plan ouvert {p∈ C, Re(p) > σ (f)}.
Sa dérivée est :

$$\boxed{F'(p) = L(-tf) = \int_0^{+\infty} -t.f(t)\,\mathrm{e}^{(-pt)}\,dt}$$

*** Linéarité :**
Soit f et g sont deux fonctions de L^+ et α, β deux réels, on a immédiatement par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)}$$

*** Décalage :**
Si f est dans L^+ et a un réel, on voit facilement que $t \rightarrow e^{(at)} f(t)$ est encore dans L^+ et on a immédiatement :

$$\boxed{L(e^{(at)} f(t))(p) = L(f)(p-a)}$$

*** Retard :**
Si f est dans L^+ et $t_0 \geq 0$, on voit facilement que $t \rightarrow f(t-t_0)$ est encore dans L^+ et on a immédiatement par changement de variable :

$$\boxed{L(f(t-t_0))(p) = \exp(-pt_0)L(f)(p)}$$

*** Changement d'échelle :**
Si f est dans L^+ et a > 0, on voit facilement que $t \rightarrow f(at)$ est encore dans L^+ et on a immédiatement par changement de variable

$$\boxed{L(f(at))(p) = \frac{1}{a} L(f)(\frac{p}{a})}$$

Thème : Technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques

Présentation du thème

Les questions posées par l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques sont, même si l'on observe une évolution indéniable, loin d'être résolues. Les difficultés rencontrées dans cette intégration ont conduit, au sein de l'équipe, au développement d'une approche associant des perspectives ergonomiques et anthropologiques. Cette approche a d'abord aidé à comprendre le décalage constaté entre les potentialités identifiées dans les recherches et les expérimentations d'une part et les usages réels d'autre part, notamment en ce qui concerne calcul formel et tableurs, à montrer la complexité sous-estimée des genèses instrumentales associant connaissances mathématiques et sur l'outil, et le rôle central des techniques instrumentées. Elle a ensuite été mise en interaction avec d'autres approches, au service de la conception d'environnements logiciels, de l'analyse d'usages d'autres technologies et de celle des pratiques enseignantes dans de tels environnements.

Grâce à ces travaux et à de nombreux autres menés en France comme à l'étranger, il est aujourd'hui possible d'approcher de façon renouvelée un certain nombre de questions et nous souhaitons notamment aborder celles qui concernent :

- les spécificités des genèses instrumentales pour différentes technologies, particulièrement celles utilisant les réseaux,
- l'enseignant, ses pratiques en environnement technologique et leur genèse,
- la formation des enseignants aux TICE, l'analyse et la conception de dispositifs et de ressources pour la formation,
- la conception d'environnements logiciels et d'usages intégrant les acquis de la recherche.

Nous souhaitons par ailleurs que ce colloque contribue à faire avancer la réflexion initiée pour l'équipe dans le cadre européen du réseau Kaleidoscope et du projet ReMath sur les cadres théoriques utilisés dans les recherches de ce domaine, leurs potentialités et limites respectives, les connections possibles et utiles entre eux.

Contributions

Analyser les formations mathématiques aux TICE : une histoire qui continue 121
Maha Abboud-Blanchard et Fabien Emprin

La « cross-expérimentation » franco-italienne 131
Claire Cazes, Mirko Maracci, Fabrice Vandebrouck

Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité 141
Françoise Chenevetot-Quentin, Brigitte Grugeon-Allys, Élisabeth Delozanne

Enseignement des statistiques en sciences humaines et sociales : une utilisation plurielle du tableur 151
Éric Roditi et Georges-Louis Baron

Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? 161
Ghislaine Gueudet, Sophie Soury-Lavergne, Luc Trouche

Questions de Sésamath pour un dialogue avec les chercheurs en didactique 175
Groupe Sésamath (Gérard Kuntz, Benjamin Clerc, Sébastien Hache)

Analyser les formations mathématiques aux TICE : une histoire qui continue

Maha Abboud-Blanchard et Fabien Emprin

Résumé

Cet article s'intéresse aux difficultés d'intégration des technologies dans les pratiques des enseignants de mathématiques en prenant comme entrée l'analyse des formations aux TICE. L'enjeu de ce travail est de mettre en évidence des hypothèses explicatives d'un déficit qualitatif des formations qui contribuerait aux difficultés de mise en œuvre en classe et qui représenterait par là un frein au développement et à la diversification des usages. Notre étude se développe au travers de deux recherches : la première menée au début des années quatre-vingt-dix et la seconde venant de s'achever. Outre la présentation des principaux résultats, nous nous intéressons à l'évolution des formations attestées par une comparaison entre les deux recherches. Nous mettons ainsi en évidence que le statut du formateur et la démarche de formation sont des facteurs pouvant expliquer le déficit qualitatif qui est notre hypothèse. L'analyse de ces deux facteurs contribue à la définition d'un genre professionnel des formateurs et à souligner les écueils d'une démarche de formation centrée sur l'homologie, démarche qui reste majoritaire dans les formations aux TICE.

Introduction

Le point de départ de cette recherche est le constat, attesté par nombre de recherches, que l'utilisation des TICE dans l'enseignement reste minoritaire et n'exploite pas pleinement les possibilités offertes par les technologies. Certains travaux en didactique des mathématiques ont cherché à étudier les représentations, attentes et pratiques des enseignants pour expliquer l'absence d'utilisations régulières des TICE dans l'enseignement (Ruthven et Hennessy, 2002). Dans notre propre recherche, nous nous intéressons plutôt à la variable « formation » des enseignants de mathématiques à l'utilisation des technologies comme étant un des facteurs explicatifs de cette absence.

Le cahier des charges actuel pour la formation des enseignants en France précise que les enseignants doivent maîtriser les technologies de l'information et de la communication à l'issue de leur formation (Encart au B.O. n°1 du 4 janvier 2007). Bien au-delà des aspects techniques, il s'agit d'être capable d'intégrer et de tirer le meilleur parti des technologies dans l'enseignement, en gérant l'alternance avec les séances sans les technologies ou comme outil pour la différenciation, par exemple. Alors que ce référentiel affirme la place des technologies nous avons fait le constat, d'abord empirique puis étayé par une synthèse d'enquêtes dans la population enseignante, (DEP, 2004) et (Empirica, 2006), que leur intégration représente une difficulté consistante pour les enseignants. Dans ces mêmes enquêtes, les problèmes de formation (formation inadaptée et rôle prédominant de l'autoformation dans l'acquisition des compétences) apparaissent comme une hypothèse explicative des difficultés des enseignants à intégrer les TICE de façon riche. Un enjeu important et d'actualité est donc d'analyser ces carences en formation. Or un examen des politiques de formations des enseignants, du plan IPT[i] (Informatique Pour Tous) au plan Re/SO[ii] (plan pour une REpublique numérique dans la Société), montre qu'un effort quantitatif a été fait.

Notre hypothèse de travail est alors qu'il y a un déficit qualitatif dans les formations d'enseignants pour l'utilisation des TICE qui entraîne une inefficacité de ces formations en ce qui concerne le développement et la diversification des usages. Nous présentons dans cette contribution deux voies d'investigation pour mieux explorer ce problème de déficit des formations. La première est l'étude des pratiques déclarées et des représentations des

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 121-129.

formateurs TICE en mathématiques, la deuxième est l'observation et l'analyse de formations continues.

Au-delà d'une meilleure compréhension des obstacles à la transposition de la formation vers l'enseignement, nous souhaitons à travers cette recherche contribuer à une réflexion sur la formation et le métier de formateur dans ces domaines technologiques encore insuffisamment étudiés.

Premier temps de la recherche

Au début des années quatre-vingt-dix nous avons mené une première étude du système des formations mathématiques aux TICE (Abboud-Blanchard, 1994) en partant de l'hypothèse que les pratiques en matière de formation ne sont pas neutres vis-à-vis des résistances du système d'enseignement à l'utilisation de l'outil informatique. Cette recherche s'est basée sur des données et des constats sur les formateurs et les pratiques de formations qui se sont installées après le plan Informatique Pour Tous.

Un premier résultat qui correspond au « statut » du formateur représentait, à nos yeux, une hypothèse explicative de la non-efficacité des formations. En effet, le formateur, en formation continue, est en général un enseignant qui a réussi à intégrer efficacement les outils informatiques dans ses pratiques. Cela le conduit à avoir une attitude militante vis-à-vis des technologies. De plus, un deuxième aspect fortement lié au premier est le fait qu'il n'existe pas de « savoir de formation » auquel il peut se référer ce qui l'incite à utiliser sa propre pratique d'enseignant dans sa formation. Il se base en général sur des situations d'enseignement qu'il a lui-même construites, ou qui lui ont été transmises par des collègues et qu'il a transposées pour les utiliser dans sa classe. Cette conjonction de facteurs peut expliquer une forte personnalisation des contenus et un manque de distanciation entre le formateur et le contenu de formation.

Un deuxième résultat était relatif à la question des stratégies de formation. La formation aux TICE s'articule autour de deux familles de stratégies : les stratégies par monstration et les stratégies par homologie (Houdement et Kuzniak, 1996).

Les stratégies les plus utilisées dans le système de formation, post IPT, semblaient être basées sur l'homologie. Il peut s'agir alors d'homologie simple (faire vivre la situation et prolonger ce vécu par des commentaires), ou d'homologie plus complexe (faire vivre la situation et prolonger ce vécu par une analyse de la situation). Ce modèle de formation qui semblait dominant est à lier au statut du formateur évoqué précédemment, mais il est aussi dû, en partie, à la durée courte des formations continues. Comme le rappelle Nallet, parlant du modèle « professionnel » de formation (Nallet et Caspar, 2006) : « le plus rapide et le plus facile, consiste à postuler qu'un professionnel transmettant à un tiers son métier va permettre à celui-ci de devenir lui-même un professionnel ». Or les environnements TICE sont complexes et surtout n'ont rien de transparent. Leur intégration effective dans l'enseignement passe par la rupture avec une vision traditionnelle des outils à la disposition de l'enseignant, qui grossièrement peut s'exprimer ainsi : « Si je sais utiliser l'outil moi-même, je saurai m'en servir dans mon enseignement ». Nous pensons qu'une telle rupture ne va pas de soi et ne sera possible que si l'enseignant y est sensibilisé et préparé par sa formation continue, mais surtout initiale. Or cette sensibilisation à travers la formation ne peut avoir lieu que si le formateur lui-même y est sensible, et si, dans une réflexion sur sa propre histoire et ses propres pratiques, il reconstitue la non-transparence de ce qui, pour lui expert, est devenu transparent et s'il considère important de transmettre cette réflexion dans la formation qu'il assure (Abboud-Blanchard, 1998).

Cette première recherche nous avait permis, dans un contexte post IPT, de faire des repérages dans le système de formation en mathématiques à l'usage des TICE. Cependant, nous manquons de connaissances sur les formations elles-mêmes et certains de nos résultats nécessitent aujourd'hui d'être réactualisées. En effet, sur le plan empirique, le public de stagiaires n'est pas le même, 20 ans après le plan IPT, et ses conceptions vis-à-vis des TICE ont évoluées notamment en lien avec l'évolution des technologies et leur généralisation dans le quotidien. Sur le plan de la recherche, il paraît indispensable de prendre en compte le développement de cadres théoriques concernant d'une part l'étude des pratiques professionnelles en général et d'autre part l'étude des apprentissages/enseignements dans le domaine des TICE.

Deuxième temps de la recherche

Cadre théorique

Des recherches menées depuis plus d'une dizaine d'années ont permis d'avancer vers une meilleure compréhension des systèmes de formation professionnelle des enseignants. Certains auteurs de ces recherches se centrent sur les savoirs et les compétences professionnelles des enseignants comme Altet (1994), Perrenoud (1999), Altet Paquay et Perrenoud (2002). D'autres étudient les formations des enseignants aux nouvelles technologies comme Baron et Bruillard (2002) et Karsenti (2005). D'autres enfin, dans le champ de la didactique des mathématiques, s'intéressent à la formation des enseignants comme Robert (2005) et Vergnes (2001). Cependant, des cadres théoriques spécifiquement adaptés à l'étude de la formation des enseignants aux TICE restent inexistants (Bergsten, 2008). Nous nous sommes donc intéressés d'une part, à ceux développés pour l'analyse des pratiques des enseignants et d'autre part, à ceux relatifs à l'utilisation des technologies dans l'enseignement. Nous avons ainsi choisi d'utiliser conjointement le cadre d'une démarche croisée articulant didactique des mathématiques et ergonomie cognitive (Robert, 2005) et le cadre de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), qui se rattache également à l'ergonomie cognitive.

Le premier cadre théorique, la « double approche », a été conçu pour tenter « de présenter et de justifier un cadrage théorique pour mettre en place des recherches didactiques sur les formations professionnelles des enseignants de mathématiques » (Robert, 1999, p. 124). L'approche didactique y est centrée sur les effets des pratiques de l'enseignant sur l'activité et les apprentissages des élèves à partir d'une analyse en termes de deux composantes : une composante *cognitive* liée aux contenus mathématiques, aux tâches prévues et prescrites, à l'itinéraire cognitif que l'enseignant tente de faire suivre à l'élève ; une composante *médiative* liée aux interactions entre l'enseignant et les élèves, les élèves entre eux, la communication de la tâche et les aides apportées. Pour accéder à la dimension individuelle des pratiques, la double approche utilise la psychologie ergonomique. L'analyse de l'activité de l'enseignant se fait en tenant compte de trois autres composantes : une composante *institutionnelle* liée aux contraintes des programmes et de l'institution en général ; une composante *sociale* liée au genre professionnel, aux habitudes de la classe et une composante *personnelle* liée aux représentations de l'enseignant sur les mathématiques, sur l'enseignement, etc. Dans la double approche, c'est la recomposition de ces cinq composantes qui permet d'accéder aux pratiques de l'enseignant. Cette théorie ayant été développée pour permettre d'étudier les pratiques des enseignants et non des formateurs nous essayons dans notre travail de la spécifier à la situation de formation.

Pour prendre en compte les spécificités de l'intégration des technologies, nous utilisons, conjointement à la double approche, un cadre théorique d'ergonomie cognitive qui permet de tenir compte des relations entre les individus et un artefact : l'approche instrumentale développée par Rabardel (1995). Le choix de ce cadre, issue de la didactique professionnel, est cohérent avec celui de la double approche dont un des axes utilise le même champ théorique. Ce cadre permet en particulier d'analyser le processus de genèse instrumentale c'est-à-dire le processus de construction de schèmes d'utilisation d'un artefact ou d'un « système d'artefacts » donné et les contraintes que celui-ci oppose à l'utilisateur, l'amenant à modifier ses schèmes. Dans notre recherche sur les formations une triple genèse imbriquée apparait : celle du formateur, de l'enseignant et des élèves.

Choix méthodologiques et corpus

De la spécification des cadres théoriques pour l'analyse des formations découlent des contraintes méthodologiques. Aborder les composantes des pratiques, à accès indirect (sociale, institutionnelle et personnelle), ainsi que les genèses instrumentales personnelles et professionnelles du formateur nécessite un travail basé sur des déclarations de formateurs. Nous avons ainsi choisi de mettre en place d'abord une interview basée sur un questionnaire enregistré et transcrit. Notre premier corpus est constitué de quatorze interviews de formateurs.

Pour construire le questionnaire, nous nous sommes basés sur des outils méthodologiques issus du premier temps de notre recherche que nous avons réactualisés, ainsi que sur des travaux sur les enseignants confrontés aux technologies – tels que ceux de Réhaume et Laferrière (2002). Le questionnaire est constitué de deux grandes parties, la première concerne le formateur et la seconde les formations qu'il assure. Pour recueillir et croiser les informations, nous avons utilisé plusieurs ressorts :

- Des questions ouvertes concernant l'avis du formateurs comme par exemple : « Quelles sont les attentes du public des formations TICE que vous menez ? » ;
- Des choix parmi une liste comme « en cas de problème informatique lors d'une formation :
    - Vous savez vous débrouiller seul pour tout mettre en route et tout installer ;
    - Vous appelez une personne ressource ;
    - Vous mettez en place une autre activité n'utilisant pas les TIC. » ;
- Des analyses d'affirmations sur lesquelles le formateur est appelé à donner son avis comme : « Confronter les élèves à des logiciels pédagogiques « bien conçus » permettrait à lui seul les apprentissages » ;
- Une question inversée, c'est-à-dire demandant aux formateurs comment faire échouer une formation aux technologies. En inversant les réponses à cette question, nous pensons obtenir des informations plus spontanées et plus proches des représentations du formateur qu'avec une formulation « directe ».

L'ensemble de ces quatre types de questions permet une analyse statistique et des recoupements entre les différentes réponses. Celles-ci sont mises en relation avec des informations sur le formateur liées à son parcours professionnel. Même si ces recoupements évitent une partie des biais liés à des déclarations simples du formateur, à chaque fois que possible, nous avons essayé de mettre en relation les informations recueillies avec des données plus objectives. Ainsi, pour analyser la question des raisons qui amènent les formateurs à mettre en œuvre des formations incluant les TICE, et en particulier la part inhérente à la pression de l'institution, nous avons analysé les plans de formation des IUFM disponibles en ligne pour obtenir des éléments de comparaison.

Pour accéder aux composantes médiative et cognitive, ainsi qu'aux différentes genèses instrumentales, celle du stagiaire et celle proposée par le formateur pour les élèves, seule l'analyse du déroulement de formations est pertinent. Nous avons mené un travail d'observation de trois formations, ces observations constituent notre deuxième corpus. Les trois formateurs assurant ces trois formations ont été choisis parmi ceux présents dans le corpus précédent. Il s'agit d'un choix pragmatique permettant de garantir un certain niveau de généralité à nos résultats. En effet, nous nous sommes basés sur la dernière question, ouverte, de notre questionnaire où on demande au formateur de décrire les formations qu'il met en œuvre : leur contenu, la démarche employée, les enjeux et le déroulement.

La méthodologie employée pour ces observations est inspirée des travaux de Robert (2005) : lors d'un entretien *a priori* le formateur est questionné sur les enjeux de la formation, le déroulement prévu mais aussi sur le contexte de la formation. Cela permet de dégager ce que Robert (*ibid.*) nomme les *lignes d'action* du formateur. La séance de formation est ensuite filmée intégralement et transcrite. Le recueil de données est complété par un entretien *a posteriori* pendant lequel le formateur est invité à revenir sur le déroulement réel, sur les choix opérés à chaud, etc. L'ensemble de ces données est analysé de plusieurs points de vue et à plusieurs niveaux de pratiques et d'activités. Dans les formations, peut apparaître l'activité d'élèves et l'activité de l'enseignant, par l'intermédiaire d'analyse de vidéos de classe par exemple. Nous analysons d'un point de vue didactique les séances de classe proposées aux stagiaires, mais aussi du point de vue des pratiques enseignantes qui y sont proposées. Le dispositif permet également l'analyse des pratiques du formateur.

Il y a donc trois niveaux d'activités et deux niveaux de pratiques potentiellement observables. À chacun de ces niveaux, la contribution à la genèse instrumentale de l'élève, de l'enseignant et du formateur sont aussi analysées. Les résultats ainsi obtenus concernent les modalités de la formation, la prise en compte des différentes composantes de l'activité du formateur et la démarche d'homologie, démarche que plus de la moitié des formateurs interrogés déclarent utiliser et qui est celle utilisée par les trois formateurs observés.

Nous ne présenterons pas ici l'analyse détaillée des corpus, mais plutôt les résultats les plus saillants en relation avec notre questionnement d'origine.

Principaux résultats

Résultats relatifs à l'analyse des questionnaires

Le traitement des questionnaires, recoupé avec les informations signalétiques et les analyses de données objectives, nous ont permis de distinguer d'une façon globale deux catégories de formateurs. Pour mieux caractériser ces catégories nous avons utilisé la classification des enseignants utilisant les TICE faite par Réhaume et Laferrière (2002) en la transposant aux formateurs. Nous avons lié cette catégorisation aux deux types de genèses instrumentales : professionnelle et personnelle, définis par Abboud-Blanchard et Lagrange (2006).

Les *formateurs mordus talentueux* sont caractérisés par une genèse instrumentale initiée il y a plusieurs années et un usage non professionnel des TICE assez riche. Pour ces formateurs, l'artefact prime, son intérêt technique suffit à engendrer son utilisation.

Les *formateurs optimistes besogneux* sont venus aux TICE plus récemment poussés par des raisons pragmatiques indépendantes de leur goût personnel. Pour ces formateurs, une raison extérieure ou une plus-value explicite de l'usage des TICE sont nécessaires pour qu'ils les utilisent en formation.

Nous notons des similitudes dans les genèses instrumentales professionnelles des formateurs d'une même catégorie et des relations entre les deux catégories notamment une influence des mordus talentueux, plus nombreux et considérés comme des spécialistes, les plus anciens d'entre eux ayant joué un rôle dans la genèse instrumentale professionnelle des autres. Les formateurs, dans leur ensemble, ont également des représentations de l'activité de formation et de l'activité d'enseignement identiques à partir du moment où elles concernent des artefacts suffisamment courants. Sur la fonction de l'informatique, par exemple, les formateurs s'accordent à dire que c'est un outil d'individualisation même si ce n'est pas sa seule fonction.

Les formateurs, dans leur ensemble, emploient des stratégies comparables pour mener leurs formations. Elles sont caractérisées par un temps important de confrontation avec l'artefact employant la stratégie d'homologie et par une faible importance de l'analyse des pratiques enseignantes au profit de l'analyse des possibilités de l'artefact.

Il y a ainsi des conceptions communes, quels que soient l'ancienneté ou le lieu de travail des formateurs. Le concept de *genre* nous semble utile pour comprendre l'existence de ces invariants dans la communauté des formateurs aux TICE. En effet, Clot et Faita (2000, p. 8) définissent le *genre* de la façon suivante :

> « Il y a donc entre le prescrit et le réel un troisième terme décisif que nous désignons comme le genre social du métier, le genre professionnel, c'est-à-dire les « obligations » que partagent ceux qui travaillent pour arriver à travailler, souvent malgré tout, parfois malgré l'organisation prescrite du travail. »

Les invariants que nous avons identifiés constituent une mémoire partagée par les formateurs, voire même un répertoire de pratiques viables. Plusieurs formateurs, par exemple, disent qu'il est difficile, voire impossible, de faire échouer des formations aux TICE, contrairement aux autres formations ce qui montre, pour ces formateurs, l'existence d'une spécificité liée TICE.

Le genre professionnel, que nous venons d'identifier, est également caractérisé par une rupture entre deux identités : celle de l'enseignant et celle du formateur. Par exemple, l'efficacité intrinsèque des TICE, c'est-à-dire le fait de penser qu'un logiciel a des caractéristiques qui permettent à elles seules les apprentissages, est rejeté par tous en ce qui concerne les apprentissages des élèves, mais il est considéré comme plutôt vrai dans le cas des formations. De même, le formateur est vu comme quelqu'un qui doit exposer des situations et proposer des usages, alors que l'activité de l'enseignant est vue comme ne pouvant se résumer à exposer des savoirs.

Nous remarquons également que l'ensemble des formateurs affirment ne pas mener les formations TICE de façon radicalement différente des autres formations. Le genre professionnel que nous analysons serait donc en partie hérité du genre professionnel plus large des formateurs de mathématiques. Cet héritage, qui ne tient pas compte des spécificités de la formation aux TICE, favoriserait l'émergence de *styles* qui permettent aux formateurs d'adapter leurs pratiques aux besoins ressentis. Le *style* est défini par Clot et Faita (*ibid.*) comme étant les « retouches » que le sujet interpose entre lui et le genre collectif qu'il mobilise, il est défini comme « une métamorphose du genre en cours d'action ». Les spécificités des formations proposées par les optimistes besogneux, plus centrées sur la démarche d'apprentissage et où l'ordinateur est au service des apprentissages, peuvent alors être vues comme un style, une adaptation des pratiques professionnelles. Ils proposent une démarche plus proche de leur propre vision de l'outil informatique et conforme à leur propre genèse instrumentale.

Nous notons enfin qu'il semble avoir une transmission du genre dans le temps entre les différentes générations de formateurs, mais aussi entre les deux catégories que nous venons de définir.

Résultats relatifs à l'observation des formations

En ce qui concerne les observations de séances de formation, nous avons remarqué que pendant plus de la moitié du temps les stagiaires travaillent sur ordinateur. La confrontation du stagiaire avec l'ordinateur est considérée comme intrinsèquement formatrice, comme nous l'avions noté lors des interviews. En dehors de cette confrontation, la parole est au formateur et très peu d'échanges avec les stagiaires existent, encore moins d'échanges entre stagiaires. La formation aux TICE est ainsi basée sur la présentation des contenus et de situations que les formateurs considèrent comme nécessaire mais non suffisante.

Le principal biais de ces démarches de formation, basées sur l'homologie, est qu'elles permettent difficilement de dissocier la genèse instrumentale de l'enseignant de celle qui est proposée aux élèves dans la situation. Dans certains cas, le stagiaire vit en accéléré la genèse instrumentale attendue chez l'élève, dans d'autres, il y a un décalage entre ce qui est proposé aux enseignants et les besoins instrumentaux de la situation. En effet, parfois il y a confusion entre les différentes genèses instrumentales : celle proposée aux stagiaires et celle des élèves, comme par exemple dans la première formation observée où les stagiaires ont vécu en accéléré une genèse instrumentale destinée à l'élève. Il y a également confusion entre les genèses professionnelles en classe et hors classe, c'est le cas de la deuxième formation observée où les compétences travaillées ont été au service de la réalisation d'exercices et non de leur mise en œuvre en classe. Cette confusion entraîne des décalages entre les besoins instrumentaux des situations et la genèse proposée pour les élèves, de façon sous-jacente, dans les situations d'homologie. Cette non-clarification entre ce qui est du côté des élèves et ce qui est spécifique à l'enseignant entraîne des lacunes dans l'appréhension que peut avoir le stagiaire de la genèse instrumentale des élèves : soit il est sensé calquer exactement les situations qu'il a vécues, comme dans la troisième formation observée, soit le formateur indique clairement qu'un travail sur l'appropriation de l'artefact est nécessaire mais sans toutefois y apporter de propositions

En termes de double approche, une très faible partie du travail de l'enseignant est traitée dans ces formations, alors que l'on ressent des besoins au travers de différentes questions des stagiaires. La dimension médiative des pratiques est très faiblement traitée. L'utilisation d'une vidéo dans la première formation aurait pu, par exemple, permettre cette analyse en termes de composante médiative, mais, à la place, elle a été centrée sur le travail de deux élèves. Cette centration devrait permettre une analyse en termes de composante cognitive, mais, dans les faits, elle reste limitée à des constats et des observations. Elle est plus présentée comme une preuve de la viabilité du dispositif et du fait que l'utilisation de l'ordinateur provoque des effets sur les élèves que comme moyen permettant l'analyse de ces effets.

Ceci nous renvoie à la place de l'analyse des pratiques enseignantes dans les formations incluant les technologies. Ces pratiques peuvent être présentes de trois façons : montrées par l'intermédiaire d'une vidéo, évoquées par le formateur qui raconte ce qui se passe dans une classe *lambda* ou sous-jacentes, c'est-à-dire déductibles de la démarche de formation utilisée par le formateur. Nos analyses montrent que les échanges entre stagiaires augmentent lorsque les pratiques enseignantes sont montrées et que la confusion entre les genèses instrumentales que nous évoquons ci-dessus apparaît de façon importante dans les deux autres derniers cas.

Conclusions

L'objectif principal de notre recherche est d'identifier des facteurs explicatifs du déficit qualitatif des formations TICE en mathématiques. Nous revenons ici sur les plus marquants de ces facteurs explicatifs, qui ne sont pas indépendants et qui semblent constituer un ensemble où les différents éléments se renforcent les uns les autres.

Une première hypothèse explicative, issue du premier temps de travail, est que les formations sont fortement personnalisées et « militantes ». Nous retrouvons en partie ces caractéristiques chez les formateurs mordus talentueux, mais l'apparition de formateurs optimistes besogneux montre une évolution. Le genre professionnel que nous avons identifié permet d'approfondir la relation entre statut du formateur et la qualité de ses formations. En effet, la coexistence de l'identité d'enseignant et celle de formateur est un des facteurs explicatifs du déficit de sa formation, car elle introduit des décalages entre la démarche de formation et son contenu. La personnalisation des formations semble aujourd'hui moins attachée aux pratiques du formateur en lui-même mais plus à ses genèses instrumentales personnelle et professionnelle. Ainsi, pour les mordus talentueux, majoritaires, la centration de la formation sur l'artefact et le fait qu'ils ne ressentent pas la nécessité de montrer une plus-value à l'usage des technologies impliquent que leurs formations sont adaptées à des stagiaires eux-mêmes mordus talentueux, mais qu'elles risquent d'être insuffisantes pour les autres catégories de stagiaires.

Une deuxième hypothèse, avancée dès le premier temps de la recherche, concerne les formations par homologie qui restent dominantes. Cette démarche est liée au cadre contraint des formations continues, elle permet d'aborder les pratiques utilisant les TICE tout en amenant les stagiaires à s'approprier de nouveaux outils TICE. Néanmoins, nous avons montré que cette démarche est complexe et composée de différents temps. Elle est mal adaptée à un travail d'analyse des pratiques, justement parce qu'elle entraîne des confusions entre les différents niveaux de pratiques. L'homologie induit également que les pratiques enseignantes ne soient vues que de façon très réduite sous l'angle de la composante médiative par le biais de narration de situation ou la composante cognitive au travers de l'analyse des contenus. Elle amène en général des confusions entre différentes genèses instrumentales. Les compétences personnelles des stagiaires et leur propre genèse instrumentale professionnelle ne semble pas assez avancées pour effectuer le transfert entre les situations vécues en formation et les situations professionnelles d'enseignement.

Enfin, une dernière hypothèse est relative à la persistance d'une quasi-absence de « contenus de formation », dont l'acquisition est identifiée par les formateurs comme objectif de la formation aux TICE. Les contenus des formations déclarés ou/et observés sont centrés principalement autour des artefacts. La plupart des formateurs désignent le niveau de généralité du contenu comme étant celui de la démarche d'utilisation des technologies. Ces contenus ne sont pas ancrés sur des aspects didactiques. Ces derniers, lorsqu'ils existent, sont très rarement explicités et ne sont pas spécifiques à l'introduction des TICE en classe. Les formations, même si elles visent un travail sur la démarche d'utilisation des TICE, restent donc au niveau des exemples qui peuvent être amenés par les formateurs sans permettre l'acquisition de savoirs professionnels spécifiques. Quand des savoirs professionnels apparaissent dans les formations, soit ils sont présents de façon sous-jacente dans les situations d'homologie sans analyse de la tâche réalisée qui permet d'y accéder, soit ils apparaissent de façon marginale, sous forme d'affirmations du formateur qui sont souvent isolées du travail effectif du stagiaire. Dans tous les cas, les contenus de formation sont mal identifiés et mal définis par les formateurs.

Pour terminer, nous souhaitons introduire un facteur qui semble jouer un rôle important dans le paysage de la formation aux TICE que nous venons de peindre. Ce facteur est l'évolution permanente des technologies et le développement de nouveaux usages. Par exemple, nous avons repéré qu'il ne se dégage pas, dans les déclarations des formateurs, de réponses communes quant à l'activité d'enseignement ou de formation lorsqu'il s'agit d'artefacts non encore suffisamment courants (par exemple, cas du tutorat ou d'entrainement en ligne). Comment qualifier le rôle joué par ce facteur ? Comment les formations et les formateurs prennent en compte ou intègrent cette évolution incessante ? Trouver des réponses à ces questions est l'une de nos orientations actuelles de recherche.

Maha Abboud-Blanchard
Université d'Artois, Laboratoire de didactique André Revuz
maha.blanchard@lille.iufm.fr

Fabien Emprin
Université de Reims Champagne-Ardenne, équipe LERP
fabien.emprin@univ-reims.fr

Références

Abboud-Blanchard M. (1994). *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.

Abboud-Blanchard M. (1998). *Réflexions sur la formation des enseignants à l'utilisation de logiciels dans leur enseignement. Le cas DERIVE, Faire des mathématiques avec un système de calcul formel*. Tome1, Paris, Ed. CNDP.

Abboud-Blanchard M., Lagrange J-B. (2006). Uses of ICT by pre-service teachers: towards a professional instrumentation? *Special ICTMT7 issues of the International Journal for Technology in Mathematics Education*, volume 13, issue 4, 207-214.

Altet M. (1994). *La formation professionnelle des enseignants*. PUF.

Altet M, Paquay L., Perrenoud P. (2002). *Formateurs d'enseignants, quelle professionnalisation ?* De Boeck.

Archambault J.-P. (2005). 1985, vingt ans après... Une histoire de l'introduction des TIC dans le système éducatif français. *Médialog*, n° 54, 42-45.

Baron G.-L., Bruillard E. (2002). Quels objectifs pour quelles compétences. In Guir R. (dir). *Pratiquer les TICE. Former les enseignants et les formateurs à de nouveaux usages*. De Boeck.

Bergsten C. (2008). Teacher education and use of ICT in mathematics learning. In *Proceedings of the fifth Nordic Conference on research in Mathematics Education*, Copenhagen.

Clot Y., Faita D. (2000). Genres et styles en analyse du travail. Concepts et méthodes. *Travailler* n°4, Paris, CNAM.

DEP (2004). Les attitudes des enseignants vis-à-vis des technologies de l'information et de la communication dans les premier et second degrés. *Les dossiers de la DEP*, n° 257 ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/dpd/dossiers/dossier157/dossier157.pdf et note d'éval. 03-04.

Empirica European Commission (2006). Information Society and Media Directorate General, Benchmarking Access and Use of ICT in European Schools 2006. *Final Report from Head Teacher and Classroom Teacher Surveys in 27 European Countries* http://ec.europa.eu/information_society/eeurope/i2010/docs/studies/final_report_3.pdf

Houdement C., Kuzniak A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16/3, La Pensée Sauvage.

Karsenti T. (2005). Développer le professionnalisme collectif des futurs enseignants par les TIC. *Recherche et formation*, n° 49, 73-90.

Nallet J-F., Caspar P. (2006). Formation des adultes, formation des enseignants. *Recherche et formation*, n° 53, 25-39.

Perrenoud P. (1999). De l'analyse de l'expérience au travail par situations-problèmes en formation des enseignants. In Triquet E., Fabre-Col C. (dir.) *Recherche (s) et formation des enseignants*. Grenoble, pp. 89-105.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Ed. Armand Colin.

Rhéaume J., Laferrière T. (2002). Les communautés virtuelles d'apprentissage, In Guir R. (dir). *Pratiquer les TICE. Former les enseignants et les formateurs à de nouveaux usages*. De Boeck.

Robert A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia* 15, 123-157.

Robert A. (2005). Sur la formation des pratiques des enseignants des mathématiques du second degré. *Recherche et formation*, n° 50, 75-89.

Ruthven K., Hennessy S. (2002). A practitioner model of the use of computer based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educationnal Studies in Mathematics* 49, 47-88.

Vergnes D. (2001). Effet d'un stage de formation en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21 n°1.2, La Pensée Sauvage, 99-122.

---

[i] Le plan Informatique Pour Tous (IPT) qui avait permis en 1985 la dotation en ordinateurs de 33 000 écoles et a représenté 5 500 000 heures de formation pour les enseignants (Archambault, 2005).

[ii] Plan pour une République numérique dans la Société de l'information (RE/SO) 2007, http://www.internet.gouv.fr/informations/information/plan_reso2007/

Casyopée dans la classe : comment les théories guident les scénarios pédagogiques d'usage

Claire Cazes, Mirko Maracci, Fabrice Vandebrouck

Résumé

Cette présentation est issue du travail effectué dans le projet Européen ReMAth. Deux scénarios d'utilisation du même logiciel (Casyopée) dans des classes de deux pays différents y sont présentés. Il est très intéressant d'observer comment les différents cadres théoriques utilisés par chacune des équipes engendrent des différences dans les approches et perspectives adoptées pour la conception de scénarios d'utilisation.

1. Le projet REMATH

Le projet ReMath est un projet Européen dont le but général est la conception et l'étude de l'utilisation de TICE pour renforcer les représentations d'objets mathématiques chez les élèves de lycée (élèves de 15 à 18 ans). Les expérimentations des outils TICE conçus et étudiés doivent se faire, dans la mesure du possible, dans des classes ordinaires car l'un des sous objectifs du projet est la dissémination de produits et résultats de la recherche auprès des enseignants. L'aspect européen du projet conduit en outre à porter une attention particulière à la diversité culturelle : 7 équipes venant de 4 pays différents participent en effet au projet.

Plus précisément, le projet ReMath est organisé suivant les trois axes suivants :

a) développement des 6 logiciels destinés à aider les élèves dans leurs représentations d'objets mathématiques, que ce soit dans les domaines algébrique, géométrique ou des mathématiques appliquées ;

b) conception de scénarios pédagogiques d'utilisation de ces logiciels dans un format commun à toutes les équipes ;

c) expérimentation de ces scénarios suivant le principe de la "*cross-experimentation*" (Cerulli, Trgalová, Marraci, Psycharis, Georget, 2008), c'est-à-dire que ces scénarios sont expérimentés dans des classes ordinaires comme nous l'avons déjà souligné mais que chaque équipe de chercheurs expérimente son propre logiciel et celui d'une autre équipe traduit en anglais ou dans sa langue si c'est possible[1]. Les objectifs de ces expérimentations sont d'étendre notre connaissance de l'impact des logiciels sur les apprentissage des élèves, de tester l'utilisabilité des logiciels dans d'autres contextes culturels et enfin de comparer les différents outils des chercheurs pour étudier de telles situations.

En effet, de nombreuses et récentes études ont mis en évidence la multiplicité des cadres théoriques utilisés pour étudier le rôle des TICE dans l'apprentissage des mathématiques (Artigue, 2008). Il y a donc un besoin de mise en regard et peut-être d'harmonisation de ces différents cadres. Ce besoin est bien sûr ressenti par les équipes impliquées dans le projet ReMath, où une pluralité de paradigmes éducatifs est convoquée. Une manière d'aborder ce problème est de développer des outils méthodologiques communs, dont certains d'entre eux sont issus du projet TELMA (Cerulli *et al.*, 2008).

Cette présentation étudie deux expérimentations effectuées dans le projet ReMath, respectivement par l'équipe Didirem de l'Université Paris Diderot-Paris 7 (France) et par l'équipe Unisi de l'Université de Sienne (Italie). Ces deux expérimentations utilisent le logiciel Casyopée dont une extension a été développée dans le cadre du projet ReMath. Après

[1] L'une des équipes ne développe pas de logiciel et en expérimente deux qui lui sont étrangers.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 131-140.

une rapide description des fonctionnalités de Casyopée utilisées dans les deux expérimentations, nous présentons les scénarios d'utilisation du logiciel des deux équipes et nous les comparons en nous appuyant sur la notion de Fonctionnalité Didactique que nous commençons par expliquer (Cerulli, Pedemonte and Robotti, 2006).

2. La notion de fonctionnalité didactique

La notion de fonctionnalité didactique vise à mettre en perspective, si possible indépendamment de tout langage propre à un cadre théorique particulier, les différents outils utilisés pour penser l'utilisation des TICE dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, aussi bien de manière générale que dans des situations concrètes.

Par fonctionnalité didactique d'un outil TICE, nous entendons le système constitué des trois pôles dépendants suivants : les caractéristiques de l'outil TICE utilisées, les objectifs d'enseignement visés et les modalités d'utilisation de l'outil mises en œuvre pour atteindre les objectifs pédagogiques énoncés.

Bien évidemment, la notion de fonctionnalité didactique fait apparaître que tout outil TICE (ou partie de cet outil) peut être utilisé de différentes manières pour poursuivre des buts pédagogiques très différents. C'est pourquoi un même outil peut être associé à plusieurs fonctionnalités didactiques. En particulier, différentes perspectives théoriques vont conduire à concevoir des fonctionnalités didactiques différentes pour un même outil, ce que nous allons étudier dans cette communication.

3. Le logiciel Casyopée

Le logiciel Casyopée (Lagrange and Chiappini, 2007) est un environnement de calcul formel pour l'apprentissage des mathématiques au lycée. Les objets mathématiques au cœur de la version initiale de Casyopée sont les fonctions, avec notamment leurs représentations graphiques, leurs expressions algébriques et leurs domaines de définition. Casyopée est en particulier un outil qui permet de travailler les manipulations usuelles sur les fonctions comme : les calculs algébriques (développer, factoriser une expression, résoudre une équation...) ; les calculs d'analyse (différentier, intégrer des fonctions) ; les représentations graphiques ; le soutien de la preuve (déterminer le signe et la variation d'une expression sur un intervalle...). Grâce à l'utilisation de cet outil, les étudiants sont supposés faire des liens entre les différents domaines de représentation et d'utilisation des fonctions et enrichir leur représentation de l'objet fonction. On trouvera ci-dessous (figure 1) une copie d'écran de la fenêtre algèbre de Casyopée. On constate qu'elle se subdivise en deux sous fenêtres : symbolique et graphique.

Dans le projet Remath, un module supplémentaire de géométrie dynamique a été ajouté à Casyopée. L'objectif est de permettre d'effectuer des liens entre problèmes de géométrie et aspects numériques ou algébriques des problèmes. Ainsi le but n'est pas de développer un module de géométrie dynamique le plus complet possible comme il en existe déjà, mais bien d'explorer des connections possibles entre certains problèmes de géométrie et leur traduction fonctionnelle. Par exemple, une figure géométrique peut être l'occasion d'étudier la variation d'un calcul géométrique, c'est-à-dire d'une valeur numérique associée à une expression géométrique. Par exemple, dans la copie d'écran ci-dessous (figure 2), les étudiants doivent étudier les variations de l'aire du rectangle MNOP. Un modèle fonctionnel peut alors être associé à cette étude, en choisissant une mesure (par exemple AM comme ici) comme variable indépendante. À ce stade, Casyopée valide le choix de la variable en précisant si c'est bien une variable indépendante associée à la situation géométrique. Les autres mesures (MN, MO et ici l'aire de MN fois NO) sont alors des variables dépendantes.

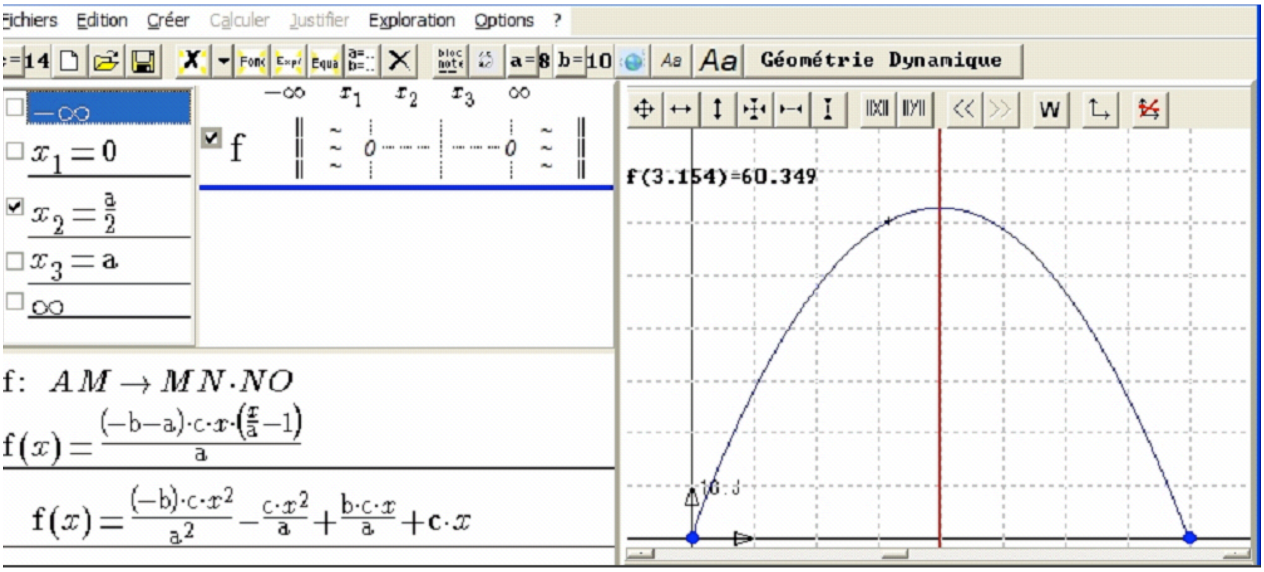


Figure 1 - Les deux fenêtres symbolique et graphique de Casyopée

Les propriétés de dépendance peuvent ainsi être conjecturées par les élèves. Elles prennent du sens à la fois dans la construction et le calcul géométrique, la valeur numérique de ce dernier étant affichée en regard de celle de la variable indépendante. En effet, la géométrie dynamique permet de faire varier la variable choisie et de constater la co-variation des variables dépendantes associées.

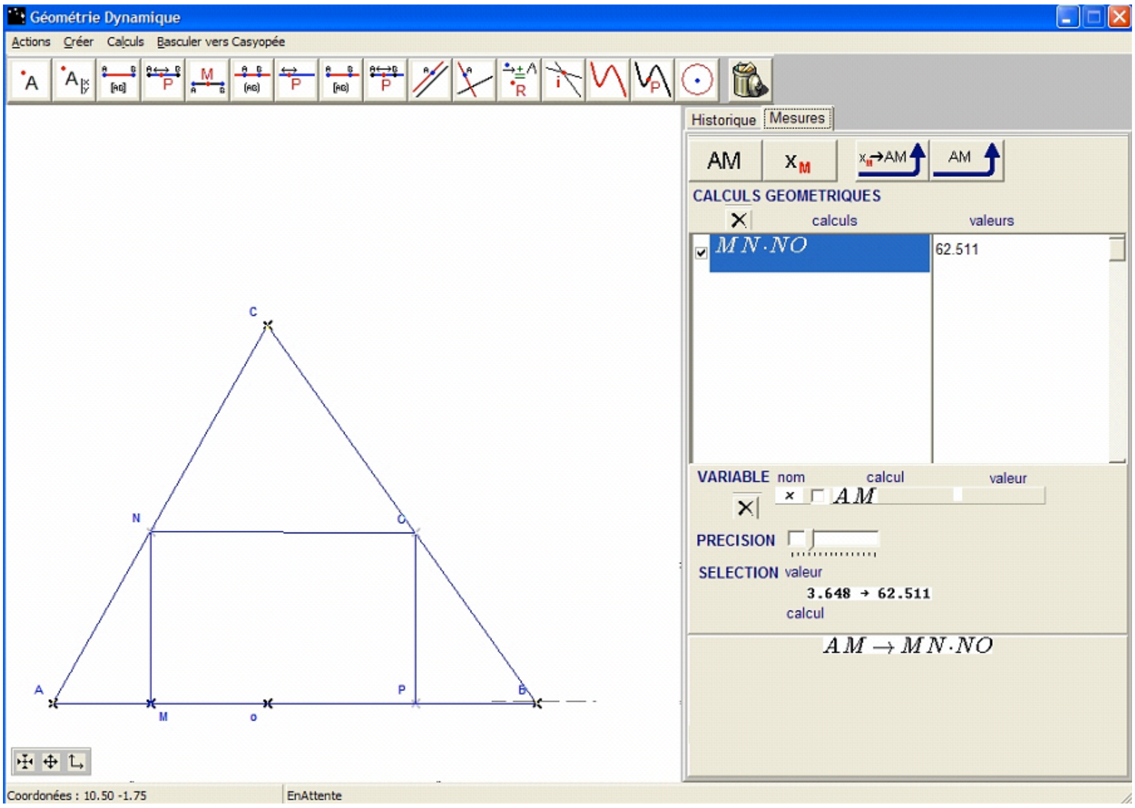


Figure 2 - La fenêtre géométrique de Casyopée

L'originalité et l'intérêt de Casyopée résident ainsi dans la possibilité de faire des liens entre les deux modules : algèbre et géométrie. Plus précisément, dans la fenêtre géométrie, il est donc possible de choisir une variable associée à un calcul géométrique, d'exprimer ce calcul géométrique par une fonction de la variable choisie et enfin d'exporter cette fonction dans le module d'algèbre afin, par exemple, de déterminer un extremum de cette fonction. Ainsi Casyopée offre non seulement une pluralité de représentations de l'objet fonction, dont l'intérêt des manipulations (traitements et conversions) a été souligné par Duval (1996) mais offre également l'opportunité pour les élèves de travailler dans les cadres géométriques et fonctionnels, ce qui est un levier supplémentaire exploité par Douady (1987).

Enfin, signalons que les représentations et les modes de leurs manipulations proposés par Casyopée ont été pensés pour être proches des pratiques habituelles. Ainsi, Casyopée permet aux étudiants de travailler avec les opérations classiques sur les expressions algébriques des fonctions : domaine de définition, dérivation, tableau de variation, graphe associé. De même dans le module géométrie, les étudiants ont la possibilité de construire des objets fixes ou des objets libres tels que points, droites, cercles comme dans la géométrie dynamique classique.

4. Scénarios pédagogiques de Unisi et Didirem

Nous avons signalé dans l'introduction qu'un certain nombre d'outils méthodologiques transversaux avaient été construits par les acteurs du projet ReMath. C'est le cas du modèle conceptuel de scénario pédagogique, nommé Plan Pédagogique (Bottino *et al.* 2008), que nous avons utilisé dans le projet pour décrire et comparer les scénarios Unisi et Didirem. Un Plan Pédagogique (PP) a une structure récursive : chaque PP est conçu comme un arbre dont les feuilles sont également des PP. Plusieurs composantes sont attachées à chaque PP telles que les buts éducatifs visés, les activités proposées aux élèves, les caractéristiques de l'outil TICE utilisé et la manière dont elles sont utilisées, les raisons et les justifications théoriques des choix effectués. Un outil en ligne (Pedagogical Plan Manager, PPM) a été développé pour permettre à toutes les équipes de présenter leur PP global dans un même format. Nous ne pouvons donner ici qu'un bref aperçu de la structure générale de chaque scénario (Unisi et Didirem). C'est un extrait de copie d'écran du PPM.

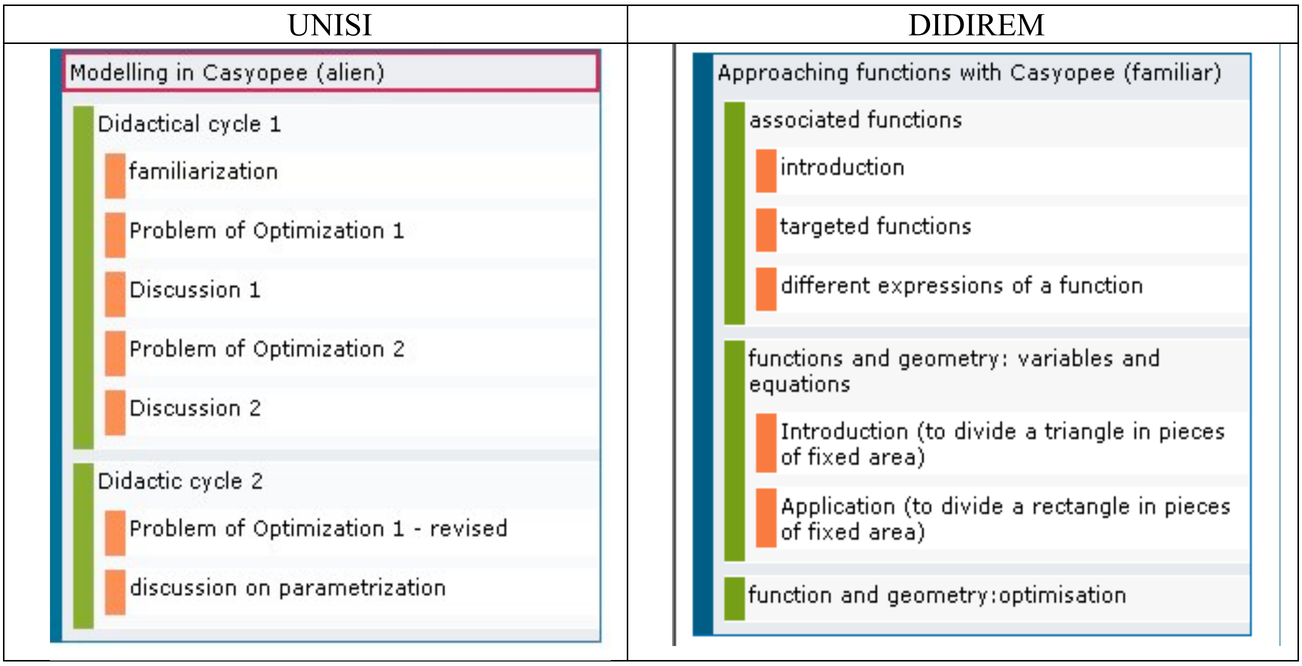


Figure 3 - Vue synthétique des scénarios Unisi et Didirem à travers le PPM

Détail du scénario pédagogique Unisi

Le PP Unisi concerne des classes scientifiques de lycée de niveau 12 ou 13 (17-18 ans). Il est prévu pour environ 11h de classe et s'appuie sur la théorie de la Médiation Sémiotique

(Bartolini Bussi and Mariotti, 2008) inspirée de l'approche de Vygotski. Cette théorie permet de construire à la fois les buts éducatifs (issus de l'analyse didactique de Casyopée) et la structure des activités proposées aux élèves. Les buts éducatifs sont les suivants :

a) accompagner l'évolution des représentations personnelles des élèves concernant la notion de fonction jusqu'à une représentation mathématique d'une fonction comme une co-variation. Ceci concerne également les notions de variable et intervalle de variation associé à cette variable ;

b) faire évoluer la notion de modélisation d'une situation algébrique depuis une représentation personnelle jusqu'à une notion mathématique.

Les élèves ont quelques connaissances antérieures concernant les notions de variables, de fonctions et de graphe d'une fonction dans un plan cartésien. Cependant, l'expérience des enseignants comme des chercheurs prouve que ces notions sont rarement travaillées en profondeur, notamment en lien avec la géométrie. Aussi, le but de l'expérimentation est de faire donner davantage de sens à ces notions grâce au travail effectué dans le cadre de la modélisation. Ainsi, le but du PP n'est pas de permettre aux élèves de réaliser à l'aide de Casyopée d'autres tâches que celle habituelles mais de les engager dans une construction collective de sens associé aux notions concernées.

L'ensemble du PP est structuré en petits cycles de la manière suivante : les étudiants travaillent par paires ou petits groupes avec Casyopée pour accomplir une tâche d'optimisation fixée (problème 1 puis 2, puis retour au problème 1). Ils doivent avoir à chaque fois une attitude réflexive sur cette activité en produisant un rapport. Enfin une discussion collective est organisée à chaque fois par le professeur.

La session initiale de familiarisation au logiciel Casyopée est constituée d'une suite de tâches simples à réaliser. Ces tâches sont conçues de manière à explorer les différentes fonctionnalités de Casyopée, notamment les rétroactions lorsqu'on choisit une variable. Voici un exemple.

> Pouvez-vous choisir une variable acceptable par Casyopée ? Appuyer alors sur le bouton "valider". Décrivez comment la fenêtre "calcul géométrique" change après avoir appuyé sur ce bouton. Quel nouveau bouton apparaît ?

Après la familiarisation, les tâches proposées sont des problèmes "complexes" d'optimisation formulés dans un cadre géométrique et de manière ouverte afin que les élèves aient à modéliser les situations à l'aide de Casyopée. Voici l'exemple du problème d'optimisation 1, au cœur de l'expérimentation :

> Étant donné un triangle, quelle est l'aire maximale d'un rectangle inscrit dans ce triangle ? Trouver un rectangle ayant cette aire maximale.

Le but du scénario est de faire chercher les élèves à partir des deux problèmes d'optimisation, afin d'en montrer la complexité, de travailler à leur résolution et de faire émerger peu à peu la démarche de modélisation.

Comme indiqué dans le PP, l'enseignant joue le rôle délicat de celui qui guide les élèves vers la résolution et les accompagne dans la construction du sens des notions visées. Le levier principal d'action de l'enseignant est l'organisation des discussions dans la classe. Le contenu complet de cette discussion ne peut pas être totalement déterminé *a priori*, mais doit être élaboré à partir de l'activité réelle des étudiants avec Casyopée, des rapports qu'ils ont produits et enfin de leur réactivité pendant la discussion elle-même. Toutefois, l'équipe Unisi a essayé d'anticiper des développements possibles et de préparer un canevas possible pour les enseignants en charge de la discussion.

Détail du scénario pédagogique Didirem

Le PP de l'équipe Didirem a pour but d'aider les élèves à construire ou enrichir leurs connaissances dans deux domaines : les fonctions comme objets algébriques et les fonctions comme moyen de modéliser des situations de géométrie dynamique et de résoudre des problèmes d'optimisation. Il est conçu pour des classes scientifiques de niveau 11 ou 12 (16 et 17 ans) et a été implémenté dans des classes ordinaires pendant environ 10h de classe. L'élaboration du PP s'appuie sur l'Approche Instrumentale (Artigue, 2002), la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1997) et la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999).

Une grande importance est accordée à la construction de tâches ayant un potentiel adidactique, par exemple, des tâches dans lesquelles les étudiants peuvent choisir différentes variables possibles pour explorer des dépendances fonctionnelles et profiter des rétroactions du logiciel Casyopée. Une grande importance est également accordée à proposer des tâches qui permettent d'entrer progressivement dans l'usage du logiciel, en articulant la prise en main et l'avancée dans les connaissances mathématiques. Enfin, les concepteurs du scénario ont été attentifs à proposer des tâches qui ne dérogent pas aux pratiques habituelles des élèves et des enseignants. Le PP est construit suivant trois types de tâches principales :

a) première session : trouver des fonctions cibles du second degré (enjeu d'apprentissage en première scientifique) en faisant varier les paramètres présents dans les expressions algébriques de ces fonctions :

> Leçon 1 : Introduction des fonctions associées (une fonction g est associée à une fonction f lorsqu'elle est définie par une formule du type $g(x)=a\,f(x)+b$ ou $f(ax+b)$ ou équivalent). Il s'agit d'une séance collective où l'enseignant (ou un élève « sherpa ») utilise le module algèbre de Casyopée pour à la fois montrer les fonctionnalités de Casyopée et valider les réponses que les élèves ont cherchées.
>
> Leçon 2 : Fonction cibles : les étudiants travaillent par paires avec Casyopée et doivent trouver, d'après leur graphe, les expressions algébriques de fonctions associées à une fonction donnée.
>
> Leçon 3 : Travail sur les différentes expressions d'un polynôme du second degré. Les étudiants travaillent à nouveau par paires sur Casyopée

Par cette première session, les élèves peuvent consolider leur connaissance sur les variables, la distinction entre paramètre et variable, les différentes écritures d'un polynôme du second degré (canonique, développée, factorisée quand c'est possible) et le fait qu'une même fonction peut avoir plusieurs écritures différentes. Par ailleurs, la notion nouvelle de fonction associée est travaillée.

b) seconde session : notion de « calcul géométrique », choix d'une variable adéquate. Il s'agit d'introduire le calcul géométrique dans la fenêtre géométrie, comme cela a été expliqué figure 2 avec l'exemple du calcul de l'aire du rectangle MNOP

> Leçon 4 : Séance collective sur le partage d'un triangle en différentes parties d'aires données et présentation des commandes du module géométrie de Casyopée. Les élèves doivent réussir à rendre égales les valeurs des calculs géométriques correspondant aux différentes parties d'aires données.
>
> Leçon 5 : Réinvestissement du travail précédent par paires avec Casyopée. Les élèves doivent trouver comment diviser un rectangle en parties d'aire fixée. Il y a également un premier travail sur le choix de variables indépendante et dépendante. Les élèves peuvent ici travailler la notion nouvelle de variable dépendante associée à une situation de géométrie dynamique.

c) troisième session : modélisation d'un problème d'optimisation.

Leçon 6 : Résolution d'un problème d'optimisation dans un cadre géométrique par une méthode de modélisation algébrique. L'énoncé est le suivant (figure 4), il faut le rapprocher du problème d'optimisation 1 proposé par l'équipe Unisi et dont l'énoncé est fourni plus haut.

Soient a, b et c, trois paramètres positifs.
On considère les points A (– a, 0) et B (0, b) et C(c, 0).
On construit le rectangle MNPQ avec M sur [oA], N sur [AB], P sur [BC] et Q sur [oC].

- Peut-on construire un rectangle MNPQ d'aire maximale ?
- MNPQ peut-il être un carré ?

Travail demandé

1. Charger le fichier figinit.cas puis compléter la figure avec le logiciel.
   remarque : il est nécessaire de construire les segments [oA], [AB], [BC] et [oC] pour définir correctement les points du rectangle.
2. Répondre aux deux questions posées avec les consignes suivantes :
   - Indiquer le choix de variable.
   - Rédiger une démarche utilisant les résultats affichés par le logiciel.
   - Visualiser la réponse dans le module de géométrie dynamique.

Figure 4 - Énoncé du problème d'optimisation de la troisième session

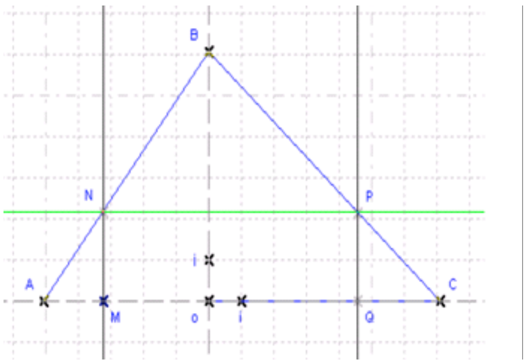


Figure 5 - Figure associée au problème d'optimisation proposé à la troisième session

Ce problème permet de réinvestir les différentes connaissances acquises pendant le début du PP et aussi de faire le lien visé entre les cadres géométriques et fonctionnels.

5. Comparaison des deux scénarios à partir de la notion de fonctionnalité didactique

Les deux PP décrits précédemment partagent clairement un certain nombre de caractéristiques communes mais ils ont aussi de profondes différences. Dans cette section, nous utilisons la notion de fonctionnalité didactique présentée plus haut afin d'organiser une comparaison plus précise des deux scénarios.

Caractéristiques de l'outil

Les deux PP ne sont pas seulement centrés sur l'utilisation du même outil mais plus spécifiquement sur l'utilisation des mêmes caractéristiques du même outil. En effet, les deux PP exploitent particulièrement :

a) les caractéristiques de l'environnement de géométrie dynamique et en particulier les commandes pour créer des points libres ou liés, des points à coordonnées paramétriques, le tracé des droites ainsi que l'exploitation des rétroactions de l'outil en géométrie dynamique ;

b) les caractéristiques du calcul géométrique, en particulier les commandes « créer calcul géométrique » et « choix de variables » ainsi que les rétroactions correspondantes ;

c) les caractéristiques de la fenêtre algébrique, en particulier les commandes « créer graphe », les manipulations des expressions algébriques et des paramètres ainsi que les rétroactions associées.

Buts pédagogiques

Différents buts éducatifs sont associés à l'utilisation de ces mêmes caractéristiques. Plus précisément, on peut remarquer que les deux PP partagent le même but principal : la notion de fonction (conçu en particulier comme une co-variation) de variables (indépendante et dépendante) et de paramètre. De plus, les deux PP proposent, parmi les différentes tâches, le même problème d'optimisation (problème 1 initial puis revisité dans le PP Unisi). Cependant, derrière ces similarités de surface, il y aussi des différences.

Les buts de l'équipe Unisi sont de faire émerger du sens concernant les notions de fonction, variable et paramètre. L'équipe Unisi assure d'une part que ces notions ne sont pas nouvelles mais d'autre part qu'elles n'ont pas été travaillées suffisamment en profondeur et que le l'usage de Casyopée est l'occasion d'y revenir. C'est pourquoi le PP Unisi cherche à fournir aux élèves l'occasion d'approfondir leurs connaissances et de fournir un travail réflexif sur les notions concernées ainsi que de les réinvestir dans le cadre plus général d'un problème de modélisation. De plus, les objectifs d'Unisi comprennent aussi un travail de décontextualisation et les problèmes proposés visent à faire réfléchir aux problèmes d'optimisation en général.

Les buts de l'équipe Didirem sont essentiellement d'utiliser les potentialités de Casyopée, et notamment les potentialités concernant les représentations d'objets mathématiques et les deux cadres géométrique et fonctionnel, pour travailler des notions nouvelles. Ces notions ont été choisies pour deux raisons essentielles : leur importance dans le programme et les pratiques habituelles et l'importance spécifique pour ces notions de les étudier dans plusieurs registres de représentations.

Modalités d'utilisation

Les différences entre les objectifs éducatifs d'une part et les cultures pédagogiques d'autre part engendrent sûrement les plus grandes différences dans les modalités d'utilisation.

Le PP Unisi a une structure itérative : les activités des élèves avec Casyopée suivies de la production de rapports sur leurs activités alternent avec les discussions collectives. Cette structure est conçue pour favoriser chez les élèves, la production de sens personnel associé à l'utilisation de Casyopée puis l'évolution de ce sens vers les connaissances mathématiques visées. Ce processus est sans cesse alimenté par l'enseignant dont le rôle est crucial. Le rôle de l'enseignant est pris en compte explicitement dans l'établissement du PP, qui donne des indications sur la gestion de classe (notamment l'organisation d'une discussion). Les activités proposées aux élèves sont des problèmes d'optimisation généraux dans un cadre géométrique. La réflexion sur leur résolution, sans nécessairement que celle-ci soit effective, est l'étape indispensable pour atteindre les buts éducatifs fixés. C'est pourquoi, la familiarisation avec l'outil doit être considérée dans cette perspective : les élèves sont engagés à réfléchir constamment sur les effets produits par leurs actions sur l'outil et les tâches sont choisies dans ce but.

Au contraire, l'équipe Didirem attache d'une part une grande importance à une utilisation progressive de l'outil et d'autre part au fait de travailler conjointement les commandes manipulatoires de Casyopée et les connaissances mathématiques. C'est pourquoi, dans la session 1, les élèves travaillent uniquement dans le module algèbre de Casyopée. C'est l'occasion d'introduire la notion de fonction associée et de réviser les paraboles. Ensuite la section 2 est centrée sur le module géométrie uniquement et est l'occasion de travailler les notions de calcul géométrique et de choix de variables. Enfin, la session 3 est l'occasion de réinvestir les connaissances acquises sur l'outil en travaillant alternativement dans chacun des deux modules et d'aborder, seulement à ce moment, le problème de modélisation. De plus, toutes les tâches proposées ont un important contenu mathématique étroitement lié au curriculum. Elles sont enfin conçues pour permettre aux élèves de progresser vers la solution et de construire les connaissances visées en s'appuyant sur les rétroactions. Le rôle du professeur n'est pas théorisé précisément : il doit seulement introduire les sessions par des séances collectives, aider les élèves pendant les séances sur Casyopée sans dénaturer le potentiel adidactique des situations, puis enfin institutionnaliser les connaissances nouvelles à la fin de chacune des sessions.

6. Conclusion

Nous pensons que les différences mises en évidence dans les PP et notamment les buts pédagogiques et les modalités d'utilisation sont corrélées avec les perspectives théoriques adoptées par chaque équipe.

L'équipe Unisi a construit son PP en référence au cadre théorique de la médiation sémiotique. Ce cadre inspire à la fois les buts pédagogiques et l'organisation récursive des activités. Ce cadre théorique accorde, en particulier, une grande attention au rôle de l'enseignant dans la discussion collective. En fait, l'enseignant joue un rôle très important durant tout le déroulement du PP pour engager les élèves dans leur attitude réflexive et les accompagner vers la construction des connaissances mathématiques souhaitées à partir de leur signifiés personnels construits pendant les séances d'utilisation de Casyopée.

L'équipe Didirem est en revanche, influencée par plusieurs approches théoriques complémentaires : l'approche instrumentale (Artigue, 2002) pour la progression dans les connaissances instrumentales liant outil et mathématiques, la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau, 1997) pour la sensibilité au potentiel adidactique des tâches proposées par appui sur les rétroactions offertes par Casyopée et enfin la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999) pour la proximité des activités proposées avec les programmes, les pratiques habituelles des élèves et des professeurs. Plus précisément, le premier cadre permet de penser l'utilisation de Casyopée au delà d'une simple familiarisation. Il a pour objectif de permettre aux élèves de s'approprier Casyopée pour qu'il se constitue en instrument du travail mathématique. Ce processus est construit tout au long du PP et l'un des buts de la session 3 est de tester si cette appropriation est en bonne voie.

Il est certain que la mise en évidence de ces différences complémentaires peut bénéficier aux deux équipes pour améliorer son propre PP. Ainsi, l'équipe Didirem compte reprendre son PP en précisant davantage le rôle de l'enseignant et en donnant des indications sur les phases d'institutionnalisation, sans toutefois aller jusqu'à l'organisation de discussion au sens Italien. Néanmoins l'objectif principal n'est pas d'élaborer un cadre commun à toutes les équipes mais plutôt de travailler en profondeur la notion de fonctionnalité didactique afin de pouvoir exprimer et échanger sur des approches différentes dans un langage commun. Un travail est actuellement en cours sur l'exploitation des données provenant des deux expérimentations croisées. Elle permet d'avancer maintenant sur les méthodologies et les cadres théoriques propres à chacune des deux équipes pour les études des déroulements de chacun de ces scénarios.

Claire Cazes
Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de didactique André Revuz
claire.cazes@upmc.fr

Fabrice Vandebrouck
Université Paris Diderot – Paris 7, Laboratoire de didactique André Revuz
vandebro@math.jussieu.fr

Mirko Maracci
Équipe Unisi, Université de Sienne
mirko.maracci@gmail.com

Research funded by the European Community under the VI Framework Programme, IST-4-26751-STP. ''ReMath: Representing Mathematics with Digital Media'', http://www.remath.cti.gr

Références

Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245-274.

Artigue M. (2008). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G. (eds.) *Proceedings of CERME 5*, Larnaca, Chyprus, (pp. 68-82) http://ermeweb.free.fr/CERME5b.

Bartolini Bussi M.G. & Mariotti M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L.English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, and D. Tirosh (eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, second revised edition, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ.

Bottino R., Earp J., Olimpo G., Ott M., Pozzi F., Tavella M. (2008). /*Scenario Design, Final Version/.* ReMath Deliverable 17. Contributing Partners: UJF, DIDIREM, UNISI, ETL, Talent, IOE-LKL http://remath.cti.gr/index.asp?action=41

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Cerulli M., Pedemonte B., & Robotti E. (2006). An integrated perspective to approach technology in mathematics education. *Proceeding of CERME 4*. San Feliu de Guixols, Spain, (pp.1389-1399).

Cerulli M., Trgalová J., Marraci M., Psycharis G., Georget J.-P (2008). Comparing theoretical frameworks enacted in experimental research: TELMA experience. *ZDM. Comparing, Combining, Coordinating – Networking Strategies for Connecting Theoretical Approaches.* 40(2), 201-213.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 73-112.

Douady R. (1987). Jeu de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 5-31.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 16 (3), 349-382.

Lagrange J-B., Chiappini G. (2007). Integrating the learning of algebra with technology at the European Level: two examples in the Remath project. *Proceeding of CERME 5.* http://ermeweb.free.fr/CERME5b/, 903-913.

Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité

Françoise Chenevetot-Quentin, Brigitte Grugeon-Allys et Élisabeth Delozanne

Résumé

Cet article est consacré à l'adaptation à différents niveaux de la scolarité obligatoire d'un diagnostic cognitif dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Nous sommes parties de précédents travaux ayant conduit à l'élaboration d'un outil de diagnostic cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin $3^{ème}$ / début 2^{nde}. Ensuite, en nous appuyant d'une part sur un modèle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire et, d'autre part, sur l'organisation mathématique du domaine algébrique dans les programmes du collège, nous avons montré qu'il est possible de transférer à un autre niveau scolaire le premier outil de diagnostic et la définition du profil cognitif de l'élève en algèbre élémentaire. Des exemples concernant deux classes de $5^{ème}$ viennent appuyer cette analyse.

Introduction et problématique

Beaucoup d'enseignants éprouvent des difficultés à gérer l'hétérogénéité des connaissances des élèves et à différencier l'enseignement dans un domaine donné, notamment dans le domaine de l'algèbre élémentaire.

Dans des travaux antérieurs (Delozanne et *al*., 2005a), nous avons mis au point un outil de diagnostic, d'abord un outil papier / crayon (Grugeon, 1997), puis un logiciel, appelé *Pépite* (Jean et *al*., 1998), qui construit en partie automatiquement un profil cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin de $3^{ème}$ / début de 2^{nde} à partir de ses réponses à un test spécialement conçu à cet effet.

Dans le travail présenté ici, nous nous intéressons au transfert de cet outil de diagnostic à d'autres niveaux de la scolarité obligatoire. Ce transfert s'appuie d'une part sur une analyse épistémologique et didactique de la compétence algébrique et, d'autre part, sur une analyse des programmes reposant sur l'approche anthropologique.

Nous explicitons d'abord le modèle de la compétence algébrique construit pour analyser à la fois les rapports institutionnels, *via* les programmes, et les rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire, *via* le test diagnostique. Ensuite, nous décrivons les modalités du diagnostic et son adaptation à différents niveaux. Puis, nous présentons les stéréotypes, classes de profils cognitifs équivalents en algèbre, et les variables didactiques retenues pour les adapter selon les divers niveaux considérés. Enfin, nous proposons des exemples de géographie cognitive pour deux classes de $5^{ème}$. Pour conclure, nous discutons des résultats de ce travail et nous abordons les perspectives de recherche dégagées par cette étude.

Un modèle de la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire

Afin d'étudier à la fois les rapports personnels des élèves et les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire, Grugeon (1995 & 1997) a défini une sorte de *référence,* précisant les enjeux d'apprentissage en fin de scolarité obligatoire. S'appuyant sur des travaux théoriques du champ de la didactique de l'algèbre, Grugeon a établi un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique attendue en fin de scolarité obligatoire (Grugeon, 1995 & 1997).

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris-Diderot. pp. 141-149.

Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de Douady (1986).

Sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution. Cette dimension *outil* de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, des problèmes de modélisation et des problèmes « d'arithmétique traditionnelle » visant la mise en équation. Cependant, parmi ces différents types de problèmes, l'utilisation de l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques revêt une importance toute particulière.

Sur le plan *objet*, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques afin que leur manipulation formelle redonne sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. C'est pourquoi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.

Au niveau scolaire considéré (enseignement secondaire), deux éléments supplémentaires interviennent également dans l'évaluation de la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique (Vergnaud, 1987 ; Kieran, 1992) ;
- L'efficacité algébrique requiert, d'une part, une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et au niveau structural (Sfard, 1991) et, d'autre part, une capacité à adapter l'interprétation des expressions à la variété des usages visés.

Cette approche permet ainsi de caractériser les types de problèmes du champ conceptuel de l'algèbre, les objets mis en jeu dans leur résolution (lettres : variables, inconnues, indéterminées, expressions algébriques, formules, équations, identités) et leurs propriétés, les représentations associées en lien avec les différents registres de représentations du domaine algébrique. Cette étude pointe des ruptures potentielles en jeu dans l'entrée dans la pensée algébrique, tant du point de vue de la construction de la rationalité mathématique à travers la résolution de problèmes (passage de la preuve pragmatique à la preuve mathématique, mobilisation des lettres pour modéliser des relations entre les objets d'un système intra ou extra mathématique), que du point de vue de la capacité à adapter l'interprétation des expressions mises en jeu aux usages visés.

Une structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique, structurée à partir de ces différents aspects, est alors organisée autour des composantes suivantes : la mobilisation des lettres de façon adaptée à la résolution d'un type de problème du champ de l'algèbre en lien avec le rapport arithmétique / algèbre et le niveau de rationalité algébrique, la gestion entre différents registres de représentation, la flexibilité dans le calcul algébrique.

Diagnostic et adaptation à différents niveaux

Test diagnostique à la fin de la scolarité obligatoire (3ème / 2nde)

Le premier test diagnostic réalisé, construit selon cette analyse, visait à construire le profil cognitif en algèbre d'un élève à la fin de la scolarité obligatoire (niveau fin de 3ème / début de 2nde). Il est composé de 20 tâches diagnostiques choisies en croisant à la fois les différents aspects du modèle de la compétence algébrique, pris comme référence, et les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes pour généraliser (un item), modéliser (7 items), prouver (3 items) ou mettre en équation (2 items) dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique) mais aussi des exercices techniques de calcul (8 items) ou de reconnaissance (6 items) impliquant différents types de tâche des programmes de collège et de seconde (produire des expressions ou des formules, mettre en équation, prouver des propriétés, calculer la valeur d'expressions, développer, factoriser des expressions, résoudre des équations).

Comment adapter ce test à d'autres niveaux scolaires en prenant en compte les programmes officiels relatifs à chaque niveau ?

L'organisation mathématique du domaine algébrique dans les programmes du collège

Les programmes officiels des collèges spécifient les finalités et les objectifs de l'enseignement de l'algèbre élémentaire à ces niveaux scolaires. Ils façonnent en partie les rapports institutionnels à l'algèbre qui vont modeler les rapports personnels des élèves. En effet, ils déterminent les objets de savoir mobilisés et utilisés dans les solutions attendues pour la résolution des problèmes travaillés à chaque niveau de l'enseignement. Les programmes explicitent les contenus, listent les capacités exigibles à un niveau donné.

En s'appuyant sur l'approche anthropologique (Chevallard, 2002), l'étude des programmes permet d'expliciter les organisations mathématiques impliquées dans la résolution des problèmes proposés à un niveau donné : types de tâches et types de techniques attendues, relativement aux éléments technologiques et théoriques visés. Depuis 2005, dans le domaine numérique, les programmes définissent le rôle des problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation, pour montrer l'insuffisance du numérique à exprimer une propriété de façon générale et la nécessité d'introduire les lettres comme variable préalablement au statut d'inconnue. Ils précisent la complexité des objets intervenant dans la résolution : expressions algébriques, formules, équations et les propriétés du cadre algébrique à mobiliser pour chaque niveau scolaire considéré. Le tableau 1 résume l'évolution de la compétence algébrique au fil des programmes officiels du collège.

Niv	Objets	Capacités	Champs de problèmes
5ème	Expressions littérales du premier degré, à une ou plusieurs variables. Formules. Identités impliquant des expressions du premier degré.	Produire une expression littérale. Utiliser une expression littérale (pour calculer). Sur des exemples numériques ou littéraux, utiliser les égalités $k\ (a+b) = ka + kb$ et $k\ (a-b) = ka - kb$ dans les deux sens. Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.	Problèmes montrant la nécessité d'introduire les lettres comme variable préalablement au statut d'inconnue en lien avec le numérique et de travailler l'écriture globale parenthésée.
4ème	Expressions du type $(ax+b)(cx+d)$. Formules, fonctions linéaires. Identités impliquant des expressions du type $(ax+b)(cx+d)$. Équations du type $ax+b = cx+d$.	Calculer la valeur numérique littérale en donnant aux variables des valeurs numériques. Réduire une expression littérale à une variable, de type donné (cf. programmes 2005). Développer, factoriser une expression. Résoudre une équation du type $ax+b=cx+d$. Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	*Extension du champ :* Introduction des problèmes de mise en équation. Calcul algébrique avec une complexité supérieure des expressions et une évolution des techniques utilisées.

3ème	*Idem* a^n, *a* entier positif non nul, *n* entier relatif. $\sqrt{a}$, *a* nombre positif. Identités remarquables. Équations du type *(ax+b)(cx+d)=0*. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.	Déterminer l'expression algébrique de fonctions linéaire ou affine. Développer, factoriser une expression de type donné (cf. programmes 2005). Résoudre des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue, des systèmes. Résoudre une équation mise sous la forme *A(x)B(x) = 0* où *A* et *B* sont deux expressions du premier degré. Mettre en équation un problème conduisant à une équation, une inéquation, ou un système de deux équations du premier degré.	*Nouvelle extension du champ :* Introduction des fonctions. Calcul algébrique avec prise en compte d'une complexité plus grande et de nouveaux objets.

Tableau 1 - Évolution de la compétence algébrique dans les programmes du collège

C'est pourquoi nous caractérisons les tâches diagnostiques par : les types de tâches / types de techniques, les cadres et registres de représentation, la complexité des expressions en jeu. De plus, nous prenons également en compte le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (disponible, mobilisable ou technique) dans la résolution des tâches diagnostiques. C'est l'appui sur ces variables didactiques qui nous permet d'adapter le diagnostic à d'autres niveaux de la scolarité.

Adaptation du diagnostic à différents niveaux

Nous nous intéressons ici à l'adaptation du premier test à d'autres niveaux scolaires. Ainsi, à partir du test *Pépite* de niveau fin de 3ème / début de 2nde décrit précédemment, peut-on transférer les choix réalisés pour construire un test d'algèbre élémentaire qui soit adaptable à chaque niveau de la scolarité obligatoire ? Ici, nous présentons cette adaptation pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème.

La faisabilité de cette adaptation repose sur l'enrichissement successif des différents aspects de la compétence algébrique travaillés au cours de la scolarité. Cet enrichissement apparaît clairement dans le tableau 1. L'adaptation se traduit ainsi par l'évolution des types de tâches et des objets de l'algèbre présents dans les problèmes (production de formules, généralisation, preuve, mise en équation). Les types de tâches et les objets à évaluer sont décrits dans les programmes du collège, à travers les contenus et les capacités exigibles. Ces derniers permettent de définir, pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème, les tâches diagnostiques recouvrant le programme de 5ème : partie 1 « organisation et gestion de données, fonctions » et partie 2 « nombres et calculs ».

La transposition du test initial en un test pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème, test papier / crayon constitué de 12 tâches diagnostiques, s'appuie sur les variables didactiques définies précédemment comme suit :

- Nature des types de tâches / types de techniques en jeu : présence de tous les types de tâches sauf la mise en équation (la résolution d'une équation s'appuyant sur le test d'une identité) ;
- Complexité des expressions : expressions algébriques du premier degré du type *a(cx+d)* avec un seul niveau de parenthèse ;
- Cadres et registres de représentation en jeu : plus de poids donné au cadre numérique dans des tâches de calcul ou de production d'expressions parenthésées ;
- Niveau de mise en fonctionnement : peu de tâches mettant en jeu la flexibilité dans l'interprétation des expressions (structurale / procédurale) pour choisir l'expression la

plus adaptée au calcul visé.

La robustesse du modèle de conception des tests est liée au recouvrement de l'étendue du champ conceptuel de l'algèbre aux différents niveaux scolaires.

Stéréotypes et parcours d'apprentissages adaptés à différents niveaux

Un stéréotype (Delozanne et *al*., 2005b) est défini comme une classe de profils équivalents, c'est à dire un ensemble de profils pour lesquels les compétences algébriques des élèves peuvent être jugées suffisamment proches pour bénéficier d'un diagnostic similaire et travailler sur des situations d'apprentissages adaptées ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage.

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Usage de l'algèbre	UA	Étudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve	*Niveau 1* : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique non adaptée.
			Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	TA	Étudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction pas toujours adaptée.
			Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Étudier la capacité à calculer algébriquement	*Niveau 1* : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

Tableau 2 - Caractérisation d'un stéréotype

Pour spécifier le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire, trois composantes ont été privilégiées (Delozanne et *al*., 2005b) :

- L'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (UA) ;
- La flexibilité à traduire algébriquement des représentations en articulation entre différents cadres (géométrique, graphique, langage naturel) et inversement (TA) ;

- La flexibilité et l'adaptabilité dans l'interprétation des expressions dans les usages variés du calcul algébrique (CA).

Pour chacune de ces trois composantes, différents niveaux de compétences ont été identifiés et traduisent des seuils à dépasser pour acquérir un aspect de la compétence relativement à une composante donnée. Ils sont présentés dans le tableau 2.

Définir le stéréotype d'un élève consiste alors à attribuer un niveau de compétence selon chacune des trois composantes. Les stéréotypes sont calculés à partir des réponses des élèves à des types de tâches adaptés au niveau considéré.

Ce modèle peut-il être utilisé, voire complété, pour définir le stéréotype des élèves à différents niveaux ? La structure des stéréotypes est-elle exploitable à différents niveaux scolaires ?

En début d'apprentissage de l'algèbre, le calcul algébrique s'ancre sur la compétence numérique des élèves, c'est-à-dire sur leur capacité à produire, à interpréter, des expressions numériques et à les calculer. La transposition du test *Pépite*, depuis le niveau fin de $3^{ème}$ / début de 2^{nde} jusqu'au niveau fin de $5^{ème}$ / début de $4^{ème}$, nous a donc conduit à faire évoluer la caractérisation d'un stéréotype. En effet, pour prendre en compte l'importance du cadre numérique en début d'apprentissage, nous avons complété les trois composantes du stéréotype par la composante CN « calcul numérique ». CN est structurée en 3 niveaux, obtenus en transposant ceux organisant la composante CA (cf. tableaux 2 et 3).

<table>
<tr><td rowspan="3">Calcul numérique</td><td rowspan="3">CN</td><td rowspan="3">Étudier la capacité à calculer numériquement</td><td>Niveau 1 : Traitement numérique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).</td></tr>
<tr><td>Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation liées à une conception procédurale des expressions.</td></tr>
<tr><td>Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.</td></tr>
</table>

Tableau 3 - Caractérisation de la composante numérique

L'introduction de cette nouvelle composante nous semble essentielle pour penser le choix des situations d'apprentissage adaptées aux différents stéréotypes des élèves d'une classe et prendre en compte des leviers possibles ou des conceptions erronées à faire évoluer.

En particulier, nous pouvons faire l'hypothèse qu'une composante CN « calcul numérique » de niveau 3 risque d'être un obstacle à l'entrée dans la pensée algébrique et nécessite la mise en place de situations d'apprentissage spécifiques du cadre numérique.

Exemples de géographie cognitive pour deux classes

Le test de niveau fin $5^{ème}$ / début de $4^{ème}$ a été soumis, au milieu du $2^{ème}$ trimestre de l'année scolaire 2006 / 2007, à deux classes de $5^{ème}$ gérées par le même professeur de mathématiques.

Les figures 1 et 2 ci-après présentent la géographie cognitive (ensemble des stéréotypes des élèves) obtenue pour les deux classes, la classe de $5^{ème}$ 2, qui comprend 18 élèves et la classe de $5^{ème}$ 7, qui compte 20 élèves.

Cette analyse permet de retrouver la géographie de la classe pressentie par le professeur de mathématiques qui qualifiait ces deux classes, situées dans un collège de centre ville, de très hétérogènes et de mettre en évidence certaines cohérences de fonctionnement et difficultés des élèves.

Le test permet de mettre en évidence pour les deux classes que :

- Une majorité d'élèves (16 pour la 5ème 2 et 18 pour la 5ème 7) ne mobilisent pas de lettres pour prouver ou modéliser et travaillent dans le numérique (UA4), n'ayant pas encore négocié la transition arithmétique algèbre. Deux élèves seulement produisent des expressions algébriques en cohérence avec la situation, dans des problèmes mettant en jeu la disponibilité de l'outil algébrique. Ces résultats montrent la pertinence de la hiérarchisation établie entre les quatre niveaux de la composante UA ;
- 9 élèves (3 pour la 5ème 2, 6 pour la 5ème 7) ne respectent pas les priorités opératoires et la structure des expressions numériques (CN3), ce qui semble provoquer un ancrage incorrect du calcul algébrique (CA3). Ces résultats justifient l'existence de la composante CN ;
- La majorité des élèves (13 pour la 5ème 2 et 11 pour la 5ème 7) ont des résultats corrélés pour les composantes CN2 et CA2 (sauf pour 5 élèves). Ces résultats attestent que les connaissances numériques constituent un point d'appui réel pour la construction des compétences en calcul algébrique.

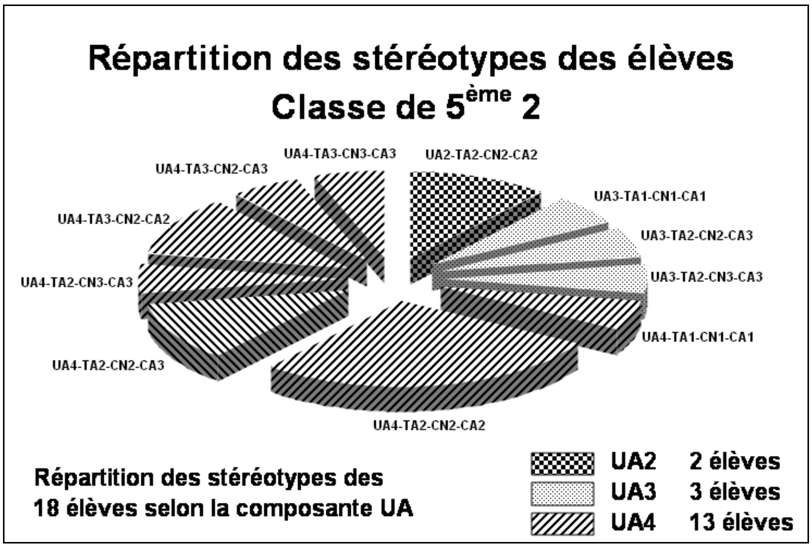


Figure 1 - Géographie cognitive de la classe de 5ème 2

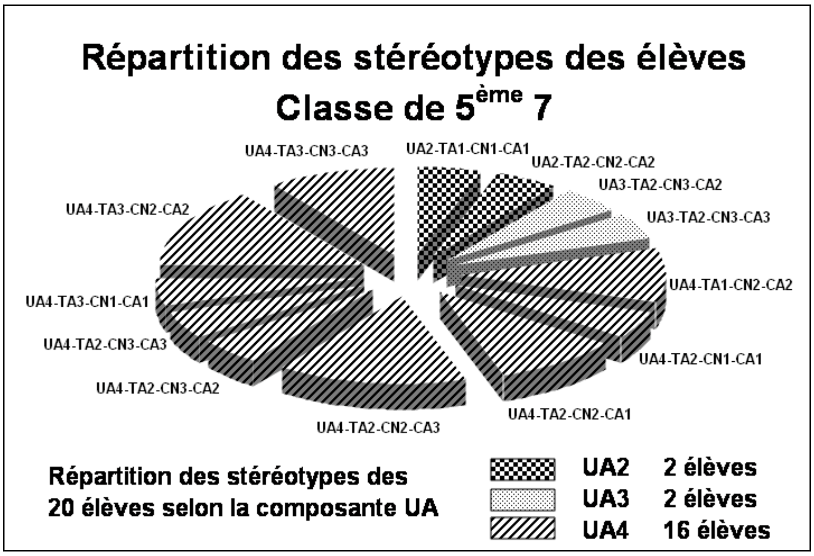


Figure 2 - Géographie cognitive de la classe de 5ème 7

Conclusion

Comment adapter un test diagnostic en algèbre élémentaire à d'autres niveaux de la scolarité en prenant en compte les programmes à chaque niveau ? L'étude exploratoire qui précède a permis de montrer qu'il est possible de transférer à un autre niveau scolaire un diagnostic en algèbre élémentaire. De même, les stéréotypes, définis comme des classes de profils équivalents, constituent un modèle qui peut également être adapté à différents niveaux de la scolarité pour réguler l'enseignement et gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. Nous poursuivons maintenant nos travaux selon les quatre axes qui suivent.

Premièrement, au-delà de ces résultats, les enseignants pointent que la durée excessive de passation du test peut être un obstacle à une utilisation plus large dans les classes en dépit de l'intérêt didactique manifeste du test pour définir des parcours d'apprentissage individualisés. Pour optimiser l'efficience du diagnostic, il est nécessaire de définir un critère pour minimiser le nombre de tâches composant de tels tests diagnostiques : comment avoir un diagnostic fiable avec un nombre restreint d'exercices ?

Deuxièmement, comme l'ont montré Morlaix et Suchaut (2007) pour l'école primaire, s'intéresser à l'évolution des compétences des élèves et tenter de prédire cette évolution est un problème central de politique éducative. En effet, les activités spécifiques de remédiation doivent être précoces pour éviter que les difficultés d'apprentissage ne s'installent et concourent à placer l'élève en situation d'échec. Ainsi, existe-t-il des tâches prédictives des compétences algébriques des élèves, à la fois pour réguler l'enseignement / apprentissage au niveau scolaire considéré mais aussi pour prévoir leur réussite ultérieure ? Nous pouvons faire l'hypothèse que l'analyse didactique précédente et la mise en perspective des approches anthropologique, épistémologique et cognitive permettront de pointer des ruptures potentielles en jeu dans la construction des rapports personnels à l'algèbre élémentaire et de choisir les types de tâches prédictifs de l'évolution future de l'élève.

Troisièmement, les résultats exposés ci-dessous ont été élaborés à partir d'un test papier / crayon, analysé manuellement. Il reste donc à automatiser le diagnostic pour construire automatiquement les stéréotypes des élèves à différents niveaux de la scolarité.

Quatrièmement, il reste surtout à définir des activités de remédiation adaptées aux différents profils cognitifs des élèves en s'appuyant sur les stéréotypes et sur les caractéristiques personnelles des élèves.

Françoise Chenevotot-Quentin
Université d'Artois, Laboratoire André Revuz
francoise.chenevotot@lille.iufm.fr

Brigitte Grugeon-Allys
Université d'Amiens, Laboratoire André Revuz
brigitte.grugeon@amiens.iufm.fr

Élisabeth Delozanne
LIP6 - L'UTES, UPMC Paris Universités
elisabeth.delozanne@lip6.fr

Références

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. In J-L. Dorier et al. (Eds), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 Août 2001,* pp. 3-22. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Delozanne E., Grugeon B. et *al*. (2005a). Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT, *Rapport de recherche, Programme « École et Sciences Cognitives : les apprentissages et leur dysfonctionnement » du MRT*.

Delozanne E., Vincent C., Grugeon B., Gélis J.-M., Rogalski J., Coulange L. (2005b). From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra, In G. Richards (Ed.), *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005*, pp. 262-269, Chesapeake, VA: AACE.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n°2, 5-31.

Grugeon B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Revue de Didactique des Mathématiques,* Vol.17, n°2, 167-210.

Grugeon B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Jean S., Delozanne E., Jacoboni P., Grugeon B. (1998). Cognitive profile in elementary algebra: the PÉPITE test interface. *IFIP-TC-3 Official Journal Education and Information Technology,* Vol. 3, 1-15.

Kieran C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Douglas A. Grouws (ed), pp. 390-419, New York Macmillan.

Morlaix S., Suchaut B. (2007). Apprentissages des élèves à l'école élémentaire: les compétences essentielles à la réussite scolaire. *Notes de l'IREDU, n°07/01, mars 2007*, http://www.u-bourgogne.fr/IREDU

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.

Vergnaud G., Cortès A., Favre-Artigue P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp. 259-288. Éditions La Pensée Sauvage.

Site de Pépite : Logiciel disponible gratuitement à l'adresse : http://pépite.univ-lemans.fr

Analyses didactiques d’un enseignement de statistiques dans un environnement comprenant un tableur

Éric Roditi et Georges-Louis Baron

Résumé

Les logiciels, comme le tableur, permettent à des usagers de modéliser des situations complexes en offrant de nombreuses possibilités d’évolution. Le texte qui suit rend compte d’une recherche menée à la Faculté de sciences humaines et sociales - Sorbonne de l’Université Paris Descartes. Celle-ci s’est intéressée à la création, par des enseignants en position d’auteur, d’artefacts didactisés pour l’enseignement des mathématiques, plus précisément de statistiques, à des étudiants non scientifiques, afin de leur permettre de questionner les concepts mathématiques et de les lier à des problèmes concrets.

Après avoir précisé les éléments de contextes spécifiques à l’enseignement de la statistique en sciences humaines et sociales, le texte analyse les arguments qui sous-tendent l’utilisation du tableur pour concevoir des artefacts destinés à l’enseignant ou à l’étudiant. Il expose alors comment des feuilles de calcul ont été conçues pour des étudiants afin qu’ils les utilisent, non comme un logiciel de statistique qui donnerait les résultats après qu’ils ont indiqué leurs données, mais comme un logiciel d’apprentissage, et donc de questionnement et d’apprentissage mathématique. Il convient de préciser que la recherche dont il est question ici est en cours et que les résultats exposés ici ont un caractère préliminaire. Ils ne comportent en particulier pas d’évaluation systématique des outils d’enseignements proposés.

Contexte et éléments de problématique

Le texte qui suit s’appuie sur une recherche menée à la Faculté de sciences humaines et sociales – Sorbonne de l’Université Paris Descartes portant sur l’enseignement et l’apprentissage de statistiques inférentielles par des étudiants de sciences humaines et sociales. Cet enseignement constitue un domaine à la fois ancien et problématique. La plupart des étudiants ont en effet suivi des études de second degré où les outils intellectuels fondamentaux fournis par le calcul intégral, le calcul matriciel et la géométrie des espaces vectoriels euclidiens sont peu présents. Pour mener leur travail de recherche ou pour en communiquer les résultats, ces étudiants ont pourtant généralement besoin de recourir à des méthodes statistiques descriptives ou inférentielles, afin par exemple de pouvoir dégager des proximités entre des individus auxquels sont associés de nombreux caractères, d’évaluer l’intensité du lien entre deux variables, de comparer des moyennes ou des proportions.

Le développement puis la diffusion de moyens de calcul automatique à partir des années soixante-dix ont profondément changé le rapport aux statistiques. Ils ont en effet rendu accessibles des outils logiciels et des méthodes de représentations très puissants. La plupart visent à guider et à simplifier le travail des utilisateurs en effectuant des traitements pour eux, et en retournant des résultats sous différentes formes qu’il reste alors à interpréter. Depuis les années quatre-vingts, l’enseignement des statistiques peut en outre s’appuyer sur l’utilisation d’instruments informatisés généraux comme les tableurs grapheurs. Comme les précédents, ces outils demandent une formation spécifique. Mais, de manière souple, ils permettent de définir des zones de données et des types de traitement, de focaliser l’attention sur les opérations qui vont être effectuées et de renouveler les activités d’enseignement et d’apprentissage.

Différents travaux ont déjà montré des difficultés d’apprentissage de la statistique (Lahanier, 1999 ; Regnier, 2006 & 2002 ; Wozniak, 2005). Nous nous sommes intéressés à

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 151-159.

l'usage du tableur dans la conception et l'analyse d'un enseignement portant à la fois sur la mise en œuvre des méthodes et sur l'interprétation des résultats, tout en prenant en compte la réalité des connaissances mathématiques des étudiants. Pour cela, nous avons choisi la notion très classique du khi-2. Ce test, dans ses utilisations les plus courantes (tests de conformité, d'homogénéité et d'indépendance), conduit à évaluer une distribution observée sur une population donnée. Il pose des problèmes intéressants pour la recherche entreprise. Il s'agit en effet d'un contenu d'enseignement classique dans de nombreuses filières de sciences humaines et sociales, où les apprenants rencontrent des difficultés récurrentes, et qui repose sur des mathématiques d'un niveau inaccessible à la majorité d'entre eux. Dans ce contexte, le recours à des activités reposant sur l'usage du tableur apparaît comme une piste pertinente pour concevoir une alternative à l'exposé d'arguments mathématiques qui soulèvent les difficultés précédemment mentionnées.

Potentialités du tableur

Les travaux menés sur l'instrumentation par logiciel des activités d'enseignement et d'apprentissage convergent vers un certain nombre de résultats bien établis : l'usage de systèmes logiciels contribue à modifier les activités d'apprentissage ; il complexifie la situation didactique (car il nécessite l'appropriation préalable par les usagers de schèmes d'activité spécifiques) mais il permet de mettre en œuvre des démarches d'apprentissage par essais et erreurs, voire des approches quasi expérimentales ou du moins expérientielles.

Des recherches sur la conception et l'utilisation de logiciels pour l'apprentissage des statistiques ont été menées depuis longtemps, en particulier dans l'enseignement supérieur, en sciences humaines et sociales (Corroyer, 1992). Par rapport à des logiciels dédiés, l'apparition du tableur a été très importante. Il offre en effet des possibilités nouvelles permettant de parvenir à des solutions flexibles, au prix d'une forme « faible » de programmation. D'après certains auteurs, cet instrument a été inventé dès les années 60, mais il est apparu sous sa forme actuelle dans les années soixante-dix (Bruillard & Blondel, 2007).

Il a fait l'objet de nombreuses recherches sur la place qu'il pouvait occuper dans l'enseignement de différentes disciplines (par exemple Favre et Maraninchi, 1987 ; Baker et Sugden, 2003). Une revue en ligne a même été créée en 2003 pour diffuser les travaux de recherche sur le tableur dans l'éducation *Spreadsheets in Education*.

Dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, de nombreuses publications ont étudié les possibilités du tableur (Capponi, 1990 ; Arzarello et *al*., 2002). Selon Haspekian (2003), la majorité des recherches ont été consacrées à la problématique de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, au niveau du collège, attribuant au tableur un rôle d'appui à cette transition, facilitant le passage depuis des méthodes intuitives arithmétiques vers des approches algébriques.

Les tableurs offrent un large spectre de fonctions statistiques, ils demandent à l'usager de spécifier une structure de données et de choisir un processus de calcul. Il devient alors ensuite possible d'exécuter ce processus à partir de jeux de données facilement modifiables, mais les compétences à mobiliser sont relativement techniques, et l'expérience montre qu'une minorité seulement d'étudiants se les sont appropriées, même en fin de licence, y compris parmi ceux qui ont suivi des enseignements de C2i (Certificat informatique et Internet attestant que les étudiants connaissent et savent utiliser les technologies informatiques de la communication et de l'information).

Une idée forte de notre projet, qui se situe dans la continuité de travaux menés notamment à l'IREM Paris Nord (2000), a été que la mise en œuvre de feuilles de calcul ad-hoc pensées en fonction de l'objectif précis de faire conceptualiser aux étudiants des questions mathématiques était de nature à produire un renforcement réciproque de la compréhension des statistiques et de la conceptualisation des processus de traitement de l'information en jeu.

Deux types d'artefacts didactisés

Nous allons détailler maintenant l'exemple du test de conformité (dit aussi d'ajustement) utilisé pour comparer une répartition observée à une répartition de référence et montrer comment le travail de recherche a permis de produire des feuilles de calculs constituant des artefacts utilisables par l'enseignant et par les apprenants à des fins d'enseignement et d'apprentissage, ce que nous appelons des artefacts didactisés (Baron, 2006).

Des apprentissages difficiles

De nombreuses difficultés rencontrées par les étudiants sont déjà bien repérées. Un premier travail a consisté à concevoir des situations qui aident à les surmonter ; ce travail a conduit à la conception des feuilles de calculs déjà mentionnées. Le test de conformité vise à décider si la population étudiée « ressemble » ou non à la population de référence, c'est-à-dire si elle peut ou non en être considérée comme un échantillon aléatoire (c'est l'hypothèse nulle). Une première étape essentielle du raisonnement consiste à évaluer l'écart entre la distribution observée et une autre distribution, qualifiée de théorique, correspondant à un échantillon de même taille, qui serait un « reflet exact » de la population de référence. Cette étape repose sur des connaissances mathématiques qui relèvent seulement de l'algèbre élémentaire, sauf précisément le choix de l'écart lui-même (la distance euclidienne usuelle ne convient pas pour des raisons qui ne peuvent être présentées dans ce texte). Cela constitue une difficulté pour l'apprentissage. Dans la seconde étape fondamentale du raisonnement, il s'agit d'évaluer l'importance de la valeur de l'écart obtenu. Sous certaines conditions, la loi de probabilité de cet écart est approximativement une loi de khi-2. On détermine alors la probabilité d'obtenir une valeur égale ou supérieure à celle obtenue. Si celle-ci est forte, la valeur de l'écart sera jugée faible, et l'hypothèse nulle ne sera pas rejetée ; inversement si la probabilité est faible, la valeur de l'écart sera jugée importante et l'hypothèse nulle sera rejetée. C'est au moment d'assimiler à une loi de khi-2 la densité de probabilité de l'écart entre la distribution observée et la distribution théorique, que les bases mathématiques des étudiants en sciences humaines et sociales ne suffisent pas.

Recourir à une approche fréquentiste de cette probabilité, et en obtenir une approximation en simulant un grand nombre de distributions fictives, permet d'éviter la modélisation mathématique de cette étape du raisonnement. Nous savons qu'une telle méthode soulève des difficultés spécifiques. Citons par exemple, l'explicitation du théorème central limite qui justifie la méthode et qui est très délicate pour les étudiants concernés. Citons encore les conceptions sous-jacentes à l'approche fréquentiste des probabilités auxquelles la simulation fait référence (Lahanier-Reuter, 1999 ; Bernier et *al*., 2000 ; Piednoir, 2006).

Un artefact didactisé en tant qu'ostensif dynamique

Nous avons estimé, compte tenu de travaux antérieurs sur cette question, que la simulation offre ici un potentiel didactique intéressant (Bordier, 1991 ; Dutarte & *al*., 1998 & 2000 ; Dutarte, 2002 ; Girard & Henry, 2005 ; Pichard, 2005). Elle peut en effet aider les étudiants à saisir comment est évaluée l'importance de l'écart entre la distribution observée et la distribution théorique. Un tel type de simulation est possible en utilisant des calculatrices. Mais il apparaît plus fructueux d'utiliser un type d'outil informatique spécialisé dans le domaine spécifique de la gestion de tableaux et de graphique : le tableur.

La feuille de calcul ainsi programmée constitue un ostensif numérique et graphique de la détermination de la fréquence obtenue. Comme la feuille comporte une simulation de nombreux tirages aléatoires, l'ostensif n'est pas figé, il comporte une part variable, tout comme une figure de géométrie comporte une part variable (de forme, de dimension, de position, etc.). Cette variabilité peut être expérimentée par les usagers, comme en géométrie dynamique, et elle favorise ce faisant le passage de la fréquence à la probabilité. Une telle feuille de calcul est utilisable (et a été utilisée) à la fois par l'enseignant dans une séquence de type cours « magistral » et par les étudiants dans des séances de travail dirigé, en tirant parti des possibilités de projection de l'écran d'un ordinateur en cours magistral et du fait que tous les ordinateurs peuvent être équipés sans frais d'un tableur grapheur pour une séance de travail dirigé.

En cours, par exemple, la feuille de calcul simulant un tirage aléatoire et calculant la fréquence approximative de la distance entre la distribution observée et la distribution théorique ne vise pas l'enseignement de la loi de khi-2, mais bien une résolution particulière d'un calcul de probabilité, une résolution que les étudiants peuvent comprendre alors qu'ils n'auraient pas pu la concevoir. Entre leurs mains, après le cours, la feuille devient un environnement interactif d'apprentissage ouvert, c'est-à-dire ne guidant pas les interactions. Le travail sur les formules utilisées permet, par exemple, de comprendre comment est mise en œuvre la notion d'échantillon aléatoire. La part de variabilité de l'ostensif et sa modification possible par l'apprenant nous invite à le qualifier « d'ostensif dynamique » par analogie avec la géométrie dynamique.

Pour illustrer ce qualificatif, nous partirons d'une situation utilisée avec des étudiants (Roditi, 2009). Il s'agit de la répartition (fictive) des résultats au baccalauréat des 28 élèves d'une classe de terminale (7 échecs, 7 réussites sans mention, 14 réussites avec mention). Celle-ci est comparée avec les résultats correspondants au niveau national pour la même filière (20% d'échec, 48% de réussite sans mention, 32% de réussite avec mention). Nous sommes en présence d'un système d'objets variables et dépendants pour certains d'entre eux (le pourcentage d'échecs est par exemple déterminé par les pourcentages de réussites). À partir de ce système d'objets (voir fig. 1), d'autres objets sont construits, comme la distribution théorique des effectifs et la distance du khi-2 entre les deux distributions d'effectifs, empirique et théorique, souvent appelé khi-2 empirique.

5000	**Théorique**	Echec	RSM	RAM	Total
	en %	20%	48%	32%	100%
	pour 28 candidats	5,60	13,44	8,96	28

	Empirique	Echec	RSM	RAM	Total
		7	7	14	28

Ecart théorique - empirique				Total
	0,350	3,086	2,835	6,271

Simulation

Individu	Centile	Candidat	Echec	RSM	RAM	*aléa*
72	1	1	0	0	1	0,01432
4796	96	2	1	0	0	0,95904
701	14	3	0	0	1	0,14008
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4532	91	26	1	0	0	0,90621
42	1	27	0	0	1	0,00832
4014	80	28	1	0	0	0,80275
		Bilan	7	12	9	28
		X² sim	0,35	0,1542857	0,0001786	0,5044643

Figure 1 - Simulation d'un échantillon aléatoire et distance du khi-2 associée

Puis un autre système est associé au précédent (voir fig. 2) : un tirage aléatoire de 2 000 classes « virtuelles » issues de la population de référence est simulé, à chaque classe sont associées la distribution des résultats ainsi que la distance du khi-2 entre cette distribution et la distribution théorique ; nous appellerons « khi-2 simulé » chacune de ces 2 000 distances. Une table de la distribution des 2 000 valeurs des « khi-2 simulés » et un histogramme de ces valeurs sont proposés.

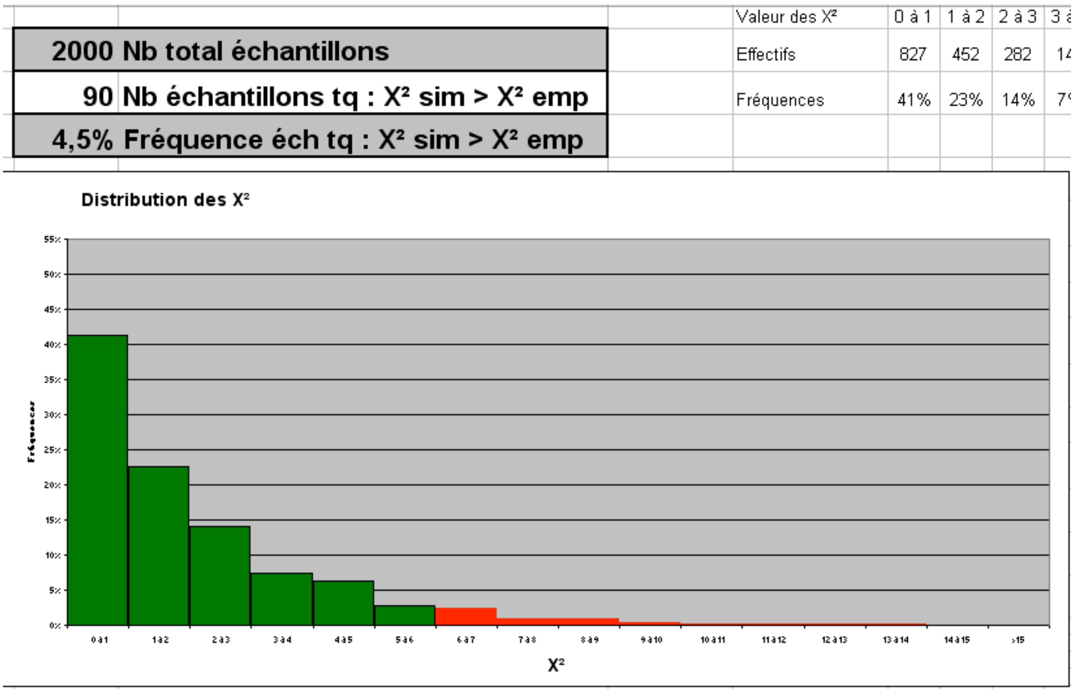


Figure 2 - Simulation de 2 000 échantillons aléatoires et répartition des distances associées

Comme il a déjà été indiqué, l'étudiant fait varier certains objets de ce système complexe et interroge ainsi les liens entre les variables pour en tirer des conjectures, des inférences. Une telle démarche est analogue à celle qui consiste à proposer à des élèves de faire varier des éléments d'une figure géométrique complexe dans un environnement géométrique dynamique afin d'en comprendre la complexité, de comprendre aussi parmi les mesures et les relations entre les différents objets celles qui sont libres et celles qui ne le sont pas, et de tirer des inférences à partir de ces constats. Dans la situation représentée par cette feuille de calcul en effet, des objets sont déterminés par d'autres, de nouveaux objets sont construits à partir de ceux existants. Les étudiants constatent en multipliant les simulations de tirage aléatoire de 2 000 classes fictives que la fréquence des cas où le khi-2 simulé est supérieur au khi-2 empirique subit de très faibles fluctuations. Cela les conduit d'une part à estimer la probabilité associée au khi-2 empirique et d'autre part à juger de l'importance de la valeur de ce khi-2 empirique. De manière analogue en géométrie dynamique, un élève peut constater en déplaçant un sommet du triangle que le côté opposé à ce sommet passe par le centre du cercle circonscrit à chaque fois que l'angle en ce sommet est un angle droit. Cela ne suffit à l'élève ni pour comprendre la raison de cette propriété caractéristique des triangles rectangles ni pour en établir la preuve ; de même, la feuille de calcul proposée aux étudiants ne suffit pas à établir la loi de probabilité du khi-2 ni les autres éléments théoriques sous-jacents au test du khi-2. C'est pourquoi nous qualifions une telle feuille de calcul d'ostensif : c'est un objet « matériel » qui permet un enseignement par ostension.

Un artefact didactisé en tant que milieu interactif

À ce point, il convient de souligner que les artefacts conçus dans le cadre de notre recherche ne sont pas tous du type précédent. Certains possèdent d'autres fonctions que celles indiquées jusqu'ici et constituent, en fait, une sorte de logiciel ouvert de statistique permettant de traiter les situations les plus fréquemment rencontrées dans les calculs de khi-2. Les traitements numériques sont toujours effectués de façon « visible » si bien que l'artefact constitue simultanément un logiciel de traitement et un milieu pour une situation d'apprentissage.

Par exemple (voir fig. 3), le tableur exécutant de façon « visible » pour l'utilisateur le calcul de l'écart entre la distribution observée et la distribution théorique permet aux étudiants de questionner les propriétés de cette nouvelle « distance ». Utilisant alors la feuille de calcul comme un milieu antagoniste (au sens didactique du terme) les étudiants peuvent réaliser diverses tâches, comme changer les valeurs de la distribution observée sans changer l'écart, les changer pour augmenter l'écart d'une valeur donnée, etc.

En fonction des valeurs entrées et des valeurs affichées en retour, ils observent les régularités et en infèrent des lois ; au sens de la théorie des situations didactiques, ils produisent des connaissances d'une situation d'action (Brousseau, 1997) :

> « *Agir* consiste pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si le milieu réagit avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ces réactions et à en tenir compte dans ses propres actions. Les connaissances sont ce qui permet de produire et de changer ces anticipations. L'apprentissage est le processus par lequel les connaissances se modifient. »

Autre exemple, les étudiants peuvent interroger les valeurs des différents paramètres, variables et fonctions qui sont affichés ainsi que leurs relations : seuil de signification et khi-2 théorique, degré de signification et khi-2 calculé, signification du test, etc. Différentes tâches sont ainsi proposées qui conduisent à des activités favorisant d'une part l'apprentissage des tests statistiques et d'autre part l'apprentissage de l'interprétation de la signification du test, notamment en expérimentant les effets de variations des valeurs de la distribution observée sur ce résultat.

Les étudiants apprennent donc du milieu. Dans la mesure où ce dernier est une feuille de calcul, l'activité des étudiants ne conduit pas seulement à une construction de connaissances en statistique, elle génère aussi des apprentissages relatifs au tableur.

Autrement dit, l'environnement mis à la disposition des usagers leur permet de se l'approprier et de mener avec lui des genèses instrumentales. Ainsi, ils peuvent apprendre à utiliser les fonctions implémentées dans le logiciel dont les caractéristiques sont généralement transparentes pour l'usager, alors qu'elles ont été explicitement rendues visibles, à des fins d'enseignement et d'apprentissage, dans l'artéfact didactisé. On peut penser par exemple à la fonction TEST.KHIDEUX qui dans « Excel » comme dans « Calc » permet d'obtenir directement le degré de signification à partir des distributions empirique et théorique.

Finalement, du fait que les étudiants ont d'une part la possibilité d'apprendre du milieu (des connaissances statistiques) et d'autre part d'apprendre sur le milieu (des connaissances informatiques), l'artéfact didactisé est davantage qu'un milieu au sens classique. En ce sens, nous le qualifions de « milieu interactif ».

Comparaison d'une distribution observée à une distirbution de référence

Saisir dans les zones vertes : 1. Le seuil du risque accepté - 2. Les modalités et leurs effectifs observés sur l'échantillon - 3. Les fréquences de référence pour ces modalités.

Règle de décision					
Seuil alpha	5%	ddl =	2	X² théorique =	5,9914764

Distribution empirique des effectifs									
Modalités	Echec	Passable	Mention						Total
Effectifs	7	7	14						28

Distribution théorique des fréquences									
Modalités	Echec	Passable	Mention						Total
Fréquences	20,0%	48,0%	32,0%						100%

Conclusion du test	Ecart Significatif	p = 4,3482%

Distribution empirique des fréquences									
Modalités	Echec	Passable	Mention						Total
Fréquences	25%	25%	50%						100%

Distribution théorique des effectifs									
Modalités	Echec	Passable	Mention						Total
Effectifs	5,6	13,44	8,96						28

Ecart entre les distributions des effectifs (X² empirique)									
Modalités	Echec	Passable	Mention						X² empirique
	0,35	3,085833333	2,835						6,27083

Recherche d'effectifs théoriques inférieurs à 5									Absence
Modalités	Echec	Passable	Mention						Bilan
	1	1	1						1

Figure 3 - Feuille de calcul testant la conformité d'une distribution empirique

Discussion

Le tableur est utilisé ici comme élément essentiel de différentes situations d'enseignement de la statistique inférentielle, à la fois comme ostensif dynamique et comme milieu interactif. Du point de vue des activités des étudiants, les feuilles de calcul de type « ostensif dynamique » s'apparentent à des imagiciels, tels qu'ils ont été explorés au seuil des années 1980 (INRP, 1983 ; Beaufils, 1986), et dont la fonction est de fournir un pont entre le concret et l'abstrait en donnant accès à des niveaux intermédiaires d'abstraction. Bien qu'elles soient utilisées de manière ponctuelle, elles constituent un ingrédient fondamental du scénario d'enseignement et d'apprentissage organisé par l'enseignant. Les feuilles de calcul de type « milieu interactif » jouent un rôle double pour les étudiants ; ils peuvent les utiliser aussi bien pour réaliser des apprentissages mathématiques et statistiques en menant des investigations, que pour résoudre des problèmes de sciences humaines et sociales nécessitant le recours à des outils de statistique inférentielle.

Ces artefacts didactisés correspondent moins à l'intégration de technologies numériques dans un système d'enseignement existant qu'à la conception de tâches pour de nouvelles activités permettant aux étudiants de questionner les concepts mathématiques ainsi que de lier concepts mathématiques et problèmes concrets. Une voie possible pour cela est celle de la création, par des enseignants en position d'auteur, de nouveaux artefacts didactisés à l'aide de logiciels généralistes comme le tableur.

Dans son ensemble, le travail de conception n'a mobilisé que des compétences de base dans le domaine informatique : il s'agissait « simplement » de modéliser la situation en définissant ce qui était données entrantes (par essence modifiables), formules opérant sur ces dernières et zones de résultats destinées à focaliser l'attention de l'auditoire. Le travail de modélisation a donc été essentiellement didactique.

Notre travail empirique n'est pas assez avancé pour nous permettre de proposer des conclusions bien étayées quant aux apprentissages réalisés par les étudiants observés. Il nous semble cependant que nombre d'entre eux se sont appropriés, dans le cas du test du khi-2, les principes fondamentaux du raisonnement inférentiel, qu'ils savent mettre en œuvre les outils mis à leur disposition dans des situations variées et interpréter les résultats obtenus en référence aux problèmes posés. Afin de confirmer ces conjectures, nous envisageons désormais de poursuivre la recherche par une étude détaillée de l'activité des étudiants en nous focalisant sur deux types d'analyses. D'une part celles qui concernent les apprentissages de savoirs statistiques dans les processus de résolution des problèmes de sciences humaines et sociales, d'autre part celles des difficultés et des genèses instrumentales, par exemple dans la conception de formules ou la gestion de représentations graphiques.

Éric Roditi
Université Paris Descartes - Laboratoire EDA
eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

Georges-Louis Baron
Université Paris Descartes - Laboratoire EDA
georges-louis.baron@paris5.sorbonne.fr

Références

Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G. (2002). La pensée algébrique dans une perspective sémiotique : l'environnement du tableur. *Sciences et techniques éducatives*, 9 (1-2).

Baker J. & Sugden S. (2003). Spreadsheets in Education: The First 25 Years. *Spreadsheets in Education*, 1 (1). http://www.sie.bond.edu.au/vol1number1.htm

Baron G.-L. (2006). De l'informatique à « l'outil informatique » : considérations historiques et didactiques sur les progiciels. Le cas particulier des logiciels de traitement de tableaux. In Pochon, L-O, Bruillard, E. & Marechal, A. (2006) *Apprendre (avec) les progiciels. Entre apprentissages scolaires et pratiques professionnelles*. Neuchâtel Lyon. Institut de recherche et de documentation pédagogique : Institut national de recherche pédagogique, pp. 39-54.

Beaufils D. (1986). Images et imagiciels en physique. In *Colloque « Du tableau noir vers l'ordinateur graphique ». Actes des journées du CNAM*. Paris : CNAM, pp. 183-187.

Bernier J., Parent E., Boreux J.-J. (2000). *Statistiques pour l'Environnement. Traitement Bayésien des Incertitudes*. Technique & Documentation.

Bordier J. (1991). *Un modèle didactique utilisant la simulation sur ordinateur, pour l'enseignement de la probabilité*. Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

Brousseau G. (1997). *La théorie des situations didactiques,* cours donné à l'université de Montréal. http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Bruillard E., Blondel F.-M. (2007). *Histoire de la construction de l'objet tableur*. Pré-publication. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00180912/fr/ [16/02/2008].

Capponi B. (1990). *Calcul algébrique et programmation dans un tableur : le cas de Multiplan*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Corroyer D. (1992). Le traitement statistique des données en psychologie et son enseignement : de l'ère des tables à l'ère informatique. Thèse de doctorat. Université Paris V.

Dutarte P. (2002). La simulation en statistique. *Repères* n°47, 93-111.

Dutarte P. et *al*. (1998). *Simulation d'expériences aléatoires*. Commission inter-IREM Lycées technologiques, IREM Paris Nord.

Dutarte P. et *al*. (2000). *Simulation et statistique en seconde*. IREM de Paris-Nord.

Favre Nicolin R. & Maraninchi J.-B. (1987). Tableur et récursitivé en classe de seconde. In *DLC - Direction des lycées et collèges. Pratiques et savoir-faire des élèves de l'option informatique*, pp. 82 - 88.

Girard J.-C. & Henry M. (2005). *Modélisation et simulation en classe, quel statut didactique ? In Statistique au lycée*, volume 1. Brochure APMEP n° 156.

Haspekian M. (2003). Entre arithmétique et algèbre : un espace pour le tableur ? Perspectives didactiques et réalités. Dans Communication « *Actes en ligne du colloque International ITEM* ». Reims, France. [OAI : oai:edutice.archives-ouvertes.fr:edutice-00001333_v1]

INRP (1983). *Imagiciels, enseignement des mathématiques illustré par ordinateur*. Paris : INRP. (Rencontres pédagogiques, 1983, n° 1).

IREM de Paris Nord (2000). *Simulation et statistique en seconde*.

Lahanier-Reuter D. (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*. Paris, P.U.F.

Pichard J.-F. (2005). Théorie des erreurs, courbes en cloche et normalité. In *Statistique au lycée* volume 1. Brochure APMEP n° 156.

Piednoir J.-L. (2006). La statistique Bayésienne. *Bulletin de l'APMEP* n°464, 373-388.

Regnier J.-C. (2002). À propos de la formation en statistique. Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique, Questions éducatives. *Revue du centre de recherche en éducation*, 22-23, 157-201.

Regnier J.-C. (2006). Formation de l'esprit statistique et raisonnement statistique. Que peut-on attendre de la didactique de la statistique ? In Houdement C. & Castela C. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2005*, ARDM.

Roditi É. (2009). Un tableur-grapheur pour enseigner les statistiques en SHS, l'exemple du test du chi². *Actes du colloque DIDAPRO-3*.

Wozniak F. (2005), *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard, Lyon 1.

Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? Exemples du SFoDEM et du dispositif Pairform@nce

Ghislaine Gueudet, Sophie Soury-Lavergne et Luc Trouche

Résumé

La question générale posée au départ de notre étude est la suivante : quel accompagnement des professeurs pour soutenir l'intégration des TICE ? Dans la perspective théorique que nous adoptons, nous abordons cette question sous l'angle des dispositifs permettant d'assister les genèses documentaires des enseignants impliquant des ressources TICE, et proposant en en particulier un travail documentaire collectif des enseignants. Nous présentons l'exemple de deux dispositifs de formation continue : le SFoDEM, et le projet Pairform@nce. Nous questionnons dans chacun de ces cas l'émergence conjointe de communautés de pratiques et de modèles de ressources, et analysons les assistants méthodologiques susceptibles d'initier et d'entretenir le travail documentaire collectif.

I. Communautés de pratique, formation sur les TICE et documentation des professeurs

Notre contribution concerne la question de l'intégration des TICE et s'inscrit donc dans le thème 2 du colloque. Plus précisément, la question générale posée au départ de notre étude est la suivante : *quel accompagnement des professeurs pour soutenir l'intégration des TICE ?*

Pour étudier cette question (dans l'enseignement du second degré en France), nous nous plaçons dans la perspective de l'*approche instrumentale* en didactique des mathématiques, approche que l'équipe DIDIREM a contribué, avec d'autres, à développer (Guin et Trouche, 2002). Ce que nous présentons dans cette communication peut également être considéré comme un travail de développement de cette approche, étendant son champ d'application à des sujets professeurs : l'emploi d'une *ressource* par un enseignant suppose une *appropriation* de cette ressource, que l'on peut comprendre comme une *genèse instrumentale*. Au cœur de cette genèse, sont associés un mouvement d'*instrumentalisation* (les ressources sont transformées au cours de leur appropriation) et un mouvement d'*instrumentation* (l'appropriation induit une évolution professionnelle de l'enseignant).

Nous considérons par ailleurs, comme Ruthven (2007), que, pour étudier les questions d'intégration des TICE, il est nécessaire de prendre en compte *l'ensemble* des ressources dont dispose le professeur. C'est pourquoi nous nous référons à l'approche développée dans (Gueudet et Trouche, 2007), qui propose de considérer le *travail de documentation* du professeur (recherche de ressources, tri, sélection, conception de situations et de scénarios, mise en œuvre dans la classe, révision, mutualisation, etc.) comme un élément central de sa pratique et de son développement professionnel. Dans cette perspective, la distinction entre *artefact* et *instrument* introduite par l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) est prolongée en une distinction entre un *ensemble de ressources* et un *documen*t développé à partir de cet ensemble de ressources, pour un type de tâches donné, au cours d'un processus de *genèse documentaire*. Ces genèses sont à comprendre comme des processus qui se continuent : un document donne matière à de nouvelles ressources, dans un mouvement que l'ergonomie cognitive qualifie de *conception dans l'usage* (Rabardel et Pastré, 2005).

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 161-173.

Ceci nous conduit à reformuler ainsi la question générale de départ : *comment soutenir et accompagner les genèses documentaires des professeurs impliquant des ressources TICE ?*

Au-delà d'une reformulation, ce point de vue amène un premier élément de réponse à la question posée :

- Une genèse documentaire suppose un travail de documentation effectif du professeur ; il est par ailleurs moins difficile pour un enseignant de faire évoluer une pratique dans le cadre de la préparation d'une leçon qu'au moment de sa mise en œuvre (Robert, 2007) ;
- La préparation d'une séquence de classe impliquant des ressources TICE semble donc un terrain propice au développement d'une appropriation.

Naturellement cette préparation s'entend, de même que les genèses, comme un processus : la préparation est suivie d'une réalisation en classe, d'une analyse critique de cette réalisation, d'une nouvelle préparation etc., donnant lieu à l'élaboration de ressources évolutives.

Par ailleurs, de nombreuses recherches sur le développement professionnel des enseignants ont montré l'intérêt d'étayer ce développement par la *co-élaboration* de ressources pour la classe (Krainer, 2003 ; Jaworski, 2006 ; Miyakawa et Winsløw, 2007), cette co-élaboration supposant l'existence d'équipes de travail, et pouvant *susciter*, et *résulter*, de l'émergence de *communautés de pratique* (Wenger, 2005).

Cette notion de communauté de pratique intervient dans notre travail à la fois comme élément de notre cadre d'analyse et comme ressort de l'action didactique. Wenger identifie trois dimensions fondamentales de la *pratique*, en tant que propriété d'une communauté : *l'engagement mutuel*, *l'entreprise commune*, et le *répertoire partagé* (Wenger, 2005, p. 82). Cette dernière dimension joue un rôle crucial dans une étude portant sur le travail documentaire. En effet, le répertoire est l'ensemble des *ressources* de la communauté : ressources matérielles, mais aussi vocabulaire, symboles, routines, usages, etc. Le répertoire témoigne des processus de *réification* à l'œuvre dans la communauté (*ibid*. p. 64), c'est-à-dire de la cristallisation en objets partagés d'éléments de la pratique commune : ces objets sont fondamentaux pour permettre la *participation*, comprise comme l'engagement dans la pratique commune (*ibid*. p. 61).

De nombreuses théories peuvent être invoquées pour penser le collectif. En didactique des mathématiques, la théorie anthropologique (Chevallard, 2002) met en avant la notion *d'institution*. Nous avons, bien entendu, à faire dans l'étude présentée ici avec des institutions, scolaires en particulier. Mais il nous faut pouvoir distinguer des groupes de professeurs engagés dans une entreprise commune. De plus, il nous semble que la *dualité participation/réification* et la notion de *genèse documentaire* s'éclairent mutuellement. Un travail de documentation mené au sein de communautés de pratique émergentes est une forme de participation. Il peut amener une appropriation collective, susciter une *genèse documentaire communautaire* (Gueudet et Trouche, 2007). Une telle genèse documentaire donne matière à des ressources qui alimentent le répertoire : elle permet la réification. L'émergence d'une communauté d'enseignants et celle d'un répertoire de ressources de cette communauté étant indissociables, les genèses documentaires constituent un ressort central de la vie des communautés.

Nous nous référons donc au cadre de Wenger, que nous complétons en recourant à l'expression *vivier de ressources*, pour désigner la partie du répertoire constituée par des ressources matérielles. Celle-ci est amenée à jouer un rôle spécifique dans notre étude, nous le verrons dans l'exemple développé au paragraphe II. Le terme vivier, qui souligne le caractère évolutif de ce qu'une communauté met en partage, est issu d'un projet européen (http-ARIADNE).

L'intégration des technologies, la réflexion sur les contenus et le développement de communautés d'enseignants apparaissent souvent reliés (Lachance et Confrey, 2003). Une approche en termes de genèses documentaires, d'évolution du répertoire et du vivier de ressources d'une communauté de pratique éclaire cette association. Elle indique qu'il est pertinent de retenir la *préparation collective de séances TICE* et la production associée de *ressources évolutives* comme élément central d'un dispositif d'accompagnement. Nous examinons ici deux dispositifs de formation continue qui ont retenu un tel principe :

- Le SFoDEM, dispositif qui s'est développé de 2002 à 2006 dans l'académie de Montpellier (Guin *et al.*, 2008) ;
- Pairform@nce (http-Pairform@nce), programme initié par le ministère de l'éducation nationale, qui est encore en phase expérimentale, et qui donne lieu à une recherche dans laquelle sont impliqués l'équipe EducTice (INRP), le CREAD (IUFM de Bretagne) et les IREM de Montpellier et de Rennes.

Nous nous penchons sur les ensembles de ressources en jeu dans chacun de ces projets, et sur la dynamique de ces ensembles. Nous apportons des éléments de réponse aux questions suivantes, formulées avec la terminologie introduite dans des recherches centrées sur le SFoDEM (Guin et Trouche, 2008) :

- Quels *assistants méthodologiques* peuvent, ou doivent, initier et entretenir le travail collectif de documentation (un assistant méthodologique étant un ensemble de ressources proposé précisément dans un tel objectif) ?
- Quelles émergences de *communautés de pratique*, de *modèles de ressources* observe-t-on ?

II. SFoDEM, évolution conjointe des ressources et des groupes d'enseignants concepteurs

Le SFoDEM (Suivi de Formation à Distance pour les Professeurs de Mathématiques) a été développé, de 2000 à 2006, dans l'académie de Montpellier, par l'IREM, dans le cadre d'un partenariat associant rectorat, CRDP, IUFM et direction des technologies du ministère (Guin et Trouche, 2008). Dispositif de formation d'enseignants du second degré, piloté par trois enseignants chercheurs, il a regroupé chaque année plusieurs dizaines de stagiaires et une quinzaine de formateurs.

II.1. Hypothèses et éléments de méthodologie

Le SFoDEM avait pour objectif d'accompagner les professeurs dans le processus complexe d'intégration des TICE dans leur enseignement. En cohérence avec la perspective présentée ci-dessus, nous reformulons cet objectif comme : accompagner les genèses documentaires des enseignants intégrant des ressources TICE. Ce dispositif reposait sur trois hypothèses :

- La *continuité* de l'accompagnement (pour la conception de ressources spécifiques et dans la mise en œuvre de ces ressources dans les classes) est essentielle, elle suppose un dispositif spécifique (une plate-forme de travail à distance) ;
- *L'émergence de communautés de pratique* est aussi importante, elle ne se décrète pas, mais suppose un accompagnement qui doit être pensé dans la durée ; l'engagement et la participation des acteurs sont en effet la condition du développement d'un répertoire de ressources partagées (§ I) ;
- Le développement d'une documentation communautaire suppose une convergence des formats des ressources que les membres de la communauté conçoivent pour leur propre usage ; ce format commun ne peut pas être anticipé, il est conçu dans l'usage (§ I), comme résultat du travail commun.

L'émergence de communautés de pratique suppose d'abord l'existence de collectifs dotés d'un objectif commun. Quatre groupes de formation ont donc été mis en place, regroupant chacun une vingtaine de stagiaires et trois formateurs, rassemblés autour d'un thème spécifique : la résolution collaborative de problèmes, la transition arithmétique/algèbre, l'utilisation de figures animées en géométrie et l'enseignement en ZEP. La variété (sur le plan des thèmes mathématiques, des technologies utilisées, des dispositifs de travail dans la classe) des groupes de formation a été pensée pour favoriser l'émergence d'une diversité d'objets, permettant un enrichissement mutuel, et le repérage d'invariants relativement génériques. Une cellule de formation réunissait des pilotes et les formateurs, avec l'objectif de réguler le dispositif, ce que Wenger *et al.* (2002) appellent « cultiver les communautés de pratique », et de repérer ces invariants. Elle avait pour rôle de confronter les pratiques communautaires et documentaires à l'œuvre dans chacune des communautés de pratique émergentes (l'évolution des outils de communication, des types de ressources partagées ou co-élaborées). C'est dans ce cadre qu'est apparue, par exemple, la nécessité de négocier et préciser les engagements des différents acteurs du dispositif, sous la forme de *chartes* (stagiaires, formateurs, pilotes).

Nous présentons ici deux aspects de cette expérience, l'émergence d'un modèle commun de ressources et la conception d'un assistant méthodologique pour transmettre des éléments de l'expérience à d'autres (Guin *et al.*, 2008).

II.2. Les genèses documentaires et l'émergence d'un modèle commun de ressources

Les genèses documentaires sont des processus longs. Il ne suffit pas de réunir des enseignants autour d'un projet commun de documentation pour que s'engagent aussitôt des genèses communautaires. Ceci s'est vérifié dans le cas du SFoDEM. Pendant la première année, le travail dans les groupes a mis en évidence une diversité de genèses documentaires. Les ressources d'un professeur, saturées de sa propre expérience, n'ont pas été directement mutualisables. Le travail, organisé à partir de ressources « expertes » (proposées par les formateurs), n'a amené que peu de résultats. Ces ressources ont bien été expérimentées en classe, mais elles ne se sont pas vraiment intégrées dans les genèses documentaires : on n'a observé que peu de traces d'instrumentalisation (les ressources proposées n'ont pas été modifiées) et peu de traces d'instrumentation (les pratiques des enseignants dans les classes, en matière d'intégration des TICE, ont peu évolué, comme l'organisation de leur travail de documentation personnel).

Le travail documentaire communautaire ne s'est réellement développé que dans une nouvelle étape : à partir de la deuxième année, un climat de *confiance* a commencé à s'installer. Une idée ayant émergé dans l'un des groupes a rapidement « contaminé » les autres groupes : elle a consisté à mettre en place de petits ateliers (3 ou 4 enseignants) autour d'un projet précis répondant à un besoin commun (par exemple, « à partir de quelle activité introduire le théorème de Pythagore ? »). Le travail de conception d'une ressource a alors été initié à partir d'un « germe » de ressources (par exemple une animation géométrique trouvée sur Internet). Le travail de cet atelier s'est ensuite organisé autour de deux objectifs : construire, à partir de ce germe, une ressource exploitable en classe ; justifier les choix effectués et rendre compte de l'expérience commune aux autres membres du groupe de formation. Ce travail s'est développé au cours de nombreuses interactions entre les membres de l'atelier et leurs classes (expérimentations partielles) d'une part, les membres de l'atelier et le groupe tout entier d'autre part. Ce ne sont pas seulement des idées ou des textes qui ont été co-élaborés, mais aussi des *usages* de ressources : une genèse documentaire communautaire s'est enclenchée, on a pu en voir les traces sur la plate-forme à distance sous la forme d'un *vivier de ressources* partagées.

Les ressources conçues ont ainsi évolué au fur et à mesure des interactions dans chaque groupe. Les discussions dans la cellule de formation ont permis de distinguer et d'extraire, d'un ensemble d'expériences, des éléments qui ont enrichi les genèses documentaires communes. Les ressources sont devenues plus *explicites* (elles doivent pouvoir être exploitées par d'autres enseignants que leurs seuls auteurs), elles ont été mieux *décrites* (permettant leur repérage dans le vivier de ressources), elles ont intégré des *aides* à différents niveaux (résultant des expériences accumulées par différents utilisateurs), elles ont d'emblée été conçues comme *évolutives* (elles ont prévu le recueil des points de vue des utilisateurs pour un enrichissement ultérieur).

Le pilotage du dispositif a appuyé la convergence des évolutions des ressources des différents groupes vers un *modèle* de ressources (Fig. 1), structure commune articulant plusieurs fiches. Certains éléments de ce modèle sont apparus nécessaires dans tous les groupes : une fiche d'identification (permettant de préciser les objectifs mathématiques, pédagogiques, instrumentaux de la ressource), une fiche élève, une fiche professeur (proposant un recul méthodologique), des scénarios d'usage, des comptes rendus d'expérimentation. D'autres sont apparus au sein d'un groupe, et ont été importés ensuite dans les autres groupes : par exemple, le groupe travaillant sur les narrations de recherche, qui ne voyait pas comment intégrer celles-ci dans les comptes rendus d'expérimentation (contenant essentiellement le point de vue du professeur), a suggéré l'ajout d'une nouvelle fiche « Traces de travaux ». Les autres groupes ont alors instrumentalisé cette fiche pour en faire un lieu de recueil d'autres types de traces (copies d'écran, réponses d'élèves…) apparaissant comme significatives, et permettant de questionner en retour des éléments de la ressource (situation mathématique, variables didactiques, scénario d'usage…).

Enfin, une dernière fiche a été ajoutée au modèle (Fig. 1) : *le curriculum vitae* (CV), cohérent avec la notion de vivier de ressources, permet de garder les traces des évolutions marquantes de la ressource.

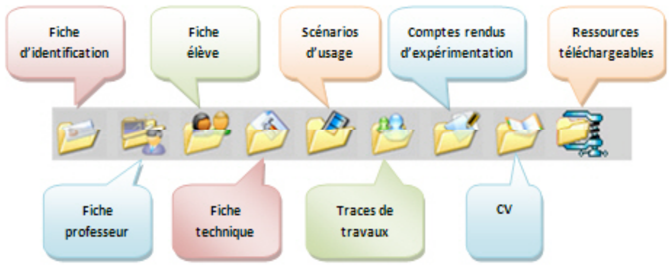


Figure 1 - La structure du modèle de ressources 2006

On a ainsi assisté à une co-émergence de communautés de pratique et d'un modèle de ressources, à la fois produit et ressort du travail documentaire de ces communautés. Ce modèle n'est pas « complet » : il cristallise, à un moment donné, l'expérience des différentes communautés de concepteurs/utilisateurs. Il aurait pu continuer à évoluer. En particulier, il est notable que la mutualisation, à l'intérieur du SFoDEM, s'est arrêtée à la porte des classes : il n'y a pas eu d'observations croisées de séances de classe, comme cela s'est produit dans la recherche autour du dispositif Pairform@nce (§ III). On aurait pu ainsi imaginer l'ajout d'une fiche « observation par un visiteur »…

Le développement du SFoDEM n'a pas été spontané : il a été le fruit du travail réflexif d'un ensemble d'acteurs, au sein d'un dispositif pensé pour favoriser les interactions entre conception et usages. Cette expérience est-elle transposable dans d'autres contextes ? C'est à cette question que s'est attelé le SFoDEM dans sa dernière année.

II.3. De la genèse du SFoDEM à la conception d'un assistant méthodologique

De 2005 à 2007, le SFoDEM a cessé son travail de formation pour se consacrer à une réflexion sur sa propre expérience, et en extraire des éléments pouvant être utiles à d'autres dispositifs de conception collaborative de ressources. Il s'est agi de prolonger, à un autre niveau, le travail qui avait été fait au sein de ce dispositif pour assister la conception et la mise en œuvre de ressources dans les classes : l'objectif est devenu à ce stade d'assister la conception et la mise en œuvre de dispositifs de conception de ressources.

Les formateurs et les pilotes sont ainsi revenus sur la genèse du SFoDEM, du point de vue du dispositif lui-même, des ressources et des outils qui ont été développés tout au long de cette histoire. Cette réflexion a conduit à l'élaboration d'un *assistant méthodologique* pour la conception collaborative de ressources. Édité sous la forme d'un cédérom (Guin *et al*., 2008), il propose, outre une *médiathèque* présentant les ressources propres conçues par le SFoDEM (ressources pour la classe, outils pour la conception de ressources pour la classe ou pour la conception du dispositif), *un parcours* pour penser un dispositif de conception de ressources adapté aux besoins d'un groupe d'enseignants donné (Fig. 2). Ce parcours est structuré en 5 étapes : explorer (des ressources ou des dispositifs existants), définir et mettre en œuvre (son propre dispositif, son propre modèle de ressource), réfléchir (sur la mise en œuvre des ressources), échanger avec ses pairs, réviser (le dispositif, le modèle de ressource, etc.). Pour chacune de ces étapes, les auteurs du cédérom ont décrit les choix du SFoDEM, et ont aussi essayé de les situer dans un ensemble de choix possibles qui, dans d'autres contextes, pourraient s'avérer plus pertinents.

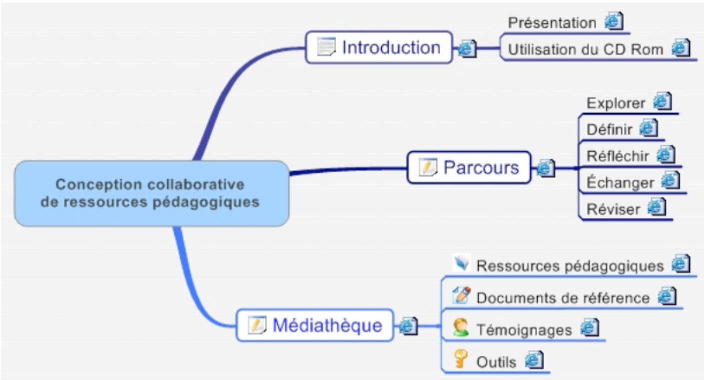


Figure 2 - La structure du cédérom SFoDEM 2008

Cet assistant à la conception d'un dispositif constitue aussi un modèle, qui, comme tout modèle, convient bien… à ceux qui l'ont conçu pour leurs propres besoins, en l'adaptant au fur et à mesure des usages. Il a été conçu dans l'objectif d'aider les communautés qui s'en emparent à développer leurs propres parcours, leurs propres outils, leurs propres modèles. Des formateurs du SFoDEM ont, depuis, mis à l'épreuve des éléments de cet assistant dans d'autres contextes, ce qui a conduit à de nouvelles évolutions (Aldon *et al*., 2008).

Les notions de modèle de ressources et d'assistant méthodologique sont issues du travail mené sur le SFoDEM. Nous allons, dans ce qui suit, les mettre à l'épreuve de l'étude d'un autre dispositif de formation continue partageant des traits commun avec le SFoDEM.

III. Pairform@nce : travail de documentation collectif et assistants méthodologiques pour les enseignants, les formateurs et les concepteurs de parcours de formation

Le programme national Pairform@nce propose des *parcours de formation continue*. Ces parcours sont non seulement des ensembles structurés de ressources permettant la mise en place, dans les académies, de formations bâties sur ces parcours mais ils constituent aussi eux-mêmes des ressources pour les formateurs et leurs stagiaires. L'équipe de recherche rassemblant des membres de l'équipe EducTice, du CREAD, des IREM de Montpellier et de

Rennes (voir § I) suit ce projet en adoptant une méthodologie proche de celle du SFoDEM. Un des enjeux de notre travail sera de déterminer dans quelle mesure ces parcours de formation vont donner matière à des documents développés au sein d'une ou de plusieurs communautés de pratique.

III.1. Présentation du programme national Pairform@nce

Pairform@nce est un dispositif de formation continue hybride, articulant travail présentiel et travail à distance. L'approche retenue pour le développement des compétences TICE des enseignants repose sur deux principes :

(i) On ne développe pas ses compétences seul, in abstracto, mais en les mettant à l'épreuve tout au long de parcours que l'on emprunte avec ses pairs, qui vont de la conception de situations pédagogiques intégrant les TICE jusqu'à l'expérimentation de ces situations dans les classes et à leur révision sur la base de l'expérience commune ;

(ii) Il est possible de concevoir des parcours et de les mettre, grâce à une plate-forme nationale, à disposition de formateurs (ou même d'enseignants isolés) qui vont se les approprier et les adapter à leur propre usage.

Il constitue ainsi une sorte de mise en perspective de la démarche SFoDEM : l'objectif est de susciter un processus de conception collaborative de ressources intégrant les TICE, les parcours sont conçus pour bâtir des dispositifs de formation susceptibles d'assister ces processus. Ces parcours doivent être structurés en sept étapes (que l'on peut mettre en rapport avec les cinq étapes du SFoDEM, voir § II.2) : entrée dans la formation, sélection des contenus d'enseignement, co et autoformation, conception de situations, mise en œuvre de la situation dans la classe, retour réflexif, évaluation de la formation. Ces sept étapes, et les ressources à concevoir pour chacune, sont précisées dans le « cahier des charges du concepteur ».

III.2. Suivre les genèses documentaires, l'émergence conjointe de communautés et de modèles de ressources à différents niveaux : recherche et choix de méthodologie

Le dispositif Pairform@nce implique de multiples ensembles de ressources et de nombreux types d'acteurs : concepteurs de parcours, formateurs, stagiaires. La recherche que nous conduisons porte sur les genèses documentaires qui peuvent se développer dans tous ces collectifs. Nous étudions l'émergence conjointe de communautés de pratique, de viviers et de répertoires de ressources. Nous nous intéressons plus particulièrement aux modèles de ressources développés au cours de ces processus. Nous observons les assistants méthodologiques en jeu, leur appropriation par les différents acteurs du dispositif, et leurs évolutions, dans un mouvement de conception dans l'usage.

Nous avons mis en place une méthodologie spécifique dont nous donnons ici les grandes lignes. Nous sommes impliqués dans l'élaboration de trois parcours. Deux de ces parcours concernent les mathématiques (C2m@tic Montpellier et Rennes), le troisième concerne la géographie et la géologie (Geom@tic). Les concepteurs de ces parcours travaillent dans différentes disciplines et ont divers statuts dans des institutions et communautés. La conception de ces parcours a débuté à la rentrée 2007. Chacun d'entre eux a donné lieu à une première formation continue test (les parcours n'étaient pas formalisés au moment de cette formation ; il s'agissait donc de tester dans ces formations une ébauche de parcours, et de préciser les éléments à retenir, nous en donnons des exemples dans ce qui suit), animée par les concepteurs de parcours (C2m@tic) ou par d'autres formateurs (Geom@tic). Les stagiaires impliqués dans ces formations ont conçu et mis en œuvre des ressources dans leurs propres classes. Nous avons donc pu observer la dynamique d'une co-élaboration à différents niveaux : élèves-stagiaires, stagiaires-formateurs, formateurs-concepteurs. Les résultats que nous rapportons concernent l'émergence de communautés de stagiaires et de concepteurs de parcours, et les phénomènes associés de conception dans l'usage, en particulier le développement conjoint de modèles de ressources relatifs aux parcours. L'appropriation de parcours par des formateurs non concepteurs est un point central de notre recherche ; il ne peut cependant pas être complètement traité dès la première année du projet (prévu pour cette raison sur une durée de trois années).

III.3. Co-élaboration de séquences et communautés de stagiaires : le cas de C2m@tic Rennes

La formation expérimentale C2m@tic Rennes, qui s'est déroulée entre octobre 2007 et février 2008, portait sur l'emploi en classe du logiciel Mathenpoche[1] dans sa version réseau (noté MEP par la suite). Six équipes de stagiaires ont suivi la formation. Chaque équipe était constituée de deux à quatre professeurs enseignant dans un même collège. Les stagiaires devaient élaborer et observer une séquence de classe sur un thème mathématique de leur choix, et remplir une fiche de suivi de la séquence. La formation comportait trois demi-journées en présentiel :

(i) Présentation de la formation et de la plate-forme de travail collaboratif moodle, choix d'un thème par chaque équipe ;

(ii) Prise en main de MEP réseau (optionnelle) ;

(iii) Mise en commun des séquences réalisées, bilan et évaluation de la formation. Les formateurs ont rencontré les équipes lors des formations en présentiel ; un questionnaire a été rempli lors de la dernière demi-journée. Les formateurs se sont également rendus dans les établissements de la plupart des équipes, pour assister à une séance. Les stagiaires avaient des expériences très diverses concernant l'emploi de MEP : certains étaient totalement novices, d'autres très expérimentés (d'où le choix de proposer de manière optionnelle la prise en main de MEP). Toutefois chaque équipe comportait un enseignant familier de l'emploi de MEP ; ceci a joué un rôle important dans la formation, aucun problème technique relatif à MEP n'étant apparu.

Nous allons nous attacher à interroger l'émergence de communautés de pratique parmi les stagiaires en observant l'élaboration et l'appropriation collective de ressources par les équipes. Au début de la formation, certaines équipes avaient déjà des habitudes de collaboration, mais aucune d'entre elles n'avait encore entrepris une co-élaboration de séquence. Dans le questionnaire final (treize questionnaires recueillis), tous les stagiaires déclarent qu'ils ont apprécié ce principe de co-élaboration, et douze d'entre eux disent que la formation a permis le développement d'un travail collaboratif au sein de leur établissement. Les stagiaires soulignent notamment l'intérêt d'assister à une séance réalisée par un collègue. En fait, cinq des six équipes semblent s'être approprié le dispositif C2m@tic-Pairform@nce ; seule une équipe n'a pas, au final, produit de séquence commune. En dehors de ce cas particulier, toutes les autres équipes se sont réellement engagées dans un travail de co-élaboration. Au cours de ce travail documentaire, les membres des différentes équipes se sont dotés de ressources communes. Par exemple, trois équipes ont décidé que leur séquence se déroulerait en classe de troisième. Ceci est une conséquence de ce que Ruthven (2007) désigne comme *the working environment* : en effet, dans les collèges concernés, les élèves de

[1] Mathenpoche est une base d'exercices en ligne pour le collège. Sa version réseau permet une inscription individuelle des élèves et la constitution par le professeur de séances programmées, avec éventuellement des menus différents pour différents groupes d'élèves. Elle permet aussi de disposer d'un suivi du travail de l'élève (http – Mathenpoche).

classe de troisième disposent d'ordinateurs portables ; les enseignants souhaitaient mettre à profit ces ordinateurs en classe. Cependant, il est techniquement délicat de connecter simultanément une vingtaine d'ordinateurs portables à Internet. Donc ces équipes ont utilisé une version téléchargée de MEP, ne disposant pas des fonctionnalités de programmation de menus personnalisés et de suivi des élèves. Elles se sont éloignées de l'objectif d'emploi de la version réseau de MEP, affiché par la formation. En revanche, elles se sont constitué une ressource matérielle commune : des ordinateurs portables équipés de MEP. Et leur répertoire commun s'est également enrichi d'un usage souple de MEP, en salle classique, pour traiter un ou deux exercices au cours d'une séance. Une rencontre avec les stagiaires deux mois après la fin de la formation a permis aux formateurs de constater que cet usage avait largement dépassé le cadre de C2m@tic.

Par ailleurs, les cinq équipes qui ont élaboré une séquence commune ont déposé sur la plate-forme collaborative un descriptif préparatoire de cette séquence qui a pris des formes diverses, mais qui consistait essentiellement en une liste des séances prévues, avec une ligne donnant une idée du contenu de chacune. Les formateurs avaient proposé, dans la fiche de suivi, un *modèle* de descriptif global de la séquence que les équipes ne se sont pas approprié pour leur préparation. Nous interprétons ceci comme une difficulté d'intégration d'une ressource : les rubriques retenues n'étaient pas issues d'une élaboration commune, mais proposées par les formateurs. De plus, elles avaient été présentées aux stagiaires, mais aucun exemple de tableau descriptif rempli n'avait été fourni. Enfin, la constitution d'équipes intra-établissement a permis un travail de préparation en présence qui n'a pas rendu nécessaire une explicitation précise des choix communs. C'est, en fait, lors de la préparation de la mise en commun finale que les équipes ont adopté le modèle proposé (ce qui coïncide avec les observations réalisées dans le projet SFoDEM, § II). Celui-ci a donc servi à la présentation a posteriori de la séquence réalisée, et à la préparation de l'analyse d'une séquence réalisée par une autre équipe (lors de la mise en commun finale deux équipes présentaient en détail le travail réalisé, chacune des quatre autres équipes étant chargée de l'analyse détaillée d'une des deux séquences). Tous les stagiaires ont déclaré que le modèle était très utile pour la mise en commun. En effet, il est rapidement apparu que les brefs descriptifs des séquences ne suivant pas le modèle étaient insuffisants pour comprendre les choix faits par une autre équipe. Au cours de la mise en commun finale, le modèle de descriptif de séquence a été adopté par le collectif formé de l'ensemble des stagiaires ; certains ont annoncé leur intention de tester dans leurs classes l'une des autres séquences réalisées. Les stagiaires ont toutefois suggéré aux formateurs de modifier à l'avenir la fiche de suivi en y prévoyant un espace « libre » pour une description informelle de la séquence prévue, au moment de la préparation de celle-ci.

Ces observations ont amené une modification des ressources proposées dans le parcours de formation C2m@tic-Rennes. Le modèle de fiche de suivi n'a pas été modifié, mais plusieurs exemples de fiches de suivi renseignées ont été proposés, et un temps d'analyse en commun de deux de ces exemples a été prévu lors de la première journée de formation. De plus, une nouvelle constitution des équipes a été retenue, associant enseignants d'un même établissement et d'établissements différents, la distance renforçant la nécessité d'explicitation des choix faits pour les séances.

Il y a donc eu appropriation, par les stagiaires, d'une partie de l'assistance méthodologique proposée initialement (la fiche pour présenter et discuter une séquence lors du bilan par exemple). D'autres ressources n'ont pas rempli leur fonction prévue (la fiche pour préparer une séquence), et ceci a conduit à une évolution de l'assistance méthodologique, dans un mouvement de conception dans l'usage.

III.4. Co-élaboration de parcours et émergence d'une communauté de concepteurs

Du côté des concepteurs, nous avons observé les premiers éléments attestant de l'émergence d'une communauté de pratique. Ce groupe de concepteurs est constitué non seulement des personnes qui élaborent concrètement les parcours, mais également des chercheurs qui ont interagi avec eux, jouant le rôle de pilotes (de façon analogue au § II.1). À partir de divers ensembles de ressources : cahier des charges du concepteur, expériences de projets antérieurs (le SFoDEM, pour certains concepteurs), objets élaborés pour l'un ou l'autre des trois parcours, le répertoire du groupe s'est progressivement constitué, enrichi de ressources communes. L'existence de ces ressources et de processus de co-élaboration sont les indices de la constitution d'une communauté de pratique. Nous allons développer ici des exemples témoignant de ces processus.

Certaines ressources, que le cahier des charges n'avait pas prévues, ont émergé du travail documentaire commun des concepteurs. C'est le cas du « *calendrier de formation* ». Cette nouvelle ressource est apparue simultanément dans les trois parcours, ce qui témoigne d'une fonction nécessaire. Chaque parcours a en effet conçu un calendrier, planning ou conducteur qui proposait une organisation chronologique de la formation. Cette fonction paraissait prise en charge par la succession des sept étapes imposée par Pairform@nce. Cependant, l'apparition du calendrier pour réaliser concrètement la formation a montré que ce n'était pas le cas. Il est d'ailleurs dit dans le « cahier des charges » que les travaux engagés dans une étape se prolongent au cours des étapes suivantes[2] : celles-ci ne sont donc pas nécessairement chronologiques. Ainsi, un calendrier-planning de la formation a-t-il été attaché à la première étape de chaque parcours. Il propose de visualiser en un coup d'œil le déroulement de la formation, l'alternance des séances en présentiel et des interactions à distance, la remise des différents documents et autres éléments de coordination temporelle du travail du groupe de stagiaires. Un *« historique du parcours »*, décrivant les choix effectués, les évolutions et leurs raisons a été proposé par un groupe de concepteurs issus du SFoDEM, héritage du CV mentionné au paragraphe II.2. Le principe d'un historique pour chacun des parcours a ensuite été retenu par la communauté des concepteurs.

D'autres ressources étaient prévues dans le cahier des charges, mais leur forme a évolué au fil du travail des concepteurs. C'est le cas de la « courte présentation ». Pour chaque parcours, elle permet de décrire brièvement la formation dans la plate-forme nationale et éventuellement dans les Plans Académiques de Formation. Le cahier des charges du concepteur fournit une liste précise des rubriques que cette « courte présentation » doit comporter. Malgré cela, les versions initiales des « courtes présentations » des trois parcours étaient très disparates, présentant des divergences qui ne résultaient pas seulement des disciplines et des contenus de formation différents. Au cours de discussions entre concepteurs, la nécessité d'introduire de nouvelles rubriques a été dégagée, notamment pour distinguer les *objectifs* de formation des *méthodes* employées pour atteindre ces objectifs. Concepteurs et pilotes ont également précisé quels exemples de situations (mathématiques ou géographiques) ou quelles références bibliographiques pouvaient être attachés à la présentation. Dans ce cas, une convergence a eu lieu et a mené au développement d'un *modèle* de « courte présentation », permettant un enrichissement des trois présentations initiales et facilitant l'écriture de nouvelles présentations.

Un autre exemple d'émergence d'objet commun concerne les assistants méthodologiques spécifiquement destinés aux formateurs. La nécessité de telles ressources a été d'emblée ressentie par chacune des équipes de concepteurs, pour apporter des précisions sur la mise en

[2] Version 1 du « Cahier des charges : produire un parcours de formation », novembre 2007, p. 14-15.

œuvre, l'organisation et la répartition des tâches ou l'approfondissement du contenu de la formation. En termes d'assistance méthodologique pour les formateurs, il y a sans doute une insuffisance dans ce que propose le dispositif national. Le cahier des charges suggère bien de faire pour chaque étape un tableau qui décrit à l'intention du formateur les activités prévues, les ressources disponibles et propose des commentaires, mais ceci est présenté comme une simple suggestion, et ces tableaux ne figurent pas sur la plate-forme nationale. Les ressources initialement proposées à l'intention des formateurs par les concepteurs, correspondant à leur expérience propre, ont donc pris diverses formes (tableaux, textes, liens hypertextes) et dénominations (*compagnon*, *conducteur*). Après discussion parmi les pilotes du dispositif, il est apparu que ces ressources concernaient le *parcours* (et pas seulement le formateur : elles peuvent aussi concerner les stagiaires). Par ailleurs, le terme *conducteur* est apparu trop contraignant et le terme *compagnon* trop lâche. Ceci a conduit les pilotes à proposer l'appellation « *assistant de formation* ». Cette évolution de point de vue a conduit les différents concepteurs à réviser leurs parcours, ce qui a constitué un nouvel enrichissement de ceux-ci.

L'ensemble de ces processus a finalement abouti à l'émergence d'un *modèle de parcours*, déterminant une forme commune de l'assistance méthodologique prévue par les trois parcours. Ce modèle, conçu dans l'usage, au cours d'un processus dans lequel les pilotes ont joué un rôle déterminant d'accompagnement de la mutualisation, fait désormais partie du répertoire de la communauté de concepteurs. Il contribue à l'assistance méthodologique pour les concepteurs, mais aussi pour les formateurs susceptibles de s'approprier le parcours, et pour les stagiaires qui suivront des formations bâties sur ce parcours.

Le développement de ressources alimentant un vivier commun, l'engagement mutuel dans la conception de parcours attestent de la constitution du groupe de concepteurs en communauté de pratique.

IV. Conclusion

La question que nous avons mise à l'étude est : « quels assistants méthodologiques pourraient initier et entretenir le travail de documentation collectif des professeurs ? »

Nous avons dans ce texte avancé des germes de réponses. Un assistant méthodologique susceptible d'initier et d'entretenir ce travail collectif, c'est un ensemble de modèles de différents niveaux :

- Des modèles de parcours (c'est-à-dire un certain nombre d'étapes, à emprunter dans un certain ordre) ;
- Des modèles d'outils (ressources pédagogiques pour le SFoDEM ou Pairform@nce, « présentations courtes » pour Pairform@nce, etc.).

Le travail documentaire associe étroitement *usage* et *conception* ; ainsi, un assistant méthodologique soutient conjointement ces deux aspects. C'est vrai pour le SFoDEM : le modèle de ressources est une aide pour utiliser une ressource, et aussi une aide pour en concevoir d'autres. C'est également vrai dans le cadre de Pairform@nce : le modèle de parcours est une aide méthodologique pour concevoir des parcours et les faire évoluer, mais aussi pour mettre en œuvre un parcours. Ces modèles ne sont pas prévisibles à l'avance, ils émergent à partir de multiples allers-retours, allers-retours entre conception et usages, allers-retours entre pairs, allers-retours entre pairs et experts. Les modèles évoluent sans cesse, il n'y a pas de modèles parfaits.

Il faut du temps, du mouvement et de l'espace pour que ces allers-retours soient fructueux : le temps, c'est le temps de la genèse conjointe des documents et des communautés ; le mouvement, ce sont les interactions effectives, qui supposent la confiance entre les acteurs ; l'espace, c'est la diversité nécessaire des points de vue, pour faire émerger de bons modèles.

La conception de modèles de ressources est chose complexe, entre souplesse et contrainte. Pour garder la métaphore des parcours, les modèles sont à la fois des guides de voyages et des carnets de route, où l'expérience nourrit l'évolution des ressources communes.

Les assistants méthodologiques, en tant qu'ensemble de modèles, sont ainsi à la fois le moteur et le produit du travail documentaire collectif.

Ghislaine Gueudet
CREAD et IUFM de Bretagne
ghislaine.gueudet@bretagne.iufm.fr

Sophie Soury-Lavergne
INRP, EducTice - DIAM-LIG, Université de Grenoble
Sophie.Soury-Lavergne@imag.fr

Luc Trouche
INRP, EducTice - LEPS, Université de Lyon
luc.trouche@inrp.fr

Références

Aldon G., Artigue M., Bardini C., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Guichard Y., Hérault F., Nowak M., Salles J., Trouche L., Zuchi I. (2008). Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-CoLab (expérimentation Collaborative de Laboratoires mathématiques). Co-édition *Repères IREM* n° 72 et *EducMath*, dossier mutualisation (consulté le 15 mai 2008) http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/.

ARIADNE (Alliance of Remote Instructional Authoring and Distribution Networks for Europe) (1996). Fondation pour le Vivier de Connaissances Européen : association internationale à but non-lucratif. http://www.ariadne-eu.org/ (consulté le 15 mai 2008).

Chevallard Y. (2002). Écologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (dir.), *Actes de la XI^e École d'été de didactique des mathématiques, Corps* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Gueudet G., Trouche L. (2007). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques. In I. Bloch, F. Conne (dir.) *Actes de la XIV^e École d'été de didactique des mathématiques*, ARDM.

Guin D., Joab M., Trouche L. (dir.) (2008). *Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM*, INRP et IREM (Université Montpellier 2).

Guin D., Trouche L. (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Guin D., Trouche L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2007. Co-édition *Repères IREM* (72, à paraître) et *EducMath*, dossier mutualisation http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/ (consulté le 15 mai 2008).

Jaworski B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education* 9, 187-211.

Krainer K. (2003). Editorial. Teams, communities and networks. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6, 93-105.

Lachance A., Confrey J. (2003). Interconnecting content and community: a qualitative study of secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* 6, 107-137.

Mathenpoche, site de la base d'exercices, http://mathenpoche.sesamath.net (consulté le 15 mai 2008).

Miyakawa T., Winsløw C. (2007). Étude collective d'une leçon : un dispositif japonais pour la recherche en didactique des mathématiques In I. Bloch, F. Conne (dir.) *Actes de la XIV^e École d'été* *de didactique des mathématiques*, ARDM.

Pairform@nce, répertoire de parcours de formation développé par la Sous-Direction aux Technologies de l'Information et de la Communication (SDTICE) du Ministère français de l'Éducation Nationale http://www.pairformance.education.fr (consulté le 15 mai 2008).

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rabardel P., Pastré P. (dir.) (2005). *Modèles du sujet pour la conception*. Toulouse : Octarès.

Robert A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27/3, 271-312.

Ruthven K. (2007). Teachers, technologies and the structures of schooling, in Pitta-Pantazi, D. and Philippou, G., *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Chypre.

Wenger E. (2005). *La théorie des communautés de pratique*. Traduction et adaptation de F. Gervais, Presses de l'Université Laval, Canada.

Wenger E., McDermott R., Snyder W. (2002). *Cultivating communities of practice: a guide to managing knowledge*. Havard Business School Press.

Sésamath : questions de praticiens à la recherche en didactique

Gérard Kuntz, Benjamin Clerc, Sébastien Hache

Résumé

Cette communication propose un dialogue large et soutenu entre les chercheurs en didactique des mathématiques et les créateurs de ressources de Sésamath. Après avoir analysé quelques publications consacrées à Mathenpoche, elle propose des thèmes de recherche qui pourraient conduire à une plus grande efficacité pédagogique de cette base de données d'exercices, très utilisée en Collège. L'aide en ligne, la nécessité de travaux comparatifs, l'établissement de scénarios d'usage, la place de la version réseau, le rôle des outils virtuels en géométrie, autant de questions issues d'une pratique très étendue de Mathenpoche en Collège, qui gagneraient à être reprises du point de vue de la recherche. L'article invite aussi les chercheurs à produire eux-mêmes des ressources qui pourraient s'intégrer à Mathenpoche. Il élargit enfin le propos à d'autres ressources de Sesamath (les manuels collaboratifs, Mathematice, les-mathematiques.net, etc.).

Introduction

Dans la communication qui suit, nous partons de quelques travaux récents de chercheurs en didactique, consacrés à la base de données d'exercices Mathenpoche (*désignée par Mep* dans ce qui suit), réalisée par l'association Sesamath. Nous analysons d'abord les questions et les démarches des chercheurs dans ces publications. Nous tentons d'en tirer des conséquences pour les concepteurs et les utilisateurs de Mep.

Nous cherchons ensuite à élargir les thèmes de recherche et à proposer des questions qui intéressent et préoccupent les enseignants engagés dans le développement et l'utilisation en classe de cet outil. Ces questions et ces propositions ont été accueillies très favorablement durant le colloque et déjà traduites en un projet de recherche dans le cadre de l'ANR.

Les recherches réalisées à propos de Mep

Dès 2002, plusieurs équipes de recherche se sont intéressées aux bases d'exercices d'accès libre, constituées d'exercices ou de problèmes, organisées selon un certain classement, avec pour chacune un environnement qui peut comporter des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices…) mais aussi la solution des exercices ou des problèmes.

Les études concernant ces types de logiciels font apparaître une augmentation de la motivation des élèves qui se traduit par une plus forte activité (Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck, 2004). Ruthven et Henessy (2002) ont montré que la contribution de la technologie à l'implication des élèves dans la tâche proposée est un thème dominant dans les déclarations d'enseignants sur les apports de la technologie. Or, l'activité mathématique des élèves, c'est-à-dire tout ce qu'ils peuvent dire, faire ou penser, est essentielle pour l'apprentissage ; c'est ce qui pousse les chercheurs à s'intéresser à ces produits. Les mêmes études mettent en avant le fait que le rythme des élèves est plus facilement respecté en séances machines avec ces logiciels qu'en séances classiques et le fait que les aides des enseignants sont plus individualisées.

Une nouvelle étude (Hersant & Vandebrouck, 2006) questionne l'activité mathématique potentielle des élèves lorsqu'ils travaillent sur des bases d'exercices et interroge les incidences sur l'activité de l'enseignant (en termes de scénario d'utilisation notamment). Les bases Mep (http://www.sesamath.hautesavoie.net) et Wims (http://wims.unice.fr) sont à cet égard étudiées et comparées. L'étude se concentre ensuite sur le thème de la proportionnalité en Sixième. Réalisée à partir de la seule analyse des exercices proposés (sans observation effective de classes), l'étude propose, en guise de conclusion, un certain nombre d'hypothèses et annonce des travaux à venir :

> « L'influence du contenu du logiciel sur l'activité mathématique des élèves semble assez facile à inférer par les enseignants à partir de leurs connaissances élaborées pour les séances papier-crayon. L'influence des structures didactiques et logicielles proprement dites semble au contraire plus difficile à inférer et nécessite sans doute, en plus d'une étude fine des exercices dans leur environnement, une observation des élèves et des enseignants au travail. Il apparaît du coup que tout ce qui relève de la conception du scénario, à quelque échelle que ce soit, est délicat. Pour les enseignants, les adaptations dans les pratiques ne sont sûrement pas évidentes mais seront probablement facilitées à l'avenir par les échanges entre enseignants qui se développent avec les communautés de pratiques. »

Est-il possible pour un enseignant d'utiliser Mep, pour faire découvrir à ses élèves des notions, des propriétés, des procédures mathématiques *avant que celles-ci aient été présentées en cours ?* C'est à cette question, toujours à propos de la proportionnalité en Sixième, que cherche à répondre un groupe de recherche INRP-IUFM de Bretagne (Gueudet, 2007). Plus précisément : lors d'un travail long (quatre séances d'une heure) sur Mep, *sans intervention de l'enseignant :*

- Peut-on observer différents parcours, différents comportements d'élèves sur l'ordinateur, et lesquels ?
- Quelles sont les conséquences de ce travail sur les apprentissages, et peut-on observer un lien entre les comportements sur Mep et les apprentissages réalisés ?

Voici les conclusions de cette étude :

> « Certains font les problèmes un à un, comme dans un environnement papier-crayon ; d'autres visitent le corpus d'exercices proposés, en passant peu de temps sur chacun ; d'autres encore suivent scrupuleusement les conseils de Mep, et relancent l'exercice s'ils obtiennent 3 sur 5 ou moins. *Aucun de ces comportements ne semble particulièrement freiner ou favoriser l'apprentissage,* dans les classes que nous avons observées (signalons toutefois que les élèves qui « visitaient les exercices » n'avaient pas au départ de difficultés en mathématiques).
> Globalement on retient que les élèves ont progressé sur la proportionnalité, mais bien entendu nous ne nous plaçons pas dans une approche qui consisterait à vouloir comparer ces progrès avec ce que les élèves auraient appris dans des séances classiques papier-crayon sur la même durée.
> En revanche certains détournements de Mep constituent des difficultés supplémentaires pour l'apprentissage : c'est le cas du comportement qui consiste à relancer l'exercice dès qu'un point de score est perdu, et de la stratégie de recherche d'un résultat entier, stratégie qui s'appuie fortement sur l'emploi de la calculatrice, mais aussi sur la possibilité de première réponse fausse.
> Ceci souligne encore, s'il en était besoin, *la nécessité d'associer à Mep un scénario d'utilisation soigneusement réfléchi,* en particulier en ce qui concerne le rôle de l'enseignant. »

L'intense activité d'échanges entre les utilisateurs de Mep au cours de rencontres en présentiel et surtout au moyen de listes de diffusion ne pouvait qu'intéresser les chercheurs. Ainsi, le groupe ECUM (Émergence de Communautés d'Utilisateurs de Mep) suit depuis septembre 2006, l'expérimentation académique de Mep dans l'académie de Rennes. L'article qui en résulte (Dubois *et al.*, 2008) pose les questions suivantes :

- Quelles conditions doivent-elles être réunies pour que les enseignants puissent communiquer entre eux à propos du contenu du logiciel et de ses usages ?
- Une telle communication, lorsqu'elle est mise en place, influence-t-elle les pratiques des professeurs ? À quelles conditions ? De quelle manière ?
- Si une communauté d'utilisateurs émerge, est-elle susceptible d'avoir une influence sur

l'évolution du logiciel ? A quelles conditions ?

Les conclusions de l'article apportent des éléments de réponse et de nouveaux questionnements.

> « Nous notons que pour la communauté de pratique MEP que nous avons étudiée, comme pour le groupe ECUM, des *scénarios d'usage,* permettant des descriptions formalisées et structurées de mise en œuvre, font partie du vivier de la communauté. Cet élément paraît même *déterminant pour le développement de véritables collaborations* sur l'emploi de MEP.
> Nous avons pu noter que les rencontres que nous avons réalisées en établissement ont joué un rôle important, et ont donné lieu à beaucoup d'échanges sur des utilisations précises de MEP qui n'ont jamais fait l'objet de messages sur une liste. Nous en concluons *qu'une liste de diffusion ne peut suffire à faire émerger une communauté de pratique*.
> Deux collègues, non membres du groupe ECUM, ont joué un rôle actif dans les échanges sur la liste. L'une a déposé des documents ; l'autre a signalé qu'elle allait transmettre des documents déposés sur la liste aux collègues de son établissement, et toutes deux ont fait des descriptions d'utilisations précises. Or ces deux collègues sont, chacune de leur côté, membres de communautés de pratique-MEP déjà existantes.
> Ceci nous a conduits à faire l'hypothèse que plutôt que faire émerger une communauté de pratiques, le rôle d'une liste de diffusion pourrait être de *créer un lien entre différentes communautés de pratique existantes, les amenant à collaborer*. Wenger parle dans ce cas de *constellations de communautés de pratique*. La liste ECUM pourrait-elle contribuer à créer une telle constellation ? Quelles seraient les conséquences d'une collaboration via la liste entre différentes communautés, en particulier sur le vivier de ressources de ces communautés ? Ce sont les questions qui sont désormais au cœur de notre travail. »

On mesure, au travers de ces trois articles, la richesse des questions suscitées par l'étude des contenus et de la structuration de Mep, par l'observation d'élèves travaillant sur ce logiciel et par les échanges diversement structurés des enseignants à propos de Mep et de ses usages avec les élèves. Ce qui frappe le lecteur, c'est que chaque étude engendre de nouvelles pistes de réflexion et de nouveaux questionnements.

Nous sommes reconnaissants aux travaux de didactique qui ont été menés ou qui sont en cours, car ils stimulent nos réflexions et orientent les travaux de maintenance et d'évolution de la base. Mais, depuis la gestation, la conception et la réalisation de Mep, nous avons nos propres interrogations que nous aimerions partager avec les chercheurs, afin que certaines puissent être reprises et développées lors de travaux de recherche à venir. Les allers-retours entre les créateurs de la base de données d'exercices et les chercheurs pourraient être particulièrement féconds.

C'est peut-être ce que suggérait en filigrane Michèle Artigue dans sa conférence au Colloquium de didactique des mathématiques (Artigue, 2007) :

> « … l'évolution technologique nous oblige à sortir de ces espaces technologiques devenus familiers, nous oblige à nous intéresser aux nouvelles générations de bases d'exercices comme Mathenpoche, développé par l'association Sesamath par exemple, et à essayer de comprendre quels usages en font enseignants et élèves, avec quels effets sur les apprentissages. Elle nous oblige aussi à remettre en question nos modèles de diffusion des connaissances et à prendre la mesure de ce que peut apporter la technologie aujourd'hui dans des contextes difficiles »

Questions et suggestions aux chercheurs à propos de Mep

La question de l'aide

Quand nous avons conçu Mep, l'importance de *l'aide proposée aux élèves pour chaque exercice nous a paru essentielle.* Il n'était pas possible pour les concepteurs de Mep de laisser les élèves face à des questions ou à des difficultés, sans qu'ils trouvent *dans le logiciel même,* les informations complexes qui leur permettent de les résoudre (au prix d'un travail personnel bien évidemment). L'aide proposée dans Mep a demandé de la part des concepteurs, des scénaristes et des programmeurs (tous enseignants de mathématiques) une énergie et un temps qu'on a peine à imaginer. L'article déjà cité (Hersant & Vandebrouck, 2006) relève l'intérêt de cet aspect particulier du logiciel :

> « L'aide proposée dans Mep peut modifier de façon importante l'activité des élèves ou les interventions possibles du professeur. Cette aide n'est pas une solution immédiate et nécessite une adaptation par rapport à la question en cours. Elle peut même correspondre à la résolution d'une question plus difficile que celle en cours. Elle correspond généralement à la résolution d'une des questions les plus avancées de l'exercice, avec l'introduction éventuelle d'un autre registre que celui proposé dans l'énoncé de la question en cours.
> Du coup, une bonne partie de l'activité mathématique d'un élève en difficulté peut résider non seulement dans la compréhension de cette aide, mais aussi dans sa transposition pour remarquer qu'il s'agit du même type de problème et comprendre comment résoudre la question en cours. La présentation des données dans un tableau alors que les questions sont proposées dans le registre du langage naturel suggère aussi à l'élève un travail papier-crayon, avec représentation des données dans un tableau. Enfin, l'aide propose d'utiliser le coefficient de proportionnalité pour la résolution de la question alors que la procédure linéaire est plus naturelle. »

Un autre article (Kuntz, 2004) suggérait une utilisation différente de cette rubrique d'aide :

> « Pourquoi en limiter l'accès aux seules situations d'erreur ? Il serait précieux de la rendre accessible d'entrée (en option) à ceux qui souhaitent rafraîchir leurs connaissances avant d'aborder les exercices. Car ces aides sont aussi des façons d'apprendre le cours en l'appliquant. Elles touchent aussi à la délicate question de *la rédaction des solutions* devant laquelle les élèves se cabrent de plus en plus, faute de connaissances sûres et d'un minimum d'aisance dans le maniement de la langue. »

Il nous semble que l'étude systématique des contenus de l'aide, dans un champ conceptuel donné, pourrait être retenue comme thème d'étude. Comment les élèves s'en servent-ils ? Quels profits en tirent-t-ils ? Peut-on caractériser une aide efficace ? L'idée de transformer l'aide en outil d'apprentissage du cours avant de résoudre des exercices est-elle pertinente ? Quelles modifications faudrait-il alors lui apporter ?

Une telle étude pourrait conduire à de réelles améliorations de l'aide existante dans les domaines concernés et à de meilleures approches lors de conceptions futures. Car Mep n'est *ni figé, ni achevé.* En témoigne l'extrait de courrier récent qui suit, sur la liste de diffusion interne à Sesamath :

> « Comme vous le savez, Mep 6ème est le plus ancien des niveaux de Mep. C'était le début de l'aventure : les concepteurs, les scénaristes et les développeurs n'avaient à l'époque ni l'expérience, ni la dextérité de l'équipe actuelle. Il me semble donc que le projet de transformer les anciens exercices dans un nouveau modèle n'est pas pertinent. L'idée la meilleure serait *de re-scénariser complètement le niveau de 6ème,* de manière coopérative et ouverte, en commençant par un chapitre pour voir... et en utilisant un Wiki. ».

Il est donc possible de contribuer sur ce point (et sur bien d'autres) à *une véritable maturation de Mep.*

De nécessaires travaux comparatifs.

Dans la conclusion de l'article déjà cité (Gueudet, 2007), nous soulignons la phrase suivante :

> « Globalement on retient que les élèves ont progressé sur la proportionnalité, mais bien entendu, nous ne nous plaçons pas dans une approche qui consisterait *à vouloir comparer ces progrès avec ce que les élèves auraient appris dans des séances classiques papier-crayon sur la même durée.* »

Or cette question est centrale dans les débats (souvent vifs) entre collègues utilisateurs convaincus de Mep et ceux qui doutent de son intérêt, qui y sont réfractaires ou hostiles. Elle surgit aussi quand les utilisateurs convaincus en viennent à s'effrayer du temps nécessaire à l'apprentissage autonome. Elle ne peut donc pas ne pas préoccuper les chercheurs. Il nous paraît urgent de concevoir et de mener *des études comparatives entre les deux démarches* sur des questions précises et ciblées. Nous imaginons les difficultés d'une telle entreprise, les risques de dérapages et la complexité d'interprétation des résultats de l'étude.

Malgré les difficultés prévisibles, ces études comparées nous paraissent indispensables, tant sont fortes les interrogations et les critiques au sujet de l'emploi de Mep dans le quotidien des classes. Elles pourraient aussi contribuer à éclaircir partiellement des questions sans doute trop vastes et trop peu précises *que nous nous posons cependant,* depuis le début de notre aventure collective :

- Quelles connaissances mathématiques précises un utilisateur peut-il obtenir au moyen des exercices qu'il résout dans Mep ?
- Qu'a-t-il acquis exactement quand il est gratifié par le système d'une note convenable dans un exercice ? Dans les exercices d'un chapitre ?
- Peut-on dire d'un élève qu'il maîtrise les mathématiques d'un niveau, lorsqu'il sait en faire l'essentiel des exercices ?
- Que dire d'un élève qui saurait, en début de Seconde, résoudre de façon satisfaisante *l'ensemble des exercices de révision* que son professeur aurait tiré de Mep pour tester ses champs de connaissance ?

Ces questions comportent en effet un sous-entendu qui appelle la comparaison avec d'autres apprentissages plus classiques. Elles aimeraient dissiper un doute, né d'une critique formulée à mi-mot : le travail avec Mep permet simplement d'apprendre à résoudre les exercices de Mep ! Nous avons l'intuition qu'un élève travaillant dans ce contexte apprend autant de mathématiques que dans un contexte plus classique. Mais sont-elles bien les mêmes ? Peut-il les faire vivre hors de cet environnement ? Questions lourdes, un peu inquiétantes, essentielles en tous cas pour l'enseignement des mathématiques (et pas pour elles seulement).

Les scénarios d'usage au cœur des recherches et des réflexions.

La conception, la scénarisation, la création de l'aide, la programmation, les tests pédagogiques de Mep auraient été tout simplement impossibles sans *un intense processus collaboratif à distance*, tant la tâche était écrasante. Ce travail collaboratif lié à la création de ressources a été complété, dès la mise en ligne publique du logiciel, par d'innombrables échanges entre enseignants concernant l'utilisation pédagogique de Mep. Ils signalaient telle difficulté technique rencontrée, tel point à améliorer, telle idée à compléter. Ces échanges ont permis d'améliorer sensiblement Mep dans le détail. Mais les utilisateurs ont rarement pris le temps d'échanger sur le fond des activités et de prendre du recul par rapport à la pratique quotidienne.

L'avènement de groupes structurés échangeant à un niveau plus profond et essayant de préciser des scénarios d'usage (Guin et Trouche 2004) des ressources de Mep marque une nouvelle étape et répond à un besoin fondamental. Le fait que cette réflexion s'impose simultanément (et indépendamment) parmi les chercheurs et dans le groupe des responsables de Mep au sein de Sesamath ne doit rien au hasard.

Voilà près d'un an que Sesamath travaille à la mise en place d'un nouveau site, *Sesaprof,* où des enseignants utilisateurs des ressources de Sesamath (dont Mep) pourront s'inscrire librement. Dans cet espace privé, des groupes de discussion pourront se développer autour de thèmes précis et ciblés. Les échanges de ces forums seront mémorisés. Leurs responsables en feront des synthèses. Les origines géographiques des participants étant connues (lors de l'inscription), des rencontres locales et régionales pourront être organisées pour prolonger et renforcer les échanges à distance.

Il nous semble que Sesaprof (ouvert le 1er juin 2008) peut devenir un outil de choix pour comprendre ce que font de Mep les milliers d'utilisateurs avec leurs élèves. À partir de ces pratiques, il peut être légitime et intéressant de chercher à dégager celles qui sont les plus pertinentes (en fonction du sujet traité) et de les formaliser. Issus de leurs débats, ces scénarios d'usage seront adoptés en toute liberté par nombre d'enseignants.

Au sein de Sesaprof, des listes de diffusion permettront de dégager les thèmes fédérateurs dont pourront s'emparer des communautés de pratique Mep : sans liaison directe avec le travail déjà réalisé en Bretagne (Gueudet 2007), Sesaprof initie dans son principe même une « constellation de communautés de pratique autour de Mep ». Nul doute que dès son lancement public, les chercheurs y trouveront, s'ils le souhaitent, un observatoire incomparable et un lieu où initier et mener des recherches qui leur tiennent à cœur. *Ils sont évidemment les bienvenus sur Sesaprof.*

En plus du site à venir, on peut dès maintenant signaler le livre d'or de Mep (ouvert en février 2008) où de nombreux utilisateurs s'expriment librement. On n'y trouve pas d'analyses approfondies, mais un ton et des relations d'expériences qui peuvent intéresser les praticiens et les chercheurs.

La version réseau de Mep : un outil subtil et … largement ignoré.

Une des questions souvent évoquée par les enseignants concerne la (très) difficile gestion de l'hétérogénéité des classes. Les chercheurs se sont souvent penchés sur cette question. Or, à notre grand étonnement, la version réseau de Mep, qui nous semble apporter des outils performants à cet égard, n'est pratiquement jamais évoquée dans ces publications. Mep est librement accessible à tous au moyen d'une simple liaison Internet. On ne demande ni identification, ni mot de passe, ni inscription. Cela convient parfaitement à l'utilisateur isolé.

Il en va différemment pour la version réseau, conçue *pour l'utilisation en classe*, sous la direction d'un enseignant. Les participants accèdent alors à leur « classe ou à leur « groupe virtuel » (à l'intérieur de la classe) au moyen d'un nom d'utilisateur (login) qui leur est propre et qui évite des intrusions indésirables dans des fichiers confidentiels (notes, statistiques etc.). L'enseignant prépare la séance en sélectionnant les thèmes du jour. Il peut affiner sa démarche pédagogique *en définissant des sous-groupes d'élèves* à qui des exercices personnalisés sont destinés (en soutien ou en remédiation par exemple, mais aussi pour proposer des compléments de travail aux plus rapides).

Grâce au réseau, il peut *suivre le travail de chaque élève en temps réel* (depuis son poste, il a accès à leur écran), recueillir son travail, consulter et traiter ses résultats. Le logiciel sait établir des statistiques de résultats et noter automatiquement un « devoir en environnement informatique ».

Rien n'empêche le professeur d'ouvrir le réseau *au travail des élèves à leur domicile*. Il peut préparer une liste d'exercices que les élèves connectés découvrent et traitent. Là encore il en recueille les résultats qui lui permettront de préparer des séances ultérieures finement ciblées.

Il nous semble que le travail avec la version réseau mériterait une recherche particulière, qui pourrait balayer les secteurs évoqués ci-dessus (pédagogie différenciée, place du professeur dans une séance avec plusieurs sous-groupes, séances à domicile, exploitation des résultats et des statistiques, etc.). Des utilisateurs chevronnés de la version réseau, en particulier en lycée professionnel, seraient heureux de dialoguer avec les chercheurs. Une piste de recherche importante, sans l'ombre d'un doute !

La géométrie et les outils virtuels de Mep

C'est en géométrie sans doute que Mep est le plus discuté : l'absence de libre rédaction rebute de nombreux collègues qui, de ce fait, passent à côté *des nombreux exercices de construction,* dont le succès nécessite au préalable un raisonnement clair et précis (rien ne les empêche d'ailleurs de le faire rédiger sur papier par les élèves). Car les concepteurs de Sesamath ont donné dans ce domaine libre cours à leur créativité. En témoignent Instrumenpoche[1] (instruments géométriques virtuels) et Tracenpoche[2] (logiciel de géométrie dynamique). Ces deux outils sont *des modules de Mep* dans lequel ils apportent mouvement et simulation.

Il nous semble urgent de créer des listes de diffusion autour des thèmes géométriques de Mep[3]. Cela permettra sans doute de voir naître des communautés de pratique qui pourront préciser des scénarios d'usage des exercices de géométrie. Ils pourront réfléchir en particulier aux liens entre les travaux avec Mep et ceux, indispensables en environnement papier-crayon.

Une attention plus particulière pourra être portée sur le rôle et la place de Tracenpoche et d'Instrumenpoche dans ces exercices. Facilitent-ils l'apprentissage géométrique des élèves (c'est l'avis majoritaire des utilisateurs souvent enthousiastes) ou au contraire le perturbent-ils en distrayant les élèves de l'essentiel (c'est un avis souvent exprimé) ?

Les thèmes géométriques sont sans doute plus difficiles à cerner que celui, souvent traité, de la proportionnalité par exemple. Ils mériteraient d'autant plus que des travaux de recherche leur soient consacrés afin d'établir si l'approche de ces domaines à l'aide de Mep est performant (en terme d'apprentissage des élèves) : des travaux comparatifs avec un enseignement classique seraient particulièrement utiles en l'occurrence.

Une réflexion et des études sur la meilleure utilisation possible de Tracenpoche et d'Instrumenpoche seraient souhaitables. Elles pourraient se concentrer sur des groupes d'exercices d'un niveau donné, sur l'ensemble d'un niveau et même sur le Collège tout entier.

Invitation à la création

Notre étions convaincus, quand nous avons mis Mep en chantier, que l'entreprise n'avait d'avenir que si elle couvrait rapidement un terrain très large, au moins une classe de Collège, l'ensemble du Collège dans l'idéal. C'était le prix (considérable) à payer pour qu'une base de données d'exercices parvienne au degré de notoriété suffisant pour être véritablement utilisée à une large échelle dans les classes. Il fallait aussi convaincre les autorités administratives ou pédagogiques, pas nécessairement persuadées au départ que des initiatives d'enseignants puissent conduire à un produit de qualité… L'expérience montre que nous avions raison : aujourd'hui, malgré de nombreuses ressources (partielles et fragmentaires) en ligne sur divers sites, Mathenpoche a une position dominante (hégémonique regrettent certains) dans les pratiques des enseignants. Et de nombreuses Académies l'ont mis en expérimentation officielle à partir de leurs serveurs.

Ce choix, vital pour exister dans une offre foisonnante et convaincre les autorités académiques, n'était pas sans inconvénients : la scénarisation des exercices s'est faite de façon assez fermée et à un rythme endiablé. Nous n'avions pas le temps d'une large concertation qui aurait enrichi notre démarche : si nous l'avions pris, *nous ne serions pas là aujourd'hui pour en parler !* Nous aurions quelques ressources excellentes sur un site à peine fréquenté.

[1] http://instrumenpoche.sesamath.net

[2] http://tracenpoche.sesamath.net

[3] Il s'agirait de réfléchir à toutes les questions propres à l'enseignement de la géométrie, au-delà de ce que peuvent y apporter Tracenpoche et Instrumenpoche, qui ont déjà chacun leur liste de diffusion.

Le temps de la création initiale est terminé. Mep est reconnu et installé durablement dans le paysage et devient un objet d'étude pour la recherche en didactique. *Nous avons donc maintenant le temps de repenser certains aspects ou secteurs*, par exemple le niveau de 6ème, qui fut réalisé en premier et qui nous semble pouvoir être amélioré. Voici à ce sujet un extrait de courrier significatif envoyé sur la liste de diffusion interne de Sesamath. Il renvoie à des aspects déjà abordés précédemment dans cette communication.

> « L'idée serait de travailler sur le chapitre des angles, pour trois raisons :
> 1) on a déjà une bonne base de départ dans le Mep 6ème actuel. D'après moi, c'est l'un des meilleurs chapitres du niveau 6e.
> 2) Un chapitre de géométrie permettra d'utiliser les superbes outils que sont Tracenpoche et Instrumenpoche.
> 3) Pour ce chapitre, on voit bien l'évolution du CM2 vers la 6ème. En CM2, on travaille davantage sur la grandeur et en 6ème, l'accent est mis sur la mesure. Plus que pour d'autres chapitres peut-être, il y a donc un vrai intérêt à regarder le contenu sur tout l'axe CM2/6ème. Je suis persuadé que c'est en créant des outils communs avec des passerelles qu'on améliorera la liaison CM2/6ème : ne laissons pas passer une telle opportunité.
> L'idée est aussi d'apporter une réponse aux détracteurs de Mep en leur montrant toute l'étendue de ce que l'on peut faire, et l'on peut faire beaucoup. À scénarisation différente, développement différent. Là aussi, nous devrons être sans doute plus coopératifs et ouverts (ce ne sera pas le même développeur qui fera tout le chapitre, chacun se déclarant sur les exercices qu'il préfère). On peut même imaginer faire voter les inscrits à « Sésaprof » pour voir quels exercices ils aimeraient voir développer en premier.
> Clairement, Sésaprof serait aussi le lieu privilégié pour les tests après développement : tout cela devra être réfléchi, organisé, pensé... mais pour cela, il faut d'abord la base d'exercices. Si certains sont intéressés à organiser ce chantier, on créera une liste pour trouver une façon efficace de travailler (en particulier, comment organiser le wiki...)... qu'ils m'envoient un courriel pour se signaler. Par la suite, quand tout sera en place, tous les membres de Sesamath inscrits à Sesaprof pourront participer au projet : ce sera une répétition avant l'ouverture plus large. »

On le voit, nous ne sommes plus dans un chantier urgent. Nous pensons que des didacticiens pourraient y participer, y apporter leurs connaissances, orienter la création, faire leur miel de ce processus créatif à large échelle.

Conclusion

Nos vœux et nos suggestions ont été discutés et reçus avec grand intérêt au cours du colloque, et traduites dans les mois qui suivirent dans un grand projet de recherche (3 ans) auprès de l'ANR, associant l'INRP, plusieurs Universités et Sesamath.

Soulignons l'intérêt des différents interlocuteurs lors du colloque pour des études comparatives à grande échelle : qu'apprennent *de différent* les élèves exposés à Mathenpoche durant toute la période du Collège ? Que gagnent-ils dans cette exposition ? Qu'y perdent-ils si on les compare aux élèves soumis à un enseignement plus traditionnel ? Relevons l'accord général au sujet de l'importance de ces thèmes, sur le fait qu'il faut les proposer dans des sujets de thèse et en réponse à des appels à recherche, processus qui s'est concrétisé quelques mois à peine après le colloque.

Nous suggérons que dans ces recherches à venir, de nouvelles ressources, issues des ingénieries didactiques, et créées en commun par les chercheurs et Sesamath, viennent enrichir Mathenpoche.

Les manuels Sesamath, qui bousculent l'édition scolaire dans les mathématiques du Collège, pourraient occuper une place centrale dans ces recherches. D'autant que l'ensemble des ressources numériques qu'ils contiennent seront disponibles pour l'enseignant et ses élèves (à côté de celles de Mathenpoche) dans le futur Labomep[4], qui remplacera prochainement Mep réseau. L'étude des synergies entre ces ressources et leur interaction avec les nombreux outils de Labomep nous paraissent capitales.

L'intense activité autour de la revue en ligne Mathematice[5], avec ses nouveaux auteurs d'articles[6], d'approche et de style parfois surprenants, pourrait elle aussi susciter réflexions, études et débats à propos de l'intégration des TIC dans le quotidien des classes. La revue pourrait aussi accueillir des articles issus de la recherche en didactique à propos des technologies.

Dans un tout autre domaine, les nouvelles façons d'apprendre *ensemble, de façon conviviale et choisie,* des math*é*matiques universitaires sur les forums de *les-mathematiques.net*[7] (un autre site de Sesamath) pourraient sans aucun doute constituer un bon sujet de thèse.

En abordant *de front et globalement* de très gros objets comme Mep, les nouvelles pratiques induites par les manuels en ligne, ou les nouvelles façons d'apprendre en commun sur les-mathematiques.net, les recherches en didactique vont changer d'échelle.

N'a-t-on pas, en Histoire, changé de regard, de perspective et d'ampleur quand Lucien Febvre et Marc Bloch ont fondé l'École des Annales ? Aurait-on imaginé avant eux une histoire de « la peur en Occident », une « histoire du Paradis » en 3 volumes, celle de la Méditerranée et le monde méditerranéen à l'époque de Philippe II, ou encore celle de « Séville et l'Atlantique » ?

Gérard Kuntz
Comité scientifique des IREM
gkuntz@sesamath.net)

Benjamin Clerc
Professeur du secondaire
benjamin.clerc@sesamath.net

Sébastien Hache
Sesamath,
sebastien.hache@sesamath.net

Références

Artigue M. (2007). La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques. *Colloquium de didactique des mathématiques.* Paris. http://www.ardm.asso.fr/rencontre/semin/s200710/Colloquium-Artigue.pdf

Cazes C., Gueudet G., Hersant M., Vandebrouck F. (2004). Using Web-based learning environment in teaching and learning advanced mathematics, *ICME 10,* Copenhagen, July 4-11, 2004

Dubois M.-C., Gueudet G., Julo J., Le Bihan C., Loric F. (2008). Quels échanges pour quels usages de MathEnPoche ? Article en ligne sur *MathemaTICE* : http://revue.sesamath.net/spip.php?article149

Gueudet G. (2007). Emploi de Mathenpoche et apprentissage : l'exemple de la proportionnalité en Sixième. *Repères-IREM,* 66, 5-25.

Guin D., Trouche L. (2004). Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques. *Repères-Irem,* 55, 81-100.

[4] Voir Sesablog en date du 15.02.2009.
[5] Près de 18000 connections mensuelles, en croissance régulière.
[6] Voir Sesablog/catégorie/MathemaTICE
[7] MathemaTICE n° 8, janvier 2008.

Hersant M. & Vandebrouck F. (2006). Bases d'exercices de mathématiques en ligne et phénomènes d'enseignement-apprentissage. *Repères-Irem,* 62, 71-84.

Kuntz G. (2004). Mathenpoche : de la percée institutionnelle vers un espace numérique de travail. *Bulletin de l'APMEP,* 452, 418-431.

Ruthven K., Hennessy S. (2002). A practitionner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning, *Educational Studies in Mathematics,* 49(1), 47-88.

Sitographie

Calcul@tice : http://netia59a.ac-lille.fr/calculatice

École des Annales : http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89cole_des_Annales

Instrumenpoche : http://instrumenpoche.sesamath.net

Les-mathematiques.net : http://www.les-mathematiques.net/

Livre d'or de Mathenpoche : http://mathenpoche.sesamath.net/index.php?page=800

Manuels de Sesamath : http://manuel.sesamath.net

Mathematice : http://revue.sesamath.net

Mathenpoche : http://mathenpoche.sesamath.net

Mathenpoche réseau : http://mathenpoche.sesamath.net/index.php?page=300

Sesamath : http://www.sesamath.net

Tracenpoche : http://tracenpoche.sesamath.net

Wims : http://wims.unice.fr/wims

Technologies numériques et enseignement des mathématiques : où en est-on ?

Paul Drijvers, Jean-Baptiste Lagrange, Maria Alessandra Mariotti, Kenneth Ruthven (intervenants), Michèle Artigue (modératrice)

Introduction (M. Artigue)

Chacun sait que l'enseignement des mathématiques rencontre des difficultés certaines à tirer profit des technologies numériques. Où en est-on aujourd'hui ? Sur quelles avancées de la recherche didactique, sur quelles actions réussies, sur quelles avancées technologiques peut-on s'appuyer pour progresser vers une situation plus satisfaisante ? Quelles priorités faut-il donner à la recherche, au développement, à la formation ? Comment concevoir les relations entre recherche et pratique pour les rendre plus productives ?

C'est à ces questions qu'a été consacrée la table ronde dédiée au thème « technologies numériques et enseignement des mathématiques », lors du colloque. Quatre chercheurs, internationalement connus pour leur contribution à ce domaine ont d'abord apporté leur contribution : Paul Drijvers, professeur au Freudenthal Institute à Utrecht, Jean-Baptiste Lagrange, professeur à l'IUFM de Reims, Maria Alessandra Mariotti, professeure à l'Université de Sienne et Kenneth Ruthven, professeur à l'Université de Cambridge. La parole a ensuite été donnée à la salle. La table ronde a été modérée par Michèle Artigue, professeure à l'Université Paris Diderot – Paris 7.

Dans ce texte, nous présentons d'abord les contributions des quatre experts invités, dans l'ordre où ils ont pris la parole, puis Michèle Artigue résume la discussion qui a suivi les présentations. Comme cela a été le cas dans la table ronde, les contributions des experts se veulent complémentaires et chacune est plus particulièrement centrée sur l'une des questions posées.

Le premier intervenant a été Kenneth Ruthven. S'appuyant sur des enquêtes et des bases de données internationales, il a mis en évidence l'impact limité des technologies numériques sur les pratiques effectives dans l'enseignement mais aussi dans la recherche ; puis, s'appuyant sur une expérience vécue personnellement, il a montré aussi comment les rapports entre enseignement et recherche sont dépendants du contexte culturel et politique.

L'impact des technologies numériques sur les pratiques effectives (K. Ruthven)

Depuis longtemps, j'attends que les outils mathématiques apportés par la technologie numérique deviennent quotidiens en classe. Comme jeune professeur vers la fin des années 1970, j'ai vécu l'arrivée de la calculatrice portable. Dès 1980, je circulais entre les diverses salles où je donnais mes cours avec, dans une main, mon cartable contenant un micro-ordinateur Sinclair et dans l'autre, une vieille télévision monochrome. Dès 1987, je pouvais équiper chaque élève d'une calculatrice graphique programmable beaucoup plus puissante. À cette époque, j'imaginais que ce rythme d'évolution allait se maintenir et se diffuser. Comme j'avais tort !

Ma première proposition sera que l'impact de la technologie sur les pratiques effectives des enseignants est limité. Ensuite, la justice m'oblige à avancer la proposition que l'impact de la technologie sur les idées effectives des chercheurs est encore plus limité. Et finalement,

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 185-207.

pour mettre ces propositions en perspective, je suggèrerai que l'influence de la recherche sur les pratiques effectives est fortement médiée par le climat idéologique et politique.

L'impact de la technologie sur les pratiques effectives des enseignants est limité

L'étude TIMSS de 2003 (la plus récente à la date de ce colloque) montre que l'usage des technologies numériques est rarement quotidien dans les classes ordinaires (Mullis, Martin, Gonzalez & Chrostowski, 2004). Prenons le critère particulier de TIMSS comme un indice de la pénétration d'un système éducatif par un usage technologique, à savoir : le pourcentage d'élèves dont l'enseignant a déclaré cet usage effectif dans à peu près la moitié des cours ou plus. Pour simplifier, on parlera de la proportion de classes dans un système (qui doit approcher la proportion d'élèves) où cet usage est majoritairement présent. Il y a 24 systèmes éducatifs pour lesquels ces données sont disponibles aux niveaux du primaire (Grade 4) et du secondaire (Grade 8). Pour comparer l'implantation des usages, les quartiles de ces distributions (à travers les systèmes) serviront de résumé.

La Figure 1 témoigne du faible pourcentage de classes où l'ordinateur est majoritairement présent pour « découvrir les principes et les concepts » (Mullis et *al.,* 2004, pp. 294-295) : pour le quartile supérieur, cette proportion n'atteint que 2% des classes, dans le primaire comme dans le secondaire. La Figure 2 montre que la situation n'est guère meilleure pour ce qui concerne l'usage de l'ordinateur pour 'perfectionner les compétences et les procédures' (Mullis et *al*., 2004, pp. 294-295) ; pour le quartile supérieur, la proportion de classes n'atteint que 5% dans le primaire et 3% dans le secondaire.

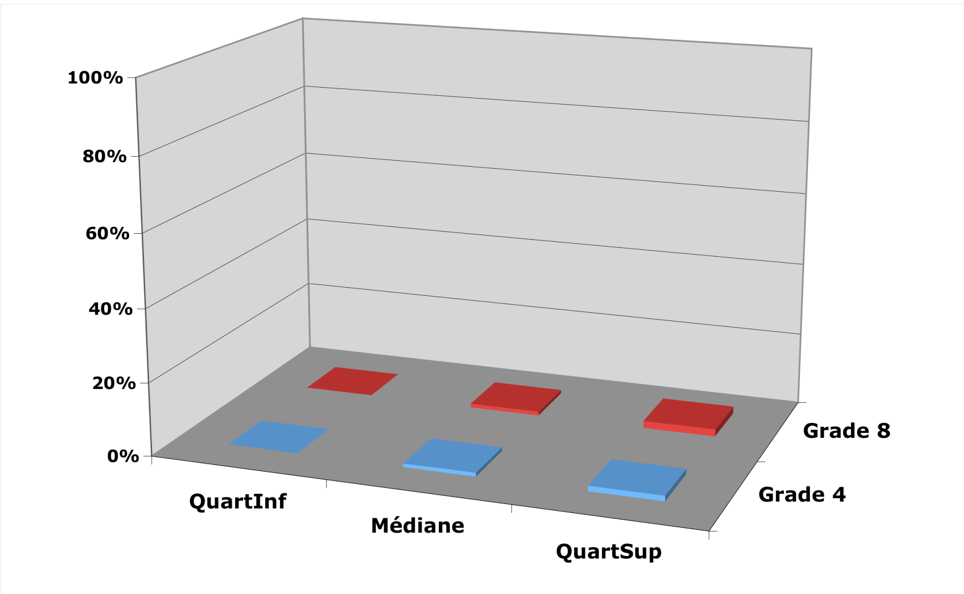


Figure 1 - Pénétration de l'ordinateur pour découvrir les principes et les concepts
Quartiles des distributions de systèmes en primaire (Grade 4) et en secondaire (Grade 8) : pourcentage d'élèves dont le professeur déclare un tel usage dans la majorité des cours

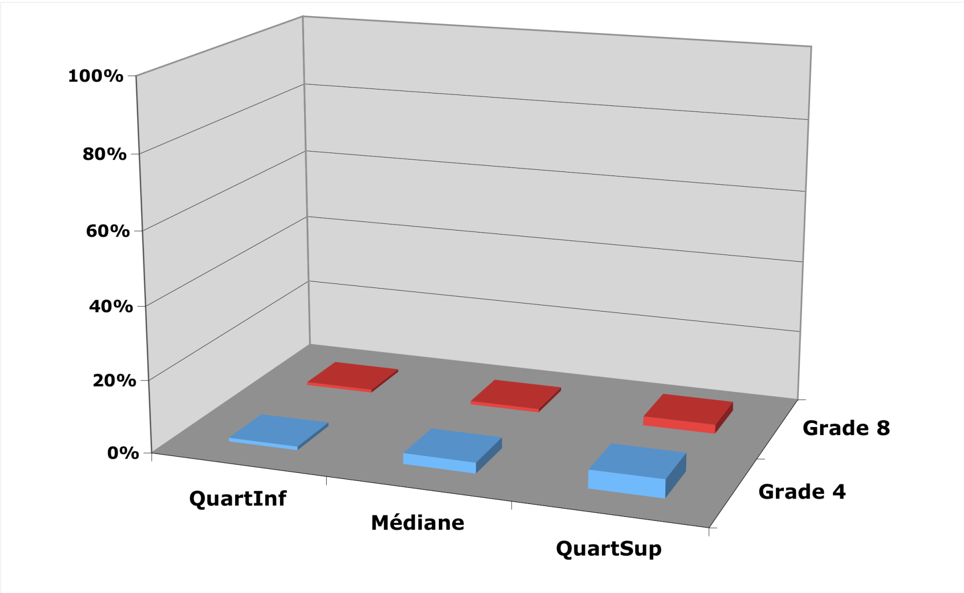


Figure 2 - Pénétration de l'ordinateur pour perfectionner les compétences et les procédures
Quartiles des distributions de systèmes en primaire (Grade 4) et en secondaire (Grade 8) :
pourcentage d'élèves dont le professeur déclare un tel usage dans la majorité des cours

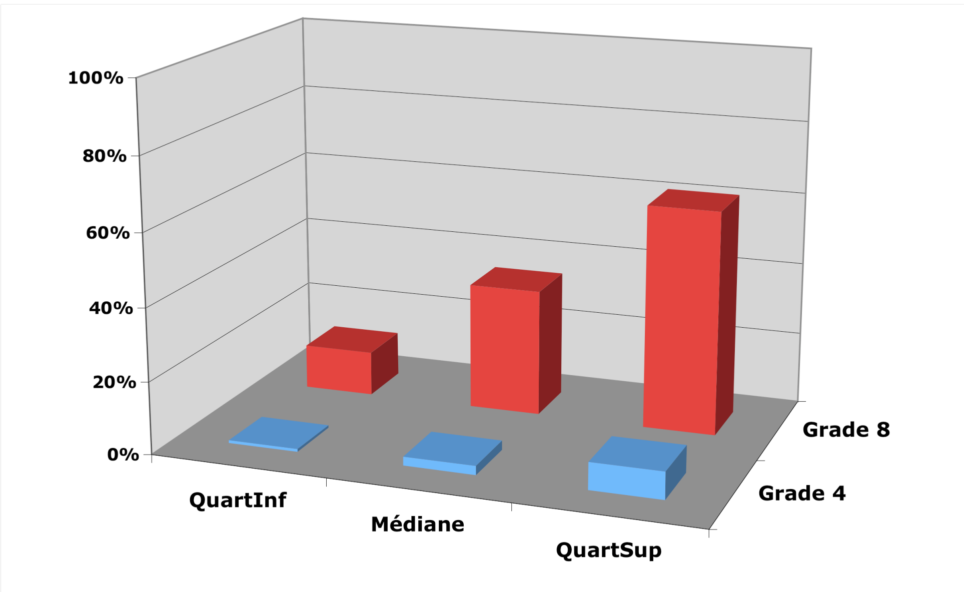


Figure 3 - Pénétration de la calculatrice pour résoudre les problèmes complexes
Quartiles des distributions des systèmes en primaire (Grade 4) et en secondaire (Grade 8) :
pourcentage d'élèves dont le professeur déclare un tel usage dans la majorité des cours

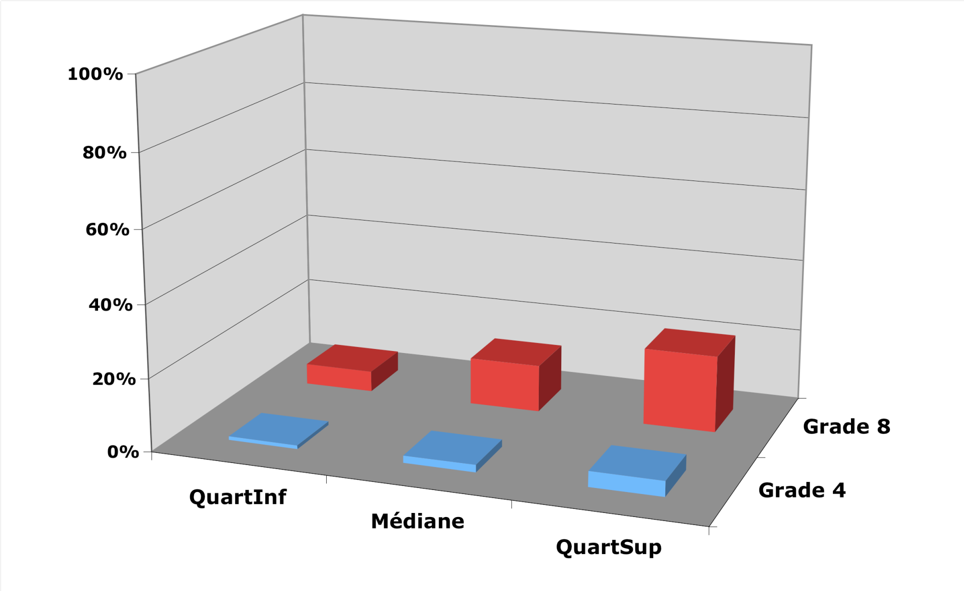


Figure 4 - Pénétration de la calculatrice pour explorer les concepts arithmétiques
Quartiles des distributions des systèmes en primaire (Grade 4) et en secondaire (Grade 8) :
pourcentage d'élèves dont le professeur déclare cet usage dans la majorité des cours

Par contre, pour la calculatrice, l'étude TIMSS montre que la situation est très variée dans les 24 systèmes, et entre les deux niveaux. Considérons l'usage de la calculatrice pour résoudre les problèmes complexes (Mullis et *al*., 2004, pp. 292-293). La Figure 3 montre que, pour le quartile supérieur de la distribution secondaire, la proportion de classes où cet usage est majoritairement présent est assez forte : 62%, tandis qu'au quartile inférieur, cette proportion est relativement faible : 12%. Par contre, le quartile supérieur de la distribution primaire n'atteint qu'une proportion de 8%. La Figure 4 montre que l'usage de la calculatrice pour explorer les concepts arithmétiques est plus rare (Mullis et *al*., 2004, pp. 292-293) : le quartile supérieur n'est qu'à 21% pour la distribution au niveau du secondaire et à 4% pour le primaire.

On voit que ces usages de la calculatrice sont nettement plus courants que les usages de l'ordinateur, particulièrement dans le secondaire. Au primaire, le développement chez les élèves des compétences de calcul mental et écrit reste très central dans le programme d'études en mathématiques. La proportion de classes où « l'utilisation d'une calculatrice n'est pas permise » est de 68% à la médiane de la distribution primaire, mais seulement de 12% à la médiane de la distribution secondaire (Mullis et *al.,* 2004, pp. 292-293). Il y a quand même certains systèmes où la calculatrice est bien acceptée dans le primaire : par exemple, sa prohibition au Grade 4 n'est que de 1% en Angleterre ; mais, comme on le verra, c'est un cas un peu spécial.

L'impact de la technologie sur les idées effectives des chercheurs est encore plus limité

Si l'usage de la calculatrice pour explorer les concepts arithmétiques est moins courant que son usage pour résoudre les problèmes complexes, cela suggère un manque de savoir professionnel à cet égard. On s'attendrait à ce que les chercheurs s'attaquent à cette question, et plus généralement à développer la compréhension scientifique des usages de la calculatrice dans l'enseignement des mathématiques. Lorsque la calculatrice était considérée à l'avant-garde de l'innovation didactique, il y a eu une vague d'études, y compris des évaluations expérimentales rassemblées dans la méta-analyse de Hembree & Dessart (1986).

Mais qu'est-il advenu par la suite ? Y voyant un bon test de l'impact à long terme de la technologie sur la recherche, et de l'accumulation de savoir scientifique capable de répondre aux questions professionnelles, j'ai fait une analyse des résumés d'articles de revues (surtout anglophones) dans la grande base de données ERIC. Pour les deux décennies les plus récentes (1988-2007), j'ai cherché les articles sur l'arithmétique (spécifiquement « arithmetic OR number concepts OR calculation OR computation » comme descripteur), à l'école primaire (spécifiquement « elementary AND (school OR education OR mathematics) » comme descripteurs). Ensuite, j'ai identifié ceux qui faisaient mention de la calculatrice (spécifiquement « calculator* » comme descripteur, ou dans le titre, le sommaire, les mots clés). Finalement, j'ai comparé les résultats selon le classement des documents par ERIC comme articles de recherche ou non.

- Nombre d'articles classés comme recherche	487
Dont nombre faisant référence aux calculatrices (proportion)	10 (2%)
- Nombre d'articles non classés comme recherche	771
Dont nombre faisant référence aux calculatrices (proportion)	77 (10%)

Tableau 1 - Articles (ERIC) sur l'arithmétique ou le calcul à l'école élémentaire, 1988-2007

Les résultats présentés dans le Tableau 1 montrent un écart important entre les articles classés comme recherche (issus surtout des revues de recherche), dont 2% font référence aux calculatrices, et les autres articles (issus surtout des revues professionnelles), dont 10% y font référence. On doit en déduire que l'impact des calculatrices sur la recherche concernant l'arithmétique ou le calcul à l'école élémentaire est très faible par rapport à son impact sur le discours sur ce sujet dans les revues professionnelles. Il se trouve que je suis l'auteur de trois des dix articles de recherche reconnus par ERIC mentionnés dans le tableau 1. J'ai donc une expérience personnelle de l'interaction entre la recherche et l'évolution des usages de la calculatrice, et de la politique éducative qui peut intervenir pour empêcher cette interaction.

En Angleterre, pendant les années 1980, l'enseignement de l'arithmétique dans les études primaires a été renouvelé dans un projet officiel de recherche-action visant à créer un « *calculator aware number (CAN) curriculum* » (Shuard et *al.,* 1991). Cette approche était « consciente de » ou « sensibilisée à » la calculatrice dans plusieurs sens. Elle exploitait la calculatrice pour stimuler l'exploration des propriétés arithmétiques par les élèves et pour la soutenir. Elle encourageait les élèves à comparer leurs stratégies de calcul mental et à les raffiner. Ces deux aspects étaient considérés comme des moyens importants pour développer les concepts arithmétiques. L'évaluation officielle de ce projet a été très favorable, et, à la fin des années 1980, pour la première fois, l'introduction d'un programme national d'études a été influencée par ce modèle. En particulier, le programme a proposé que les calculatrices soient disponibles pour les élèves tout au long des études primaires. En même temps il a reconnu que certaines compétences devenaient particulièrement importantes pour un usage efficace des calculatrices, et il a cherché à les expliciter ; par exemple, interpréter les résultats non entiers de la division par la calculatrice, développer des stratégies d'essai et amélioration. En 1989, au moment où le nouveau programme a été lancé, on pouvait donc revendiquer une influence importante de la recherche sur les projets curriculaires et pédagogiques.

L'influence de la recherche sur les pratiques effectives est fortement médiée par le climat idéologique et politique

Mais la place de la calculatrice dans les programmes était contestée, et, en général, les enseignants avaient reçu peu de formation sur les usages recommandés dans les conseils pédagogiques qui accompagnaient le nouveau programme. Au cours des années 1990, la place

de la calculatrice dans le programme et dans les évaluations nationales des élèves est devenue très controversée. En particulier, un rapport des principales sociétés de mathématiciens et de statisticiens a posé la question de « l'influence à long terme des usages *typiques* des calculatrices dans les écoles sur la pensée et le comportement mathématique des élèves » (London Mathematical Society, Royal Statistical Society, Institute of Mathematics and its Applications, 1995, p. 14). Dans le même temps, les rapports des inspecteurs notaient que l'utilisation des calculatrices restait rare dans les écoles.
C'est dans ce contexte que j'ai conduit une recherche qui a comparé les acquis, les comportements, et les attitudes de cohortes d'élèves entrés dans deux groupes de trois écoles au début de la mise en œuvre du nouveau programme : un trio d'écoles qui avaient participé précédemment au projet CAN, et un trio d'écoles – soigneusement assorti pour être bien semblable – qui pratiquaient un enseignement arithmétique centré sur le calcul écrit, avec une utilisation très limitée des calculatrices. Les résultats de cette recherche ont établi que, à la fin des études primaires, il n'y avait pas de différence entre les deux trios que ce soit en termes de mesure générale des acquis mathématiques des élèves, ou en termes de mesure plus spécialisée des concepts arithmétiques (Ruthven, Rousham & Chaplin, 1997). Mais il y avait des différences considérables dans les compétences, les comportements, et les attitudes des élèves face au calcul mental, du fait du contraste important entre les pratiques d'enseignement. Dans les écoles qui suivaient l'approche CAN, les élèves étaient, dans l'ensemble, plus positifs envers le calcul mental, et ils étaient plus susceptibles non seulement de s'en servir mais d'adopter les stratégies plus sophistiquées et plus efficaces (Ruthven, 1998). Pour résoudre les problèmes plus complexes, également, l'utilisation de la calculatrice soutenait les stratégies relativement sophistiquées et efficaces (Ruthven & Chaplin, 1997).

En juillet 1998, un comité consultatif expert, chargé par le gouvernement de proposer un plan d'amélioration de l'enseignement mathématique à l'école primaire, soumit son rapport. À l'encontre de ses recommandations, le ministre perçut un intérêt politique à annoncer une interdiction totale de la calculatrice avant les (deux) dernières années du primaire. Il le fit au nom d'un 'bon sens' qu'il considérait supérieur à toute recherche scientifique et conseil professionnel (BBC News, 1998). Vue la rhétorique politique populiste contre l'usage des calculatrices, la plupart des enseignants comprirent qu'il valait mieux manifester une certaine méfiance vis-à-vis de ces machines.

Cet appel au « sens commun » nous montre l'influence des représentations sociales dans la réception de la recherche par le monde politique et professionnel. On doit interpréter l'impact des recherches didactiques sur les pratiques effectives en fonction de la continuité de leurs cadres conceptuels. Les analyses didactiques, en général, et celles spécifiques à l'utilisation des technologies numériques, postulent des cadres conceptuels souvent en conflit avec les idées populaires. Par exemple, la publicité pour les nouvelles aides pédagogiques réclame typiquement un enseignement plus rapide et plus efficace, qui reflète le 'sens commun' que les technologies numériques servent à faciliter et à améliorer. Mais ce même 'sens commun' nourrit aussi une forte réserve sur les nouveaux outils mathématiques dans les mains des élèves, provoquée par la crainte que leur usage entraîne un appauvrissement intellectuel. Par contre, les recherches didactiques ont tendance à mettre en question ces idées populaires, même à les inverser.

Après cette contribution de Ken Ruthven, Paul Drijvers a repris la question de l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement, en s'interrogeant sur les raisons d'être de ces limitations. Il a mis l'accent sur deux causes particulièrement importantes selon lui : la sous-estimation de la complexité des questions d'intégration technologique d'une part, le caractère relativement isolé des recherches sur la technologie dans le champ didactique et éducatif d'autre part, et souligné aussi les prises de conscience et avancées récentes dans ce domaine. Sa contribution fait l'objet de la partie suivante.

Une intégration complexe (P. Drijvers)

Une des conclusions de la section précédente est que l'impact de la technologie sur les pratiques effectives des enseignants comme sur les idées effectives des chercheurs est toujours limité. Lagrange (2000), pour le cas de l'intégration des calculatrices graphiques dans l'enseignement secondaire, souligne que l'actualisation des potentialités de ces « instruments » est problématique :

> « La banalisation des calculatrices graphiques dans l'enseignement secondaire des mathématiques est une réalité depuis plusieurs années. Ce phénomène a été préparé par les discours insistant sur les apports de la 'visualisation' aux conceptualisations mathématiques. En contrepoint à ces discours, des recherches didactiques, notamment françaises (Guin et Trouche, 1999), ont montré que l'actualisation des potentialités de ces 'instruments' est problématique, en insistant sur l'interdépendance des processus 'd'instrumentation' et de conceptualisation. » (Lagrange, 2000, p. 1-2)

Quelles sont alors les causes de cette intégration problématique et de cet impact limité ? Dans cette contribution, j'aborderai cette question du point de vue de la recherche et je proposerai de considérer deux causes. La première est la sous-estimation de la complexité du défi de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques ; la seconde est le manque d'intégration des recherches sur l'utilisation des nouvelles technologies dans la tradition de recherche en didactique des mathématiques en général, et d'intégration de ces recherches aux cadres théoriques existants. Ces deux propositions seront accompagnées d'exemples, issus de mes pratiques de recherche. Je terminerai par une description de futures directions de recherche possibles.

La sous-estimation de la complexité de l'intégration des nouvelles technologies

Rétrospectivement, on peut constater qu'on a sous-estimé la complexité de l'intégration des nouvelles technologies. Portée sans doute par l'optimisme, accompagnée peut-être d'une dose d'idéalisme ou de naïveté, la conviction que les nouvelles technologies pouvaient ouvrir des horizons plus larges à l'enseignement des mathématiques était là dans les années 70 et 80. C'est du fait des expérimentations et de leurs résultats parfois décevants, et du fait des réflexions théoriques qui les ont suivies, qu'on a réussi à découvrir la relation complexe entre technique mobilisant un outil technologique et notion conceptuelle sous-jacente (voir par exemple Artigue, 1997). Et c'est surtout le développement des approches instrumentales, centrées sur la notion de genèse instrumentale, qui a rendu justice à cette complexité et qui a fait avancer la compréhension des processus d'apprentissage avec les TICE.

Considérons par exemple la commande SOLVE dans un environnement digital de calcul formel. À première vue, rien ne semble plus simple : on entre une équation, on presse le bouton approprié et voila ! Ma recherche, au contraire, a clairement montré comment des obstacles conceptuels peuvent compliquer l'application de la technique SOLVE. La figure 5, issue de Drijvers & Trouche (2008), montre une représentation graphique type « *mind map* » pour illustrer les relations entre technique et notions conceptuelles.

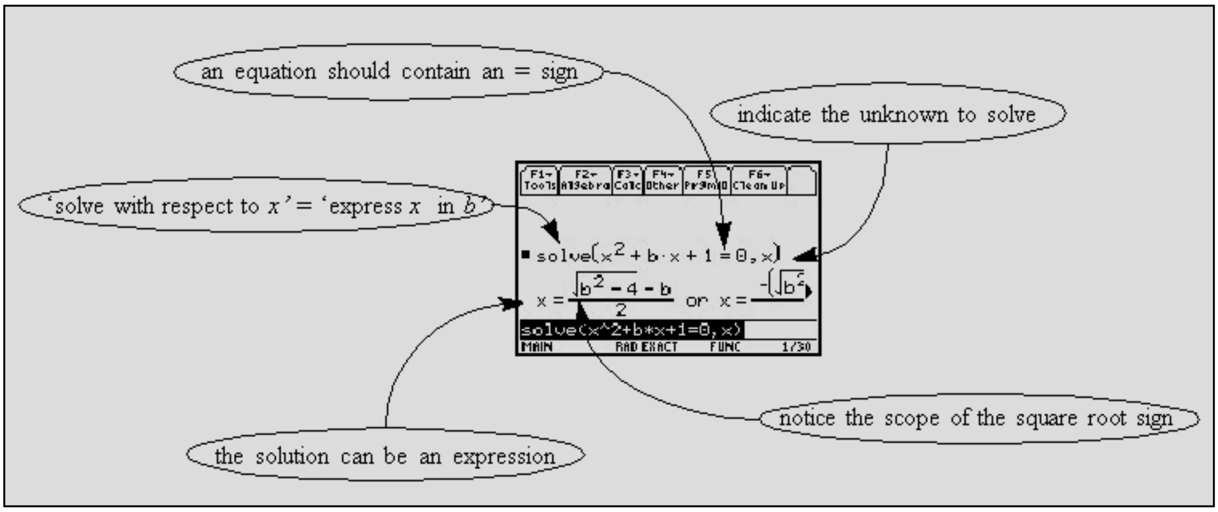


Figure 5 - Technique et notions conceptuelles : le cas de SOLVE

La figure 6, qui montre un deuxième exemple d'une telle sorte de représentation, est issue d'une étude sur la notion de fonction mathématique. Les élèves, âges de 14 ans, utilisent une application Java pour construire des chaînes d'opérations (Drijvers, Doorman, Boon, Van Gisbergen & Gravemeijer, 2007).

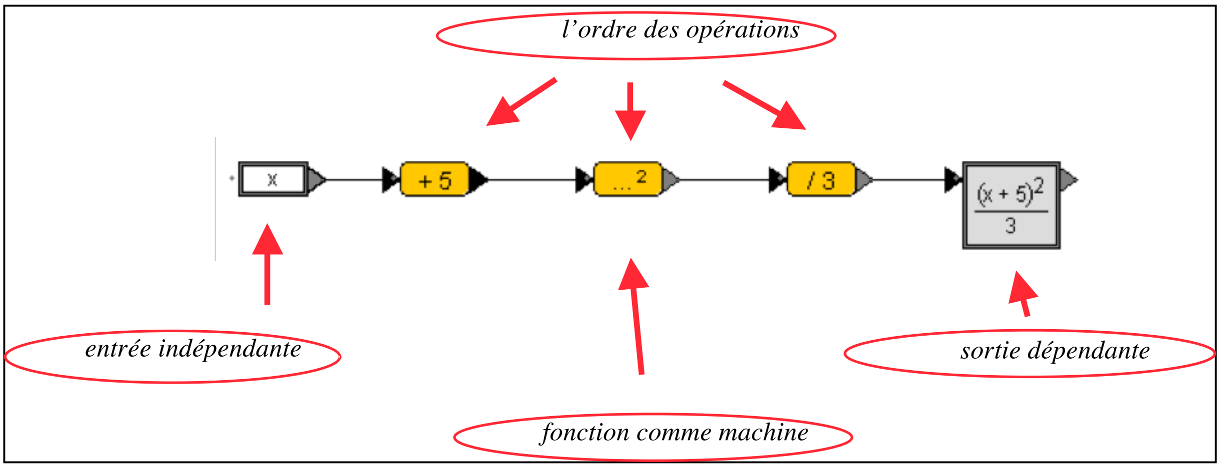


Figure 6 - Technique et notions conceptuelles : le cas des chaînes d'opérations

Une avancée de la recherche, en résumé, est qu'après des années d'ignorance on est de plus en plus capable de rendre justice à la relation entre technique et développement conceptuel dans nos recherches sur l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques ; en bref à considérer la question dans toute sa complexité.

Le manque d'intégration avec la recherche et les théories 'traditionnelles'

Peut-être parce que la plupart des membres de la communauté de didactique des mathématiques n'étaient pas parmi les premiers à adopter les nouvelles technologies, la recherche dans ce domaine s'est développée initialement un peu de façon isolée. Les chercheurs qui débutaient dans les études sur et les expérimentations avec les TICE ne se situaient pas tous dans une tradition de recherche en didactique des mathématiques ou en sciences de l'éducation. Actuellement, la technologie devient moins 'spéciale' et le besoin de rétablir les liens avec les méthodes, les résultats et les théories de la recherche en didactique des mathématiques et de la recherche en sciences de l'éducation, est davantage ressenti. Pourtant, il reste du chemin à faire. Pour illustrer ce rapprochement nécessaire, je reviens sur l'exemple indiqué dans la figure 6. Concernant la notion de fonction, il existe déjà beaucoup de résultats de recherche en didactique des mathématiques qui peuvent servir ! Prenons par exemple la notion de *réification* comme elle est décrite dans (Sfard, 1991). Dans cet article, Sfard explique qu'au cours de la genèse d'une conception nouvelle c'est souvent l'aspect processus qui domine. Au début, les élèves ont tendance à calculer, à exécuter une procédure, à apprendre l'algorithme correspondant, à agir et à produire. Dans un deuxième temps, l'aspect objet mathématique doit émerger : il s'agit d'un objet mathématique avec lequel on peut raisonner, qui fait partie d'un réseau d'autres objets, qui a certaines caractéristiques et qui est membre d'une classe d'objets. Ces « deux faces de la même pièce de monnaie » doivent s'intégrer dans une seule conception. La *réification* est alors l'objectivation du processus.

Parce que les « deux faces de la pièce » (face processus et face objet mathématique) sont très présentes dans le travail mathématique dans un environnement technologique, et parce que les TICE peuvent faciliter la transition processus – objet, même si cela demande une gestion subtile, cela nous semble une perspective théorique intéressante pour notre recherche. Ainsi, suite à la figure 6, la figure 7 montre d'autres techniques utilisables dans notre environnement technologique qui facilitent la transition vers une conception de fonction comme objet mathématique avec plusieurs représentations possibles (Drijvers et *al.*, 2007). C'est un ensemble de cas où les résultats de la recherche en didactique des mathématiques ont été un guide ; ils peuvent guider plus généralement l'étude de l'intégration des TICE.

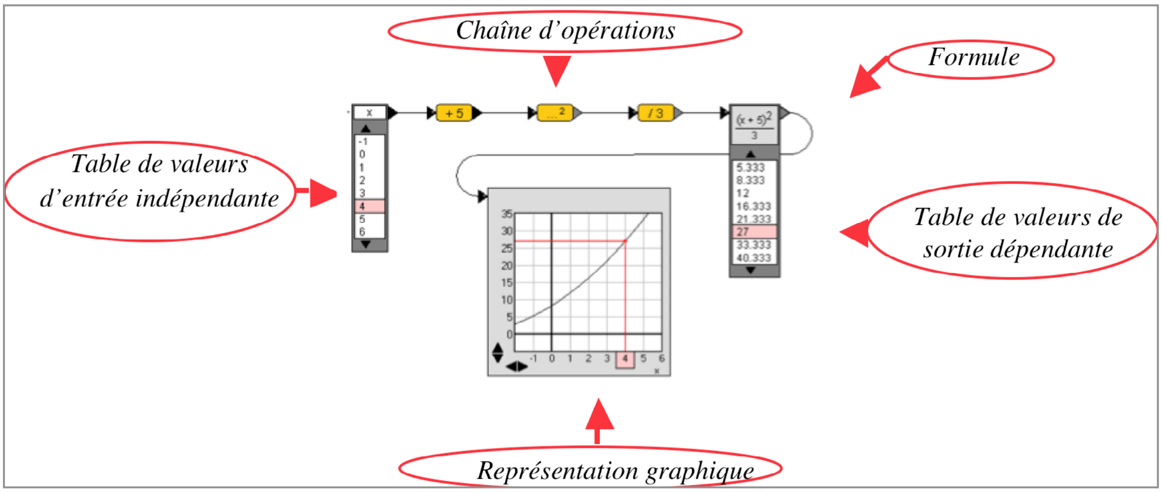


Figure 7 - Technique et notions conceptuelles : la fonction comme objet mathématique

Un essai d'intégration des différentes perspectives théoriques est entrepris dans le projet ReMath. Dans ce projet, un cadre théorique intégratif a été développé (Artigue, 2006). Ce cadre s'appuie sur la notion de fonctionnalité didactique des TICE, structurée autour de trois dimensions : les caractéristiques de l'outil, les liens entre buts pédagogiques et potentialités de l'outil correspondantes, et les modalités d'usage. Pour les caractéristiques de l'outil, six sous-dimensions sont associées qui sont représentées sous forme de « toile d'araignée ». La figure 8 montre comment l'on pourrait positionner l'exemple donné dans la figure 5 dans cette toile.

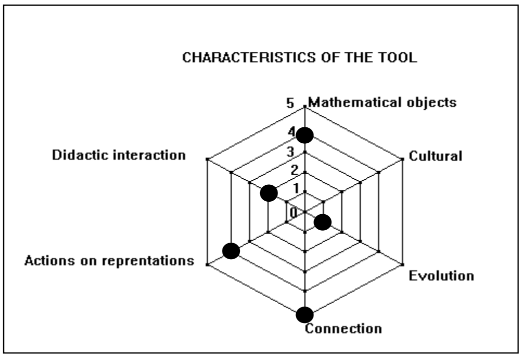


Figure 8 - Toile des caractéristiques appliquée à l'exemple de la figure 5
(d'après Drijvers, Kieran & Mariotti, à paraître)

En résumé, on peut dire que la communauté de recherche sur l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques se rend de plus en plus compte de l'intérêt d'une articulation avec les méthodes, les résultats et les théories de la recherche en didactique des mathématiques en général et de la recherche en sciences de l'éducation. Ceci dit, cette quête est à poursuivre, ce qui nous mène aux futures directions de recherche.

Futures directions de recherche

Afin de faire avancer l'impact de la technologie sur les pratiques effectives des enseignants comme sur les idées effectives des chercheurs, quelles sont les directions de recherche à suivre ? Dans l'étude ICMI sur les nouvelles technologies, le mot « connectivité » est utilisé comme mot clé pour indiquer le besoin d'établir des liens entre différentes sciences, différentes approches théoriques, différents outils et différents genres d'application :

> « While discussing future trends, the authors observe theoretical advancements; still, the articulation of different theoretical frameworks is not realized. Also, some aspects remain underexposed, such as the role of language in instrumental genesis, the role of the teacher in technology-rich learning environments, and the influence of the available tools on tasks and task design. Connectivity, both among technologies and among theoretical frameworks, might be a key focus for future studies. » (Drijvers, Mariotti, Olive & Sacristan, à paraître)

Alors, quel agenda envisager ? Les défis auxquels la recherche sur les TICE dans l'enseignement des mathématiques doit faire face sont, selon moi, les suivants :
- établir des liens avec la recherche en éducation en général ;
- exploiter les connexions avec d'autres cadres théoriques ;
- obtenir des résultats sur la réalisation effective dans la classe de mathématiques ;
- faciliter l'intégration des TICE dans la pratique des enseignants.

Embrayant directement sur cette analyse des besoins de recherche, Maria Alessandra Mariotti a ensuite proposé de cerner les avancées les plus importantes de la recherche au cours des quinze dernières années, en s'appuyant notamment sur l'étude en cours de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (ICMI) consacrée à ce domaine (Étude 17). Sa contribution fait l'objet de la partie suivante.

Les avancées importantes de la recherche dans ce domaine dans les 15 dernières années (M.A. Mariotti)

Changement d'intérêt dans les recherches sur le TICE

En 1985, à Strasbourg, avait lieu la première étude ICMI sur le thème de l'utilisation des technologies dans l'enseignement des mathématiques intitulée « *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching at University and Senior High School Level* » (Howson et Kahane, 1986).

Comme l'a souligné Artigue dans sa conférence de clôture à la conférence d'Hanoi, associée à la seconde étude ICMI sur ce thème, si on compare les travaux présentés dans les deux études, on ne peut pas ne pas remarquer des différences fortes, tant au niveau des questions étudiées qu'à celui des méthodologies de recherche utilisées. Les contributions publiées dans les Actes de la première étude ICMI étaient centrées sur la mise en évidence des capacités des nouvelles technologies, et on en décrivait les potentialités didactiques avec un optimisme qui, aujourd'hui, peut nous paraître aussi naïf qu'immotivé mais qui, à cette époque, constituait le moteur d'un grand nombre d'études. Dans les vingt années qui nous séparent de cette première conférence, beaucoup des choses ont certainement changé : l'optimisme initial n'a pas été soutenu par des évidences ; au contraire, dans les différents pays, un grand nombre d'études ont été développées qui montrent la complexité des problèmes didactiques soulevés par l'utilisation des technologies dans la salle de classe. Dans le même temps, les technologies elles-mêmes ont beaucoup évolué : il suffit de penser à la richesse des « micromondes » qui sont apparus ces dernières années, ainsi que les cadres théoriques sur lesquels la recherche didactique s'appuie. En bref, la recherche didactique dans ce domaine a bien évolué et le débat autour de l'usage des technologies dans les écoles est très vivant. Les journaux de didactique de mathématiques publient un grand nombre d'articles sur le thème des technologies, de nouveaux journaux ont été créés qui sont centrés sur cette problématique et les contributions sur ce thème aux conférences internationales sont nombreuses. Tout ceci justifie le sentiment de progrès que l'on peut percevoir.

Si l'on regarde plus en détail en quoi consiste ce progrès, on remarque une direction principale exprimant l'intérêt croissant des chercheurs en didactique pour décrire, de plus en plus précisément, ce qu'est une utilisation efficace des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en classe. Il s'agit d'expliquer le fonctionnement didactique de certains outils informatiques dans la pratique scolaire et l'on est passé d'une position optimiste, qui s'exprimait surtout dans la proposition de nouveaux outils et d'activités pour la classe, à une position plus critique qui intègre la problématique technologique dans le cadre général d'une problématique didactique. On est passé de l'exploration créative des technologies disponibles – soumise à leur évolution continue et rapide – à une réflexion plus attentive au fonctionnement effectif de ces technologies dans la réalité scolaire et située par rapport à des objectifs didactiques de plus en plus spécifiés.

L'intérêt des chercheurs s'est focalisé successivement sur différents éléments : d'abord l'outil technologique, ensuite l'élève en tant que sujet apprenant, et enfin l'enseignant.

La majorité des articles contenus dans la première étude ICMI par exemple concernent des problématiques qui relèvent de la relation (effet /influence) entre, d'une part, les innovations technologiques et, d'autre part, les mathématiques, les méthodologies de recherche et de validation dans cette discipline, ou l'enseignement des mathématiques en termes curriculaires. La perspective commune est une perspective que l'on peut qualifier d'épistémologique. La lecture des articles montre le souci des auteurs d'explorer les liens entre nouveaux outils, concepts et pratiques mathématiques. Le fait d'insérer dans le volume des actes une contribution du mathématicien Athyah, bien qu'il n'ait pas participé à la conférence, est bien représentatif selon nous de cette perspective.

Mais c'est surtout si l'on considère les articles de la troisième section – « Computers as an aid for teaching and learning mathematics » - que l'on peut s'apercevoir à quel point l'intérêt est focalisé sur l'outil et ses potentialités, en particulier sur les potentialités offertes par les nouvelles ressources pour la représentation des objets mathématiques (voir par exemple Tall et West, 1986). Les élèves sont seulement évoqués au titre de bénéficiaires potentiels des innovations envisagées. Dans les années qui ont suivi, l'élève est devenu un objet d'étude spécifique, prenant une place de plus en plus importante, cette évolution étant soutenue par la domination, au sein de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques, de perspectives théoriques centrées sur le sujet apprenant (la perspective constructiviste entre autres). Les contributions dans cette direction ont été nombreuses et très importantes et une vision synthétique en est fournie par (Drijvers, Kieran et Mariotti, à paraître).

Le développement d'une approche instrumentale, s'appuyant sur la notion de schème d'utilisation et d'instrument, a ainsi constitué une réponse très efficace au besoin de modéliser les comportements des élèves et la variété des rapports que les élèves entretiennent avec les outils informatiques (Trouche, 2002).

Bien que fondamentale, la dimension individuelle n'est cependant pas suffisante. La complexité du problème posé par les rapports entre dimension individuelle et dimension sociale est déjà présente dans l'ouvrage de Noss et Hoyles (1996) où les auteurs développent leur réponse au problème de concilier « the individual's role in the construction of mathematical meaning, with the recognition of the part played by epistemological, social and cultural forces. » (op. cit., p. 226). Elle est aussi présente dans la notion d'orchestration instrumentale introduite par Trouche qui la définit comme :

> « un dispositif, partie prenante du système d'exploitation didactique, qu'une institution (l'institution scolaire en l'occurrence) organise dans le but d'orienter l'action instrumentée des élèves ». (Trouche, 2002, p. 257)

Mais c'est seulement dans les années récentes que l'on voit l'intérêt des chercheurs se déplacer vers l'enseignant devenant objet de recherche spécifique. Cette évolution est cohérente avec celle plus générale du champ didactique où les études sur l'enseignant, ses propres conceptions, sur les mathématiques ou leur enseignement, mais aussi son rôle actif dans le processus éducatif prennent une importance croissante (Bartolini Bussi et Mariotti, 2008 ; Falcade et *al*., 2007). C'est dans cette perspective que se situait aussi l'intervention de Ruthven qui m'a précédé, et je voudrais me référer à cette intervention pour développer quelques observations complémentaires du côté de l'enseignant. Le constat des difficultés rencontrées par les enseignants lorsqu'ils décident d'intégrer des nouvelles technologies dans leur pratique de classe rend cruciale une meilleure compréhension de l'origine de telles difficultés.

L'impact des recherches sur les pratiques effectives d'enseignement

Le rapport entre recherche et pratique en classe est un élément crucial, le prendre en considération est une exigence fondamentale pour les didacticiens. Je partage l'avis de mes collègues que cette exigence est encore plus grande dans le cas des études portant sur le problème de l'intégration des nouvelles technologies dans l'éducation mathématique, mais je voudrais développer ce point en adoptant une perspective plus générale.

Des changements sont partout visibles, mais bien que les différences entre pays puissent être notables, l'impact des travaux didactiques reste toujours insatisfaisant. Quand on entre dans une salle de classe, on retrouve souvent les mêmes difficultés, les mêmes erreurs … mais surtout les mêmes comportements, tant de la part des élèves que des enseignants. Parfois, on retrouve des comportements que l'on pouvait déjà observer, il y a trente ans. Il devient naturel de se demander comment faire pour que les résultats acquis aient un impact positif sur la réalité scolaire. On sent la nécessité d'un virage, du développement d'une perspective pragmatique qui implique, de façon renouvelée, les enseignants.

Mais comment le faire ? Il faut trouver le moyen de rendre parlants les résultats de notre travail de recherche pour l'École et en particulier pour les enseignants, pour ceux qui, tout en travaillant dans le champ de l'éducation mathématique, ne sont pour autant pas des chercheurs, à qui on demande d'exploiter des suggestions issues de la recherche sans qu'ils puissent partager tout le travail de réflexion et de théorisation qui caractérise un projet de recherche. Et il faut aussi questionner non seulement les rapports entre enseignants et chercheurs mais aussi les rapports entre les chercheurs et groupes de chercheurs eux-mêmes.

La quantité de résultats que la recherche dans le champ de l'éducation mathématique a produit est considérable, mais quels sont les résultats que la communauté partage réellement ? Paraphrasant le titre du livre d'Euclide, nous pouvons nous demander : quels sont les *éléments* de notre discipline ? Le progrès d'une discipline scientifique ne réside pas dans une accumulation d'informations, mises les unes à côté des autres, il consiste dans la construction d'un corpus de connaissances partagées et systématisées : un savoir. La consolidation des résultats de la recherche dans le champ de l'éducation mathématique reste encore difficile, l'une des raisons de cette difficulté étant l'absence d'une base commune, j'oserai dire d'un langage commun, nous permettant de traiter l'énorme richesse des résultats et des contributions qu'on peut trouver dans la littérature.

Difficultés de communication

L'expérience que j'ai récemment vécue au sein des projets Européens TELMA et ReMath a été très instructive pour moi. Nous avons vécu cette difficulté de communication dans une situation où nous ne pouvions mettre de côté l'article dont la lecture était difficile ou irritante, où, au contraire, nous étions forcés de nous confronter aux autres, de les comprendre et de nous faire comprendre d'eux. Les difficultés que nos équipes ont rencontrées nous aident à réfléchir à celles qu'un enseignant peut rencontrer dans la communication avec les chercheurs ; elles montrent le besoin de rapprocher suffisamment les points de vue pour rendre possible la communication. Ce besoin de trouver une perspective partagée nous a amenés à l'élaboration de la notion de « fonctionnalité didactique » (*Didactical Functionality*) (Cerulli et *al.,* 2005), qui s'articule autour de trois pôles : l'artefact, les modes d'utilisation et les objectifs éducatifs. Nous avons montré l'efficacité de cette construction théorique comme structure partagée de communication entre les équipes. Son potentiel dérive de deux facteurs : d'une part, le fait que chaque résultat doive être présenté sous le même format rend le partage plus facile, d'autre part, la nécessité de reformuler chaque affirmation dans un format spécifique pousse les chercheurs à prendre conscience de certains implicites qui, autrement, auraient pu rester cachés. Ce travail d'explicitation fait que les interlocuteurs se comprennent plus aisément, qu'il s'agisse de reconnaître des similarités ou des divergences. Le danger, c'est l'isolement, le danger de se retrouver enfermé dans un espace clos et limité, à l'intérieur duquel tout fonctionne bien, mais sans avoir la possibilité de se faire comprendre de l'extérieur. Ce danger est commun à tous les domaines de recherche et se manifeste en particulier dans les domaines où les divergences théoriques sont les plus marquées. C'est le cas, par exemple, de l'expérience d'incommunicabilité souvent vécue dans le domaine de la didactique de la preuve et, à ce propos, je voudrais citer le passage suivant :

> « Research in mathematics education in the coming decade should be passing from childhood to maturity. We need an organisation of our work at an international level, beyond our idiosyncratic views or possible tendency to accept ready-made ideas. […] In the end, I have every expectation that the benefit of this effort will not be only for research, but significantly for teaching and learning in everyday classes insofar as it will finally be possible for teachers and mathematics educators to make sense of what we publish and claim. » (Balacheff, 2008, p. 511)

Pour moi, c'est ce même danger d'incommunicabilité – mais peut être encore plus fort – que nous retrouvons dans les rapports entre chercheurs et enseignants. Ma thèse est donc la suivante : élaborer et adopter un format partagé de communication entre chercheurs offre l'avantage de donner une plus grande visibilité aux résultats, en les affranchissant des aspects particuliers et implicites liés au contexte théorique et méthodologique dans lequel ils ont été produits. Et cela ouvre la voie à des moyens de communication plus efficaces avec les enseignants aussi. Faire un effort dans cette direction me semble une priorité pour nous didacticiens. Il faut se confronter avec la réalité scolaire, dans toute sa complexité. Il faut repenser les curriculums, mais aussi la formation des enseignants – là ou cela est possible ! – mais, surtout, il faut que les chercheurs aient une collaboration constante et interactive avec les enseignants et leurs classes, qu'ils apprennent à communiquer, à parler et à écouter, dans un langage partagé.

Le contexte de l'intégration des nouvelles technologies dans les pratiques scolaires peut être l'occasion de revenir sur des problèmes didactiques jamais résolus, d'encourager les enseignants à réfléchir sur les contributions que la recherche en didactique peut apporter à leur travail. L'attention que la société et l'école portent aux propositions innovatrices concernant l'utilisation des nouvelles technologies peut ainsi être considérée par les didacticiens comme une opportunité à saisir pour établir une communication qui dépasse les limites du groupe de recherche et devienne réellement efficace pour le monde de l'école.

Cette attention portée à l'enseignant s'est poursuivie dans l'intervention suivante, la dernière de la table ronde, celle de Jean-Baptiste Lagrange, qui fait l'objet de la partie suivante.

Faire progresser la connaissance et l'action de façon réellement utile pour l'enseignement (J.-B. Lagrange)

Comme cela a été souligné plus haut, pour progresser il convient de partir du constat d'un foisonnement des applications des technologies numériques proposées pour l'enseignement des Mathématiques et des recherches, contrastant avec la réalité d'une faible intégration, quantitativement et qualitativement, dans les classes. Les questions posées par le développement de l'Internet constituent un premier chantier. La multiplication des ressources en ligne crée des conditions nouvelles pour l'apprentissage des élèves et le développement des compétences des enseignants. Les usages se développent, mais les outils en ligne sur lesquels ils s'appuient mobilisent peu les capacités de représentation et de traitement de l'ordinateur au service de l'apprentissage. Ces usages, ainsi que les conditions qui permettraient de tirer davantage de profit pour l'apprentissage sont encore peu étudiés et théorisés par la recherche en didactique. La nécessité de poursuivre le travail de mise en correspondance des cadres théoriques a aussi été soulignée. Elle s'impose dans un double but : clarifier les apports des technologies numériques du point de vue de la recherche et permettre une communication plus aisée entre enseignants et chercheurs.

Le constat rappelé plus haut de l'écart entre la façon dont la recherche voit les apports des technologies numériques et la réalité des classes montre bien que la communication entre chercheurs et enseignants est un enjeu important pour progresser. Une façon de considérer cette question est d'étudier de façon spécifique comment des ingénieries d'usages des technologies numériques initiées par la recherche peuvent être appropriées et développées par des enseignants ayant une distance plus ou moins grande avec la recherche. Il s'agit d'une tâche de recherche spécifique, distincte de la conception et de l'évaluation d'outils et de situations d'usages, et nécessitant des cadres théoriques appropriés. Un travail en ce sens a été mené dans le cadre de la 17ème étude ICMI et il a donné lieu à un chapitre dans l'ouvrage publié à l'issue de l'étude (Fuglestad, Healy, Kynigos & Monaghan, à paraître). Les outils et situations d'usages (scénarios) y sont vus comme des « objets frontière », c'est-à-dire comme des entités existant à la fois dans le monde de la recherche et dans celui de l'enseignement, structurés différemment dans chacun des deux mondes, mais suffisamment souples pour servir de support pour la communication, ou plus précisément pour la construction commune de sens, entre les deux mondes. L'idée de genèse instrumentale des professeurs permet aussi selon les auteurs de prendre en compte la non-transparence pour l'enseignant des apports des technologies numériques. Les genèses des professeurs sont reconnues comme des objets particulièrement complexes car, vus comme des artefacts, les outils et situations d'usages ont vocation à devenir des instruments non seulement des pratiques mathématiques des enseignants, mais aussi de leur activité professionnelle, faisant intervenir ensemble des connaissances professionnelles et des connaissances liées aux technologies. Ce travail mené dans le cadre de l'étude ICMI peut servir de référence pour des projets visant précisément à étudier la diffusion d'ingénieries élaborées par la recherche.

Une autre façon de faciliter l'interface recherche enseignement est de chercher à mieux comprendre le rapport que les enseignants utilisateurs développent avec les technologies numériques. Les enseignants développant des usages en dehors de projets de recherche sont peu nombreux, et ces usages nous semblent souvent décevants au premier abord. Pourtant, si ces usages existent c'est qu'ils correspondent à des attentes. Comprendre ces attentes, examiner comment elles s'insèrent dans le fonctionnement des enseignants est un moyen d'objectiver les rapports différents à la technologie dans le monde de la recherche et celui de l'enseignement. Je vais donner un exemple issu d'une thèse de doctorat (Caliksan, 2006). Caliksan s'est intéressée aux usages de la géométrie dynamique (GD) au collège. Elle a fait l'hypothèse d'une distance entre les potentialités de la géométrie dynamique telles qu'elles sont vues par la recherche et les attentes des enseignants relatives à cette technologie. Elle a tout d'abord considéré que cette distance pouvait s'apprécier par des décalages successifs entre la GD dans la recherche, dans les programmes et enfin dans les manuels. En effet, les manuels et les programmes, tout en tentant d'exploiter la GD, doivent tenir compte des contraintes et attentes des enseignants. Caliksan a ensuite observé à l'aide d'un modèle comment ces attentes interviennent dans l'activité d'enseignants utilisant la GD en classe. Je donne ici quelques résultats repris de Lagrange & Caliksan (2009).

Dans la recherche, les situations d'apprentissage font interagir fonctionnalités de construction et fonctionnalités de déplacement. Un exemple est donné par les situations basées sur une dialectique « construction dure, construction molle » (Healy, 2000). Une construction dure est une figure au sens de la géométrie : ses propriétés « résistent » au déplacement. Dans une construction molle, les éléments à construire sont placés « au jugé » ; ainsi, la construction ne résiste pas au déplacement. La réalisation d'une construction molle par l'élève peut être vue comme un manquement au contrat didactique qui privilégie la construction géométrique. Ce peut être aussi, pour l'élève, une étape heuristique qui lui permet d'explorer le problème et d'en analyser les contraintes et invariants. Dans une situation didactique bien construite, les rétroactions du déplacement doivent lui permettre de dépasser cette étape et d'utiliser les invariants repérés pour un construction résistante. Dans le passage d'une construction molle à une construction dure, l'élève utilise ensemble le déplacement et les primitives de construction. En revanche, les programmes et plus encore les manuels, proposent le plus souvent des tâches qui mobilisent soit la construction (reproduire une figure papier/crayon), soit le déplacement dans une figure déjà construite (par exemple pour observer des propriétés invariantes par déplacement et donc conjecturer des théorèmes) mais très peu les interactions entre les deux.

Dans la recherche, les situations d'apprentissage articulent des phases de travail sur ordinateur, des phases de rédaction, et des phases collectives animées par le professeur (pour un exemple, voir Falcade et *al*., 2007). En étudiant les manuels, il nous a semblé que, plus ou moins explicitement, ceux-ci distinguaient deux modes de travail, l'un en salle informatique, les élèves étant individuellement ou par paires devant l'ordinateur, l'autre en salle ordinaire, le professeur utilisant un ordinateur relié à un vidéo-projecteur. Ces modes de travail nous ont paru correspondre à des conceptions de l'implémentation de la technologie distinctes et non articulées autour d'un même objectif. Dans le premier cas, la GD fournit un cadre de travail pour l'élève, où, même si la tâche peut être plus ou moins guidée, il a lui-même à se confronter aux commandes du logiciel. Nous disons donc que dans cette classe, la GD est proposée « *comme environnement d'étude de l'élève* ». Comme c'est souvent le cas des « activités » proposées par les manuels, la façon dont ce travail s'insèrerait dans un parcours didactique reste peu précise ; aucune phase d'exploitation collective spécifique de ce travail n'est généralement prévue. Dans l'autre cas, la figure est déjà réalisée et même souvent disponible pour l'enseignant sur un support informatique (CD-ROM ou site Internet). Il n'y a pas de recherche autonome par l'élève d'une construction ou d'une propriété. Nous disons que, dans cette classe, la GD est *« au service de l'enseignement »* : il s'agit, pour le professeur, de « donner à voir » soit la construction, soit les propriétés d'une figure.

Cette phase d'analyse des manuels nous a semblé importante en préalable à celle des usages par les enseignants, car si les manuels font une concession à la modernité en intégrant des usages de la GD, ils doivent aussi, comme nous l'avons dit plus haut, prendre en compte les attentes des enseignants qui, selon nous, déterminent les usages. Caliksan a donc mené une observation de professeurs de collège ayant adopté l'un ou l'autre des deux modes de travail. De façon à pouvoir interpréter ses observations en termes d'attentes, elle a utilisé le système des thèmes élaboré par Ruthven et Hennessy (2002) qui, à partir d'interviews d'enseignants, ont identifié dix thèmes opérationnels, organisés sur trois niveaux. Ce système constitue pour nous un modèle des attentes des enseignants.

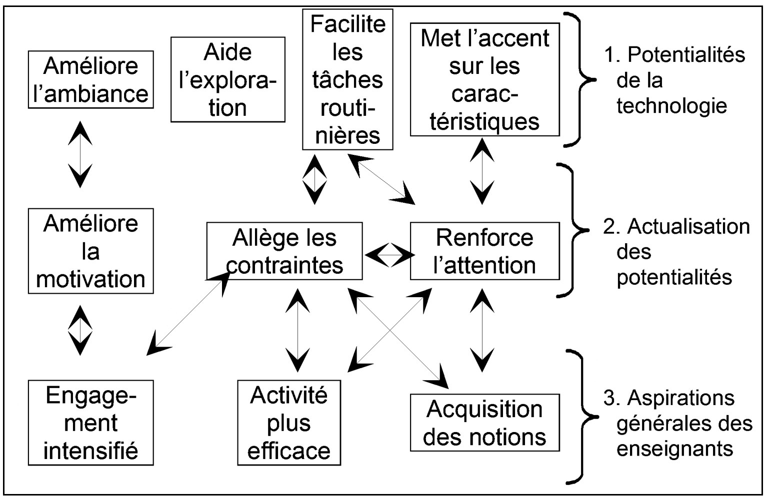


Figure 9 - Les thèmes reflétant les idées des enseignants sur une utilisation réussie des TICE (modèle RH)

Considérons comment ces attentes se manifestent chez une enseignante observée par Caliksan, qui privilégiait la GD *comme environnement d'étude de l'élève*. Cette enseignante basait ses attentes sur les thèmes de niveau 1 : « Améliore l'ambiance », « Facilite les tâches routinières », « Met l'accent sur les caractéristiques », qui devaient permettre que fonctionnent les thèmes de niveau 2 qui leur sont liées et finalement le thème de niveau 3 « Engagement intensifié ». Dans ses déclarations, ce dernier thème paraissait particulièrement important, en lien avec les difficultés d'élèves de collège à s'engager dans une tâche. Au cours d'une séance observée en 5ème, les élèves devaient alterner des phases de création et de déplacement d'objets et des tâches d'observation/rédaction. Contrairement aux prévisions de l'enseignante, les phases de création et déplacement d'objets ont été difficiles pour les élèves. Elle est alors intervenue intensivement auprès d'eux pour dicter les actions nécessaires, afin qu'ils ne passent pas tout leur temps sur les tâches de création et qu'ils disposent des observables nécessaires pour les tâches d'observation/rédaction.

Les difficultés inattendues lors des tâches de création et de déplacement peuvent être interprétées comme un non fonctionnement des thèmes sur lesquels l'enseignante basait ses attentes. La création des figures (routine qui devait être facilitée) s'est révélée plus difficile que prévue. Les élèves risquaient de se déconcentrer et de ne pas être en mesure de réaliser les observations demandées. Dans l'action, cela se traduisait pour l'enseignante par le danger que les élèves ne s'engagent pas dans les tâches d'observation/rédaction, alors qu'elle le souhaitait et qu'elle pensait que la GD y aiderait. Son activité d'assistance aux élèves peut donc être interprétée comme une volonté de compenser le non fonctionnement des thèmes de niveau 1 et de faire fonctionner malgré tout les thèmes de niveau 2 et 3. Ce fonctionnement confirme que, les attentes essentielles de cette enseignante se situent dans l'engagement des élèves et dans l'attention accrue aux caractéristiques mathématiques des figures. Pour elle, l'usage de la GD devrait mécaniquement assurer ces bons effets, eux-mêmes considérés comme des conditions nécessaires de la conceptualisation.

L'analyse implicite de l'enseignante attribue à la GD la faculté de créer de bonnes conditions pour la conceptualisation, sans que l'activité des élèves avec la GD soit elle-même vue comme participant à la conceptualisation. Il est donc important pour elle que les bonnes conditions prévues se trouvent réalisées, et comme ce n'est pas le cas, elle compense par son activité. Cette analyse implicite sépare donc l'activité des élèves avec la GD de leur conceptualisation. Au contraire, une analyse basée sur l'instrumentation reconnaîtrait a priori les besoins en connaissances mathématiques et sur l'instrument attendus de la tâche proposée aux élèves, depuis la création jusqu'au déplacement, et laisserait aux élèves le temps pour s'approprier les gestes correspondants et leur donner leur signification mathématique.

Considérons maintenant un enseignant observé par Caliksan qui utilisait la GD *« au service de son enseignement »*. Caliksan a caractérisé cet enseignant comme un « fan du vidéoprojecteur ». Il a adopté ce dispositif suite à des difficultés et à un sentiment de perte de temps lors de séances en salle informatique. Il ne l'utilise pas avec un élève « *sherpa* », c'est-à-dire un élève exécutant les commandes sur le logiciel dans le cadre d'un travail collectif dirigé par le professeur. Il le pilote lui-même dans un cours dialogué sans que les gestes soient discutés dans la classe. C'est pour lui un espace d'exploration collectif et de monstration, complétant les espaces d'institutionnalisation que constituent le tableau noir et la feuille des élèves. Dans les séances observées, cette maîtrise de l'espace d'exploration collectif lui permet de mener le travail de la séance dans la durée prévue mais l'exploration semble faire difficilement sens pour les élèves.

Dans les entretiens, ce professeur souligne le gain de temps et d'efficacité ainsi que les possibilités de visualisation que lui permet son usage de la GD (thèmes de niveau 1). Contrairement à l'enseignante précédente, il n'est pas particulièrement préoccupé par l'ambiance de travail ni la motivation des élèves. Par contre, il accorde une grande importance à l'organisation de l'espace de travail et à la visualisation des propriétés de façon à ce que les élèves restent concentrés sur l'enjeu mathématique de la séance (thème de niveau 2). Avec les élèves aux commandes de la GD en salle informatique, il lui serait plus difficile de maintenir cette concentration. Son choix de la GD *« au service de l'enseignement »* devrait donc faciliter l'acquisition des notions par les élèves (thème de niveau 3), mais, comme nous l'avons vu, l'exploration semble faire difficilement sens pour les élèves, notamment parce que faute d'une instrumentation de la GD ils ne donnent pas de signification aux gestes opérés par le professeur et donc le transfert des observations de la GD vers l'espace papier/crayon ne s'opère pas. Caliksan a observé que l'enseignant tente de remédier à ce non-transfert par le recours à un « effet Jourdain ».

Les systèmes d'attentes de ces deux enseignants sont bien distincts, puisqu'ils réalisent une quasi-partition du modèle des thèmes élaboré par Ruthven et Hennessy. Les usages présentent cependant des points communs tels que la non prise en compte des besoins en instrumentation et l'influence des conditions d'exercice au collège (difficultés d'attention, de concentration, etc.). Il existe aussi une distance importante entre les attentes de ces enseignants et la réalité du déroulement en classe, ce qui détermine l'activité de chacun d'eux.

La mise en évidence de tels systèmes d'attentes confirme la nécessité d'introduire des modalités d'analyse réflexive dans la formation aux TICE, nécessité soulignée dans une autre thèse (Emprin, 2007). La réflexion des enseignants sur la distance entre les attentes motivant l'usage de la GD dans une séance et le déroulement effectif de la séance pourrait leur permettre de relativiser leurs attentes et de mieux intégrer les potentialités didactiques des technologies dans leur analyse.

La nécessité de prendre en compte les attentes des enseignants s'impose aussi dans la conception des logiciels et des activités associées pour les élèves. Pour les chercheurs en technologie, il est important que les produits de la recherche « passent » dans les classes, ne serait-ce que pour en évaluer la validité en dehors de conditions de laboratoire. Pour cela, ces produits doivent pouvoir être les « objets frontières » dont il a été question plus haut, et il est donc nécessaire qu'ils puissent fonctionner, au moins dans un premier temps, de façon relativement proche des attentes des enseignants sans toutefois les enfermer dans ce fonctionnement. Par exemple, la recherche sur le développement d'outils de calcul formel privilégie volontiers des situations où il est intéressant que l'élève s'affranchisse des calculs, grâce à la puissance de calcul symbolique de l'ordinateur, pour développer leur stratégie de résolution. Mais ces situations ne correspondent pas directement aux attentes des enseignants. D'une part, il est difficile pour beaucoup de voir comment elles contribuent aux apprentissages algébriques des élèves, et d'autre part, elles sont souvent en premier abord plus complexes à gérer que les situations habituelles. Il faut donc intégrer dans la conception de ces outils et activités une prise de conscience progressive de leurs apports aux apprentissages et de la genèse instrumentale associée.

La mise en évidence des systèmes d'attentes des enseignants, que nous avons étudiés avec Caliksan, donne ainsi des pistes pour faire progresser la connaissance et l'action.

Après ces quatre contributions, la parole a été donnée aux participants au colloque pour des questions et commentaires, et c'est cette partie de la table ronde qui est résumée dans la dernière partie de ce compte-rendu.

Résumé des discussions et conclusion (M. Artigue)

Dans la discussion collective qui suit les présentations des quatre contributeurs à la table ronde, plusieurs points vont être abordés. Le résumé qui suit est structuré autour de ces différents points.

La diminution des références aux calculatrices au fil des années dans les articles de recherche

Cette diminution a été soulignée par Kenneth Ruthven dans sa contribution. Luc Trouche, s'appuyant sur une étude menée sur les publications francophones de 2000 à 2008, lui demande s'il ne faut pas y voir plutôt que le signe d'une raréfaction des travaux portant sur les calculatrices, celui d'une évolution des problématiques conduisant à une prise de distance par rapport à l'outil lui-même et faisant que la mention de ce dernier tend à disparaître des titres des articles au profit de termes reflétant ces problématiques qu'il s'agisse de problématiques d'instrumentation, de conception de ressources ou d'analyse d'usages. Kenneth Ruthven exprime, en réponse à cette interrogation, sa conviction que la situation est sans doute différente d'un pays à l'autre, et que l'interprétation proposée par Trouche, si elle peut être pertinente pour les travaux français, l'est moins pour la littérature anglophone. Il cite notamment les travaux récents du *National Mathematics Panel* aux États-Unis qui, en menant une analyse plus fouillée que la sienne est arrivé à des conclusions analogues. Il indique également que son analyse de la terminologie utilisée dans les articles tend à montrer que des notions comme celle d'instrumentation sont encore peu présentes dans cette littérature et que le phénomène observé traduit aussi sans doute l'absence d'idées permettant de renouveler les perspectives de recherche sur les calculatrices dans ce contexte anglophone.

Les liens entre recherche sur les TICE et contenus mathématiques

Ce point est soulevé par Alain Kuzniak qui souligne la déconnexion actuelle entre les recherches portant sur la technologie et celles portant sur des contenus mathématiques précis. En tant qu'organisateur de groupes de travail sur la géométrie dans différents congrès et colloques comme ICME ou CERME, il est frappé de ne recevoir que très peu de contributions impliquant des environnements de géométrie dynamique, et ceci lui semble regrettable. Jean-Baptiste Lagrange répond en s'appuyant sur son expérience à CERME où il a navigué entre différents groupes : technologie, enseignant, algèbre, exprimant la frustration qu'il a ressenti en ayant l'impression de n'intéresser presque personne quand il intervenait pour présenter ses travaux dans des groupes non centrés sur la technologie. Il souligne aussi les problèmes de communication qu'il a pu rencontrer du fait des différences existantes dans les cadres théoriques mobilisés. En dépit de ces difficultés réelles, il y a consensus pour estimer que la situation de cloisonnement actuelle est regrettable et que des efforts doivent être faits pour la dépasser.

Les relations entre didacticiens et informaticiens

Georges-Louis Baron, après avoir précisé que pour lui, l'avancée principale de ces deux dernières années dans le domaine concerne la mise à l'épreuve de deux familles de théories dans ce champ de recherche : les théories de l'instrumentation d'une part, celles de l'activité d'autre part, posent la question des relations entre didacticiens et informaticiens, s'interrogeant notamment sur la façon dont les théorisations didactiques prennent en compte les théorisations informatiques et vice-versa. Comme il s'agit d'une question à laquelle le projet européen ReMath s'est particulièrement intéressé, Maria Alessandra Mariotti prend d'abord la parole. Après avoir dit qu'il s'agit là pour elle d'une question cruciale, elle fait état de son expérience personnelle : si elle excepte quelques exemples très particuliers comme celui de Cabri-géomètre où la conception et le développement informatiques se sont nourris d'une étroite interaction avec le didactique, son expérience lui a donné à voir principalement des situations de coupure entre les deux mondes. Dans le projet ReMath, des décisions ont été prises pour forcer la communication et se donner les moyens de son étude, mais selon elle, même dans ce contexte privilégié, la communication se heurte à de grandes difficultés, liées à la quantité de connaissances à assimiler de part et d'autre pour la rendre réellement opérationnelle. Elle conclut néanmoins en faisant preuve d'un certain optimisme, affirmant sa conviction que si l'on souhaite vraiment collaborer on en trouvera les moyens. Je rajoute en précisant que, dans le passage du projet européen TELMA au projet ReMath, l'élargissement de la coordination théorique à cette dimension de conception logicielle a été justement l'une des nouvelles dimensions introduites, qu'elle a certes posé des problèmes difficiles mais qu'elle s'est aussi révélée très intéressante. Pour contrebalancer ces images de coupure et de difficultés, j'évoque également la situation exemplaire que fournit la recherche qui s'est développée depuis plus de dix ans autour des projets Pépite et Lingot, renvoyant à l'atelier où les dernières avancées de ces travaux ont été présentées. Il y a là l'exemple d'une collaboration fructueuse sur le long terme entre communauté didactique et communauté EIAH dont on peut essayer de tirer les leçons. Des projets comme celui-là, tout comme d'ailleurs les interactions développées au sein du PPF AIDA (Approches Interdisciplinaires des Dispositifs d'Apprentissage) piloté par Jean-Marc Labat, montrent que des collaborations fructueuses sont possibles. Elles restent néanmoins coûteuses, ne sont pas immédiatement efficaces, et il faut accepter de payer le prix des apprentissages nécessaires de part et d'autre à cette communication. Cela nous impose notamment de modifier nos moyens d'expression pour rendre nos approches et résultats accessibles à un coût raisonnable à d'autres qui ne partagent pas notre culture.

Ces questions de communications entre communautés seront ensuite reprises par Gérard Kuntz qui, parlant en fonction de son expérience de membre de comité de rédaction de revues destinées aux enseignants (Repères IREM, Bulletin de l'APMEP) souligne d'abord que les articles écrits par les didacticiens sont souvent reçus avec difficulté voire agacement, du fait d'un langage trop éloigné de ce que des enseignants, même très engagés, arrivent à lire et à comprendre. Il tient à faire remarquer que les articles écrits par les didacticiens travaillant dans le domaine des TICE lui semblent, de manière générale, beaucoup plus accessibles, témoignant à son avis d'un effort des auteurs pour clarifier et simplifier le vocabulaire tout en préservant les concepts et la subtilité de la pensée. Il aimerait que ces efforts se généralisent.

L'interaction entre activité papier-crayon et activité logicielle

Ce point est soulevé par Richard Cabassut qui prend l'exemple de la géométrie dynamique. Il souligne que l'interaction entre activité papier-crayon et activité logicielle est essentielle pour la conceptualisation et perçoit comme un danger le fait que dans les faits activité logicielle et papier-crayon ne soient souvent pas bien articulées. Ken Ruthven, s'appuyant sur une étude récente menée en Angleterre sur les pratiques des enseignants, répond que les pratiques des enseignants sont en fait très diverses de ce point de vue. Certains voient dans l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique un moyen de montrer les choses, en pilotant eux-mêmes l'ordinateur ; d'autres sont conscients que le seul fait de montrer n'est pas suffisant, qu'il faut que les élèves eux-mêmes fassent des constructions, bougent des points, essaient de comprendre le système … Selon lui, les enseignants sont aussi très différents dans l'importance qu'ils accordent aux phénomènes langagiers et sémiotiques, et il suggère à Maria Alessandra Mariotti, spécialiste de ces questions, de compléter sa réponse. Cette dernière insiste sur le fait que la perspective sémiotique ne concerne pas seulement les TICE. Elle est aussi bien valable pour les instruments anciens que modernes et c'est ce qui a guidé les recherches qui ont conduit à la théorie des médiations sémiotiques qu'elle a développée avec Mariolina Bartolini Bussi. Elles ont cherché à comparer les nouvelles technologies et les anciennes, à identifier ce que chacune offrait respectivement comme potentiel de médiation sémiotique. Pour elles, il est important de ne pas les situer dans des rapports d'opposition mais de les mettre en synergie. Une telle approche combinant l'ancien et le nouveau est aussi, selon elle, un moyen d'éviter certaines incompréhensions de la part des enseignants.

L'évaluation

Carl Winslow lance la question de l'évaluation, en s'étonnant qu'elle n'ait pas été évoquée alors qu'elle est cruciale. Il souligne le rôle qu'a eu dans son pays, le Danemark, l'intégration de la technologie dans les évaluations officielles pour faire passer les usages dans les pratiques quotidiennes. Paul Drijvers répond, en s'appuyant sur une étude qu'il a menée récemment sur la place de la technologie dans l'examen final national dans un certain nombre de pays européens proches des Pays Bas. Cette étude montre que, d'une part, il y a de plus en plus de pays qui exigent une présence de la technologie à l'examen final, mais que d'autre part si l'on analyse vraiment les tâches qui sont proposées, on est généralement déçu. La plupart sont des tâches pour lesquelles l'utilisation de la technologie apporte peu par rapport à une résolution sans technologie. Les questions où la technologie sert réellement et où l'on teste en même temps de vraies compétences mathématiques sont encore rares. Il reste selon lui beaucoup de travail à faire pour arriver à une situation satisfaisante du point de vue de l'évaluation.

La table ronde se conclut sur cette intervention. Elle a bien fait percevoir, nous semble-t-il, un certain nombre des interrogations qui sont au cœur de ce champ de recherche, la façon dont les approches ont évolué au fil des dix dernières années, les avancées que ces évolutions ont permis d'obtenir et la contribution que l'équipe DIDIREM a apporté. Elle montre aussi l'ampleur du chemin qui reste à parcourir pour que ces avancées aient un réel impact sur les pratiques enseignantes.

Paul Drijvers
Freudenthal Institute, Utrecht
pauld@fi.uu.nl

Jean-Baptiste Lagrange
Université de Reims Champagne-Ardenne, Laboratoire de didactique André Revuz
jean-baptiste.lagrange@univ-reims.fr

Maria Alessandra Mariotti
Université de Sienne
mariotti.ale@unisi.it

Kenneth Ruthven
Université de Cambridge
kr18@cam.ac.uk

Michèle Artigue
Université Paris Diderot – Paris 7, Laboratoire de didactique André Revuz
artigue@math.jussieu.fr

Références

Artigue M. (1997). Le logiciel 'Derive' comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 133-169.

Artigue M. (2006). *Methodological tools for comparison of learning theories in technology enhanced learning in mathematics*. http://telearn.noe-kaleidoscope.org/warehouse/Artigue-Kaleidoscope-2006.pdf

Balacheff N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 341-344.

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Éds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

BBC News (1998). Education maths adviser attacks calculator ban. Accessed at <http://news.bbc.co.uk/1/hi/education/138206.stm>, 9 November 2008.

Caliksan N. (2006). *Usages de la géométrie dynamique par des enseignants de collège. Des potentialités à la mise en œuvre : quelles motivations, quelles pratiques ?* Thèse de doctorat de l'université Paris 7.

Cerulli M., Pedemonte B. & Robotti E. (2005). An integrated perspective to approach technology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME 4* (pp. 1389-1399). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Drijvers P., Doorman M., Boon P., Van Gisbergen S. & Gravemeijer, K. (2007). Tool use in a technology-rich learning arrangement for the concept of function. In D. Pitta-Pantaz & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the V Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME5* (pp. 1389 – 1398).

Drijvers P., Kieran C., & Mariotti,M.A. (à paraître). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In C. Hoyles. & J.-B. Lagrange (Eds.). *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*. New York/Berlin: Springer.

Drijvers P., Mariotti M.A., Olive J., & Sacristan A.I. (à paraître). Learning and assessing mathematics with and through digital technologies: Introduction to the section. In C. Hoyles. & J.-B. Lagrange (Eds.). *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*. New York/Berlin: Springer.

Drijvers P., & Trouche L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.). *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. Cases and perspectives* (pp. 363-392). Charlotte, NC: Information Age.

Emprin F. (2007). *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*. Thèse de doctorat de l'université Paris 7.

Falcade R., Laborde C., & Mariotti M.A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66/3, 317 – 333.

Fuglestad A. B., Healy L., Kynigos C. &, Monaghan J. (à paraître). Working with teachers: context and culture. In C. Hoyle & J.-B. Lagrange (Eds.). *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain*. New York/Berlin: Springer.

Guin D. & Trouche L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Healy L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Éds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 103-117). Hiroshima: Hiroshima University.

Hembree R. & Dessart D. (1986). Effects of hand-held calculators in precollege mathematics: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(2), 83-99.

London Mathematical Society, Royal Statistical Society, Institute of Mathematics and its Applications (1995). *Tackling the Mathematics Problem*. London: London Mathematical Society.

Howson A.G. & Kahane J.P. (1986). *The influence of Computer and Informatics on Mathematics and its teaching.* Oxford : Oxford University Press.

Lagrange J.B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 1-30.

Lagrange J.B. & Caliksan N. (2009). Usages de la technologie dans des conditions ordinaires : le cas de la géométrie dynamique au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 29/2, 189-226.

Mullis I., Martin M., Gonzalez E. & Chrostowski S. (2004). *TIMMS 2003 International Mathematics Report.* Boston MA : TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Noss R. & Hoyles C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Ruthven K. (1998). The use of mental, written and calculator strategies of numerical computation by upper-primary pupils within a 'calculator-aware' number curriculum. *British Educational Research Journal,* 24(1), 21-42.

Ruthven K. & Chaplin D. (1997). The calculator as a cognitive tool: Upper-primary pupils tackling a realistic number problem. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 2(2), 93-124.

Ruthven K., Rousham L. & Chaplin D. (1997). The long-term influence of a 'calculator-aware' number curriculum on pupils' mathematical attainments and attitudes in the primary phase. *Research Papers in Education,* 12(3), 249-282.

Ruthven K. & Hennessy S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 47-88.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Shuard H., Walsh A., Goodwin J. & Worcester V. (1991). *Calculators, Children and Mathematics*. London : Simon and Schuster.

Tall D.O. & West B. (1986). Graphic insight into calculus and differential equations. In A.G. Howson et J.P. Kahane (Eds.). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.* ICMI Study Series, Cambridge University Press, pp. 107-119.

Trouche L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. In D. Guin et L. Trouche (Éds.). *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*.

Trouche L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25(1), 91-138.

Thème : Enseignement des mathématiques et appui sur le réel

Présentation du thème

Le rapport des mathématiques et du réel est une question qui a toujours intéressé les mathématiciens et les professeurs de mathématiques, que ce soit dans l'histoire, pour motiver les élèves (et répondre à la fameuse question « à quoi servent les mathématiques ? ») ou pour ancrer la construction des concepts mathématiques eux-mêmes et leur sens dans des expériences concrètes éventuellement issues d'autres disciplines.
Ces différents niveaux d'interrogation du réel ne sont pas indépendants. Par exemple, pour donner du sens aux concepts mathématiques en s'appuyant sur le réel, il faut trouver des problèmes concrets qui les représentent suffisamment bien mais il faut aussi savoir comment s'en détacher pour accéder à des concepts généraux et décontextualisés qui permettront de traiter d'autres problèmes. Comment ensuite organiser l'enseignement pour négocier l'ancrage à la fois sur le réel et sur les mathématiques ? La genèse didactique peut-elle s'inspirer de la genèse historique ?
Les recherches de l'équipe ont rencontré ces questions depuis le début dans des domaines divers et plus particulièrement ces derniers temps en géométrie, statistiques, autour de l'enseignement des nombres et des grandeurs et aussi en algèbre et analyse autour des questions de modélisation.
Au niveau international, c'est une question abordée explicitement ou implicitement dans beaucoup de travaux et qui a connu un développement important dans certaines équipes, par exemple en Italie ou aux Pays-Bas.
Les discussions dans les groupes et autour de la table ronde devraient permettre de recenser et de discuter comment ces questions sont abordées dans divers cadres théoriques à partir d'exemples précis de recherches.

Contributions

Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire — 211
Christine Chambris

Mathématiques, réalité et didactique des domaines d'expérience — 223
Nadia Douek

Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation — 235
Richard Cabassut

Le sens et la réalité en mathématiques — 245
Éric Laguerre

Interactions fortes entre mathématiques et physique dans la transition lycée-université : des équations différentielles du premier ordre dans l'enseignement de la physique — 255
Claude Cabot et Daniel Beaufils

Modélisation et interactions entre mathématiques et biologie : l'expérience du Master professionnel « didactique » de l'université Paris Diderot — 277
Michèle Artigue, Yann Dartois, Nicolas Pouyanne et Guy Rumelhard

Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire)

Christine Chambris

Résumé

Depuis la réforme des mathématiques modernes, grandeurs et nombres vivent séparés dans les mathématiques de l'école primaire française, mais il n'en a pas toujours été ainsi. En effet, une différence majeure entre les programmes de 1882 et 1923 pourtant peu différents est la volonté institutionnelle d'articuler système métrique et numération de position. Bien qu'un peu retravaillée, cette organisation a été maintenue dans les programmes de 1945 en vigueur jusqu'en 1970. Que sait-on de cette organisation ? S'agit-il de prendre appui sur le réel pour étudier la numération ? Si oui, comment ? Par ailleurs, l'évolution des pratiques sociales tant de mesurage que de calcul, les bouleversements dans les mathématiques savantes, la modification des théories de référence pour l'apprentissage rendent-ils vaine l'étude des organisations didactiques anciennes pour éclairer le présent ? Au contraire, l'hypothèse de l'existence, avant la réforme, de réseaux trophiques très développés que nous imaginons plutôt robustes mais qui auraient été détruits suffit-elle à rendre cette étude pertinente pour contribuer à éclairer les choix didactiques actuels ?

Introduction

Ce texte comporte trois parties. Dans une première partie introductive, nous présentons les questions que nous nous posons, le cadre théorique choisi pour les étudier et la méthodologie utilisée. Nous présentons ensuite des résultats et terminons par des conclusions et des questions.

Motivation

Les grandeurs constituent une sorte d'interface entre les mathématiques et le réel. Les grandeurs, c'est tout ce qui se mesure : longueur, masse, capacité, notamment. Le fait de savoir si elles appartiennent ou non aux mathématiques n'est pas une évidence. La réponse a pu varier au fil du temps.

On peut également affirmer que la place des grandeurs dans la définition savante des nombres a été modifiée au 19ème siècle. On est passé d'une définition des nombres tirés des grandeurs (le nombre « trois quarts » est pensé comme résultant du fait de prendre une grandeur, de la partager en quatre et de prendre trois parties) à une définition à partir des entiers : trois quarts est la classe des couples d'entiers associés au couple (3 ; 4) par une certaine relation d'équivalence. Vers les années 1870, les nombres se sont ainsi émancipés des grandeurs au moment des constructions axiomatiques des ensembles de nombres.

Du point de vue de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, à partir de 1923, le programme demande d'articuler enseignement des nombres (notamment entiers) et du système métrique. Cette option est maintenue, même s'il y a des différences, dans le programme de 1945. En 1970, la réforme des « mathématiques modernes » (que nous nous contenterons de désigner dans la suite par « la réforme ») sépare les nombres des grandeurs dans l'enseignement primaire, probablement pour rapprocher l'enseignement élémentaire et la

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 211-222.

construction savante évoquée précédemment. Cela se manifeste notamment par la création du domaine « mesure » dans le programme.

Par ailleurs, des études sur les connaissances des élèves actuels montrent des performances médiocres quant à l'utilisation « en contexte » de connaissances relatives à la numération de position (Parouty 2005) et un progrès des élèves dans toute la numération quand on les fait travailler sur des problèmes de numération « en contexte ». De plus, d'autres études semblent montrer une certaine déconnexion des connaissances « formelles » et « en contexte » pour ce qui concerne le système métrique (Chambris 2008, chapitre 5).

Compte-tenu de la rupture entre numération et grandeurs opérée par la réforme, susceptible d'avoir une incidence sur les connaissances des élèves actuels, et *a contrario* de liens, visibles dans les programmes, entre ces objets avant la réforme, nous cherchons à mieux comprendre quelle pouvait être la contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme. En particulier, avant la réforme, l'enseignement des grandeurs consistait-il seulement à enseigner des pratiques de la vie courante pour elles-mêmes ou, au contraire, contribuait-il à d'autres apprentissages plus conceptuels ?

Notre intention n'est pas de proposer de faire aujourd'hui ce qu'on faisait hier (si tant est que cela soit possible). Par ailleurs, même si notre projet a un rapport avec l'histoire, il ne s'agit pas non plus d'un projet historique mais bien didactique. En effet, dans la mesure où les objets d'enseignement que nous étudions ont une grande permanence dans les programmes d'enseignement, il nous semble pertinent, pour nourrir la réflexion sur l'enseignement actuel, de tenter de caractériser au mieux les relations entre étude des grandeurs et étude des nombres antérieures à la réforme et de repérer les apprentissages « théoriquement » favorisés par ces relations.

Cadre théorique

Nous considérons nos questions sous un angle écologique. Il s'agit de comprendre les relations entre les objets d'enseignement : comment vivent-ils, quelles relations entretiennent-ils entre deux ? Nos objets seront les grandeurs et les nombres. L'écologie des savoirs (Artaud 1997) est une facette de la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard (Chevallard, 1991 & 2002 ; Bosch & Chevallard, 1999).

Nous utiliserons explicitement, comme élément de ce cadre théorique, la notion d'*organisation* (mathématique ou didactique), appelée aussi *praxéologie* (mathématique ou didactique). Une organisation (mathématique ou didactique) est un moyen pour décrire une pratique. Une organisation mathématique ou didactique se présente selon quatre composantes « empilées ». On a un *type de tâches*, c'est à dire un ensemble de tâches problématiques qui se ressemblent (en un certains sens). Ce type de tâches peut être traité par un moyen : la *technique*. Il s'agit de répondre à la question : comment fait-on pour traiter les tâches ? Le moyen (la technique) peut être justifié par une *technologie*, répondant donc à la question : pourquoi la technique fonctionne-t-elle ? La technologie s'inscrit dans un ensemble plus vaste : la *théorie*.

Méthodologie

Pour étudier notre question, à savoir comprendre la contribution de l'étude des grandeurs à l'apprentissage de la numération de position avant la réforme, nous utilisons la méthodologie suivante. Nos données sont des manuels scolaires du cours élémentaire des années 1900 à 1970, c'est-à-dire antérieurs à la réforme. Nous utilisons aussi un texte, le traité de Reynaud (Bezout & Reynaud, 1821), qui est reconnu aujourd'hui comme un texte de référence pour l'enseignement des mathématiques pour le début du 20$^{\text{ème}}$ siècle (Neyret 1995). Nous cherchons à caractériser, en termes anthropologiques, l'étude des grandeurs, de la numération de position et les relations, dans l'enseignement, entre ces deux objets avant la réforme.

Dans nos manuels, nous utilisons les sommaires, notamment pour repérer les progressions. Les parties « cours » des leçons permettent de repérer les techniques et les technologies. Les parties « exercices » (et les parties « cours » s'il y a des exercices corrigés) permettent d'identifier les types de tâches. Enfin, nous utilisons des connaissances didactiques actuelles relatives à la numération de position, aux grandeurs et tirées du cadre théorique, pour identifier des caractéristiques des apprentissages possibles avec l'organisation de l'étude que nous mettons à jour.

Éléments relatifs à l'articulation des études de la numération et du système métrique

Nous présentons maintenant nos résultats. Ils sont organisés selon trois pôles complémentaires : les progressions (ou plan de l'étude) accompagnées d'éléments technologiques, les types de tâches liés aux grandeurs, les caractéristiques des apprentissages possibles avec une telle organisation de l'étude.

Plan de l'étude et discours technologiques

Un système particulier pour désigner les nombres : la numération en unités

Avant de présenter les progressions que nous avons identifiées, nous présentons un système particulier pour désigner les nombres. Nous l'avons appelé : « la numération en unités ». Il s'agit de désigner les nombres en utilisant les mots « unités », « dizaines », « centaines », c'est-à-dire les noms des unités de la numération. Ainsi, parlera-t-on du nombre « six centaines trois unités ». Nous ne distinguons pas le fait d'écrire en lettres ou en chiffres le six et le trois. Ce système de désignation a différentes propriétés : il permet notamment de régulariser la numération orale. Ainsi, « trente » devient « 3 dizaines » (et « soixante-dix », « 7 dizaines »). Il n'est pas univoque, en ce sens qu'un nombre donné a plusieurs désignations dans la numération en unités : « 56 centaines » et « 5 milliers 6 centaines » désignent le même nombre. Il est également plus « souple » que la numération orale. Cette souplesse est probablement liée au fait qu'il n'est pas univoque. Ainsi, « dix cents » n'existe pas en numération orale. Quand on compte de cent en cent, après neuf cents, il y a mille, alors qu'en numération en unités, après « 9 centaines », il peut y avoir « 10 centaines ». Ce peu de souplesse de la numération orale n'est pas spécifique de la langue française, dans laquelle on utilise des mots différents, « cent » et « centaine », pour désigner respectivement le nombre à l'oral et le nom de l'unité. En anglais, où on utilise le même mot « hundred », « ten hundreds » ne relève pas de la numération orale (on dit « one thousand ») mais bien de la numération en unités.

Théorie de la numération de position dans le traité de Reynaud et dans les manuels

Nous en venons maintenant à présenter la théorie de la numération de position telle qu'elle apparaît dans le paragraphe 2 du traité de Reynaud (Bezout & Reynaud, 1821). Dans la théorie, on trouve une construction de la suite des nombres. Tout d'abord, cette construction se fait en utilisant la numération en unités. On construit les nombres en organisant une collection. On trouve d'abord le discours suivant : « Pour former les nombres, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même donne un nombre nommé *deux* (…) » On poursuit ainsi en ajoutant « une unité » à chaque nombre obtenu jusqu'au nombre « dix ». Ensuite,

« la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé dixaine[1] ». On poursuit en indiquant qu'on compte par dizaines comme on a compté par unités. Cela signifie qu'on compte une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, jusqu'à dix dizaines. À ce moment-là, on a donc construit les nombres de un à dix ainsi que les dizaines entières. La suite du discours consiste alors à combler les « trous » entre deux dizaines, en ajoutant les nombres de un à neuf. On a donc construit les nombres jusqu'à neuf dizaines neuf unités (et dix dizaines).

On poursuit ensuite en fabriquant une nouvelle unité : la centaine. Et on reprend le processus : on compte par centaines comme on compte par unités et dizaines. C'est-à-dire qu'on compte une centaine, deux centaines, jusqu'à dix centaines. On a alors construit les nombres de un à cent et les centaines entières. Le processus engagé pour les dizaines est poursuivi au niveau des centaines puisqu'on comble les « trous » entre deux centaines en ajoutant les 99 premiers nombres. Par exemple, entre trois et quatre centaines, on a : trois centaines et une unité, trois centaines et deux unités, trois centaines et une dizaine, trois centaines une dizaine et une unité. C'est-à-dire qu'entre deux centaines, on ajoute les nombres déjà construits. On poursuit ensuite le processus avec les milliers, etc.

Nous regardons maintenant les manuels scolaires. Nous constatons que dès 1900, et sans doute avant, les leçons de numération (ou les différentes rubriques qui composent une leçon) sont intitulées successivement : les unités, la dizaine, les dizaines, entre deux dizaines, la centaine, les centaines, entre deux centaines, le millier, les milliers, entre deux milliers, etc.[2] En regardant le détail du contenu de ces leçons, nous constatons que dans la leçon « Les unités » se retrouve le discours sur la construction des nombres de un à dix. Dans la leçon « La dizaine », on fabrique une nouvelle unité, la dizaine, et se retrouve le discours de mise en relation de la dizaine et des unités. Dans la leçon « Les dizaines », on va compter par dizaines, comme on a compté par unités et dans la leçon « Entre deux dizaines », on va définir les nombres entre deux dizaines en ajoutant les neuf premiers nombres, et ainsi de suite.

Dans le traité, à la construction algorithmique de l'ensemble des entiers s'ajoute l'élaboration de deux types de correspondance : l'une entre numération en unités et numération orale, l'autre entre numération en unités et numération de position.

La première consiste en une traduction terme à terme de la numération en unités vers la numération orale : 5 centaines se dit « cinq cents », 3 dizaines se dit « trente » donc 5 centaines 3 dizaines se dit « cinq cent trente ».

La deuxième consiste en l'énoncé d'une correspondance entre les unités de la numération et la place des chiffres dans la numération de position : « On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples ; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines ; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines ; et ainsi de suite » (Bezout & Reynaud 1821, traité de Reynaud, §2).

Ces éléments sont présents dans les manuels, sous la forme de discours adaptés pour chaque ordre de la numération, de façon stricte jusqu'en 1945, avec des variations ensuite. Ainsi, jusqu'en 1945, l'étude de la numération de position suit la construction théorique de l'ensemble des entiers (plan, discours).

Venons-en à la présentation de la progression pour l'étude du système métrique dans les manuels. Commençons par préciser que cette progression n'est pas présente dans le livre de Reynaud (Bezout & Reynaud, 1821), même si dernier contient un chapitre sur le système métrique. Contrairement à ce que nous trouvons dans les manuels à partir des années 30, ce chapitre n'est pas organisé parallèlement à la numération.

---

[1] Orthographe d'époque.

[2] Il peut arriver en effet que, dans certains manuels, les rubriques du type « la dizaine » et « les dizaines » soient regroupées au sein d'une même leçon (ou encore les rubriques du type « les dizaines » et « entre deux dizaines »).

Progression et discours pour l'étude du système métrique dans les manuels

Les manuels du cours élémentaire, à partir de 1930 et jusqu'en 1970, présentent une progression particulière (avec variations) pour l'étude du système métrique. On observe un entrelacement des leçons des deux domaines. On a ainsi une sorte de progression « en crabe ». De façon schématique, elle se présente comme suit :

- les unités, puis le **mètre** (et éventuellement le litre, le gramme) ;
- la dizaine, les dizaines, entre deux dizaines, puis le **décamètre** (et éventuellement le décalitre, le décagramme) ;
- la centaine, les centaines, entre deux centaines, puis l'**hectomètre** (et éventuellement l'hectolitre, l'hectogramme) ;
- le millier, les milliers, entre deux milliers, puis le **kilomètre**, (et éventuellement le kilogramme).

Cette progression est accompagnée par des discours récurrents pour l'étude du système métrique. Ils sont « isomorphes » à ceux de la numération. On a deux familles de discours :

1) Une première sur les relations entre unités métriques :
   - un hectomètre vaut une centaine de mètres,
   - un hectomètre vaut dix décamètres.

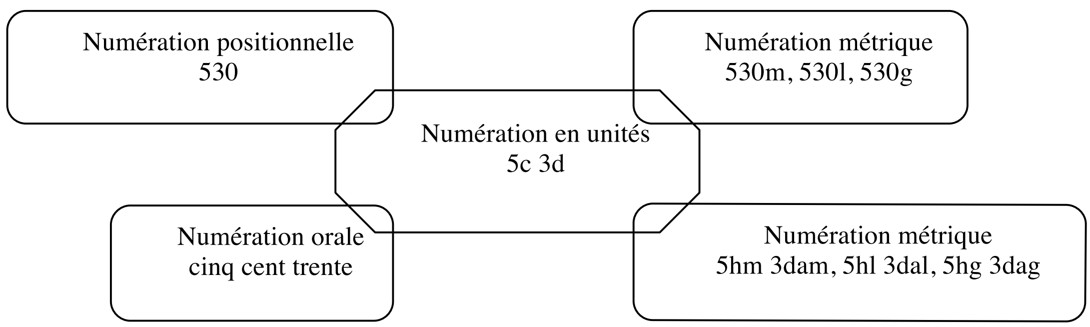
Pour exprimer ces relations, les manuels utilisent apparemment indifféremment les mots de la numération orale ou de la numération en unités ou encore la numération de position (cent, centaine ou 100 ; dix, dizaine ou 10).

2) Une deuxième sur les relations entre position, unités de la numération et unités métriques : « Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines. » (Boucheny & Guérinet 1930, p. 52) ou encore « Dans un nombre de mètres, le chiffre qui représente les hectomètres est au rang des centaines. » (Clap & Milliard 1934, p. 21)

Signalons que, contrairement à la numération, les progressions pour l'étude du système métrique présentent d'assez nombreuses variations. Si, pour au moins une grandeur (toujours la longueur), l'étude des unités métriques suit celle de la numération, pour les autres grandeurs la situation est plus variée. On peut d'ailleurs avoir une étude « ramassée » de toute la grandeur et toutes les unités de cette grandeur en une ou deux leçons, et les discours qui expriment la relation entre numération et système métrique n'existent alors pas toujours. On peut aussi avoir, pour certaines grandeurs, des leçons unité par unité, qui vont reprendre les différents éléments de numération *a posteriori*. Selon les manuels, l'étude de la monnaie (*via* le franc ou le centime, selon les époques, et les dizaines, centaines de ces unités) peut ou non être adjointe à l'étude des mètres, grammes et litres.

Retour sur la numération en unités

Nous voyons la première partie de la théorie de la numération comme une construction de la suite des nombres avec la numération en unités. Les autres discours relient les différentes numérations et la numération en unités. Cette dernière apparaît comme un pivot.



Des tâches pour étudier numération et système métrique

Les tâches liées au mesurage

Nous présentons maintenant les tâches liées au mesurage repérées dans les manuels. Pour ce faire, nous adoptons plusieurs point de vue : d'abord celui des pratiques de la vie courante, ensuite celui de l'étude de la numération. Il s'agit de montrer que ces tâches participent pleinement de l'enseignement de pratiques de la vie courante, mais qu'elles n'y sont pas réductibles, qu'elles contribuent aussi à des apprentissages plus conceptuels.

Nous en proposons d'abord une classification du point de vue des pratiques de la vie courante. Nous avons ainsi identifié trois dimensions :

1) Une première selon le rôle joué par l'instrument :
- estimer : l'élève ne dispose alors pas d'instrument ;
- mesurer : il s'agit d'utiliser les instruments usuels.

Parfois, une technique qui n'est probablement pas celle de la vie courante est proposée ; ainsi, pour mesurer 2 m, on porte 2 fois le mètre, on n'utilise pas le double mètre. Par ailleurs, nous faisons entrer dans cette catégorie la tâche suivante, qui consiste à comparer les grandeurs de différents instruments : « Vérifier que toutes les différentes sortes de litres ont la même capacité » (Boucheny & Guérinet, 1930, pp. 17-18) ;

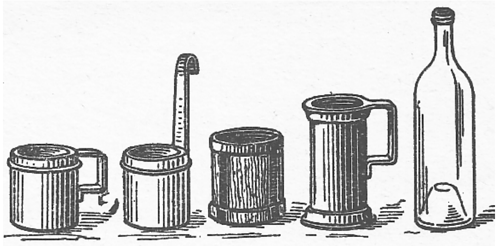


FIG. 12. — Différentes formes du litre.

- estimer puis vérifier en mesurant : ces tâches combinent les deux précédentes.

2) Une deuxième selon les places respectives de la mesure et de l'objet :
- étant donné un objet, donner sa mesure ;
- étant donné une mesure dans une unité, « fabriquer » l'objet.

3) Une troisième selon qu'on s'intéresse à l'égalité ou à l'ordre :
- on peut « trace[r] une ligne de 3 mètres de long (Clap & Milliard 1934, p. 18) » (égalité),
- on peut comparer à la grandeur d'un instrument en demandant, par exemple, de citer des objets plus lourds qu'un kilogramme (ordre).

À ces tâches de manipulation des grandeurs « objets » s'ajoutent des tâches d'évocation des pratiques de la vie courante liées aux grandeurs qui peuvent impliquer du mesurage. Ces tâches d'évocation peuvent faire explicitement référence aux instruments, elles peuvent aussi faire appel à des pratiques commerciales : citer des marchandises que l'on vend au poids.Nous considérons maintenant ces mêmes tâches de manipulation des grandeurs « objets », liées au mesurage, du point de vue de l'étude de la numération.

Dans la leçon sur l'hectogramme de Dumarqué & Renaud (1934), on demande de « Peser des objets de la classe avec la série des poids allant du g au poids de 500 g » ; les poids sont des « petits multiples des unités métriques » : 1, 2, 5. Il s'agit donc d'utiliser les nombres de 3 chiffres en relation avec les masses des hectogrammes, décagrammes et grammes.

Les discours déjà évoqués rattachent les unités métriques à des positions. Ainsi, le discours, « dans un nombre de mètres, le chiffre qui représente les hectomètres est au rang des centaines (Clap & Milliard 1934, p. 21) », utilisé relativement à une situation de mesurage permet de relier « en contexte » 2 hm 3 m et 203 m ; de même pour les masses marquées, où un poids de 500 g doit d'abord être réinterprété comme un poids de 5 hg. Il ne s'agit en effet pas de poser une addition pour trouver la masse ou la longueur totale.

Ces tâches sont accompagnées d'autres qui visent clairement à enseigner les ordres de grandeur des unités métriques (et aussi d'un petit nombre entier d'unités métriques). Par exemple, Boucheny et Guérinet (1930) font soupeser des objets pour en trouver qui pèsent plus ou moins d'un kilogramme ; ils demandent aussi de déterminer des lieux distants de 1 hm, 2 hm de la porte de l'école et font marquer les mètres sur une ligne droite que les élèves ont tracée au préalable.

Nous présentons maintenant un autre type de tâches : les conversions. Nous l'avons choisi car il est possible qu'il soit peu présent dans l'enseignement actuel de la numération. Nous pensons néanmoins qu'il jouait un rôle essentiel dans l'enseignement antérieur à la réforme et nous ne sommes pas convaincue qu'il ait été convenablement « remplacé » dans les organisations actuelles de l'étude de la numération[3]. Nous en profitons pour présenter des variations au sein de ce type de tâches, variations de contexte qui peuvent être étendues à d'autres types de tâches et qui nous semblent cruciales pour comprendre l'écologie des grandeurs et des nombres dans l'enseignement antérieur à la réforme, notamment pour préciser les interactions entre enseignement de pratiques de la vie courante et apprentissages plus conceptuels.

Le type de tâches « conversions »

Nous prenons l'exemple d'une relation de la numération, nous étudions les tâches autour du discours technologique : un millier c'est dix centaines. Il s'agit donc de convertir des centaines en milliers (ou l'inverse).

Une synthèse de l'étude des manuels nous permet de caractériser une progression dans le type de tâches au fur et à mesure des leçons de numération (et de système métrique) pour l'ordre donné (les milliers) :

- Dans la leçon « le millier » : combien faut-il ajouter de centaines à 200 pour faire un millier ?
- Dans la leçon « les milliers » : combien 3 milliers font-ils de centaines ?
- Dans la leçon « entre deux milliers » : combien y a-t-il de milliers dans 35 centaines ? (la réponse est 3 milliers 5 centaines ; la technique que nous avons reconstituée consiste à découper la tâche et à utiliser la leçon précédente : « 35 centaines » se décompose en 30 centaines et 5 centaines, qui font 3 milliers et 5 centaines) ;
- Enfin dans l'étude du système métrique, avec la leçon « le kilomètre » : écrire en hectomètres 3 km 5 hm.

À cette progression dans les difficultés liées strictement à la numération s'ajoutent des variations dans les contextes et les ostensifs (systèmes de désignation). Il ne s'agit pas forcément d'une véritable progression, mais d'éléments qui permettent d'utiliser une même connaissance dans différents contextes. Nous avons retenu les éléments suivants qui nous semblent significatifs :

- Combien de centaines dans 3 milliers ? (décontextualisé, numération en unités)
- Combien d'enveloppes font 30 paquets de cent enveloppes ? (contexte évoqué,

[3] La réforme a provoqué un bouleversement majeur dans l'étude de la numération de position en France et nous interprétons les organisations mathématiques actuelles comme résultant de ce séisme. En particulier, il semble qu'un ensemble de raisons fait que la numération en unités a été très fortement dépréciée au moment de la réforme. Elle a été notamment qualifiée d'« ambiguë », crime de la pire espèce à l'époque des mathématiques modernes. Par ailleurs, l'introduction du travail dans les différentes bases modifie largement les tâches prescrites. Or, la numération en unités est spécifique de la base dix, elle n'existe pas « en bases » (on peut certes en inventer une pour chaque base mais le projet de l'époque consiste, avec les bases, à enseigner le caractère général de la numération de position – qui se passe donc de mot). De plus, il ne nous semble pas exagéré d'écrire qu'au moment de la réforme, en France notamment, « la manipulation des objets » a pu être considérée comme la solution miracle aux difficultés d'apprentissage. Et, dans une certaine mesure, « la manipulation des objets » a pris la place de « la manipulation dans le registre symbolique (constitué par la numération en unités) ». Ces différents éléments semblent pouvoir expliquer que les tâches – dont les conversions – et les technologies qui utilisent la numération en unités ont plus ou moins disparu au moment de la réforme et ne sont que partiellement réapparues depuis.

numérations de position et orale)
- Au cours d'une promenade, compter les bornes hectométriques entre deux bornes kilométriques (contexte matériel, numération métrique) ;
- Avec 1 kg de graines de betterave, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ? (contexte évoqué, numérations métrique et de position).

Pour résumer

À partir des années 30, les manuels proposent une étude conjointe de la numération de position et du système métrique, qui est pilotée par un savoir mathématique savant relatif à la numération de position. Elle mobilise une progression très particulière qui s'est élaborée probablement en plusieurs étapes :
- d'abord pour la numération seule (avant 1923),
- l'étude du système métrique vient ensuite s'insérer dans la progression existante pour la numération (à partir de 1923).

Elle permet de relier des pratiques de la vie courante (dont le mesurage) à des connaissances décontextualisées, éventuellement conceptuelles, sur les nombres.

Nous en venons à des considérations sur les apports possibles d'une telle organisation du savoir sur les apprentissages des élèves. Pour ce faire, nous nous référons à des connaissances didactiques actuelles.

Apports sur les apprentissages des élèves

Sur l'apprentissage des grandeurs

Nous avons relevé, dans l'organisation du savoir telle qu'elle semble exister dans l'enseignement antérieur à la réforme, des tâches de comparaison et d'estimation dont nous pensons qu'elles contribuent à la connaissance des grandeurs et de leurs propriétés (Brun & Fluckiger, 2005).

En outre, la manipulation des instruments semble favoriser le report de l'unité plutôt que la lecture de graduation, même si cela peut s'opposer parfois à l'enseignement de pratiques de la vie courante.

Sur l'apprentissage des nombres et de la numération de position

Nous rapportons un extrait de la préface d'un manuel scolaire du cours élémentaire du début du siècle. Il n'est pas daté, mais antérieur à 1923 :

> « À côté de nombreux exercices de lecture et d'écriture, nous avons proposé des exercices intéressants de formation et de décomposition des nombres, de mesurage et d'évaluation des grandeurs qui préparent au calcul mental et habituent à voir sous les chiffres la quantité qu'ils représentent. » (Mortreux & Mortreux, sd)

DeBlois (1996) se place sur le plan du développement cognitif. Elle souligne l'importance, pour la « compréhension » de la numération de position, d'être capable d'associer à chaque chiffre de l'écriture d'un nombre un « ordre de grandeur ». Nous considérons qu'on peut interpréter les apprentissages des ordres de grandeur des unités métriques reliés à des ordres de la numération comme participant d'un tel savoir.

Verschaeffel et De Corte (1996) évoquent, à propos de la connaissance des nombres, l'importance de développer la connaissance des ordres de grandeur. Comme le souligne un rapport des inspecteurs généraux sur les conférences pédagogiques en 1928, la connaissance des ordres de grandeur des unités métriques peut participer de cette connaissance :

> « À l'heure où il s'agit de rendre mieux assises et plus générales des notions déjà acquises sur la numération et où il serait fastidieux et [vain] de manier des marrons, des billes, des « unités discrètes », la distance au village voisin, le poids d'un objet, la capacité d'un vase, peuvent aisément donner l'idée de mille, dix-mille, etc. » (cité par Butlen, 1985)

Sur les relations entre les connaissances (écologie)

Dans l'enseignement antérieur à la réforme, les relations entre les deux domaines (numération et système métrique) semblent particulièrement développées. Les moyens que nous avons repérés pour ce faire sont les suivants :

- Reprise de certains types de tâches : les conversions que nous avons évoquées, mais aussi des tâches relatives aux valeurs des différentes positions, qu'elles soient relatives au système métrique ou à la numération ;
- Grande proximité de certaines technologies et techniques permise par la numération en unités.

Au sein d'un domaine, on observe le développement des types de tâches :

- avec des tâches contextualisées ou non,
- avec des contextes et des ostensifs variés.

À propos des places respectives des pratiques de la vie courante et d'éléments plus conceptuels, il semble que, dans certains cas, on enseigne des techniques qui ne sont pas toujours des pratiques de référence pour la vie courante mais qui sont utiles pour la connaissance des grandeurs et des nombres (pour mesurer 2 m on porte 2 fois le mètre). Dans d'autres cas, au sein d'un domaine, l'évocation de pratiques de référence pour la vie courante (en contexte : « pour peser, on a utilisé un poids de 500 g, un poids de 200 g et un poids de 5 g et un poids de 1 g … ») s'inscrit dans le développement d'un type de tâches qui contient aussi des tâches décontextualisées.

Par ailleurs, certaines tâches sont prises dans plusieurs chaînes trophiques[4]. Considérons la tâche qui apparaît dans les années 30 : trouver des objets plus ou moins lourds qu'un kilogramme et vérifier. Nous avons reconstitué les chaînes ou plutôt le réseau trophique dans lequel elle se trouve. En fait, nous allons montrer que cette tâche est utile dans quatre domaines de savoirs, c'est-à-dire quatre habitats. Cette tâche peut d'abord être interprétée comme une tâche de comparaison de grandeurs, de la masse en l'occurrence. Elle contribue ainsi à la connaissance de la grandeur masse. Le fait qu'on compare à « un kilogramme », et non deux objets entre eux, permet de l'inscrire dans la connaissance du système métrique : on apprend ainsi ce qu'est « un kilogramme ». Le fait qu'on vérifie, probablement en utilisant une balance et une masse marquée, permet de l'inscrire dans une connaissance des pratiques de la vie courante : utiliser une balance (ici en l'occurrence, connaître le déséquilibre) et connaître (reconnaître) la masse marquée du kilogramme. Enfin, cette tâche ne se situe pas n'importe où dans les manuels antérieurs à la réforme : elle apparaît juste après l'étude du millier. Le kilogramme est ainsi vu comme le millier de grammes, on a ainsi une « idée de mille », mille grammes, et cette tâche contribue alors à l'étude de la numération.

Conclusions et questions pour l'enseignement actuel

L'étude de l'enseignement des mathématiques au cours élémentaire avant la réforme montre une organisation globale des savoirs pour le bloc *système métrique, numération de position et pratiques de la vie courante qui impliquent la numération ou le système métrique*. On peut

[4] Une chaîne trophique (du grec « *trophein* », nourrir) est une « sorte de chaîne alimentaire du type A se nourrit de B qui se nourrit de C… » pour les objets d'enseignement (Artaud, 1997). Aussi, paradoxalement, pour une tâche, le fait d'être dans une chaîne trophique, d'être utile à d'autres, d'être mangée par d'autres est un bon moyen d'exister.

sans doute parler de praxéologie globale. L'organisation ancienne fait ainsi exister de nombreuses chaînes trophiques tant au sein d'un domaine, la numération ou le système métrique, qu'entre les deux domaines. Dans cette organisation, le système de désignation « numération en unités » joue un rôle majeur. Par ailleurs, certaines pratiques de la vie courante ne sont pas enseignées telles quelles mais modifiées pour des besoins didactiques.

La situation actuelle est sans doute assez différente : séparation des grandeurs et des nombres dans les programmes, rôle mineur joué par la numération en unités notamment. Des études des connaissances des élèves actuels montrent certaines déconnexions dont on ne peut exclure qu'elles sont plus ou moins le produit de cette situation.

Dans quelle mesure ces connaissances sur l'enseignement ancien peuvent-elles nous être utiles pour réfléchir sur l'enseignement actuel ?

Un premier axe est plutôt d'ordre méthodologique. En effet, l'enseignement ancien a probablement une structure beaucoup plus « visible » que l'enseignement actuel, le premier axe consiste donc à utiliser ces connaissances pour poser des questions pour étudier l'enseignement actuel. Tel élément que nous avons identifié dans l'enseignement ancien existe-t-il dans l'enseignement actuel ? Si non, par quoi est-il éventuellement « remplacé » ? Ces questions peuvent être globales ou locales. Nous avons par exemple pointé le rôle de la théorie de la numération tant pour l'étude de la numération que celui du système métrique. Qu'en est-il d'une théorie de la numération dans l'enseignement actuel ? Nous avons aussi pointé une grande proximité dans la formulation des discours en numération et système métrique, qu'en est-il dans l'enseignement actuel ?

Deux autres axes concernent les éventuelles « transpositions » de certains éléments de l'enseignement ancien vers l'enseignement actuel, éléments dont nous pensons qu'ils sont peu répandus aujourd'hui mais qui semblaient utiles, hier, pour les apprentissages ou l'enseignement. Ces deux axes sont d'une part la pertinence, d'autre part la faisabilité, l'un n'étant pas nécessairement étranger à l'autre.

Nous avons utilisé des connaissances didactiques actuelles pour montrer la pertinence de certaines tâches anciennes sur un plan « théorique » : par exemple, les tâches d'estimation de grandeurs dans la connaissance de la numération. On peut penser que de telles tâches seraient encore pertinentes pour l'enseignement actuel et qu'elles n'existent plus ou peut-être qu'elles existent encore mais qu'elles ne jouent pas de rôle dans l'étude de la numération. La question de leur « transposition » est alors complexe car c'est notamment le fait qu'elles se trouvent dans les chaînes trophiques *ad hoc* qui rend ces tâches pertinentes du point de vue de la numération. Il ne s'agit donc pas tant de réintroduire ces tâches mais de les réintroduire au bon endroit, qui plus est dans un endroit qui n'existe peut-être pas aujourd'hui.

Nous pensons que notre étude permet notamment de repérer des conditions d'existence de certains objets qui participent de l'étude de faisabilité pour une éventuelle « transposition ». Comment faire, par exemple, pour transporter des réseaux trophiques ? Il est clair que nombre d'instruments de mesure anciens ont disparu mais notre étude montre qu'on n'enseigne pas que des pratiques de la vie courante, qu'on peut en détourner certaines pour des besoins didactiques. Nous avons identifié les services rendus (niches) par ces instruments anciens et, par suite, nous pouvons chercher, en conservant tout ou partie des niches, ce qui pourrait, « remplacer » les instruments anciens dans l'enseignement actuel.

Si notre étude permet de mettre en évidence des éléments pour la « transposition » de certaines connaissances, il est clair que cette question est en général très complexe et qu'elle engage notamment des dimensions culturelles et épistémologiques (notamment les conceptions des enseignants tant du point de vue de l'apprentissage que des mathématiques). Est-il par exemple pertinent de disposer d'une théorie pour appuyer chaque pas de l'étude de la numération ? Cela ne s'oppose-t-il pas à une certaine prise d'initiative des élèves dans les situations d'apprentissage ? Comment introduire, dans les pratiques des enseignants, une théorie de la numération au plus près des tâches des élèves ? D'une certaine façon, accepter que les grandeurs contribuent à l'étude de la numération suppose probablement de renoncer à certaines conceptions des mathématiques véhiculées puissamment par la réforme et dont on peut faire le pari que certaines sont profondément ancrées dans les imaginaires mathématiques des enseignants.

Finalement, notre étude peut être vue comme un point de départ pour une étude comparative. Dans cette perspective, il va de soi qu'elle peut être utilement complétée par des études de ce qui se passe, aujourd'hui, dans d'autres pays que la France sur le même thème.

Christine Chambris
Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz
cchambris@free.fr

Références

Artaud M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In Dorier J.-L.., Perrin M.-J. et al. (Eds). *Actes de la 9e école d'été de didactique des mathématiques*. 101-139. Houlgate : ARDM et IUFM de Caen.

Bezout E., Reynaud A. A. L. (1821). *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout; avec des notes et des tables de logarithmes, par A. A. L. Reynaud*. Paris : Librairie pour les sciences. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table (le 04/09/09).

Bosch M., Chevallard Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(1), 77-124.

Boucheny G., Guérinet A. (1930). *L'arithmétique au cours élémentaire (1ère et 2ème année)*. Paris : Librairie Larousse.

Brun J., Fluckiger A. (2005). Conceptualisation et classes de problèmes dans le champ conceptuel de la mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 25(3), 349-402.

Butlen D. (1985). *Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels*. Cahier de didactique des mathématiques. Paris : IREM de Paris 7.

Chambris C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/fr/ (le 04/09/09).

Chevallard Y. (1991). *La transposition didactique avec un exemple d'analyse de la transposition didactique*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie et régulation. In Dorier J.-L. et *al*. (Eds) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Clap C., Milliard P. (1934). *Cours élémentaire Arithmétique Système métrique Géométrie Calcul mental*. Paris : Librairie Delalain.

DeBlois L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16(1), 71-128.

Dumarqué J., Renaud L. (1934). *Arithmétique Cours élémentaire* Paris : Librairie Delagrave.

Mortreux X., Mortreux O. (sd, antérieur à 1923). *Nouvelle arithmétique des écoles primaires. Cours élémentaire. Édition pour le maître*. Paris : Belin.

Neyret R. (1995). *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*. Thèse. Grenoble : Laboratoire Leibniz - IMAG - Université Joseph Fourier.

Parouty V. (2005). Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres. Commission Inter-IREM COPIRELEM*. Toulouse : IREM de Toulouse.

Verschaffel L., De Corte E. (1996). Number and Arithmetic. In Bishop A. J., Clements K. (Eds) *International handbook of mathematics education, chapter 3*. 99-138 Dordrecht : Kluwer Academic Publishers

Textes officiels par ordre chronologique

Programmes des écoles primaires élémentaires du 23 février 1923.
Instructions relatives au nouveau plan d'études des écoles primaires élémentaires (20 juin 1923).
Programme des écoles primaires du 17 octobre 1945.
Instructions sur les programmes de l'école primaire du 7 décembre 1945.
Programme et instructions pour l'enseignement mathématique du 2 janvier 1970.

Mathématiques, réalité et didactique des domaines d'expérience

Nadia Douek

Résumé

Une caractéristique de la didactique des domaines d'expérience est de construire les savoirs mathématiques à partir de « domaines d'expérience » (D.E.) généralement pluridisciplinaires et traitant une certaine « réalité ». Nous questionnerons le mot « réalité », et présenterons la théorie des domaines d'expérience. La théorie des champs conceptuels de Vergnaud et les travaux de Vygotsky constituent les références théoriques épistémologiques et cognitives sur lesquels s'appuie la didactique des D.E. pour analyser le potentiel d'un domaine d'expérience pour la construction de savoirs, et pour concevoir les situations didactiques qui permettent ces constructions.

Quel réel ?

On considèrera un « réel », avec des éléments manufacturés ou naturels, ainsi que l'activité dont l'élève a l'expérience, dans la mesure où ce « réel » est susceptible de faire sens pour le sujet, soutenir ses élaborations conceptuelles et le développement de ses savoirs scolaires.
Nous faisons l'hypothèse qu'un objet de savoir fait sens pour un sujet s'il a un caractère culturel et plus spécialement s'il est susceptible d'être « instrumentalisé » (Rabardel, 1999) par le sujet. Un élément de « réalité » nous intéressera donc dans la mesure où il est (potentiellement pour l'élève) pris en charge par sa culture de référence, suivant un ensemble de pratiques, de valeurs, de croyances, d'outils...

De la définition de la culture donnée par Hatano & Wertsch (2001, p. 77-83) :

> « *Culture* means the special medium of human life consisting of a set of interrelated artefacts (...), shared to some extent among members of the community and often inherited over generations. These artefacts include physical tools, common sense knowledge and beliefs, social organizations, and conventional patterns of behaviour associated with the physical, symbolic, and social tools. »

nous retenons trois choses :
- L'acception instrumentale (Rabardel, 1995) des éléments (*artefacts*) par lesquels est définie une culture (les instruments matériels, les connaissances et les croyances qui relèvent du sens commun, les organisations sociales, les schèmes de comportement) ;
- Le caractère « lié » de ces artefacts (*interrelated artefacts*), qu'il est intéressant de rapprocher de l'idée de liens systémiques par lesquels Vygotsky caractérise les « concepts scientifiques » (voir plus loin) ;
- La transmissibilité de la culture et sa référence à une communauté.

Et nous en déduisons une caractérisation opérationnelle de ce qui est susceptible de faire sens pour l'élève, et qui peut nous guider dans le choix des éléments de réalité sur lesquels peuvent s'appuyer les travaux scolaires... afin de travailler à partir de ce qui fait sens.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 223-233.

Le « réel » peut-il fonder la construction de savoirs mathématiques ?

La dialectique concept quotidien / concept scientifique de Vygotsky comme base de notre cadre théorique

Les concepts quotidiens (CQ) seront un outil théorique qui permet de considérer la nature de la conceptualisation spontanée du « réel » chez l'élève, et d'analyser, d'un point de vue cognitif, son rapport avec la conceptualisation visée par l'école. Cette dernière est bien modélisée par ce que Vygotsky (1985, Chapitre VI) nomme les concepts scientifiques (CS), et nous identifierons la construction de savoirs scolaires à une « conceptualisation scientifique ». Notre « instrumentation » (et interprétation) des CQ et CS est une élaboration que nous allons préciser dans le paragraphe suivant. La dialectique CQ/CS est le cadre théorique sur lequel nous nous appuyons et dont nous adoptons les résultats, en particulier pour expliquer l'importance de construire les savoirs scolaires sur l'expérience de l'élève (dont celle du « réel »). Nous concevons alors les moyens didactiques de la construction des savoirs mathématiques sur la base de ce cadre et de ces résultats.

Les concepts quotidiens sont décrits par Vygotsky comme riches en sens, « saturé(s) de la riche expérience personnelle de l'enfant » (p. 292). Leur utilisation et les systèmes auxquels ils se relient sont plutôt implicites. Ils se forment spontanément chez le sujet en rapport avec son expérience, sa culture et son environnement. Ils sont plutôt de portée locale.

Les concepts scientifiques sont décrits par Vygotsky par le fait qu'ils sont utilisés de façon consciente et intentionnelle. Ils sont maniés et maîtrisés de façon explicite. On les relie à d'autres concepts pour constituer des systèmes. Ils ont un caractère de généralité, dans le sens où ils sont théoriques et ont un caractère systémique. Ils sous-entendent une recherche de rigueur, et on a tendance à les présenter à l'aide de définitions.

La dialectique concept quotidien / concept scientifique est motrice de l'apprentissage. Les CS et CQ se distinguent, du point de vue de l'expérience de l'enfant, par les rapports différents qu'il élabore avec leur(s) objet(s). Quant aux implications dans l'enseignement-apprentissage, Vygotsky utilise l'image de la germination des CQ *« vers le haut »,* vers une plus grande généralisation, et celle des CS *« vers le bas »* puisqu'ils se développent à travers l'application des généralités et des liens systémiques aux situation particulières (comme dans la recherche d'exemples).

Interprétation et usage du cadre vygotskien

Le caractère de scientificité (ou de quotidienneté), concerne, pour nous, l'usage des concepts et non pas les concepts en eux-mêmes. Ainsi, des concepts algébriques peuvent être mobilisés de façon quotidienne et fonder des intuitions de structure lors d'un travail sur des espaces fonctionnels. La distinction n'est donc pas essentiellement d'ordre épistémologique. Le rapport avec la question de la « réalité » concerne ce mode d'accessibilité décrit comme « quotidien » : pour un sujet, le réel est accessible sur le mode quotidien.

On retiendra des travaux de Vygotsky que les développements de ces deux pôles (CQ, CS) forment un jeu dialectique. Cela justifie pour nous la nécessité de s'appuyer sur des concepts à caractère quotidien développés chez l'élève pour parvenir à construire ou développer l'usage scientifique de ces concepts (ou d'autres analysés comme proches et liés), ce qui permet l'enracinement de la conceptualisation scientifique au(x) concept(s) quotidien(s) et, réciproquement, la nécessité d'assurer le développement « quotidien » des concepts et constructions scolaires. Notons que le rapport d'enracinement et de développement entre CQ et CS n'est pas toujours sans opposition ni distanciation.

La nécessité de l'ancrage des apprentissages mathématiques dans le réel, du point de vue développemental, n'est alors que l'application de l'hypothèse de Vygotsky sur la dialectique CQ/CS au domaine qui nous intéresse. Cependant, d'autres arguments encore pourraient soutenir ce choix.

Approfondissement et motivations complémentaires du choix vygotskien

Concernant la perspective de l'ancrage dans le réel, la motivation de l'activité mathématique pour l'élève peut se fonder sur la *valeur culturelle* de la maîtrise de pratiques qui font sens. Ces pratiques peuvent être extrascolaires, comme l'utilisation de la monnaie. Elles peuvent aussi concerner des domaines disciplinaires offrant plus facilement prise à la curiosité scientifique des enfants, comme l'étude de la croissance de plantes ou la construction d'objets en technologie, dans l'enseignement primaire. Ces domaines permettent une dévolution plus aisée que ne le permettent les problèmes mathématiques décontextualisés, ou contextualisés mais artificiels (détachés d'un réel investissement culturel dans le cadre du travail en classe). Ainsi contextualisés, les problèmes mathématiques sont approchés comme une modélisation et donc plutôt sur le mode quotidien (vis-à-vis d'un problème mathématique posé dans un cadre mathématique).

Enfin, quel que soit le contexte dans lequel il s'inscrit, le travail mathématique lié à la conceptualisation quotidienne permet aux élèves de s'engager dans l'activité plus aisément qu'à partir d'une conceptualisation scientifique. En effet, quand l'enseignant(e) traite un savoir à partir d'un mode de conceptualisation scientifique de façon prématurée, plusieurs aspects propres à un tel choix risquent de mettre les élèves en difficulté :

- Un temps premier de mise en place de formes langagières, de représentations sémiotiques spécifiques et de définitions devient nécessaire pour traiter des objets qui n'ont pas encore « la bonne résonance » chez le sujet.
- Une exigence de rigueur prématurée peut écraser l'intuition de la situation, alors que celle-ci s'accompagne souvent d'une expression maladroite et insuffisante. Intuition et fragilité de l'expression sont plus acceptables dans le traitement quotidien, et elles sont nécessaires pour saisir une situation et la signification du problème à résoudre.
- Un contexte ou des représentations sémiotiques « trop » mathématisés, nécessitent, pour être saisis, d'être « exemplifiés ». Or, il faut pour cela que des situations à la portée de l'imagination (proches de l'expérience) soient accessibles, ce dont on ne peut être sûr que si l'on a travaillé en classe pour assurer la disponibilité d'une conceptualisation quotidienne.
- L'appel à des relations entre concepts, ou entre concepts et situations, dont l'élève n'a pas encore internalisé (ou développé) les liens systémiques. Dans ce cas, il risque de mobiliser ces relations comme procédures efficaces par contrat didactique, alors qu'elles ne sont pas assez maîtrisées et surtout ne sont pas mobilisées dans la conscience de leur rôle. Cela se voit bien quand les élèves font des erreurs grossières de transfert d'une procédure qu'ils manient bien... sans lui prêter de sens.

Dans ces différents cas, il n'y pas l'espace pour une « germination vers le haut », et les « germinations vers le bas » possibles sont limitées dans d'étroits chemins. La conséquence de l'entrée par l'usage scientifique des concepts pourrait être une « rigidification » de la conceptualisation, avec des ruptures de sens et des difficultés de transfert. Il nous paraît préférable que la conceptualisation soit mobile, qu'elle évolue avec les nouvelles situations dans lesquelles elle devra être mobilisée, et adaptée.

Nous rencontrons, par exemple au primaire en France, cette « rigidification » dans l'apprentissage du système de numération. Les élèves apprennent le plus souvent la numération à partir d'échanges de groupements abstraits (voir plus de détails dans la section

« Exemple »), soit encadrés par un matériel qui impose les règles d'échanges, soit par un jeu de société qui n'a cours qu'en classe de mathématiques. Dans les deux cas, l'entrée se fait plutôt sur un mode scientifique, essentiellement dans la mesure où l'élève n'a pas de ressources culturelles suffisantes pour produire l'expression verbale ou les représentations sémiotiques nécessaires pour s'engager dans l'activité qui concerne ces situations. Il doit commencer par les apprendre. Bien sûr, il est inévitable d'exiger qu'il les apprenne avec une certaine rigueur et une certaine généralité, sinon les interactions ne sont pas possibles (du fait même que les situations ne relèvent d'aucune des activités spontanées de l'élève, et donc pas non plus sur des références communes). Et, concernant l'intuition, celle-ci ne peut être appelée si l'objet n'est pas conceptualisé sous une forme ou une autre, en particulier sous la forme quotidienne. Par exemple, la construction de la valeur de position d'un chiffre ne peut s'appuyer sur l'intuition que pour les élèves qui ont l'habitude des jeux de société, si c'est le parcours choisi dans cette classe. Pourtant, tous les élèves de cet âge, dans notre société, rencontrent ce concept de valeur sous un traitement quotidien à propos de la valeur de leurs vêtements, de leurs objets personnels ou de friandises qu'ils peuvent acquérir ou non, mais ce concept-là est trop éloigné.

Cette entrée par la conceptualisation scientifique et par la mise en place des représentations sémiotiques, en amont de l'activité dans laquelle l'élève doit s'impliquer, peut donc rebuter. Mais une telle conceptualisation scientifique n'est pas mobile : une fois la numération mise en place, les élèves travaillent sur la monnaie (les euros), et beaucoup d'enseignants rapportent les difficultés des élèves (et pas les plus « mauvais ») à transférer les compétences acquises dans le cadre plus « mathématique » des groupements-échanges vers le cadre qui pourrait (et devrait) leur être familier de la monnaie. On verra plus loin que l'effet de la rigidification de la conceptualisation du système de numération se fait sentir assez longtemps. Cette réflexion sera développée ci-dessous dans l'exemple.

Considérant qu'on peut fonder les apprentissages mathématiques sur le réel, que c'est même une condition favorable, et que pour cela la dialectique CQ/CS modélise un apprentissage efficace, il nous faut maintenant réfléchir sur les conditions qui favorisent la mise en place d'une dialectique CQ/CS.

La théorie des domaines d'expérience

La théorie des domaines d'expérience, élaborée par Boero et son équipe de l'université de Gênes (Boero *et al.,* 1995 ; Douek, 2003), étudie comment la nature des savoirs construits par le sujet est fonction des diverses pratiques et cadres culturels dans lesquels ces savoirs sont impliqués. Elle s'inspire de la dialectique CQ/CS de Vygotsky et prend en considération les deux tendances dans l'usage des concepts, « quotidienne » et « scientifique ». La perspective est d'accompagner l'élève dans l'appropriation des objets de savoir visés par l'école à partir de la culture développée à travers ses propres pratiques situées, et de développer sa maîtrise de ses concepts quotidiens.

On peut repérer des champs culturels d'activités humaines par la stabilité, dans une communauté donnée, des pratiques et des concepts qu'ils impliquent. Ils constituent des domaines d'expérience potentiels pour le travail de classe.

Un domaine d'expérience (D.E.) implique plusieurs types de pratique et de concepts mobilisés sur le mode quotidien et d'autres sur le mode scientifique, spécifiquement sous-jacents à ces diverses pratiques, et diverses représentations (symboliques ou autres) qui y sont en usage. Un D.E. est caractérisé non seulement d'un point de vue épistémologique, mais aussi par la réalité culturelle et cognitive des sujets qui y sont impliqués, à travers trois pôles :

- *Le contexte externe* du domaine d'expérience : des contraintes provenant de la « réalité » même (le soleil a un mouvement régulier, certaines mesures sont impossibles

directement), des moyens plus ou moins matériels (les instruments), des représentations symboliques (les schémas par exemple), des règles et usages sociaux (l'usage de la monnaie).
- *Le contexte interne de l'enseignant*, caractérisé par ses savoirs (dont ses compétences didactiques concernant le domaine), ses pratiques et ses conceptions, avec leur part de subjectivité, et ses appartenances culturelles.
- *Le contexte interne de l'élève*, caractérisé lui aussi par ses savoirs, ses pratiques et ses conceptions, avec leur part de subjectivité, et ses appartenances culturelles.

Ainsi, un domaine d'expérience sera traité d'une façon qui dépend de l'enseignant (des aspects qu'il questionne le plus, dont il est le plus conscient, des problèmes qu'ils conçoit comme significatifs du point de vue de ses conceptions des mathématiques et de leur enseignement) et des élèves de la classe (de leur engagement dans le domaine, de leurs ressources culturelles, etc.). Ce qui ne contredit en rien qu'une ingénierie soit élaborée en équipe et réalisée par différents enseignants dans différentes classes.

Ayant choisi un domaine d'expérience, construire un ensemble cohérent de situations didactiques dans ce domaine nécessite plusieurs étapes de travail. Il faut cerner les racines et les échos des conceptualisations scientifiques dans les pratiques dont les élèves sont (ou sont susceptibles d'être) imprégnés dans leur vie quotidienne et à travers les pratiques scolaires dans les différents domaines disciplinaires, puis choisir des éléments exploitables au niveau didactique grâce à une analyse épistémologique et cognitive des activités engagées dans les pratiques quotidiennes et dans celles qui sont liées à la conceptualisation scientifique. Ces étapes dépendent des contextes internes potentiels des enseignants et des élèves et de leurs variations possibles.

Un point crucial dont il faut tenir compte est que l'élève ne développe pas nécessairement spontanément une conceptualisation quotidienne « suffisante » pour que la dialectique CQ/CS puisse être engagée. Il faut généralement l'aider, dans le cadre scolaire, à stabiliser certaines pratiques et l'expression les concernant.

L'approche des domaines d'expérience répond à la motivation de l'élève qui cherche à s'insérer, comme mieux adapté, plus compétent, dans la culture qui a valeur de référence pour lui. La « motivation » dépend en partie de l'ancrage des concepts développés dans le cadre scolaire aux constructions issues des cultures de l'apprenant, et de la conscience de ce rapport.

Analyse épistémologique et cognitive des concepts

La définition des concepts de Vergnaud (1990) est un outil d'analyse épistémologique et cognitive que nous appliquons aux concepts de l'école, à ceux d'un domaine d'expérience et à l'activité de l'élève, dans sa diversité, pour estimer la conceptualisation qui la sous-tend, et son évolution. Avec la dialectique CQ/CS, ce sont des outils efficaces dans la construction des ingénieries de la didactique des domaines d'expériences. Vergnaud (p. 145) définit les concepts par leurs trois composantes :
- *Les situations de référence* sont « l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ». Soulignons que, dans le cadre scolaire, une situation de référence l'est, pour l'élève concerné, s'il lui est possible d'y faire référence dans le cours d'une activité.
- *Les invariants opératoires* sont « l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (les signifiés) ». Ils « se trouvent à la charnière des rapports entre le réel et la connaissance pratique et théorique que le sujet s'en forme ».
- *Les représentations externes* sont les signifiants : langage verbal, symboles, schémas, gestes, etc. Les outils et certains dispositifs matériels peuvent avoir des fonctions de représentation.

Ces trois composantes offrent des critères pour analyser les contextes externe et interne d'un domaine d'expérience. Elles permettent de cerner avec une certaine rigueur la conceptualisation de ce qui fait le « réel » pour un sujet, qu'elle soit sur le mode quotidien ou scientifique, et d'en estimer le développement et l'évolution vers une maîtrise « scientifique », en rapport avec différents types d'activité (voir Douek, 1999 & 2003).

Exemple d'analyse et réflexion sur le « réel »

La conceptualisation du système de numération

Pour commencer à construire la numération, les enseignants établissent généralement des situations de référence, pour les élèves de première année du primaire, à partir de dispositifs matériels. Citons, par exemple, les réglettes de couleur et de longueurs 1 à 10 (de sections 1×1) qui servent à représenter les nombres jusqu'à 99 en combinant/additionnant leurs valeurs/mesures de longueur ; les jetons d'un jeu de banquier (dont les différentes couleurs représentent des niveaux de groupement et les valeurs correspondantes (ERMEL, Hatier 2006)) ; les billes, les boîtes de 10 billes et les valises de 10 boites des ouvrages de Brissiaud (voir par exemple, le fichier « J'apprends les maths CP avec Picbille », Édition 2009) ; et la monnaie (les euros et centimes d'euros), avec ses différentes pièces, dont celles qui représentent des groupements de 10, 100 et ont pour valeurs 10, 100.

Dans ces exemples, les objets matériels sont en même temps des représentations externes de groupements et/ou de valeurs. Au fil du travail, les élèves se familiarisent avec eux et résolvent des problèmes posés dans ces contextes (groupements-échanges, passage de représentations à d'autres). Les activités sollicitent des invariants opératoires (pour former des décompositions additives, par exemple). Les explications des enseignants et des élèves prennent appui sur ces objets organisés et sur les procédures mises en place ; des situations de référence se forment.

Les contextes externes et les procédures des situations utilisant les réglettes ou les billes de Brissiaud sont spécifiques à l'école. Ceux du jeu du banquier sont proches de ceux des jeux de société (dont seulement certains élèves ont l'expérience). Tandis que ceux de la monnaie sont proches de ceux de pratiques culturelles communes.

C'est seulement dans le cas de la monnaie que les procédures que doivent maîtriser les élèves peuvent être développées, avec l'aide de l'enseignant, comme des évolutions/adaptations de schèmes qui, soit sont déjà en place, soit se développent en parallèle et en cohérence dans la vie extrascolaire. En terme d'artefact, les pièces de monnaie, ainsi que les schèmes et procédures associés, ne sont pas seulement instrumentalisés dans le cadre scolaire, mais sont généralement reconnus utiles par les élèves comme susceptibles de résoudre des problèmes qui peuvent les intéresser directement hors de l'école.

Dans la didactique de ce domaine d'expérience, l'activité langagière, les raisonnements et les explications, surtout au début du travail, se développent à partir d'expressions courantes dans la culture environnante des élèves, en référence à des arguments non spécifiques aux mathématiques. Par exemple : « je peux payer ce bonbon avec les pièces de 1c, 1c... et 1c ou bien avec une pièce de 10c », utilisant le mot *et* à l'oral et à l'écrit, et faisant référence aux usages acceptés par la boulangère. Les représentations externes spécifiques aux mathématiques (les signes et les schémas comme « entourer ce qui fait 10c », ou comme le tableau de numération) sont introduits graduellement pour formaliser des activités et des procédures existantes sur un mode qui tend à devenir scientifique, pour commencer à résoudre des problèmes plus *théoriques*. Par exemple, après avoir fait de nombreux travaux de type groupement-échange pour résoudre des problèmes de paiement, vient une question qui tend à structurer et formaliser, donc d'une certaine façon à théoriser : « Pourquoi écrit-on le prix 36c avec un 3 et un 6 ? ». Ces structurations coexistent avec le langage familier et avec les dessins. Par ailleurs l'importance et la place faites à la production écrite dans la didactique des domaines d'expérience sont un moyen de structurer à la fois les représentations externes et les raisonnements de résolution de problèmes (voir Duval (1998) pour le rôle de l'écrit dans la structuration du récit).

La dialectique CQ/CS est possible parce que les concepts à construire font écho à des conceptualisations quotidiennes liées à l'expérience. L'expérience de la *valeur* vécue dans les rapports à autrui peut être réinvestie et donner du sens à la valeur de ces pièces de monnaie. Elle peut alors être questionnée et poussée vers une conceptualisation scientifique de la valeur expressément différenciée de la quantité, et liée au nombre et à son écriture (à partir de situations où on découvre que cinq pièces de 1 valent moins que deux pièces de 5, par exemple). Le concept de valeur n'a donc pas ici un caractère spécifique arbitrairement accolé à ces pièces dans le travail de la classe.

Quand des situations de référence n'appartiennent pas à la culture de l'élève, les procédures de résolution de problèmes doivent suivre des règles qu'on découvre et qu'on apprend comme nouvelles et spécifiques au travail de classe, en même temps que l'essentiel des représentations externes concernées. De fait, des représentations externes importantes (langage verbal, matériel organisé, schéma) doivent être mises en place spécifiquement pour que l'activité puisse avoir lieu, puisque dans ce cas l'élève n'a pas d'autres ressources culturelles. L'activité langagière, les raisonnements et les explications dépendent de ces représentations externes spécifiques et d'arguments spécifiques qui sont généralement les règles d'utilisation du matériel établies en classe. Et pour ce qui concerne le concept de valeur, celui-ci se forme d'emblée au niveau plutôt scientifique de la règle d'échange dix-contre-un.

Une première déduction est que la dialectique CQ/CS est plutôt difficile à mettre en place quand le contexte et les situations d'apprentissage ne sont pas solidement construits sur ce qui constitue le « réel » pour l'élève. Et la didactique des domaines d'expérience cherche précisément à développer un domaine d'expérience à partir de ce « réel » pour en faire le cadre d'une longue série de travaux à travers laquelle la dialectique, avec ses pôles quotidien et scientifique, peut se développer.

La distance entre les situations de classe et le « réel » de l'élève, étude de cas

Outre la perte de motivation possible évoquée plus haut, il peut résulter de cette distance une formation de sens plus « étroite » (les liens systémiques ne concernent pas d'autres zones de la culture de l'élève). Il en résulte souvent aussi chez l'élève une instrumentalisation limitée du concept visé (par exemple de ses situations de références, de ses représentations, ou des schèmes et procédures qui l'impliquent), qui ne fonctionne alors pas comme artefact mais comme production scolaire à usage précis et limité. Nous rencontrons souvent ces représentations externes entendues comme « réservées » aux usages de la classe de mathématiques. Cette distance peut donc être la source de difficultés pour transférer les éléments de conceptualisation à d'autres contextes.

Nous présentons ci-dessous le cas des élèves d'une classe de CM2 (cinquième année de l'école primaire en France) qui devaient écrire avec des décimaux le nombre qui correspond à l'expression « un euro cinq ». Il s'agissait de questionner et transférer les règles de numération décimale pour résoudre un problème d'écriture numérique dans le contexte de la monnaie.

Éléments d'analyse a priori

En ce qui concerne le problème posé.

Bien sûr, le terme « quotidien » est ambigu dans le cadre scolaire. La règle d'usage verbal extrascolaire ne coïncide pas avec la règle de numération décimale écrite travaillée en classe. Mais c'est la prise en charge consciente de cette ambiguïté qui est le problème à résoudre à travers l'explicitation de la règle d'usage et la mobilisation consciente de la règle de numération (donc son instrumentation). C'est une situation problème qui nous paraît bien adaptée car ce travail de prise de conscience de la proximité et de la différence entre deux systèmes de numération et leur comparaison favorise le développement de la conceptualisation scientifique du système de numération décimale. Et la mise en rapport avec un système « quotidien » favorise aussi le développement de la conceptualisation quotidienne. On espère ainsi réaliser ces progrès de conceptualisation en mettant en place les ingrédients d'une dialectique CQ/CS.

Ce travail scolaire étant nécessaire pour des raisons pratiques, nous rallions ainsi un point fort de la didactique des D.E. que nous « importons » dans cette classe.

C'est aussi une éducation à la prise en charge des ambiguïtés et aux contradictions importante pour construire des compétences de résolution de problèmes en mathématiques. En effet, celles-ci sont fréquentes. Elles se situent par exemple dans le passage d'une représentation orale à une représentation écrite (quatorze → 14 selon un mécanisme différent de dix-huit → 18) ou d'un domaine mathématique à un autre (comme dans le cas des notations écrites Tx en algèbre et $T(x)$ en analyse).

En ce qui concerne cette classe.

Nous considérons qu'une conceptualisation assez « scientifique » du système numérique se reflète dans la capacité à formuler les liens systémiques en jeu (travaillés depuis le CP), à reconnaître leur existence comme leur rupture, et à transférer ou questionner, de façon consciente, les règles d'écriture et d'expression d'un cadre à un cadre voisin. Ce que les élèves auraient dû faire en travaillant sur les unités de mesures. S'il en avait été ainsi, ils auraient perçu (et discuté) cette ambiguïté.

Éléments d'analyse a posteriori

Tous ont été bloqués. Le problème du contrat didactique n'est pas, dans cette classe de maître formateur, celui de l'inhibition du débat et de la divergence. Le problème, à notre avis, est que les liens systémiques ne se font pas facilement, les élèves n'ayant pas les moyens de mobiliser les règles de la numération pour questionner une situation « nouvelle ». Dans notre exemple, la conceptualisation scientifique de la numération décimale est restreinte à un domaine très étroit, celui de l'écriture des nombres (entiers ou décimaux) avec des liens systémiques limités et un faible jeu de généralisation/exemplification.

Hypothèse sur l'origine de la distance observée entre situation de classe et « réel » dans cette expérimentation

Le travail en classe qui se base strictement sur la conceptualisation scientifique ne favorise pas suffisamment sa propre évolution. En effet, dans le cas considéré, certains liens systémiques et situations de référence manquaient. Il a fallu un travail soutenu pour que les élèves mobilisent un savoir devenu quotidien à leur niveau (il y a 100 centimes dans 1 euro), pour s'en servir, et pour qu'ils le mettent en lien avec une représentation et un système plus « scientifiques » (5 centimes, c'est 5 centièmes d'un euro) pour arriver à choisir entre les écritures 1,5 et 1,05 et à argumenter leur choix.

Les paragraphes qui suivent tentent d'expliquer la difficulté à inscrire les constructions d'apprentissage mathématique dans le « réel » des élèves dans nos classes en France.

Le contexte interne de l'enseignant, les choix épistémologiques, et l'exploitation de la « réalité »

Nous avons vu qu'un domaine d'expérience en classe dépend du contexte interne de l'enseignant. Ce point de vue peut révéler des obstacles à une exploitation efficace de la « réalité », telle qu'on l'a définie au début de cet article. En particulier, il peut être difficile de trouver un domaine d'expérience pour lequel l'intersection entre le contexte interne de l'enseignant et celui de l'élève soit intéressante à explorer en vue du développement des concepts mathématiques de celui-ci à travers une dialectique CQ/CS. La réflexion qui suit est basée sur notre propre expérience de travail avec les enseignants et les classes, et n'est pas élaborée en un travail théorique (qu'il serait probablement intéressant de mener).

Sur ce que veut dire « faire des mathématiques »

Dans notre système scolaire français, on a tendance à considérer les mathématiques comme nécessairement décontextualisées et on quitte assez rapidement les situations contextualisées introductives (sauf avec des élèves en grande difficulté). Se référer à des groupements abstraits semble « plus mathématique » que se référer à la monnaie, quand bien même des activités sur la monnaie engageraient des raisonnements d'un haut niveau de généralisation. Le plus souvent, la modélisation n'est pas considérée par l'enseignant comme faisant partie de l'activité mathématique et n'est généralement pas l'objet d'un travail soutenu en classe, même avec des élèves de collège ou de lycée. Et quand les élèves traitent des problèmes « réels » ils ne modélisent pas, ils appliquent des outils mathématiques à des situations déjà « mathématisées » !

Dans le cadre de la didactique des domaines d'expérience, nous faisons l'hypothèse que dans les cas où un objet mathématique modéliserait une situation accessible au sujet (à travers son expérience et sa culture), la plupart des élèves s'engageraient plus facilement dans le travail sur celle-ci que sur la situation mathématisée. Leur contexte interne est marqué par leur expérience et leur culture. Cette préférence n'est évidemment pas parlante (ni probablement vraie) pour ceux qui s'orientent vers les études de mathématiques, mais plutôt en primaire, en collège et pour une partie importante des élèves plus âgés.

Or, précisément, la conception des mathématiques décrite ci-dessus amènera bon nombre d'enseignants à travailler sans aucun contact avec le contexte interne de la majorité de leurs élèves. Les élèves perdent ainsi l'occasion de se construire certaines situations de référence qui seraient significatives (celles qui sont contextualisées en dehors des mathématiques). Les liens systémiques, les jeux de généralisation-exemplification et les transferts potentiels sont réduits quand les élèves n'ont pas pu s'engager dans un travail de modélisation.

Sur les conditions favorables aux apprentissages

En mathématiques, les situations riches en références culturelles sont généralement complexes (les pièces de monnaie ne correspondent pas strictement aux groupements par 10). Celles qui sont proches de la structure mathématique de référence (comme le jeu du banquier) sont généralement simples, d'un point de vue épistémologique. Mais alors les situations de référence, les représentations externes et les invariants opératoires doivent être entièrement construits *ad hoc* et sont plus restreints, l'activité sémiotique plus limitée, les raisonnements développés dans des registres plus délimités, avec par exemple des analogies plus restreintes. L'argument *1c et 1c et 1c et 1c et 1c valent comme une pièce de 5c,* ou l'argument *deux pièces de 10c valent comme une pièce de 20c, puisque la boulangère accepterait aussi bien ces pièces que celle-là pour un bonbon* (référence à l'expérience réelle ou accessible), sont basés sur les règles d'échange qui ont cours dans l'environnement de l'élève. Ils entrent dans un raisonnement bien construit, mais pas situé dans le cadre mathématique en usage. Ces arguments sont impossibles avec les jetons de couleurs : avec les jetons, seule la règle abstraite (et qui peut être perçue comme arbitraire), 10 contre 1, est acceptable. Le raisonnement sera tout aussi bien construit et peut bien sûr être également utilisé dans le cas de la monnaie. Le contexte de la monnaie offre donc aux élèves un spectre d'arguments et de significations plus large.

Ces situations plus simples sont souvent plus éloignées de la culture de l'élève et de ses conceptualisations quotidiennes les plus riches en sens et en références (donc de son contexte interne). Elles rendent caduque la dialectique CQ/CS. Or, beaucoup d'enseignants se montrent sensibles à la simplicité et, leur conception des mathématiques aidant, lui donneront la priorité sur l'ancrage au réel. Mais la préférence donnée à la simplicité épistémologique, plutôt qu'à l'accessibilité cognitive et à la complexité et à l'adaptabilité des acquis cognitifs, peut, pour certains élèves, affecter le développement d'une activité mathématique de qualité suffisante.

Cette réflexion sur le contexte interne de l'enseignant peut se prolonger : on pourrait opposer au choix de construire des apprentissages mathématiques sur la « réalité » la difficulté, qui en résulterait, d'amener les élèves vers une pensée plus théorique. Cette idée provient en partie d'une confusion entre théorisation et décontextualisation. Non seulement nous pensons qu'il n'en est rien, mais que l'exploitation bien conçue de la « réalité » offre une prise plus importante à la construction d'une pensée théorique.

Décontextualisation et théorisation

La « théorisation » caractérise l'activité mathématique, et caractérise aussi la conceptualisation scientifique. Elle peut consister à : passer d'une procédure réalisée à son explicitation sous une forme générale (en contexte ou non) ; énoncer une règle par induction à partir de calculs particuliers, etc. La théorisation n'exige pas la décontextualisation, ni la symbolisation, mais la généralisation. La décontextualisation n'est qu'une des formes de théorisation, la plus visible (par le registre sémiotique).

Ainsi, une résolution de problème située dans un « réel » de domaine d'expérience est une opportunité offerte à l'élève de généraliser une procédure en se référant à des éléments d'un « réel » qu'il maîtrise. Voici un exemple de généralisation dans un contexte non spécifiquement mathématique, formatrice pour le développement de la pensée mathématique, mais plus difficile à produire dans un contexte mathématique pour des élèves de première année du primaire (comme ceux de l'exemple). Dans un débat collectif concernant l'utilité du thermomètre, le maître lit la phrase que lui ont dictée ses élèves :

> (Le maître lit) Nous devons comparer … et nous devons nous assurer qu'aujourd'hui il fait plus chaud qu'hier… et lundi prochain ?
> (élève 1) Aujourd'hui… pas seulement aujourd'hui, n'importe quel jour.
> (élève 2) C'est …c'est tous les jours… lundi, mardi …
> (...)
> (Le maître) … Qu'un jour est plus froid ou plus chaud qu'hier.
> (élève 1) Non, pas hier, *le jour qui vient avant*.

Il nous paraît plus facile d'engager la conceptualisation scientifique sur des contextes significatifs (accessibles au contexte interne des élèves du fait de la culture), que dans un contexte trop mathématisé ou trop formalisé. Ensuite, quand ce type de pensée théorique a pu se développer, il devient plus aisé de le transférer aux contextes mathématiques. Plus précisément, il importe plus que l'élève puisse développer une capacité de généralisation d'un concept en rapport avec les aspects plus particuliers que le sujet maîtrise, plutôt que de maîtriser un concept déjà généralisé, alors qu'il n'a pas été actif dans la généralisation même.

La didactique des domaines d'expérience vise spécialement la théorisation. Elle la favorise par des questions de type « Comment feriez-vous », tout en empêchant le « faire », quitte à disposer devant les élèves le matériel qui aurait permis de faire. La résolution de ce type de problème est en général validée par l'argumentation. Ces argumentations favorisent l'élaboration de liens systémiques explicites et l'évolution de la maîtrise de représentations externes, au sein et au-delà des situations contextualisées. Mais, surtout, ces argumentations forment la base de la construction d'une pensée théorique. Cette pratique est alors transférable sur des domaines plus formels.

Conclusion et perspectives

Les travaux théoriques et expérimentaux de l'équipe de Gênes montrent que l'appui sur la « réalité » de l'expérience de l'élève favorise une conceptualisation scientifique des notions mathématiques. La « reconstitution » d'un domaine d'expérience dans le cadre scolaire, le questionnement théorique et l'argumentation d'une part, et un travail dans une certaine globalité et une certaine complexité, de l'autre, sont des facteurs essentiels. Les travaux, dont quelques résultats ont été présentés ici, doivent se poursuivre dans différentes directions, comme l'approfondissement de la recherche sur les mécanismes de passage de l'expérience à une pensée plus théorique ou d'un contexte à un autre, sur les différents rôles des systèmes sémiotiques, le travail sur les positions épistémologiques et cognitives sous-jacentes aux choix didactiques, l'extension de ces travaux pour qu'ils répondent à des objectifs didactiques situés dans des cultures différentes.

Nadia Douek
Université de Nice, IUFM C. Freinet - UMR ADEF Université de Provence
ndouek@wanadoo.fr

Références

Boero P., Dapueto C., Ferrari P., Ferrero E., Garuti R., Lemut E., Parenti L., Scali E. (1995). Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School. *Proc. of PME-XIX,* Recife, vol. 1, pp. 151-166.

Douek N. (1999). Argumentation and conceptualisation in context: a case study on sun shadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 89-110.

Douek N. (2003). *Les rapports entre l'argumentation et la conceptualisation dans les domaines d'expérience*. Thèse, Université R. Descartes, Paris 5.

Duval R. (1998). Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 6, ULP, IREM de Strasbourg.

Hatano G. & Wertsch J. (2001). Sociocultural approaches to cognitive development: The constitutions of culture in mind. *Human Development 44*, 77–83.

Rabardel P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. M. Bailleul (éd.), *Actes de la Xème École d'été de Didactique des Mathématiques*, pp. 203-213, Houlgate, IUFM de Caen.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, 133-170.

Vygotsky L. S. (1985). *Pensée et langage*. Éditions Sociales, Paris.

Articulation entre réel et mathématiques : spécificité et généricité de la modélisation

Richard Cabassut

Résumé

L'objectif de cette communication est de porter une réflexion théorique sur l'enseignement de la modélisation, dès l'école primaire. On étudiera les articulations entre le réel et les mathématiques, essentiellement dans deux étapes du processus de modélisation : construire le modèle et valider la solution réelle (qui est une interprétation de la solution mathématique). Ces articulations impliquent des connaissances, et des techniques qui ne relèvent pas du monde mathématique. À partir de l'étude de quelques exemples de mise en oeuvre en classe ou en formation, nous montrerons que dans le processus de modélisation, l'enseignement des mathématiques doit à la fois intégrer des connaissances et des techniques mathématiques, mais également des connaissances et des techniques extra-mathématiques : cette double transposition[1] questionne la nature des justifications des techniques utilisées et le contrat didactique réglant ces justifications.

Introduction

L'étude théorique est conduite à partir d'exemples de tâches de modélisation qui ont été produites dans le contexte du projet Comenius LEMA[2] Les informations prélevées sur ces tâches le sont soit dans le cadre d'une analyse a priori, soit grâce à des observations d'élèves lors de mises en oeuvre en classe, soit grâce à des observations de professeurs en formation ou de formateurs dans le cadre d'une formation à la modélisation pour professeurs d'école, également réalisés dans le cadre du projet LEMA. Dans un premier temps, on illustrera sur un exemple cette articulation entre le réel et les mathématiques mises en jeu dans la modélisation. Ensuite, on précisera la spécificité et la généricité de cette articulation en proposant deux éclairages théoriques : le cycle de modélisation de PISA et la théorie de la double transposition. Enfin, on précisera quelques problématiques de recherche.

Articulation entre réel et mathématiques sur un exemple

Illustrons sur un exemple l'articulation entre réel et mathématiques dans les étapes suivantes du processus de modélisation : construire un modèle du monde réel, traiter mathématiquement le problème, interpréter la solution mathématique en solution réelle et la valider.

---

[1] La notion de transposition renvoie aux travaux de Chevallard (1985) et celle de double transposition à Cabassut (2004). On peut estimer qu'en France, la modélisation est plus un objet paramathématique (au sens de Chevallard), c'est-à-dire n'est pas suffisamment désignée explicitement comme objet à enseigner. Dans d'autres pays, comme l'Allemagne, la modélisation est désignée explicitement comme un objet à enseigner, comme le montrent Garcia et al. (2007). Ici nous nous plaçons dans l'esprit de PISA et du projet LEMA qui désignent la modélisation comme un objet à enseigner. C'est sous cette hypothèse qu'il faut entendre ici l'expression « double transposition ». Nous expliquerons cette notion dans le corps de l'article.

[2] Le projet LEMA (Learning and education in and through modelling) est cofinancé par l'Union Européenne comme action Comenius 2-1. Des informations se trouvent sur le site www.lema-project.org. Le projet dure d'octobre 2006 à septembre 2009. Les représentants des partenaires du projet sont : Katja Maaß & Barbara Schmidt, University of Education Freiburg, Richard Cabassut, IUFM, Strasbourg, Fco. Javier Garcia & Luisa Ruiz, University of Jaen, Nicholas Mousoulides, University of Cyprus, Anke Wagner, University of Education, Ludwigsburg, Geoff Wake, The University of Manchester, Ödön Vancso & Gabriella Ambrus, Eötvös Lorand University, Budapest.

La tâche suivante a été proposée à une classe de CP (6-7 ans) : Les élèves de CP vont lire une histoire dans une classe de maternelle. Comment organiser cette lecture ?

Dans un premier temps les élèves doivent *construire un modèle du problème réel.* Indiquons au lecteur quelques informations sur le livre. Ces informations n'étaient bien entendu pas indiquées aux élèves. Le livre s'adresse à des élèves débutants en lecture. Il est constitué de 64 pages avec la couverture. La première de couverture est composée d'un dessin accompagné du titre du livre et du nom de l'auteur, la dernière de couverture contient un dessin et un résumé de l'histoire. La seconde page de couverture est blanche et est suivie d'une page qui reprend le titre et le nom de l'auteur. Puis suivent 61 pages (hors couverture) contenant soit un texte, soit un dessin sans texte, soit un dessin accompagné d'un texte. Le livre se termine sur une page où est écrit le seul mot « fin » suivi de pages blanches. Il y a 17 élèves dans la classe. Il n'y a aucune phrase à cheval sur deux pages. Un modèle consiste à ramener le problème à un problème de partage équitable d'un nombre d'objets (ici des pages à lire) en un certain nombre de parts (ici le nombre d'élèves de CP), avec éventuellement un reste. Ce modèle de partage équitable a déjà été pratiqué dans la classe et sera suggéré par des élèves au cours de la discussion. Cependant, dans la discussion qui a lieu en classe, des élèves proposent des modèles de partage qui ne sont pas équitables : des élèves pourront lire davantage de pages que d'autres, notamment s'ils ont envie de lire. Après discussion, orientée par le professeur, il est décidé de choisir le modèle de partage équitable du nombre de pages à lire. Ce modèle paraît plus « juste », chacun ayant le même nombre de pages à lire. Il n'a pas été proposé d'autres modèles, comme le partage équitable du nombre de mots à lire qui aurait montré la relativité de la notion de justice : est-il plus juste de se partager un nombre de pages ou un nombre de mots ? Remarquons que dans cette phase de construction du modèle certains arguments échangés sont extra-mathématiques : prise en compte des préférences (ceux qui aiment lire), situation déjà fréquentée pour le partage équitable, justice. Pour achever la construction du modèle il va falloir préciser les données dont on pense qu'elles sont utiles à la résolution du problème mathématique. Comme les élèves ont déjà rencontré des problèmes de partage équitable, certains évoquent le nombre d'élèves qui liront et le nombre de pages à lire. Tous les élèves se mettent d'accord sur le nombre d'élèves qui liront en choisissant le nombre d'élèves présents dans la classe au moment où ils se posent la question. On peut remarquer que ce nombre pourrait changer le jour où on ira lire effectivement dans la classe de maternelle. Mais aucun élève n'a envisagé cette difficulté. Par contre les groupes d'élèves feront des hypothèses différentes sur le nombre de pages à lire : certains compteront toutes les pages (même celles où il n'y a rien à lire) ; d'autres excluront la page de garde avec le titre du livre, celle du résumé, celle avec l'unique mot « fin », ou ne comportant que des illustrations. On voit donc que dans la construction d'un modèle, différents choix de modèles et d'hypothèses sur les données sont possibles : la justification de ces choix fait bien souvent appel à des arguments extra-mathématiques. Un exemple de modèle[3] mathématique du

[3] On peut se demander si le terme modèle n'est pas abusif, et s'il n'y a pas représentation plus que modélisation. Remarquons d'abord que nous évoquons la construction d'un « modèle mathématique du problème réel ». Un modèle mathématique d'un problème réel est donc un problème mathématique, simplifié par rapport au problème réel, qui est censé représenter le problème réel, et dont la résolution mathématique est censée permettre la solution du problème réel. Au départ, on est bien au niveau des intentions : on n'a pas la certitude d'une part qu'on saura résoudre le problème mathématique, et d'autre part que la résolution mathématique permettra une résolution du problème réel (il faudra encore franchir les étapes d'interprétation de la solution mathématique en solution réelle et de validation de cette solution réelle). Il est vrai qu'au niveau d'une classe de CP, les modèles restent très élémentaires. On considère ici qu'un modèle mathématique est une représentation simplifiée du problème réel, pour laquelle on pourra mettre en œuvre des techniques (qui pourront être justifiées mathématiquement) pour essayer de résoudre le problème (sans garantie de succès a priori) : dans notre exemple la distribution qui correspond à la correspondance terme à terme, le calcul pour vérifier que pour partager 49 pages entre 17 élèves, chaque élève reçoit 3 pages sauf deux élèves qui reçoivent deux pages car : 3x17=51 et 49+2=51 ; ou encore chaque élève reçoit 2 pages et il reste 15 pages car 2x17+15=49. Les expressions

problème est le suivant : comment partager 49 objets (ici des pages à lire qui seront représentées par les élèves par des cubes) de manière équitable en 17 parts (ici une part correspond à un élève) ?

Une fois son modèle et ses hypothèses précisés, chaque groupe d'élèves travaille sur *le traitement mathématique du problème mathématique* de partage équitable. Au niveau de cette classe de CP, différentes techniques de distribution sont proposées (un par un, deux par deux...), mobilisant différentes représentations de la situation (utilisation de cubes à distribuer pour représenter les pages, utilisation d'un dessin de la file des enfants auxquels sont associés des dessins de pages à lire). Nous évoquerons plus loin différentes techniques de prise en compte du reste de pages. Une solution mathématique est trouvée (ici le nombre équitable de pages lues par chaque élève avec éventuellement une procédure de lecture des pages restantes). Dans cette phase, les arguments et les techniques mobilisés sont en principe mathématiques.

Une fois la solution mathématique trouvée, il faut *interpréter la solution mathématique en solution réelle* dans la situation réelle. Ici l'interprétation est assez rapide car au niveau du CP les situations sont moins abstraites. Il faut réinterpréter les cubes ou les dessins dans la situation réelle.

Enfin, il faut *valider la solution réelle comme solution du problème réel et réfléchir.* Avec un critère pragmatique on peut effectivement distribuer à chaque élève les pages qu'il doit lire. Le succès de cette action validera ainsi la solution de partage équitable. Dans la classe de CP observée, chaque groupe a exposé sa solution. Certaines ont été rejetées car elles comportaient une contradiction par rapport à une hypothèse : on distribuait plus de pages que le livre n'avait, ou encore on ne lisait pas toutes les pages. L'invalidation reposait sur la mise en évidence d'une contradiction avec les hypothèses ou les conditions imposées par le problème. Les autres solutions retenues l'ont été par consensus, aucune contradiction n'étant mise en évidence. La différence entre solutions est relative au reste euclidien du nombre de pages à lire après avoir distribué le même nombre de pages à chaque élève. Dans une des solutions retenues quelques élèves doivent lire une page de plus par rapport aux autres pour que toutes les pages soient lues. Dans un autre cas, les pages de titre, de résumé de quatrième de couverture et la page avec le seul mot « fin » ont été prises en compte pour permettre à chaque élève d'avoir le même nombre exact de pages. On voit donc que la validation de la solution réelle peut se faire par une vérification empirique de la solution ou par consensus en l'absence de contradiction : on recourt à nouveau à des arguments extra-mathématiques. Notons que ces techniques de validation ou d'invalidation ne sont pas spécifiques à la modélisation. L'invalidation d'une démonstration mathématique peut reposer sur la mise en évidence d'une contradiction. Dans Cabassut (2005) nous avons montré que la validation d'une démonstration mathématique peut être réalisée par la cohabitation d'arguments mathématiques et d'arguments extra-mathématiques.

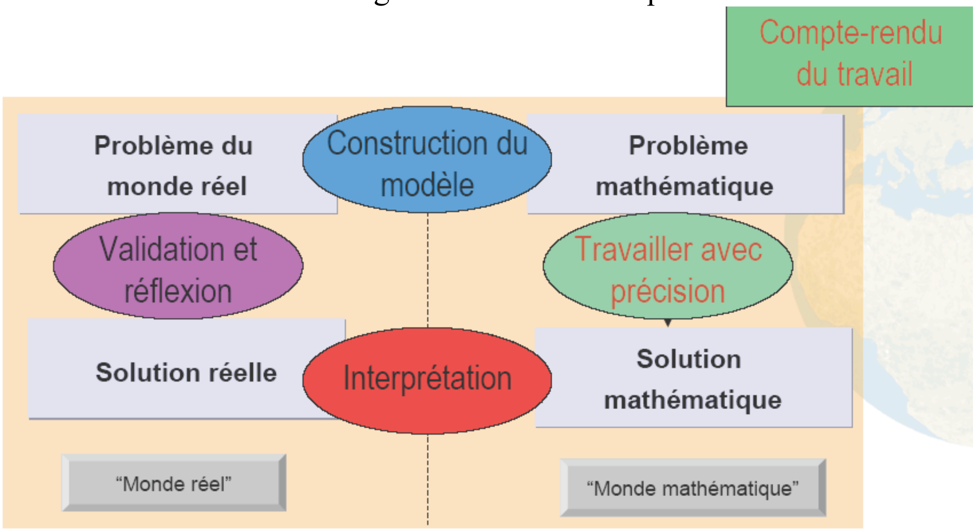
Au cours de la mise en commun collective, chaque groupe a pu *rendre compte de son travail.*

Nous allons maintenant éclairer théoriquement ces étapes pour mieux comprendre la problématique de l'articulation entre réel et mathématique**.**

« technique » et « justification mathématique de la technique » renvoient à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard. Si, par exemple, on décide de faire lire les élèves les uns après les autres, avec pour consigne qu'un élève s'arrête quand il est fatigué, en justifiant que certains se fatiguent plus que d'autres car ils ont des difficultés de lecture plus grandes, on conçoit donc l'équité non plus d'un point de vue mathématique, mais d'un point de vue psychologique ou cognitif. Les propos de cette note de bas de page sont bien entendu très discutables : rappelons que l'objectif de notre communication n'est pas de débattre des intéressantes notions de modèle et de modélisation, mais d'illustrer le phénomène de double transposition dans le processus de modélisation, au niveau de l'école primaire, à partir d'un cadre théorique adopté (et donc admis) : celui du cycle de modélisation de PISA.

Éclairage théorique sur la modélisation

Pour ce qui concerne la modélisation, nous adoptons le cycle de modélisation proposé par l'étude PISA (2006), elle-même inspirée par les travaux de Blum (1996), Schupp (1988), Niss (1999), Neubrand & *al.* (2001), et Pollak (1979), qui précise les étapes précédentes. Ce cadre théorique a été repris dans le cadre du projet Comenius LEMA de création d'une formation à la modélisation des enseignants de mathématiques.



L'étape « construire le modèle » est décrite par (PISA, 2006, p. 95-97, trad. R.C.[4]) en ces termes :

> « démarrer avec un problème situé dans la réalité, l'organiser en accord avec les concepts mathématiques et identifier les mathématiques importantes[5], ordonner graduellement la réalité à travers des processus comme faire des hypothèses, généraliser et formaliser, lesquels promeuvent les caractéristiques mathématiques de la situation et transforment le problème réel en un problème mathématique qui représente fidèlement la situation ».

L'étape « travailler avec précision » consiste à résoudre le problème mathématique. Les étapes d'interprétation, de validation et de réflexion consistent à

> « réfléchir au processus global de mathématisation et aux résultats. Ici les étudiants doivent interpréter les résultats avec une attitude critique et valider le processus global [...] Des aspects de ce processus de réflexion et de validation sont : comprendre les extensions et les limites des concepts mathématiques, réfléchir aux arguments mathématiques, expliquer et justifier les résultats, critiquer le modèle et ses limites » (PISA, 2006, p.96, trad. R.C.).

Il n'est pas dans notre intention de discuter ici de la pertinence du cadre théorique de PISA. Blum (1996, p. 18) propose par exemple un cycle de modélisation intercalant une étape passant par un modèle réel, entre le problème du monde réel et le problème mathématique. Le cadre théorique de PISA est donc plus simple et suffit à décrire les phénomènes que nous voulons mettre en évidence. De plus, c'est ce cadre théorique qui a été repris dans le projet LEMA. On pourrait également discuter des critères qui font que le problème mathématique « représente fidèlement la situation ». L'objet de cet article n'est pas d'étudier ces critères de

[4] Traduction de Richard Cabassut.

[5] Ici on a une difficulté pour l'école primaire où l'élève ne dispose pas encore de beaucoup de concepts mathématiques. C'est le cas de l'expérience du géant, que nous évoquerons plus loin, et pour laquelle les élèves ne disposaient pas du concept de proportionnalité. Il est vrai que PISA a essentiellement été pensé pour l'école secondaire.

fidélité. Il s'agit de montrer que les étapes du cycle de modélisation mettent en relation des connaissances et des techniques mathématiques (par exemple les techniques de partage équitable, ou de détermination de quatrième proportionnelle) et des connaissances ou des techniques du monde réel (par exemple savoir qu'il y a différents types de pages dans un livre, savoir que souvent le prix d'achat est proportionnel à la quantité achetée).

C'est dans cette articulation entre des connaissances et des techniques du monde réel et du monde mathématique que se situe la problématique de la double transposition (Cabassut, 2004). Dans Cabassut (2005, p. 403) nous avons illustré ce phénomène dans le domaine de la validation, où la validation mathématique s'articule avec la validation extra-mathématique. On retrouve, pour la modélisation, dans la construction du modèle, et dans la validation de la solution réelle produite, la cohabitation de connaissances, de techniques et d'arguments qui relèvent du monde mathématique et du monde réel.

Problématique de recherche

Nous allons illustrer cette problématique à partir de différents exemples.
La tâche suivante a été proposée à une classe de CM1 française.
Quelle est la taille approchée de la silhouette, dont on peut voir seulement un pied ?
Cette photo[6] a été prise dans un parc de loisirs.

Construire un modèle

Les élèves ne disposent pas du modèle expert de la proportionnalité et de ce point de vue cette situation peut être une situation-problème pour découvrir ce modèle. Concernant l'étape « construire un modèle » cette situation permet d'illustrer les points suivants.

Disponibilité du modèle

Soit les élèves disposent d'un modèle et ils doivent choisir dans le stock de modèles disponibles lequel ou lesquels s'accordent le mieux à la réalité. Quelles caractéristiques des modèles les élèves doivent-ils repérer ? (Et dans ce cas dans l'étude des modèles quelles caractéristiques sont-elles à mettre en avant ?) Quels éléments de la réalité les élèves doivent-ils repérer ? (Et dans ce cas quelles études de la réalité doit-on développer chez l'élève ?).

Soit les élèves ne disposent pas d'un modèle et ils doivent le construire et pour cela faire des hypothèses. Quelles hypothèses doivent-ils faire ? Comment former les élèves à faire les « bonnes » hypothèses ? On retrouve ici les compétences à développer dans le cadre des problèmes pour chercher de l'école primaire (DESCO, 2005). PISA (2006, p.98, trad. R.C.) distingue différents niveaux cognitifs :

- la compétence de reproduction qui « implique la reconnaissance, la remémoration, l'activation et l'exploitation de modèles familiers bien structurés ; l'interprétation en va-et-vient entre de tels modèles (et leurs résultats) et la réalité ; et une communication élémentaire sur les résultats des modèles » ;

[6] Photo publiée avec Copyright Richard Phillips 2001/2009 www.problempictures.co.uk

- la compétence de relation qui reprend la compétence précédente mais « dans des contextes qui ne sont pas trop complexes mais néanmoins différents de ce avec quoi les étudiants sont d'habitude familiers » ; la communication devient moins élémentaire ;
- la compétence de réflexion qui reprend la compétence précédente mais « dans des contextes qui peuvent être complexes et en grande partie différents de ce avec quoi les étudiants sont d'habitude familiers » ; l'interprétation en va-et-vient entre modèles et réalité : « collecte d'informations et de données, contrôle du processus de modélisation et validation des résultats du modèle. Ceci inclut aussi une réflexion à travers l'analyse, la critique et un engagement dans une communication plus complexe sur les modèles et la modélisation ».

Dans l'exemple de la classe de CM1, on est plutôt dans des compétences de réflexion et de connexion, puisque le modèle n'est pas disponible. On voit que c'est une activité cognitivement difficile, et qu'il faudra l'équilibrer avec des activités d'entraînement où le modèle disponible sera plus facile à choisir.

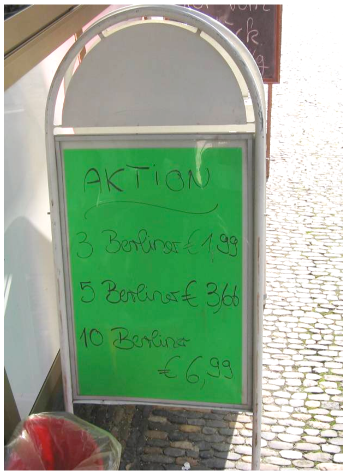
Connaissances du monde réel et hypothèses

Une des difficultés rencontrées par certains élèves est qu'ils n'ont pas de fréquentation sociale de certaines connaissances (comme la taille d'une personne adulte, la taille d'un pied d'adulte, l'évaluation de distances). Il en va de même pour certains modèles usuels du monde réel : la taille d'un individu est approximativement proportionnelle à celle de son pied, les dimensions sur une photo sont proportionnelles à celles de la réalité.

Dans cette situation ouverte, les élèves doivent impérativement faire des hypothèses supplémentaires pour pouvoir résoudre le problème. Il peut arriver que les hypothèses formulées soient contradictoires entre elles. Par exemple un groupe d'élèves a produit les démarches suivantes. Sur la photo on mesure 1cm pour le pied du bonhomme et l'homme mesure 7 fois son pied. Dans la réalité un pied mesure environ 30 cm et une personne environ 180 cm donc dans la réalité un homme est 6 fois plus grand que son pied. Il y a une différence de proportions entre la réalité et la photo ce qui contredit l'hypothèse de conservation des proportions dans une photo. Nous précisons bien « hypothèse de conservation des proportions entre la réalité et la photo dans une photo ». Nous savons que l'on peut modifier les dimensions d'une photo en opérant un agrandissement par exemple d'axe vertical (ce que certains professeurs effectuent parfois pour faire rentrer la photo dans une feuille A4 ; ce faisant ils détruisent la conservation des rapports entre la réalité et sa représentation sur une photo). Dans ce cas les proportions de longueur des chaussures (dans le sens horizontal) seront conservées alors que celles de hauteur des chaussures (dans le sens vertical) seront modifiées. Nous pouvons également remarquer sur la photo que les pieds des hommes sont en biais par rapport au plan de la photo. Mais aucun groupe d'élèves ne l'a remarqué.

Le choix des hypothèses et les raisons du choix sont très liées au contexte : nature du contexte, familiarité avec le contexte de la tâche, intérêt pour le contexte, composition du groupe d'élèves, moment de la tâche (dans la journée, dans la semaine, dans l'année ...), modèles mobilisables... Il est difficile d'expliquer à un élève qu'il n'a pas la liberté de faire certaines hypothèses car l'adoption d'un modèle implicite (ici rapport d'agrandissement constant entre la photo et la réalité) fixe ce rapport d'agrandissement dès qu'on émet une hypothèse sur une dimension de la réalité (en connaissant la dimension correspondante de la photo) : toutes les autres dimensions réelles sont alors fixées par rapport aux dimensions de la photo et on n'a plus de choix possible. Or il est assez difficile de savoir que les hypothèses choisies sont non contradictoires, aussi longtemps que l'on n'a pas rencontré de contradiction. L'histoire des mathématiques propose suffisamment d'exemples de preuves incorrectes qui ont tenu plusieurs années avant qu'on ne décèle de contradiction nécessitant un ajustement. Ce problème de la non contradiction n'est donc pas spécifique aux situations de modélisation.

Il peut arriver que le professeur lui-même ait une fréquentation insuffisante des modèles pratiqués dans la vie réelle, ce que nous illustrerons sur quelques exemples donnés en formation (Adjiage & Cabassut, 2008).

La tâche[7] du Berliner Anne est en vacances dans la forêt noire. Elle trouve une offre spéciale pour un type de pâtisserie appelé « Berliner » comme vous pouvez le voir sur la photo. Le boulanger propose le gâteau à 0,80 € l'unité. Si vous étiez le boulanger, auriez-vous proposé les mêmes prix sur l'affiche ? (On lit sur l'affiche : 3 Berliners 1,99 € ; 5 Berliners 3,66 € et 10 Berliners 6,99 €)		

Dans cette situation réelle il s'avère que de manière surprenante, il est moins cher d'acheter un Berliner isolé et trois fois un sachet de 3 Berliners, plutôt que d'acheter un sachet de 10 Berliners. On observe d'ailleurs que dans la vie réelle, l'achat en grande quantité n'est pas toujours meilleur marché à l'unité qu'en petites quantités. Il est donc certain que les modèles de proportionnalité ou de diminution du prix unitaire avec l'augmentation de la quantité achetée ne sont pas valables pour les Berliners. Sans doute d'autres modèles fondés sur les lois du marketing ou de la psychologie, justifient le choix de prix seuils comme 1,99 € sous le seuil psychologique de 2 € ou 6,99 € sous le seuil psychologique de 7 €. Il faudrait enquêter auprès du pâtissier pour connaître les justifications de ses choix de prix.

Comme on le voit à travers les exemples précédents, l'articulation entre réel et mathématique présente :

- des spécificités liées à la modélisation : les connaissances du monde réel (fréquentation des situations réelles, repérage des données pertinentes du monde réel, choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel), le lien entre le monde réel et les mathématiques (choix de représentation du monde réel, dans la réalité fréquentation de modèles mathématiques),
- des généricités communes à la résolution de problème (analogie entre le passage du problème réel au problème mathématique et les changements de cadres ou de registres en mathématiques, heuristique, traitement mathématique du problème mathématique, contrôle des solutions ...).

Valider une solution

Une difficulté apparaît dans les situations de modélisation lorsqu'on ne peut pas confronter la solution trouvée à la réalité. Dans l'exemple du pied du géant on ne dispose pas de la photo complète et le parc d'attractions se situe dans un pays étranger inconnu : la vérification expérimentale de la solution n'est pas possible.

[7] Photos aimablement mises à disposition par Katja Maass et les éditions Cornelsen, et extraites de : Maaß, Katja (2007): *Mathematisches Modellieren - Aufgaben für die Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen Scriptor (copyright).

La validation va donc s'effectuer uniquement sur des critères de non-contradiction (sachant que le fait de ne pas avoir découvert de contradiction ne signifie pas qu'il n'y en a pas) et de contrôle par le bon sens qui est étroitement lié à des connaissances sociales. Ce contrôle n'est pas évident et ne correspond pas à des critères mathématiques. Ici, un géant n'est pas sujet à fréquentation habituelle. Alors qu'en mathématiques, le contrôle de vérité sera un contrôle de cohérence déductive, le contrôle de bon sens sera un contrôle de plausibilité. Observons deux solutions proposées par deux groupes d'élèves.

Dans une première solution un groupe d'élèves a proposé les hypothèses et la solution suivantes. Sur la photo le pied du géant mesure 9 cm et le pied de l'homme 1 cm. Dans la réalité le pied d'un homme est environ 30 cm donc dans la réalité le pied du géant est 9 fois plus grand soit 270 cm. Or sur la photo l'homme a un pied de 1 cm et sa taille fait 7 cm donc il est 7 fois plus grand que son pied. Le géant a les mêmes proportions pied / hauteur donc sa hauteur est 7 × 270 cm = 1890 cm.

Dans une seconde solution proposée par un autre groupe d'élèves, sur la photo, le pied d'un homme mesure 1 cm et le pied du géant mesure 9 cm donc le pied du géant est 9 fois plus grand que le pied de l'homme. On suppose que c'est la même proportion pour la hauteur. Comme un homme mesure environ 180 cm le géant mesurera 9 fois plus soit 9 × 180 cm = 1620 cm.

Ces deux solutions seront validées alors qu'elles conduisent à des résultats différents. On voit bien que la validation est analogue à celle d'un énoncé conditionnel mathématique : sous cette condition la conclusion est vraie[8], sous réserve que les raisonnements utilisés soient valides et les théorèmes appliqués vrais.

Ouverture de l'énoncé

Considérons la tâche suivante proposée en formation qui illustre le cas d'un énoncé imprécis. La classe de CP va visiter l'Opéra et prend le tram à l'arrêt « Emile Mathis » pour descendre à l'arrêt « République ». Quel est le meilleur itinéraire à emprunter ?

Sur la carte de tram il y a deux itinéraires possibles. Les professeurs en formation se lancent dans différents calculs pour comparer le nombre de stations de chaque trajet, la distance des trajets, la durée des trajets. Certains introduisent des critères de confort : un trajet plus long est direct alors qu'un trajet plus court oblige à un changement de tram. Le formateur propose le modèle suivant. Jean choisit la ligne A car il passera devant un magasin de jouets et on pourra voir les jouets pendant l'arrêt du tram.

Cet exemple illustre différents modèles pour définir ce qui est meilleur. Souvent on qualifie de modèle, par rapport à une solution singulière, ce qui pourra être transféré dans des cas analogues. Faut-il favoriser les modèles basés sur le plaisir (voir le magasin de jouets), sur l'économie (distance la plus courte), sur la sécurité (pas de changements de ligne) ? Les raisons du choix seront des raisons extra-mathématiques, qui éventuellement se baseront sur des calculs mathématiques (chemin le plus court ...).

Il est certain que plus le problème est ouvert au niveau des hypothèses et de sa formulation, plus on risque d'obtenir des solutions différentes[9]. Ceci rappelle les paradoxes apparents lorsqu'on résout des problèmes mathématiques qui ne sont pas définis de manière précise (par exemple les paradoxes de Bertrand en probabilité). On voit donc, dans les deux étapes,

[8] Il y a bien sûr des différences de solutions liées aux approximations effectuées. La relation avec le monde réel favorise le travail sur les notions d'estimation, d'approximation, d'ordre de grandeur et de précision.

[9] Certains problèmes (par exemple un problème moral, esthétique ou juridique) sont difficiles à modéliser mathématiquement, et parfois même il n'est pas souhaitable qu'ils le soient. Il existe également, pour des problèmes, qui admettent des modélisations mathématiques, des possibilités de modélisation non mathématique, qui sont tout aussi pertinentes. Il faut tenir compte des objectifs fixés et des modèles mathématiques disponibles, notamment à l'école primaire.

construire le modèle et valider la solution, la spécificité de la modélisation liée aux connaissances du monde réel et de modèles de monde réel qui permettent d'émettre des hypothèses pour construire le modèle et de contrôler les solutions par plausibilité. Cependant les questions de formulation du problème peuvent engendrer des difficultés tant au niveau de la construction d'une solution mathématique qu'au niveau de sa validation, que l'on peut retrouver dans la résolution de problèmes mathématiques sans articulation avec le monde réel.

Certaines critiques adressées à ces problèmes estiment qu'ils sont trop ouverts et pas assez précis. C'est justement la nécessité de définir les limites du champ du problème, les données et les hypothèses à prendre à compte, en s'appuyant sur des connaissances extra-mathématiques (et bien entendu sur des connaissances mathématiques liées à l'intuition que l'on a d'un modèle mathématique potentiel) qui fait la spécificité du processus de modélisation. Vouloir ne considérer que des problèmes suffisamment précis, c'est s'orienter plus rapidement vers le traitement mathématique du problème mathématique, dans un environnement plus rassurant pour l'enseignant de mathématiques, car fonctionnant dans un contrat didactique et dans un milieu plus homogène, celui du monde mathématique.

Prendre en compte l'articulation entre le monde réel et les mathématiques oblige l'enseignant, et les élèves, à gérer des connaissances, des techniques et des justifications de techniques appartenant à deux mondes différents, le monde réel et le monde mathématique. C'est admettre dans le contrat qu'une justification non mathématique peut être autorisée dans l'étape de construction du modèle ou de validation de la solution réelle, alors qu'elle n'est pas autorisée dans le traitement mathématique du problème mathématique.

Conclusion

La modélisation met en jeu des connaissances, des techniques, des argumentations, articulant le monde réel et le monde mathématique. Dans la construction d'un modèle, si le modèle a déjà été fréquenté, on peut raisonner par analogie, en repérant des similitudes entre situations. Par contre, si le modèle est à construire, la gestion est plus aléatoire et va dépendre du contexte de la tâche de modélisation, et notamment des connaissances et des techniques du monde réel qui apparaissent dans la situation. Dans la validation de la solution réelle, il apparaît également une cohabitation entre des arguments mathématiques (vérification par le calcul du nombre de pages à distribuer), des arguments empiriques (mesure réelle de la hauteur d'une statue de géant dans un parc), des arguments de plausibilité (absence de contradiction, accord des participants, vérification sur des cas particuliers ...).

Cette articulation entre le monde réel et le monde mathématique met en jeu des compétences que l'on peut retrouver dans la résolution de problèmes mathématiques (problèmes pour chercher, heuristique, contrôle des solutions...). Elle peut mettre en jeu des compétences spécifiques à la modélisation, car issues des connaissances et des techniques du monde réel. Faut-il former à ces compétences de modélisation ?[10] Comment y former ?

Le projet LEMA (www.lema-project.org) propose un cours de formation des enseignants à la modélisation. Des expérimentations de ce cours ont été conduites dans différents pays et sont en voie d'évaluation. L'équipe de recherche ACODIS de l'IUFM d'Alsace étudie la mise en oeuvre de la tâche du Géant dans des classes. La recherche peut donc s'emparer du thème de la modélisation pour étudier les problématiques de la formation à la modélisation des enseignants et de l'enseignement de la modélisation : Quelles situations de formation et d'enseignement pour gérer l'articulation entre réel et mathématiques ? Quelles compétences développer pour gérer ces situations ? Quels effets sur le contrat didactique ?

[10] Certains peuvent s'opposer à ce que la modélisation apparaisse comme un objet à enseigner. Voir (Adjiage & Cabassut, 2008).

Richard Cabassut
Université de Strasbourg, Laboratoire de didactique André Revuz
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Références

Adjiage R., Cabassut R. (2008). La modélisation dans une perspective de formation et d'enseignement. In *Actes du XXXIV^{ème} Colloque Copirelem. Expérimentation et modélisation dans l'enseignement scientifique : quelles mathématiques à l'école ?* Troyes, juin 2007, pp. 111-120. IUFM Champagne Ardenne.

Blum W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterrichtin der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, 32(2), 195-232.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée sauvage.

Cabassut R. (2004). Argumenter ou démontrer : continuité ou rupture didactique ? Les effets d'une double transposition, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 9, 153-174.

Cabassut R. (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne,* Thèse, Paris : I.R.E.M., Université Paris Diderot.

DESCO (2005). Les problèmes pour chercher. *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques.* Paris : CNDP.

Garcia F. J., Wake G., Maass K. (2007). Theory meets practice: working pragmatically within different cultures and tradition. In *Proceedings of the Thirteenth International Conference on The Teaching of Mathematical Modelling and Applications.* Bloomington, IN, USA.

Neubrand M., Biehler R., Blum W., Cohors-Fresenborg E., Flade L., Knoche N., Lind D., Löding W., Möller G. & Wynands A. (Deutsche OECD/PISA- Expertengruppe Mathematik) (2001). "Grundlagen der Ergänzung des internationalen OECD/PISA- Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 33 (2).

Niss M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddanneise*, 9.

PISA (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA.* Publisher: OECD.

Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In International Commission of Mathematics Instruction (ICMI) (Ed.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. 4, pp. 232-248). Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organisation (UNESCO).

Schupp H. (1988). "Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der sekundarstufe I zwischen tradition und neuen impulsen". *Der Mathematikunterricht 34* (6).

Analyse de différents niveaux de modélisation du réel dans le cadre de la mise en œuvre d'une situation d'enseignement du théorème de Thalès au collège

Éric Laguerre

Résumé

Dans un premier temps, cette communication consiste à donner une réponse à la question du sens qu'un théorème peut prendre pour des élèves dans l'enseignement secondaire de la géométrie. Cette réponse a pour caractéristique de posséder à la fois une composante intérieure aux mathématiques élaborée à partir de la théorie anthropologique du didactique, de la théorie des situations et du concept d'obstacle, et une composante extérieure fondée sur les liens qui peuvent être établis entre le méso-espace et le micro-espace. Dans un second temps, nous donnons un exemple de construction d'une situation permettant l'étude du théorème de Thalès. Nous prenons appui sur cette dernière pour illustrer le sens que nous donnons à la « modélisation du réel » dans l'enseignement, en nous fondant pour partie sur la notion de Domaine Didactique d'Expérience (Boero) et pour mettre en évidence différents niveaux de modélisation du réel.

Introduction

Ce travail est fondé en partie sur le Cahier DIDIREM n° 58 (Kuzniak, Parzysz, Vivier, 2008) qui synthétise divers travaux de recherche sur la modélisation de la réalité dans l'enseignement.

Deux approches historiques des mathématiques à enseigner peuvent se dégager (Treffers, 1987). Les tenants d'une approche décontextualisée des mathématiques fondent leur enseignement des axiomes et théorèmes qui en découlent sur une mathématisation « verticale »[1] détachée du monde. Dans le cadre d'une approche contextualisée, les résultats proviennent de l'expérience et procèdent à une mathématisation « horizontale » de la réalité. Par ailleurs, pour Freudenthal (1973), les mathématiques sont une activité humaine qui consiste à résoudre des problèmes mais cette recherche s'effectue à l'aide d'un processus de mathématisation s'appuyant sur le réel.

C'est dans ce sens que ces deux approches peuvent être considérées comme complémentaires. Nous pouvons en déduire que le sens qu'un théorème peut prendre pour des élèves possède une composante intra mathématique et une composante extra mathématique. Nous travaillons plus spécifiquement sur cette dernière. Dans cet article, le sens extra mathématique est fondé sur les liens qui peuvent être établis entre le méso-espace et le micro-espace dans le cadre de l'étude du théorème de Thalès. Il est élaboré à partir des rapports qui peuvent être établis entre les mathématiques à enseigner et la réalité.

Dans le prolongement de la Didactique des Domaines d'Expérience[2] (Boero & Douek, 2008) et plus précisément du contexte externe sur lequel nous prenons appui dans notre recherche, nous proposons une définition du sens que nous donnons au concept de « réalité ». À partir de cette approche, nous donnons un exemple de construction d'un problème en situation introduisant le théorème de Thalès au collège sur lequel nous nous appuyons pour mettre en évidence différents niveaux de modélisation du réel.

[1] Cf. glossaire Kuzniak *et al.* Cahier DIDIREM n°58 page 84.
[2] Notée D.D.E. dans la suite.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 245-253.

Cadre théorique

La Didactique des Domaines d'Expérience

Notre question porte sur la mathématisation du réel dans l'enseignement. Nous cherchons à comprendre l'émergence de différents niveaux de représentation de la réalité chez des élèves en classe de mathématique. Pour cela, nous étayons notre recherche grâce à la Didactique des Domaines d'Expérience (Bartolini Bussi & Douek, 2008). La DDE est relative aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- le contexte interne de l'élève – ses conceptions, l'ensemble de ses schèmes, représentations, émotions –, qui lui permet de faire un repérage des données pertinentes du monde réel, de formuler des hypothèses supplémentaires sur ce monde si cela est nécessaire ce qui aboutit à un choix de représentation du monde réel,
- le contexte interne de l'enseignant – ses conceptions, ses objectifs d'apprentissage, ses représentations, émotions et attentes,
- et le contexte externe – portion de la réalité, signes, objets, contraintes physiques, discussion, analyse. L'objectif est de partir des représentations des élèves d'une réalité et de les faire évoluer à partir du contexte de l'enseignant et du contexte externe.

Dans ce cadre théorique, un modèle est construit à partir d'artefacts matériels (supports, matériaux, objets, signes, ordinateur…), et d'artefacts liés aux mathématiques (parallèles, rationnels…) et aux registres symboliques. Un modèle peut être également employé en tant qu'artefact et donc en tant que nouvelle réalité pour réaliser un nouveau modèle. La modélisation est alors caractérisée par la dialectique comprenant diverses étapes d'interprétation qui peut être établie entre une situation observée et ses représentations correspondant à différents modèles. Nadia Douek (1999) appelle d'ailleurs modélisation : « la dialectique entre la situation observée et ses représentations à travers différentes étapes d'interprétations (dessins). » Nous retrouvons l'approche d'un autre cadre théorique *Realistic Mathematics Education* en particulier celle de Van den Heuvel-Panhuizen (2003) qui tient compte, pour élaborer un modèle, d'un registre matériel et symbolique et d'un registre discursif qui servent à instaurer des chaînes de significations reliant des « modèles de » et des « modèles pour ».

En ce qui concerne le contexte externe qui apparaît dans la DDE, les signes, les contraintes physiques, les discussions semblent clairement définis. Mais qu'entend-on par portion de la réalité ? Nous pensons qu'une tentative de définition de ce concept pourrait, par la suite, éclairer un peu plus l'acte de modélisation du réel dans l'enseignement.

La réalité

En connexion avec la DDE, Dapueto et Parenti (1999) considèrent que la réalité n'est pas toujours un objet matériel ou un phénomène naturel ou social mais qu'elle peut être représentée sous une forme en partie modélisée. L'idée qui est à prendre en considération est le fait qu'un modèle apparaissant à un certain niveau de la modélisation du réel constitue une nouvelle réalité ce qui correspond à la prise en compte de l'existence de méta-niveaux d'interprétations de la réalité. Un modèle peut lui-même être employé comme artefact dans le but de construire d'autres modèles.

Mais le réel n'est toujours pas clairement défini. Dans son ouvrage, Thirion (1999) cite Rosset[3] qui conçoit la réalité comme un certain niveau de notre rapport au monde en tant qu'il est envisagé sous les catégories de l'événement et de la situation. Nous retenons cette définition mais afin qu'il n'y ait pas de confusion possible entre les diverses acceptions du

[3] ROSSET C. (2000) La notion de réalité. *Encyclopédie philosophique universelle* T I, 97.

terme de situation et pour nous placer dans le cadre de la Didactique des Domaines d'Expérience nous le remplaçons par le mot contexte. Nous entendons par « événement » la donnée d'un lieu, d'un instant et d'interprétations de faits. Nous comprenons le mot « contexte » en tant qu'il est décrit par un environnement, du matériel et des actions. Ainsi, dans un prolongement de la DDE qui prend en compte cette approche de la réalité matérielle, nous appelons modélisation la dialectique établie entre un contexte et les événements observés et leurs représentations respectives à travers diverses étapes qui correspondent à autant de modèles. Pour être adaptés à des situations d'apprentissage, Van den Heuvel-Panhuizen (2003) considère que les modèles remplissent généralement deux conditions : ils naissent dans des contextes réalistes ou imaginables et permettent la mise en place d'une mathématisation verticale.

Nous proposons de débuter l'étude du théorème de Thalès par le problème de mesure de distances inaccessibles. Ce type de problématique n'est certes pas nouveau à ce détail près qu'au cours de l'histoire, les situations proposées, en particulier par Clairaut (1741), étaient et sont encore représentées directement dans l'espace le plus familier c'est-à-dire celui d'une feuille de papier (Laborde, 1984). Notre idée est qu'une modélisation qui assurerait précisément le passage du méso-espace au micro-espace grâce à une triple approche de la question permettant de rencontrer à la fois une problématique pratique, une problématique de modélisation et une problématique géométrique[4] (Berthelot et Salin, 1992), contribuerait à la construction du sens d'une notion.

Un problème en situation pour introduire le théorème de Thalès

De l'ingénierie didactique que nous avons conçue (Laguerre, 2005), nous extrayons deux problèmes qui sont en rapport avec le réel :

- la possibilité de mesurer de façon effective des distances inaccessibles dans le méso-espace, l'espace de la cour.
- la possibilité d'évoquer cette action à partir de la représentation des situations de ce domaine dans le micro-espace, l'espace de la feuille.

Nous proposons tout d'abord une analyse succincte de la séquence composée de quatre séances liées à ces deux problèmes en termes d'objectifs, de tâches et de résultats. Ensuite, ces situations nous servent à illustrer différents niveaux de modélisation du réel.

Situation (1) : visée dans le méso-espace

La classe est divisée en 15 binômes disposant tous d'une lorgnette avec laquelle ils visent une mire. Ces lorgnettes sont construites à partir de boîtes parallélépipédiques toutes différentes mais d'une telle façon qu'à la fin de la séance, trois lieux de visées se dégagent. Aussi, la tâche pour les binômes est, d'une part, de viser dans la cour avec leur lorgnette la mire composée d'une bande de papier de 1 mètre de long et de 15 centimètres de large fixée sur un tableau et, d'autre part, de marquer le lieu de visée à l'aide d'un carton d'identification (Figure 1). Pour viser, les élèves font coïncider les milieux de la fente et de la mire ainsi que leurs extrémités afin que la fente de visée soit exactement remplie. L'objectif est que les élèves se rendent compte qu'il y a trois lieux de visée distincts. Les élèves constatent

[4] La problématique pratique est en rapport, par exemple, avec le fait de superposer un gabarit pour montrer que deux triangles sont égaux. La problématique de modélisation consisterait à prendre les mesures nécessaires sur les deux triangles et, en appliquant la formule de l'aire du triangle, à montrer qu'ils ont la même aire, mises à part les approximations liées aux calculs et à la mesure. La problématique géométrique revient à raisonner sur les aires par découpage et recomposition sans prendre de mesures sur le dessin.

effectivement qu'il y a trois lieux de visée différents. De plus un binôme émet l'idée que des lorgnettes distinctes peuvent malgré tout avoir le même lieu.

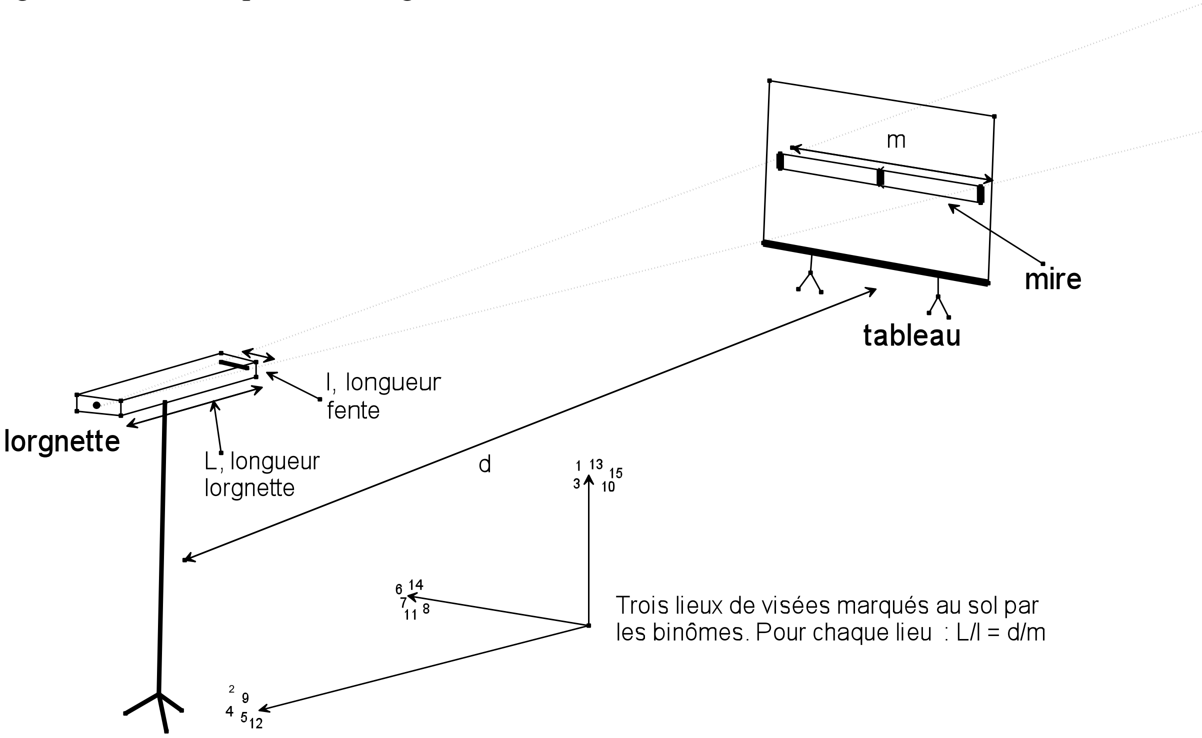
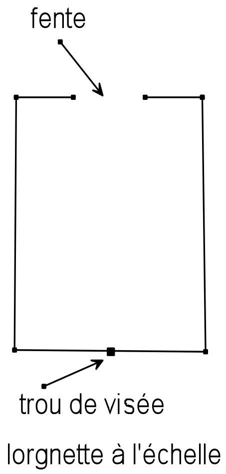


Figure 1 - Un exemple de visée avec une lorgnette et représentation des trois lieux

Situation (2) : modélisation plane des lorgnettes et visée dans le micro-espace

Le premier objectif de cette séance qui se déroule dans la salle de classe est de parvenir à se mettre d'accord sur une représentation des lorgnettes dans le plan et de produire sur papier calque les rectangles attendus à l'échelle, sur lesquels sont indiquées la fente et le trou de visée (Figure 2).



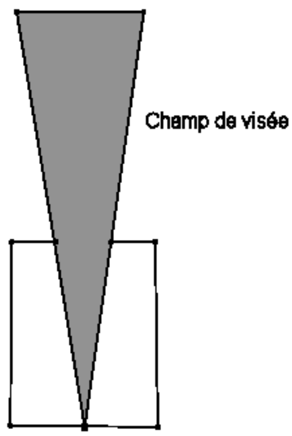


Figure 2 - Une lorgnette à l'échelle **Figure 3** - Une visée représentée dans le plan

Les élèves ont pour tâche d'imaginer une façon de représenter une lorgnette sur une feuille de papier. Les résultats que nous obtenons sont liés au contexte interne des élèves. En effet, quelques-uns sont tentés de schématiser les lorgnettes dans l'espace à trois dimensions. Certains produisent des schémas hybrides relevant à la fois du plan et de l'espace. Mais pour d'autres, une représentation rectangulaire plane est rapidement proposée. Après échanges mutuels, le schéma attendu est retenu par la classe qui admet la validité d'une telle représentation qui facilite l'accès à l'information et la compréhension de la situation de visée. S'en suit un retour à un travail en binôme pour la production des lorgnettes à l'échelle. Un écueil est en rapport avec le statut de ces représentations qui diffèrent de celui du dessin. Il s'agit ici de produire un objet spatio-graphique (Laborde et Capponi, 1994) pour lequel les imperfections de tracé sont importantes.

Le second objectif de cette séance est de dessiner l'angle de visée (Figure 3). Les élèves ont donc pour tâche de représenter des rayons lumineux immatériels ce qui constitue une difficulté conceptuelle pour eux. Ils ont dû être guidés par l'expérimentateur.

Le troisième objectif de cette séance est de procéder à une visée dans le micro-espace (Figure 3). Les élèves doivent prendre conscience que la mire ne peut pas être représentée à la même échelle que la lorgnette. Les résultats montrent que les élèves parviennent à se rendre compte qu'il est nécessaire d'employer deux échelles. De plus, ils ont bien assimilé le fait que, pour qu'une mire soit perçue à l'aide d'une lorgnette dans le micro-espace, il faut d'une part, que les milieux de la mire, de la fente et le trou de visée soient alignés et que, d'autre part, cette mire entre exactement dans le champ de visée de la lorgnette. La problématique de modélisation prend ici le relais puisqu'il s'agit d'anticiper une réponse qui pourrait être obtenue dans le méso-espace mais dont il est exigé qu'elle soit trouvée dans le modèle.

Situation (3) : anticipation d'une visée par le calcul

Le premier objectif de cette séance est la mise en évidence de l'équivalence des lorgnettes à partir de la superposition de leurs calques. Chacun des neuf groupes constitués reçoit toutes les représentations d'un des trois ensembles de lorgnettes. Les élèves doivent comprendre les raisons de leur équivalence. Il s'avère que les élèves ont l'idée de positionner les calques les uns sur les autres pour parvenir à ce résultat après avoir tracé un champ de visée.

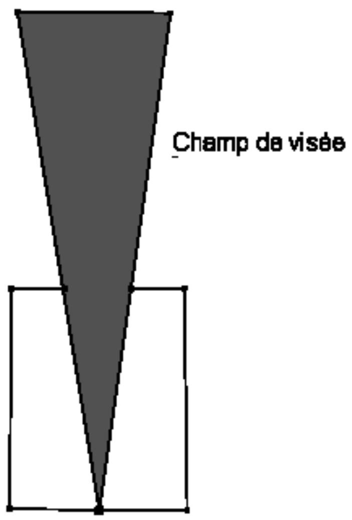


Figure 4 - Équivalence de cinq lorgnettes par superposition des calques et correspondance des champs de visée

Le second objectif de cette séance est d'émettre une conjecture en rapport avec la proportionnalité de la mesure de la longueur des lorgnettes et de la mesure de la longueur de leur fente ce qui leur permet ensuite d'anticiper une visée du méso-espace par le calcul. Pour cela, sont consignées au tableau et pour chaque lorgnette, les mesures des longueurs de la fente, de la longueur et de la largeur de la lorgnette et de la mire ainsi que les distances dans le méso-espace des trois lieux de visée à la mire. Les élèves ont pour tâche de mettre en relation ces mesures. Les caractéristiques des lorgnettes d'un des trois tas sont telles que le rapport peut être identifié (largeur fente/longueur lorgnette = 1/10), ce que les élèves ont d'ailleurs fait. Ils déduisent une partie de la généralisation attendue : le rapport longueur fente/longueur lorgnette est à peu près le même pour les lorgnettes d'un même tas. Par contre, ils sont guidés par l'expérimentateur pour trouver qu'à chaque fois ce rapport est celui de la longueur de la mire sur distance lorgnette-mire. Ce constat leur permet anticiper par le calcul une visée du méso-espace. La problématique géométrique prend place lors de la démonstration de la conjecture.

Situation (4) : retour dans le méso-espace

Cette situation a pour but de trouver dans le méso-espace une solution pratique au problème grâce à la fabrication d'un télémètre (Errard de Bar-le-Duc, 1594) qui se compose de deux règles graduées en centimètres l'une horizontale et l'autre verticale et d'une troisième branche articulée avec la règle horizontale (Figure 5).

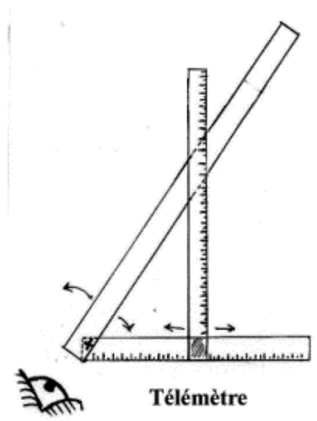


Figure 5

La verticale glisse le long de l'horizontale. On fait coïncider l'extrémité de cette dernière avec le pied de l'objet visé et l'extrémité de la partie articulée avec le sommet. On mesure alors la distance qui sépare le viseur de l'objet, par exemple 20 mètres, et l'on place la règle verticale à 20 centièmes sur horizontale. La longueur qui apparaît à l'intersection de la règle verticale et de la partie articulée donne la hauteur cherchée.

Cadre d'analyse de la modélisation en jeu dans la séquence

Avant le début de la modélisation

Contexte : dans la cour de l'établissement (environnement), les binômes visent (action) à l'aide de lorgnettes une mire fixée sur un tableau (matériel) en faisant coïncider les extrémités et le milieu de la mire avec les extrémités et le milieu de la fente de la lorgnette. (Situation 1)
Événement : dans la cour (lieu), après que tous les binômes ont procédé à la visée (instant), certains élèves remarquent que les cartons identificateurs sont regroupés en trois tas (1ère interprétation du fait « équivalence ») et d'autres ont rajouté que des lorgnettes différentes peuvent avoir le même lieu de visée (2ème interprétation du fait « équivalence »). (Situation 1)

Les différentes étapes de la modélisation

La modélisation du contexte initial (matériel et action)

Modèle réaliste du contexte (matériel) : dans la salle organisée en ateliers, les élèves représentent les lorgnettes par des rectangles à l'échelle sur papier calque. Il s'agit d'une modélisation réaliste du matériel car des rectangles de même type percés d'un point de visée et fendus d'un segment représentant les lorgnettes dans le plan peuvent aussi apparaître dans le contexte si nous procédons à une découpe en long des lorgnettes parallélépipédiques suivant le plan défini par le trou et la fente de visée. (Situation 2, Objectif 1)

Modèle imaginable du contexte (matériel) : pour pouvoir matérialiser la visée dans le plan, les élèves tracent le champ de visée de leur lorgnette (Figure 3). Le modèle en rapport avec le contexte est imaginable car les champs sont impalpables dans le contexte initial. (Situation 2, Objectif 2)

Modèle imaginable du contexte (action) : après avoir modélisé une lorgnette et son champ de visée, l'action de visée est modélisée. Dans le plan, les milieux de la mire et de la fente sont placés sur la bissectrice de l'angle de visée et leurs extrémités respectives sont situées sur les côtés de cet angle. C'est un exemple où nous pouvons expliquer le fait que la modélisation constitue une interface entre deux interprétations de la réalité. Ce rôle de médiation est apparent grâce au lien établi entre, d'une part, le fait qu'il fallait, pour viser correctement dans la cour, être de face et que les extrémités et les milieux des deux objets devaient coïncider et, d'autre part, l'idée que dans le modèle plan, les extrémités et les milieux en question se situent respectivement sur la bissectrice et les côtés de l'angle de visée. (Situation 2, Objectif 3)

Événement dans cette réalité : le modèle imaginable du contexte correspond à une nouvelle réalité et donne lieu à l'apparition d'un nouvel événement : dans la salle de classe (lieu), après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque (instant), les élèves constatent par superposition des calques la coïncidence de cinq angles. (Situation 3, Objectif 1)

La modélisation de l'événement initial

Modèle imaginable de l'événement : l'événement précédent peut aussi être interprété comme étant un événement «imaginable» dans le modèle lié à l'événement du départ : dans la salle de classe (lieu), après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque (instant), les élèves constatent que l'équivalence des lorgnettes correspond au fait qu'elles ont le même champ. (1ère interprétation «imaginable» dans le modèle du fait «équivalence»). La modélisation est une interface entre un événement lié au modèle et un autre en rapport avec le contexte. (Situation 3 Objectif 1)

Événement «mathématique» dans le modèle lié à l'événement : un événement «mathématique» peut être rattaché à une interprétation mathématique d'un fait : dans la salle de classe (le lieu), après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents (l'instant), des élèves disent : «Les lorgnettes équivalentes ont des angles de visée égaux» (1ère interprétation mathématique). Ici aussi nous pouvons dire que la modélisation est une interface entre différents types d'interprétations de la réalité car un retour au contexte est inévitable si nous voulons que les élèves dépassent l'idée de l'équivalence de lorgnettes en termes de champ de visée. En quoi les lorgnettes sont-elles différentes ? Elles n'ont pas les mêmes mesures de longueurs. D'où l'apparition d'un nouvel *événement «mathématique» dans le modèle :* dans la salle de classe (le lieu), après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents (l'instant), des élèves disent : «Les lorgnettes équivalentes ont certaines mesures de longueurs proportionnelles» (2ème interprétation mathématique). Il s'agit ensuite de démontrer la conjecture.

Conclusion

L'objectif de ce texte est de tenter de cerner la notion de modélisation de la réalité dans l'enseignement des mathématiques. C'est à ce sujet que l'approche du réel que nous proposons dans le cadre de la Didactique des Domaines d'Expériences nous est utile puisqu'elle semble faciliter l'analyse de notre situation.

Nous envisageons la réalité en termes de contexte et d'événement. Le contexte se décompose selon le binôme matériel/action. Le contexte est la visée (action) d'une mire avec des lorgnettes (matériel) dans le méso-espace (environnement). Par événement, nous comprenons la donnée d'un lieu, d'un instant et d'interprétations de faits lié au contexte. Ainsi, un des premiers événements a été de constater l'empilement de cartons d'identification des lorgnettes à trois endroits de la cour.

La modélisation concerne tous les différents mouvements par allers et retours que les élèves instaurent entre, d'une part, un contexte et un événement qui lui est rattaché et, d'autre part, les diverses représentations de ce contexte et de cet événement engendrant de nouvelles interprétations à leur sujet ou générant à leur tour de nouveaux contextes/événements.

Le contexte et l'événement peuvent faire l'objet d'une modélisation réaliste ou d'une modélisation imaginable au sens de la RME. Dans notre travail, la première est liée à une réalité matérielle (les lorgnettes) et la seconde à une réalité physique (champs de visée). Modéliser le contexte consiste à modéliser les objets, le matériel et l'action.

La modélisation favorise des anticipations dans le modèle des actions du réel. Elle permet aussi de donner du sens à l'articulation qui peut être établie entre le monde réel matériel, le monde physique et le monde mathématique.

Le raccourci entre les divers niveaux de modélisation peut être incarné par la situation historique de l'utilisation du télémètre dans le méso-espace pour trouver directement la solution au problème sans aucun calcul. Mais derrière cette simple manipulation existe une mathématisation qui la légitime.

Dans le cadre de l'enseignement, il semble important de se poser les questions suivantes pour une situation de modélisation de la réalité qui serait mise en place en classe :

- Les élèves doivent-ils être amenés à modéliser eux-mêmes tout ou une partie du matériel et des actions ?
- Dans quel but et pour quels apprentissages ?
- Doivent-ils travailler uniquement sur les représentations mathématiques des contextes ?

À l'avenir, nous chercherons à savoir si notre approche de la modélisation de la réalité est généralisable à l'enseignement de la géométrie voire à l'enseignement des mathématiques.

Éric Laguerre
Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz
eric.laguerre@versailles.iufm.fr

Références

Bartolini Bussi M. & Boero P. (1998). Teaching and Learning Geometry in Contexts, Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. *ICMI study. Dordrecht: Kluwer 52-62.*

Boero P. & Douek N. (2008). La Didactique des Domaines d'Expérience. *Carrefour de l'Éducation.* 26, 103-119.

Berthelot & Salin M-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de doctorat. Université Bordeaux I.

Clairaut A.C. (1741). *Éléments de géométrie* (1861) Paris : Hachette.

Dapueto C. & Parenti L. (1999). Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 1-21.

Douek N. (1999). Argumentation and conceptualization in context : a case study on sun shadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics.* 39, 89 -110.

Errard de Bar-le-Duc I. (1594). *La géométrie et pratique d'icelle* (1619). Paris : Michel Daniel.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an Educational Task* Dordrecht Riedel Publishing Company.

Kuzniak A., Parzysz B., Vivier L. (2008). *Du monde réel au monde mathématique. Un parcours bibliographique et didactique.* IREM Université Paris Diderot Paris 7.

Laborde C. (1984). Exposé sur la géométrie. In (Balacheff N. éd.) *Recueil des textes et comptes rendus de la 3ème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique*. IMAG, Université J. Fourier. Grenoble 1.

Laborde C. & Capponi B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14/1.2, 165-210.

Laguerre E. (2005). *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège.* Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot-Paris7.

Thirion M. (1999). *Les mathématiques et le réel.* Paris : Ellipse.

Treffers A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas Project.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics,* 54, 9-35.

Interaction forte entre mathématiques et physique dans la transition lycée-université : des équations différentielles du premier ordre dans un enseignement de physique

Éléments d'analyse en termes de registres sémiotiques

Claude Cabot et Daniel Beaufils

Résumé

Nous présentons ici quelques éléments d'un travail portant sur les équations différentielles dans le cadre d'un module d'enseignement de physique de premier semestre de première année d'université (L1S1). Le fil conducteur de ce module est la modélisation des systèmes dépendant du temps et son outil principal sont les équations différentielles. La problématique est donc double : celle de l'articulation mathématiques-physique dans l'activité de modélisation et celle de la transition secondaire - supérieur puisque ce thème est en prolongement direct du programme de physique de la classe de terminale S. L'étude présentée ici repose sur des questionnaires exploratoires passés auprès d'étudiants de L1S1 à l'issue de cet enseignement, l'investigation étant centrée sur l'articulation des registres algébrique et graphique d'une part, et sur la correspondance mathématique - physique (lien entre cadres de rationalité). Les premiers résultats confirment les difficultés pressenties : absence de cohérence entre les différents registres sémantiques et entre les différents cadres de rationalité. Quelques pistes de réflexion sont proposées.

1 – Contexte, problématique et cadre théorique

1.1. En début de licence, un enseignement de physique qui s'appuie sur le réel et sur l'activité de modélisation.

En premier semestre de la première année de licence (L1S1), à Orsay, le module de physique *Lois d'évolution en physique* est centré sur la modélisation de phénomènes physiques (allant de la radioactivité à la mécanique du point matériel et aux circuits électriques), et aborde quelques situations non physiques telles la dynamique des populations. L'unité du module, sa cohérence, se fondent, non plus sur un thème de physique, mais sur l'activité de modélisation théorique, et plus spécifiquement, sur l'utilisation des équations différentielles (ED)[1]. Sont ainsi abordées les équations différentielles « classiques » du premier ordre, du second ordre, et quelques équations non linéaires (loi logistique, par exemple). Le contenu de ce module a été initialement élaboré[2] en continuité avec le programme de physique de la classe de terminale scientifique (TS)[3].

1.2. Au lycée, en TS, une interaction maths-physique à parfaire

Entrés en vigueur en 2002, les programmes scientifiques de la classe de terminale scientifique ont comporté une innovation importante : en physique, les phénomènes tels que la désintégration radioactive, la charge d'un condensateur à travers une résistance, l'effet d'un frottement fluide sur la chute d'un corps, sont étudiés dans leur régime transitoire aussi bien

[1] Cet aspect dérange souvent les étudiants, habitués à avoir affaire à un contenu de module homogène du point de vue du domaine disciplinaire, permettant d'approfondir ce domaine.
[2] Ce module a été conçu (avec la participation de D. Beaufils) par J.-P. Maillet physicien d'Orsay, responsable du module.
[3] La TS est la dernière année du secondaire, le L1S1 est le premier semestre à l'université.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 255-275.

que dans leur régime permanent, modélisés par des équations différentielles du premier ordre. L'étude de ce nouveau type d'équations est faite, en parallèle, au sein du programme de mathématiques[4] : leur introduction se fait sous la forme $y' = f(y,t)$, par extension progressive à partir de l'introduction de la fonction exponentielle comme fonction solution de l'équation $y' = y$, avec $f(0) = 1$. Le programme officiel de mathématiques spécifie : « *La présence [des équations différentielles], bien que modeste dans le libellé du programme, est fondamentale pour amener à la compréhension de la puissance des mathématiques pour la modélisation ; un travail conjoint avec les autres disciplines favorisera cet objectif* » (B.O.E.N, 2001).

Dans un travail de didactique portant sur l'introduction des équations différentielles dans les nouveaux programmes de 2002, F. Malonga (2008), soulignant que « [..] *l'interaction physique-mathématique est ici cruciale pour les deux disciplines* », interroge la réalité de la continuité didactique entre mathématiques et physique[5] et met le lien de la physique avec les mathématiques « *en question* » (Malonga, Beaufils et Parzysz, 2008). Ainsi, en physique de TS, en ce qui concerne la méthode de résolution de l'équation différentielle (ED), plutôt que de chercher à établir l'expression analytique de la grandeur étudiée, soit celle-ci est donnée[6], sous une forme générique ou non, soit c'est la méthode numérique d'Euler qui est mise en œuvre.

1.3. Continuité secondaire-supérieur et changements de pratiques

En termes de continuité secondaire-supérieur, le module de physique *Lois d'évolution*, présente un certain nombre de points communs avec la physique de TS mais a aussi des spécificités. Comme en Terminale, l'objet « équation différentielle » y est mis en avant comme constitutif de la modélisation, mais l'accent est mis sur le pouvoir prédictif à partir de la seule équation différentielle. Les modèles mathématiques utilisés à l'université sont aussi plus divers et les situations physiques analysées sous forme d'exercices plus sophistiqués.

De plus, la transition secondaire-supérieur s'accompagne de changements de « pratiques » dans la présentation et la manipulation des ED de premier ordre. En ce qui concerne la forme, la prise en considération de l'aspect linéaire amène, en physique du niveau L1S1, à écrire les équations différentielles, sous la forme $f(y, y') = g(t)$, c'est-à-dire en privilégiant la forme dite homogène et la résolution en fonction de la nature du « second membre ». Quant à la démarche de résolution d'une ED, elle fait partie des compétences attendues en s'appuyant sur les mathématiques : en physique de L1S1, on s'appuie sur une méthode analytique[7] qui fait explicitement référence aux connaissances de mathématiques.

Cette approche autour des ED du premier ordre a donc à faire face d'emblée aux difficultés rencontrées par les élèves au cours de leur cursus au lycée :
- difficulté liée à l'activité de modélisation elle-même (choix des paramètres pertinents, champ théorique sous-jacent, traduction mathématique des lois à appliquer, etc.),
- difficulté liée aux symboles et au vocabulaire qui, pour un même objet, diffèrent parfois notablement entre le cours de mathématiques et celui de physique,
- et, plus généralement, difficulté liée au fait, souvent éludé, que les mathématiques du

---

[4] Ce qui n'est pas le cas des ED du second ordre qui sont utilisées lors de l'étude des oscillateurs harmoniques mais qui ne figurent pas au programme de mathématiques.

[5] Au sens où des liens concrets peuvent être établis entre les deux disciplines, tout en faisant en sorte que chacune garde sa propre spécificité.

[6] On trouve par exemple, lors des évaluations de physique, dans le courant de l'année TS ou au baccalauréat, des énoncés avec des questions de la forme « *Montrer que la loi d'évolution est de la forme….* ».

[7] La méthode d'Euler est également utilisée dans le module de physique L1S1, mais en séances de TP sur ordinateur, et dans le but de comparer résultats de mesures et prédictions de modèles, avec une force de frottement dont la norme est proportionnelle soit à la norme de la vitesse, soit au carré de la vitesse.

physicien ne sont pas toujours celles du mathématicien[8].

1.4. Questions pratiques et cadres théoriques

La mise en place de ce module universitaire invitait donc à évaluer, en fin d'enseignement, les *connaissances et savoir-faire* des étudiants au niveau d'une vision globale des ED, et plus spécifiquement pour ce qui concerne celles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants, et à second membre constant non nul (ED1ASM). L'étude présentée ici repose sur des questionnaires exploratoires passés auprès d'étudiants de L1S1 à l'issue de cet enseignement.

La complexité des phénomènes de transition lycée-université entraîne leur analyse à la lumière de plusieurs cadres théoriques, complémentaires (Winslow, 2007). Pour situer notre approche, nous avons considéré principalement deux cadres théoriques. Pour prendre en compte le contexte institutionnel, la théorie anthropologique du didactique permet d'aborder la transition de façon assez globale (Chevallard, 1999). Pour prendre en compte les difficultés d'apprentissage auxquelles se heurtent les étudiants, on a recours aux représentations sémiotiques telles qu'étudiées par Duval (1995, 2006a), qui permettent une analyse plus locale de la question de la transition, dans la mesure où l'articulation des registres de représentation se fait en interaction avec le développement des connaissances sur les objets représentés (Perrin-Glorian, 2004).

Notre investigation était centrée sur l'articulation du registre graphique avec des registres discursifs (registre formel analytique, langage naturel), mais aussi sur la correspondance mathématique-physique avec quelques questions concernant spécifiquement la phénoménologie. L'utilisation des registres sémiotiques peut en effet constituer un outil puissant pour analyser l'apprentissage non seulement des mathématiques, mais aussi de la physique (Malafosse, 2002), sans pour autant négliger les exigences épistémologiques spécifiques à chaque discipline. Les registres sémiotiques ont donc été mis en relation avec des cadres de rationalité, tels que construits par Lerouge (1992) et repris par Malafosse, Lerouge et Dusseau (2001). Nous avons considéré plusieurs types de cadre de rationalité : les cadres culturels de mathématiques et de physique, disposant d'objets et de règles tels que reconnus par la communauté scientifique ; les cadres de médiation didactique construits pour la transposition des savoirs, et enfin le cadre personnel des élèves - dans la mesure où on peut le considérer comme cadre de rationalité, alors même qu'il est « le lieu d'expression de rationalités différentes, voire contradictoires » (Malafosse, Lerouge et Dusseau, 2001).

On abordera les notions de discontinuités inter-cadres, qui, souvent implicites, contribuent aux difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants, comme le constatent les didacticiens de la discipline. Il en est ainsi pour Malafosse *et al.* (2001), qui étudient la loi d'Ohm en fin de collège, et plus spécifiquement le passage expérience-théorie. Leur problématique, reprise récemment par Tourna (2008), conduit à souligner que les changements de cadre s'accompagnent, durant le processus de modélisation mathématique d'un phénomène physique, de discontinuités voire de ruptures entre registres sémiotiques.

Pour engager notre propos, il nous a semblé utile de structurer cette présentation en présentant tout d'abord (section 2) un exemple de situation physique qui peut être considérée comme situation « prototypique », puisqu'abordée aussi bien au lycée qu'en début d'université, avec un côté « concret » qui donne sens et permet de mieux intérioriser sa représentation. Cet exemple permet de donner à voir un support d'illustrations de concepts qui sont à la jonction des mathématiques et de la physique, et ce, en termes sémiotiques : registres discursifs (dont symbolismes autour de la forme analytique des ED), registres non discursifs

[8] Voir en section 2 les micro-ruptures de rationalité entre cadres.

(représentations graphiques). On y abordera les coordinations entre cadres, coordinations qui peuvent constituer une condition pour l'articulation physique-mathématiques, surtout quand il s'agit, comme c'est le cas ici, de modélisation mathématique d'une situation extraite du réel. Ces points seront repris ultérieurement et développés dans la partie *Analyse des questionnaires* (section 4).

2 – Relations entre aspects phénoménologiques et représentations mathématiques à travers une approche en termes de registres sémiotiques : un cas prototypique, la chute verticale dans un fluide

L'exemple de la chute verticale d'un corps dans le champ de pesanteur avec frottement fluide laminaire[9] est classique. Il peut être qualifié de « pseudo-concret » dans la mesure où l'expérience est décrite (sans être réellement exécutée[10]) avec, on peut l'imaginer, une bonne perception de la nature des objets. Une approche qualitative permet au physicien d'appréhender l'évolution de la vitesse dans le cas où la vitesse initiale est nulle (ou très faible) : au fur et à mesure que la valeur de la vitesse augmente, l'intensité de la force de freinage augmente également, jusqu'à compenser le poids apparent[11]. Alors, la somme des forces appliquées au système étant nulle, l'accélération est nulle également, et la vitesse reste ultérieurement constante : on a atteint le régime stationnaire (ou permanent), correspondant à la vitesse limite $v_{\lim}$.

Pour le mathématicien, ce point n'est pas si simple puisque la force de frottement ne compense jamais, mathématiquement, le poids apparent : la différence tend exponentiellement vers zéro. C'est le retour à la physique, à partir du modèle mathématique, avec la notion de précision de mesure ou de simple perception, qui justifie *a posteriori* le raisonnement *a priori* du physicien.

2.1. En TS et en L1S1, une même procédure pour la mise en équation, mais un traitement différent pour passer de l'ED aux solutions

La mise en équation en physique suit une démarche formalisée : choix du référentiel (supposé galiléen), définition du système, bilan des forces, application de la seconde loi de Newton (RFD) appliquée au centre d'inertie, choix du repère, projection sur un axe. Ceci permet d'aboutir à une équation différentielle du second ordre sur une variable algébrique, la position, qui est réécrite sous forme d'une équation différentielle du premier ordre sur la vitesse (la

[9] Pour rendre compte des frottements exercés par un fluide sur un objet en mouvement, on distingue habituellement le frottement fluide laminaire et le frottement fluide turbulent. Le choix entre ces deux modèles est lié à l'expérience. Typiquement, la force de frottement fluide laminaire, qui est de la forme $\vec{f} = -k\vec{v}$, correspond aux cas où la vitesse du corps n'est pas très élevée. Aux vitesses plus élevées, la force de frottement est fonction du carré de la vitesse (on a alors affaire à une équation différentielle non linéaire). Dans les faits, la force de frottement dépend a priori, de façon plus ou moins complexe (au sens large du terme…), non seulement des caractéristiques du corps en mouvement (vitesse, forme) mais aussi des caractéristiques du fluide (*a priori* : viscosité, masse volumique … Quand, de plus, on a affaire à un objet sphérique de rayon R, on peut montrer que, dans le cas du frottement fluide laminaire, la relation peut se mettre sous la forme $\vec{f} = -\mathrm{Cte}.\eta R\vec{v}$ où η représente le coefficient de viscosité du fluide. Quelques exemples considérés comme classiques : chute d'une gouttelette d'huile dans l'air, chute d'une petite bille d'acier dans un mélange eau-glycérine. On devrait pouvoir ajouter : ballons de baudruche dans l'air. L'exercice II du bac de juin 2009 traitait exactement de la situation que nous avons choisie de présenter comme situation « prototypique » en physique (chute verticale dans un fluide), pour les ED du premier ordre, avec second membre constant non nul.

[10] L'expérience est, par contre, en principe réalisée devant les élèves, voire par les élèves eux-mêmes en classe de terminale.

[11] Le poids apparent est la somme du poids et de la poussée d'Archimède, et constitue donc une force verticale constante.

composante de la vitesse selon l'axe considéré). Le champ de formation de l'ED (application de la RFD) est celui de la mécanique du point et conduit à une forme où seul le terme contenant la dérivée est dans le membre de gauche. Le champ de traitement est celui des mathématiques, il débute par une transformation pour pouvoir obtenir la forme d'une ED1ASM : on aboutit à l'ED[12] réduite

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \quad \text{(cf. schéma et relations en Annexe 1)}$$

Pour passer de l'ED aux solutions, le traitement analytique diffère selon qu'on envisage le contenu du programme et les compétences attendues en TS ou en L1S1. En physique de TS, le lien entre maths et physique n'est que modérément mis en œuvre et l'activité de « résolution » en physique n'est qu'une activité de « vérification » : on demande aux élèves de montrer que la solution est bien de la forme donnée, le travail consistant alors uniquement à identifier ce qui est appelé les « constantes » (Malonga, 2008).

En physique du L1S1, le traitement analytique consiste à (re)démontrer qu'un changement de « variable » (ici une fonction) permet de retrouver une forme homogène (second membre nul) : la fonction exponentielle est solution de $Y'=aY$, équation linéaire homogène. Revenir à la « variable » de départ permet de faire référence au théorème de mathématiques sous-jacent[13]. Le tableau ci-dessous présente une mise en perspective des formes analytiques de l'ED1ASM et de ses solutions : comparaisons des registres analytiques mathématiques utilisés en TS et en L1S1, avec la justification de leur usage.

	Équation différentielle : forme utilisée	Justification de la forme ED utilisée	Solutions de l'ED	Démarche utilisée pour passer de l'ED aux solutions
Maths TS : dans les manuels scolaires, cette ED est introduite comme prolongement de la présentation de la fonction exponentielle	$y'=f(y,x)$ $y'=ay+b$ avec a réel non nul, b réel	Suite à la présentation de $y'=ay$ et des caractéristiques de la fonction exponentielle solution de l'équation $y'=y$ avec $f(0)=1$	$Ke^{ax}-b/a$	Démonstration : on cherche l'unique fonction constante (-b/a) solution de l'ED, on montre que les solutions sont de la forme $Ke^{ax}-b/a$
Physique L1S1 (assez largement discuté, et plusieurs fois repris)	$f(y,y')=g(t)$ y'=ay+b ou $y'+\lambda y=b$ ou $y'+\frac{1}{\tau}y=b$	En référence à la forme linéaire En appui avec la formule de radioactivité	$Ke^{-at}+b/a$ $Ke^{-\lambda t}+b/\lambda$ formule qui peut faire référence	Démonstration : par changement de fonction $z=y-b/\lambda$ pour se ramener à z'+az = 0

Tableau 1 -Les formes (décontextualisées) des ED1ASM et de leurs solutions entre Terminale S et L1S1

[12] Pour simplifier notre approche, dans ce texte et en Annexe 1, la poussée d'Archimède est négligée.

[13] « La solution générale d'une ED1ASM est la somme de la solution générale de l'équation homogène correspondante et d'une solution particulière de l'équation avec second membre » et on choisit toujours la solution stationnaire. Théorème que les étudiants n'aborderont en fait, en mathématiques, qu'au semestre suivant (L1S2).

2.2. La relation mathématiques-physique ne repose pas uniquement sur l'idée de complémentarité des disciplines

Le changement de cadre mathématiques-physique s'accompagne de variations, voire de discontinuités, certaines assez évidentes, d'autres plus insidieuses

Variations dans la variable utilisée : x en maths, t en physique : au-delà des aspects nominatif et dimensionnel[14], le temps a une connotation particulière, n'étant pas une variable comme une autre à travers la perception que l'on en a.

Variations dans les formes canoniques des ED : avec les ED1ASM, les formes $y' = ay + b$ (forme canonique utilisée en maths de terminale) et $y' + ay = b$ (forme canonique utilisée en physique de terminale, et en L1S1 en prenant en considération l'aspect linéaire[15]). La proximité de ces formes pourra être source de confusions dans la forme des solutions. Passer d'une présentation du type *y' = f(y,t)* à une présentation en « *premier et second membres* » *f(y',y) = g(t)* devrait obliger à négocier une transition, par exemple en explicitant la notion de linéarité qui constitue un point à préciser, si ce n'est au lycée, du moins en début d'université, en mathématiques et en physique[16].

L'élaboration d'une ED à partir de la phénoménologie permet de citer un autre exemple de *micro-ruptures de rationalité entre cadres : la notion de zéro*. En mathématiques, le zéro constitue un nombre comme un autre. En physique, une grandeur qui s'annule « physiquement » correspond à une situation spécifique. Ainsi, pour ce qui concerne les ED du premier ordre, les situations physiques sont différentes selon qu'il s'agit d'un cas avec second membre g(t) nul (ED homogène), ou d'une ED1ASM.

Concernant les solutions de l'ED, on peut noter l'existence d'un hiatus entre la présentation des physiciens et celle des mathématiciens. En effet, en mathématiques, le régime stationnaire est la solution pour laquelle $y' = 0$ et donc y = constante, ce qui constitue une solution particulière *indépendante* de la solution générale. La solution générale de l'équation (avec second membre) présente alors une *limite asymptotique,* mais qui, par nature, n'est donc jamais atteinte. En physique, on fait comme si le régime stationnaire était une partie de la solution, et qui plus est, une partie que l'on peut identifier dans la solution générale à partir d'une certaine date !

La nature dimensionnelle des objets en physique : elle peut servir d'appui pour aider à la transposition des relations d'un cadre de rationalité à l'autre.

En L1S1, certains enseignants choisissent comme forme canonique de l'ED1ASM, non pas $y' + ay = b$, mais $y' + \lambda y = b$, en substituant à *a,* la constante de désintégration radioactive notée traditionnellement λ, dont la dimension est $[T]^{-1}$, la fonction y' étant considérée comme la dérivée de y par rapport au temps. La forme étant alors plus nettement différente, elle peut être mieux distinguée de celle utilisée en TS. Dans le même esprit, avec toujours l'intention de donner davantage de sens à une expression symbolique, on peut également utiliser pour forme canonique de l'ED celle où figure explicitement la « constante de temps » $\tau = \frac{1}{\lambda}$, soit $y' + \frac{y}{\tau} = b$.

[14] Notons qu'en physique, x représente traditionnellement une longueur.
[15] On fait aussi le choix de la forme linéaire y'+ay=b en mathématiques, en licence (second semestre L1S2).
[16] Ainsi, en physique, on a l'habitude d'appeler fonction linéaire la fonction dite affine en mathématiques.

Entre mathématiques et physique, les symboles peuvent également différer en signe. Le symbole a est, pour les mathématiciens, un réel non nul. En physique, utiliser λ offre l'avantage d'afficher un signe positif. De plus, en L1S1, un éclairage spécial est porté sur la *représentation des paramètres de contrôle.* Dans l'ED $y'+\lambda y = b$, les paramètres de contrôle sont λ et b, déterminés dès lors que le système est lui-même déterminé[17]. L'accent est alors mis sur un aspect prédictif de l'ED elle-même : on a alors l'ordre de grandeur de la variation de la vitesse et celui de l'intervalle de temps caractéristique du phénomène.

2.3. Jeu de cadres de rationalité et jeu de registres autour du registre graphique : quels apports pour les mathématiques ?

Dans l'illustration que nous étudions, le double passage entre cadres phénoménologique/mathématique, et entre registres analytique/graphique, **peut contribuer à consolider quelques notions mathématiques.** Pour illustrer notre propos, on s'appuie sur les graphes de l'évolution de la vitesse v en fonction du temps, en soulignant le fait que, depuis quelques années, l'institution encourage le développement des compétences graphiques, du moins au lycée.

Consolidation de la notion de valeur algébrique

Pour un mouvement donné, la valeur algébrique de la vitesse dépend du choix de l'orientation de l'axe vertical sur lequel on projette le vecteur vitesse considéré. La mise en concordance nécessite, on va le voir, la coordination de registres schématique et graphique. Considérons un mouvement avec vitesse dirigée vers le bas, comme c'est le cas dans notre exemple de chute de gouttelettes dans un fluide. L'orientation de l'axe vertical sera en général choisie vers le bas (voir schéma de l'Annexe 1), puisqu'alors la valeur algébrique du vecteur vitesse est positive : la représentation graphique de l'évolution de la vitesse correspond à des valeurs algébriques positives (ci-dessous, figure 1). À l'inverse, si l'orientation de l'axe avait été choisie vers le haut, la projection du vecteur vitesse, pour le même mouvement, aurait eu une valeur algébrique négative (représentation graphique de droite : figure 2.)

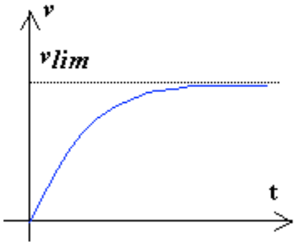


Figure 1

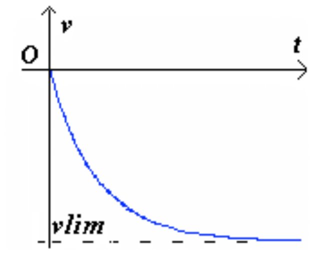


Figure 2

Lien entre registres graphique et analytique

Le graphe correspondant à la valeur $v_0 = 0$ (et $v_{\text{lim}} > 0$), considéré comme illustration d'un aspect phénoménologique, peut servir de support visuel à la relation analytique $v(t) = v_{\text{lim}}(1 - e^{-t/\tau})$ dont la forme est un classique de la physique[18].

Par ailleurs, un *couplage entre l'aspect prédictif de l'ED* (registre analytique) *et les solutions de l'ED* (représentation graphique), conduit à conforter la *conceptualisation de la*

---

[17] Pour notre exemple prototypique, $\lambda = k/m$ et $b = g$.

[18] Même forme par exemple que celle de l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur quand il se charge à travers une résistance.

dérivée. Ainsi la détermination de l'accélération, par exemple à l'instant initial, entraîne un travail dans chacun de ces registres[19], et engage vers des activités de conversion, où le registre du langage naturel peut éventuellement jouer un rôle d'articulation. Le passage du graphique à l'écrit, rarement opéré, permet des opérations de vérification des activités cognitives et mathématiques.

Consolidation de la notion de valeur asymptotique

La valeur limite de la grandeur étudiée (ici la vitesse v_{lim}), est liée à la valeur des caractéristiques propres du système. L'observation d'un régime permanent, traduit de façon analytique (notion de valeur limite correspondant à $dy/dt = 0$, i. e. pour l'étude de la chute de la gouttelette, $dv/dt=0$) et de façon graphique (asymptote horizontale) permet de donner du sens[20] à ce qui est appelé « comportement asymptotique ».

Passage d'une famille de solutions à la solution

Parmi la famille de solutions possibles, c'est la connaissance de l'état du système à un instant donné qui permet d'identifier la courbe solution de l'ED. Autrement dit, dans le registre analytique, c'est la donnée (valeur de la grandeur à l'instant considéré, souvent l'instant initial) qui permet de déterminer la valeur de la constante d'intégration. Dans le registre graphique, spécifier ce qu'il est convenu d'appeler « les conditions initiales » – ici, la vitesse initiale - revient à fixer les coordonnées d'un point par lequel le graphe doit passer. Ainsi, deux valeurs différentes de la vitesse initiale correspondent à deux valeurs différentes de la constante d'intégration mais la valeur asymptotique, qui dépend des caractéristiques propres du système, reste inchangée.

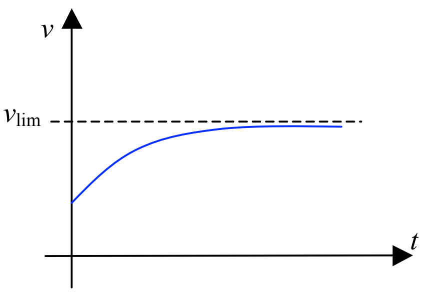


Figure 3

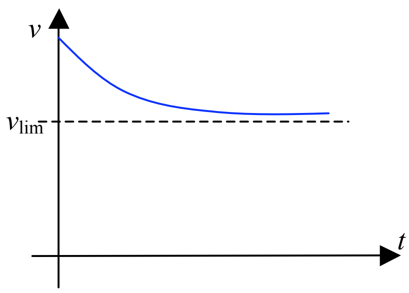


Figure 4

Sur la figure de droite est reportée l'évolution de la vitesse quand la vitesse initiale est inférieure à la vitesse limite (une approche qualitative serait semblable à celle développée antérieurement pour une vitesse initiale nulle, en début du paragraphe 2). Si la vitesse initiale est supérieure à la vitesse limite (on jette l'objet vers le bas avec une vitesse assez élevée, cas correspondant à la figure de gauche), la force de frottement initiale a une norme supérieure à celle du poids[21]. L'accélération initiale est donc un vecteur dirigé vers le haut, et comme elle signe la variation de la vitesse, la valeur de la vitesse va diminuer. La norme de la force de frottement va diminuer aussi, jusqu'à ce qu'elle compense le poids. Alors, l'accélération sera nulle, la vitesse limite atteinte (on vérifie sur le graphe que la tangente à l'origine a un coefficient directeur négatif, ce qui est cohérent avec le fait que l'accélération a une valeur algébrique négative, puisque l'axe vertical est orienté vers le bas).

[19] Calcul, dans le registre analytique, de *dv/dt* à l'instant initial, connaissant la valeur de la vitesse initiale ; détermination du coefficient directeur de la tangente à l'origine, pour le registre graphique.

[20] L'aspect prédictif de l'ED conduit à $v_{\text{lim}} = mg/k$

[21] ou du poids apparent si la poussée d'Archimède n'est pas négligeable.

La richesse possible de l'approche graphique appuyée sur la phénoménologie[22] permet en particulier de travailler sur les images mentales, dans la mesure où elles sont souvent des représentations sémiotiques intériorisées, comme le souligne Duval (2006a). Dans cette partie traitant de l'exemple de la chute de la gouttelette dans un fluide, nous avons essayé de montrer que les aspects phénoménologiques peuvent être l'occasion, si on s'en donne le dessein… et le temps, de manipuler des relations et des graphes, avec une double occurrence : des possibilités de transformation au sein même de chaque registre, analytique et graphique, et des possibilités de passage entre registres et entre cadres, qui peuvent permettre – entre autres – de donner davantage de sens à certaines notions mathématiques.

3 – Hypothèses de recherche. Méthodologie

La thématique de recherche sur les équations différentielles correspond à des approches diverses, aussi bien au collège (Malafosse, 2001) qu'au lycée ou à l'université (Moreno, 2006). Parmi ces approches, plusieurs traitent des aspects conjoints mathématiques et physique (entre autres, Malonga, 2006, 2008, Malonga *et al.*, 2008, et Rogalski, 2006).

En ce qui nous concerne, la mise en place du module de physique de L1S1 engageait à suivre l'évolution des étudiants au bout d'un semestre, et ce, à plusieurs niveaux :

- au niveau d'une vision globale des équations différentielles et plus spécifiquement celles du premier ordre linéaires à coefficients constants et à second membre constant non nul,
- au niveau des phénomènes/systèmes physiques qu'elles modélisent,
- et pour ce qui est plus spécifiquement des registres sémiotiques, au niveau de l'articulation des aspects analytique, graphique et phénoménologique, impliquant un jeu de cadres physique-mathématiques.

Dans le module d'enseignement concerné, c'est en effet dans le cadre d'activités de modélisation portant sur le réel (du physicien) que les ED sont introduites, donc en liaison directe avec une phénoménologie. Notons toutefois qu'il s'agit d'un module théorique, sans partie expérimentale proprement dite : la phénoménologie est soit celle rencontrée auparavant et donc réévoquée, soit une phénoménologique rapportée sous forme de données expérimentales, sous forme de tableaux numériques ou de graphiques[23].

Le but du travail de recherche est ici axé sur la manipulation des ED (obtention, traitement, analyse des solutions) avec la mise en jeu de divers types de registres, et des cadres de la physique et des mathématiques. Nos deux hypothèses de base consistent à supposer :

- que l'articulation des registres formel et graphique est formatrice, avec une prégnance particulière du registre graphique, très visuel,
- que les caractéristiques d'un phénomène perceptible – telle la chute verticale d'une gouttelette dans un fluide – fondent un cadre d'intelligibilité pour les représentations graphiques et le formalisme associé (équations). Elles peuvent constituer une situation-type qui peut servir de référence pour l'analyse et l'interprétation d'autres situations conduisant à un modèle mathématiquement voisin. En d'autres termes, la liaison avec des phénomènes physiques peut, dans une certaine mesure, donner aux étudiants des moyens d'interprétation conduisant à une meilleure compréhension de la notion d'équation différentielle et à de meilleures compétences dans le contrôle des solutions mathématiques.

[22] Cet aspect graphique est précieux, si l'on songe au très petit nombre d'approches graphiques proposées antérieurement aux élèves dans les manuels de mathématiques de TS – au mieux, un seul graphe représentant diverses courbes solutions.…

[23] On peut donc parler à ce niveau de « phénoménographie » (Beaufils, 2009).

Nous avons, sur trois ans, fait passer des questionnaires auprès des étudiants en fin de module de premier semestre de première année[24]. Ces questionnaires, chaque fois un peu différents, comportaient tous un jeu de questions permettant d'obtenir des informations sur ce que les étudiants avaient retenu, à propos des ED1ASM, en termes d'équation-type, de graphe correspondant et de phénomène physique de référence.

Afin d'éviter de générer un « effet évaluation » et pour solliciter le plus librement possible les idées des étudiants, il était bien évidemment indiqué que le questionnaire était anonyme et servait, non pas d'évaluation individuelle, mais à un objectif d'évolution du module. D'autre part, les formulations des questions étaient tournées spécifiquement ; les libellés de nombreuses questions étaient du type : « *Quelle forme analytique est pour vous la forme « de référence »* *pour l'écriture d'une telle équation différentielle* » ou « *si vous aviez à expliquer…* »

Suivant les années, et sous l'effet de contraintes organisationnelles, les populations ont été plus ou moins nombreuses et plus ou moins ciblées. Ce qui nous paraît important, c'est qu'indépendamment de ces différences, le bilan de l'analyse au niveau de la cohérence formalisme-graphique-phénoménologie est – on le verra – globalement le même.

Q1 - Un premier questionnaire en janvier 2006. Les conditions de passation du questionnaire ayant été assez hétérogènes, nous n'avons finalement retenu ici que les réponses de 51 étudiants d'une même section (IFIPS).
Q2 - En 2006-2007, un questionnaire a été passé sous forme informatisée en utilisant Wims[25], et présenté aux étudiants comme « Questionnaire de fin de module de physique ». Une centaine d'étudiants ont répondu.
Q3 - En 2007-2008, un questionnaire papier-crayon, assez restreint, centré sur les questions de cohérence entre équation/solution analytique/représentation graphique/systèmes modélisés. Il a été passé auprès d'une quarantaine d'étudiants de la population MPI (Maths Physique Info).

Dans notre premier semestre de licence (L1S1), on distingue en fait trois sections : maths-physique-informatique (dite portail MPI) et physique-chimie-sciences de la Terre (portail PCST), qui regroupaient cette année-là de l'ordre de 300 étudiants. Ni le portail s'adressant aux étudiants incluant de la biologie (BCST) ni la filière Ingénieurs IFIPS n'étaient concernés par le questionnaire Q2.

4 – Analyse des questionnaires en termes de registres sémiotiques

4.1. Écriture de l'ED : registre analytique formel

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, la forme canonique utilisée en mathématiques en classe de TS ($y' = ay + b$) n'est pas celle utilisée à l'université : que ce soit en physique ou en mathématiques[26], la forme couramment utilisée en licence pour les ED du premier ordre, est $y' + ay = b$ et plus généralement du type $f(y', y) = g(t)$.

Résultats des questionnaires

Le premier questionnaire Q1 comportait une question ouverte concernant la forme analytique de l'écriture d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre. Il a permis

[24] Nous avons également fait passer quelques questionnaires en début d'année, que nous n'évoquerons pas ici.
[25] Plate-forme WWW Interactive Multipurpose Server. Avec la participation de Mme Bernadette Perrin-Riou, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.
[26] En mathématiques, dans notre université, l'étude des ED n'est pas abordée durant le premier semestre de licence L1S1 (sauf enseignement optionnel), mais après.

de mettre en évidence que la forme de mathématiques de TS se révélait être encore une réponse fréquente en fin de module L1S1. Dans le questionnaire de l'année suivante, Q2, nous avons inclus une question fermée sur ce point (encadré ci-dessous, figure 5).

Quelle forme est pour vous la forme « de référence » pour une ED1ASM utilisée en physique ? (y' désignant la dérivée par rapport au temps de la fonction y)

$y' = ay + b$,	$y' = ay$,	$y' = y + 1$
$y' + ay = b$,	$y' + ay + b = 0$,	$y' = f(y)$ (*f désignant une fonction quelconque*)

Figure 5 - Extrait du questionnaire Q2

Des réponses empreintes de « réminiscence de formes »…

Sur l'ensemble des 105 réponses obtenues, une première observation s'impose : pour l'identification d'une forme symbolique analytique correspondant à une telle ED, le taux d'erreur est faible[27].

Pour le choix de la forme analytique de l'ED, la forme vue en mathématiques en TS reste très prégnante. En effet, la répartition entre les diverses formes analytiques proposées se fait globalement à égalité entre la forme effectivement utilisée en physique durant le semestre L1S1 où il a été souvent question de « second membre constant (non nul) » et la forme utilisée en mathématiques en TS (voir figure 6).

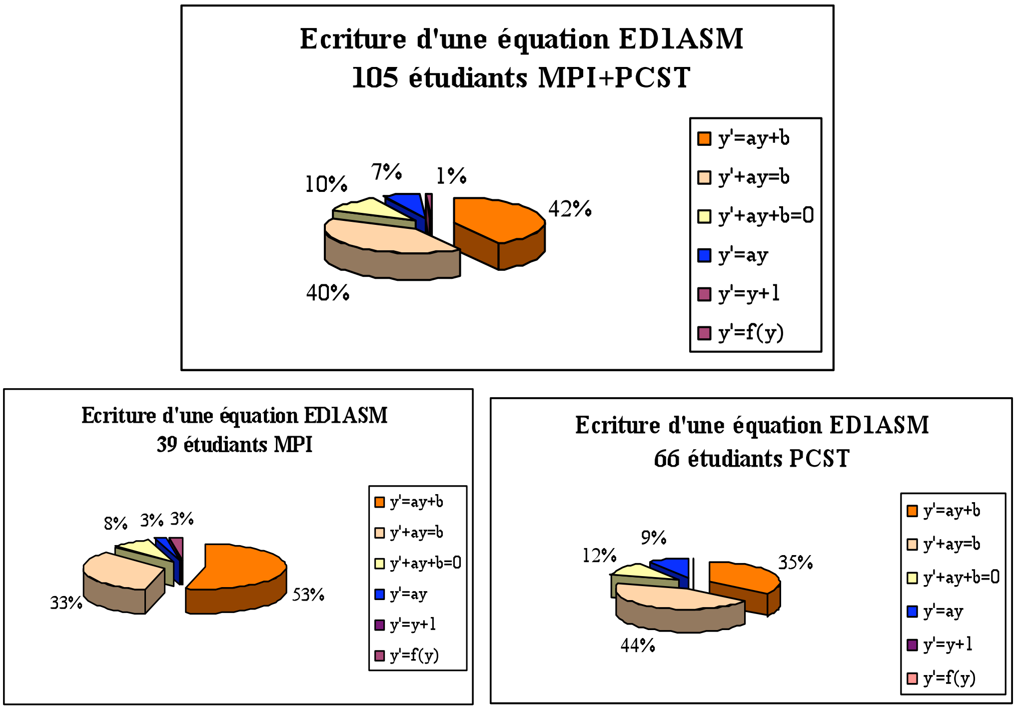


Figure 6

Le fait est encore plus net si on isole, au sein de cette population de 105 étudiants, les 39 étudiants qui sont inscrits en section maths-informatique -MPI – (voir figure) : c'est alors plus de 50% des réponses pour la forme utilisée en TS. On peut supposer que des étudiants ayant choisi une pré-orientation maths-informatique, se placent spontanément, même quand il s'agit

[27] Taux d'erreur inférieur à 10% (la réponse erronée la plus courante est *y'=ay*). Quant à la forme *y'= y*+1, proposée comme cas particulier, elle n'a jamais été choisie.

d'une situation liée à la physique, selon le point de vue des mathématiques[28]. Quant aux 66 étudiants inscrits en physique-chimie (PCST), il y en a encore le tiers à considérer comme forme de référence celle utilisée en mathématiques de TS.

4.2. Solutions de l'ED

La loi d'évolution d'une grandeur physique, solution d'une ED1ASM, présente une limite asymptotique (assimilée par les physiciens au régime stationnaire[29]). Ce comportement caractéristique se traduit dans la forme analytique de la solution, somme de deux ou trois termes dont un est constant et, de façon particulièrement manifeste, dans la représentation graphique par une asymptote horizontale. Un des objectifs des questionnaires était d'avoir des éléments d'appréciation pour savoir dans quelle mesure ces caractéristiques et leur cohérence globale avaient été assimilées par les étudiants.

Caractéristiques des solutions d'une ED1ASM

Allure des solutions dans le registre graphique

Avec la question « *Si vous vouliez dessiner l'allure d'une solution-type pour montrer ses caractéristiques, quel graphique feriez-vous ?* », le questionnaire Q1 a permis de récolter 51 graphiques tracés papier-crayon par les étudiants. Une vingtaine, soit 40%, comporte un tracé d'allure pour lequel, quand le temps est grand, la grandeur tend (de façon croissante ou décroissante) vers une valeur limite non nulle. Mais il y en a autant, soit 40%, qui montrent une exponentielle décroissante qui tend vers zéro – solution d'une ED1 homogène. Ce résultat affichait la même tendance que celle observée lors les évaluations académiques, et qui nous avait alertés.

L'année suivante, le questionnaire Q2 a permis de recueillir 80 graphes exploitables. Il était demandé de tracer le graphe correspondant à des solutions de l'ED1ASM [30]. La moitié des réponses correspondent à des réponses non correctes, qui sont de deux types : 22 réponses (25% du total) présentent une forme exponentielle « décroissante » avec asymptote en $y = 0$, qui correspond en fait aux solutions d'une ED1 homogène. Et autant de réponses (25% du total) consistent en une exponentielle de type $e^{\lambda t}$ ou $-e^{\lambda t}$; or une modélisation par une forme exponentielle exp(kt) avec $k > 0$ correspond, quand il s'agit d'une évolution temporelle, la variable t n'étant pas bornée, à une valeur de la grandeur tendant vers l'infini, donc à une « divergence », ce qui ne répond, dans les faits, à aucune situation physique d'évolution d'un phénomène physique au cours du temps.

Le troisième type de réponse, qui concerne un peu plus du tiers des étudiants, correspond à un graphe correct, avec une asymptote horizontale. Comme on peut le voir sur la figure de l'Annexe 2, ces graphes corrects se répartissent à égalité entre ceux où, à l'instant initial, la valeur de l'ordonnée est nulle, et ceux où la valeur de l'ordonnée est positive mais inférieure à la valeur de l'asymptote ; dans ces cas, la courbe est croissante[31]). Les graphes correspondant à une valeur initiale de l'ordonnée inférieure à la valeur de l'asymptote ne concernent que le cinquième des réponses correctes.

L'année suivante (Q3), les réponses papier-crayon sur le même sujet ont concerné 42 étudiants, parmi les meilleurs de la promotion. On a recueilli 75% de réponses correctes, avec

---

[28] Du moins, telle qu'elle a été vue par eux jusqu'ici puisqu'en mathématiques c'est bien la forme $y' + ay = b$ qui est utilisée à l'université, mais les étudiants ne la verront qu'en second semestre de licence (L1S2).

[29] Voir ce qui a été dit au paragraphe 2.2 sur la différence de point de vue entre mathématiciens et physiciens.

[30] Le tracé se faisait sur l'écran grâce à la souris, et était stocké en mémoire

[31] Bien évidemment, le terme exponentiel est toujours décroissant. Le passage du cas particulier détaillé au chapitre 2 ($v_0=0$), au cas général ($v_0 \neq 0$) peut s'écrire $v(t)= v_{lim} (1- e^{-\frac{t}{\tau}}) + v_0.e^{-\frac{t}{\tau}} = v_{lim} + (v_0.- v_{lim})\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

évolution de la grandeur y vers une asymptote non nulle[32]. Les autres réponses regroupent la traditionnelle exponentielle décroissante vers zéro (10 réponses) et une courbe divergente, croissant vers l'infini (3 réponses).

Ceci conforte notre résultat précédent : l'allure caractéristique des courbes correspondant aux solutions d'une ED1ASM n'est pas assimilée par l'ensemble des étudiants de fin de premier semestre de licence, alors même qu'elle constitue déjà un point du programme au lycée, en TS, aussi bien en mathématiques qu'en physique

Évocation de l'allure du graphe dans le registre langage naturel

Il nous avait semblé intéressant, avant même de demander de tracer la représentation graphique (et avant de faire expliciter la relation formelle analytique des solutions), de faire en sorte qu'une première réponse concernant les solutions soit formulée dans le troisième registre disponible, celui du langage naturel. Le questionnaire Q2 a donc inclus une question ouverte sur la traduction en langage naturel de l'allure du graphe, non tracé, et dans un cadre qui se voulait décontextualisé.

> *Soit y(t), une fonction solution d'une équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficients constants, avec second membre constant non nul (ED1ASM).*
>
> *Décrivez en quelques mots l'allure d'un graphe d'une fonction y(t), en précisant ce qui, dans ce graphe, est caractéristique d'une solution d'une ED1ASM.*

L'objectif est notamment de savoir si les étudiants évoquent clairement l'existence d'une limite finie non nulle pour la grandeur étudiée avec une « allure d'exponentielle décroissante » vers la limite[33].

Parmi les 90 réponses fournies par des étudiants PCST-MPI primants[34] et non-primants, 85 % usent du mot « exponentielle » - sans plus de précision- mais ils ne sont que 10% à citer le mot « limite » … Ce résultat est à relier à la difficulté reconnue de l'utilisation de la langue naturelle en mathématiques, et plus précisément ici à l'exigence de verbaliser à partir de propositions non-discursives, qui plus est non tracées concrètement, et alors même qu'en ce qui concerne la notion de « limite », on peut considérer que le graphe n'est qu'une représentation tangible d'un idéal.

Registre formel analytique

La deuxième partie du questionnaire Q2 portait sur l'expression analytique de la solution correspondant à l'équation que l'étudiant(e) avait notée en première partie, et qui lui était rappelée sur l'écran de l'ordinateur.

> *À propos de l'écriture d'une solution d'une équation différentielle ED1ASM,*
> *quelle forme est pour vous la forme « de référence » pour une ED1ASM utilisée en physique ?*

Parmi les 44 étudiants de PCST (primants et non-primants) qui ont répondu[35]…

- un quart des étudiants répondent à cette question en réécrivant la forme de l'équation différentielle elle-même… il est vrai que la formulation de la question aurait dû reprendre le titre complet de la ligne du dessus et mentionner « *forme de référence pour une solution d'une ED1ASM* » …
- un tiers donnent une réponse ne comportant qu'un seul terme « oubli » de la valeur limite

[32] Si l'on s'intéresse à la cohérence solutions graphiques-solutions formelles, seules 20 de ces 29 réponses sont acceptables.

[33] La fonction peut être croissante ou décroissante vers l'asymptote, mais dans les deux cas, le terme « exponentiel » est décroissant (argument négatif).

[34] Primants : étudiants inscrits pour la première fois.

[35] Un souci d'informatique a limité le nombre de réponses obtenues, en particulier pour les MPI.

pour y),
- un tiers seulement écrivent une relation avec deux termes.

Et dans ce dernier cas, on observe beaucoup d'erreurs de signe (sur l'argument de l'exponentielle, sur la valeur limite…)

Cohérence globale

La cohérence au sein du registre formel, entre forme de l'équation différentielle et formule solution ($y' = ay + b$ et $Ce^{at} - b/a$, $y' + ay = b$ et $Ce^{-at} + b/a$ …) n'existe dans le questionnaire Q2 que pour quelques cas. Les réponses obtenues à partir du questionnaire Q3, où ce sont les meilleurs étudiants de la promotion MPI qui ont répondu, donnent la même impression : un peu plus de la moitié des étudiants (29 sur 47) donnent une solution en cohérence avec leur écriture de l'équation différentielle (sinon, on trouve des solutions avec exponentielle mais incorrectes). Il nous paraît clair que la proximité des formes et l'implicite des signes engendrent des confusions, en particulier concernant le signe de l'argument de l'exponentielle.

Pour ce qui est de la cohérence globale forme analytique de l'ED - formes analytique et graphique des solutions, cela semble relever de l'impossible…

4.3. À propos de phénomènes physiques

Choix, en physique, d'un phénomène de référence

L'un des objectifs des questionnaires était de savoir si les étudiants avaient gardé un exemple de physique qu'ils considéraient comme typique (prototypique). Le questionnaire Q2 a touché, sur ce thème, 79 étudiants.

> *Les équations différentielles du premier ordre, linéaires, à coefficients constants, avec second membre constant non nul se rencontrent dans la modélisation de divers phénomènes en physique.*
>
> *À quel phénomène physique pensez-vous ? Soyez le plus précis possible dans votre réponse.*

Les réponses peuvent être catégorisées comme suit, selon le phénomène cité (entre parenthèses, nombre d'étudiants ayant fait cette réponse, sur un total de 79) : désintégration radioactive (35), condensateur (14), chute des corps (6), ressort ou autres oscillations (13), divers - justes ou erronés - (11). Ces réponses à propos du modèle physique semblent porter l'empreinte de L1S1 : cette année-là, les illustrations de radioactivité ont en effet été nombreuses. Cependant, et la nuance est d'importance, on a remarqué qu'il n'y avait aucune précision dans les réponses qui citent seulement « radioactivité » ou « décroissance radioactive »[36]. Or ces expressions peuvent faire référence à l'évolution de (au moins) deux grandeurs (voir schémas en Annexe 3). Ainsi, dans le cas où il s'agit d'une décroissance d'un noyau père A vers un noyau fils B non radioactif[37] , on étudie soit l'évolution temporelle du nombre de noyaux père $N_A(t)$, gérée par une ED homogène, et dont la solution est une exponentielle « décroissante » (cas vu en physique en Terminale) soit l'évolution temporelle du nombre de noyaux fils $N_B(t)$, gérée par une ED1ASM. Faute de précisions dans les réponses des étudiants, on ne peut savoir si elles sont ou non pertinentes. En tout état de cause, on peut légitimement craindre que le cas dit « de la radioactivité » corresponde implicitement au cas de la décroissance radioactive du noyau père, ce qui ne constitue pas dans notre cas une réponse correcte. Il en est de même pour la réponse « condensateur » : le

[36] et ce malgré notre demande de réponse précise… mais le questionnaire était long…

[37] Si le noyau B est lui-même radioactif (cas des filiations radioactives), l'évolution du nombre de noyaux B, NB(t), est gérée par une ED du premier ordre avec second membre non constant, de la forme g(t). Voir Annexe 3.

cas de la charge d'un condensateur est un exemple pertinent (ED1ASM), mais pas la décharge à travers une résistance (ED homogène).

On note que très peu de réponses font référence au cas de la chute verticale dans un fluide, qui a pourtant déjà été abordée au lycée, et qu'on peut considérer comme l'illustration d'une réalité tangible relativement facile à se représenter… L'année suivante, sujet de problème, puis sujet d'examen partiel ont été proposés sur ce thème. Et pourtant, lors du questionnaire Q3, en réponse à la question sur le choix du modèle physique, la phénoménologie du condensateur arrive largement en tête (30 réponses), puis la radioactivité (12 réponses) et seulement 2 réponses pour l'exemple de la chute freinée. Il est intéressant de noter ici que l'exemple de la mécanique n'est pas retenu, et que, de plus, pour ceux qui l'évoquent, la compréhension n'est pas suffisante puisque les deux réponses sont fausses du fait d'une confusion vitesse-position. Ce constat correspond à ce que l'on connaît par ailleurs : la mécanique newtonienne permet de rendre compte de phénomènes « concrets », mais est en tension avec les conceptions « spontanées ».

Au vu de ces résultats, on est amené à penser que l'hypothèse H2 - les caractéristiques d'un phénomène perceptible constituent un cadre d'intelligibilité - n'est pas valide, du moins dans les conditions d'enseignement qui avaient été celles des étudiants pendant le semestre…

Critères d'acceptation d'un comportement à même de modéliser un phénomène physique

Une des dernières questions posées aux étudiants (questionnaire Q2) avait pour objectif de compléter les informations déjà recueillies en faisant émerger les critères d'acceptation d'un comportement pouvant modéliser un phénomène physique.

Dans la troisième partie du questionnaire Q2, qui présentait plusieurs graphiques, on demandait si chacun d'eux pouvait ou non correspondre à la modélisation d'un phénomène physique. Le critère principal attendu – vu le contenu du module – était celui de non divergence. Il n'y a que la moitié des étudiants pour répondre que le graphe proposé (voir ci-dessous figure 7) ne peut pas correspondre à une solution physique (31 réponses sur 68), un quart déclarent ne pas savoir.

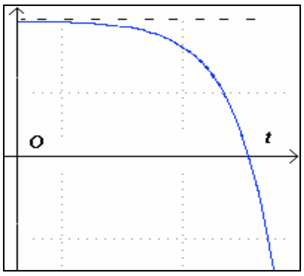


Figure 7

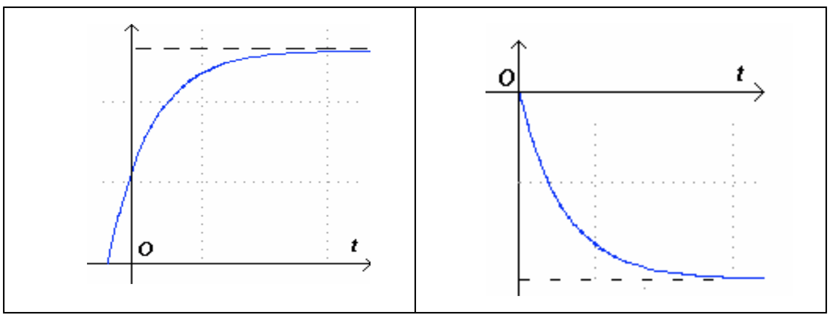


Figure 8 - Exemples de graphiques parmi ceux proposés à la 3ème question (Questionnaire Q2)

Parmi les autres éléments cherchés, figurait le critère lié à l'origine du temps. Le taux de réponses correctes chute de plus de la moitié (passant de 87 à 25%) quand on fait apparaître, sur une figure donnée, une portion de courbe en temps négatif (figure 8, figure de gauche).

Pour la figure de droite (figure 8), seuls 63% d'étudiants la déclarent comme pouvant correspondre à la modélisation d'un phénomène physique. On peut y voir un effet néfaste du choix habituel de situations/représentations prototypiques, où les grandeurs sont couramment choisies de façon à n'utiliser que le quart supérieur droit de l'espace graphique (valeurs algébriques positives)…

5 – Conclusion

Le constat global que nous retenons de ces investigations est qu'il semble bien qu'à chaque registre est associée une représentation « prototype », mais ce, de façon indépendante :

- pour le registre formel, une forme d'équation type est privilégiée - souvent celle vue en mathématiques de terminale, qui reste très prégnante,
- pour le registre graphique, un tracé est privilégié - mais ne correspond pas à l'équation donnée ; l'allure caractéristique des courbes correspondant aux solutions d'une ED1ASM n'est pas assimilée par l'ensemble des étudiants de fin de premier semestre de licence,
- et pour le référent empirique, un phénomène particulier physique est cité - mais qui ne correspond pas nécessairement aux caractéristiques de la solution…

Comment contribuer à rendre plus cohérente cette approche des ED du premier ordre ?

Un travail spécifique pourrait être intégré dans l'enseignement de physique de façon à rendre plus visibles l'existence et la coordination des registres, et à expliciter les liens entre cadres (phénoménologie/mathématiques) :

- aspect phénoménologique, fondé sur les caractéristiques des phénomènes physiques étudiés (régime transitoire, régime permanent, influence des paramètres, conditions initiales),
- registre graphique, basé sur la forme des graphes des solutions (types de monotonie, asymptotes, coefficient directeur à l'origine, place par rapport aux axes…).
- registre formel analytique des expressions des équations différentielles et de leurs solutions (manière de les écrire, justification des formes adoptées, rôle du "second membre", aspects linéaires, superpositions de solutions…).

Cela nous amène à proposer/préciser quelques *points de repère* aux enseignants pour aider un certain nombre d'étudiants à *« négocier » la rupture entre lycée et université*. Pour un rappel, voire un recadrage de la manipulation de l'équation différentielle du premier ordre avec second membre constant non nul, trois aspects complémentaires peuvent ici entrer en jeu :

1 - le formalisme analytique : la forme utilisée pour l'ED en mathématiques au lycée, $y' = ay + b$, est justifiée par des raisons principalement liées au choix de l'introduction de la fonction exponentielle, et doit être prise explicitement en compte si l'on veut passer à une présentation en « premier et second membre » telle que pratiquée à l'université (lien avec les aspects de linéarité) : il y a là une transition à négocier[38].

2 - Une approche plus « épistémologique » du point de vue de la physique, viserait une analyse plus centrée sur la sémantique et le lien avec le champ théorique de référence[39].

[38] Ce hiatus existe déjà en classe de terminale S entre l'enseignement de mathématique et celui de physique où la séparation disciplinaire l'emporte sur la cohérence des pratiques (Malonga, 2008).

[39] En effet, en mécanique newtonienne, la seconde loi de Newton ($F = ma$) conduit à écrire une équation différentielle sous la forme $y'' =$… ou, exprimée en fonction de la vitesse, sous la forme $y' =$ …, mettant dans le

Le champ d'élaboration de l'équation différentielle est alors à distinguer explicitement du champ de traitement (qui, lui, relève des mathématiques et peut/doit faire appel à une systématique d'écriture et de technique).

3 - La modélisation mathématique d'un phénomène physique, en soulignant la distinction entre les paramètres du modèle et les conditions initiales, qui pourrait être plus clairement opérée et mise en regard des aspects mathématiques (ensemble de solutions et « choix » de la valeur de la constante d'intégration). Dans ce contexte, la coordination entre représentation graphique et représentations discursives peut jouer un rôle important : le lien avec la nature du phénomène physique peut être systématiquement travaillé : grandeur non divergente, limite finie pour $t \rightarrow \infty$, existence d'une asymptote horizontale non nécessairement confondue avec l'axe des abscisses ; ceci pourrait être envisagé sur des exemples où l'on peut simplement et naturellement faire varier la condition initiale ou les paramètres. Dans le même ordre d'idées, il convient de veiller à ce que la variété des exemples donnés, et la complexité sous-jacente des illustrations en connexion avec le réel, ne finisse pas par occulter les connaissances de bases relatives au traitement de l'ED du « 1er ordre à coefficient constant », qui n'est pas forcément vu sous un angle global et synthétique, comme on peut le déduire de l'analyse des réponses à nos questionnaires…

On peut ainsi préconiser un temps d'approche synthétique, qui donnerait à faire des liens (les points communs, les différences) entre formes des ED, modes de résolution et formes de solutions, en utilisant conjointement différents registres sémiotiques. Nous présentons ainsi, en Annexe 3, un exemple qui s'appuie sur ce que Duval appelle la reconnaissance discriminante (Duval, 2006b) - trois situations physiques (correspondant ici au même phénomène, la radioactivité) - et qui montre à la fois la variation de l'écriture algébrique d'une ED et la variation correspondante dans le registre graphique[40]. L'utilisation en parallèle du langage naturel, oral et/ou écrit, contribue à la justification des savoirs mathématiques sur ces situations physiques.

Il serait utile, pour mettre l'accent sur le rôle des représentations sémiotiques dans la construction des concepts, d'analyser plus en profondeur comment fonctionne chacun des registres sémiotiques, en particulier en cherchant à en identifier, pour certains cas, des éléments signifiants spécifiques et en cherchant des éléments d'appréciation pour mieux comprendre comment se fait le passage entre ces registres. Dans ce contexte, une nouvelle hypothèse, à tester, serait de chercher, en physique, à valoriser systématiquement à la fois l'approche d'un phénomène « prototype », qui serve de référence, et la phase de décontextualisation[41]. Une illustration de physique, dont on aura pris soin d'approfondir l'analyse, peut *a priori* servir de référence et contribuer à donner du sens à certains concepts mathématiques, en les incarnant (voir notre approche de la chute verticale dans un fluide, on peut aussi aborder des problèmes de radioactivité…).

Il nous semble que l'évolution du profil des étudiants encourage à développer aussi un travail sur les modes d'évaluation, qui constituent un des moyens de piloter partiellement, en amont, les modes d'apprentissage des étudiants. Tous ces aspects conduisent évidemment à poser la question de la formation initiale et continue des enseignants du supérieur.

« membre de droite », la cause des variations de vitesse. En électricité, l'étude d'un circuit RC ou RLC, suivant l'application de la loi des mailles (addition des tensions) conduit directement à une relation de la forme $f(y,y',y'')$ = constante avec le « fameux second membre ». Il y a là deux aspects épistémologiques de l'explication en physique : soit la recherche de « causes externes », soit la recherche de « relations internes », ces deux aspects étant souvent développés alternativement, et parfois, ensemble (Halbwachs, 1973).

[40] Suivant le même principe, on peut envisager un temps de présentation synthétique mettant en parallèle les ED du premier ordre et celles du second ordre.

[41] sans pour autant négliger la phase de recontextualisation, où l'apprenant fonctionne aussi par analogie, et développe des capacités d'initiative voire de contrôle.

Claude Cabot
IPN, Université Paris-Sud 11, Orsay
cabot@ipno.in2p3.fr

Daniel Beaufils
DidaScO, Université Paris-Sud 11, Orsay
daniel.beaufils@u-psud.fr

Références

Beaufils D. (2009). Le modèle et son phénoménographe. *Aster,* n°48 (à paraître).

BOEN (2001). Programme officiel mathématiques série TS, Bulletin officiel n°4, août 2001.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherche en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-266.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne : Peter Lang.

Duval R. (2006a). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII^{e} colloque de COPIRELEM.* p. 67-89, IREM de Strasbourg

Duval R. (2006b). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime*, Numero Especial pp. 45-81. Clame (Mexico : Cinvestav-IPN).

Halbwachs F. (1973). L'histoire de l'explication en physique. In *L'explication dans les sciences*, J. Piaget dir., p72-102, Flammarion, Paris.

Lerouge A. (1992). *Représentation cartésienne, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez les élèves de collège*. Thèse de doctorat. Université de Montpellier II.

Malafosse D., Lerouge A. et Dusseau J.-M. (2001). Étude en inter-didactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : changement de cadre de rationalité, *Didaskalia* n°18, p. 61-98.

Malafosse D. (2002). Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique. *Recherches en didactique des Mathématiques,* vol 22, N°1, 31-76.

Malonga F. (2006). L'enseignement des équations différentielles à l'interface mathématiques - physique dans l'enseignement secondaire français. In Actes du colloque Espace mathématique francophone, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, volume 7.1.

Malonga F. (2008). *Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France.cas des équations différentielles du premier ordre*. Thèse, Université Paris 7 ou http://www.didasco.u-psud.fr/Documents/These_MalongaMoungabio08.pdf

Malonga F., Beaufils D. et Parzysz B. (2008). Les équations différentielles du premier ordre en physique en Terminale Scientifique : le lien avec les mathématiques en question Bulletin de l'Union des Physiciens BUP n° 904, p647-666

Moreno J. (2006). *Articulation des registres graphique et symbolique pour l'étude des équations différentielles avec Cabri Géomètre. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel*. Thèse. http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/theses/recentes/moreno

Perrin-Glorian M.-J. (2004). Éclairages et questions pour la didactique des mathématiques : cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol 9, 67-82, IREM de Strasbourg.

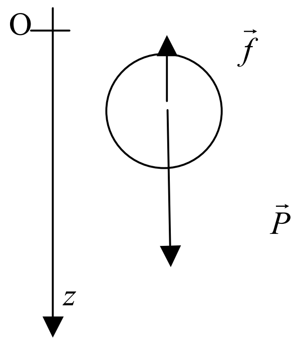
Rogalski M. (2006). Le rôle des mathématiques dans la mise en équation différentielle en physique : les procédures de l'accroissement différentiel dans les deux disciplines. Journée de l'IREM de Lille.

Tourna G. (2008). Activité cognitive d'interprétation. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 13, 93-111, IREM de Strasbourg.

Winsløw C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol 12, 189-204, IREM de Strasbourg.

Annexe 1. Modélisation de la chute freinée : mouvement de gouttelettes dans l'air

Référentiel du laboratoire supposé galiléen.
Schématisation et bilan des forces sur le système



$\vec{P} = m\vec{g}$ *(on néglige ici la poussée d'Archimède)*

$\vec{f} = -k\vec{v}$

Application de la seconde loi de Newton :

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$

Choix d'un axe de projection : Oz.

Équation différentielle du second ordre sur la position : $ma_z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} = mg + f_z$

Équation différentielle du premier ordre sur la vitesse : $m\dfrac{dv_z}{dt} = mg - kv_z$

Le schéma représente une gouttelette disposant d'une vitesse verticale orientée vers le bas : la force de frottement fluide est donc verticale et orientée vers le haut.

Annexe 2. Types de graphes non divergents produits par les étudiants

Total des réponses primants MPI+PCST : 49 *non-primants MPI+PCST : 31*

Types de graphes non divergents produits par les étudiants

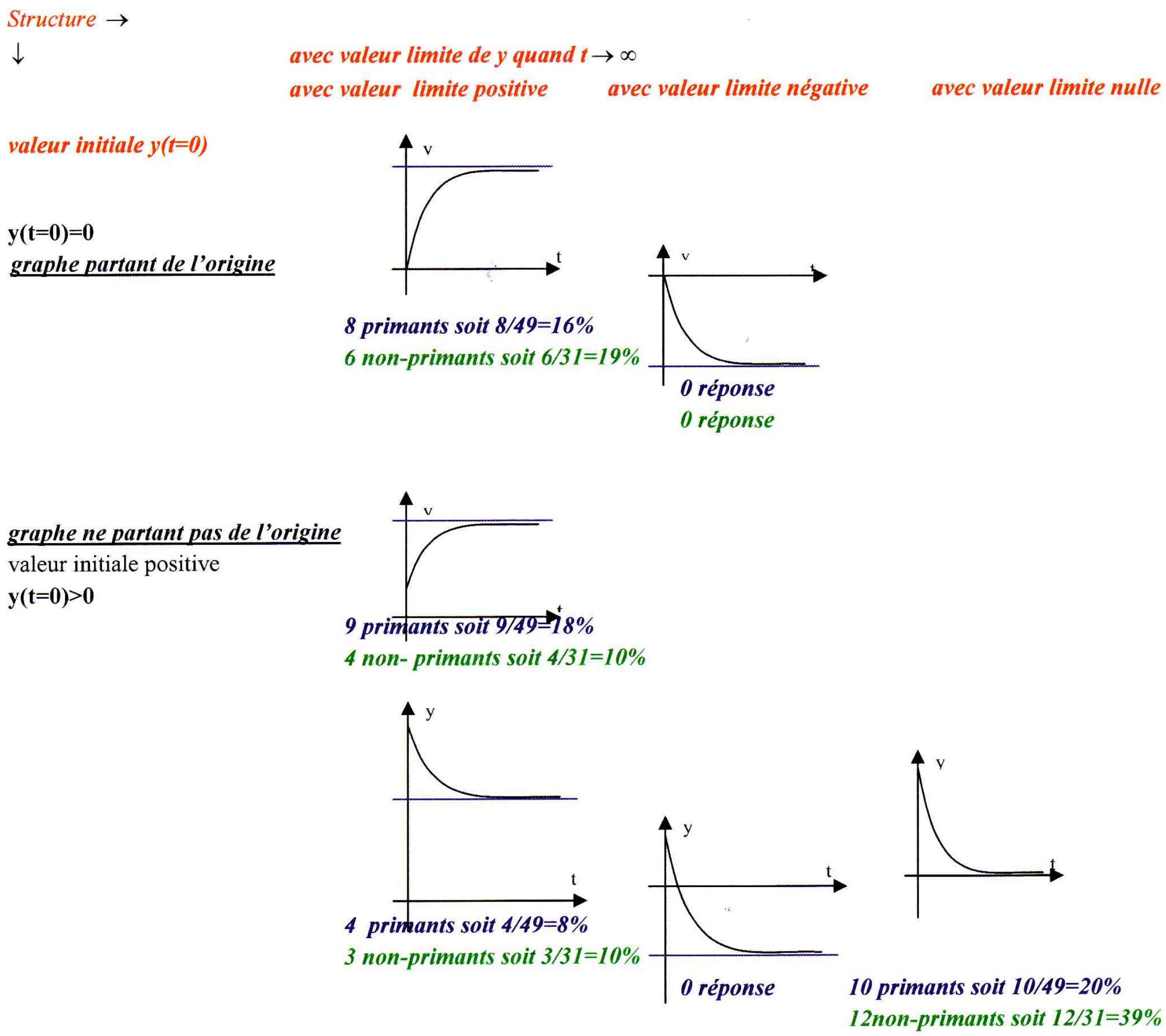
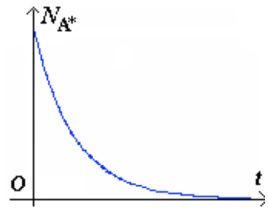


Figure rassemblant les différents graphes non divergents proposés par les étudiants lors du questionnaire Q2. Pour en faire une présentation synthétique, on a classé les graphes selon y_0, valeur initiale de la grandeur y (première ligne, y_0 nulle, seconde ligne y_0 positive).

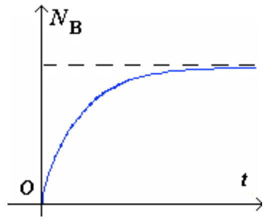
En bas, à droite : forme exponentielle « pure » décroissante correspondant à 22 réponses (soit 25% des réponses), qui constituent en fait une réponse non correcte dans le cas envisagé des ED avec second membre constant non nul (et seraient une réponse correcte à une ED1 homogène).

Annexe 3. Représentations graphiques de phénomènes expérimentaux : opportunité d'une approche synthétique

Décroissance radioactive : un phénomène physique, diverses situations, une reconnaissance discriminante du point de vue registres sémiotiques.



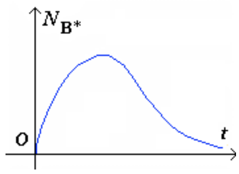
$y' + \lambda y = 0$



$y' + \lambda y = b$

A* → B

Noyau père Noyau fils stable



$y' + \lambda y = f(t)$

A* → B*

Noyau père Noyau fils radioactif

Évolution du nombre de noyaux présents en fonction du temps : schémas de principe avec $N_B(t = 0\ ) = 0$ (voir commentaires dans la conclusion).

Modélisation et interactions entre mathématiques et biologie : l'expérience du master professionnel didactique de l'université Paris Diderot

Michèle Artigue, Yann Dartois, Nicolas Pouyanne et Guy Rumelhard
Groupe Modélisation – IREM Paris 7

Résumé

De plus en plus, les curricula mettent l'accent sur la nécessité de connecter l'enseignement des mathématiques à celui des autres disciplines scientifiques et à des situations de la vie réelle, et par voie de conséquence sur la modélisation mathématique. Comme en témoigne l'ouvrage issu de l'Étude ICMI 14 consacrée à la modélisation et aux applications des mathématiques dans l'enseignement, très souvent, les enseignants de mathématiques, de par leur formation, sont peu préparés à une telle évolution. Ils n'ont aucune expérience d'un réel travail de modélisation et leurs interactions avec les enseignants des autres disciplines sont limitées. C'est notamment le cas en France et ceci nous a conduits à proposer un enseignement de modélisation, au sein du master professionnel Didactique de l'université Paris Diderot. Dans cette contribution, après avoir décrit l'organisation de cet enseignement, nous centrons la réflexion sur les interactions entre mathématiques et biologie qu'il permet de mettre en place. Nous le faisons en présentant et analysant un certain nombre de projets qui ont été réalisés par les étudiants depuis la création de cet enseignement.

1. Introduction

De plus en plus, les curricula mettent l'accent sur la nécessité de connecter l'enseignement des mathématiques à celui des autres disciplines scientifiques et à des situations de la vie réelle, et par voie de conséquence sur la modélisation mathématique (Conseil scientifique des IREM[1] 2004). Comme en témoigne l'ouvrage issu de l'Étude ICMI[2] 14 consacrée à la modélisation et aux applications des mathématiques dans l'enseignement (Blum *et al.*, 2007), très souvent, les enseignants de mathématiques, de par leur formation, sont peu préparés à une telle évolution. Ils n'ont aucune expérience d'un réel travail de modélisation et leurs interactions avec les enseignants des autres disciplines sont limitées. C'est notamment le cas en France et ceci nous a conduits à proposer un enseignement de modélisation, au sein du master professionnel Didactique de l'université Paris Diderot. Dans cette contribution, après avoir décrit l'organisation de cet enseignement, nous centrons la réflexion sur les interactions entre mathématiques et biologie qu'il permet de mettre en place. Nous le faisons en présentant et analysant un certain nombre de projets qui ont été réalisés par les étudiants depuis la création de cet enseignement.

Dans cet enseignement, la priorité a été donnée au vécu d'une expérience de modélisation sans se situer d'emblée dans une perspective de transposition didactique. Organiser et faire vivre ces expériences avec des projets renouvelés chaque année, permettre leur capitalisation progressive, a mobilisé jusqu'ici l'énergie du groupe modélisation de l'IREM. La contribution qui a été présentée au colloque n'avait d'autre prétention que de décrire une expérience sans aucun doute originale, dans le contexte français tout au moins, et permettre d'échanger à son propos. Dans la dernière partie du texte, nous revenons cependant sur les choix didactiques effectués dans cet enseignement et sur les conséquences qu'ils nous semblent avoir sur les types de travaux et d'apprentissages réalisés par les enseignants-étudiants l'ayant suivi. Ceci

[1] IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
[2] ICMI : International Commission on Mathematical Instruction.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 277-293.

nous conduit à questionner cet enseignement à la lumière de travaux didactiques récents sur la modélisation et sa place possible dans la formation des enseignants, tels ceux présentés dans l'étude ICMI déjà citée ou dans les deux numéros spéciaux publiés en 2006 par la revue *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. Ce questionnement n'est ici qu'ébauché, mais il montre, nous l'espérons, en quoi l'expérience menée pourrait nourrir une recherche didactique concernant la formation des enseignants et formateurs d'enseignants à la modélisation qui reste, même au niveau international, très limitée.

2. L'enseignement de modélisation du master didactique

Cet enseignement a été créé lors de l'habilitation du master professionnel didactique destiné à la formation de formateurs d'enseignants en 2004-2005[3]. Il s'agit d'un enseignement optionnel de 3 ECTS suivi chaque année au deuxième semestre par une vingtaine d'étudiants. Il a été créé pour les étudiants du master professionnel spécialité mathématiques qui sont des enseignants ayant au moins cinq ans d'expérience professionnelle mais est aussi ouvert aux étudiants du master recherche et aux étudiants du master professionnel spécialité sciences physiques et chimiques. Cependant vu le faible effectif de cette spécialité, pour l'instant seul un enseignant de physique a suivi cette option.

Après une introduction à la modélisation (3 séances de 3 heures) qui débute par une perspective historique et épistémologique, introduit le cycle de modélisation sous une forme inspirée de (Blomøj & Jensen, 2003) et organise la rencontre avec quelques exemples de modélisations, l'enseignement est organisé autour de l'accompagnement de projets réalisés par des groupes de 3 ou 4 étudiants, exceptionnellement 5. Il alterne sur le semestre des séances de travail de groupes sur les projets, des apports de connaissance en fonction des besoins exprimés par les étudiants, et des présentations et discussions collectives sur les projets en cours de réalisation. Après les soutenances orales, une ou deux séances sont consacrées à un travail plus spécifique sur les questions posées par la transposition didactique des projets réalisés dans l'enseignement ou en formation d'enseignants. Les présentations informatiques préparées pour les soutenances orales et les mémoires écrits des différents groupes sont collectés sur un cédérom pour chaque étudiant et ces derniers ont également accès à tous les mémoires des années précédentes. De plus, un certain nombre de mémoires sont retravaillés par les membres du groupe modélisation pour être mis en ligne sur le site web de l'IREM. Un questionnaire d'évaluation a été élaboré en 2006 et proposé aux étudiants qui avaient suivi l'enseignement les deux premières années. Il a également été soumis aux étudiants ayant suivi l'enseignement en 2007-2008.

Comme cela a été mentionné dans l'introduction, cet enseignement s'adresse à un public dont on suppose qu'il a une expérience très limitée des pratiques de modélisation et de l'interdisciplinarité même si certains des enseignants concernés ont une expérience d'encadrement des Travaux personnels encadrés (TPE) au lycée ou se sont investis dans certains des dispositifs qui, tels les Itinéraires de découverte (IDD), au collège, peuvent engager de telles pratiques. Notre point de vue est qu'une réflexion didactique sur ces pratiques et la façon dont elles peuvent être transposées dans l'enseignement secondaire ne peut faire sens sans une expérience personnelle préalable. C'est pourquoi la priorité est donnée dans l'enseignement à ce vécu d'une expérience de modélisation et à son analyse réflexive, sans lier automatiquement le travail réalisé à une exploitation en classe ou en formation. Les sujets de projets s'autorisent ainsi en particulier à sortir du cadre des seules mathématiques de l'enseignement secondaire même si l'expérience montre que les

[3] Michèle Artigue, Guy Rumelhard et François Sauvageot ont mis en place cet enseignement.

mathématiques engagées restent élémentaires et ne sont pas, au moins dans leur forme, celles que l'on rencontre dans les enseignements de modélisation des masters de mathématiques.

Les premiers exemples collectivement travaillés dans la partie introductive sont des exemples historiques : modèles du système solaire de Ptolémée à Copernic et Kepler, travaux de Bernoulli sur la variole, modèles d'évolution de populations… Ils servent à mettre en évidence les questions épistémologiques posées par la modélisation telles qu'elles sont abordées par exemple dans les écrits de G. Israël (Israël, 1996) et N. Bouleau (Bouleau, 1999), des questions trop souvent occultées dans ses transpositions scolaires : pluralité des modèles que l'on peut associer à un même fragment de réalité, complémentarité/concurrence entre modèles, importance du travail de critique des modèles et diversité des façons d'y répondre, adaptabilité des modèles qui rend souvent problématique leur invalidation, problèmes posés par les changements d'échelle dans la modélisation, rapports entre modélisations déterministes et stochastiques, diversité des fonctionnalités de la modélisation et des rapports à la modélisation suivant les domaines concernés… Ces exemples historiques servent aussi à introduire de façon élémentaire un certain nombre d'outils mathématiques de base de la modélisation discrète ou continue.

Une demi-séance est également consacrée à la présentation et l'analyse d'un projet réalisé une année antérieure et à ses éventuels prolongements pour aider à préciser les attentes. Les étudiants sont ensuite libres du choix de leur projet mais, chaque année, le groupe modélisation prépare un certain nombre de thèmes de projets et les présente aux étudiants. La présence au sein du groupe modélisation de l'IREM d'un biologiste, Guy Rumelhard, a conduit à proposer régulièrement des projets en relation avec les sciences de la vie et la biologie. C'est sur ces interactions modélisatrices entre mathématiques et biologie qui se sont révélées progressivement au fil des années que nous avons choisi de centrer notre contribution au thème Mathématiques et Réalité du colloque.

3. Rencontres entre mathématiques et biologie

Le mot modélisation désigne un type bien précis de rencontre entre deux disciplines. La biologie fait « feu de tous bois » pour tenter d'expliquer le vivant, son fonctionnement, son origine, son évolution. Elle va ainsi chercher ses modèles en physique, en chimie, mais aussi en linguistique (code, message), en technologie (régulation), etc. et les modèles mathématiques n'ont pas historiquement joué dans ses constructions conceptuelles le rôle fondamental qu'ils ont joué en physique. La chimie des formes emboîtées (stéréochimie) explique par exemple une grande partie des actions biochimiques dans l'organisme (hormones, récepteurs, médiateurs nerveux et immunitaires, enzymes, protéines régulatrices allostériques, etc.) et une grande partie de l'action des médicaments, en faisant appel à l'analogie opératoire suivante : « un clé entre dans une serrure de sûreté et déclenche une action d'ouverture/fermeture ». Une protéine qui a une affinité pour une autre molécule telle l'adrénaline, peut donc être trompée par une molécule artificielle (l'aténolol par exemple qui est un bloquant) qui aurait au moins en partie la même forme et peut donc entrer en compétition pour se fixer sur la protéine réceptrice. C'est le principe de nombreux médicaments. Cette analogie, inventée par Fischer au début du XX^{ème} siècle, peut se moduler. On peut ouvrir une serrure avec plusieurs clés de formes suffisamment voisines, sinon un passe partout ou des clés hiérarchisées. La spécificité est plus ou moins étroite, et présente des degrés. La modélisation mathématique de la forme des molécules qui s'emboîtent (hormone/récepteur) en se déformant réciproquement et de la force attractive des liaisons correspond à un développement plus récent des recherches mais on peut espérer qu'elle rendra le travail de recherche de molécules-médicament équivalentes plus efficace.

Historiquement en fait, une intervention majeure des mathématiques dans les sciences du vivant, « *séisme épistémologique longtemps inaperçu* » (Canguilhem 1994), s'est produite en médecine avec les travaux de Bernoulli visant à déterminer par un calcul de probabilité s'il fallait ou non vacciner les enfants contre le virus humain de la variole (et plus tard celui de la vache). Principal obstacle à la diffusion de ce travail, la médecine a longtemps pensé qu'elle soignait des individus singuliers et non pas des populations et cette approche est restée dans l'ombre. Claude Bernard (Claude Bernard, 1865) a beaucoup contribué à empêcher ce travail de calcul de probabilités et le fait que Mendel (1865) ait introduit l'aléa au cœur des explications biologiques n'a que tardivement été perçu avec sa véritable importance. Désormais les médecins soignent non plus seulement des malades mais des maladies définies objectivement par comparaison d'études faites sur des groupes randomisés définis *a priori* (ou *a posteriori* quand il n'est pas possible de faire autrement). C'est le triomphe de l'« *evidence based medecine* ».

En agronomie, en écologie, en physiologie, « utiliser » des mathématiques a longtemps été essentiellement identifié à « faire des statistiques ». Chaque étude doit être faite sur une population, mais cette population n'est qu'un échantillon d'une population plus grande. Il faut donc établir moyenne, médiane, variance, écart type, etc. avant de comparer les résultats.

Cette vision réductrice, limitée aux statistiques, des relations possibles entre mathématiques et biologie nous avait frappés lorsque notre groupe IREM s'était constitué au moment de la mise en place des TPE, la quasi-totalité des TPE math-bio recensés dans les établissements suivis par le groupe ou mentionnés par les enseignants suivant la formation que nous avions organisée étant de ce type. Dans les projets proposés en master, nous avons tenté de dépasser cette vision en montrant le rôle créateur des modèles mathématiques (Rumelhard, 2001) en biologie, qu'il s'agisse de modèles déterministes ou aléatoires. Ils permettent de créer des plans expérimentaux, d'expliquer ou de prévoir des données biologiques, de prendre des décisions concernant l'action de médicaments par exemple, en analysant des situations biologiques qui introduisent l'aléa au cœur des explications.

Nous développerons ci-dessous à titre d'exemples quelques thèmes proposés en ce sens aux étudiants du master et qui ont donné lieu à des projets effectifs :

- l'épidémiologie et la transmission des maladies contagieuses dans une population humaine,
- la dynamique des pools de gènes dans les populations animales et humaines au cours de la transmission d'une génération à l'autre,
- l'analyse de séquences d'ADN dont la fonction n'est pas connue,
- la représentation de l'ADN par la CGR : Chaos Game Representation.

Nous montrerons également comment le jeu entre continu et discret, équations différentielles et suites récurrentes, et l'utilisation des TICE (tableurs et programmation de calculatrices notamment) permettent de rendre accessible, avec les moyens limités des mathématiques de l'enseignement secondaire, ce rôle créateur des modèles mathématiques en biologie. Le travail typique de modélisation comprend bien souvent en biologie :

- la détermination des paramètres retenus et des hypothèses qui permettent d'élaborer un ou plusieurs modèles pour rendre compte de la réalité,
- l'élaboration d'un plan expérimental permettant d'obtenir des données fiables (groupes homogènes randomisés *a priori* par exemple), le recueil de données empiriques complètes ou d'échantillons représentatifs,
- l'adéquation du modèle à la réalité, sa correspondance terme à terme, ou globale,
- son caractère opératoire : explicatif et/ou prédictif permettant de prendre des décisions,
- la simulation à partir du modèle qui indique éventuellement au biologiste des observations nouvelles à rechercher,
- l'adéquation de la réalité au modèle par la recherche ou la construction expérimentale de

situations et le recueil de données conformes au modèle,
- la détection d'écarts entre la réalité et les simulations à partir du modèle entraîne selon les cas la rectification éventuelle du modèle, ou bien la recherche de la signification biologique de cet écart.

Le caractère réducteur, simplificateur et rigide du modèle en regard de la réalité biologique continuellement variable en fonction du milieu, au cours du temps et des mutations constitue pour le biologiste un obstacle au fait d'admettre le caractère opératoire du modèle, soit positivement pour rendre compte de la réalité, soit négativement pour apprécier en quoi la réalité s'en écarte.

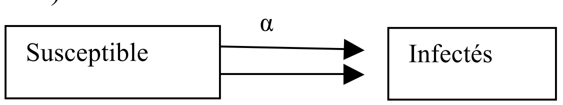
4. Quatre exemples de projets

4.1. Transmission d'une maladie contagieuse dans une population humaine

Notre premier exemple rend succinctement compte de projets réalisés par plusieurs groupes d'enseignants-étudiants du master au cours des quatre dernières années, sur le thème de la modélisation de la transmission d'une maladie contagieuse dans une population. C'est un thème sur lequel diverses ressources destinées aux enseignants existent déjà et qui a fait l'objet par ailleurs de transpositions didactiques en TPE (cf. par exemple le site web www.dma.ens.fr/culturemath/html/epidemies.html/ et (Guinnebaud, 2004).

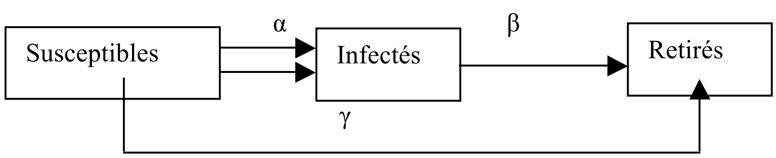
Plusieurs démarches étaient possibles : une approche probabiliste se situant davantage à l'échelle des individus, ou une approche déterministe plus globale à l'échelle des populations. C'est cette deuxième voie qui a été plus particulièrement explorée, en continuité avec les modèles « classiques » d'évolution des populations (Malthus, Verhulst) à l'aide d'équations différentielles (en continu) ou de suites numériques (en discret).

Les travaux réalisés ont, entre autres choses, permis de montrer comment, à partir du modèle compartimental le plus élémentaire utilisé en épidémiologie (modèle « S.I. » de Hamer), par raffinements successifs, on parvient à élaborer des modèles rendant mieux compte de la réalité (modèle « S.I.R. » de Kermack et MacKendrick) ou mieux adaptés à l'étude de problématiques particulières (modèle « S.I.R. » avec vaccination et/ou dynamique vitale).

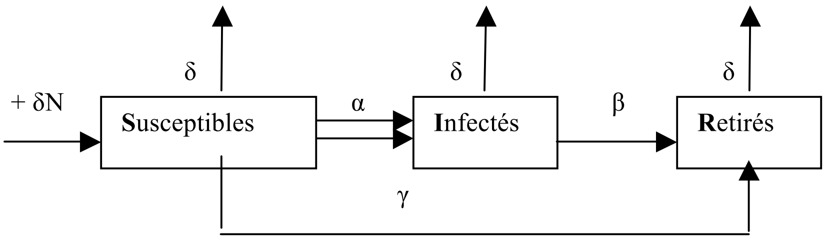


$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI - \gamma S \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I + \gamma S \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI - \gamma S - \delta S + \delta N \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I - \delta I \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I + \gamma S - \delta R \end{cases}$$

Les enseignants-étudiants ont par ailleurs replacé la question de la modélisation des épidémies dans une perspective historique, depuis la deuxième moitié du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle (modèle de Bernoulli) jusqu'à nos jours (modèle(s) d'Anderson et May …).

La discrétisation des modèles a permis des transpositions didactiques accessibles dès la classe de première par l'utilisation du tableur pour calculer et représenter les situations (activités autour de la propagation d'une épidémie dans une colonie de vacances testées ensuite en première L, simulations d'épidémies en TPE en premières S …). En terminale S, l'utilisation des suites numériques, des fonctions et des équations différentielles a permis de construire des activités abordant les modèles tant sous l'angle du discret que sous celui du continu, et là aussi, tableurs et grapheurs ont été mis à contribution. La forme variable de ces activités a reflété la richesse du thème tant du point de vue de son exploitation possible en classe de mathématiques que de celui de l'interdisciplinarité c'est-à-dire du va et vient, de la relance des questions entre les mathématiques et la biologie. Les connaissances biologiques sont ici peu nombreuses et largement connues. Ces transpositions, évoquées ou développées, et pour certaines testées en classe, ont aussi débouché sur des questions concrètes en prise avec la réalité, concernant la propagation de maladies dans des populations humaines (S.I.D.A., peste, lèpre, variole, rougeole) ou animales (brucellose) à partir de situations tantôt simulées, tantôt réelles.

Pour comparer le modèle à la réalité et éventuellement le rectifier, ou bien prendre des décisions à partir des simulations, il faut savoir que les données empiriques sur les maladies contagieuses ne sont pas toujours bien connues. Pour une maladie comme la rougeole due à un virus et pour laquelle il n'y a pas de traitement, mais qui en France n'est pas très grave, dans la majorité des cas, il n'y avait pas jusqu'à une date récente de recueil systématique des cas de maladie ni non plus de vaccination obligatoire. Les sites de « veille sanitaire » recueillent désormais des données sur des échantillons de populations grâce à un réseau de médecins. Ces résultats sont disponibles sur Internet. C'est une condition indispensable pour tester la valeur du modèle. On a également pu effectuer des « expérimentations » c'est à dire enregistrer les effets d'une vaccination systématique d'échantillons d'enfants de différentes tranches d'âge de façon à confronter le modèle aux résultats de cette expérimentation. Ce modèle permet alors de décider quelle proportion de la population il suffit de vacciner pour éviter une propagation. Ces questions de biologie médicale sont elles aussi facilement accessibles car les connaissances biologiques sont peu nombreuses et largement diffusées (virus, bactéries, contagion directe ou indirecte, vaccination préventive, immunisation spontanée ou acquise, mortalité ou guérison spontanée des maladies). Elles ont été plus particulièrement travaillées dans les projets les plus récents sur ce thème.

Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter le site de l'IREM Paris7 : http://iremp7.math.jussieu.fr/sections/groupe_modelisation/, où une partie du travail réalisé est accessible.

4.2. Modélisations de la dynamique du pool des gènes d'une population animale ou humaine au cours des générations : modèle de Hardy Weinberg et modèle de Wright

Les modèles concernés ici font intervenir l'aléa au cœur de la formation des gamètes et de leurs rencontres (on imagine, par delà les individus, une « urne des gamètes »). Ils reposent par ailleurs sur cinq autres hypothèses concernant :

- le grand nombre des individus concernés,
- l'absence de mutation, de migration, de sélection,
- l'absence de croisements entre générations (ce qui dépend de la taille de la population car plus elle est petite, plus les croisements entre générations augmenteront).

Le modèle (Serre, 1997) se présente sous forme d'une formule à établir à l'aide d'un graphe des cas possibles de descendants, tenant compte de la probabilité de la formation des gamètes et de leurs rencontres. Les notions de biologie à connaître sont les suivantes : un caractère visible (groupe sanguin, maladie génétique, etc.) dépend chez l'adulte de deux gènes allèles. Si les deux gènes allèles sont identiques (AA ou aa) les individus sont dits homozygotes, s'ils sont différents les individus sont dits hétérozygotes (Aa). La lettre majuscule désigne un caractère « dominant » c'est-à-dire qui s'exprime toujours lorsqu'il est présent, et la lettre minuscule désigne un caractère « récessif » qui ne s'exprime que s'il est seul (aa) et ne s'exprime pas s'il est en présence du caractère dominant (Aa). Un individu peut donc être porteur de ce gène allèle récessif sans le savoir. La formation d'une génération nouvelle implique la rencontre de deux gamètes (cellules sexuelles) qui ne contiennent toujours qu'un seul des gènes allèles. En effet au moment de la formation des gamètes chez l'adulte, les deux gènes allèles se séparent dans des cellules sexuelles différentes. On modélise cette séparation comme un événement *aléatoire*. On peut établir le fait que les probabilités des AA, Aa, et aa sont respectivement p^2, $2pq$, q^2 telles que $p^2 + 2pq + q^2 = 1$ et que ces proportions sont statistiquement constantes au cours des générations successives. Le mathématicien peut calculer la fréquence des porteurs du gène récessif (Aa) qui ne le savent pas, connaissant empiriquement q^2 (aa) dans une population donnée. Ce calcul prend de l'importance si (aa) est une maladie grave, et il ouvre la question de l'élimination éventuelle de ce gène allèle dans une population donnée, ce que l'on nomme l'eugénisme (Jacquard 1970, 1977, 1978).

Il se présente un obstacle pour le biologiste. Ce modèle décrit un *équilibre* alors que le biologiste recherche, dans le cadre de la théorie darwinienne, une *évolution* de la fréquence des gènes. Ce modèle étant accepté, le biologiste recherche d'abord des situations empiriques qui y correspondent effectivement. Le cas des groupes sanguins est intéressant car on ne choisit pas son conjoint en fonction de son groupe sanguin et il n'est donc pas soumis à sélection, mais les répartitions géographiques des groupes sanguins ne sont pas toutes homogènes cependant. Le cas du groupe sanguin nommé M, N y correspond statistiquement (Notons qu'en dehors des groupes A, B, O et Rhésus il y a onze autres groupes sanguins dont on ne tient pas compte lors des transfusions sanguines courantes). Le biologiste souhaite ensuite que l'on remette en cause chacune des cinq hypothèses qui vont déterminer des évolutions dans la répartition des gènes allèles dans une population au cours des générations successives. La première étant celle du grand nombre, elle conduit le mathématicien à proposer au biologiste une fluctuation et une disparition éventuelle d'allèles dans une petite population qui n'est pas due à un effet de sélection (modèle de Wright élaboré en 1917) mais qui est due à une variation aléatoire. On parle de dérive génétique et non pas de sélection, ce qui ne contredit pas la théorie de l'évolution mais limite seulement le champ, l'extension de ce concept darwinien de sélection. Les populations humaines primitives, il y a 100 000 ans et plus, étaient certainement peu nombreuses et réparties en petits groupes. La seconde rectification du modèle consiste à considérer le cas de maladies génétiques récessives qui ne permettent pas la reproduction des (aa) par exemple. La probabilité de l'allèle (a) doit donc diminuer progressivement. Ceci se calcule de deux manières différentes : continue et discrète. Le biologiste doit alors chercher à expliquer les situations empiriques qui s'accordent à ce modèle et celles qui s'en écartent. Cette fois, l'écart signifie qu'il y a un effet de sélection par élimination. Pour rechercher un accord entre la simulation à partir du modèle et la réalité, le biologiste a réalisé des expériences sur de petits animaux (mouches dont le nombre de générations dans des conditions optimales est de 25 par an) dans des cages. Le cas de l'homme ne peut donner lieu à expériences et implique par ailleurs des observations sur des milliers d'années pour disposer de nombreuses générations. C'est rarement envisageable. Les expériences en laboratoire ont été critiquées car elles permettent rarement d'observer des mutations, des migrations et des sélections comme dans la nature. Elles sont donc délicates à mettre en regard des simulations à partir du modèle. Il faut alors rechercher des observations empiriques réalisées dans la nature et non pas au laboratoire dans un espace clos et limité. On voit là à l'œuvre le va et vient entre le biologiste et le mathématicien, entre les observations spontanées, les observations provoquées au laboratoire, les observations empiriques réalisées dans la nature et les divers modèles proposés et raffinés ou rectifiés. Le rôle positif de cette modélisation consiste à « *réduire le caractère métaphorique* » (Conry, 1981) du concept darwinien de sélection qui prend source dans une mauvaise analogie avec la sélection par l'homme des espèces domestiquées. Cette sélection humaine est nécessairement finalisée et l'explication darwinienne élimine au contraire toute finalité dans l'évolution. Le biologiste ne doit pas oublier non plus que l'ensemble des gènes d'une population ne se comporte pas nécessairement comme les billes dans une urne, et peut présenter des processus d'interaction et de régulation. Cette réserve n'invalide pas le modèle proposé. Elle souligne seulement la nécessité éventuelle de le rectifier, ou simplement de constater des écarts entre la simulation à partir du modèle et la réalité observée dans la nature et non pas en laboratoire. La fonction de la modélisation est donc ici différente du cas de l'épidémiologie. Mais, encore une fois, les connaissances biologiques ne sont pas ici très nombreuses ce qui permet d'aborder aisément ce travail.

Les enseignants-étudiants du master ont construit les arbres de transmission des gènes allèles au cours des générations. Ils ont calculé sous forme de suites récurrentes l'évolution de la fréquence du gène qui détermine une maladie génétique : la mucoviscidose, qui diminue l'espérance de vie et ne permet pas, dans les conditions actuelles d'avoir une descendance. Le cas de la mucoviscidose (Serre, 1997) est intéressant car la fréquence de cette maladie en Europe est particulièrement élevée. Ils ont recherché en combien de générations, conformément au modèle, la fréquence du gène qui détermine cette maladie devrait diminuer de moitié. Les calculs conduisent à une estimation de 51 générations donc environ 1000 ans. Ils ont exploré également la piste d'un facteur privilégiant la reproduction des (Aa) pour expliquer la résistance d'une maladie qui ne permet pas la reproduction dans les conditions actuelles. Le travail réalisé a été ensuite transposé pour des élèves de TS sous forme d'une suite organisée d'activités.

4.3. Analyse statistique de l'ADN et modélisation par les chaînes de Markov

Si l'on accepte de réduire le fonctionnement de l'ADN, molécule formée de deux très longues chaînes, au fonctionnement d'une seule chaîne, en oubliant également temporairement le rôle des protéines qui l'entourent et le rôle du deuxième brin, c'est une première étape qui permet la modélisation. Parmi les molécules qui constituent cette chaîne, seules les quatre bases adénine, cytosine, guanine et thymine étant différentes l'une de l'autre, on peut à nouveau réduire l'analyse à celle de la succession des quatre bases notées par une seule lettre A, C, G, T. Par analogie avec l'étude du langage, l'ADN peut être considéré comme un « texte » écrit avec quatre lettres, ayant un début, une fin, un sens unique de lecture mais aucune séparation entre les « mots ». Il faut encore, et c'est un obstacle important, admettre que si le rôle du chimiste est de rechercher comment cet ADN permet la synthèse d'une protéine, autrement dit sa fonction, le rôle de la modélisation est ici de rechercher une structure formelle, une organisation qui permettra ensuite de proposer au biologiste la recherche de la fonction d'un fragment détecté au milieu d'une longue chaîne dont la signification échappe encore actuellement (Rumelhard, 2006). Chez les Mammifères, plus de 90% de l'ADN n'a pas de rôle actuellement connu. À l'opposé de l'analyse littéraire d'un texte écrit en langue française et pour lequel l'essentiel est de rechercher le sens ou d'apprécier l'esthétique, on va proposer une analyse statistique des lettres isolées, puis des successions de toutes les 16 combinaisons de deux lettres (AA, AC, AG, AT, CA, CC, CG, CT, etc.), de toutes les 64 combinaisons de trois lettres (AAA, AAC, AAG, AAT, etc.) ou plus. On s'appuie sur les chaînes de Markov et on admet que l'existence de la lettre A (par exemple) à un endroit donné de la chaîne dépend de la (ou des 2, 3, 4,) lettre(s) qui précède(nt) immédiatement.

Comme montré dans (Rumelhard, 2006), de façon à se familiariser avec cette modélisation, on peut commencer à l'utiliser sur un texte en langue française, et comparer les résultats avec ceux d'un texte en langue anglaise, etc. On peut également réduire la comparaison à la seule succession de voyelles et de consonnes.

Des fragments de 5 000 à 10 000 lettres de séquences réelles d'ADN sont en fait accessibles gratuitement dans des banques de données sur divers sites internet et peuvent être téléchargés dans Excel. En utilisant les fonctions de ce logiciel, les calculs de proportions se font aisément. On va rechercher en particulier les fragments dont les fréquences réelles s'*écartent* des fréquences calculées dans le modèle M0 (Prum 2000, 2004). Dans ce modèle M0, on suppose que la lettre qui succède à une lettre donnée ne dépend que d'un « tirage au sort » dans une urne de Bernoulli dont la composition correspond aux proportions observées empiriquement sur une séquence donnée d'ADN. Ce modèle M0 étant peu convaincant, on travaille avec des modèles M1, M2, etc. On recherche alors en quoi la séquence réelle diffère ou non de ces modèles. Ce sont donc ces fragments qui s'écartent du modèle qui sont désignés au biologiste qui se tourne alors vers le chimiste d'une part, et vers la bibliothèque des séquences déjà analysées d'autre part.

Une autre direction de travail consiste à détecter la présence, la position et le nombre de « petits mots » (Schbath, 2003) de deux lettres tel CG dont on connaît le rôle dans l'inactivation d'un chromosome, de trois lettres qui représentent les « codons » c'est-à-dire les lieux de fixation des éléments constituant les protéines et que l'on nomme acide-aminés, ou plus spécialement de TAA, TAG, TGA qui sont des codons start (début de séquence) et stop (fin de séquence), de quatre lettres ou plus (de 8 à 13) dont la signification est connue comme site de fixation de protéines régulatrices ou d'enzymes sur l'ADN. Inversement on peut rechercher le nombre, la répartition et la position de « petits mots » qui n'ont *a priori* aucune signification connue telle la succession ACGT.

L'une des difficultés réside ici dans la quantité de connaissances biologiques nécessaires au mathématicien pour envisager ce travail, ainsi que les connaissances mathématiques pour que le biologiste comprenne ce que le modèle de Markov propose.

Pour se familiariser avec ce type de modélisation et d'approche, les enseignants-étudiants du master ont commencé par analyser un texte écrit en langue française en omettant les accents, les espaces entre les mots, etc. à l'aide du modèle M0, retrouvant approximativement les régularités connues sur les fréquences des différentes lettres. Ils ont ensuite « mélangé » le texte en lui faisant subir une succession de permutations de lettres et, se limitant à une distinction entre voyelles (v) et consonnes (c), ont exploré l'effet du mélange effectué sur les paramètres du modèle M1, en considérant les fréquences respectives des successions vv, vc, cc, cv. Des exercices ont ensuite été composés à partir de ce travail, à destination des élèves de 1STG, TES, TS, TSTG. Les enseignants-étudiants ont ensuite téléchargé un fragment de 8000 « lettres » d'une séquence réelle d'ADN dans Excel. À l'aide des fonctions de ce logiciel, ils ont calculé les fréquences des quatre lettres isolément (modèle M0), puis des 16 groupes de deux lettres AA, AC, AG, AT, etc. (modèle M1), puis des quatre groupes de trois lettres dont la fonction est connue comme début ou fin de séquences (start : TAA, TAG, TGA, et stop ATG), et comparé les résultats obtenus avec les modèles M0 et M1. Ils ont ensuite conçu des activités exploitant ces données réelles à destination des élèves, en s'appuyant sur l'utilisation d'Excel.

4.4. L'objet et les modèles : de l'ADN à la CGR

Le dernier exemple que nous avons choisi de présenter concerne également l'ADN mais le travail qui y est mené se situe à un autre niveau : celui des représentations associées à la modélisation. Comme rappelé ci-dessus, la modélisation des séquences d'ADN comme des suites finies de lettres de l'alphabet $\{A,C,G,T\}$ constitue un premier niveau de modélisation qui est un affaiblissement drastique de la réalité mettant en avant la question vague de la recherche de régularités structurelles ou statistiques de telles suites, relatives à un individu, une espèce ou une fonction biologique. Idéalement, une telle approche scientifique suppose un aller-retour permanent entre le biologiste, l'informaticien (à cause de la taille des séquences) et le mathématicien : établissement du modèle, étude du modèle en soi, test de la pertinence des résultats qui infirme ou valide le modèle dans les conditions du phénomène observé, ajustement éventuel du modèle, etc.

La modélisation mathématique par des chaînes de Markov constitue un second niveau de modélisation, interne aux mathématiques. On y considère une séquence d'ADN comme une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$, finie ou infinie, à valeurs dans l'alphabet $\{A,C,G,T\}$. C'est une manière de prendre en compte toutes les façons dont les lettres peuvent se succéder dans la séquence. En termes plus précis, la question posée est alors celle de la loi du tirage de la suite des lettres : la $n^{ième}$ lettre est-elle tirée indépendamment des précédentes ? Peut-on déduire la loi du tirage de la $n^{ième}$ lettre de la connaissance des $n-1$ précédentes ? Certains motifs sont-ils répétés, avec quelle fréquence, selon quelle distribution ? Toute hypothèse sur les lois (jointes) de probabilité des X_n consiste en un nouvel affaiblissement du phénomène réel (nouvelle modélisation). À l'intérieur des mathématiques, compte tenu des séquences « réelles » fournies par l'observation biologique *via* l'ordinateur, joue la dualité entre probabilités et statistiques comme celle entre un modèle et sa mise à l'épreuve de l'expérience (tests).

Le projet dont il est ici question ici sur la CGR (Chaos Game Representation) se situe à un troisième niveau. Il ne s'agit pas d'une nouvelle modélisation mais plutôt d'une représentation de l'objet modélisé par les modèles ci-dessus (les séquences X_n), introduit pour la première fois par Jeffrey (Jeffrey, 1990).

Décrivons ce système de représentation (Roy *et al.,* 1998) par un exemple : on dessine dans un carré un nuage de points, le $n^{ième}$ point dessiné correspondant à la $n^{ième}$ lettre de la séquence. À chaque sommet du carré correspond une lettre de l'alphabet, comme sur le dessin ci-dessous. Prenons une séquence commençant par *GAGCACAGTGGAAGGG*… On part du centre du carré, noté O. Le premier point du nuage est placé au milieu du segment formé par le centre et le sommet *G*, qui est la première lettre de la séquence. Le deuxième point du nuage est placé au milieu du segment formé par ce premier point et le sommet *A* qui est la deuxième lettre de la séquence. Le troisième point est placé au milieu du segment formé par ce deuxième point et le sommet *G* qui est la troisième lettre de la séquence, et ainsi de suite par construction récursive. La figure 1 ci-dessous relie les sept premiers points de la CGR de l'exemple.

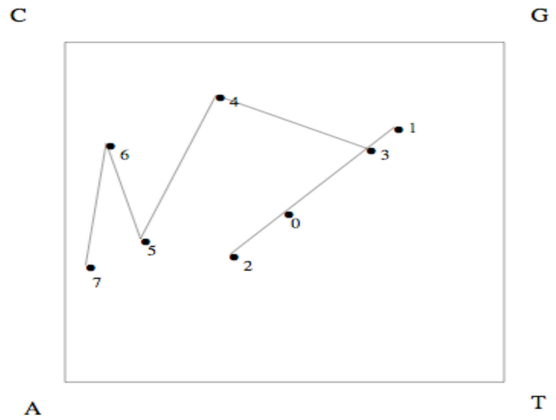


Figure 1 - Représentation CGR du début de la séquence *GAGCACAGTGGAAGGG*

La figure 2 est le dessin de la CGR de séquences d'ADN des quatre espèces différentes (quelques milliers de points). Elle est extraite de (Deschavanne, Giron, Vilain, Fagot, Fertil, 1999).

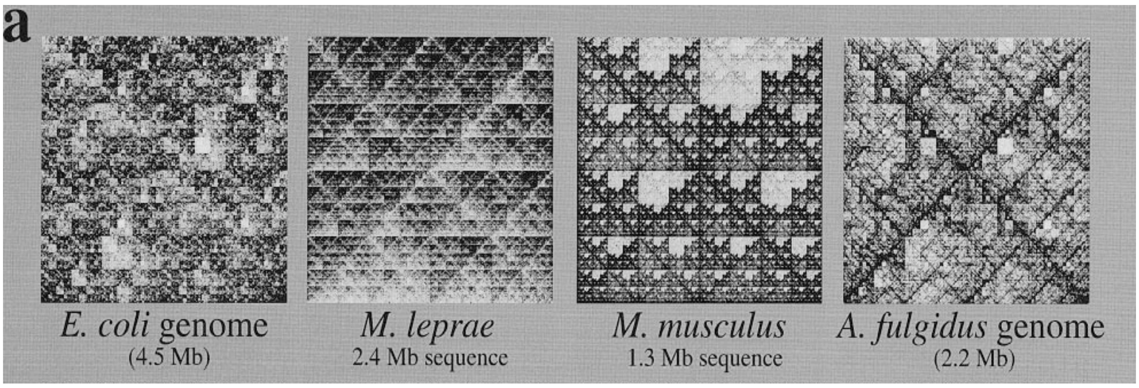


Figure 2 - Représentation CGR de l'ADN de quatre espèces

De visu, on montre ainsi que les lettres d'une séquence d'ADN ne sont pas tirées indépendamment et de manière identiquement distribuée (iid), en comparant les CGR de « vraies » séquences aux CGR de tirages iid. On pouvait se douter que la permanence des espèces n'est pas en ce sens le « fruit du hasard » ; on en a là un élément de démonstration. Ces dessins permettent une discrimination grossière des espèces par la CGR de leur ADN. Comme expliqué dans (Roy, Raychaudhury, Nandy, 1998) : « les vertébrés présentent des régions clairsemées bien distinctes, les invertébrés présentent moins de motifs que les vertébrés, certaines moisissures et les plantes présentent des striations parallèles, les bactéries révèlent des carrés remplis de points uniformément répartis »[4].

Chaque fois qu'une lettre A apparaît dans la séquence, le point de la CGR qui lui correspond est dans le quart de carré en bas à gauche. Chaque fois que le mot AA apparaît, le second point A correspondant à ce motif est dessiné dans le seizième de carré en bas à gauche. En généralisant ce résultat, on montre par exemple que les zones noircies d'une CGR correspondent à des motifs fréquemment répétés dans la séquence et que l'aspect d'une CGR n'est guère influencé par le début ni la fin de la séquence : seules comptent les fréquences

[4] Traduction des auteurs

d’apparition des sous-mots. En ce sens, le dessin rend compte de la statistique du « milieu » de la séquence.

Un groupe de quatre enseignants-étudiants a fait de ce thème l’objet de leur mémoire. C’est en des termes à peine plus précis que leur ont été présentés le modèle de l’ADN et la représentation graphique de la CGR. Deux références bibliographiques avancées leur ont été fournies au départ : une thèse de mathématiques en français (Cénac, 2006), un article de biologie en anglais. Dans le cours du semestre, cette bibliographie s’est enrichie. À cause du caractère récent de l’invention de la CGR, aucune source « vulgarisée » n’était alors disponible. Leur premier travail a été de se saisir du modèle et de sa représentation graphique. À la fois pour entrer dans le détail de l’objet mathématique et pour en faire une transposition didactique, ils ont dû faire le choix de notations pour décrire la suite de points de la CGR. Le domaine de travail spontanément adopté est celui de la géométrie affine euclidienne du plan (points et vecteurs), enrichi par la définition récursive d’une suite de points du plan.

Le mémoire produit contient une transposition pour l’enseignement au lycée structurée autour des quatre thèmes suivants :

- Récurrence, homothéties : combinatoire élémentaire, suite de points du plan définis par récurrence barycentrique, intervention des homothéties, exploitation combinatoire de la récurrence vectorielle, utilisation d’un tableur pour représenter et conjecturer, interprétation et comparaison de séquences « vraies » et de séquences produites par un automate probabiliste ;
- Calcul barycentrique : calcul des poids des points de la CGR comme barycentres des sommets du carré, exploitation combinatoire en relation avec l’aspect des dessins ;
- Un peu d’arithmétique : écriture des poids en base 2 ;
- Programmation d’un tableur pour dessiner des CGR, application aux séquences d’ADN des patients atteints de la chorée de Huntington, cas d’école de la biologie. Liens entre propriétés statistiques simples d’une séquence et aspect de la CGR.

Au-delà de l’appropriation du modèle, les activités proposées se résument ainsi : étude mathématique de l’objet (niveau lycée), interprétation graphique de propriétés statistiques des séquences et, réciproquement, interprétation statistique de propriétés graphiques, illustration par des exemples « vrais » issus de séquences réelles, utilisation d’un tableur pour dessiner. Elles n’épuisent pas le sujet de la CGR qui peut vraisemblablement faire l’objet d’autres développements. En particulier, le lien entre les statistiques et les probabilités, qui s’apparente au lien entre un objet et son modèle, pourrait être exploité dans ce cadre.

La variété des sujets proposés à la transposition témoigne de la richesse de l’objet mathématique. Celle-ci est peut-être une condition nécessaire à l’intérêt d’une démarche de modélisation pour l’enseignement des mathématiques (ou la formation). La partie modélisation proprement dite de l’objet biologique (ADN) est restée un peu à l’écart. Cela tient probablement à la complexité de l’ADN : le modèle (suite de lettres) est une simplification extrême de la réalité qui rend difficile l’interprétation sur le réel des résultats sur le modèle (Deschavanne *et al.,* 1999). Une interaction véritable sur le sujet entre biologie et mathématiques, si elle est envisageable dans l’environnement du secondaire, requiert vraisemblablement une collaboration étroite entre biologistes et mathématiciens. Elle est malgré tout subordonnée à l’accessibilité de la biologie du génome dans l’enseignement secondaire.

4.5. Conclusion

Ces quelques exemples, brièvement décrits et non exhaustifs, se veulent illustratifs du travail mené au sein de cet enseignement du master didactique sur les interactions entre mathématiques et biologie. Ils essaient de montrer la richesse de ces interactions quand on se situe dans une perspective de modélisation, une richesse à laquelle nous sommes devenus progressivement sensibles au fil des années. C'est une richesse qui, pour pouvoir être exploitée, nécessite une interaction effective entre mathématiciens et biologistes dans la durée. Les interactions entre mathématiques et biologie sont en effet moins « naturelles » que les interactions entre mathématiques et sciences physiques ; nos cultures respectives, nos langages sont plus distants. Au sein du groupe IREM, cette interaction s'est construite très progressivement à partir d'un travail initialement centré sur l'accompagnement des TPE. Les premiers sujets travaillés empruntaient les voies les plus usuelles, celles aussi les moins coûteuses en connaissances biologiques. Ils touchaient peu à l'aléatoire avec lequel les enseignants se sentent souvent peu à l'aise. Ce n'est plus tout à fait le cas aujourd'hui. En revanche, par rapport au contexte des formations pluridisciplinaires IREM menées sur les TPE, dans l'enseignement de master, l'interaction est limitée à des interactions au sein de l'équipe enseignante ou aux contacts extérieurs que les enseignants-étudiants peuvent être amenés à prendre pour les besoins de la réalisation de leurs projets. Vu les filières de ce master, nous n'avons en effet pas la possibilité d'avoir des groupes mixtes où travailleraient ensemble enseignants de mathématiques et de SVT.

5. Retour sur les choix didactiques effectués

Nous souhaitons revenir dans cette partie, comme annoncé, sur les choix didactiques à la base de cet enseignement et sur leurs effets, en situant cette réflexion par rapport aux travaux de recherche existants dans ce domaine de la modélisation et plus particulièrement de la formation des enseignants et formateurs d'enseignants à la modélisation. Notre formation vise la formation de formateurs d'enseignants, susceptibles d'avoir à conseiller des enseignants ayant à encadrer des TPE au lycée, participer à des itinéraires de découverte ou à un travail sur des thèmes de convergence au collège, ou préparer des formations dans ce domaine. Nous avons fait le choix de concevoir cet enseignement autour du vécu d'une expérience de modélisation et de son analyse réflexive, dans une pédagogie de projets réalisés en petits groupes. Cette importance donnée au vécu d'une expérience de modélisation se retrouve dans les travaux portant sur la modélisation en formation d'enseignants auxquels nous avons eu accès[5]. C'est ce qui ressort par exemple de l'article de Lingefjärd (2007) qui synthétise les travaux menés dans l'étude ICMI sur la modélisation dans la formation des enseignants quand il écrit :

> « There was no doubt about the fact that use of modeling and technology in instruction with the purpose of enriching students' mathematical learning is valued by future teachers if they are convinced of their impact on their own learning of the content. Therefore in order for modeling to become a part of a teacher's functioning and practice, experiences provided to them in the course of their own mathematics learning should assist them in constructing an image of the teaching and learning that is enhanced by modeling »

C'est aussi le cas dans l'article de Blomhoj et Hoff Kjeldsen (2006) analysant une formation continue développée au Danemark pour aider les enseignants de lycée, peu familiers avec la modélisation, à mettre en place les enseignements de modélisation prescrits par la réforme curriculaire de 2005 :

[5] Précisons que nous n'avons pas trouvé dans la littérature didactique de travaux portant directement sur la formation de formateurs d'enseignants dans ce domaine. De plus, les travaux concernant la formation des enseignants concernent essentiellement leur formation initiale et c'est d'abord l'initiation à la modélisation des futurs enseignants eux-mêmes qui y est visée.

> « Our position is that mathematical modeling – building, analyzing, criticizing – is learned by doing it. In this context problem-oriented project work in modeling presents itself as a suitable didactical choice, and it takes care of some of the central challenges in the new reform. »

Néanmoins, dans cette expérience de formation continue d'enseignants, le lien entre vécu et transposition didactique de ce vécu est bien plus fort que dans notre enseignement. Après un séminaire de trois jours d'introduction à la modélisation, les enseignants doivent, par groupes de 2 ou 3, développer un projet d'enseignement d'une dizaine d'heures, l'implémenter et en analyser la réalisation, des phases d'échanges et de bilans collectifs étant régulièrement organisées. Dans l'article, deux projets aux résultats contrastés sont présentés. Leur comparaison sert notamment à mettre en évidence l'attention à accorder à l'organisation didactique du travail des élèves qui va, dans le projet réussi, se trouver structurée en 4 phases de 3, 2, 6 et 10 séances d'enseignement, les trois premières phases servant à préparer le terrain pour rendre possible et productif le travail autonome des élèves des 10 séances sur le projet lui-même. Ce projet concerne la régulation de la prescription d'un médicament pour un asthmatique.

Cet article montre bien, nous semble-t-il, les conditions à satisfaire pour qu'une formation à la modélisation des enseignants puisse s'effectuer, de façon productive, en interaction étroite avec la pratique. Dans le contexte français, cela semble difficile dans le cadre du dispositif d'enseignement principal alors que c'est sans doute possible dans le cadre des dispositifs secondaires que sont les TPE et l'option Sciences au lycée ou les « Thèmes de convergence » aujourd'hui au collège. Conscients de cette tension entre l'objectif de faire vivre aux enseignants-étudiants du master une expérience de modélisation épistémologiquement satisfaisante et celui de les préparer à l'action didactique, nous avons choisi de donner la priorité à la dimension épistémologique, considérée comme un préalable à la réflexion didactique. Ce choix a bien évidemment des conséquences à la fois positives et négatives. Les projets qui ont été produits au fil des années montrent un travail dans le domaine de la modélisation très varié mais où, chaque année, les différentes étapes du cycle de modélisation sont présentes, si ce n'est dans chaque projet, au moins au niveau collectif. La complexité des questions de modélisation y est bien prise en compte, tout comme la dimension d'analyse critique des modèles et des processus de modélisation. Les enseignants-étudiants ne produisent pas nécessairement eux-mêmes des modèles mais font sens de ceux qui ont été développés pour répondre à telle ou telle question grâce à une enquête approfondie combinant lecture critique de textes et travail sur les modèles eux-mêmes. Ils nous semblent développer également une vision non réductrice des relations entre disciplines comme nous avons essayé de le montrer en prenant l'exemple de la biologie. Les réponses obtenues au questionnaire d'évaluation montrent que cette expérience est effectivement tout à fait nouvelle pour la quasi-totalité d'entre eux. Même ceux qui ont encadré des TPE soulignent en quoi ce travail réalisé à la première personne a été pour eux différent de l'expérience d'encadrement qu'ils avaient connue et leur a permis rétrospectivement de comprendre ce qu'était le travail demandé aux élèves et sa complexité. C'est un enseignement qu'ils perçoivent comme riche, très intéressant mais aussi très déstabilisant. Ils soulignent en particulier la difficulté pour un enseignant de faire face, au début, à l'évidence de la limite de ses connaissances, notamment mathématiques, même sur des sujets relativement élémentaires, mais aussi le plaisir voire l'excitation ensuite éprouvés à apprendre ou ré-apprendre, avec l'aide des collègues et de l'équipe enseignante. Beaucoup aussi soulignent que c'est à l'occasion de la réalisation de ce projet que la notion de travail en groupes est devenue pour eux autre chose qu'un objet de discours pédagogique, car il est devenu clair pour eux que, sans un travail de groupe comportant soutien mutuel et partage des tâches, leur projet n'aurait pu aboutir. Certains aussi découvrent à cette occasion le rôle essentiel de la technologie, tant pour accéder à des informations et ressources, que pour travailler dans les modèles, effectuer des calculs et des simulations, et enfin présenter leur travail et le rendre plus largement accessible.

En revanche, comme l'on pouvait s'y attendre, sur la question de la préparation à l'action didactique, avec des élèves ou en formation, les résultats de cet enseignement sont bien moins convaincants. Concernant les possibilités de réinvestissements possibles en classe ou en formation d'enseignants de cet enseignement, les réponses au questionnaire d'évaluation de la formation sont partagées. Les enseignants de lycée s'estiment bien préparés à l'encadrement de TPE et plusieurs mémoires ont d'ailleurs incorporé des analyses de TPE, mais ceux de collège perçoivent plus difficilement les réinvestissements possibles. D'une part, l'intersection est souvent faible entre les mathématiques engagées dans les projets et les mathématiques du collège, d'autre part le travail sur les thèmes de convergence qui, dans le contexte actuel, pourrait fournir un cadre favorable à des activités de modélisation peine à s'installer. C'est pourquoi nous avons depuis 2007-2008 suscité des projets autour de thématiques de société telles que crédits, énergie et environnement, mettant au premier plan un travail sur les formules et les ordres de grandeur. Comme cela a été montré dans les descriptions faites, presque tous les projets réalisés comportent cependant une ébauche pour le moins de transposition didactique, à destination d'élèves. Pour des contraintes de temps évidentes, ces transpositions ont rarement la possibilité d'être testées pendant le semestre de cet enseignement. Elles restent donc le plus souvent à l'état de propositions, non confrontées à la contingence, discutées dans la dernière phase de la formation et éventuellement retravaillées et exploitées ultérieurement. Il semble clair que, dans le contexte de cet enseignement, les enseignants-étudiants prennent conscience des limites évidentes des pratiques de modélisation proposées usuellement dans l'enseignement et qu'ils perçoivent mieux en quoi pourraient consister des pratiques épistémologiquement plus satisfaisantes sur un certain nombre de thèmes. Les activités qu'ils fabriquent pour les élèves dans le cadre des projets nous semblent cependant très distantes de cet idéal. Compte-tenu des contraintes institutionnelles[6], étant faites à quelques exceptions près pour pouvoir être gérées en une ou deux séances avec des élèves non initiés à la modélisation, ou proposées en devoir à la maison, elles sont extrêmement guidées, et l'élève y est généralement invité à suivre pas à pas et à réagir à un travail de modélisation dont il n'a pas l'initiative. On voit bien que le travail de modélisation s'y inscrit dans une pratique de classe marginale et est fortement contraint par cette marginalité. *A posteriori*, on peut penser que la vision épistémologique de la modélisation qui est développée dans cet enseignement et est plutôt, si l'on se réfère aux catégories introduites par Kaiser et Sriraman (2006), de nature pragmatique et socio-critique que conceptuelle et théorique, ne facilite pas la transposition didactique. La modélisation n'y est en effet pas mise en priorité au service du développement de concepts et théories mathématiques à enseigner mais en priorité à celui de la compréhension du monde extérieur aux mathématiques, de la résolution des problèmes qu'il pose et de la réflexion sur le rôle des mathématiques dans les autres disciplines et dans la société. Mais c'est aussi cette vision de la modélisation qui nous semble le plus manquer aux futurs enseignants et formateurs. Elle est sans aucun doute plus exigeante, en particulier parce qu'elle ne peut se développer de façon satisfaisante que dans l'interaction d'un certain nombre d'expertises, non réduite à la seule expertise mathématique. En ce qui concerne les projets à l'interface des mathématiques et de la biologie décrits ici, on voit bien à quel point le peu de contacts existant actuellement entre les disciplines et les enseignants de ces disciplines rend un travail de qualité, respectueux de l'épistémologie des deux disciplines et producteur à la fois en mathématiques et en SVT, est difficile à mettre en place.

[6] Les transpositions produites ne sont en particulier pas de type TPE car, dans le contexte des TPE, ce sont les élèves eux-mêmes qui choisissent leur sujet. Les études de TPE produites dans le cadre des projets sont des analyses *a posteriori*.

Dans cette unité d'enseignement, enfin, les enseignants-étudiants ne se sont pas véritablement posés en formateurs. Les transpositions proposées sont des transpositions de premier niveau destinées à leurs élèves. Il y a à cela des contraintes temporelles évidentes : prendre connaissance du phénomène de modélisation en général, s'approprier un modèle sans source bibliographique très bien adaptée, en traiter la partie mathématique et enfin travailler à une transposition didactique simultanée des mathématiques en question et de la démarche de modélisation suffit à remplir le semestre, quand on cumule avec un enseignement à temps complet. Penser à une exploitation de la modélisation en formation est peut-être, à ce stade, prématuré mais nous voudrions souligner que plusieurs des projets réalisés ont été exploités dans les formations continues à la modélisation que le groupe IREM a mis en place dans le cadre des plans académiques de formation pour des enseignants de mathématiques, sciences physiques et SVT, un groupe IREM auquel les anciens enseignants-étudiants du master sont invités à s'intégrer.

Comme nous l'avons souligné dès le début de cette contribution, nous relatons ici une expérience d'enseignement qui ne s'est pas inscrite dans une recherche en didactique. Il n'en demeure pas moins que la masse des données recueillies au fil des quatre années écoulées constitue sans aucun doute un matériau qui mériterait d'être plus systématiquement analysé et que, pour ce faire, les catégories produites par les travaux de recherche en didactique dans ce domaine, à la fois sur le plan théorique et méthodologique, devraient être particulièrement utiles.

Michèle Artigue
Université Paris Diderot – Paris 7, Laboratoire de didactique André Revuz
artigue@math.jussieu.fr

Yann Dartois
IREM, Université Paris Diderot – Paris 7
dartois.yann@orange.fr

Nicolas Pouyanne
Université de Versailles Saint Quentin
pouyanne@math.uvsq.fr

Guy Rumelhard
Professeur de SVT, chercheur à l'INRP, IREM, Université Paris Diderot – Paris 7
guy.rumelhard@wanadoo.fr

Références

Blum W., Galbraith P. L., Henn H. W. & Niss M. (Eds). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study. Springer.

Bernard C. (1865). *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*. Paris : Garnier-Flammarion Éditeurs, édition de 1966.

Blomhøj M. & Jensen T.H. (2003). Developing mathematical modeling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Application*S, 22 (3), 123-139.

Blomhøj M. & Hoff Kjeldsen T. (2006). Teaching mathematical modeling through project work. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 163-177.

Bouleau N. (1999). *Philosophies des mathématiques et de la modélisation.* Paris : L'Harmattan.

Canguilhem G. (1968). *Études d'histoire et de philosophie des sciences concernant les vivants et la vie* Paris : Vrin (7ème ed 1994).

Cénac P. (2006). *Étude statistique de séquences biologiques et convergence de martingales,* thèse de l'université Paul Sabatier Toulouse III ; disponible à partir du lien http://math.u-bourgogne.fr/IMB/cenac/thesis.fr.html

Conry Y. (1981). *Organisme et organisation : de Darwin à la génétique des populations.* Réédité In *Darwin en perspective.* Paris : Vrin 1987.

Comité Scientifique des IREM (2004). *La modélisation*. IREM Paris 7.

Deschavanne P.J., Giron A., Vilain J., Fagot G. & Fertil B. (1999). *Genomic signature: characterization and classification of species assessed by chaos game representation of sequences*, Mol. Biol. Evol. 16(10),1391-1399.

Guinnebaud B. (2004). Modèles mathématiques pour une propagation des maladies contagieuses. *Bulletin de l'APMEP* n° 441, 467-479.

Israel G. (1996). *La Mathématisation du réel*. Paris : Éditions du Seuil.

Jacquart A. (1970). *Structure génétique des populations humaines*. Paris : Masson.

Jacquart A. (1977). *Concepts en génétique humaine*. Paris : Masson.

Jacquart A. (1978). *Éloge de la différence* Paris : Seuil.

Jeffrey H.J. (1990). *Chaos game representation of gene structures*, Nucleic Acid Res. 18, 2163-2170.

Kaiser G, Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (3), 302-310.

Lingefjärd T. (2007). Modelling in teacher education. In, W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, M. Niss (Eds). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study. pp. 475-482. Springer.

Prum Bernard (2000). Les chaînes de Markov dans l'analyse des génomes, *Matapli* 62, 24.

Prum B. (2004). Mathématiques et biologie *APMEP* n° 440, 337-348.

Robin S., Rodolphe F. & Schbath S. (2003). *ADN, mots et modèles*. Paris : Belin, collection Echelles.

Roy A., Raychaudhury C. & Nandy A. (1998). Novel techniques of graphical representations and analysis of DNA sequences – a review, *J. Biosc.*, 23(1), 55-71.

Rumelhard G. (2001). Le rôle créateur des mathématiques en sciences de la vie. Propositions pour les TPE. *Biologie-Géologie (APBG)* n°4.

Rumelhard G. (2006). Analyse statistique de l'ADN, modélisation à l'aide des chaînes de Markov, simulation et détection de biais. *Biologie-Géologie (APBG)* n°6.

Schbath S. (2003). À la recherche de mots de fréquence exceptionnelle dans les génomes Images des mathématiques CNRS vol 3.

Serre J.L. (1997). *Génétique des populations*. Paris : Nathan université. Réédition (2008) Paris : Doin.

Enseignement des mathématiques et appui sur le réel

Paolo Boero, Alain Kuzniak, Rudolf Straesser (intervenants)
Bernard Parzysz (modérateur)

Introduction (B. Parzysz)

Ce thème recouvre en fait la question cruciale des rapports des mathématiques avec la « réalité », c'est-à-dire, en définitive, de leur « utilité ». Dans les premiers temps la question ne se posait pas, puisque les problèmes qu'on se proposait de résoudre étaient des problèmes de la « vraie vie », comme la répartition de terres, de récoltes ou de biens, ou encore la prédiction d'événements astronomiques censés influer sur le destin des individus ou des nations. Puis on a commencé à abstraire certains concepts, comme celui de « nombre » ou de « forme », à les travailler et à les enseigner, d'une part pour eux-mêmes, mais aussi pour pouvoir les utiliser à la résolution de nouveaux problèmes[1].

Mais, aujourd'hui comme hier, qui peut se vanter de pouvoir prédire à quoi pourront servir les mathématiques ? Pour introduire une note personnelle, lorsque j'étais étudiant j'avais choisi, par goût, de me spécialiser en théorie des nombres, domaine qu'on considérait alors comme le parangon des mathématiques « pures », mais au demeurant purement spéculatif et sans aucune utilité pratique. Depuis, le développement de la cryptographie, et plus particulièrement l'apparition des codes à clé publique, s'est chargé de mettre à mal cette opinion, au point que cette application sert même aujourd'hui d'illustration au chapitre d'arithmétique en spécialité de terminale scientifique, avec cette précision du document d'accompagnement : « les applications de l'arithmétique (codages, clés de contrôle…) ont remis ce domaine sous les feux de l'actualité » (p. 53).

Une autre question surgit également : du fait que la réalité est souvent trop « riche » pour être étudiée dans toute sa complexité, on est amené à « simplifier le réel » pour pouvoir l'aborder, c'est-à-dire à en négliger certains éléments, considérés comme moins importants ou peu pertinents. On élabore ainsi, de façon plus ou moins consciente, un modèle de la réalité, pour lequel il convient de se poser la question de savoir s'il rend bien compte de ce qu'on a entrepris d'étudier. Autrement dit : Jusqu'à quel point peut-on simplifier la situation initiale sans la dénaturer ? Et quelle confiance accorder au modèle ainsi élaboré ? Après tout, en astronomie, les lois de Newton ont fonctionné à la satisfaction générale jusqu'au jour où on s'est aperçu que l'orbite de Mercure n'était pas tout à fait ce qu'elle aurait dû être, les lois de la relativité générale ayant par la suite permis de rendre compte de cette « anomalie ».

Pour en venir à l'enseignement des mathématiques, le document d'accompagnement du programme de physique de Terminale S propose d'utiliser la méthode d'Euler pour étudier la chute verticale d'un solide dans un fluide. Deux modèles de frottement sont proposés, l'un « en kv » et l'autre « en kv^2 », et il s'agit de les comparer aux résultats expérimentaux. Dans ce cas, même si les résultats théoriques obtenus par la mise en œuvre de l'un de ces deux modèles (simulation) sont compatibles avec les résultats expérimentaux, on ne pourra pas pour autant assurer que le modèle en question correspond à la réalité ; on pourra seulement, plus modestement, se faire une idée de sa plus ou moins grande plausibilité.

En fait, pour l'enseignant, la démarche est souvent inverse : le modèle, objet de l'étude à entreprendre, est prédéterminé, et il s'agit pour lui d'imaginer une situation qui permettra à l'élève de le faire apparaître. Pour l'enseignant et pour l'élève, le lien entre situation et

[1] On aura bien sûr fait le lien avec la dialectique outil/objet de Régine Douady.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 295-311.

modèle se fait donc en sens contraire, et dans les cas extrêmes on peut aboutir à un simple « habillage » plus ou moins transparent du modèle théorique, qu'on abandonnera assez rapidement pour se concentrer sur celui-ci. Néanmoins les programmes du lycée, et même ceux du collège, mettent actuellement l'accent sur la démarche de modélisation, mais ce terme est alors entendu dans une acception restreinte, à savoir retrouver, sous une situation qui est souvent déjà plus ou moins « épurée », un modèle bien identifié, dans lequel on travaillera ensuite. L'exemple des exercices basés sur des situations de la physique dans les manuels de mathématiques de Terminale scientifique à propos des équations différentielles est symptomatique à cet égard : du point de vue du physicien, les situations sont en général caricaturales, voire non viables, et surtout, une fois l'équation établie et résolue, les exercices ne proposent que très exceptionnellement un retour sur la situation d'origine, le circuit électrique ou le pendule ne servant en somme que d'alibis pour l'étude mathématique (Malonga *et al.,* 2008).

Comme le montre ce qui précède, les rapports, souvent conflictuels par essence, entre les mathématiques et la réalité posent au didacticien un certain nombre de questions importantes. Parmi celles-ci :

- Est-il possible/souhaitable/raisonnable d'établir dans l'enseignement un lien entre les mathématiques et le monde dans lesquels vivent des élèves ?
- Comment faire apparaître des mathématiques à partir de situations de la réalité qui nous entoure ?
- Étant donné la complexité du réel, est-il envisageable de le faire dès l'école primaire ?
- Le fait de s'appuyer sur l'étude de situations « réelles » est-il garant de l'implication des élèves dans les tâches mathématiques ?
- Qu'ont à nous apprendre les pratiques sociales et professionnelles des mathématiques pour leur enseignement ?
- Comment engager les professeurs dans ce type de démarche ?
- Etc.

On le voit, le sujet est vaste, et les intervenants de cette table ronde se sont efforcés d'apporter des éléments de réponse tirés de leur expérience de chercheurs à quelques-unes d'entre elles. Ainsi, Paolo Boero évoque les expérimentations à grande échelle menées depuis une vingtaine d'années par le groupe de Gênes, à l'école primaire et au collège, dans une perspective socio-constructiviste ; Alain Kuzniak, lui, appuie plus particulièrement son intervention sur le cas de la géométrie telle qu'elle est enseignée en France ; puis Rudolf Straesser propose de « déterrer » les mathématiques qui sont enfouies plus ou moins profondément dans la réalité. Enfin, quelques échos de la discussion ayant fait suite aux interventions viendront compléter ce compte rendu.

Quelques réflexions sur les rapports mathématiques - réalité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques entre 6 et 14 ans (P. Boero)

Introduction

Dans cette contribution je voudrais en premier lieu traiter le problème de la motivation du rapport à établir entre mathématiques et réalité dans l'enseignement des mathématiques au niveau de l'école de base (de 6 à 14-15 ans). Je voudrais montrer que cette motivation dépend des choix épistémologiques, cognitifs et même idéologiques sous-jacents à l'enseignement des mathématiques. Je voudrais ensuite présenter rapidement certains aspects des choix faits (à propos du rapport entre mathématiques et réalité à l'école) dans les Projets d'enseignement du Groupe de Gênes pour l'école primaire et l'école moyenne, et dresser un bilan des points forts et des difficultés (hélas, croissantes !) que les enseignants rencontrent quand ils veulent développer une synergie entre les progrès dans la connaissance du réel et l'apprentissage des mathématiques.

Motivation du rapport entre mathématiques et réalité

Je commencerai par ce qui pourrait motiver qu'on établisse un rapport étroit entre mathématiques et réalité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques entre 6 et 14-15 ans. Je pense qu'il faudrait dépasser certains lieux communs qui pèsent sur les rapports entre mathématiques et réalité à l'école, pour ce qui concerne leur justification dans l'enseignement- apprentissage des mathématiques. Ces lieux communs empêchent de voir que l'enjeu est l'orientation culturelle et cognitive de l'enseignement des mathématiques :

- *Motivation de l'élève :* la motivation de l'élève concerne la dimension affective de son engagement dans le travail scolaire ; comme telle, elle peut être manœuvrée par l'enseignant, qui peut motiver l'élève par la référence à la réalité extrascolaire. Mais (selon l'âge) on pourrait aussi enseigner les mathématiques d'une façon motivée pour l'élève à travers des jeux, ou motiver le travail mathématique par des défis intellectuels, etc.
- *Meilleur apprentissage de mathématiques utiles dans la vie*, à travers un apprentissage de leur usage en prise directe sur la réalité : cette justification semble raisonnable, mais elle ne prend pas en compte la nature des apprentissages mathématiques réalisés ; si on pense que l'objectif de l'enseignement des mathématiques dépasse l'aspect utilitaire et si on considère les mathématiques utiles dans la vie comme marginales dans le cadre des mathématiques importantes, cette motivation devient très faible.
- *Facilité d'émergence de certains concepts* (surtout géométriques) si on travaille sur des réalités bien choisies : en fait la complexité des réalités concernées rend compliqué l'effort de l'enseignant de faire « émerger » les concepts visés. Et le lien des concepts – je pense encore à la géométrie – avec leurs lieux d'émergence pourrait compromettre, dans une perspective épistémologique formaliste, la qualité de la conceptualisation et des acquis conceptuels. En effet, le poids de la réalité sensible pourrait rendre difficile le jeu des généralisations, des changements d'axiomes, etc., qui sont des aspects importants si on se situe dans cette perspective.

Bien que très synthétique, cette analyse critique des motivations courantes peut suggérer que les raisons de fond pour établir un rapport étroit (ou non) entre mathématiques et réalité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques sont plutôt liées à des positions épistémologiques et cognitives (dans beaucoup de cas implicites et inconscientes chez les enseignants), et souvent aussi idéologiques et politiques (comme on le verra à la fin de cette contribution). Elles ont donc peu à voir avec l'efficacité didactique dans l'absolu et l'utilité objective, mais relèvent des choix culturels des *individus* et des grandes orientations culturelles et politiques des *sociétés*… ainsi que des relations très complexes et même contradictoires entre eux.

Approches diverses du rapport entre mathématiques et réalité à l'école

Les approches idéaliste, structuraliste et formaliste

Mathématiques et réalité(s) sont des mondes très difficiles à relier par une synergie suffisamment riche dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques, si les mathématiques sont conçues comme des systèmes d'objets (« idées » ou « structures » ou « entités caractérisées par des axiomes ») abstraits organisés en forme de théories, et si la réalité est conçue comme un ensemble d'objets concrets et de relations contraignantes objectives entre ces objets. En effet, la distance posée d'emblée entre les deux domaines empêche de concevoir une synergie entre le développement du savoir mathématique et son usage (ou son émergence) dans le traitement de questions réelles. Dans ce cadre, le rapport optimal se réalise quand la réalité fonctionne comme illustration, ou bien comme situation d'application, des idées mathématiques, et éventuellement quand les idées mathématiques sont vues comme idées émergentes de l'observation de la réalité (comme dans les positions traditionnelles de l'idéalisme, toujours présentes dans l'école !). Je voudrais ajouter que dans ce cadre on tend fortement à sélectionner (ou même à fabriquer dans l'école) une « réalité » la plus proche possible des idées que l'on veut illustrer ou faire émerger, sans souci de son importance culturelle ou sociale.

Une vision idéale des mathématiques comme prototype d'une culture universelle (à travers les peuples et les domaines scientifiques) accompagne souvent ces positions épistémologiques, surtout dans l'interprétation "structuraliste" (années 1940-1960), et trouve une correspondance dans certaines théories psychologiques, celle de Piaget en premier lieu, quand elles établissent un lien entre structures universelles de la pensée et structures mathématiques dans une perspective évolutive (individuelle ou même historique).

L'approche constructiviste

Le rapport mathématiques-réalité devient plus étroit (du point de vue épistémologique) et facile à gérer (du point de vue didactique) si les mathématiques sont conçues comme "rapport personnel constructif à des objets culturels et à des théories", et si la réalité est conçue comme "rapport personnel à un environnement - source de stimulations, contraintes, etc." (dans une perspective où l'individu, ou le groupe, devient le centre du monde social et culturel). Mais rendre centrale cette subjectivité sous-entend compter sur beaucoup de travail de négociation pour arriver à des sens partagés, à des règles de raisonnement partagées, et pour établir un lien avec l'héritage culturel (surtout si les cultures d'origine sont différentes, et si l'hypothèse d'universalité des structures a une portée plus limitée que prévu par les théories psychologiques d'appui !). On comprend alors pourquoi, par cette voie, on n'arrive qu'avec difficulté au sens de la démonstration mathématique (comme pilier du système des théories mathématiques), au langage algébrique (comme outil sophistiqué et universel de représentation et de traitement de problèmes mathématiques dans des domaines très différents), etc.

Les "math wars" (« guerres mathématiques ») en cours depuis une quinzaine d'années aux États-Unis sont au moins en partie une conséquence de l'extension de l'approche « constructiviste ». Elle se reflète dans certains textes de didacticiens américains et dans certains projets d'enseignement largement adoptés dans ce pays. En effet les soucis de certains mathématiciens à propos de la baisse d'engagement et de résultats sur la démonstration et sur la maîtrise du langage algébrique dans l'école sont rattrapés par des soucis d'ordre idéologique et même politique, à propos du danger de laisser les individus ou les groupes libres de concevoir une réalité et une culture selon leurs besoins.

L'approche socio-culturelle

La perspective des rapports mathématiques-réalité à l'école change encore si on voit les mathématiques comme un système culturel où le *sens* des objets culturels dérive en premier lieu des *activités* qui les concernent (les définitions et les systèmes de théorèmes venant après), et la *réalité* est en premier lieu un *domaine d'activités*.

Dans cette vision (qui fait référence aux théories de la culture de dérivation vygotskienne - voir la définition de la culture de Hatano & Wertsch, 2001) les mathématiques ne sont pas réduites à un ensemble de théories axiomatisées (comme dans l'approche formaliste) et ne sont pas non plus des constructions plus ou moins arbitrairement négociables, mais comprennent des outils instrumentalisés (Rabardel, 1995) qui prennent du sens à travers des activités. Donc les activités (qu'elles soient internes aux mathématiques ou en relation avec d'autres domaines culturels) deviennent des éléments constitutifs cruciaux des mathématiques. Ajoutons que l'activité est socio-culturellement située, et c'est ce qui réduit l'arbitraire des constructions.

Dans cette perspective, le lien entre mathématiques et réalité s'établit au niveau des activités mathématiques qui concernent la réalité et les processus mentaux en jeu dans ces activités, comme par exemple l'instrumentalisation des outils théoriques et pratiques dans la modélisation du réel. Les aspects sémiotiques jouent alors un rôle pivot entre mathématiques et réalité : des signes qui dérivent d'activités internes aux mathématiques peuvent fonctionner comme modèles pour la description, l'interprétation et la prévision qui concernent des situations et des phénomènes de la réalité. Réciproquement, certaines formes ou relations qui organisent la connaissance de la réalité peuvent être assumées comme signes et relations de référence pour des constructions mathématiques.

Dans l'approche socio-culturelle, les difficultés théoriques (et pratiques aussi, si on considère certaines applications de la théorie de l'activité de Leontiev dans l'école soviétique) de l'enseignement-apprentissage des mathématiques proviennent de la mise à l'écart de la subjectivité (la finalité de l'école étant, dans cette vision, l'appropriation par les élèves des outils et des cadres culturels élaborés par l'humanité); et de la nécessité d'enseigner à développer des solutions nouvelles pour des questions nouvelles (elles proviennent donc de la réalité des sociétés complexes en évolution rapide d'aujourd'hui). En particulier, au niveau de l'école de base, les difficultés proviennent du rapport problématique entre expériences et pratiques personnelles des élèves, d'une part, et, d'autre part, pratiques « officielles » enseignées (ce sujet est marginal dans la théorie de l'activité de Leontiev, bien que central dans l'élaboration de Vygotsky (1985) : dialectique entre concepts communs et concepts scientifiques), et de la difficulté du rôle de médiation de l'enseignant entre les deux. La prise en charge de ces difficultés constitue un défi pour toutes les ingénieries didactiques qui cherchent à implémenter dans l'école l'approche socio-culturelle.

L'expérience du groupe de Gênes

Notre expérience a démarré vers la fin des années 1970 comme une expérience de construction et d'expérimentation large (ciblant surtout dans les milieux défavorisés) de deux projets d'enseignement des mathématiques, pour l'école primaire (6-11 ans) et pour l'école moyenne (11-14 ans). Les choix initiaux étaient inspirés par une vision anti-« mathématiques modernes », anti-formaliste et anti-structuraliste, mais également éloignée d'une vision constructiviste de l'enseignement/apprentissage des maths. Notre vision était proche de l'approche socio-culturelle, sans toutefois développer à ce moment d'une façon cohérente et approfondie certains présupposés de cette approche. Les élèves étaient censés apprendre des mathématiques par des activités de modélisation et de résolution de problèmes liées à des thèmes importants dans leur expérience extrascolaire (d'où leur motivation), ainsi que dans la culture extrascolaire. Le choix de thèmes concernant la connaissance du réel répondait à deux critères : efficacité dans la construction des concepts et des compétences des disciplines plus importantes visées; et importance pour l'émancipation culturelle des enfants. Dans le projet relatif à l'école primaire, qui couvrait toutes les disciplines principales tout au long du primaire, les thèmes étaient regroupés de façon assez large : économie, nature, technologie, histoire. Dans le projet pour l'école moyenne, qui couvrait les mathématiques et les sciences, les titres des domaines d'activités étaient: « L'homme et la nature » (11-12 ans), « L'homme et la société » (12-13 ans), « L'homme et la culture » (13-14 ans).

Les expérimentations dans les classes (plus de 250 classes d'école primaire et de 40 classes d'école moyenne étaient concernées au milieu des années 80) ont fait apparaître que: la motivation des élèves ne dépend pas seulement des thèmes choisis par l'enseignant pour le travail dans la classe. En effet, certains acquis mathématiques nécessaires pour la suite des études et pour le traitement de certains problèmes « réels » ne sont pas aisément accessibles à travers le seul travail dans des contextes « réels »; et d'autre part le poids de la culture d'origine des élèves (moyens langagiers, mais aussi conceptions à propos des thèmes « réels » travaillés dans la classe) se révèle très important pour le traitement mathématique de ces thèmes.

Dans notre travail d'équipe, à partir du milieu des années 80 nous avons essayé de répondre à ces difficultés et aux questions posées par les rapports entre mathématiques et réalité pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques de base dans une perspective vygotskienne, en introduisant la notion de "domaine d'expérience". Il s'agit d'un domaine de la culture humaine que l'on développe dans la classe *(en résonance avec l'expérience des élèves et en dialogue avec la tradition culturelle portée par l'enseignant).* La médiation de l'enseignant s'appuie sur les signes, les objets et les contraintes du domaine culturel visé pour guider l'évolution des pratiques et des conceptions des élèves à propos de ce domaine selon sa culture et ses intentions. Les domaines d'expérience concernent, au début de l'école primaire, la réalité extrascolaire accessible à tous les élèves (comme par exemple la monnaie et les achats à 6 ans, ou la croissance des plantes à 7 ans). Dans les classes successives, certains domaines des mathématiques (comme l'arithmétique) deviennent aussi des domaines d'expérience pour les élèves, qui ont désormais un répertoire assez vaste de faits et de comportements mathématiques pour pouvoir développer leurs « concepts communs » mathématiques en interaction avec les « concepts scientifiques » portés par l'enseignant.

La subjectivité des élèves est assurée par la place que leurs expériences ont dans le travail en classe, vis-à-vis de la médiation de l'enseignant (témoin de la culture officielle). L'entraînement à la résolution de problèmes nouveaux à l'aide d'outils nouveaux se fait à la charnière entre certaines questions que l'enseignant pose (ou que les élèves se posent) dans le domaine d'expérience, et les outils que l'enseignant offre pour les résoudre, quand les élèves ont mis en évidence ce qui manque dans leur répertoire d'outils (voir Douek, 2003, comme élaboration récente et assez complète sur les domaines d'expérience et sur la didactique des domaines d'expérience ; voir aussi Douek, 1999, Bartolini, Boni, Ferri & Garuti, 1999 et Boero & Douek, 2008 pour des exemples et des développements ultérieurs sur la didactique des domaines d'expérience, ainsi que Dapueto & Parenti, 1999 pour un cadre théorique général)[2].

Bilan de 25 ans de travail sur le champ

Je travaille avec les enseignants selon la perspective décrite dans la partie précédente depuis environ 30 ans, avec une réflexion collective qui a sans cesse essayé de mettre en évidence les difficultés rencontrées et d'élaborer des solutions pour y faire face. Au cours de ces années, les outils pour encadrer et évaluer l'expérimentation des deux projets dans les classes sont devenus mieux adaptés (tant pour le progrès de la recherche en didactique des mathématiques au niveau international que pour l'amélioration progressive de notre préparation). Je pense donc être en mesure de dresser un bilan des points forts et des points faibles d'un

[2] Je signale au passage que les articles de Douek (1999) et Dapueto & Parenti (1999), publiés en anglais dans *Educational Studies in Mathematics,* sont présentés en français dans Du monde réel au monde mathématique (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2008).

enseignement-apprentissage des mathématiques conçu dans la perspective de la didactique des domaines d'expérience.

Points forts de notre approche

Les points forts de cette approche concernent surtout :

– Le passage entre domaines d'expérience de la réalité quotidienne et domaines d'expérience des mathématiques, et les rapports de synergie qui se développent entre les deux (monnaie et achats, calendrier ↔ arithmétique ; ombres du soleil ↔ géométrie ; argumentation déductive ↔ démonstration mathématique ; voir Boero, 1994)

– Le rôle subjectif et constructif de l'élève est important dans la classe : ses « concepts communs » sont sollicités (ses « concepts communs » et ses productions affectent le travail en classe). Cette subjectivité a pour pendant une forte guidance culturelle de l'enseignant, qui apporte dans la classe les « concepts scientifiques ». Il faudrait préciser à ce propos que « concepts communs » et « concepts scientifiques » ne sont pas des objets culturels divers, mais des états en évolution dans le processus de conceptualisation (voir Douek, 2003 ; Boero & Douek 2008). Par exemple, dans le cas de la monnaie et des achats l'élève apporte dans le travail en classe ses expériences partielles, ses stratégies (parfois inconscientes), ses représentations mentales (parfois contradictoires) : à six ans il sait déjà qu'une certaine quantité de pièces de monnaie et de billets est nécessaire pour l'achat d'une marchandise, et il sait que les différents pièces de monnaie et les différents billets ont des valeurs d'achat différentes. Souvent, il a déjà l'idée que la valeur d'achat d'une pièce de monnaie est fixe et ne dépend pas de la volonté ou du choix du client ou du marchand. Mais le fait que les rapports de valeur entre les différents billets et pièces sont, eux aussi, fixes, lui échappe souvent ; comme d'ailleurs le fait que certaines caractéristiques extérieures des monnaies (comme la dimension ou la couleur) n'ont pas un rapport étroit avec la valeur. La tâche de l'enseignant est alors celle de permettre graduellement à l'enfant de saisir les règles de fonctionnement du système monétaire et de modéliser ce système avec les outils et le symbolisme de l'arithmétique. Du point de vue conceptuel, le fait qu'une pièce de monnaie de 2 € vaut 20 pièces de 10 centimes ou 10 pièces de 20 centimes est déjà inscrit dans la pratique courante des achats et dans le niveau de maîtrise commune des concepts arithmétiques en jeu dans les achats; à 7 ans tous les enfants peuvent arriver par expérience directe à ce niveau de maîtrise (comme en témoignent les études sur les enfants des rues au Brésil). Ce qu'apporte l'enseignant est le caractère scientifique du système arithmétique qui permet d'écrire $2 = 20\times0{,}10 = 10\times0{,}20$ et de rendre explicites, générales et transférables (à travers les signes de l'arithmétique) les règles de fonctionnement du système monétaire.

Dans d'autres domaines d'expérience les choses sont beaucoup plus complexes : comme Boero et al (1995) l'ont mis en évidence, dans le cas du domaine d'expérience des ombres au soleil la conceptualisation commune de la relation entre la position du soleil dans le ciel et la longueur de l'ombre (sur le sol ou sur d'autres surfaces) est affectée par plusieurs facteurs qui dérivent des perceptions et des conceptions spontanées (ou sont suggérées par la culture de l'environnement). Par exemple, certains enfants considèrent l'ombre d'une personne comme une sorte de « double » d'elle-même, et beaucoup d'enfants (et d'adultes aussi !) pensent l'ombre comme une sorte de tapis qui nous accompagne quand on est au soleil. Dans ces conceptualisations communes on trouve beaucoup de bonnes relations, parfois conscientes : l'ombre dépend de la hauteur et de la largeur de l'objet (dans le sens où un objet plus haut ou plus large qu'un autre produit une ombre plus longue ou plus large que l'autre). La transition à une modélisation géométrique cohérente et systématique nécessite l'introduction de signes géométriques (segments), de la mesure des longueurs et des propriétés du parallélisme. Dans ce cas, le passage au niveau des concepts scientifiques comporte la valorisation et l'évolution de certaines connaissances spontanées et l'abandon, ou le dépassement, de certaines autres.

Mais alors (et ceci caractérise le niveau scientifique de la maîtrise des concepts) la cohérence du système de connaissances est nécessaire : une fois intériorisé le « signe géométrique de l'ombre » (le segment qui lie le soleil, le sommet de l'objet et l'extrémité libre de son ombre) et admis (par l'observation directe) le parallélisme des rayons du soleil, la cohérence impose que la longueur de l'ombre dépende de l'inclinaison de la surface sur laquelle l'ombre est portée.

Points faibles et difficultés

Ils concernent :

– la préparation culturelle et professionnelle nécessaire à l'enseignant pour bien jouer son rôle. « Préparation culturelle » signifie avant tout le dépassement d'une conception (assez répandue, même si elle est en général plus ou moins inconsciente) des mathématiques comme système d'objets et de relations dérivant d'un processus d'abstraction et d'axiomatisation. Il faut favoriser une conception des mathématiques comme culture enracinée dans la culture humaine, où les objets culturels ont du sens (en premier lieu) en fonction des activités qui les concernent. « Préparation professionnelle » signifie que l'enseignant doit être conscient que son rôle crucial est un rôle de médiation culturelle à partir des productions des élèves dans des situations choisies d'une façon convenable, et qu'il doit être capable de gérer ce rôle vis-à-vis de la variété des niveaux de préparation et des réponses des élèves ;

– les conflits multiples avec les traditions pédagogiques dans l'école et les attentes des parents d'élèves. Les occasions de conflit sont très nombreuses : du choix des manuels (les manuels les mieux adaptés à la didactique des domaines d'expérience sont souvent très peu populaires chez les enseignants !) au fait que les parents ne reconnaissent pas (sauf à la fin d'un long travail !) le contenu mathématique de certaines activités menées en classe, et surtout s'inquiètent de la distance entre leur propre expérience scolaire et l'expérience vécue par leurs enfants ;

– mais surtout, les ruptures que les média, l'école en général, les façons de vivre (surtout en milieu urbain) créent entre le présent et le passé, entre la vie et ses représentations homologuées, entre le sujet consommateur et le sujet producteur (dans tous les domaines !). Considérons la situation de deux pays comme la France et l'Italie. En particulier,

- En considérant la situation française, je pense que plus le système scolaire est rigide et fermé sur ses propres représentations de la vie, du monde et de la culture, plus il est difficile de développer dans l'école un dialogue entre l'expérience des élèves et les objectifs culturels, surtout ceux qui dépassent la culture de l'école. Par exemple, dans le cas de la modélisation mathématique du réel (physique ou économique) on peut dire qu'en France la culture de l'école ne donne pas d'espace à de véritables processus de modélisation (les « applications des mathématiques » étant autre chose – comme adaptation d'outils mathématiques à des situations stéréotypées et déjà largement mathématisées).
- En considérant la situation italienne, je pense que plus l'éducation perd sa mission de préparer le futur en réfléchissant sur le passé et se cantonne à l'entraînement à la consommation du présent, moins il est possible de demander aux enseignants et aux élèves de payer le prix nécessaire pour connecter l'expérience et la culture, c'est-à-dire l'étude et l'effort. Il devient difficile d'aller plus loin dans les domaines disciplinaires étudiés et de les questionner dans leur rapport avec le réel. En effet, surtout au niveau 11-16 ans (« école moyenne » et début de l'« école secondaire supérieure » en Italie) les enseignants rencontrent des difficultés croissantes quand ils cherchent à mettre en jeu des connaissances mathématiques pour traiter des questions « réelles » et à montrer la nécessité de développer ces connaissances, ou quand ils cherchent à donner une image évolutive des mathématiques, en relation avec les problèmes qu'elles ont aidé à résoudre.

Mathématiques enseignées et appui sur le réel : une articulation problématique (A. Kuzniak)

À l'occasion de cette table ronde, j'apporterai un éclairage nécessairement partiel mais aussi partial sur la question des relations entre mathématique et réalité. Mon interrogation s'est appuyée sur l'impression que la communauté française, qu'elle soit mathématique ou didactique, minorait le lien entre mathématiques et réalité, quand elle ne l'ignorait pas. Et, dans le même temps, l'idée de fonder l'enseignement des mathématiques sur une relation plus étroite avec le monde réel acquérait une importance et une visibilité de plus en plus grande à l'étranger. J'ai donc conçu cette contribution en partant de ce primat et en essayant de l'analyser à la lumière de certaines approches didactiques utilisées par l'équipe DIDIREM.

Enseignement des mathématiques et monde réel : un lien conflictuel et non évident

Dans la communauté internationale semble exister une convergence des programmes d'enseignement pour promouvoir une liaison étroite entre mathématiques et réalité, justifiée par le fait que les mathématiques doivent être utiles pour le citoyen. Ce glissement vers l'utilité, en soi problématique, pose la question de la nature exacte de l'utilité qui est visée. Des précisions sur ce sujet ont été apportées par l'OCDE, qui pilote l'étude PISA et pour qui :

> La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle joué par les mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi (OCDE, 2003, p. 32).

Cette vision des mathématiques orientées par l'activité citoyenne conduit à des interrogations et à une remise en question des mathématiques et de leur enseignement. C'est ainsi que, parallèlement à l'action de l'OCDE et à la même époque, Claude Thélot, haut fonctionnaire chargé d'organiser le débat national sur l'avenir de l'école, a apostrophé les représentants de l'APMEP en leur demandant de justifier l'utilité de leur discipline. Ce représentant officiel de la société leur a affirmé que « l'utilité des mathématiques pour la formation du futur citoyen n'allait pas de soi et que la démonstration [de cette utilité] restait à faire ». Et pour lui, la profession devait s'interroger sur la façon de « donner du sens aux apprentissages mathématiques ».

Pour tenter de donner ce sens et s'accorder à l'attente sociale ainsi exprimée, s'impose de plus en plus l'idée que l'enseignement des mathématiques doit être basé sur des situations issues du monde réel, ce qui permet ensuite d'appliquer plus facilement les mathématiques dans ce monde réel. Cette idée rejoint l'approche pédagogique dite bottom up qui souhaite faire construire les concepts par les élèves ; elle s'oppose à l'approche top down qui transmet a priori des notions abstraites aux élèves. Dans un cas, les connaissances et le savoir émergent et se développent par un travail constructif de l'élève tandis que dans le second, il s'agit davantage d'un travail d'appropriation. Je renvoie à notre travail récent (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2008) pour des illustrations sur cette question.

Des mathématiques transparentes

Si l'on veut réellement baser l'enseignement des mathématiques sur le monde réel, la recherche de situations d'enseignement initiales susceptibles d'avoir ensuite un impact social devient alors cruciale. Elle peut notamment passer par l'étude de la place des mathématiques dans le monde du travail ou alors dans les autres disciplines. De nombreuses études ont envisagé ce lien et je me bornerai simplement à signaler ici quelques travaux récents entrepris par des étudiants de notre équipe et qui illustrent, sur des points précis, la difficulté de trouver ces mathématiques encapsulées dans la réalité. Dans son travail sur la symétrie, Bulf (2008) s'est entretenue avec des tailleurs de pierre et des ébénistes. Elle montre que ces artisans utilisent de nombreuses routines pour réaliser leur travail et que, si les connaissances mathématiques sont porteuses d'autorité, elles apparaissent singulièrement vides de sens pour ces utilisateurs. C'est lorsqu'ils sont confrontés à une tâche non routinière, comme la division d'un angle ou la construction de figures non symétriques, que les mathématiques pourraient leur être utiles pour résoudre la question. Mais ils recourent alors à des procédures d'adaptation et d'approximation (même fausses) pour accomplir leur tâche. Ces résultats rejoignent ceux de Romo (thèse en cours, voir aussi Romo & Tabiou dans ce volume) qui a étudié les mathématiques dans la formation d'ingénieurs et ceux de Malonga (Malonga, 2008) qui a interrogé le lien entre mathématiques et physique dans le cas de l'enseignement des équations différentielles.

Les mathématiques que l'on rencontre dans le monde réel apparaissent « concrétisées », au sens de Simondon (1969), et amalgamées à l'objet qu'elles ont servi à créer. Les mathématiques sont ainsi totalement naturalisées et de fait transparentes.

Une entrée didactique à double tranchant : la notion d'obstacle

La réserve française par rapport aux approches de l'enseignement de type « bottom up » est souvent attribuée par nos collègues étrangers, à la forte influence de Bourbaki dans le monde des mathématiciens. Il est aussi possible de l'analyser en utilisant la notion d'obstacle épistémologique introduite par Bachelard (1938) qui énonce une opposition irréductible entre l'esprit scientifique et le réel, qualifié de nature. L'esprit scientifique se constitue contre l'opinion qui épouse les besoins du quotidien et sur ce point les affirmations de Bachelard sont nettes et percutantes.

> C'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Le réel n'est jamais « ce qu'on pourrait croire » mais il est toujours ce qu'on aurait pu penser. L'opinion pense mal ; elle ne pense pas : elle traduit des besoins en connaissances. En désignant des objets par leur utilité, elle s'interdit de les connaître. (Bachelard, 1938, p. 16)

Deux relations antagonistes au savoir voient ainsi le jour : connaissant contre la connaissance naturelle, la science ne semble pas pouvoir se baser sur cette connaissance qu'elle doit combattre. Cette opposition a conduit à deux types de présentation de la connaissance que Bachelard décrit à partir de la différence de fond entre les livres scientifiques du XVIIIe siècle et les livres modernes. Dans un livre d'enseignement scientifique moderne, c'est le livre qui commande alors que les livres anciens sont enracinés dans la vie quotidienne et les soucis naturels et communs commandent. Bachelard insiste notamment sur le parasitage qu'entraîne cette inscription dans la réalité mais on peut a contrario lui opposer une démarche comme celle d'Euler, dans ses lettres à une princesse allemande, et qui vise à ne pas couper la science du monde social qui la nourrit.

On doit à Brousseau (1986) l'importation de la notion d'obstacle épistémologique en didactique des mathématiques. Le regard sur la place et le rôle des obstacles épistémologiques change : il ne s'agit plus de les éviter mais au contraire de concevoir et de promouvoir un enseignement qui s'appuie sur ces obstacles pour les dépasser. Cette approche suppose la construction de situations didactiques spécifiques nouvelles dont la conception nécessite une étude fine de l'épistémologie des notions en jeu. Et de fait, dans l'idée de Brousseau, ce dépassement d'un obstacle « met en œuvre une complète restructuration des modèles d'action, de formulation et de validation » qui débouche sur la notion de situation adidactique. Ce type de situation d'enseignement va encore plus loin dans la déstabilisation des routines et des pratiques enseignantes et ceci, d'autant plus, que ces situations doivent être le moins dépendantes possible de l'enseignant et aussi de l'élève. Pour cela, il faut viser la création d'un environnement résistant et inducteur de savoir par sa seule interaction avec l'élève. C'est cet environnement que Brousseau appelle le « milieu ». Rarement disponible tel quel dans le monde réel, il faut donc le penser puis le réaliser en s'appuyant parfois sur un milieu matériel mais aussi sur des modèles déjà-là ou sur des jeux. Cette idée rejoint celle de « modèle étendu » introduite par les chercheurs hollandais de l'Institut Freudenthal, à peu près à la même époque (Voir Kuzniak, Parzysz et Vivier, 2008). Dans leur conception de l'apprentissage basé sur une approche dite « réalistique » de l'enseignement, des supports très variés peuvent servir de modèle : matériel, dessins, situations exemplaires, schémas, diagrammes et même symboles. Pour être adaptés à des situations d'apprentissage, les modèles supports doivent remplir deux conditions : ils doivent prendre naissance dans des contextes « réalistes » ou imaginables par les élèves et ils doivent aussi être suffisamment flexibles pour être adaptés à une progression vers des concepts plus abstraits. Dans le courant le plus constructiviste, ces modèles doivent aussi être susceptibles d'être réinventés par les élèves.

Du côté des professeurs : un obstacle de type didactique ?

En France, les situations précédentes ont cristallisé de nombreuses résistances voire un rejet net de la part de nombreux enseignants. Un certain nombre de raisons techniques, socio-économiques ou institutionnelles sont souvent avancées pour justifier ce renoncement mais je voudrais ici m'attarder sur les raisons qui me semblent à la fois être expliquées et éventuellement surmontables dans le cadre de la didactique des mathématiques. En effet, ce type d'approches suppose simultanément un changement de regard sur l'objet enseigné et un changement de la façon d'enseigner avec une remise en cause du rôle traditionnel du professeur. Ainsi se crée ce que l'on peut qualifier d'obstacle didactique.

Fondamentalement, la question est de savoir comment engager les professeurs dans un processus didactique nouveau quand leur épistémologie spontanée est en contradiction avec l'épistémologie à l'œuvre dans l'approche didactique qui leur est proposée. L'idée que j'avance, est que la conception spontanée des mathématiques des professeurs de mathématiques les pousse à défendre un modèle d'enseignement de type « top down ». De plus, ce modèle est conforme à celui qu'ils ont suivi en tant qu'étudiant en mathématiques *avancées* dans l'enseignement supérieur. Adopter le modèle « bottom up » qui s'appuie sur le réel, nécessite un changement de vision sur les mathématiques qui doivent être, sous un certain aspect, considérées comme une science empirique et aussi comme une discipline de service retrouvant ainsi le statut, maintenant oublié, des mathématiques mixtes.

La voie des paradigmes

Si l'on garde en perspective, l'idée de bâtir un enseignement des mathématiques davantage articulé sur la réalité, il devient alors nécessaire de surmonter l'obstacle didactique précédent en l'affrontant et sans le contourner. L'hypothèse que nous faisons, est que la sensibilisation aux enjeux épistémologiques peut permettre d'éviter certains malentendus et clarifier les choix didactiques. Pour cela, avec Houdement (Houdement & Kuzniak, 2000), nous avons introduit, dans le champ de la didactique de la géométrie, la notion de paradigme mais avec le sens bien précis que lui attribue Kuhn (1962). On sait, en effet, la grande polysémie et les emplois variés de ce terme dans les domaines les plus divers. Dans un sens global, le mot de paradigme désigne alors :

> L'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus

> généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet. (Houdement et Kuzniak, 2006, p. 178)

Dans le cas de la géométrie élémentaire, les différents paradigmes géométriques peuvent se distinguer par une organisation de la géométrie dépendant de sa relation à la réalité et de son horizon de travail. Reprenons ici, sans les détailler mais en insistant sur le lien avec le monde réel, les différents paradigmes géométriques que nous avons retenus dans le cadre de l'enseignement. Il s'agit de :

- La Géométrie I ou une géométrie des objets réels et fondée sur l'approximation.
- La Géométrie II ou une géométrie vue comme schéma de la réalité avec un système de preuve interne au modèle et une visée axiomatique.
- La Géométrie III ou une géométrie indépendante du monde réel avec une prééminence du modèle source et créateur de la réalité[3].

Du fait de leurs études initiales et de leur pratique des mathématiques à l'Université, les enseignants de mathématiques sont logiquement conduits à privilégier et à favoriser les paradigmes II ou III (et à vrai dire plutôt le niveau III) qui tous deux conçoivent la réalité comme subordonnée à la théorie. Les concepts de la géométrie III ne sont pas empiriques et l'organisation axiomatique de cette géométrie appelle « naturellement » un enseignement de type magistral où les notions se déduisent clairement de quelques principes initiaux. Nous retrouvons ici *l'illusion de transparence* qui laisse penser qu'une présentation claire et logique des faits suffit à convaincre.

Dépasser l'obstacle didactique par un point de vue éclairé sur les mathématiques élémentaires

Les différents niveaux de paradigmes peuvent se retrouver dans d'autres domaines des mathématiques comme celui des probabilités comme l'a montré Henry (1999), mais aussi dans le domaine numérique (Souchard, 2008) ou celui de l'analyse. Dans le cadre de la formation des enseignants, nous avons conçu avec Rauscher (Kuzniak & Rauscher, 2003 et 2004) des ingénieries de formation d'enseignants basées sur la notion de paradigme, avec l'idée que les diverses approches paradigmatiques ne sont pas hiérarchisées : chacune d'elles apporte un éclairage nouveau et permet de résoudre des problèmes de nature différente avec des méthodes adéquates. Il y a là une différence radicale avec la notion développée par Kuhn dans le cadre des révolutions scientifiques où un nouveau paradigme éliminait l'ancien. Il faut également ajouter que l'entrée dans certains paradigmes est plus facile que d'autres ce qui peut justifier les approches s'appuyant sur le monde réel. Cette entrée peut aussi nécessiter la connaissance préalable des autres paradigmes, cette considération explique, en partie, l'échec d'une entrée rapide dans la Géométrie III prônée à l'époque des mathématiques modernes.

En optant pour la prise de conscience de l'existence des paradigmes dans la formation des enseignants, nous choisissons une stratégie de dévoilement des enjeux épistémologiques destinée à lever des malentendus didactiques. Les études menées par notre équipe montrent la complexité du phénomène et la grande diversité des sensibilités des enseignants sur ce type d'enjeux.

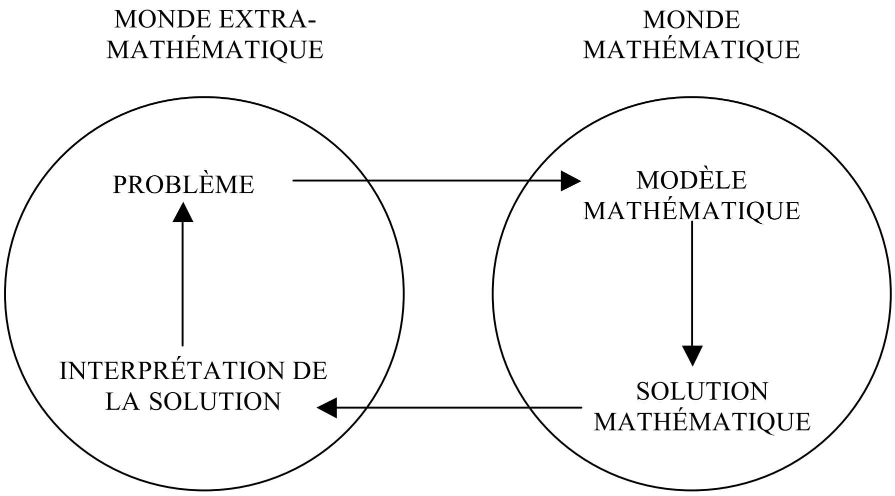
Pour convaincre les professeurs de mathématiques d'envisager d'autres formes d'enseignement qui s'intègrent davantage dans le champ social et qui privilégient des contenus plus empiriques, il est nécessaire d'étayer le paradigme délaissé par la tradition mathématique surtout lorsque le nouveau modèle privilégié par l'institution éducative s'éloigne des modèles classiques comme c'est le cas aujourd'hui avec l'accent mis sur un enseignement des mathématiques basé sur la réalité pour comprendre cette réalité. Dans le cas

[3] Il arrive que parfois cette réalité créée retrouve la réalité sensible.

de la géométrie, il faut développer des contenus mathématiques qui enrichissent la Géométrie I pour qu'elle n'apparaisse pas comme une géométrie au rabais. Il est notamment possible de développer la notion d'approximation (Houdement & Kuzniak 2002) ou un usage plus subtil des logiciels de géométrie dynamique (Dahan 2005). Il s'agit en quelque sorte de retrouver l'esprit de Klein (1903) lorsqu'il se penchait sur les mathématiques élémentaires avec un point de vue avancé. Cette approche se doit aussi d'intégrer toutes les connaissances didactiques modernes sur la manière d'apprendre des élèves et la façon d'enseigner des professeurs pour éviter l'illusion de transparence que j'évoquais plus haut et que toute la vie sociale et politique invalide constamment.

« Déterrer » les mathématiques de la réalité (R. Straesser)

Dans la recherche internationale sur l'usage des mathématiques, sur l'appui des mathématiques sur le réel dans l'enseignement des mathématiques, on parle beaucoup d'un cercle « problème - modèle mathématique - solution mathématique - interprétation de la solution en vue du problème ». Ce « cercle de modélisation » est souvent décrit de la façon suivante (voir schéma ci-dessous) :



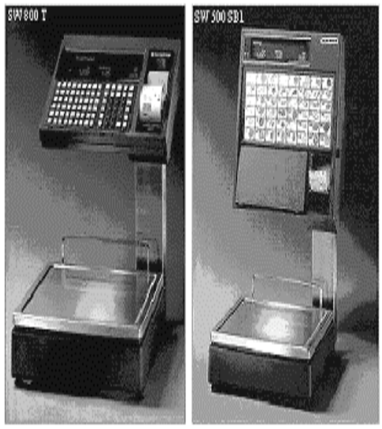
D'après Blum *et al.,* 2007, p. 4

On part d'un problème du monde extérieur aux mathématiques, on crée un modèle mathématique pour trouver une solution. Si on est arrivé à une solution mathématique, il faut l'interpréter comme une solution au problème initial, c'est-à-dire qu'il faut se poser la question de savoir si la solution mathématique est une solution au problème initial. Sinon, on réitère la procédure, on fait un effort pour changer de modèle mathématique, on s'efforce de trouver une solution mathématique différente, ou répondant au modèle modifié, pour pouvoir interpréter la solution dans le monde extra-mathématique, qui soit plus acceptable que la première solution (pour les détails voir par ex. Blum & Niss 1991, et, pour l'étude 14 de la CIEM (ICMI Study) : Blum *et al.* 2007).

Malheureusement, ces idées pour comprendre l'usage des mathématiques ne répondent pas à quelques questions importantes liées à l'appui des mathématiques sur le réel : Quels liens existent entre les mathématiques comme système de « savoirs disciplinaires mathématiques » et les mathématiques comme « activités culturelles » dans les divers milieux où on « fait » et/ou « utilise » les mathématiques ? L'intervention de Paolo Boero a répondu à cette question, au moins partiellement. Pour une deuxième question, il me faut décrire un phénomène un peu complexe : Beaucoup de politiciens, d'idéologues, « Monsieur tout le monde », parlent du fait qu'aujourd'hui on a besoin des mathématiques, qu'on les utilise toujours et partout. La consultation d'un programme scolaire de mathématiques suffit normalement pour illustrer cette opinion publique. Au contraire, dans les recherches effectuées sur les mathématiques dans la vie quotidienne ou professionnelle, on a des difficultés à identifier les mathématiques. De plus, les enquêtes menées auprès des citoyens « dans la rue », ainsi que dans le monde du travail, produisent un résultat assez décevant : dans la plupart des situations quotidiennes et professionnelles, on n'utilise guère que l'arithmétique élémentaire, « on ne voit pas les mathématiques ». Seule une recherche intensive montre que, en dehors de l'arithmétique élémentaire, les mathématiques plus spécialisées ne sont qu'utilisées localement et rarement. Pourquoi, aujourd'hui, ne voit-on pas les mathématiques dans la vie quotidienne?

Pour mieux comprendre ce phénomène, je reprends une étude de cas que j'ai déjà présentée il y a quelques années (*cf.* Straesser, 2007). Si on examine la question des procédures de pesée, on peut distinguer trois phases dans l'histoire récente :





Jadis (et encore quelquefois aujourd'hui sur les marchés), on utilisait la balance « Roberval », qui demande l'addition des poids pour peser n'importe quel objet. La balance du milieu (en allemand « Fächerkopfwaage »[4]) épargne ces additions, parce qu'elle indique directement le poids de l'objet – et peut même donner son prix si elle est utilisée de façon correcte. La balance électronique, à droite, ne donne pas seulement le poids, mais produit immédiatement un ticket autocollant qui indique aussi le prix de la marchandise. En plus, dans les dispositifs les plus sophistiqués, elle est reliée à un système de contrôle des marchandises, qui commande automatiquement la livraison de l'approvisionnement du magasin si nécessaire. Dans la phase finale, les mathématiques sont donc « cachées » par les instruments. Des algorithmes pour contrôler le flux des marchandises sont installés dans les machines, l'organisation du travail et les technologies de la communication, mais seuls « les experts », les professionnels de la programmation font des mathématiques.

Cette étude de cas présente au moins une occasion de voir comment s'opère la disparition des mathématiques de la vie quotidienne et professionnelle : les mathématiques sont cachées par les instruments et dans les niveaux élevés de la hiérarchie professionnelle. Les didacticiens des mathématiques doivent analyser de plus près la disparition des mathématiques de la vue des gens. Pour l'éducation (non seulement mathématique), on est confronté à une alternative : ou bien l'individu gravit l'échelle de la hiérarchie professionnelle en ignorant les mathématiques cachées derrière les artefacts et des organisations de plus en plus sophistiquées. Ou bien l'enseignement fait l'effort de « fabriquer » suffisamment de professionnels comprenant les idées cachées dans les instruments et pouvant même gérer les situations de dysfonctionnement des instruments, faire avancer les technologies et être des

[4] Littéralement « balance à tête en éventail ».

citoyens compétents. Dans ce cas, il faut en outre « déterrer », les mathématiques, ce qui implique pour l'enseignant d'avoir des connaissances, non seulement en mathématiques, mais aussi sur le(s) problème(s) « hors mathématiques ».

En guise de conclusion : quelques réflexions émanant de la discussion

Réactions des intervenants après les exposés

L'utilité n'est pas un critère pour s'appuyer sur la réalité ; le problème est plutôt d'identifier des champs d'expérience dans lesquels une véritable activité mathématique a sa place. C'est par exemple le cas pour les probabilités, avec les jeux. (P. Boero)

En Allemagne, dans l'enseignement professionnel, on ne forme pas seulement les gens à faire fonctionner une machine, mais aussi à être capables de la réparer en cas de panne, c'est-à-dire à gérer les situations imprévues. Et ceci implique des savoirs mathématiques. Comprendre la société moderne implique également des connaissances mathématiques, car les mathématiques constituent la technologie la plus fondamentale. (R. Straesser)

Mais quand on parle de la culture ambiante, il ne s'agit pas nécessairement des technologies. On peut sans doute trouver des domaines hors technologie qui pourraient être source d'activité mathématique, par exemple dans l'histoire. (B. Parzysz)

Il ne suffit pas de prôner l'utilité des mathématiques pour sauver leur enseignement ; si on s'oriente dans cette direction, on a déjà perdu le combat. (R. Straesser)

Réactions de la salle

Qu'est-ce que l'« utilité » des mathématiques ? Utilité pour quoi ? Pour la vie pratique ? Pour l'appréhension du monde ? À l'école élémentaire, il faut « déterrer » les mathématiques, même si c'est coûteux. Il nous faut donc réfléchir sur ce qu'il faut déterrer pour donner du sens aux mathématiques tout en minimisant le coût, surtout en temps passé. (M.-J. Perrin)

Il faut effectivement essayer de « déterrer » les mathématiques dans les instruments, mais encore faut-il parvenir à faire faire des mathématiques aux élèves, qui ont du mal à dépasser l'aspect « anecdotique » de la situation. (J.-B. Lagrange)

Si on « déterre » les mathématiques, il faut privilégier les grandeurs par rapport aux nombres. (R. Straesser)

L'introduction d'éléments d'informatique dans les programmes du lycée ne va-t-elle pas nous priver d'une source de problèmes et d'activités ? (R. Cori)

On voit de plus en plus les mathématiques intervenir au niveau du contrôle de l'activité, par exemple des éléments du contrôle de l'activité, ou des éléments de cinématique et de dynamique pour l'apprentissage de la conduite automobile. L'impact des campagnes de sécurité est biaisé si les gens à qui elles s'adressent n'ont pas les connaissances leur permettant de les entendre. C'est la même chose pour ce qui concerne la notion de risque. Il convient donc de donner à nos élèves les moyens de décoder ces informations. (J. Rogalski)

Quels outils, méthodes et concepts pouvons-nous apporter là-dessus ? (A. Kuzniak)

Les professionnels ont des ressources qui minimisent beaucoup le niveau de mathématiques qui intervient par rapport à ce que nous, nous utiliserions. Donc, concilier les exigences de la formation professionnelle et celles de la formation mathématique n'est pas forcément évident. Mais il ne faut pas priver nos élèves de potentialités. (C. Castela)

Beaucoup de connaissances mathématiques des élèves et des adultes ne sont pas disponibles, même si elles sont mobilisables, donc la question ne se pose pas en termes d'utilité. (P. Boero)

Les mathématiques ont 6000 ou 7000 ans. Les Éléments d'Euclide sont l'un des trois livres les plus réédités dans le monde. Il y a une donnée culturelle fondamentale dans les mathématiques. Il faut aussi penser « utilité culturelle ». Un bon nombre des situations du réel ne pourraient-elles pas être extraites du passé, où elles ont beaucoup motivé les progrès des mathématiques ? (M. Rogalski)

Paolo Boero
Dipartimento di Matematica dell'Università
boero@dima.unige.it

Alain Kuzniak
Université d'Orléans, Laboratoire de didactique André Revuz
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

Rudolf Sträßer (ou Straesser)
Institut für Didaktik der Mathematik, Justus-Liebig-Universität Giessen
rudolf.straesser@uni-giessen.de

Bernard Parzysz
Université d'Orléans, Laboratoire de didactique André Revuz
parzysz.bernard@wanadoo.fr

Références

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris : Vrin.

Bartolini Bussi M. G., Boni M., Ferri F., & Garuti R. (1999). Early approach to theoretical thinking: Gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 67-87.

Blomhoj M., & Jensen T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications,* 22(3), 123-139.

Blum W. *et al.* (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education - Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics,* 51(1/2), 149-171.

Blum W., Galbraith P. L., Henn, H.-W., & Niss M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education.* New York : Springer.

Blum W., & Niss M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to Other Subjects - State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics,* 22(1/2), 37-68.

Boero P. (1994). Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11, in L. Bazzini & H.G. Steiner (Eds.) *Proceedings of the Second Italian German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics* (pp. 45-62). Bielefeld: IDM.

Boero P., Dapueto C., Ferrari P., Ferrero E., Garuti R., Lemut E., Parenti L., Scali E. (1995). Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School. *Proceedings of PME-XIX,* vol. 1 (pp. 151-166). Recife.

Boero, P., Douek, N. (2008). La didactique des domaines d'expérience dans le cadre de la théorie des champs conceptuels et de la dialectique concepts scientifiques- concepts communs. *Carrefours de l'éducation,* 26, 103-119.

Brousseau G. (1986) Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7(2), 33-115.

Bulf C. (2008). *Effet des études de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège.* Thèse de doctorat de l'Université Paris-Diderot.

Dahan J.M. (2003). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques: un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires.* Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier Grenoble.

Dapueto C., Parenti L. (1999). Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematics knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 39, 1-21.

Douek N. (1999). Argumentation and Conceptualisation in Context. A Case Study on Sun Shadows in Primary School. *Educational Studies in Mathematics.* 39, 89-110.

Douek N. (2003). *Les rapports entre argumentation et conceptualisation dans la didactique des domaines d'expérience.* Thèse, Université R. Descartes, Paris V.

Hatano G., Wertsch J. V. (2001), Sociocultural approaches to Cognitive Development: The Constitution of Culture in Mind. *Human Development,* 44, 77-83.

Henry M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM* 36, 15-34.

Houdement C. & Kuzniak A. (2000). Formations des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20(1), 89-116.

Houdement C. & Kuzniak A. (2002), Approximations géométriques. *L'ouvert,* 105, 19-28.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 11, 175-216

Klein F. (1903), *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus.* (Troisième édition 1928). Berlin: Springer.

Kuhn T.S. (1962). *The structure of scientific revolutions,* (Second edition 1970). Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A., Parzysz, B., & Vivier, L. (éd.) (2008). Du monde réel au monde mathématique. Un parcours bibliographique. *Cahier Didirem n°58*. Paris : IREM Paris-Diderot.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2003) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du colloque sur la formation des maîtres.* La Roche sur Yon. Université de Nantes pp 271-290.

Kuzniak, A., & Rauscher J.C. (2004). Formation des PE1 et anamnèse géométrique *Actes du colloque sur la formation des maîtres*. Avignon Université d'Avignon. pp 231-248.

Malonga, F. (2008). *Interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire en France. Cas des équations différentielles du premier ordre.* Thèse de doctorat (dir. B. Parzysz & D. Beaufils). Université Paris-Diderot.

Malonga F., Beaufils D. & Parzysz B. (2008). Les équations différentielles du premier ordre en physique en terminale S. Le lien avec les mathématiques en question. *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie,* 904, 647-666.

OCDE (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, sciences et résolution de problèmes.* Site Web de l'OCDE.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Simondon, G. (1969). *Du mode d'existence des objets techniques.* Paris : Aubier.

Souchard L. (2008). Les espaces de Travail Calculatoires (Communication personnelle).

Straesser, R. (2007). Everyday Instruments: On the Use of Mathematics. In Blum, W., Galbraith P. & Henn H.W. (eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* 171-178. Heidelberg - New York: Springer.

Vygotsky, L. S. (1985). *Pensée et langage.* Paris : Éditions Sociales.

Thème : Étude des pratiques des enseignants de mathématiques

Présentation du thème

Quelle place pour les acteurs de l'enseignement des mathématiques dans nos recherches ? C'est au travers de la présentation critique de deux livres collectifs, issus des travaux de chercheurs de l'équipe sur les pratiques des enseignants, et d'un débat que nous aborderons le thème de l'étude des pratiques des enseignants.
Quelles mathématiques font finalement les élèves en classe ? Les recherches présentées dans le premier livre se fondent sur une étude croisée des exercices proposés par l'enseignant et de la nature du travail qu'il organise pour ses élèves, dans des situations variées, y compris pour des séances dites « sur machine ».
Premier livre : « La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants », Fabrice Vandebrouck éditeur, Octarès, Toulouse.
Le deuxième livre s'attaque à l'enseignement en classes difficiles (au niveau primaire) et à toutes les contradictions inévitablement rencontrées : par exemple le prix à payer pour avoir des élèves « sages » doit-il passer nécessairement par une réduction de ce qu'on leur demande ?
Second livre : « Dur, Dur d'enseigner en ZEP », Marie Lise Peltier éditrice, la pensée sauvage, Grenoble.
La matinée se terminera par une discussion plus générale sur le thème, introduite par deux interventions.

Contributions

« La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants » (F. Vandebrouck éd. Octarès, Toulouse) 315
Cécile Ouvrier-Buffet

« Dur, Dur d'enseigner en ZEP » (M.L. Peltier éd. La Pensée Sauvage, Grenoble) 317
Lalina Coulange

Échos des débats sur le thème de l'étude des pratiques enseignantes 323
Notes reprises d'après l'enregistrement par Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Présentation de l'ouvrage

« La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants »

Cécile Ouvrier-Buffet

L'ouvrage

Il s'agit d'ouvrage collectif dirigé par Fabrice Vandebrouck, paru cet été aux éditions Octarès, dans la collection « Formation » dirigée par Pierre Rabardel et Pierre Pastré. Les auteurs sont membres de l'équipe DIDIREM : Aline Robert, Janine Rogalski, Éric Roditi, Monique Pariès, Nathalie Sayac, Julie Horoks, Claire Cazes, Fabrice Vandebrouck, Maha Blanchard, Mariam Haspekian, Christophe Hache, Brigitte Grugeon.

Le livre pose des questionnements théoriques et ouvre un champ de questions sur la formation des enseignants. L'activité des élèves et les pratiques des enseignants concernent l'enseignement secondaire et supérieur. Une place particulière est accordée à l'utilisation des nouvelles technologies en classe. Les analyses sont conduites sous l'éclairage des théories de l'activité et du développement.

Le contenu

Le livre est structuré en 6 parties, de tailles inégales, chacune composée de trois à quatre chapitres. Les parties peuvent se lire indépendamment les unes des autres, ce qui est un avantage dans ce genre d'ouvrage.

Ces 6 parties, structurées autour d'articles de différents auteurs, apportent des éléments théoriques ainsi que des résultats qualitatifs et quantitatifs.

La première partie s'attaque à l'explicitation des cadres théoriques utilisés, dégageant ainsi une problématique et une méthodologie communes : ce sont les balises de référence pour l'ouvrage. Il s'agit de la théorie de l'activité et du développement pour l'analyse de l'activité des élèves et de la double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques des enseignants. À souligner que les annexes rédigées par J. Rogalski, en fin d'ouvrage, auraient mérité de figurer plus tôt.

Viennent ensuite des résultats sur les pratiques des enseignants en classes « ordinaires » (issus d'études qualitatives et d'études quantitatives). Une stabilité de pratiques est mise en évidence, autour de l'analyse de cinq composantes où les composantes personnelle, institutionnelle, sociale apparaissent (pré)déterminantes. La composante personnelle fait l'objet d'une investigation plus particulière : les auteurs proposent ainsi 4 types de professeurs. Trois niveaux sont également dégagés pour tenter de circonscrire le travail réel des enseignants : un niveau micro du côté des automatismes, un niveau local du côté de la classe au quotidien et un niveau macro du côté des projets et préparations. Rien que cela montre la difficulté de la tâche et l'étendue du travail à réaliser. L'une des difficultés réside dans l'articulation de temporalités différentes, et donc dans la nécessité de concevoir des outils d'analyse et de développer une méthodologie appropriée.

Le cas des manuels dans l'enseignement est également abordé, dans une partie moins développée relativement à l'ensemble. Cette analyse d'une ressource à la disposition des enseignants se fait via le point de vue d'un chercheur impliqué dans un processus d'élaboration de manuels et le portrait de quelques manuels.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 315-316.

Les nouvelles technologies (nous renvoyons le lecteur à la table ronde du thème TICE) font elles aussi l'objet d'une étude spécifique. Il est vrai qu'aujourd'hui, les ressources à la disposition des enseignants se multiplient. Par rapport à ce phénomène, la prise en compte de l'enseignant est encore insuffisante dans la recherche en didactique des mathématiques. L'ouvrage apporte ici des éclairages substantiels quant à l'activité des élèves sur les bases d'exercices en lignes (dans le secondaire et le supérieur), mais aussi quant à l'utilisation d'outils informatiques en classe (géométrie dynamique, tableur, base d'exercices en ligne) par des enseignants. On soulignera l'intérêt de l'étude portant sur le tableur, étude réalisée sur un temps long (deux années) où régularités, genèses instrumentales, genèses de pratiques, mais aussi composantes personnelle, institutionnelle et sociale, et contraintes instrumentales sont analysées en profondeur. La question des doubles genèses (personnelle et professionnelle) restant à creuser.

Ce livre ouvre par ailleurs un réel champ de questionnements sur la formation des pratiques des enseignants, celle-ci étant illustrée par un exemple en formation initiale (PLC de mathématiques).

Sur la formation plus particulièrement, la sixième partie apporte notamment des éclairages sur l'évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques en formation à l'IUFM, où l'on peut observer certains impacts de la formation sur ce stagiaire, en particulier les bénéfices des analyses a priori et du travail d'anticipation. Tout cela va dans le sens de la mise en évidence d'une stabilité en germe dans des pratiques transitoires. Cependant, la stabilité des pratiques reste, elle aussi, difficile à étudier, de réelles perspectives se dessinent, des hypothèses seraient à tester …

Questions aux auteurs

Les questions pourraient revêtir de très nombreux aspects.

- Il n'existe pas beaucoup de travaux de recherche sur la formation du second degré. Et aujourd'hui ?

- Le cadre théorique est bien posé dans l'ouvrage. Et maintenant, comment peut-on organiser l'analyse ? À quel niveau de granularité doit-on (ou peut-on) se placer, avec quels outils, pour explorer quelles dimensions ?

- Quels sont les invariants quand il est question de stabilité de pratiques, de stabilité « en germe » ? Demeurent-ils ?

- Comment former ? Avec quoi ? Quelles pratiques installe-t-on en formation, avec quelle pérennité ? Et, surtout en formation, hors classe, quelle réflexivité sur l'action est-il possible de conduire ?

- Et enfin, un dernier point, qui concerne nombre d'entre nous : la difficulté de diffuser les résultats de la didactique dans la formation. Quelle place de la didactique dans la formation ?

Cécile Ouvrier-Buffet
Université Paris 12, Laboratoire de didactique André Revuz
cecile.ouvrier-buffet@creteil.iufm.fr

Notes de lecture
« Dur pour les élèves, dur pour les enseignants Dur d'enseigner en ZEP[1]… »

Lalina Coulange

Ces « notes » de lecture autour de l'ouvrage *Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP* conservent un caractère très personnel.

D'une part, elles s'orientent selon mes axes de recherche actuels, liés à l'étude des pratiques d'enseignants en collège ZEP et des processus de différenciations dans les apprentissages scolaires d'élèves (Coulange, 2007).

D'autre part, ces notes de lecture suivent le prisme de ma propre culture théorique en didactique des mathématiques. Ainsi, je fais référence aux différents niveaux de situations (didactique, de résolution de problème, d'action ou objective) distingués dans la Théorie des Situations (Brousseau, 1990 ; Margolinas, 2004 ; Castela, 2007). J'utilise également l'idée d'aides procédurales et constructives de l'enseignant qui se dégage de travaux récents dans le cadre de la Double Approche (Pariès, 2007 ; Pariès, Robert et Rogalski, 2008). Enfin, je m'appuie sur la notion d'étayage didactique mise en avant par Mercier (2007), à l'occasion d'une conférence de consensus sur l'enseignement en ZEP.

Je précise que ces notes sont dès lors partielles et hétérogènes et ne correspondent pas à un exposé résumé de l'ouvrage concerné.

Un point spécifique des pratiques enseignantes en ZEP : les aides

Un constat : des aides enseignantes récurrentes

À plusieurs reprises, les auteurs de l'ouvrage mettent en avant une caractéristique récurrente des pratiques enseignantes en ZEP, qui pourrait s'avérer une spécificité de ces pratiques : les professeurs des écoles qu'ils soient débutants ou plus expérimentés donnent de nombreuses aides aux élèves sur les tâches qu'ils leur donnent à accomplir.

Ainsi, dès les premières observations en contexte ZEP-REP (Partie 2, chapitre 1 : difficultés pour observer les pratiques en REP, Méthodologie adoptée et premiers résultats), M-L Peltier met en avant :

– l'individualisation poussée de l'enseignement :

> Les professeurs d'école observés « interviennent de manière très individualisée et personnalisée auprès des élèves. Ils expliquent à certains ce qu'il faut faire, montrent à d'autres comment faire. » (op. cité, p. 57)

– un glissement récurrent dans les consignes :

> « Lorsque les élèves manifestent une certaine difficulté à comprendre ce que le professeur attend d'eux, celui-ci prend souvent sur le vif, la décision de simplifier la question. » (ibid. p. 60)

Lorsqu'ils présentent leurs résultats (Partie 2, Chapitre 3 : des résultats relatifs aux pratiques de professeurs débutants ou confirmés enseignant les mathématiques en ZEP-REP), les

[1] Rappelons que ZEP signifie Zone d'Éducation Prioritaire, et REP, Réseau d'Éducation Prioritaire. Sont ainsi désignés des écoles regroupant des élèves issus majoritairement de milieux populaires, auxquelles on accorde des moyens spécifiques pour prévenir ou répondre aux difficultés scolaires potentielles.

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 317-321.

auteurs affirment qu'une *logique de réussite immédiate* prend le pas sur une *logique d'apprentissage*. Cette *contradiction* éclairerait la présence des aides apportées en permanence par les enseignants, que ce soit après coup (alors que les élèves sont engagés dans le travail demandé) ou de manière préalable (au moment de passer la consigne), pour accompagner l'accomplissement des tâches par les élèves. Ces aides prennent parfois une forme précisée par les auteurs : relevant de l'étayage.

Ainsi, le *i-genre*[2] *1* qui correspond à une partie des pratiques enseignantes observées en ZEP-REP, se caractérise par une forme *d'étayage permanent* :

> « (…) L'enseignante passe constamment derrière chacun (…). Pour les premiers, l'aide porte davantage sur la reprise de l'énoncé et sur les pistes à suivre en termes de « comment faire », puis au fur et à mesure que le temps passe, sur la correction de ce que les élèves ont écrit sur leur fiche. » (ibid., p. 87)

De même, le *i-genre 2* qui recouvre la majorité des pratiques d'enseignement, semble marqué par un guidage resserré, ou un découpage des tâches données à accomplir.[3]

> « Concernant la composante cognitive, nous observons que le travail des élèves est très guidé, en mathématiques (…). Lors des séances observées, sont rarement confrontés à un problème global : il s'agit de tâches élémentaires bien découpées que le professeur valide individuellement les unes par rapport aux autres. » (ibid. p. 92)

De l'inefficacité de ces aides enseignantes par rapport aux apprentissages des élèves ?

Ma relecture de ces différents passages de l'ouvrage, qui soulignent la présence récurrente de ces *aides enseignantes* m'invite à penser que ces aides apparaissent souvent comme inefficaces, voire comme des obstacles aux apprentissages mathématiques visés.

En effet, ces aides empiètent de façon significative sur la situation d'action, qui dès lors ne peut plus jouer le rôle de milieu pour la situation de résolution de problème. Les situations d'enseignement auraient alors de fortes chances de perdre leur potentiel d'apprentissage et de devenir « nildidactiques » au sens de Margolinas (2004).

Ceci provient du fait que ces aides sont la plupart du temps procédurales (Pariès, 2007 ; Pariès et *al*., 2008) : c'est-à-dire qu'elles modifient les activités mathématiques des élèves initialement prévue (souvent en proposant des découpages en sous-tâches explicites) en réduisant la difficulté, mais alors : *quid* des apprentissages ?

Je rejoins dès lors les auteurs de l'ouvrage qui qualifient ce type d'aides enseignantes d'étayage. Ce qui permet d'ailleurs de rapprocher leurs travaux de ceux de Mercier (2007) qui met en avant le paradoxe de l'étayage didactique :

> « L'étayage didactique est paradoxal. Une tâche à enjeu didactique n'est pas donnée pour être réalisée mais pour que ses difficultés désignent à l'élève ce qu'il ignore et ce que le professeur veut lui enseigner. (…) Alors, si elle produit une demande d'étayage, cette demande va obtenir

---

[2]Les i-genres de pratiques qui « rendent compte de la mission d'instruction du professeur d'école » correspondent des modes de fonctionnement ou des pratiques d'enseignement stables, qui apparaissent comme des réponses aux contraintes ou aux conditions d'exercice du métier rencontrées (op. cité, p. 75).

[3] Ce guidage ou ce découpage des tâches données à accomplir correspond bien à une forme d'étayage. On peut se référer à Soury-Lavergne qui précise cette notion d'étayage (en s'appuyant sur les travaux de Bruner 1988 et sur la théorie des situations). Elle montre d'ailleurs comment la réduction progressive de l'incertitude liée à un processus d'étayage peut conduire à des *effets Topaze* : « L'intervention de l'enseignant dans la situation de l'élève est modélisée d'une part par l'étayage lorsqu'elle ne prive pas la situation de sens en ménageant une part d'incertitude et d'autre part par l'effet Topaze lorsque justement la situation a perdu toute signification mathématique, l'incertitude de l'élève ayant disparu. » (Soury-Lavergne, 2003, p. 38)

> une réponse décalée : la déclaration d'un savoir explicite déjà enseigné supposé permettre de résoudre le problème qu'elle pose. » (Mercier, 2007)

La question qui peut alors se poser est celle de l'existence ou de la possibilité d'aides enseignantes efficaces pour les apprentissages des élèves, au sein de classes d'écoles ZEP.

Des aides enseignantes efficaces par rapport aux apprentissages des élèves ?

Il me semble qu'on trouve des éléments de réponse à cette question au travers de la description du *i-genre 3* qui caractérise les pratiques d'un enseignant débutant, étudiées par Butlen et Pezard (Partie 2 : quelques exemples de routines et de gestes professionnels efficaces).

Les aides délivrées par ce professeur d'école à ses élèves sont décrites de la façon suivante. Il s'agit :

– soit d'un étayage limité aux techniques

> « Un nombre important des interventions du professeur porte sur des aides techniques, des demandes d'explicitations, ou des relances d'activité (…). L'étayage porte essentiellement sur la maîtrise de l'usage des instruments. » (op. cité, p. 111).

– soit d'un *étayage très consistant des formulations d'élèves* lors de phase en commun qui sert de support à l'institutionnalisation (ibid., p. 109).

En d'autres termes, les aides enseignantes observées efficaces du point de vue des apprentissages interviendraient pour une part au plus bas niveau d'une situation didactique : relative au milieu matériel ou à la situation dite objective. Elles n'empiéteraient pas sur les composantes de la situation d'action indispensables à la situation de résolution de problèmes, et à l'émergence des apprentissages visés. Ces aides laisseraient entière la problématicité de la tâche mathématique donnée à accomplir.

D'autre part, le professeur pourrait délivrer un autre type d'aides, relatives à la « reformulation » des actions d'élèves en situation didactique. Ces aides enseignantes seraient d'ailleurs nécessaires pour aboutir à une institutionnalisation qui prend explicitement appui sur la situation de résolution de problèmes.

Ce deuxième type d'aides enseignantes à la formulation me semblent pouvoir être qualifiées de constructives au sens de Pariès et *al*. (2008) :

> « D'autres aides dites « constructives » ajoutent quelque chose entre le travail de l'élève et la construction (espérée) de la connaissance qui pourrait en résulter (l'Activité recherchée) (…) Une aide constructive serait ainsi un intermédiaire explicite apporté par l'enseignant, directement ou sous-forme de question, entre un travail mathématique des élèves collectif ou non et l'activité qui peut en résulter. »

Questions posées aux auteurs : les aides enseignantes en ZEP ?

Ma relecture d'une partie du live *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP*, à la lueur de ce qui pourrait être un nouvel arrière plan théorique autour de la notion d'aides enseignantes m'a dès lors incitée à poser aux auteurs les questions suivantes (sous-jacentes dans les paragraphes ci-dessus, et auxquelles leur ouvrage apporte parfois des premiers éléments de réponse) :

– Quelle(s) forme(s) d'aides enseignantes ont-ils observé et étudié dans les pratiques d'enseignement des professeurs d'école en ZEP-REP ?
– En quoi, ces aides gênent-elles ou favorisent-elles les apprentissages mathématiques visés ?
– Dans le dispositif d'accompagnement de professeurs d'école débutant en ZEP évoqué à la fin de l'ouvrage (et mis en œuvre par certains d'entre eux depuis plusieurs années), cet aspect des aides enseignantes est-il pris en compte ? Si oui comment : quelle stratégie de

formation peut être adoptée pour prendre explicitement en considération le rôle des aides enseignantes ?

– Quelle est l'origine de ces aides enseignantes : quelle part liée aux pratiques des enseignants (ou aux représentations qui les accompagnent) ou aux pratiques scolaires d'élèves en contexte ZEP-REP ?

Cette dernière question renvoie à des interrogations plus générales sur la co-construction de la difficulté scolaire en contexte ZEP, que je vais maintenant très brièvement évoquer.

Une co-construction des difficultés scolaires en ZEP-REP

À de nombreuses reprises, sans qu'elle soit directement évoquée, la question de la co-construction de la difficulté scolaire est presque toujours sous-jacente au propos des auteurs de l'ouvrage.

En effet, ils évoquent les difficultés d'un public d'élèves rencontré en ZEP : liées à l'engagement dans les tâches, à la décontextualisation ou au processus d'institutionnalisation, qui semblent faire écho aux pratiques enseignantes observées (qui tentent de répondre à ces difficultés, parfois au détriment des apprentissages visés). Les auteurs mettent par ailleurs en avant des pratiques enseignantes « majoritaires » (qu'ils modélisent par les *i-genres*), qui semblent susceptibles de renforcer ces difficultés, notamment au travers des aides enseignantes susceptibles d'empêcher les apprentissages visés.

Ce qui va dans le sens d'une co-construction des difficultés scolaires des élèves de milieux populaires, constatée et étudiée par ailleurs, en sociologie de l'éducation : je pense par exemple aux travaux de S. Bonnéry (2007).

Mais je n'ai pu m'empêcher de me demander au fil de ma relecture du livre : où commencent ces cercles vicieux qui semblent s'installer entre élèves et enseignants en contexte ZEP : quel peut notamment être le rôle joué par les représentations des enseignants sur l'enseignement en ZEP d'une part, ou par les représentations d'élèves sur le travail scolaire d'autre part ?

Et comment construire des spirales permettant de sortir de ces cercles vicieux ? Notamment, quels contenus apporter ou quel accompagnement mettre en place dans le cadre d'une formation de professeurs d'écoles qui enseignent les mathématiques en ZEP ?

Je pense que la poursuite des travaux de certains des auteurs sur la formation d'enseignants débutants vise précisément à apporter des éléments de réponse à ces questions.

Je tiens à remercier les auteurs de « Dur pour les élèves, dur pour les enseigner, dur d'enseigner en ZEP », pour le plaisir que j'ai eu à me replonger dans la relecture de leur ouvrage à cette occasion.

Lalina Coulange
IUFM d'Aquitaine
lalina.coulange@aquitaine.iufm.fr

Références

Bonnéry S. (2007). *Comprendre l'échec scolaire. Élèves en difficultés et dispositifs pédagogiques*. La Dispute.

Brousseau G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 9(2/3), 309-336.

Castela C. (2007). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. *Perspectives en* *didactique des mathématiques, cours de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques, 2005,* pp. 89-114.

Coulange L. (2007). Approche didactique de la différenciation dans les apprentissages des mathématiques, Étude de cas : l'enseignement des pourcentages dans une classe de CM2 en ZEP. *Actes CD-ROM du colloque international organisé par les IUFM du pôle Nord Est, Les effets des pratiques des enseignants sur les apprentissages des élèves, 14-15 mars 2007 à Besançon*.

Coulange L. (2007). Étude des pratiques d'enseignants néo-titulaires dans des collèges ZEP*, Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 215-243.

Margolinas C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur, Essai de développement de la théorie des situations didactiques. Note de synthèse,* Habilitation à Diriger des recherches, Sciences de l'Éducation, Université de Provence.

Mercier A. (2007). Ce que la didactique peut dire sur l'enseignement et l'apprentissage dans les établissements et les classes de Discrimination Positive, Conférence de consensus organisée par l'INRP-centre Alain Savary-, l'IUFM de Créteil et l'IUFM de Versailles, le mercredi 24 janvier 2007 à Paris.

Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008). Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants expérimentés du second degré. *Educational Studies of mathematics, 68,* 55-80.

Pariès M. & Robert A. (2008). Des pratiques des enseignants aux activités des élèves, insertion dans les analyses de la prise en compte d'actions langagières de l'enseignant – mise en regard de deux séances portant sur un exercice de géométrie analogue en troisième, *contribution pour un symposium au colloque international efficacité et équité en éducation, 19-21 novembre 2008 à Rennes*.

Soury-Lavergne S. (2003). De l'étayage à l'effet Topaze, regard sur la négociation dans la relation didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/1, 9-40.

Échos des débats sur le thème de l'étude des pratiques enseignantes

Notes reprises d'après l'enregistrement par Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Préambule

Une première phase de débat avec les auteurs des livres s'est déroulée après les présentations respectives de Gérard Vergnaud et René Cori qui ne figurent pas dans les actes, mais dont nous reprenons ici quelques questions qui ont suscité des interventions dans les discussions qui ont suivi et dans le débat général.

L'intervention de Gérard Vergnaud (G.V. dans la suite) s'appuie sur la préface qu'il a écrite pour le premier ouvrage (« La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants »). Il propose entre autres au débat les points suivants :

- La façon dont sont prises en compte les interactions professeur-élèves dans la double approche : il remarque que ni Piaget ni Vygotski n'abordent la question de l'articulation du contenu et de l'activité et qu'il y a un effort dans ce sens dans le livre ; il demande pourquoi c'est le terme « activités » qui est retenu pour les élèves et le terme « pratiques » pour les enseignants.
- L'activité en situation lui paraît une dimension essentielle et il aimerait appréhender mieux ce que fait l'enseignant pour gérer ses marges de manœuvre, comment il complète les situations, comment il traite les erreurs, comment il donne un statut différent à certaines notions, par exemple les notions FUG. Il aimerait par exemple plus d'études de dévolution de situations particulières.
- La connaissance est adaptation pour le professeur aussi : comment apprend-il en situation d'enseignement ?

Sur le premier point, Aline Robert (A.R. dans la suite) répond que, dans le cas des enseignants, il y a un élargissement à des composantes du métier et à des composantes sociales qui n'existent pas pour les élèves. Janine Rogalski (J.R. dans la suite) ajoute que, dans le cas d'une profession, il est difficile d'articuler les niveaux activité, action, opération.

A.R. revient ensuite sur la distinction entre aides procédurales et aides constructives et indique que c'est aussi une source de développement ultérieur pour le professeur. J.R. souligne que le terme « pratiques » permet de prendre en compte la temporalité du professeur sur un long terme : il peut se dire « ça n'a pas marché, l'an prochain je ne referai pas cela ».

Fabrice Vandebrouck remarque que la dimension « activité » est plus présente dans les études sur l'utilisation des technologies numériques.

René Cori demande à qui s'adresse le livre « Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP ». Il y retrouve certaines des préoccupations du réseau des IREM. Ses principales questions portent sur :

- La place des mathématiques dans l'ouvrage et dans les analyses ;
- La nécessité des raffinements théoriques comme celle des catégories concernant les e-genres et i-genres ;
- Il semble se dégager une idée du professeur idéal jeune et près de la formation, que peut-on dire des autres ? Peut-on assigner une seule catégorie à un enseignant ?
- Quelle est la pertinence de la dualité ZEP / non ZEP ?

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 323-330.

- Ne risque-t-on pas de décourager les professeurs innovants et actifs dans les ZEP ?
- Peut-on améliorer la communication des travaux de didactique ?

Introduction de M. Artigue

Michèle Artigue (M.A. dans la suite) précise qu'elle n'est pas spécialiste des questions sur les pratiques enseignantes ni de la double approche, ni de la théorie de l'activité. Par rapport aux livres, elle se situe donc plus dans une position de chercheur ou de praticien qui a envie de pouvoir en tirer parti, que dans la position d'une personne qui va contribuer à l'avancée de la recherche dans le domaine. Pour élargir le débat, elle a des questions à poser en tant que chercheur, en tant que praticien et en tant que membre d'une communauté plus large.

Elle remarque qu'on a eu ce matin la présentation de livres avec un cadrage théorique très clair et qu'on a vu avec Lalina Coulange (L.C. dans la suite) se profiler l'interaction entre ce qui était apporté par cette approche et ce qui pouvait être abordé par d'autres approches théoriques, en particulier, la théorie des situations, familière pour les didacticiens français ; la question se pose également avec la théorie anthropologique, bien présente aussi dans l'étude des pratiques enseignantes. Si on élargit le débat, il semble qu'il faut se demander ce qu'apporte chacune de ces approches théoriques à l'étude des pratiques enseignantes : est-ce que ces apports sont complémentaires ? Cohérents les uns avec les autres ? Est-ce qu'on peut à partir de là construire une vision cohérente des moyens de piloter l'action didactique ?

Sa deuxième question reprend ce que disait R. Cori : Pour qui est le livre ? Pourquoi fait-on cette recherche ? Si on s'est lancé en didactique dans une étude fine des pratiques enseignantes, c'est parce qu'on ressentait un manque qui avait un impact sur les relations entre théorie et pratique et sur la façon dont la didactique pouvait guider ou orienter l'action didactique même si, comme le disait Aline Robert le premier jour, elle ne se veut pas du tout normative.

On fait cette recherche d'abord pour comprendre mais au-delà de la compréhension, que nous apporte-t-elle pour penser l'action des enseignants et pour la formation des enseignants. La formation des enseignants sera abordée dans la table ronde de l'après-midi mais M.A. souligne l'importance de la question à un moment où la formation professionnelle des enseignants est en débat.

En faisant allusion à l'intervention de Kenneth Ruthven dans la table ronde sur les TICE, elle rappelle que la recherche a différents rôles. Il y a des choses confortées par la recherche et auxquelles elle donne un autre statut, mais il y a aussi un potentiel de la recherche pour dénoncer certaines visions communes erronées et peut-être aussi amener à repenser la question de l'interaction de l'enseignant avec les élèves, la question de la vision du rôle du professeur. Que pourrait-on dire aujourd'hui de profond, à communiquer dans des termes accessibles à tout le monde, sur ces questions où la recherche a montré que des idées communes sur la vision du rôle de l'enseignant sur l'interaction avec les élèves (portées peut-être par une certaine vulgarisation didactique) étaient des idées qu'il fallait remettre en question pour avancer dans le fonctionnement du système éducatif.

Introduction de M.J. Perrin-Glorian

Marie-Jeanne Perrin (M.J.P. dans la suite) indique que ses questions recoupent ce qui a été soulevé dans les interventions de M.A., G.V. et L.C. mais qu'elle va les poser de façon un peu différente.

En se plaçant du point de vue du chercheur, elle se pose la question de l'articulation de la double approche avec d'autres cadres théoriques utilisés en France pour l'étude des pratiques des enseignants. Dans la double approche, on met la focale sur les individus par la recherche de régularités et de variabilités, ce qui donne une méthode un peu descriptive conduisant à faire des catégories et c'est ce qui gêne un peu M.J.P. En faisant cela, on recherche une logique du point de vue des individus mais en tenant compte des contraintes. M.J.P. reprend la fin de son intervention à la conférence d'ouverture pour remarquer que l'approche anthropologique met la focale sur le système et les institutions avec un point de vue écologique, dans la logique de l'organisation des savoirs. On voit bien comment peut se faire l'articulation quand on prend un zoom un peu plus gros ; elle ne développe pas ce point, abordé par Corine Castela (C.C. dans la suite) dans la conférence d'ouverture. Un autre point de vue consiste à regarder, dans le fonctionnement de la classe, les moyens de faire avancer les savoirs en se plaçant du côté de l'économie des savoirs et de la théorie des situations didactiques. M.J.P. revient à ce sujet sur l'idée de milieu, fondamentale selon elle, pour rendre compte de l'aspect dynamique de la progression des savoirs dans la classe. Elle reprend un exemple qu'elle n'a pas eu le temps de développer dans la conférence pour montrer comment l'étude de l'action sur le milieu (des élèves, mais aussi de l'enseignant) peut mettre en lumière la manière dont les connaissances des élèves peuvent progresser dans la résolution de problèmes bien choisis. En général, le milieu ne suffit pas à lui seul et il faut des interventions de l'enseignant. On retrouve la question des aides qui a été évoquée dans la discussion sur les livres : les aides peuvent faciliter la dévolution du problème ou elles peuvent tuer le problème. Une intervention directe sur la résolution ou une intervention sur le milieu objectif n'ont pas les mêmes effets. L'enseignant peut s'appuyer sur le milieu pour faire avancer les connaissances des élèves. En faisant le lien avec la double approche, l'analyse du milieu consiste à anticiper les adaptations que doivent faire les élèves et aussi, et c'est le point sur lequel M.J.P. souhaite insister, à anticiper les interventions du professeur, en particulier celles qui sont nécessaires parce que le milieu ne peut pas apporter les rétroactions. La première question est donc celle de l'articulation des cadres théoriques parce qu'il lui semble que le regard porté sur la classe n'est pas le même.

La deuxième question qu'elle veut soulever est celle de l'articulation de différents niveaux d'analyse. Là encore, on ne regarde pas la même chose suivant les approches. Par exemple, les vidéos analysées avec la double approche portent surtout sur des résolutions d'exercices situés après le cours. Les analyses en termes de milieu sont plus difficiles à mettre en œuvre dans ce cas, et il n'y a pas beaucoup de différence entre une analyse *a priori* du milieu et une analyse en termes d'adaptations parce qu'on est à un niveau local. M.J.P. réfère à un article écrit en commun avec A.R., appuyé sur un exemple concernant la géométrie au collège où le milieu objectif est principalement constitué de la figure, de l'énoncé, des théorèmes et définitions dont les élèves disposent. Mais il lui semble que, si on regarde le cours et l'enseignement de tout un sujet, la vision et les questions sont différentes. De quoi parle-t-on quand on parle d'analyses de pratiques et qu'appelle-t-on pratiques ? À partir de vidéos, on a une analyse locale où la gestion de la classe prend une grande importance : quelle place laisse-t-on à l'activité des élèves, quelle initiative leur laisse-t-on ? … etc. Si on prend quelque chose d'un peu plus gros (voir par exemple la thèse de Magali Hersant) en cherchant à caractériser une pratique, on peut plutôt se demander comment se fait l'avancée du savoir dans la classe sur un sujet mathématique particulier et comment le professeur peut la piloter. À ce moment-là, il est important d'articuler plusieurs niveaux d'analyse par une méthode de zooms. On regarde l'organisation de l'ensemble plutôt du point de vue de la transposition didactique et, dans cet ensemble, on choisit et on isole des situations où le savoir de la classe semble particulièrement avancer. Ce n'est donc pas tellement la résolution d'exercices que l'on regarde, ce sont les moments où le savoir avance et c'est là que le milieu est utile pour l'analyse. Enfin, à l'intérieur de ces situations, on regarde avec un zoom un peu plus gros les moments où il se passe vraiment quelque chose, des épisodes sélectionnés pour cela. Quand on a une étude locale, à partir de l'observation d'une ou deux séances seulement sur un même sujet, quel aspect des pratiques regarde-t-on et comment l'articule-t-on avec d'autres niveaux d'analyse ?

Le troisième point que M.J.P. souhaite proposer à la discussion en relation avec le thème du livre « Dur dur », c'est que l'organisation du savoir et du milieu lui paraît encore plus importante dans les classes faibles parce que les connaissances anciennes ne sont pas disponibles et que, comme cela a été dit, beaucoup de choses se passent en termes d'aide. À ce propos, elle fait allusion au mémoire de D.E.A. de Nadia Amra soutenu en 1994 qui portait sur l'observation du même professeur dans une classe forte et dans une classe faible. Le cours se déroulait sous forme de synthèse de séances de T.D. en groupes sur un problème assez consistant. L'observation a révélé que dans les T.D., les éléments essentiels qui faisaient avancer le savoir (le nouveau savoir) étaient toujours apportés par le professeur, dans les groupes forts comme dans les groupes faibles, mais la différence c'est qu'ils étaient apportés tout au début dans les groupes forts parce que les élèves rentraient tout de suite dans le problème, rencontraient ce qui était nouveau sur lequel le professeur apportait une aide alors que dans les groupes faibles les aides et l'essentiel du temps étaient consacrés à des savoirs antérieurs non disponibles et on n'arrivait à la question enjeu d'enseignement que relativement à la fin du T.D. Donc au moment où se fait le cours, la synthèse porte sur un travail effectif des élèves sur ce qui était l'enjeu d'enseignement dans les groupes forts et non dans les groupes faibles, sauf s'ils ont réussi à le faire en travail à la maison. Le professeur pense avoir traité un sujet mais les élèves ne l'ont pas tous rencontré. Un point essentiel dans l'analyse en termes de milieu est donc d'identifier l'enjeu d'enseignement qui n'est pas toujours celui déclaré par le professeur. Il est en particulier important, dans les classes faibles, d'identifier sur quoi a réellement porté le travail des élèves et la question des aides apparaît là cruciale.

Le quatrième et dernier point concerne la formation et le développement de sa pratique par le professeur lui-même. On a besoin de comprendre comment il prend de l'information, comment il mobilise lui-même ses propres connaissances et comment il les fait évoluer. Quand on analyse le rôle du professeur, il faut considérer le professeur pour l'élève et le professeur pour lui-même (cf. les deux milieux). En rédigeant un chapitre avec Aline Robert et Lucie DeBlois, pour un handbook[1] sur la formation des enseignants, du point de vue du professeur lui-même et de l'évolution de sa pratique, nous n'avons trouvé que très peu de recherches sur ce que le professeur apprend dans son travail de professeur et comment cela le fait évoluer. Les recherches dans ce domaine s'appuient surtout sur des témoignages, mais il est bien connu qu'il y a un gros décalage entre ce qui se dit et ce qui se fait.

Débat avec l'ensemble des participants

Plutôt que de suivre l'ordre des interventions, nous avons tenté ici de regrouper les interventions par questions. Cela a pu amener dans certains cas à couper une intervention en deux parties. Ce regroupement n'est pas strict car certaines interventions peuvent se rattacher à plusieurs questions. Nous espérons ne pas avoir trop trahi la pensée des intervenants dans cette réorganisation et dans les éventuelles reformulations.

Étude du développement des pratiques et problèmes méthodologiques

Luc Trouche : Les trois chantiers qui devraient nous intéresser dans les années qui viennent sont des chantiers sur lesquels les questions méthodologiques sont très difficiles. M.J.P. a cité

[1] Perrin-Glorian M.J., DeBlois L. & Robert A. (2008). Individual Practising mathematics teachers (Ch. 2) in K. Krainer & T. Wood (Eds) *Participants in Mathematics Teacher Education, The international handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 3.* Rotterdam : Sense Publishers.

le développement du professeur, l'activité du professeur : on regarde ce qui se passe en classe ; il y a aussi ce qui se passe hors classe. C'est certainement essentiel et c'est difficile à étudier. Ensuite, quand on parle du développement ou de l'activité des professeurs, on en parle essentiellement à travers des formations ; c'est une petite partie mais qu'est-ce que l'activité collective du professeur, des professeurs, quelles sont les interactions entre l'activité collective et l'activité individuelle du professeur ? Enfin, l'activité du professeur et le développement de cette activité sur des durées longues : comme le disait G.V. ce matin, il faudrait regarder ce développement sur une petite population mais sur une longue durée ; là aussi, cela pose de réelles difficultés méthodologiques.

Échanges internationaux

Luc Trouche : Une dernière question : on se sert de manuels, et dans les deux ouvrages qu'on a vus ce matin, il n'y a que des contributions françaises. C'est un travail d'équipe, mais est-ce un choix ? Avec des contributions venant d'autres pays, cela pose le problème, que René Cori a évoqué, des traductions pour rendre disponibles des cadres qui nous sont familiers mais qui ne sont pas des cadres de travail pour d'autres chercheurs.

A.R. précise qu'il y a un travail d'équipe pour l'écriture de ces livres mais qu'il y a par ailleurs un travail au sein de réseaux en France et aussi dans des échanges internationaux.

Vulgarisation des travaux de recherche en didactique

Marie-Lise Peltier (M.L.P.) reprend ce qu'a dit M.A. La vulgarisation des travaux est une question tout à fait fondamentale. Comment rendre accessibles des résultats qui ne sont pas forcément faciles à accepter ? L'intervention de René Cori montre que cette question n'est pas simple. Les résultats confortent parfois des visions populaires, mais d'autres sont difficiles à accepter par les personnes. Si on considère la différence entre recherche de la réussite à court terme et recherche de l'apprentissage à long terme, cette contradiction entraîne un camouflage des difficultés scolaires et un renvoi à plus tard de la prise en compte de ces difficultés. C'est l'exemple d'un résultat important qui peut quand même être divulgué facilement.

Spécificité de la double approche et articulation avec d'autres cadres

Denis Butlen (D.B.) : Par rapport à la question des apports des différents cadres, on retrouve certains résultats, mais d'autres sont spécifiques à l'approche. Que va permettre de débusquer la double approche ? En formation, les formateurs sont plus ou moins conscients de l'état des lieux décrit dans le livre sur les ZEP ; ils vont essayer d'intervenir en amont pour changer les choses ; une vision un peu naïve de la manière dont on peut appliquer en termes d'enseignement le socio-constructivisme peut amener à créer un i-genre 3 non maîtrisé, où les enseignants sont conscients du fait qu'il faut faire expliciter les procédures, mais ils ne les hiérarchisent pas, ils résolvent correctement les problèmes posés mais n'institutionnalisent pas. On a ainsi pu mettre en évidence une dérive qu'on n'aurait peut-être pas identifiée avec une autre approche.

M.L.P. : Il est peut-être maladroit de caractériser les personnes, par exemple d'écrire « enseignant » plutôt que « pratique » dans un tableau. Il ne s'agit pas de caractériser des personnes mais des pratiques. Un enseignant peut tout à fait passer d'un genre à un autre cependant, cette caractérisation des pratiques est commode, elle permet vraiment d'avancer. Nous n'avons pas été assez prudents dans l'exposition de cette question. Nous n'avons pas un enseignant de tel genre ; nous avons un jour un maître qui, dans cette séance, a des pratiques qui relèvent de tel genre. Loin de nous l'idée de caractériser les collègues. Une petite nuance quand même : c'est que les pratiques sont assez stables ; il ne s'agit pas de caractériser l'individu, mais on repère quand même des manières de faire qui sont assez caractéristiques chez un individu.

M.J.P. … chez un individu dans une situation donnée. Cela peut changer du collège au lycée par exemple.

A.R. : Les pratiques des enseignants sont assez stables, et notamment quant à la gestion envisagée. Il semblerait que, dans un premier temps, il soit plus facile d'introduire de nouveaux exercices que de changer le mode de travail de l'enseignant dans sa classe, toutes proportions gardées.

D.B. : Un de nos résultats, c'est de ne travailler que sur les contraintes de l'action enseignante dont on a mis en évidence des tensions, des contradictions. Ces contradictions sont spécifiques des classes dans lesquelles les enseignants travaillent. Par exemple, dans des classes de ZEP moins défavorisées, ce n'est forcément la contradiction qu'on avait considérée comme principale, celle entre une logique de socialisation et une logique d'apprentissage, qui est la plus forte, mais celle entre la réussite immédiate et la réussite à court terme.

M.J.P. : Je relie cela à la notion d'échelle. Qu'est-ce qu'on regarde au local ou un peu plus gros ? Au local, il y a une partie automatisée dans la pratique de classe, et la partie automatisée est beaucoup plus difficile à changer que la partie à une échelle un peu plus grosse, en lien avec l'organisation des savoirs.

J.R. : Sur l'articulation avec d'autres cadres, l'ergonomie cognitive ne peut pas travailler si elle ne s'appuie pas sur des connaissances existantes dans le champ de l'action de celui qu'on observe. On ne comprendrait rien à l'activité d'un contrôleur du nucléaire s'il n'y avait pas derrière soit une théorie, soit une technologie sur ce qu'est une centrale nucléaire, contrôlée par la personne qu'on observe. C'est un point fondamental, d'autant plus important qu'il y a des visées, immédiates ou à long terme, sur la formation professionnelle. Ici les cadres théoriques qui ne parlent pas de mathématiques ne sont pas pertinents du point de vue de l'ergonomie cognitive pour faire ce travail-là. On a besoin de théories dans lesquelles la place de l'objet mathématique soit centrale.

D'autre part, je veux bien regarder comment on se situe par rapport aux deux grandes théories en France, mais il y a des théories épistémologiques en Allemagne qui répondent aux attentes de quelqu'un qui fait de l'ergonomie cognitive, donc je ne voudrais pas qu'on se centre sur la vision française. La théorie des situations a surtout focalisé sur l'émergence, le début de la « germination » d'une nouvelle conceptualisation, pas seulement d'un nouveau savoir, avec initialement une vision constructiviste fondamentalement piagétienne. Cela a évolué chez Brousseau et chez les gens qui ont travaillé la théorie des situations en donnant une place à l'enseignant dans l'émergence de ce nouveau savoir. Il y a aussi, et ce n'est pas forcément au cœur de la théorie des situations dans son fonctionnement originel, tous les problèmes de mise en fonctionnement d'un savoir qui est déjà amorcé par les savoirs antérieurs ou par un apport initial de l'enseignement, les deux se situant dans la vision vygotskienne de double germination. Un des cœurs de l'analyse en termes de mise en fonctionnement, c'est l'organisation du savoir et de ce point de vue là, on peut tout à fait s'appuyer sur le cœur de technologie, techniques etc. de Yves Chevallard. Le point d'achoppement, c'est que la T.A.D. ne fait pas de place au sujet qui agit, que ce soit l'élève ou l'enseignant ; or, on ne peut pas dire qu'on ne regarde pas le sujet individuel, parce qu'on forme des sujets individuels. Quand on étudie l'activité d'un pilote, on a envie que ce pilote soit efficace. On est un peu moins exigeant pour un enseignant, parce que c'est plus difficile, mais la question est posée ; il ne faut pas se voiler la face en disant qu'on ne veut pas être méchant, il y a des questions d'individualisation des analyses et on ne peut pas y couper, mais c'est hors champ de la T.A.D. qui parle de fonction ou de rôle mais pas de sujet.

C.C. : Sur la complémentarité des théories, il me semble qu'on a bien vu sur l'ensemble du colloque, que c'est vraiment un trait caractéristique de DIDIREM d'assumer, de supposer la nécessité de théories complémentaires pour regarder l'ensemble des phénomènes qu'on veut étudier et, en réalité, en France, on n'a aucune théorie qui se veut holistique et ce n'est pas le cas partout ; par exemple, en Espagne, ils essaient de développer une théorie qui veut tout couvrir. Si on fait l'effort d'expliciter les présupposés de chaque théorie, on s'aperçoit qu'elles ne couvrent pas tout, même si les gens qui ont conçu les théories, eux, ont l'espoir de faire dire à leur théorie le plus de choses possible. Ce sont deux choses différentes et je trouve que justement à DIDIREM, en général, on va jouer des différentes théories et en profiter. Et un des points qui a été soulevé ce matin dans le débat sur activités / pratiques avec G.V., on a bien vu qu'on se place du côté des individus. Du côté de la TAD, on va regarder les institutions, et c'est Luc qui a dit les « pratiques des professeurs ». C'est vrai qu'à la jonction des deux niveaux, des deux grains, il y a quelque chose à prendre en compte qui peut être pris dans le prolongement du point de vue psychologique, ce que Clot distingue comme la dimension interpersonnelle du métier, des échanges entre les gens ; je le mettrais comme un point de vue de psychologie sociale.

Et puis, il y a l'autre point de vue des communautés de pratiques : ce n'est pas la même chose de penser que les individus interagissent pour prendre en charge collectivement l'évolution de leur métier ; c'est ce qu'il appelle le niveau transpersonnel et, pour moi, on voit très bien comment, là, on est en train de faire des liens entre une approche institutionnelle, une approche qui part des individus et qu'il y a des complémentarités ; pour moi, le niveau transpersonnel, je le vois du côté anthropologique, mais on a des coordinations de regard et on essaie de forger des outils qui nous permettent de regarder les choses et, par exemple là, cela permet de penser la formation, parce que la formation a différentes dimensions : le compagnonnage, on peut le voir du côté interindividuel et qu'est-ce que le niveau du transpersonnel par exemple ? Pour répondre à René Cori, ces théories nous aident à poser des questions et à découper la réalité pour dégager des questions que, sans ces théories là, on n'aborderait pas.

Alain Kuzniak veut rebondir sur la question soulevée par J. Rogalski, celle de l'efficacité des pratiques parce que c'est une question qui va se poser de plus en plus. Cette année, dans l'endroit où il travaille, il y a eu un échec considérable de la formation : 11 PLC2 refusés sur 55. Quand on observe les pratiques enseignantes, il y a une partie recherche mais après, pour définir des critères qui font qu'on valide ou non, là, il y a une question redoutable à laquelle on est confronté comme formateur.

Sandra Bruno, maître de conférences en psychologie à l'IUFM de Versailles, réagit par rapport au terme holistique. Elle travaille avec les enseignants et pense qu'un enseignant est quelqu'un d'holistique. Elle ne sait pas s'il faut une théorie holistique pour décrire l'activité de l'enseignant, mais ce qu'elle croit constater, c'est qu'un enseignant est quelqu'un qui fait travailler à la fois sa dimension cognitive, affective, sociale, enfin sa personnalité et qui est en face d'élèves dans le même cas. Elle a l'impression qu'il manque aux enseignants une description des différentes possibilités de cohérence entre ces différentes dimensions à l'œuvre, y compris la cohérence entre un rapport au savoir enseigné, que ce soit les mathématiques ou d'autres disciplines comme le sport et certaines autres valeurs et certaines autres connaissances de différents types. Ce travail pourrait, selon elle, se faire en articulation entre la didactique et la psychologie.

Place des mathématiques dans la didactique et la formation

Carl Winslow revient sur l'exemple du puzzle en remarquant que, pour montrer qu'il y a des fonctions additives non linéaires, il faut l'axiome du choix. C'est pour dire qu'on peut continuer à apprendre des choses sur des parties mathématiques qu'on croyait triviales. C'est une expérience très importante à communiquer dans la formation, que les mathématiques élémentaires ne sont pas incluses dans les mathématiques avancées ; dans beaucoup de recherches internationales, on pointe l'importance de l'opportunité de continuer à apprendre des mathématiques dans la formation des enseignants ; il y a un nouveau champ de recherches, c'est les processus d'apprentissage pour les enseignants dans la pratique enseignante. Les enseignants en formation doivent apprendre des nouvelles choses sur des mathématiques qu'ils trouvent *a priori* tout à fait triviales par rapport à leur formation, leur en montrer l'existence et puis ensuite leur fournir des cadres pour le faire. C'est absolument crucial ; on a beaucoup à apprendre par une perspective internationale dans ce domaine où on est allé beaucoup plus loin dans certains pays hors d'Europe et du monde occidental. Comment penser la formation pour que cet apprentissage soit possible ?

M.A. veut réagir à ce que disait C.Winslow sur le fait de réinterroger les maths et de prendre plaisir à les réinterroger. Dans le travail du groupe IREM sur la modélisation présenté la veille, ce qui a frappé les membres du groupe, c'est la déstabilisation que cela créait pour les enseignants du secondaire de se rendre compte que des choses élémentaires qu'ils pensaient avoir comprises, dès lors qu'on les sortait du contexte de l'enseignement secondaire (et là c'était systématiquement le cas) on ne savait plus bien les opérationnaliser ou on passait beaucoup de temps pour arriver à les opérationnaliser. C'est très déstabilisateur mais, en même temps, on se dit qu'il est difficile qu'un enseignant à qui on va demander de mettre les élèves en situation de résolution de problèmes soit quelqu'un qui n'a pas vécu cette expérience pendant des années voire des dizaines d'années. Ce qui les a frappés aussi c'est, au fil de l'année, le plaisir qu'on voyait naître dans cette capacité à se rendre compte qu'on pouvait apprendre ou réapprendre des mathématiques nouvelles ou des mathématiques sur des thèmes complètement différents qui, au premier abord paraissaient vraiment très difficiles ; se rendre compte qu'on pouvait y avoir accès … C'est une dimension de la place des mathématiques à la fois dans l'interrogation sur les mathématiques connues (mais en les déplaçant un peu de leur contexte d'enseignement) et puis aussi dans la rencontre avec des mathématiques actuelles ou des mathématiques « autres » : c'est très important pour maintenir cet esprit de mathématisation et de travail mathématique chez l'enseignant, dans la formation.

M.J.P. souhaite compléter en disant que cela peut se faire, y compris sur des choses élémentaires, dans la gestion de l'analyse *a priori*, si dans l'analyse *a priori* on creuse le problème pour chercher autre chose que ce qui est attendu dans ce que savent les élèves et d'autres procédures qui pourraient se faire, d'autres manières de présenter le problème. Ne serait-ce que le petit exercice que j'ai proposé dans la conférence à propos de la figure fausse, chercher tous les types de figures possibles qui répondent au problème quand on ne fournit pas la figure. Sur des problèmes simples, il y a pas mal d'enquêtes sur les mathématiques à faire autour du problème pour prévoir le milieu. C'est vrai que la théorie des situations a surtout été vue au départ pour créer des situations idéales, et on est souvent resté dans cette idée d'avoir des situations idéales pour introduire des savoirs sans l'intervention du maître, mais ce n'est pas cela la notion de milieu : c'est plutôt d'essayer de prévoir, c'est l'analyse *a priori*.

Autour de la formation des enseignants

Denis Butlen, Francis Labroue, Claudie Asselain-Missenard, Daniel Perrin
et Inés Mª Gómez Chacón (intervenants),
Aline Robert et Catherine Houdement (animatrices)

Introduction (C. Houdement)

Si la variété des recherches en didactique des mathématiques est attestée par les travaux de ce colloque (et là, seule une infime partie est visible), se pose la question de la communication des résultats de ces recherches aux enseignants, et plus généralement celle de la formation des enseignants. Il n'est pas question ici de reprendre des résultats sur cette dernière question, quelqu'en soit le développement – voir par exemple la revue consacrée à ce type de travaux, *Journal of Mathematics Teacher Education* (JMTE). Nous voudrions plutôt explorer un petit peu la question de la diffusion, en élargissant la perspective et en demandant à des acteurs engagés de manières différentes dans la formation des enseignants de donner leur témoignage.

Les savoirs en jeu sont complexes : les savoirs mathématiques appris comme élèves ou étudiants nécessitent une recomposition pour les rendre opérationnels sur des questions d'enseignement (cf. le texte de D. Perrin). Les savoirs académiques ne rendent pas compte seuls des connaissances mathématiques nécessaires aux enseignants : des recherches didactiques ont débusqué des savoirs mathématiques moins classiques[1] ou moins formellement explicitables[2]. Les savoirs de la formation des enseignants se doivent de plus d'intégrer les nouveaux outils technologiques et leurs potentialités au service des apprentissages (cf. le texte de I. Gómez-Chacon). Les savoirs de la formation des enseignants comportent aussi des savoirs didactiques, qui permettent l'étude et la compréhension des curricula, l'analyse des organisations de l'étude possibles et suggérées, l'adaptation des situations d'enseignement à la réalité du répertoire didactique de la classe. Sans oublier ce qui concerne le sujet cognitif face au savoir mathématique, le sujet social dans la communauté de la classe, plus ou moins multicatégorielle, le sujet psychologique. Comme tous ces savoirs fonctionneront en synergie dans l'exercice de la classe, il est aussi nécessaire de questionner, durant la formation, cette recomposition des savoirs (cf. le texte de D. Butlen).

Cela peut rejoindre les distinctions classiques en *Subject-Matter Knowledge*, et *Pedagogical Content Knowledge* utilisées dans beaucoup de travaux anglo-saxons, illustrant s'il le fallait à quel point les difficultés rencontrées en formation ne sont pas spécifiques à la France mais partagées dans le monde entier.

La formation des enseignants doit aussi s'adapter aux durées et modalités de formation (de une heure à une année, accompagnement individuel, travail en petit groupe ou information en amphithéâtre), à la culture initiale des formés (spécialistes de mathématiques ou généralistes), à la place des mathématiques dans la formation (seule discipline, insérée dans une culture scientifique, une discipline parmi d'autres).

La formation des enseignants doit aussi s'adapter à la concurrence des médias, les ressources sont en pleine explosion : manuels scolaires et ouvrages pédagogiques certes, mais aussi propositions diverses sur la toile.

La question est bien celle-ci : quels outils enseigner aux enseignants pour leur permettre

(1) d'envisager différents possibles ;

---

[1] Par exemple : Briand (1993) ; Rogalski & *al*. (2001) ; Perrin (2005).
[2] Par exemple : Robert (2003) ; Houdement & Kuzniak (2006).

Ouvrier-Buffet C. & Perrin-Glorian M.J. (éd.) (2009) *Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot. pp. 331-354.

(2) de choisir en toute connaissance de cause dans cette palette de possibles (cf. le texte de F. Labroue) ?

De plus, la conjoncture actuelle (création des Master Enseignement dans les Universités comme accès obligatoire au métier d'enseignant) exige :

- Que nous rendions explicites et publics ces savoirs en affirmant fortement et prouvant leur spécificité d'une part par rapport aux savoirs académiques, d'autre part par rapport aux connaissances issues du compagnonnage ;
- Que nous valorisions notre expérience et expertise de formateurs d'enseignants, expérience capitalisée dans ce qui correspond sans doute à des communautés de pratique[3] (cf. le texte de C. Asselain-Missenard).

C'est dans ce contexte que nous avons invité cinq personnes, choisies de façon à rendre compte de la variété de la formation des enseignants, à plancher sur le sujet suivant :

> *Donnez votre point de vue, le plus synthétique possible, à partir des questions suivantes : comment intervenez-vous en formation ? Quel bilan en faites-vous ? Quelles modifications vous sembleraient utiles ?*

Nous les remercions de leur active participation.

Denis Butlen, professeur des universités à l'IUFM de Nantes, chercheur en didactique des mathématiques, s'attelle à la question de la formation mathématique des enseignants du primaire (maternelle, 1ère à 5ème année ; enfants de 3 à 11 ans).

Suivent deux points de vue de terrain sur les professeurs du secondaire (collège : 6ème à 9ème année, lycée 10ème à 12ème année dite Terminale). Francis Labroue, IA-IPR[4] dans l'académie de Paris, décline le rôle d'un IA-IPR dans la formation des enseignants et précise le type de connaissances nécessaires à l'enseignant pour assumer une des fonctions fondamentales de son métier, faire des choix… Claudie Asselain-Missenard, professeur de collège et de lycée, membre de l'APMEP, nous offre une rétrospective des multiples engagements de sa carrière, qui l'amène à dégager des grands principes du métier de professeur de mathématiques.

Daniel Perrin, professeur des universités à l'IUFM de Versailles, nous présente le point de vue d'un responsable des préparations aux concours qui sélectionnent les professeurs de mathématiques du secondaire et du supérieur : il met en avant l'intérêt des problèmes de concours comme finalité d'une année destinée à solidifier et mettre en réseau les savoirs mathématiques de licence pour mieux appréhender les questions d'enseignement des mathématiques.

Inés Gómez-Chacón, de l'Universidad Complutense de Madrid, développe le point de vue d'une chercheure en didactique des mathématiques d'un pays voisin : son texte souligne la complexité des connaissances professionnelles d'étudiants professeurs nécessaires à l'intégration des TICs dans l'enseignement des mathématiques, dont la détermination nécessite des projets de recherche à tiroirs, croisant des approches théoriques différentes. Dans l'article sont présentés des éléments de la formation des professeurs de Mathématiques en Espagne, notamment la description, le développement et les résultats d'une proposition de formation initiale des professeurs pour apprendre à enseigner les Mathématiques en utilisant les technologies nouvelles dans leurs cours (projet ESCEMMat scénarios Multimédia pour l'apprentissage des Mathématiques).

Enfin, Aline Robert, professeur des universités à l'IUFM de Versailles, chercheure en didactique des mathématiques, conclut sur les croisements théoriques éclairant la détermination des compétences professionnelles nécessaires à l'enseignement des

[3] Wenger (2005).

[4] Inspecteur d'Académie - Inspecteur Pédagogique Régional : l'IPR est un cadre de l'Éducation Nationale qui, entre autres tâches, supervise les professeurs de collège et de lycée.

mathématiques, à la difficulté d'une formation adaptée, à la part d'improvisation permanente du quotidien de la classe et à l'infinie modestie que doit garder le chercheur face à la complexité du métier d'enseignant.

La formation des professeurs des écoles en mathématiques, deux exemples de situations, en première et seconde année (D. Butlen)

Plutôt que d'énoncer les grands principes qui organisent mes interventions en formation initiale des professeurs des écoles en mathématiques, je développe ici deux exemples de situations de formation qui me semblent emblématiques de la formation actuelle. La première situation est davantage adaptée à la seconde année de formation, alors que la seconde s'adresse plutôt à des étudiants de première année (après trois ans d'étude à l'université) préparant le concours d'entrée à l'IUFM.

Différents types de savoirs en jeu en formation initiale

M.-J. Perrin a évoqué dans son intervention les différents types de savoirs transmis en formation initiale : des savoirs académiques, des savoirs pédagogiques et des savoirs didactiques, ces derniers assurant pour une part le lien entre les savoirs académiques et les savoirs pédagogiques. Je vais développer des situations qui permettent de faire le lien entre ces différents types de savoirs.

Un premier dispositif : les ateliers d'analyse de pratiques professionnelles (seconde année)

Il s'agit d'un dispositif utilisant l'outil vidéo et fonctionnant en plusieurs étapes. Dans un premier temps, par petits groupes, les stagiaires préparent avec l'aide de formateurs, une séquence d'enseignement (trois séances s'intégrant dans la programmation d'un maître formateur). L'un d'entre eux conduit la séance dans la classe alors que les autres observent l'activité des élèves et du maître. La séance est filmée. Il s'agit donc d'élaborer, de tester et d'analyser un projet d'enseignement en « milieu protégé », indépendamment de toute évaluation. Cette séance est suivie d'une analyse à chaud, puis d'une analyse différée pendant lesquelles stagiaires et formateurs analysent le projet d'enseignement, les situations proposées aux élèves et leur mise en œuvre. Le regard porte notamment sur les gestes professionnels mobilisés et sur les éventuelles difficultés rencontrées.

Ce dispositif est repris au moins trois fois dans l'année. Comme l'analyse s'appuie sur les différents moments d'une pratique effective, elle est susceptible de convoquer les différents savoirs évoqués ci-dessus et de les mettre en relation.

En effet, l'analyse peut porter sur les savoirs en jeu ou visés par le professeur lors de la séance. Ce peut être l'occasion, en revenant sur l'analyse a priori des situations élaborées, d'interroger par exemple le choix des valeurs des variables, l'organisation du milieu. Il s'agit d'évaluer ainsi la pertinence des situations mises en œuvre, mais aussi l'activité du professeur en lien avec l'activité des élèves, notamment en essayant de mesurer les apprentissages potentiels ou effectifs. Le regard est plus particulièrement centré sur trois grands moments de l'activité de l'enseignant : la gestion des processus de dévolution, d'institutionnalisation et de régulation. La gestion de classe, d'un point de vue pédagogique mais aussi didactique, est examinée. Les formateurs s'intéressent en particulier aux gestes professionnels mobilisés à cette occasion ou qui auraient pu l'être.

Si nous étudions les savoirs didactiques mobilisés par le formateur à cette occasion, ce ne sont plus complètement les mêmes que ceux mobilisés par le chercheur. Élaborés au départ pour la recherche, notamment pour la description et l'analyse des relations entre enseignement et apprentissage, ils sont maintenant mobilisés pour penser à la fois l'activité du professeur et pour l'aider dans son action quotidienne. Nous sommes en présence d'un phénomène de transposition. On peut identifier (cf. Robert) deux étapes. Une première transposition est effectuée en direction des formateurs, transformant ces savoirs de recherche en savoirs de formation. Ce premier travail de transposition est effectué à la fois par des chercheurs et des formateurs engagés dans des recherches en didactique ou proches de ces recherches. Une seconde transposition est ensuite effectuée en direction des enseignants ayant pour but de leur permettre de s'approprier ces savoirs de formation pour leur propre action. Cette seconde étape est le plus souvent assurée par des formateurs proches de la recherche mais qui ne sont pas nécessairement engagés dans celle-ci. Ces transpositions sont donc le résultat d'un travail d'équipe faisant intervenir différentes catégories de formateurs. Réunissant chercheurs, formateurs, enseignants experts, les IUFM nous semblent constituer une structure appropriée pour cette élaboration de savoirs nouveaux, indispensables pour la formation des enseignants.

La situation de formation que nous venons de décrire assure une cohérence à la formation dispensée en IUFM. Elle n'exclut pas d'autres stratégies de formation. Elle permet toutefois d'entrer en résonance avec les représentations des stagiaires (à partir de leurs propres pratiques). Elle prend en compte différentes dimensions des pratiques et différents points de vue (grâce aux regards croisés de formateurs de différentes catégories). Cette cohérence ne pourrait pas être atteinte par une formation qui ménagerait deux temps bien distincts : un premier temps proposant une formation académique comportant une part de didactique et des stages sensibilisant au métier et un second temps centré sur un compagnonnage entre pairs.

Un second exemple de situation de formation : les situations d'homologie

Il s'agit de situations relevant d'une stratégie moins coûteuse, mais davantage adaptée à la formation en première année qu'en seconde année car laissant encore le professeur stagiaire en position d'élève plutôt que de professeur. Le formateur propose aux stagiaires de résoudre un problème mobilisant des connaissances mathématiques dépassant les savoirs enseignés à l'école. Toutefois, le problème peut souvent être adapté et proposé à des élèves de l'école élémentaire. Le but est d'amener les stagiaires à analyser leur démarche de résolution, les connaissances mobilisées et de les repenser dans un objectif d'enseignement, notamment de les mettre en relation, de les organiser en réseaux. Il s'agit donc d'intervenir sur les connaissances des stagiaires, sur leur représentation des mathématiques et de leur enseignement. Cette étape est nécessaire. Ce type de stratégie est efficace mais une formation ne peut se limiter à ce type de situations qui laisse la responsabilité du transfert à la charge du stagiaire sans lui en donner les moyens. Les situations évoquées précédemment complètent avec profit cette dernière stratégie.

Une expérience d'inspecteur (F. Labroue)

La présence d'un inspecteur parmi les intervenants de cette table ronde peut paraître étonnante : quelle peut être la place de cet « intrus » dans un séminaire de didactique des mathématiques, au milieu de personnalités aussi reconnues pour leur réflexion et leur engagement dans la formation des enseignants ? Faut-il y voir le souci de prendre en compte des « contraintes institutionnelles » ? Comment celles-ci peuvent-elles s'articuler avec des objectifs de qualité indispensables pour aider réellement les enseignants, par leur formation initiale et continue, à exercer au mieux leur métier ?

C'est à partir d'une expérience reposant sur une pratique de professeur (en lycée et en collège) et de formateur au sein des IREM en province et à Paris, puis d'inspecteur à Créteil et à Paris, que je vais apporter un témoignage et quelques remarques en réponses aux questions posées. Naturellement, l'apport de certaines personnes fortement impliquées dans le système éducatif et la participation à des travaux collectifs, notamment des commissions inter-IREM, des jurys de recrutement de professeurs (CAPES, CAPLP) et plus récemment la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques présidée par J.P. Kahane, ont grandement contribué à enrichir ma réflexion personnelle sur un sujet aussi complexe.

L'intervention d'un inspecteur dans la formation des enseignants

Il convient d'abord de préciser que, pour les professeurs exerçant en collège ou lycée, un inspecteur n'anime pas directement des stages de formation, sauf éventuellement pour présenter des aspects réglementaires concernant essentiellement des modalités d'examen, de nouveaux dispositifs ou des programmes officiels ; dans ce dernier cas, les exemples de mise en œuvre comportant des contenus mathématiques sont présentés par des formateurs.

Cependant, la formation des enseignants fait partie des missions statutaires d'un inspecteur.

En formation initiale

Il s'agit essentiellement de deux types d'intervention, hors l'évaluation finale des PLC2 :

- Participer au choix des établissements et des conseillers pédagogiques pour les stages concernant les professeurs stagiaires (1$^{\text{ère}}$ et 2$^{\text{ème}}$ année), ce choix pouvant être plus ou moins restreint pour les stages en responsabilité des PLC2, suivant l'écart entre le nombre d'établissements exprimant un besoin compatible avec le statut des stagiaires et le nombre de ceux-ci ;
- Participer à un bilan organisé par l'IUFM en cours d'année scolaire concernant l'ensemble des PLC2 et débouchant éventuellement sur la définition de parcours individualisés pour certains d'entre eux.

En formation continue

Les types d'intervention varient selon la nature des stages au sein du plan académique de formation (PAF) qui concerne les professeurs de l'enseignement public.

Stages à candidatures individuelles

- Proposer une rédaction du cahier des charges pour l'ensemble de ces stages en tenant compte des besoins constatés et des priorités nationales et académiques.
- Étudier les propositions de stages reçues en retour (les deux IREM Paris 7 et Paris Nord étant des partenaires essentiels par la qualité et la complémentarité de leurs projets) et participer à certains arbitrages avant la validation du PAF.
- Organiser d'éventuelles relances pour les inscriptions à certains stages.
- Analyser *a posteriori* le bilan annuel de ces stages.

Stages à public désigné (nouveaux titulaires, stagiaires en situation, professeurs à besoins particuliers)

- Proposer une rédaction du cahier des charges pour l'ensemble de ces stages.
- Organiser le cadrage de ces stages, avec notamment le choix des formateurs.
- Intervenir éventuellement sur des aspects réglementaires.
- Analyser *a posteriori* le bilan annuel de ces stages.

Stages sur site

Il s'agit de stages d'initiative locale proposés par un établissement, plusieurs établissements ou un bassin.

- Émettre un avis sur l'opportunité de ces stages et suggérer d'éventuelles modifications.
- Proposer, dans certains cas, des formateurs.
- Participer au bilan.

Animations

Il s'agit de stages organisés par l'inspection pour présenter des nouveautés dans le domaine de la réglementation ; ils se présentent sous la forme de quelques séances répétitives permettant à l'ensemble des établissements (publics ou privés sous contrat) concernés d'être représentés par quelques professeurs qui ont la charge de transmettre les informations à leurs collègues.

- Proposer les thèmes et une organisation de ces stages.
- Organiser le cadrage de ces stages avec les formateurs choisis.
- Présenter les aspects réglementaires.
- Participer au bilan.

Recrutement et formation des formateurs

Compte tenu de la pyramide des âges des formateurs et de la multiplicité des thèmes à traiter, le recrutement de nouveaux formateurs constitue une priorité et, conformément à leur statut, « les inspecteurs, par leur connaissance des établissements et des professeurs, font partie des personnes-ressources pour le choix des conseillers pédagogiques, des formateurs et des tuteurs ».

Cependant, l'exercice des fonctions de professeur et de formateur ne reposant pas sur les mêmes compétences, il est indispensable que les formateurs puissent bénéficier d'une véritable formation spécifique de qualité. C'est pourquoi, depuis plusieurs années, l'inspection contribue à sensibiliser les professeurs désirant travailler en tant que formateurs à préparer le master professionnel « Métier de formateur d'enseignants de mathématiques (lycée et collège) » délivré par l'Université Denis Diderot - Paris 7 ; cette formation inter-académique échelonnée sur deux ou trois ans s'appuie, dès la première année, sur une analyse des pratiques enseignantes liée à des contenus théoriques permettant au futur formateur de prendre du recul par rapport à son expérience personnelle d'enseignant.

À cette formation « initiale » de formateur s'ajoutent aussi quelques occasions, limitées essentiellement par la disponibilité des personnes concernées, de formation continue au niveau académique, à l'initiative de l'inspection et animées par des universitaires, par exemple sur l'introduction du calcul littéral au collège ou sur l'apport de logiciels d'exercices au lycée. Au-delà du cadre strict des mathématiques, on peut aussi signaler la mise en place d'une formation pour des triplettes de formateurs (premier degré, second degré en français et mathématiques) chargées des stages de liaison école-collège.

Un essai de bilan

Formation initiale

Je laisserai à d'autres intervenants beaucoup plus engagés dans la formation initiale le soin de dresser un bilan concernant celle-ci au moment où sa réorganisation est devenue un sujet d'une brûlante actualité. Je me limiterai à trois observations :

- La nécessité de permettre à un étudiant de disposer non seulement d'un corpus de connaissances en mathématiques suffisamment consistant, mais aussi d'une véritable organisation structurée de ses savoirs, ce qui nécessite un travail et un temps spécifiques ;

- La nécessité d'une réflexion didactique de qualité sur les apprentissages des élèves en mathématiques dans le contexte actuel, susceptible, au-delà du vécu personnel (notamment en collège) d'un étudiant performant et de son éventuelle expérience de cours particuliers, de servir de point d'appui efficace à une formation continue ;
- L'importance du choix des établissements et des conseillers pédagogiques, l'objectif étant de faire bénéficier les professeurs stagiaires d'une formation leur permettant d'adapter le mieux possible, dès l'année suivante, leur enseignement à des situations plus ou moins sensiblement différentes.

Formation continue

En ce qui concerne la formation continue, le premier élément généralement mis en avant est la faiblesse du nombre de professeurs de mathématiques inscrits aux stages à candidatures individuelles qui peut conduire à fermer certains d'entre eux. Cette réalité indiscutable, qui n'est pas spécifique aux mathématiques, doit cependant être nuancée et analysée en s'intéressant à l'ensemble des éléments constituant la formation continue et en observant les évolutions du contexte au cours des dernières années :

- Chaque fois que des contenus mathématiques absents de la formation initiale de la majorité des professeurs ont été introduits dans les programmes des classes, les inscriptions aux stages centrés sur l'acquisition et l'enseignement de ces savoirs ont été importantes : statistique inférentielle et fiabilité en sections de techniciens supérieurs, théorie des graphes en terminale ES. Aujourd'hui, le problème se pose pour l'introduction des probabilités en troisième ;
- Les relances d'inscription effectuées en début d'année scolaire, sur quelques stages ciblés, permettent d'augmenter le nombre de stagiaires ;
- Les formations sur site se développent de plus en plus : correspondant à un besoin ressenti, elles permettent de travailler dans le contexte propre à un ou plusieurs établissements, ce qui est particulièrement le cas pour l'utilisation des TICE (équipement informatique) ou des liaisons école-collège ou collège-lycée ;
- La multiplicité des nouveautés institutionnelles introduites ces dernières années, notamment en collège (socle commun de connaissances et de compétences, projet personnalisé de réussite éducative PPRE, accompagnement scolaire, B2i, etc.) a amené des professeurs à participer à une succession de réunions d'information ou de formation sur ces sujets ;
- Les formations concernant l'intégration de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques, organisées depuis de nombreuses années sous des statuts différents au sein de la formation continue (y compris des présentations proposées par le CRDP), ont permis une avancée très significative de la pratique dans les classes, en salle de cours avec vidéo projection ou en salle d'informatique, qui franchit une nouvelle étape avec l'évaluation du B2i et l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques pour la série S ;
- Les informations fragmentaires dont on dispose sur l'indice de satisfaction des stagiaires présents aux différentes formations en mathématiques attestent d'une reconnaissance de la qualité des interventions et de l'adéquation avec les objectifs attendus.

Ainsi, un bilan reposant sur une observation partielle à un instant donné donne une vision insuffisante pour apprécier d'une part la globalité de la formation continue vécue par les professeurs et, d'autre part, l'évolution qualitative de celle-ci au cours des dernières années. Il faut du temps, de la persévérance et naturellement des moyens adaptés pour progresser dans ce domaine, la présence d'un nombre suffisant de formateurs de qualité étant une nécessité.

En guise de conclusion

Le problème complexe de la formation initiale et continue des professeurs ne saurait trouver ici une réponse globale en quelques phrases. En revanche, le rapport rédigé à ce sujet il y a quelques années par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques présidée par J.P. Kahane me semble conserver toute sa pertinence.

Je me limiterai donc à souligner quelques éléments :

- L'importance d'une formation initiale de qualité, dans ses aspects scientifiques et didactiques, constituant un point d'appui efficace pour la formation continue ;
- L'importance des analyses de pratiques, élément essentiel d'une formation centrée sur les apprentissages dans des situations variées ;
- L'importance de la formation des formateurs dont le nombre et les centres d'intérêt doivent permettre de constituer un maillage suffisamment fin pour répondre aux nombreux besoins.

Pour conclure, posons-nous la question suivante : si nous n'avons droit qu'à un mot pour résumer le métier d'enseignant, lequel paraît le plus pertinent ? Ma préférence va au verbe d'action *choisir*.

En effet, à chaque instant, un professeur est amené à effectuer des choix en fonction du contexte de son enseignement : dans la préparation et la gestion d'une séquence, dans la mise au point d'un sujet de devoir, dans l'élaboration d'un barème, etc. Et de ces choix découle, pour une bonne part, la portée de son enseignement.

Aussi est-il essentiel que la formation initiale et la formation continue contribuent à :

- Ouvrir l'éventail des choix possibles ;
- Développer l'autonomie de jugement permettant de justifier les choix effectués.

Tel est, à mes yeux, l'objectif fondamental d'une formation de professeurs.

Le point de vue d'une professeure de mathématiques, militante de l'APMEP[5] (C. Asselain-Missenard)

Sujet. *Donnez votre point de vue, le plus synthétique possible, à partir des questions suivantes : comment intervenez-vous en formation ? Quel bilan en faites-vous ? Quelles modifications vous sembleraient utiles ?*

Je vais parler de moi, d'abord parce que c'est ce qu'on m'a demandé et aussi parce que mon âge avancé et l'expérience qui est censée aller avec m'y autorisent. Mais en partant de mon expérience, je vais essayer d'extraire quelques idées qui me tiennent à cœur.

Je suis d'abord professeur de collège (avec une incursion plus récente en lycée, qui m'a permis de voir que ce n'est pas très différent). Mon métier, c'est d'être en face d'élèves, enfants et adolescents. Mais on ne peut pas exercer ce métier sans essayer d'avoir en parallèle un regard distancié, un peu externe sur sa pratique. En gros, mon métier c'est d'avoir le nez dans le guidon, mais je pense qu'il est fondamental de lever la tête à intervalles réguliers si on veut éviter les risques de collision…

> *Principe P1 : la réflexion autour de sa pratique fait partie intégrante du métier d'enseignant.*

[5] *Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* : créée en 1910, elle regroupe d'abord les professeurs de mathématiques du secondaire (6$^{\text{ème}}$ et au-delà) avant de s'ouvrir à tout enseignant de mathématiques du primaire au supérieur.

Reste à voir comment c'est possible, quel est le rôle de l'institution, comment elle y incite ou freine. Je vais essayer de le montrer dans la suite à partir de ce que j'ai vu et fait. Mais je peux déjà dire que ce truc qui va de soi n'est pas totalement intégré dans les mœurs, loin s'en faut.

Formation initiale

En parallèle à mon métier d'enseignant sur le terrain, j'ai une expérience de formateur dans l'institution. Je suis intervenue en formation initiale de professeurs du second degré dans deux cadres :

1- Comme conseiller pédagogique, et ça j'y crois. Tant dans le tutorat d'un jeune collègue qui aborde pour la première fois son métier que dans la pratique accompagnée, où un conseiller pédagogique entouré de deux ou trois stagiaires décortique finement une séquence d'enseignement que l'un d'eux vient d'animer.

Et ça, d'une part c'est passionnant, d'autre part c'est scandaleux que ce ne soit pas répandu hors le cadre de la toute première année. Ce devrait être une pratique courante d'aller voir les uns chez les autres comment ça se passe.

Le métier d'enseignant est chez nous beaucoup trop solitaire et c'est nuisible : panique quand M. Labroue débarque, tant l'enseignant a pour règle d'être seul maître à bord. Cela montre à quel point un regard externe sur ce qu'on fait dans sa classe est perçu comme une intrusion. Ce serait différent si enseigner sous le regard des autres était une pratique courante. Cette tendance solitaire est nocive car elle favorise la tendance à figer sa pratique, à croire que ce qu'on fait est la seule façon de faire (et la seule bonne !).

> *Principe P2 : tout enseignant gagnerait à accepter dans sa classe le regard des autres et les échanges qui en découleraient.*

Ce n'est pas compliqué d'un point de vue pratique, ce n'est pas coûteux, mais ça exige une certaine évolution (voire révolution) des mentalités.

2- Comme tuteur de mémoire pour les PLC2[6]. Ce n'est pas parce que la chose a plus ou moins disparu que l'on ne peut pas dire deux mots. Cet exercice de s'extérioriser par rapport à ce qu'on fait, réfléchir autour et l'écrire, c'est certainement formateur.

On peut sans doute dire que ça venait trop tôt. La première année, on ne peut pas demander cela. Par contre, le demander un peu plus tard, voire régulièrement devrait être une pratique courante de formation continue. Réfléchir, agir et savoir mettre en mots ce qu'on a fait et pourquoi devrait faire partie des compétences de tout enseignant.

> *Principe P3 : écrire chaque année quelques pages sur ce qu'on a entrepris, ce qu'on a réussi, ce qu'on a voulu faire et pas fait, pourquoi pas ?*

Ce serait sans doute plus formateur que de recevoir une fois tous les 5 ans un inspecteur une heure en serrant les fesses. Ce serait une base d'évaluation au moins aussi bonne que cette pratique quinquennale.

Formation continue

J'ai en parallèle quelques expériences de formation continue, finalement assez diverses. À mes débuts, l'enseignement des maths était tout juste sorti de la tempête Lichnerowitz[7]. Les IREM[8] étaient à leur apogée, actifs et avec des moyens réels.

---

[6] Professeur stagiaire de lycée ou de collège (de la 6ème à la 12ème) (en deuxième année de formation à l'IUFM).

[7] Lichnerowicz préside de 1966 à 1973 la Commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques.

[8] *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.*

Dès ma première année, nommée à La Norville, collège de banlieue, j'ai bénéficié d'une configuration exceptionnelle : un corps enseignant de maths composé pour moitié de jeunes tout droits sortis du concours (avec des connaissances disciplinaires fraîches, mais aucune connaissance des élèves) et l'autre moitié de PEGC[9] expérimentés, mais qui étaient légèrement déstabilisés par la révolution dite des maths modernes. C'était une évidence que tout ce monde gagnerait à travailler ensemble. On l'a fait et on a eu les moyens pour le faire. Groupe IREM auto-constitué (vaguement animé par un formateur, peu enthousiaste à se déplacer en si grande banlieue).

Assez vite, j'ai rejoint les rangs des animateurs IREM à l'IREM Paris 7. Dans une structure assez peu contrainte, on réfléchissait en groupes mixtes (enseignants du secondaire et du supérieur) à des questions d'enseignement librement choisies, et cette réflexion débouchait sur des publications, des groupes de réflexion réguliers et des stages où s'inscrivaient ceux qui voulaient (c'était le début de la mise en place de structure dévolues à la formation continue). Tout ça dans une très grande liberté.

Évidemment, l'idéalisation du passé englouti joue un rôle dans mon regard sur cette période, mais je crois qu'il y avait un élan qui s'est un peu perdu dans les sables.

Puisque Aline Robert m'a présentée ici avec une de mes casquettes, qui m'est chère, de militante de l'APMEP, j'évoquerai aussi la formation qui se met en place au sein d'une association de spécialiste comme celle là. Les ateliers des Journées Nationales sont un bon exemple. Le public est volontaire, il vient même en payant, et sur son temps de vacances. Bien sûr, on trouve de tout dans les ateliers de l'APM. Mais la majorité des interventions et des conférences sont de très grande qualité et l'ambiance est souvent un peu magique, parce que les gens qui sont là savent vraiment pourquoi ils sont là. C'est comme pour les élèves : l'envie d'être là favorise l'apprentissage.

> *Principe P4 : la formation entre pairs, la mutualisation des compétences sur le lieu de travail est un ressort de formation à ne pas négliger.*

> *Principe P5 : la formation gagne en efficacité si les formés sont eux-mêmes à l'origine de la démarche.*

Une autre approche est la formation dans la réalisation d'un projet commun. J'ai eu l'occasion pendant un certain nombre d'années de travailler dans un secteur assez riche sur le plan des mathématiques, Orsay et sa verte vallée, le pays de Daniel Perrin. Et d'y impulser diverses actions toutes basées sur l'échange et la confrontation de pratiques entre écoles primaires, collège, lycée et université. Jumelages de classes école-collège, collège-lycée, universitaires dans les classes, pratiques de clubs de maths et échanges entre ceux-ci…

Et là, je peux dire qu'on a tous beaucoup appris les uns des autres.

> *Principe P6 : la réflexion autour de son enseignement s'enrichit de la confrontation avec la pratique des gens des métiers voisins.*

Enfin, j'en arrive au bout, j'ai presque fini de vous raconter ma vie, avec mes expériences plus récentes de formateurs ces dernières années. J'ai été embauchée par la DAFOR (rectorat de Paris) pour animer des stages sur sites de liaison entre école et collège. Pour moi, ça a été une expérience mitigée. Bien sûr, on peut se dire qu'une petite graine semée finit presque toujours par germer et qu'avec des objectifs modestes, mine de rien, on peut faire évoluer les mentalités et les pratiques.

Alors pourquoi est-ce que je juge (sans doute avec un excès de sévérité) cette expérience négative ? Ça consistait à aller dans un collège (lambda, sans tradition particulière d'échanges

[9] Professeurs d'Enseignement Général de Collège, recrutés à partir de 1969 : professeurs enseignant deux disciplines, anciens instituteurs (corps en voie d'extinction).

inter degrés) et de mettre ensemble professeurs des écoles du secteur et profs de sixième. Le formateur avait pour rôle de faciliter les échanges. Outre des problèmes d'organisation et d'ambition de ces formations (où le côté pluridisciplinaire compliquait les choses), nous nous sommes heurtés à un problème structurel.

Ces formations sur site sont décidées par un chef d'établissement qui sent bien que ça ne se passe pas comme il voudrait et il fait appel à la formation continue pour l'aider à résoudre son problème. Les enseignants se sentent forcés d'assister au stage et perçoivent cette formation imposée comme une négation de leur compétence. Il faut vraiment être très bon pour renverser cet état d'esprit quand c'est le cas ! Je dois dire que notre plus sûr appui dans ces confrontations a été celui des enseignants du premier degré, qui contrairement aux profs de collège, concevaient la formation continue comme une pratique normale et pas comme une insulte à leurs compétences.

> *Principe P7 : la formation est plus fructueuse si elle apparaît comme une pratique usuelle, un complément habituel de l'acte d'enseigner.*

En conclusion

Dans la cité idéale du formateur Missenard…
- La réflexion autour de sa pratique ferait partie intégrante du métier d'enseignant.
- Il serait naturel pour un enseignant d'accepter régulièrement dans sa classe le regard des autres et les échanges qui en découleraient.
- Chaque acteur aurait plaisir à écrire chaque année quelques pages pour analyser ce qu'il a entrepris, ce qu'il a réussi, ce qu'il a voulu faire et pas fait, et le présenter à un regard externe, pas forcément hiérarchique.
- La formation entre pairs, la mutualisation des compétences sur le lieu de travail, serait une pratique banale.
- Les formations seraient fructueuses car les formés seraient eux-mêmes à l'origine de la démarche.
- La réflexion de chacun autour de son enseignement s'enrichirait de la confrontation avec la pratique des gens des métiers voisins.
- La formation apparaîtrait comme une pratique naturelle, un complément habituel de l'acte d'enseigner.

Quand toutes ces conditions seront réunies, l'expertise du formateur s'imposera comme une nécessité clairement perçue par tous : son rôle sera à la fois simple et essentiel !

Le point de vue d'un responsable de la préparation aux concours du CAPES et de l'Agrégation de mathématiques (D. Perrin)

Je suis responsable depuis 18 ans de la préparation au CAPES d'Orsay après avoir été pendant 15 ans responsable des préparations à l'agrégation des ENS de Sèvres et Ulm. Les idées que je présente ici ont été rédigées dans le rapport de la commission Kahane sur la formation des maîtres, auquel je renvoie[10].

Quelles interventions dans la formation ?

Je vais résumer les points forts de la préparation, comme responsable plutôt que comme intervenant. Il y a deux objectifs majeurs.

---

[10] Pour le trouver, il suffit de taper Kahane, formation des maîtres, sur Google.

La préparation à l'écrit : solidification des connaissances

Contrairement à certains, je ne pense pas du tout que la préparation à l'écrit du CAPES soit un bachotage[11], bien au contraire. Lorsque les étudiants abordent la préparation au CAPES, ils sont titulaires d'une licence, mais il faut se garder de croire que les connaissances qui figurent au programme de celle-ci sont acquises. Il y a au moins deux raisons pour qu'il n'en soit pas ainsi :

1) L'émiettement des modules, accentué encore par le système LMD, qui fait que les connaissances ne sont pas corrélées, qu'elles ne forment pas un tout cohérent.

2) Le système des examens et partiels qui fait qu'on n'interroge que sur une petite partie du programme, et en posant (en général) des exercices disjoints qui ne nécessitent pas une remise en ordre des connaissances.

Au contraire, l'écrit du CAPES, qui porte sur un programme vaste (même s'il ne fait intervenir essentiellement que les deux années L1 et L2), avec des problèmes complexes, où les parties s'enchaînent et où il s'agit de mettre en œuvre toutes les connaissances, oblige à ce travail de reconstruction, de stabilisation et de mise en cohérence.

La préparation à l'oral : le lien avec l'enseignement du second degré

C'est sans doute le point le plus important. L'intérêt de la préparation au CAPES, notamment de la préparation à l'oral, est de faire le lien entre les connaissances acquises lors des études supérieures et les connaissances à enseigner dans le second degré. Elle vise à donner le recul indispensable pour enseigner de manière souple et attentive. Je vais illustrer cette thèse par quelques exemples.

Le lien entre aires, intégrales et primitives

Dans leur cursus universitaire, les étudiants rencontrent l'intégrale de Riemann, voire celle de Lebesgue, mais, il est exceptionnel qu'on ait attiré leur attention sur les rapports entre ces notions et le problème de la mesure des aires ou des volumes. En particulier, la réflexion sur les liens entre aires, intégrales et primitives est souvent un peu courte, notamment par rapport au programme actuel.

Ces divers points sont abordés lors de la préparation à l'oral, dans l'exposé qui porte sur primitives et intégrales mais aussi lors des épreuves sur dossier (calcul de π par la méthode d'Archimède ou de Descartes, par exemple).

Les fonctions trigonométriques, la limite de sin x / x en 0

La plupart des étudiants, lorsqu'ils arrivent au CAPES, n'ont jamais rencontré une approche rigoureuse[12] des notions de longueur d'arc et d'aire qui permet de traiter géométriquement une question comme la limite[13] de $\sin x/x$ en 0. C'est important car, sans cette réflexion, les jeunes professeurs ne seront pas convaincus qu'un tel traitement géométrique est possible et s'empresseront d'admettre ces résultats sans en proposer une justification, même incomplète, à leurs élèves[14].

[11] Il pourrait y avoir bachotage si l'on connaissait d'avance le type d'épreuves qui seront proposées. Or, l'expérience montre, au contraire, qu'on ne peut jamais savoir ce qui va sortir, contrairement aux examens de l'université.

[12] Sauf peut-être via l'exponentielle complexe, totalement hors sujet ici.

[13] Quatre-vingt dix fois sur cent, si on leur demande d'établir l'inégalité $\sin x \leq x \leq \tan x$, qui permet de déterminer la limite de $\sin x / x$, ils étudient les fonctions différences en les dérivant, alors que ladite limite est le point de départ de la dérivation des fonctions trigonométriques.

[14] Pour voir qu'une approche géométrique consistante est possible, on regardera ce que proposaient sur ce sujet les manuels des années 1960, le livre de la collection Monge par exemple.

Quel bilan ?

Le bilan de la préparation au CAPES, dans la perspective de la formation des maîtres, me semble extrêmement positif, pour les raisons que j'évoquais plus haut : solidification des connaissances, lien entre les connaissances universitaires et celles enseignées dans le second degré.

Malgré cela, l'objectif principal de la préparation, qui est le passage d'un statut d'étudiant à un statut de futur professeur, n'est que partiellement atteint. Ainsi, on souhaiterait que, face à un exercice, les futurs professeurs ne se contentent pas de le résoudre, mais aussi :

1) Qu'ils comprennent comment cet exercice est fabriqué, comment on pourrait le modifier, etc. Par exemple, face à un exercice portant sur l'écriture de e à l'aide de la suite des $1/n$! qu'on trouve dans certains manuels rédigé avec des récurrences et des intégrations par parties, sans explication, il me semble essentiel que les futurs professeurs se demandent d'où sort cette méthode (en général ils ne se posent pas la question) et qu'ils y reconnaissent la formule de Taylor avec reste intégrale (qui leur est familière par ailleurs).

2) Qu'ils ne se contentent pas de trouver une solution (même si elle est suggérée par l'énoncé) mais qu'ils en cherchent d'autres, dans le but d'en trouver éventuellement une meilleure, et surtout, de prévoir les méthodes que pourraient utiliser des élèves, afin de les conforter ou de les réfuter.

L'expérience montre qu'il est très difficile d'atteindre cet objectif.

Quelles modifications ?

Bien entendu, aucune formation n'est parfaite et il est facile de repérer des manques. Dans le cas présent, j'en relèverai deux[15].

La géométrie

C'est un point sur lequel les études supérieures sont très pauvres et présentent un certain nombre de lacunes.

Euclide, Hilbert, etc.

Dans les cursus universitaires, la géométrie est souvent absente, ou très limitée. De plus, dans la préparation à l'écrit du CAPES elle est traitée, en général, dans le cadre des espaces vectoriels et affines. Or, cette approche n’est d’aucun secours pour un enseignant de collège[16]. Il serait au moins aussi important d’avoir une connaissance (qui n’a pas besoin d’être très approfondie) d’une axiomatique du type de celle d’Euclide-Hilbert. En effet, seule cette axiomatique leur donnerait les moyens de savoir sur quoi reposent les résultats de géométrie du collège et comment ils s’articulent les uns aux autres : c'est le souci de la cohérence.

Les polyèdres

C'est un point qui n'est pas abordé en général en préparation au CAPES, faute de temps, et qui est pourtant très important mathématiquement et culturellement. L'expérience que j'ai menée pendant des années en licence pluridisciplinaire montre que c'est tout à fait possible.

[15] Certains diront que l'absence d'une formation professionnelle est un manque du CAPES. Je ne suis pas vraiment d'accord avec cette opinion. Je pense en effet que chaque chose doit venir à son heure et que le système actuel qui renvoie (pour l'essentiel) la formation professionnelle à la seconde année d'IUFM n'est pas si mauvais.

[16] Au niveau de la terminale, elle est utile car elle permet aux enseignants d'avoir un « temps d'avance » sur leurs élèves. Par exemple, le passage par les applications linéaires permet de répondre très rapidement à la question de la composition de deux rotations planes.

D'autres points culturels importants : Erlangen, Bolyai, les géométries non euclidiennes

Je cite, en vrac, un certain nombre de points, que j'estime importants sur le plan culturel et que l'on pourrait aborder si le temps ne nous était pas compté.

- Le programme d'Erlangen. C'est un texte fondateur de la géométrie actuelle. Il s'agit surtout de reconnaître la nature d'un problème et d'identifier les outils appropriés pour le résoudre.
- Un théorème comme celui de Bolyai (qui dit que deux polygones de même aire sont équivalents par puzzle) est intéressant car il constitue la justification théorique des pratiques de découpage et recollement que l'on utilise à l'école et au collège.
- Enfin, il ne me semble pas normal qu'un professeur de mathématiques puisse ignorer qu'il existe des géométries non euclidiennes. C'est d'autant plus dommage qu'on peut aujourd'hui, grâce aux logiciels de géométrie dynamique, explorer très aisément ces géométries.

La modélisation

C'est un point qui est abordé lors de la préparation à l'oral du CAPES, mais encore insuffisamment à mon sens. Une amélioration en ce sens nécessiterait sans doute de réfléchir un peu plus aux liens qui unissent les mathématiques et les autres disciplines (et notamment la physique).

Des propositions ?

Dans l'état actuel des choses, avec ce que je peux connaître de la réforme qui se prépare et à laquelle je suis totalement, radicalement et définitivement hostile, avec le gouvernement et le président que nous avons, je me garderai bien de proposer quelque chose, de peur que cette proposition ne soit reprise à l'encontre des enseignants et de leur formation comme c'est le cas sans cesse à l'heure actuelle. Un seul exemple : les directeurs d'IUFM ont proposé, pendant des années, la masterisation de la formation des maîtres. Les voilà servis, à un détail près qu'ils n'avaient pas prévu, c'est que les IUFM vont sans doute en être les premières victimes.

Mathématiques et technologies - Apprentissage du professeur et stratégies de formation (Inés M^{a} Gómez-Chacón)

Introduction

Certaines questions proposées par l'organisation nous ont semblé spécialement intéressantes, notamment sur la formation des professeurs. Nous avons centré notre réflexion sur : Quel genre d'interventions réalisons-nous dans la formation des professeurs dans notre contexte ? Quel bilan faisons-nous ? Et quelles modifications nous semblent utiles ?

Afin de donner une réponse à ces questions, l'article est structuré de la manière suivante : premièrement, sont brièvement expliqués certains éléments de la formation des professeurs de Mathématiques en Espagne ; ensuite est présenté un exemple de formation initiale pour apprendre à enseigner les Mathématiques à l'aide des technologies que nous développons depuis 2006 dans la Facultad de Ciencias Matemáticas de l'Université Complutense de Madrid. Cet exemple est l'occasion d'expliciter des questions concernant la formation des professeurs de mathématiques et la technologie, le cadre théorique qui soutient la formation, la stratégie de formation, les activités menés et le bilan.

La formation de professeurs de Mathématiques en Espagne

De nos jours, la formation des professeurs de mathématiques en Espagne est observée à travers trois perspectives différentes : en tant que cadre institutionnel, en tant que contexte pratique de la Didactique des Mathématiques et en tant que domaine de recherche.

En Espagne, les domaines de recherche, Didactique des Mathématiques et formation des professeurs de Mathématiques sont mises en relation grâce à un lien commun, le contexte pratique de la formation de professeurs de Mathématiques et participent à l'organisation des plans de formation des professeurs.

De même, de nombreux efforts ont été réalisés pour expliquer les caractéristiques des modèles de formation des professeurs. La recherche d'un « modèle idéal » a entraîné une réflexion sur les éléments qui doivent caractériser le savoir professionnel désiré, en particulier pour la formation didactique et mathématique initiale des professeurs de l'école primaire et de secondaire. Des aspects théoriques et méthodologiques sous-jacents ont été rassemblés (Giménez, Llinares & Sánchez, 1996 ; Llinares, 2002 ; Carrillo & Climent, 1999 ; Rico, 2004 ; Gascón & Bosch, 2007 ; types d'actuation (Blanco & Contreras, 2002 ; Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez & Torra, 1995) ; ressources (Godino, 2004, Projet EDUMAT).

Ces travaux de recherche et de formation de professeurs se basent sur des cadres théoriques de référence très différents : il est ainsi très difficile de donner un résumé et un modèle unique pour le cadre de formation des professeurs en Espagne. Néanmoins, on peut souligner certains aspects dans lesquels la recherche du « modèle idéal » trouve un consensus. Par exemple : commencer le processus de formation des professeurs à partir du savoir empirique de l'apprentissage de l'enseignement et des représentations du professeur ; considérer le professeur de mathématiques comme un professionnel actif dans le contexte du cours de mathématiques ; renforcer le savoir du professeur pour enseigner les mathématiques ; développer de nouvelles compétences « personnelles » nécessaires suite aux changements sociaux qui concernent l'école, comme le mouvement migratoire, les contextes socioculturels multiples dans les classes et le développement des nouvelles technologies.

Pérez (2006) a réalisé une étude dans les centres d'enseignements de la sous-direction territoriale de Madrid-Capitale sur la situation réelle de l'intégration des TICs dans l'enseignement. Cette étude a mis en évidence que, même si les professeurs considèrent que les TICs contribuent à améliorer l'enseignement de la discipline et les considèrent comme un instrument nécessaire, l'intégration dans le processus d'enseignement des mathématiques n'est pas un phénomène généralisé. Dans certains niveaux d'enseignement, comme le premier cycle de secondaire, cette pratique est inexistante. En outre, un résultat de cette étude est qu'actuellement, les curricula ne proposent pas leur intégration. Les professeurs se servent des TICs et d'internet pour préparer les cours, élaborer des épreuves et des examens et pour obtenir de l'information liée à la matière. Il existe une demande de formation des professeurs sur les matériaux didactiques liée aux aspects curriculaires et méthodologiques.

Actuellement en Espagne, il existe des équipes qui cherchent à répondre à cette demande en proposant des projets de recherche financés par le Plan National sur les environnements d'apprentissage et le tutorat pour la formation d'enseignants, les modèles théoriques en didactiques des mathématiques dans un environnement informatique (Cobo et *al.,* 2007 ; Fortuny, 2008 ; Llinares, 2004).

Pour finir sur cet un aspect prospectif, la communauté de chercheurs a comme défi de donner une réponse au rôle que joue la création de certains processus de formation dans ce qu'apprend le professeur et de caractériser la façon avec laquelle on apprend, et en particulier dans les contextes d'apprentissage des mathématiques à travers des environnements technologiques.

Questions sur la formation des professeurs en mathématiques et en technologie

La question qui nous a guidée est le besoin d'une formation adéquate des professeurs pour l'implémentation des TICs dans le cours de mathématiques. Le travail du professeur dans le cours avec des environnements informatiques est complexe, il requiert des nouvelles compétences techniques, didactiques et mathématiques (Artigue, 2002 ; Trouche, 2005). Par conséquent, une révision des stratégies de formation initiale des professeurs de mathématiques est nécessaire dans ce domaine. Nous avons choisi la formation initiale des professeurs de mathématiques, en supposant que ces cours peuvent aider les professeurs en formation à apprendre des stratégies d'intégration et d'introduction, ce qui n'est pas le cas aujourd'hui.

Les hypothèses qui ont guidé cette proposition de formation sont les suivantes :

- H1 : le fait d'utiliser, comme étudiant, un software pour résoudre les problèmes de mathématiques pendant le cursus universitaire ne débouche pas de façon spontanée sur l'élaboration d'une méthode, comme professeur, pour l'intégration du software dans des situations d'enseignement ;
- H2 : l'influence positive que la formation à l'usage des TICs exerce dans l'activité de l'étudiant-professeur dans ses croyances et dans ses activités, apprendre à enseigner à travers des créations expérimentales d'intégration de technologie où se visualise l'articulation entre la genèse instrumentale d'utilisation et les besoins dans le développement professionnel du professeur (composantes cognitives, médiatiques, personnelles et institutionnelles).

En accord avec ces hypothèses ont été construites diverses expériences de situations de formation dans le cadre du développement du curriculum pour l'éducation supérieure (éducation mathématique dans la licence de Mathématiques), en suivant les directives du processus de convergence européen. Ces scénarios sont pensés pour que les étudiants universitaires du second cycle spécialisés en méthodologie et en didactique des Mathématiques (possibles futurs professeurs de mathématiques dans l'enseignement au lycée) acquièrent ou perfectionnent les compétences nécessaires pour enseigner les mathématiques en utilisant les nouvelles technologies dans les cours avec leurs élèves. On a appelé ces scénarios ESCEMMat (scénarios Multimédia pour l'apprentissage des mathématiques) ; le matériel relatif au curriculum de ces scénarios se trouve en format multimédia (en format site web avec des vidéos et des documents de texte, Fig.1).

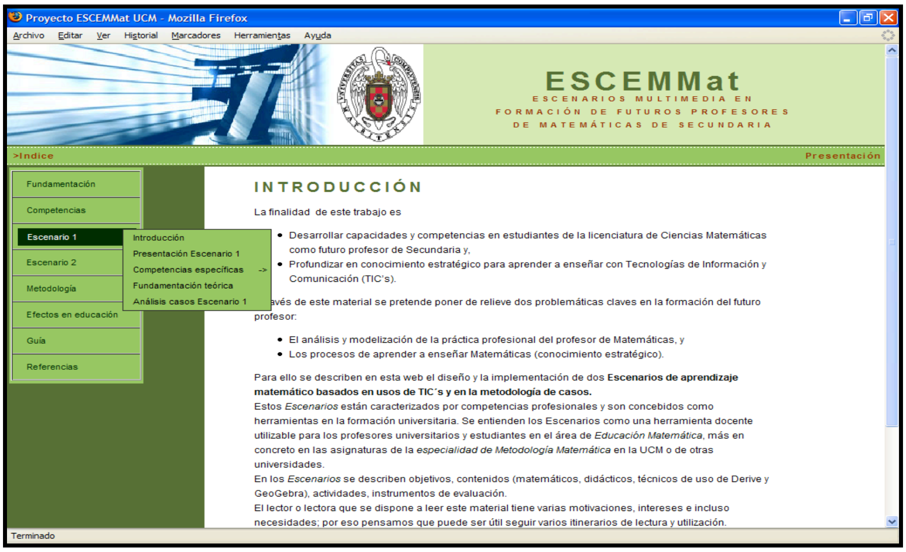


Fig. 1 - Introduction de site web ESCEMMat

Dans ce qui suit sont précisés le cadre théorique de référence en rapport avec la formation des professeurs et avec l'enseignement et l'apprentissage avec la technologie en mathématiques, puis la méthodologie utilisée dans la recherche (*Design Based Research*), et le processus formatif continu. Enfin sont évoquées les premières conclusions de ce travail.

Approche théorique

Les cadres théoriques pris en considération dans le développement de cette étude se réfèrent à la formation des professeurs, à l'enseignement et à l'apprentissage avec les nouvelles technologies dans le cours de mathématiques.

Pour l'établissement des compétences, l'analyse des pratiques d'enseignement et les situations spécifiques de formation, nous avons utilisé comme cadre conceptuel la double approche définie par Robert et Rogalski (2002) qui croise une approche d'ergonomie cognitive avec une approche didactique de l'activité du professeur. Néanmoins, cette double approche n'a pas été conçue pour analyser les pratiques du professeur dans des contextes technologiques. Pour cela, il a été nécessaire de considérer dans notre cadre, en tant que complément, l'approche instrumentale développée par Rabardel (1999) qui a déjà été prise en considération dans le cadre de l'éducation mathématique dans de nombreux études (voir Artigue, 2002 ; Haspekian, 2005 ; Trouche, 2005). L'idée principale de cette dernière approche est la genèse instrumentale, à travers laquelle l'être humain construit des schémas instrumentaux pour manier des instruments.

Dans ce projet, cette perspective a été prise en considération pour la création des sessions formatives à deux niveaux : le premier niveau, pour la détermination des compétences nécessaires aux étudiants pour apprendre à enseigner avec TICs ; le second niveau, pour étudier les aspects de médiation instrumentale et le schéma de l'utilisation dans l'élaboration des scénarios comme contenu du curriculum universitaire.

La présence d'un instrument modifie le triangle classique des trois pôles (professeur, élève, connaissance). La médiation de l'instrument agit sur deux angles :

- Pour les élèves, les instruments peuvent avoir une profonde influence dans la construction du savoir et les processus de conceptualisation ;
- Pour les professeurs, il est nécessaire d'avoir une connaissance stratégique pour gérer l'apprentissage des élèves dans la classe et manier les variables de compréhension du « comment l'instrument exerce une influence favorable aux connaissances mathématiques sur l'usager » (modélisation didactique et mathématique et transposition informatique).

En incorporant le cadre théorique de l'approche instrumentale pour l'intégration de programmes de software éducatif visant des mathématiques, tels que Derive et GeoGebra, dans les scénarios ESCEMMAT en tant qu'instruments d'enseignement et d'apprentissage, on a cherché à montrer le développement d'une genèse instrumentale par le professeur. Se sont ainsi manifestés les deux aspects cités dans le précédent paragraphe : en premier lieu, le phénomène d'instrumentalisation par lequel les deux instruments informatiques sont instrumentalisés par le professeur, exploités à des fins didactiques, qui développent de plus en plus leurs potentiels didactiques ; en second lieu, le phénomène d'instrumentalisation dans lequel le professeur, en tant qu'individu, part de ses propres schémas d'enseignement pour incorporer et stabiliser l'utilisation de ce programme pour apprendre des mathématiques.

Méthodologie et données

On a utilisé la notion de scénario d'apprentissage et la méthodologie de recherche *Design-based research* pour la création, le développement et la mise en œuvre d'ESCEMMAT, en considérant quatre aspects :

- l'aspect technologique (utilisation de la technologie dans les cours, contrôle de la

transposition informatique avec Derive et GeoGebra) ;
- l'aspect pédagogique et didactique (contrôle de la transposition didactique et des ressources des enseignants) ;
- l'aspect conceptuel (maîtrise du contenu mathématique) ;
- l'aspect professionnel (contrôle de la composante socio-institutionnelle et de la composante personnelle du professeur de Mathématiques de lycée).

La méthodologie *Design-based research* (Collins et *al.*, 2004) est une méthodologie de recherche systématique et flexible qui a pour but l'amélioration de la pratique éducative à travers une analyse interactive d'une création, un développement, et une implémentation, basés sur la collaboration entre chercheurs et professionnels de l'enseignement.

Les études ont lieu dans des situations réelles de la pratique quotidienne, organisées en deux phases : une phase d'anticipation et une phase de réflexion.

Ont été choisis deux thèmes précis qui apparaissent dans le curriculum des Mathématiques de lycée et deux instruments informatiques d'appui différents spécifiques des Mathématiques (un pour chaque thème), contenus que les professeurs en formation doivent apprendre à enseigner. Ceci donne lieu à deux scénarios de formation qui portent les titres suivants (voir Fig. 2) :

Scénario 1. Apprendre à enseigner les systèmes d'équations algébriques avec Derive.

Scénario 2. Apprendre à enseigner la fonction exponentielle avec GeoGebra.

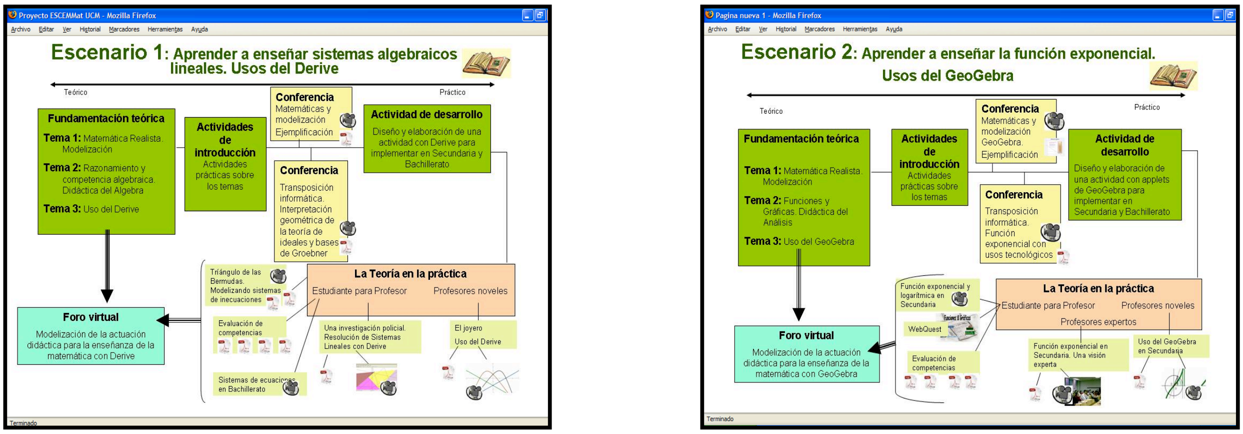


Fig.2 - Carte des Scénarios

Les scénarios sont conçus comme matériel de curriculum de formation. Pour cela, il est donc important de souligner qu'il faut différencier deux types de situations : situation de formation et situation d'enseignement. Dans ces situations s'établissent divers niveaux d'activité et de pratique pour le formateur ainsi que pour le professeur en formation.

Dans la situation de formation existent deux niveaux d'activité : activités du formateur (A1) et les activités du professeur en formation pendant la formation (A2). Dans les situations de formation, la double approche et l'approche instrumentale donnent accès au niveau du stage : P1, celle du Formateur, et le stage P2 du professeur en formation. Les tâches du professeur en formation sont liées au développement des mathématiques dans la mesure où elles construisent ses compétences professionnelles pour apprendre à enseigner à l'aide de la technologie. Dans ce niveau de stage (P2) le professeur en formation devra réaliser diverses tâches, relatives au maniement instrumental du software à l'apprentissage mathématique ainsi qu'aux tâches relatives à la création d'activités pour enseigner aux élèves. L'approche instrumentale permet d'analyser la genèse instrumentale proposée au professeur en stage.

Dans la situation d'enseignement on trouve les niveaux d'activité suivants : le niveau d'activité du formateur, le niveau d'activité du professeur en formation et le niveau des élèves de secondaire et de lycée. Le niveau d'activité du formateur est d'observation, d'analyse et d'évaluation du stage d'enseignement du professeur en formation (A3). Le niveau d'activité du professeur en formation requière des tâches qui créent et organisent l'activité de l'élève et établissent la genèse instrumentale de l'élève (A4). Il y a un autre niveau d'activité, le niveau d'activité avec les élèves de lycée. Les élèves doivent réaliser une tâche mathématique avec TICs. On peut l'analyser du point de vue de l'éducation mathématique et de l'approche instrumentale. Et l'observation des élèves de lycée du processus d'instrumentation et d'instrumentalisation, genèse qu'ils construisent (A5).

Dans les situations d'enseignement, la double approche nous permet d'analyser un autre niveau de stage, stages en contextes réels que l'on qualifie comme niveau P3. Il s'agit du stage du professeur en formation. Dans ce cas, sont pris en considération les niveaux d'activité (A4) et (A5) dans les composantes médiatiques et cognitives du stage. L'accès aux composantes sociales, personnelles et institutionnelles s'évalue au travers d'un questionnaire, un entretien et le mémoire du stage.

En dernier lieu, souligner que dans le modèle méthodologique d'instruction le point de vue réaliste de l'éducation mathématique a été pris en considération. On a souligné la modélisation mathématique qui permet de décrire en thermes mathématiques un phénomène réel, en obtenant des résultats mathématiques et l'évaluation et l'interprétation mathématiques d'une situation. Dans la création d'activités pour l'élève de lycée, en commençant par les questions d'environnement, on observe la réinvention des concepts, la progression graduelle entre différents niveaux d'abstraction, et l'acquisition des processus de résolution.

En suivant la méthodologie *Design-Based Research*, les phases sont combinées en diverses étapes temporelles, de façon cyclique, récursive, de la forme suivante :

Étape temporelle 1 : année 2006-2007 (avec 69 étudiants de professeur du deuxième cycle de la licence de mathématiques inscrits dans la matière Méthodologie mathématique et Stage d'enseignement.).

Phase I : *analyse initiale du problème* (phase d'anticipation). Création des activités de formations, élaboration de la première version du scénario 1 (apprendre à enseigner les systèmes d'équations algébriques avec Derive).

Élaboration de questionnaires d'évaluation et de diagnostic des compétences professionnelles.

Phase II : *expérimentation et implémentation* dans deux matières de la licence de mathématiques : Méthodologie Mathématique et Stage d'enseignement. Le formateur développe des sessions de formation sur la modélisation en mathématiques et sur l'instrumentalisation du software Derive pour des systèmes algébriques et polynomiaux. Les étudiants-professeur impliqués dans cette première étape temporelle, créent un stage pour expliquer les systèmes d'équation algébrique pour le niveau 1 de secondaire en utilisant comme instrument d'appui le programme de calcul symbolique Derive (Scénario 1). Après l'élaboration du stage par écrit, elle est révisée et corrigée. Ensuite, l'étudiant-professeur donne ce cours créé pour lui (et révisé) dans une classe réelle d'un lycée du quartier qui collabore avec nous. La leçon est enregistrée en vidéo pour son évaluation postérieure et incorporation dans les matériaux multimédia du scénario.

Phase III : *première évaluation* (phase de réflexion) de la part de l'équipe de recherche. Analyse de l'expérimentation et de l'étude des effets du scénario de formation dans les compétences professionnelles de l'étudiant de professeur. Réalisation d'études de cas. Incorporation des résultats pour l'amélioration des matériaux pour la formation correspondante au scénario 1.

Étape temporelle 2 : année 2007-2008 (avec 38 étudiants de professeur du deuxième cycle de la licence de mathématiques inscrits dans la matière Méthodologie mathématique).

Phase I : *analyse initiale du problème* (phase d'anticipation). Design des activités de formation, élaboration de la première version du scénario 2 (apprendre à enseigner la fonction exponentielle avec GeoGebra). Réélaboration des questionnaires d'évaluation et diagnostic des compétences professionnelles.

Phase II : *expérimentation et implémentation* dans une matière de la licence de mathématiques. Méthodologie mathématique : le formateur développe des sessions de formation sur la modélisation en mathématiques et sur l'instrumentalisation du software GeoGebra, en plus, il possède le matériel du scénario 1 comme exemple et pour l'analyse des stages. Ensuite, les étudiants doivent élaborer le guide d'un stage par écrit en incluant tous les détails pour, après l'avoir corrigé, donner ce cour dans une classe réelle de lycée en expliquant la fonction exponentielle avec GeoGebra (scénario 2). Les étudiants de cette deuxième étape temporelle travaillent activement avec les matériaux élaborés dans la première étape à travers les matériaux du scénario 1, créés et élaborés pour le format web.

Phase III : *phase de réflexion de l'équipe de recherche*. Analyse de l'expérimentation et étude des effets du scénario 2 de formation dans les compétences professionnelles de l'étudiant de professeur. Réalisation de l'étude de cas. Nouvelle restructuration de la création du scénario 1, ajuster les compétences, ses niveaux et l'affinage des éléments d'évaluation et diagnostic (phase de réflexion dans la deuxième étape temporelle).

Phase IV : *phase finale de réflexion* de la part de l'équipe de recherche. Évaluation finale, réajustage du modèle et du matériel de formation et du diagnostic des compétences professionnelles.

Le type de registre utilisé pour la prise de données a été des enregistrements en vidéo, des colloques, des questionnaires pour la détermination des compétences et des protocoles de résolution des problèmes.

L'évaluation et la fiabilité de la méthodologie utilisée ont été internes et externes. La fiabilité interne se réfère à la fiabilité des méthodes utilisées dans le projet de recherche. Les mesures pour obtenir ce genre de fiabilité ont inclus un ramassage systématique de données, un établissement préalable de catégories et postérieurement un contraste avec des experts. Dans l'application de protocoles de diagnostic et d'analyse de compétences on a compté avec des juges externes, ce qui a permis une comparaison triangulaire de perspectives. Pour la fiabilité externe le critère appliqué est la reproductibilité. Ce qui a exigé une transparence, une explicitation du processus et un itinéraire de formation. De plus, le choix d'une méthodologie comme celle de *Design-Based Research* comporte un développement cyclique de recherche, ramassage de données et leur interprétation, ce qui entraîne de façon continue des éléments de contrôle et d'ajustage.

Résultats et premières conclusions

Les résultats de cette étude nous ont permis de confirmer nos hypothèses et de décrire les difficultés qu'ont les étudiants professeurs de mathématiques au lycée pour apprendre à enseigner avec TICs. Suite aux analyses de cas des deux scénarios à travers les questionnaires d'évaluation, ont été identifiés divers profils d'étudiants, en accord d'un côté avec les compétences cognitive, médiatique, personnelle, et, d'un autre côté avec la genèse, le maniement instrumental du software et la transposition informatique montrés dans les modules d'enseignement. Pour finir, on a réussi à décrire avec notre recherche les points forts et les points faibles de l'utilisation des applications interactives et à concevoir les enregistrements digitaux en vidéo des cours de mathématiques comme instruments pour le développement des compétences professionnelles et le contenu du curriculum concernant l'apprentissage de l'enseignement des mathématiques avec TICs.

Voici brièvement quelques résultats.

- Détection de trois profils d'étudiants. Ces profils se caractérisent selon la position, professionnelle ou vocationnelle, la conception des mathématiques, les attitudes envers les TICs, la maîtrise des contenus mathématiques et de résolution de problèmes, la maîtrise de l'organisation du curriculum, la connaissance instrumentale du software et selon d'autres habilités génériques instrumentales et interpersonnelles.
- Détection des difficultés pour apprendre à enseigner les mathématiques avec TICs : 35% des étudiants présentent une difficulté dans la modélisation d'un problème réel, notamment un manque de créativité et d'initiative lorsqu'il s'agit de créer des exemples et de les poser en cours. Un pourcentage élevé d'étudiants a des difficultés pour articuler le modèle mathématique avec le software didactique et un manque de pratique dans son utilisation en cours. On observe une discontinuité entre la tâche prescrite par le professeur et la tâche réalisée par les étudiants.
- On a observé l'influence positive qu'ont les scénarios créés et les enregistrements digitaux en vidéo des cours de mathématiques comme instruments pour le développement des compétences professionnelles et pour une meilleure visibilité de l'articulation entre la genèse instrumentale d'utilisation et les requêtes dans le développement professionnel du professeur (composantes cognitive, médiatique, personnelle et institutionnelle).
- Dans l'étude de cas, on observe que pour arriver à apprendre à enseigner avec les TICs, il est nécessaire d'avoir une attitude positive face à la technologie et aux mathématiques, et un des facteurs importants pour ces attitudes est la maîtrise instrumentale (processus conscients d'instrumentation et d'instrumentalisation).

Pour terminer, il faut souligner le besoin d'une application plus étendue (une durée majeure des étapes, une population plus nombreuse avec une formation plus homogène et plus de disciplines dans lesquelles on puisse aborder ce sujet) pour pouvoir avoir une meilleure évaluation du modèle proposé de formation des enseignants. Cela fournirait des éléments décisifs à la tâche complexe de spécifier et mieux détailler les niveaux, les descripteurs et les indicateurs des compétences utilisées.

Remerciements

Cette étude a été possible grâce au financement des projets : *Proyectos de Innovación y Mejora de la Calidad Docente* nº 463 (PIMCD) du Vice-rectorat de Recherche de l'Université Complutense de Madrid. Le Projet ASTROCAM (referencia S-0505/ESP/000237) subventionné par la *Dirección General de Universidades e Investigación de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid*.

Conclusion (A. Robert)

Ces interventions, très diversifiées, illustrent vraiment bien l'intérêt, voire la nécessité, de croiser différents points de vue sur la formation. L'importance de tenir compte de tous les acteurs pour mieux comprendre et ce qui se joue et sur quoi intervenir apparaît comme cruciale. On peut percevoir à la fois les progrès qui ont été faits dans ce domaine et les besoins qui restent cependant, notamment sur la compréhension de la genèse et de l'enrichissement des pratiques enseignantes.

Les pratiques enseignantes font ainsi intervenir de nombreuses dimensions, qu'on peut énumérer en termes de types de connaissances – nous en avons eu quelques aspects, connaissances mathématiques, pédagogiques, professionnelles (cf. Perrin, Labroue, Missenard). Un autre point de vue, complémentaire, développé par des didacticiens, a été illustré dans les deux interventions didactiques de Butlen et Chacón : la complexité des pratiques y est abordée comme telle, et les différentes dimensions ne sont pas juxtaposées mais tissées de concert. Cela implique des formations faisant intervenir simultanément diverses connaissances, pas nécessairement étiquetées mais mises en fonctionnement sur une situation de classe limitée. Cela demande des ajustements permanents, des improvisations permises par la conjoncture. C'est dans un deuxième temps qu'on remonte à des aspects plus globaux. Mais cela demande aussi des connaissances disponibles chez les formateurs !

Plus généralement, on peut penser que c'est en tirant parti des croisements des différents cadres théoriques utilisés pour analyser les pratiques enseignantes qu'on avancera dans le décryptage de leur complexité et dans la constitution du stock de connaissances utiles.

Ce que je soulignerai enfin dans cette conclusion, en y revenant, c'est l'importance à mes yeux de ce constat évident après les diverses interventions de la table ronde : la manière même de poser les questions de pratiques et de formation diffère selon la position dans le système.

Ainsi, je pense qu'un des enjeux de l'amélioration de la formation tient non seulement à la qualité des recherches sur les pratiques, absolument indispensables, mais aussi à la prise en compte explicite des différences de position et à la qualité du travail de communication, de transposition, qui est organisé. Et cela doit aller dans les deux sens : des chercheurs aux formateurs et aux enseignants et des enseignants aux formateurs et aux chercheurs…

Me référant à Vygostki, une fois de plus, je dirai, en reprenant ma casquette de chercheure en didactique des mathématiques, et de manière un peu caricaturale et imagée, que si nous n'arrivons pas à intervenir le plus souvent possible dans la « Zone Proximale de Développement » des pratiques des enseignants avec lesquels nous travaillons, nous risquons de perdre une partie des bénéfices de la formation. « Reste » à déterminer ce qui est proche des pratiques des acteurs, et à élaborer des situations où ces acteurs se retrouvent, tout en avançant…

Voilà un thème pour un futur colloque, même si j'espère que ce colloque-ci aura, entre autres, déjà un peu servi ce projet !

Catherine Houdement
Université de Rouen, Laboratoire de didactique André Revuz
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Denis Butlen
Université de Nantes, CREN
denis.butlen@univ-nantes.fr

Francis Labroue
IA-IPR à Paris
francis.labroue@ac-paris.fr

Claudie Asselain-Missenard
Professeur de mathématiques, Académie de Paris, Militante de l'APMEP
claudie.m@club-internet.fr

Daniel Perrin
Université de Cergy-Pontoise
daniel.perrin@math.u-psud.fr

Inés Mª Gómez Chacón
Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Aline Robert
Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de didactique André Revuz
robert@math.uvsq.fr

Références

Alsina C., Burgués C., Fortuny J. M., Giménez J. & Torra M. (1995). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

Blanco L. J. & Contreras L. C. (2002). Un modelo formativo de maestros de Primaria, en el área de matemáticas, en el ámbito de la Geometría, En L. C. Contreras y L. J. Blanco (Eds.) *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas*. Una mirada a la práctica docente. Cáceres: Universidad de Extremadura. pp. 89-118.

Briand J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique*. Thèse Bordeaux.

Cobo P., Fortuny J. M., Puertas E., Richard P. R. (2007). AgentGeom: a multiagent system for pedagogical support in geometric proof problems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12, 57–79.

Collins A., Joseph D & Bielacczyc K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues". *The journal of the learning sciences*, V3(1), 15-42.

Carrillo J. & Climent N. (Eds.) (1999). *Modelos de formación de maestros en Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva.

Fortuny J. (Coord) (2008). *IV Seminario I+D sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación del Profesorado de Matemáticas*. Universidad Autónoma de Barcelona.

Gascón J. & Bosh M. (2007). La miseria del "generalismo pedagógico" ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz-Higueras et al. (Eds) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Universidad de Jaen, 201-240.

Giménez J., Llinares S., Sánchez V. (Eds.) (1996). *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares. Mathema, 8.

Godino J. D. (Ed.) (2004). *Didáctica de la Matemática para Maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.html.

Gómez-Chacón I. Mª & Joglar N. (2008). Escenarios multimedia para aprender a enseñar matemáticas con nuevas tecnologías. Estudio de Casos. *V Congreso de Docencia Universitaria*. Universidad de Valencia.

Haspekian M. (2005). An Instrumental Approach to Study the Integration of a Computer Tool Into Mathematics Teaching: the Case of Spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 109–141.

Hohenwarter M. & Lavicza Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. In D. Küchemann (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*. 27(3). University of Northampton, UK: BSRLM.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 11, 175-195.

Llinares S. (2002). Participation and reification in learning to teach. The role of knowledge and beliefs. En G. C. Leder, E. Pehkonen and G. Torner (Edts.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* Dordrecht: Kluwer Academic Pb. pp. 195-209.

Llinares S. (2004). Building virtual learning communities and the learning of mathematics by student teachers. *Conference presented in ICME 10*, Copenhagen, Denmark, http://www.ICME-10.dk.

Perez A. (2006). El profesorado de matemáticas ante las Tecnologías de la Información y la Comunicación, *La Gaceta de la RSME*, vol 9(2), 521-544.

Perrin D. (2005). *Mathématique d'école. Nombres, mesure et géométrie*. Cassini.

Rabardel P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, conférence, *Actes de l'université d'été, Université de Caen*.

Rico L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas de Secundaria. Profesorado, *Revista de currículum y formación del profesorado*, 8 (1).

Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves…. *Petit x,* 63.7-29.

Robert A. & Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies,* 2 (4), 505-528.

Rogalski M., Pouyanne N. & Robert A. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre et géométrie*. Ellipses.

Trouche L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 25/1, 91-138.

Wenger E. (2005). *La théorie des communautés de pratique. Apprentissage, sens et identité*. Traduction Traduction et adaptation de F. Gervais, Presses de l'Université Laval, Canada.

Programme du colloque

Jeudi 4 septembre 2008

9h Accueil des participants

10h-10h30 Ouverture du colloque

10h30-12h Conférence d'ouverture et présentation de l'ensemble
Marie-Jeanne Perrin et Aline Robert.

12h-14h Repas

14h-18h Enseignement des mathématiques au début de l'enseignement supérieur

14h-16h Travail dans 5 ateliers en parallèle

- Atelier 1 : Autour de l'enseignement des intégrales. Marc Rogalski et Jean-Luc Dorier.
- Atelier 2 : Recherche et enseignement universitaire en mathématiques, interactions actuelles et possibles. Carl Winsløw.
- Atelier 3 : Utilisation des technologies informatiques, notamment des exerciseurs. Fabrice Vandebrouck et Bernadette Perrin-Riou.
- Atelier 4 : Les mathématiques dans la formation des ingénieurs. Avenilde Romo et Safouana Tabiou.
- Atelier 5 : La modélisation de situations réelles et l'utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires. María Trigueros.

16h-16h30 Pause

16h30-18h Discussion générale sur le thème à partir des réactions de « grands témoins » des ateliers. Les « grands témoins » étaient respectivement : André Bellaïche, Nicolas Pouyanne, Marie-Claude David, Rudolf Straesser et Laurent Vivier.
Animation Fabrice Vandebrouck.

Vendredi 5 septembre

8h45-12h30 Technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques

8h45-10h45 Communications réparties dans trois groupes en parallèle, avec un réacteur par intervention pour lancer le débat.

10h45-11h Pause

11h-12h30 Table ronde : Technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques, où en est-on dans les recherches et dans leur intégration ?
Paul Drijvers, Jean-Baptiste Lagrange, Maria-Alessandra Mariotti, Kenneth Ruthven.
Animation Michèle Artigue.

12h30- 14h repas

14h-17h45 Enseignement des mathématiques et appui sur le réel

14h-16h Communications réparties dans trois groupes en parallèle, avec un réacteur par intervention pour lancer le débat.

16h-16h15 Pause

16h15-17h45 Table ronde : Pourquoi et comment appuyer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques sur le réel ?
Paolo Boero, Alain Kuzniak et Rudolf Straesser.
Animation Bernard Parzysz.

Samedi 6 septembre

9h-12h Étude des pratiques des enseignants de mathématiques

9h-10h30 Autour de deux ouvrages écrits par des chercheurs de DIDIREM, réactions et questions aux auteurs :

- « La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants » (Fabrice Vandebrouck éditeur, Octarès, Toulouse). Gérard Vergnaud et Cécile Ouvrier-Buffet.
- « Dur, Dur d'enseigner en ZEP » (Marie-Lise Peltier éditrice, La Pensée Sauvage, Grenoble). Lalina Coulange et René Cori.

10h30-10h45 Pause

10h45-12h Débat sur le thème de l'étude des pratiques des enseignants.
Introduction Gérard Sensevy[1] et Marie-Jeanne Perrin.

12h-14h Repas

14h-16h Table ronde autour de la formation des enseignants
Denis Butlen (professeur des universités, formation des professeurs des écoles), Francis Labroue (inspecteur pédagogique régional), Claudie Missenard (professeur de collège, APMEP), Daniel Perrin (professeur des universités, préparation au CAPES) et Inés Gómez Chacón (Université Complutense de Madrid).
Animation Aline Robert.

16h-16h30 Bilan, clôture du colloque

[1] Gérard Sensevy, empêché, n'a pu participer au colloque et a été remplacé pour cette introduction par Michèle Artigue.

Liste des participants

NOM	PRENOM
ABDELLI	MOULOUD
AGIE-de-SELSATEN	SEBASTIEN
ALDON	GILLES
ARDITI	SARA
ARNOUX	PIERRE
ARTIGUE	MICHELE
ASSELAIN-MISSENARD	CLAUDIE
BARDI	ANNE-MARIE
BARON	GEORGES-LOUIS
BARRERA	RAQUEL
BATTON	AGNES
BEAUFILS	DANIEL
BECART	ALEXANDRE
BLANCHARD	MAHA
BOERO	PAOLO
BOYER	JEAN-YVES
BRIDOUX	STEPHANIE
BULF	CAROLINE
BUTLEN	DENIS
CABASSUT	RICHARD
CABOT	CLAUDE
CARRIZOSA	TERESA
CARULLA	CRISTINA
CASTELA	CORINE
CASTEL-DOMPS	SYLVIE
CAZES	CLAIRE
CERNANOVA	VIERA
CHACON-GOMEZ	INES
CHAMBRIS	CHRISTINE
CHARLES-PEZARD	MONIQUE
CHESNAIS	AURELIE
CHEVALIER	CLAUDINE
CHEVENOTOT-QUENTIN	FRANCOISE
CLERC	BENJAMIN
CLIVAZ	STEPHANE
COLMEZ	FRANCOIS
CORI	RENE
COULANGE	LALINA
DAINA	AUDREY
DARTOIS	YANN
DE-HOSSON	CECILE
DE-PAULIS	THERESE
De-VLEESCHOUWER	MARTINE
DENYS	BERNADETTE
DORIER	JEAN-LUC
DOUAIRE	JACQUES
DOUEK	NADIA

DRIJVERS	PAUL
DUMORTIER	DOMINIQUE
EGRET	MARIE-AGNES
EMPRIN	FABIEN
ESTEVENS	FATIMA
FAVRE	JEAN-MICHEL
FINKEL	ALAIN
FOURDINIER	ELIZABETH
GALISSON	MARIE-PIERRE
GINOUILLAC	STEPHANE
GODIN	MARC
GOSSET	HELENE
GRENIER	DENISE
GRENIER-BOLEY	NICOLAS
GRUGEON	BRIGITTE
GUEUDET	GHISLAINE
HACHE	CHRISTOPHE
HACHE	SEBASTIEN
HAHN	CORINE
HANNOUN	PASCALE
HARINCK	PASCALE
HASPEKIAN	MARIAM
HENRY	VALERIE
HERAULT	FRANCOISE
HERSANT	MAGALIE
HOROKS	JULIE
JARRAUD	PIERRE
JEDDI	AHMED
JIMENEZ	EDOUARDO
KUNTZ	GERARD
KUZNIAK	ALAIN
LABROUE	FRANCIS
LAGRANGE	JEAN-BAPTISTE
LAGUERRE	ERIC
LAJARA	SEBASTIEN
LAMBRECHT	PAULINE
MAC-ALEESE	JACQUELINE
MALABRY	YVAN
MALONGA	FERNAND
MARACCI	MIRKO
MARECHAL	CELINE
MARIOTTI	MARIA-ALESSANDRA
MATHE	ANNE-CECILE
MATHE	STEPHANIE
MAURINES	LAURENCE
MENSOURI	LACHEN
MESQUITA	ANA
MESSEANT	VERONIQUE
MICHAUX	CHRISTIAN
MISSIRDI	MILOUD
MOULIN	SIMON
MOUNIER	ERIC
MUTIMBITIMBU	BATOTELE

NAJAR	RIDHA
OUVRIER-BUFFET	CECILE
PARIES	MONIQUE
PARZYSZ	BERNARD
PENNINCKX	JACQUELINE
PERRIN	MARIE-JEANNE
PERRIN	DANIEL
PERRIN-RIOU	BERNADETTE
PILLONEL-WYRSCH	ROLAND-PIERRE
PINEAU	KATHLEEN
POIRET	DOMINIQUE
POUYANNE	NICOLAS
PRESSIAT	ANDRE
PUIG-RENAULT	ISABELLE
RAOULT	JEAN-PIERRE
RAYMOND-BAROUX	DOMINIQUE
RICHARD	PARICIA
ROBERT	ALINE
RODITI	ERIC
RODRIGUEZ	RUBEN
ROGALSKI	JANINE
ROGALSKI	MARC
ROMO-VASQUEZ	AVENILDE
ROYAL	JASON
RUMELHARD	GUY
RUMINOT	CAROLINA
SANCHEZ-GARCIA	MANUEL-PEDRO
SANCHIS	AURORA
SAVARD	GENEVIEVE
SAYAC	NATHALIE
SCHLOSSER	FABIEN
SENSEVY	GERARD
SKILBECQ	PHILIPPE
SOURY-LAVERGNE	SOPHIE
STRAESSER	RUDOLF
TABIOU	SAFOUANA
TANDONNET	GUENIEVRE
TAVEAU	CATHERINE
TRAN	KIEM-MINH
TRIGUERAS	MARIA
TROUCHE	LUC
VANDEBROUCK	FABRICE
VANDERSTRAETEN	RENEE
VENGU	THOMA
VERGNAUD	GERARD
VIVIER	LAURENT
WINSLOW	CARL
XHONNEUX	SEBASTIAN

Approches plurielles en didactique des mathématiques

Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?

Actes du colloque DIDIREM
Coordonnés par Cécile Ouvrier-Buffet et Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Le colloque DIDIREM, intitulé « Approches plurielles en didactique des mathématiques », s'est déroulé les 4, 5 et 6 septembre 2008 à l'Université Paris Diderot-Paris 7. Le présent ouvrage en constitue les actes.

Ce colloque s'est centré sur des questions au cœur des recherches actuelles de l'équipe, dont certaines rencontrent aussi l'actualité. Depuis 25 ans, l'équipe DIDIREM a engagé des travaux qui cherchent à apporter des réponses à des problèmes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, de l'école primaire à l'enseignement supérieur, y compris la formation des maîtres. Il s'agit de mieux comprendre ce qui se joue, en classe, au niveau des savoirs, tant du point de vue de l'enseignant que de celui des élèves. Les travaux de l'équipe sont aussi marqués par un croisement de différents cadres théoriques référant principalement aux théories didactiques développées en France ainsi qu'aux théories de l'apprentissage ou à l'ergonomie cognitive.

Quatre thèmes structurent les actes du colloque :

- L'enseignement des mathématiques au début de l'enseignement supérieur ;
- Les technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques ;
- Enseignement des mathématiques et appui sur le réel ;
- L'étude des pratiques des enseignants de mathématiques.

Les travaux sur les thèmes sont complétés par une conférence introductive où sont abordées les problématiques de l'équipe et certaines de ses avancées, et par une table ronde de clôture sur la formation des maîtres où différents acteurs de la formation confrontent leurs points de vue avec ceux de didacticiens.

Le colloque « Approches plurielles en didactique des mathématiques » s'est voulu un reflet de la vie de l'équipe. Ce colloque a aussi marqué la fin d'une période, celle de l'équipe DIDIREM, et l'entrée dans une ère nouvelle, celle du Laboratoire de didactique André Revuz, où, aux quatre grands thèmes de recherche de l'équipe DIDIREM s'en ajoute dorénavant un nouveau : l'enseignement des sciences physiques et chimiques.

Ldar
Laboratoire de Didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie