

iren
PARIS 7

N° 59
octobre 2009

Ldard

Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

Cahiers de didirem

Mémoire de Master

**Un exemple d'étude de gestion des déroulements en
travaux dirigés de Mathématiques à l'Université**

Nicolas Grenier-Boley

ISSN : 2102-4871

**INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT**

Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux
dirigés de Mathématiques à l'Université

NICOLAS GRENIER-BOLEY

Table des matières

1	Rappels de résultats de recherche et problématique principale	4
1.1	Résultats de recherche généraux	5
1.1.1	Les enseignants	5
1.1.2	Les élèves, les étudiants	5
1.1.3	Outils d'analyse	6
1.2	Résultats de recherche par domaine	7
1.2.1	Géométrie	7
1.2.2	Algèbre Linéaire	7
1.2.3	Analyse	9
1.3	Problématique	9
2	Cadrage théorique et méthodologie	12
2.1	Cadrage théorique général	12
2.2	Méthodologie globale	13
2.3	Contexte et conditions de la recherche	17
2.3.1	Choix du domaine	17
2.3.2	Description rapide des données recueillies	18
3	Analyse a priori et déroulement de quelques exercices	19
3.1	Exercice 1 Feuille 2	19
3.2	Exercice 4 Feuille 2	22
3.3	Exercice 5 Points 1 et 2 Feuille 2	23
3.4	Exercice 5 Points 3 et 4 Feuille 2	26
3.5	Exercice 5 Point 5 Feuille 2	27
4	Résultats globaux	29
4.1	Résultats bruts	29
4.2	Retour aux tâches mathématiques sollicitées	31
4.2.1	Type 1	32
4.2.2	Type 2	32
4.2.3	Type 3	33
4.2.4	Type 4	34
4.2.5	Type 5	35

4.3	Compléments relatifs aux prologues et aux postlogues	35
4.4	Résumé des résultats globaux	37
5	Résultats complémentaires	39
5.1	Problématique	39
5.2	Méthodologie	40
5.3	Résultats	41
5.3.1	Types 1 et 2	41
5.3.2	Type 3	43
5.3.3	Types 4 et 5	43
5.4	Résumé des résultats locaux dans l'enseignement supérieur	43
6	Ouverture sur l'enseignement secondaire	45
6.1	Description rapide des séances	45
6.2	Résultats globaux dans l'enseignement secondaire	47
6.2.1	Déroulements des séances	47
6.2.2	Bilan de la gestion globale de l'enseignant du secondaire	48
6.3	Résultats complémentaires dans l'enseignement secondaire	49
7	Conclusion	51
7.1	Résumé des résultats obtenus	51
7.2	Limites	53
7.3	Perspectives	54
A	Enoncés des exercices d'Algèbre Linéaire	56
A.1	Feuille 2 : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	56
A.2	Feuille 3 : Familles de vecteurs	58
B	Visualisation des différents types	59
C	Indicateurs locaux dans l'enseignement supérieur	61

Introduction

Dans ce travail, nous nous posons la question générale de la gestion des déroulements par l'enseignant du supérieur en travaux dirigés.

Dans le chapitre 1, nous rappelons brièvement les ruptures déjà constatées entre ces deux institutions avant de motiver puis énoncer notre problématique principale.

Dans le chapitre 2, nous motivons et décrivons le choix d'un cadrage théorique et d'une méthodologie globale avant de reformuler notre problématique.

Dans le chapitre 3, nous montrons sur des exemples la mise en oeuvre de la méthodologie globale avant d'analyser les résultats qu'elle permet d'obtenir dans le cas d'un enseignant du supérieur dans le chapitre 4.

Dans le chapitre 5, nous complétons les résultats précédents par une analyse complémentaire qui nous permet d'affiner les constations faites au chapitre 4.

Le chapitre 6 se veut comme une ouverture vers la gestion des déroulements dans l'enseignement secondaire.

Nous terminons ce travail par une conclusion portant sur les résultats obtenus et sur les limites et les perspectives de ce travail. Le lecteur trouvera en fin de volume des annexes destinées à préciser certains points du mémoire.

Nous ne voulons pas terminer cette introduction sans remercier Aline Robert qui nous a initié à la recherche en Didactique des Mathématiques et sans qui ce travail n'aurait pas pu voir le jour.

Chapitre 1

Rappels de résultats de recherche et problématique principale

Dans ce premier chapitre, nous commençons par rappeler des résultats de recherche en Didactique des Mathématiques concernant la transition entre enseignement secondaire et enseignement supérieur ou concernant l'enseignement supérieur lui-même avant de dégager la problématique principale de notre travail.

Disons tout de suite que nous comprenons le terme “transition” comme l'évolution des élèves, des savoirs, des enseignants entre la fin du Lycée (et plutôt à partir de la terminale scientifique) et le début de l'Université aussi bien que comme les changements d'états entre ces deux institutions ou l'aménagement de ces changements au sein de ces institutions.

Précisons aussi que nous ne prétendons ici nullement à l'exhaustivité mais que nous cherchons plutôt à présenter des résultats de recherche (qu'ils soient des résultats de recherche généraux, des constats de rupture entre enseignement secondaire et enseignement supérieur ou des développements théoriques ou méthodologiques) qui servent l'un des deux buts suivants (ou les deux) :

- ils peuvent potentiellement alimenter le questionnement de notre problématique principale;
- ils nous offrent la possibilité de pouvoir justifier les choix méthodologiques que nous ferons au chapitre suivant.

Il nous paraît délicat de poser des questions de transition ou de rappeler des résultats de recherche dans le contexte international puisque les institutions sont différentes d'un pays à l'autre et les cadres théoriques de recherche sont nombreux. En conséquence, nous avons choisi de restreindre ces rappels aux travaux en langue française tout en ayant conscience qu'il s'agit là d'une réelle restriction susceptible de limiter la portée de notre travail.

Pour ces rappels, nous nous sommes largement inspiré du bilan fait par Gueudet sur la transition secondaire/supérieur à l'occasion de la treizième école d'été de Didactique des Mathématiques (voir [14] ou [15]) et d'un numéro de la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* consacré à l'enseignement supérieur (et plus spécifiquement des articles d'Artigue [1], Dorier [8] et Robert [21]).

1.1 Résultats de recherche généraux

Pour des raisons de présentation, nous avons regroupé les résultats de recherche généraux en trois catégories selon qu'ils concernent plutôt l'enseignant, les élèves/étudiants ou qu'ils décrivent des outils d'analyse de savoirs. Sauf mention contraire le terme "élève" renvoie, dans ces rappels, aux élèves de fin de Lycée ou aux étudiants du début de l'enseignement universitaire et le terme "enseignant" à l'enseignant qui correspond au public d'élèves considéré.

1.1.1 Les enseignants

Pour Robert [21], même si les pratiques des mathématiciens professionnels sont diverses, elles ont un certain nombre de points communs¹. Elle constate que les mathématiques enseignées au Lycée commencent à ressembler aux mathématiques des experts (et que cette tendance s'accroît au niveau de l'Université) et fait l'hypothèse que certaines "*pratiques des mathématiciens professionnels [...] servent en partie de modèle aux enseignants*". Cette référence aux mathématiciens experts n'est toutefois "*ni explicite, ni tout à fait analogue d'un enseignant à l'autre*" ce qui peut permettre de penser qu'il y aura une grande hétérogénéité des pratiques et attentes de ces enseignants (notamment à l'Université). Ravel [18] constate aussi une grande hétérogénéité des pratiques des enseignants du secondaire malgré les contraintes inhérentes à l'institution.

Dans [10], Durand-Guerrier et Arsac mettent en valeur une grande hétérogénéité des attentes des enseignants du supérieur en matière de démonstration et de rigueur. Les enseignants du supérieur méconnaissent parfois les programmes de l'enseignement secondaire et semblent insuffisamment renseignés en ce qui concerne les attentes des étudiants débutants (Gueudet [13]). Ils disposent toutefois d'une plus grande liberté que les enseignants du secondaire dans leurs choix d'enseignement ou d'exercices (Behaj [2]).

1.1.2 Les élèves, les étudiants

Dans [21], Robert met en valeur un certain nombre de nouvelles exigences concernant les pratiques mathématiques attendues des élèves à ces niveaux. Ainsi, les démonstrations attendues ne consistent plus en des applications simples de résultats de cours mais tendent à se complexifier. Par exemple, les élèves sont confrontés à des problèmes d'un genre nouveau (comme par exemple les problèmes d'existence/unicité ou de maximisation) et ont à prendre plus d'initiatives (sélection d'informations dans l'énoncé, mise en relation d'arguments dont la nature est différente, changement de cadre (au sens de Douady [9]) ou de point de vue, choix d'une méthode). Beaucoup de chercheurs constatent que les connaissances des élèves sont atomisées et ne sont que partiellement organisées ce qui les place de facto en situation de difficulté face à ces nouvelles exigences.

De nombreuses études pointent le fait que la réussite des élèves est davantage corrélée au fait d'avoir assez de connaissances dans suffisamment de cadres qu'au fait d'avoir beaucoup de connaissances dans un ou deux cadres seulement. C'est ce que Boschet et Robert avaient nommé l'"hypothèse des blocs" dans [4] en référence à l'importance de pouvoir mettre en fonctionnement des connaissances dans plusieurs cadres.

¹ parmi lesquels la disponibilité d'un grand nombre de connaissances organisées et mises en relation, l'existence de nombreux types de questionnements et de situations de référence éventuellement implicites.

Il y a peu de travaux concernant le travail personnel des élèves. Dans [6], Castela a comparé de ce point de vue des étudiants en première année d'Université et des élèves en première année de Classe Préparatoire. Elle montre que *“les étudiants de l'Université travaillent sur des exercices plutôt en visant la reproduction de techniques utiles à l'examen, acquises par un entraînement intensif et répété et que les étudiants de Classe Préparatoire travaillent de manière à pouvoir aborder des problèmes nouveaux, en analysant des méthodes de résolution afin de pouvoir transférer celles-ci”*. Elle attribue notamment ces différences aux modes d'évaluations en vigueur dans les deux institutions : si les devoirs en Classe Préparatoire sont des problèmes de recherche, les examens en première année d'Université visent plutôt la reproduction de techniques et l'application de recettes. Pour Robert [21], il s'agit là d'une illustration d'un paradoxe de l'enseignement universitaire tiraillé entre la logique de la réussite et celle de l'apprentissage.

1.1.3 Outils d'analyse

Pour permettre un accès possible à la complexité des contenus mathématiques (compte tenu de l'hétérogénéité des pratiques des enseignants et des difficultés des élèves), Robert introduit dans [21] quatre dimensions d'analyse.

La première dimension concerne d'une part les aspects outil/objet des notions et les changements de cadres (au sens de Douady [9]) et d'autre part les changements de registres sémiotiques (au sens de Duval [12]).

La seconde dimension concerne les statuts des notions à enseigner. Ces statuts consistent en la combinaison de quatre caractères ayant trait aux notions : le degré de formalisation de la notion, le caractère unificateur de la notion par rapport aux notions vues antérieurement, le degré généralisateur de la notion et la fonction que celle-ci remplit. En se basant sur divers travaux, notamment menés en Algèbre Linéaire ou en Analyse à l'Université, Robert distingue quatre statuts des notions :

- les notions qui étendent des notions déjà connues des élèves;
- les notions qui apparaissent comme réponses à des problèmes précis;
- les notions qui répondent à l'introduction d'un nouveau formalisme;
- les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices.

Ces dernières notions (que nous désignerons désormais sous le terme de “notions FUG”) sont donc des notions qui permettent d'introduire plus de généralité en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme. Bien souvent, une analyse historique met en valeur la complexité épistémologique de telles notions : leur genèse historique dans l'histoire des Mathématiques a été longue et tortueuse et leur introduction aux élèves est donc particulièrement problématique. De nombreuses recherches ont permis de travailler le caractère FUG de certaines notions : nous y reviendrons dans la section suivante lorsque nous évoquerons les recherches consacrées à un domaine particulier de l'enseignement supérieur.

La troisième dimension concerne les niveaux de conceptualisation. Il s'agit d'après Robert, d'une partie d'un champ des Mathématiques organisée de façon cohérente et *“caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes*

associées à ces théorèmes et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré, et en utilisant ces méthodes". (voir aussi Dorier et al. [7]).

La quatrième dimension s'intéresse aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves. Le niveau de mise en fonctionnement sera dit

- technique si la mise en fonctionnement nécessite des applications immédiates de résultats;
- mobilisable si la mise en fonctionnement nécessite des adaptations de connaissances en partie indiquées mais dépassant l'application immédiate de résultats;
- disponible si la mise en fonctionnement n'est pas indiquée et que c'est à l'élève que revient la tâche de reconnaître les connaissances à utiliser.

1.2 Résultats de recherche par domaine

Nous rappelons maintenant des résultats de recherche au sein de domaines précis des Mathématiques (notamment dans l'enseignement supérieur). Si l'Analyse a été la principale source d'intérêt pour les chercheurs en Didactique pendant de nombreuses années, l'Algèbre linéaire a connu un essor important notamment à partir des travaux de Dorier et al. [7]. La Géométrie est le plus souvent associée à l'Algèbre Linéaire ce qui explique le peu de rappels que nous y consacrons dans la sous-section correspondante.

1.2.1 Géométrie

A notre connaissance, l'une des seules études qui mette réellement la Géométrie en avant par rapport à l'Algèbre Linéaire est le travail de Gueudet [13]. Partant du constat que certaines notions géométriques du secondaire également présentes dans l'enseignement supérieur apparaissent à deux niveaux de conceptualisation différents, Gueudet repère des ruptures et des continuités entre ces deux institutions. Par exemple, une rupture générale est le fait que la Géométrie affine et la Géométrie affine euclidienne sont étroitement liées au Lycée alors que leur étude est le plus souvent séparée à l'Université.

1.2.2 Algèbre Linéaire

Pour cette partie, nous nous inspirons très largement des travaux de Dorier et al. [7] et Dorier [8].

En France, la tradition veut que l'Algèbre Linéaire axiomatique générale (éventuellement sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) soit présentée aux étudiants dès la première année d'Université en essayant de garder un lien fort à la fois avec la Géométrie et avec certaines connaissances anciennes des étudiants supposées mobilisables. L'Algèbre Linéaire apparaît alors aux étudiants comme un nouveau langage abstrait interagissant avec de nombreux cadres et registres sémiotiques. Cela n'est pas étranger au fait que de nombreuses notions en Algèbre Linéaire sont des notions FUG : la notion d'espace vectoriel est identifiée comme telle dans [7] mais c'est aussi le cas de nombreuses autres notions comme la notion de sous-espace vectoriel et la notion de sous-espace vectoriel engendré par une partie (pour se limiter aux débuts de l'Algèbre Linéaire).

Dans [7], les auteurs partent du constat que les étudiants éprouvent de grandes difficultés à mettre en fonctionnement les concepts d'Algèbre Linéaire et ont du mal à faire le lien avec leurs connaissances antérieures. Le formalisme des concepts de l'Algèbre Linéaire apparaît comme un obstacle pour beaucoup d'étudiants.

Leurs recherches se sont d'abord orientées vers une analyse historique des concepts de l'Algèbre Linéaire pour en dégager le rôle du formalisme. Il en ressort (Dorier dans [7]) une grande complexité épistémologique liée à l'adoption de la théorie axiomatique des espaces vectoriels, celle-ci s'étant finalement imposée au sein de l'Algèbre Moderne (dans les années 1930) pour sa capacité à unifier de nombreuses théories elles-mêmes déjà axiomatisées (comme la Théorie des opérateurs linéaires ou la Géométrie affine euclidienne) en favorisant la généralisation. Le rôle du formalisme est intrinsèque à la théorie axiomatique des espaces vectoriels et est nécessaire à l'unification et à la généralisation (justement parce que cette théorie englobe des situations variées). L'aspect simplificateur de cette théorie n'apparaît que lorsqu'un degré d'abstraction minimum a été franchi, aussi n'est-il pas étonnant que le formalisme constitue un obstacle pour les étudiants en première année d'Université.

D'autres recherches rapportées dans [7] ont testé le rôle d'une formation préliminaire en logique et en théorie des ensembles (dont les concepts posent de grandes difficultés aux étudiants). Il ressort de ces recherches que la réussite en Algèbre Linéaire est en corrélation avec des connaissances antérieures en logique et en théorie des ensembles mais les auteurs avancent l'hypothèse que c'est au delà d'un certain seuil de connaissances dans ces domaines que ces connaissances seront effectivement mobilisables ou disponibles en Algèbre Linéaire². En plus de cette formation préliminaire, les auteurs ont été amenés à penser *"qu'il pourrait être souhaitable de faire une mise au point sur quelques questions de logique et de langage ensembliste à l'occasion du début du cours d'Algèbre Linéaire"*, ceci dans le but de prendre en charge certaines difficultés du formalisme.

L'analyse épistémologique précédente montre que les aspects unificateur et généralisateur de l'Algèbre Linéaire ne sauraient être compris par les étudiants au travers de la résolution d'un ou même de plusieurs problèmes. La notion de levier méta introduite en toute généralité par Robert et Robinet en [19] et [20] est un biais qui permet, à un moment choisi par l'enseignant, de favoriser chez les étudiants une réflexion sur l'activité mathématique en cours. Le recours au levier méta à la suite d'un problème d'Algèbre Linéaire que les étudiants se sont appropriés a potentialité à faire réfléchir les étudiants en termes d'unification et de généralisation.

Un certain nombre de séquences d'enseignement et d'ingénieries didactiques ont été créées à la suite de ces recherches. Nous retenons l'enseignement d'Algèbre Linéaire initié par Rogalski à l'Université Lille I dès 1984 et jusqu'au milieu des années 1990 (voir [23], [24], [25] ou [7]). Cet enseignement, qui se centrait sur la notion de rang et sur l'utilisation de systèmes linéaires, s'est créé à partir des hypothèses suivantes qui prennent appui sur les recherches précédentes :

- Il faut prendre en compte la nature FUG de certaines notions de l'Algèbre Linéaire;
- L'enseignement de l'Algèbre Linéaire suppose des prérequis, notamment logiques et ensemblistes;
- Il faut utiliser en relation étroite le recours au levier méta, la construction d'ingénieries longues et les changements de point de vue.

²Ils rejoignent en cela l'hypothèse des blocs faite par Boschet et Robert.

En résumé, alors que l'hypothèse 1 prend en compte l'épistémologie de l'Algèbre Linéaire, l'hypothèse 2 a pour but de prendre en charge une partie de l'aspect formalisateur tandis que l'hypothèse 3, par le recours au levier méta et au changement de point de vue sur un temps long fait réfléchir les étudiants à propos des aspects unificateur et généralisateur de notions principales en Algèbre Linéaire.

1.2.3 Analyse

Tout comme en Algèbre Linéaire, la transition entre Lycée et Université en Analyse soulève aussi le problème des prérequis (également en logique et en théorie des ensembles). Dans [1], Artigue explique cependant qu'il lui semble indispensable de penser aussi les discontinuités nécessaires de l'apprentissage de l'Analyse en termes de reconstructions ou d'évolutions : reconstruction du rapport à des objets anciens, reconstruction du mode de raisonnement et reconstruction/évolution du statut d'objets prédéfinis.

Dans [17], Praslon constate *“une accumulation de micro-ruptures, que l'on peut interpréter comme les conséquences d'une transition entre cultures institutionnelles, et qui vont aggraver les difficultés des étudiants”*. Pour le cas de la dérivée, les recherches qu'il a menées à l'Université lui permettent de constater une forte baisse du taux de répétitivité des tâches proposées, une augmentation du taux des tâches réalisables de plusieurs façons, une plus grande importance accordée à la généralité et l'apparition de pratique nouvelles telles l'élaboration de conjectures, la recherche de contre-exemples ou l'introduction de paramètres. Ces constats rejoignent ceux faits par Robert dans [21] (et que nous avons évoqués ci-dessus) à propos des nouvelles exigences concernant les pratiques mathématiques des élèves. Praslon note également une évolution de la dialectique cours/exercices à l'Université : une place plus importante occupée par le cours et la difficulté éventuelle à faire le lien entre les deux. Dans le même ordre d'idée, Bloch et Ghedamsi dans [3] identifient des variables qui déterminent le contrat en vigueur dans les deux institutions (comme le degré de formalisation, le mode de validation, l'autonomie etc.). Ces variables leur permettent de mettre à jour de nombreuses micro-ruptures, dont l'accumulation conduit à une véritable rupture en Analyse.

Parmi les notions FUG qui ont été travaillées en Analyse, citons les limites de fonctions et la convergence des suites. En Topologie, Bridoux dans [5] a montré comment l'interprétation FUG des notions topologiques pouvait permettre d'expliquer certains difficultés des étudiants : par exemple, le début de l'enseignement d'une telle notion passe souvent par un travail formel sur les définitions (a priori facile mais dont on a vu qu'il pouvait être problématique) qui engendre en fait des activités compliquées mobilisant des connaissances antérieures non maîtrisées par les étudiants.

1.3 Problématique

Nous dégageons maintenant la problématique principale de ce travail en nous basant sur certains des résultats de recherche que nous avons rappelés.

A l'Université en Analyse, les travaux de Praslon ont mis en évidence la difficulté éventuelle pour les étudiants à faire le lien entre le cours et les travaux dirigés. Ce résultat pourrait ne

pas être spécifique à l'Analyse et nous pensons que cette difficulté serait due en grande partie à la séparation de facto entre cours et travaux dirigés qui constitue une rupture importante avec l'enseignement secondaire. Le cours et les travaux dirigés sont le plus souvent assurés par deux enseignants différents ce qui, dans ce cas, pose la question de savoir comment l'enseignant qui assure les travaux dirigés va faire effectivement le lien avec le cours.

Cela renvoie à une question traditionnelle : les étudiants apprennent-ils leur cours ? Cette interrogation est à relier à un paradoxe de l'enseignement supérieur :

-si l'enseignant qui assure les travaux dirigés prend en charge des rappels de cours à chaque fois qu'un exercice a trait à une notion nouvelle, il y a peu de chance, par effet de contrat, que les étudiants apprennent leur cours;

-sinon, il y a peu de chances qu'ils démarrent leur recherche sans aide, d'autant plus si l'enseignant ne leur laisse pas suffisamment de temps pour chercher (par exemple s'il corrige lui-même les exercices assez rapidement dans l'optique de traiter le maximum d'exercices).

Pour nous, ce paradoxe se rapproche de celui soulevé par Robert : l'enseignement supérieur est tiraillé entre la logique de la réussite et la logique de l'apprentissage. Dans une logique de réussite, si l'enseignant a en vue l'examen que les étudiants ont à passer, il peut leur apprendre un maximum de techniques pour qu'ils puissent être préparés au mieux pour cette échéance (et c'est ce que constate Castela dans son étude) mais cet entraînement intensif pourrait se faire au détriment de certains apprentissages. Si au contraire l'enseignant se place plutôt dans une logique d'apprentissage, ses étudiants ne seront pas forcément à même de réussir l'examen.

Il nous paraît donc intéressant de questionner le rapport que l'enseignant de travaux dirigés entretient avec le cours (quand il ne l'assure pas lui-même) : va-t-il y faire référence ? Prendra-t-il en charge des rappels de cours ? Si oui, à quel moment ? Cela ne peut se faire qu'en observant la façon dont il gère ce qui concerne le cours dans les déroulements de ses séances.

Dans l'enseignement supérieur comme dans l'enseignement secondaire, la question de l'acquisition des connaissances constitue la principale question de recherche en Didactique des Mathématiques. Elle paraît d'autant plus complexe dans l'enseignement supérieur qu'une rupture importante avec l'enseignement secondaire se situe justement au niveau des contenus. On a vu en effet que l'obstacle du formalisme aussi bien que la nature FUG de nombreuses notions de l'enseignement des Mathématiques à l'Université contribuent grandement à cette rupture.

A cette rupture s'ajoutent des exigences nouvelles concernant les pratiques mathématiques attendues des étudiants (c'est le constat général de Robert confirmé par les recherches en Analyse de Praslon d'une part et de Bloch et Ghedamsi d'autre part). Les travaux dirigés constituent les lieux principaux de développement de ces pratiques nouvelles sous la médiation éventuelle de l'enseignant. Il nous semble également important de questionner la manière dont l'autonomie vient ou ne vient pas aux étudiants. On peut penser que les enseignants jouent un rôle important à ce sujet, notamment par les formes de travail qu'ils aménagent en particulier pendant les travaux dirigés.

Les déroulements en travaux dirigés nous paraissent d'autant plus intéressants à observer dans le cadre d'introduction de notions FUG : comment l'enseignant gère-t-il ces situations complexes d'introduction de notions FUG ? Quelles aides fournit-il aux étudiants ? A-t-il recours au levier méta ? Les exigences nouvelles concernant les pratiques mathématiques des étudiants (et notamment en matière de formalisme et de démonstration) pourraient être vues comme une volonté

institutionnelle de plus grande autonomie chez les étudiants. L'enseignant a-t-il conscience de la nouveauté de ces exigences pour les étudiants et comment les gère-t-il ? Rend-il ces exigences explicites ou non ? Quelle(s) forme(s) de travail propose-t-il pour développer la pratique des étudiants à ce propos ? On ne peut tenter de répondre à ces questions qu'en allant observer les déroulements organisés par l'enseignant.

Nous retenons également des travaux précédents la mise en valeur d'une grande hétérogénéité potentielle des attentes et des pratiques des enseignants (du secondaire comme du supérieur). Cela étant, le fait que les enseignants du supérieur jouissent d'une plus grande liberté dans le choix des cours ou de leurs exercices en même temps qu'ils disposent plus volontiers de leur temps (que ça soit en travaux dirigés ou en cours) pourrait selon nous renforcer cette hétérogénéité, d'autant plus qu'il y a également une grande hétérogénéité dans les pratiques des étudiants.

Quant à se demander si l'enseignant a conscience de l'hétérogénéité des étudiants et s'il rend public ses attentes (par exemple en matière de rigueur et de démonstration), il nous semble important d'aller l'observer de visu dans les déroulements qu'il organise.

Dans les lignes précédentes, nous avons expliqué pourquoi les déroulements (notamment en travaux dirigés) et la façon dont l'enseignant les gère sont des observables potentiellement intéressants pour une grande variété de questions de recherche. Dans la problématique de ce travail, nous souhaitons questionner ces déroulements pour commencer à appréhender ces questions.

Problématique. *Y a-t-il une rupture entre enseignement secondaire et enseignement supérieur du point de vue des déroulements ? Est ce que la façon dont l'enseignant du supérieur gère ces déroulements renforce les ruptures déjà constatées entre ces deux institutions ?*

Ce questionnement sera affiné une fois que nous aurons choisi et justifié un cadre théorique et une méthodologie au chapitre suivant.

Chapitre 2

Cadrage théorique et méthodologie

2.1 Cadrage théorique général

Nous avons choisi d'inscrire cette recherche dans le cadre théorique de la Théorie de l'Activité pour plusieurs raisons.

D'abord, notre problématique générale a trait aux déroulements et à leur gestion par l'enseignant qu'il soit dans l'enseignement secondaire ou à l'Université. Les questions de recherche qui ont alimenté cette problématique s'intéressent à deux types de sujets ainsi qu'à leurs pratiques :

- l'enseignant et, par exemple, la façon dont il gère son lien avec le cours, le moment où il gère ce lien, la façon dont il gère l'introduction des FUG, les formes de travail qu'il propose vis-à-vis des exigences nouvelles concernant les pratiques mathématiques des élèves;
- les élèves et, par exemple, leur rapport au cours, leurs apprentissages en lien avec le cours/les exercices et les exigences nouvelles attendues.

Ainsi, même s'il est vrai que nous nous intéressons aux apprentissages des élèves, à la circulation du savoir au sein de la classe, c'est d'abord en lien avec les pratiques des sujets singuliers (l'enseignant, les élèves) dans les déroulements en classe.

Ensuite, notre projet est de repérer des invariances et des variabilités dans la pratique de l'enseignant concernant sa gestion des déroulements. La pratique des enseignants ne peut être approchée de manière simple et il nous semble que l'activité¹, de l'enseignant et des élèves, fournit un intermédiaire pertinent qui pourrait permettre ce repérage au sein des déroulements. Il s'agit donc d'aller voir au sein des déroulements les activités des élèves (pour éventuellement repérer certaines de leurs difficultés) et de l'enseignant et de les mettre en relation avec leurs pratiques tout en tenant compte de leurs contraintes.

Enfin, les activités mathématiques telles qu'étudiées au sein de la Théorie de l'Activité sont largement conditionnées par la gestion de classe telle qu'est organisée par l'enseignant tout au long du déroulement de la séance. Au vu des questions de recherche que nous avons dégagées au chapitre précédent et de la problématique de notre travail, l'inscription de notre recherche dans

¹au sens de la Théorie de l'Activité.

ce cadre théorique est naturelle.

Pour les rappels concernant la Théorie de l'Activité et son adaptation à l'enseignement des Mathématiques, nous renvoyons aux travaux de Robert et Rogalski (voir [22] ou [26]).

2.2 Méthodologie globale

Dans ce type de recherche, les analyses se font en plusieurs actes² imbriqués selon une méthodologie générale mise au point par Pariès, Robert et Rogalski (voir [26] partie 1 chapitre 1 et partie 2 chapitre 2 ou [16]). Elles se font à partir de séances de classe (auto-)filmées, éventuellement transcrites assorties d'entretiens et d'autres compléments liés à la situation particulière observée (compléments sur les notions à enseigner, les programmes...).

Dans notre cas, nous considérons principalement des séances ayant lieu dans l'enseignement supérieur pour lesquelles le cours et les travaux dirigés sont dissociés, aussi nous faut-il donner a priori quelques précisions concernant ce qui sera observé. Si le cours et les travaux dirigés seront filmés, on se concentrera sur l'analyse des travaux dirigés que l'on complètera par des observations ou des vérifications faites à partir du cours. Il nous semble en effet, nous l'avons expliqué ci-dessus et dans le chapitre précédent, que ce sont les déroulements en travaux dirigés qui sont le plus susceptibles de nous permettre de repérer invariances et régularités dans la gestion que l'enseignant organise en lien avec les tâches mathématiques, ne serait-ce que parce que c'est l'endroit où les étudiants sont amenés à développer explicitement des activités en lien avec les pratiques de l'enseignant.

La méthodologie générale de Pariès, Robert et Rogalski consiste habituellement en trois actes d'analyse imbriqués :

- le premier acte est une analyse a priori des tâches proposées par l'enseignant;
- le second acte consiste en l'analyse des activités possibles des élèves compte tenu du déroulement de la séance;
- le troisième acte est dédié aux interventions langagières fines de l'enseignant³ dans les phases collectives et à leur contribution au développement des activités des élèves : notons que cet acte a récemment été précisé par Pariès, Robert et Rogalski en [16].

Dans ce travail, nous adaptons cette méthodologie générale à notre problématique : nous reprenons les deux premiers actes d'analyse et faisons le choix de consacrer le troisième acte à la gestion globale des déroulements par l'enseignant et à son lien éventuel avec les tâches mathématiques qu'il propose.

Nous décrivons maintenant chacun des trois actes d'analyse de la méthodologie précisément. Cette description est faite dans le cas de séances de travaux dirigés à l'Université⁴ mais elle est

²dont le choix est variable et dépend des recherches.

³que ce soit les questions qu'il pose, le méta dans son discours, les actions langagières ayant pour objet les élèves ou les Mathématiques

⁴notamment parce que nous l'appliquerons principalement ici à au cadre universitaire et pour ne pas avoir à faire de distinctions dans le vocabulaire utilisé.

aisément transposable à des séances d'exercices en fin de Lycée.

Le premier acte consiste en une analyse a priori des tâches qui sont proposées aux étudiants en travaux dirigés. On analyse les énoncés précis tels qu'ils ont été donnés aux étudiants en nous intéressant à la mise en évidence des connaissances mathématiques à mettre en jeu pour résoudre ces exercices. Cette analyse nous sert à détecter les activités attendues ou prévisibles des étudiants au sens où on peut s'attendre à ce qu'ils les utilisent compte tenu de leurs connaissances anciennes et des cours qui ont eu lieu précédemment.

Nous sommes particulièrement attentifs à la mise en fonctionnement des connaissances et à la nature formalisatrice, unificatrice ou généralisatrice éventuelle de celles-ci (voir sous-section 1.1.3). En outre, pour prendre en compte les exigences nouvelles concernant les pratiques mathématiques des étudiants, nous repérons les adaptations que les étudiants ont à faire à partir de leurs connaissances supposées anciennes et de leur cours (voir [26, Partie 1, Chapitre 2]). Ces adaptations sont codées comme suit :

- (TSI) Tâche simple et isolée ce qui signifie application immédiate d'une connaissance;
- (A1) Reconnaissance de modalités d'applications des connaissances;
- (A2) Introduction d'intermédiaires;
- (A3) Changements de cadres (au sens de Douady) ou de points de vue, changements de registres sémiotiques (au sens de Duval);
- (A4) Introduction d'étapes, organisation des calculs;
- (A5) Utilisation des questions précédentes;
- (A6) L'existence de choix forcés ou non;
- (A7) Le manque de connaissances nouvelles;

Le repérage des adaptations est un moyen de mesurer la prise d'initiative potentielle des étudiants dans un exercice donné.

Dans le deuxième acte, nous nous intéressons aux déroulements effectifs filmés et notamment à la mise face à face de ceux-ci avec les tâches prévues dans l'analyse a priori : il s'agit ici de comparer ce qui a été listé dans le premier acte avec ce qu'il se passe effectivement en travaux dirigés.

Le but de ce deuxième acte est la détermination des activités possibles des étudiants : expliquons en quelques mots ce à quoi réfère ce terme. Dans le cadre de la théorie de l'Activité appliquée aux Mathématiques, c'est l'activité mathématique des étudiants qui est choisie comme intermédiaire à l'apprentissage. Cependant, ces activités sont par essence même inaccessibles à l'observation ce qui contraint à se restreindre aux activités possibles des étudiants, c'est à dire les activités auxquelles on peut s'attendre compte tenu des connaissances à mettre en oeuvre. Ces activités possibles ne sont pas les mêmes chez tous les étudiants ce qui conduit à opérer une distinction entre activités possibles a maxima et activités possibles a minima. Les premières sont

celles d'étudiants qui se lancent immédiatement dans la tâche demandée alors que les secondes sont celles d'étudiants qui ont besoin d'indications supplémentaires, d'aides au démarrage avant de se lancer dans la tâche.

Pour reconstituer les activités possibles des étudiants à partir du déroulement et ainsi pouvoir les comparer avec les activités prévues par l'analyse a priori, nous prenons en compte tout ce qui peut avoir une influence sur leur activité mathématique et notamment les interventions collectives de l'enseignant. Le déroulement d'un exercice est découpé en phases⁵ et présenté sous la forme d'un tableau à trois colonnes. Pour une phase donnée :

- la première colonne précise la nature du travail organisé par l'enseignant : la forme du travail (individuel ou collectif), le type de travail (rappel de cours, recherche individuelle, correction...) et la durée;
- la seconde colonne rend compte des interventions collectives de l'enseignant : les rappels de cours, les aides qu'il fournit collectivement (dont la fonction est plus ou moins procédurale⁶ ou constructive⁷), le recours au levier méta, les corrections qu'il donne;
- la troisième colonne donne une description des activités que l'enseignant propose aux étudiants.

Le rôle de ce tableau est qu'il permet d'appréhender la gestion du déroulement de l'exercice considéré (colonne 1) que l'enseignant organise par le biais de ses interventions collectives (colonne 2) et de dégager a posteriori les activités possibles des étudiants (à partir de la colonne 3) afin de pouvoir les comparer avec celles prévues par l'analyse a priori.

Pour aider au découpage du déroulement en phases, plutôt que d'avoir une transcription écrite de ces séances comme c'est le cas habituellement, nous avons choisi de sous-titrer les vidéos (à la manière d'un film en version originale). Nous voyons deux avantages à l'utilisation de ce procédé. Premièrement, il n'y a pas à faire l'effort de comprendre les interventions de l'enseignant et des étudiants que l'on n'entend pas toujours très distinctement (la caméra étant placée en général au fond de la salle et centrée sur le tableau). Deuxièmement, le sous-titrage permet de mieux appréhender ce qu'il se passe en travaux dirigés puisque l'on peut lire les interventions de l'enseignant et des étudiants en même temps que l'on voit les attitudes et réactions de chacun et les actions de l'enseignant.

Nous allons maintenant expliquer en quoi consiste le troisième acte de cette analyse avant de le justifier vis à vis de notre problématique.

Le deuxième acte a permis de découper le déroulement de l'exercice considéré en phases à partir des interventions collectives de l'enseignant. Dans cet acte, nous souhaitons rendre compte de la gestion de l'enseignant plus globalement. Pour ce faire, nous qualifions les phases issues de ce découpage au moyen des *indicateurs globaux* de gestion suivants : prologue, recherche individuelle, correction ou postlogue. Insistons sur le fait que cette qualification (qui sera explicitée dans le paragraphe suivant) se veut globale ce qui suppose de façon préliminaire un regroupement

⁵insistons sur le fait que ce découpage est piloté par les interventions collectives de l'enseignant

⁶lorsque l'aide modifie de fait les tâches prescrites

⁷lorsque l'aide part explicitement du travail des étudiants

éventuel de certaines phases consécutives du second acte. A chaque exercice, nous associons un quadruplet (x, y, z, t) où x représente la proportion de temps consacrée au prologue, y à la recherche individuelle, z à la correction et t au postlogue sur le temps total de l'exercice⁸. Pour nous, ce quadruplet rend compte de la gestion globale de l'enseignant pendant cet exercice. Ensuite, nous tentons de regrouper par *types* les différents exercices selon les similitudes qu'ils présentent vis à vis de la distribution des proportions des indicateurs globaux avant d'essayer d'interpréter ces types d'exercices vis à vis des tâches mathématiques qu'ils sollicitent.

Expliquons en quelques mots les qualifications des indicateurs globaux.

- Le *prologue* est une phase qui a lieu avant toute recherche individuelle (ou éventuellement après une phase très courte de recherche individuelle) pendant laquelle l'enseignant fait des rappels de cours et interroge les étudiants en vue de l'exercice à venir. Cela peut aussi être l'occasion pour lui de fournir des aides procédurales aux étudiants ou de donner une stratégie de résolution pour l'exercice, voire de prendre en charge quelques éléments de correction.
- La *recherche individuelle* est le temps que l'enseignant laisse aux étudiants pour chercher seul l'exercice.
- La *correction* est le moment situé après une recherche individuelle pendant lequel l'enseignant corrige lui-même ou envoie un étudiant corriger tout ou partie de l'exercice.
- Le *postlogue* consiste en des informations complémentaires données par l'enseignant à l'issue de la correction de l'exercice : cela peut consister en des compléments de cours, en des comparaisons de méthodes, en des exemples qui illustrent ce qui vient d'être vu.

Nous justifions rapidement le choix de ces phases en lien avec notre problématique.

On l'a vu dans la section 1.3, la question du lien entre l'enseignant de travaux dirigés et le cours est fondamentale à l'Université. La phase de prologue se veut un biais pour appréhender cette dimension dans la gestion de l'enseignant : un exercice étant donné, elle permet de repérer si l'enseignant fait référence au cours ou non et la proportion de temps qu'il y consacre sur le temps total de l'exercice. Plus globalement, le prologue permet de rendre compte de la proportion de temps que l'enseignant consacre pour aider au démarrage de l'exercice, que ces aides se manifestent sous la forme de rappels de cours ou d'aides procédurales.

La phase de recherche individuelle est un biais pour rendre compte du travail individuel des étudiants et mesurer la part laissée aux étudiants pour acquérir des connaissances en travaux dirigés.

Nous considérons la phase de correction comme un temps de fructification des activités possibles que les étudiants ont développées dans la phase de recherche individuelle.

Enfin, la phase de postlogue répond au besoin de savoir comment l'enseignant gère l'hétérogénéité des étudiants après la correction, s'il prend en charge certaines des exigences nouvelles attendues chez les étudiants à l'Université et s'il use du levier méta.

En résumé, cette méthodologie est la méthodologie usuelle dans ce type de recherche pour ce

⁸en fait, nous prenons la partie entière de chaque proportion ce qui implique que nous considérons des quadruplets de nombres entiers positifs ou nuls.

qui concerne les deux premiers actes et le troisième acte est un double pari que l'on fait a priori sur les observations des déroulements :

- pouvoir regrouper par types les exercices suivant les similitudes qu'ils présentent vis à vis des quatre indicateurs globaux de gestion;
- pouvoir interpréter ces types en lien avec les tâches mathématiques qu'ils sollicitent.

Ces considérations méthodologiques nous permettent de préciser notre problématique :

Problématique (bis). *Quel lien y a-t-il entre la gestion des déroulements organisée par l'enseignant et les tâches mathématiques ? Y a-t-il en particulier des différences au niveau des indicateurs globaux de gestion des déroulements entre enseignement secondaire et enseignement supérieur ? Quelles régularités et variabilités peut-on constater dans l'une et l'autre institution à ce propos ?*

2.3 Contexte et conditions de la recherche

2.3.1 Choix du domaine

Maintenant que le cadre théorique et que la méthodologie sont posés, il nous faut choisir un domaine de l'enseignement supérieur approprié pour recueillir des données vidéos.

Notre choix s'est porté sur l'Algèbre Linéaire (et plus précisément sur ses débuts) pour les raisons suivantes :

- c'est un domaine que nous connaissons bien pour l'avoir enseigné pendant quatre années consécutives;
- c'est un domaine pour lequel il y a eu de nombreuses recherches épistémologiques et didactiques (on l'a vu précédemment) ce qui permet d'interpréter nos observations à l'aune de ces travaux;
- c'est un domaine au sein duquel d'autres ruptures avec l'enseignement secondaire ont été constatées notamment du point de vue du formalisme attendu et des préalables logiques, ensemblistes ou géométriques ou des contenus (notamment des notions FUG);
- c'est un domaine dont la complexité épistémologique est grande et au sein duquel le formalisme est intrinsèque et nécessaire à l'unification et à la généralisation : de notre point de vue, cela signifie que les notions FUG de l'Algèbre Linéaire sont d'autant plus délicates à introduire ce qui serait susceptible d'offrir plus de lisibilité dans la gestion des déroulements par l'enseignant;
- depuis quelques années, nous avons constaté une diminution du temps consacré aux préliminaires logiques et ensemblistes dans de nombreuses universités : cela va contre les conclusions de Dorier et al.⁹ et pourrait également fournir une meilleure lisibilité dans les déroulements, notamment du point de vue des difficultés des étudiants;

⁹qui, rappelons-le, ont montré qu'il y avait corrélation entre des connaissances antérieures logiques et ensemblistes et la réussite en Algèbre Linéaire.

- le fait que les notions FUG de l'Algèbre Linéaire soient d'une grande complexité pourrait permettre un repérage plus aisé des prologues en même temps que cela pourrait rendre les postlogues intéressants pour voir si l'enseignant prend en charge cette complexité a posteriori et utilise le levier méta.

L'utilisation de vidéos (même s'il est fait a priori dans la méthodologie générale de Pariès, Robert et Rogalski) nous a également paru naturel puisqu'elles

- facilitent l'accès au déroulement organisé par l'enseignant en lien avec les tâches qu'il propose;
- permettent d'identifier beaucoup mieux l'organisation de l'enseignement qu'un enregistrement audio (enseignant face à la classe, au tableau, circulant, manière de poser les questions);
- permettent une intelligibilité plus grande des déroulements, dans ce cas, des choix de gestion de l'enseignant.

2.3.2 Description rapide des données recueillies

Nous avons recueilli des données vidéo concernant un groupe de travaux dirigés de 30 étudiants. Nous avons filmé nous-même trois séances de cours en amphithéâtre traitant des débuts de l'Algèbre Linéaire depuis la notion d'espace vectoriel jusqu'aux notions de familles libres, familles génératrices et bases d'un espace vectoriel. Nous avons demandé à leur enseignant de travaux dirigés, que nous appellerons Gilles, de filmer les séances de travaux dirigés consacrées aux notions vues pendant ces trois cours. Notons que cet enseignant de travaux dirigés n'est pas l'enseignant qui fait cours ce qui pose réellement la question du lien qu'il va faire avec le cours lors des déroulements en travaux dirigés.

Les feuilles de travaux dirigés sont faites en concertation par les enseignants de travaux dirigés et l'enseignant de cours. On pourra trouver en Annexe A la chronologie des exercices que cet enseignant a traités avec eux. Notons que ces séances constituent pour les étudiants l'entrée dans l'Algèbre Linéaire. De façon préliminaire, ont été vus la résolution des systèmes linéaires homogènes avec ou sans second membre et le calcul matriciel (avec le même enseignant).

Chapitre 3

Analyse a priori et déroulement de quelques exercices

Nous illustrons la méthodologie décrite au chapitre précédent sur cinq des premiers exercices traités en travaux dirigés par Gilles¹. Afin de montrer comment nous repérons les indicateurs globaux de gestion à partir de l'analyse faite dans les deux premiers actes de la méthodologie, nous donnons l'analyse du premier de ces exercices en intégralité. Pour les quatre exercices suivants, nous avons fait figurer l'analyse a priori, le tableau des déroulements et les proportions des indicateurs globaux. Cela étant, ces données permettent de reconstituer les activités possibles des étudiants et de vérifier le calcul des proportions des indicateurs globaux.

Disons d'ores et déjà que le choix de ces exercices n'est pas arbitraire et qu'il nous permettra, au chapitre suivant, d'illustrer les régularités que nous observerons sur tout le corpus d'exercices.

3.1 Exercice 1 Feuille 2

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les opérations

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, 0).$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations est-il un espace vectoriel ?

Les cours qui ont précédés cette séance de travaux dirigés ont porté sur la notion de K -espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et de sous-espace vectoriel. Puisque nous ferons référence à certains des axiomes dans cette analyse, rappelons qu'un K -espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$ tel que $(E, +)$ est un groupe commutatif (cette terminologie n'est pas mentionnée aux étudiants en cours) et que l'opération $\cdot$ est une loi externe par K sur E qui doit satisfaire les quatre axiomes suivants pour tous $\alpha, \beta \in K$ et $x, y \in E$:

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \quad (\alpha \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) \text{ et } 1 \cdot x = x \quad (*)$$

¹dont on pourra trouver les énoncés et la chronologie en Annexe A.

Le cours a notamment insisté sur la structure classique de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, pour tout entier n positif.

La question de l'énoncé est ouverte et aucune méthode n'est indiquée : les étudiants doivent revenir à la définition d'espace vectoriel qu'ils ont vue en cours.

Au minimum, on peut penser que la seule tâche à effectuer par les étudiants est de montrer que l'opération . de cet exercice ne satisfait pas l'axiome " $1.x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ ". Cela nécessite chez certains étudiants une adaptation de type (A3) pour passer du registre vectoriel formel " $1.x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ " au registre des coordonnées vectorielles " $1.(x, y) = (x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ". Il s'agit ensuite de produire un contre-exemple (par exemple $1.(1, 1) \neq (1, 1)$) ce qui nécessite, à ce moment de l'année, une adaptation de type (A1) (notamment par l'importance des quantificateurs dans la production du contre-exemple). A noter que les opérations $+$ et . satisfont à toutes les autres propriétés de la définition d'espace vectoriel : il n'y a donc pas de choix possible pour les étudiants.

Cela étant, c'est le premier contact des étudiants avec cette structure (tout au moins en travaux dirigés) et la solution ci-dessus demande une compréhension fine de ce qu'est un espace vectoriel. On peut plutôt s'attendre à ce que les étudiants vérifient une à une les différentes propriétés dans l'ordre d'exposition du cours (ce, d'autant plus que la propriété mise en défaut dans cet exercice est la dernière à avoir été énoncée dans la définition d'espace vectoriel du cours). Les étudiants ont alors essentiellement à faire un raisonnement en deux étapes (A4) qui se morcellent elles-mêmes en plusieurs étapes (A4) qui correspondent à la vérification des divers axiomes d'espace vectoriel :

- montrer que $(E, +)$ est un groupe commutatif, soit en constatant que la loi $+$ définie dans l'exercice est l'opération classique qui confère à $\mathbb{R}^2$ sa structure de groupe commutatif (A1), soit en vérifiant une à une toutes les propriétés (A1), ce qui nécessite une utilisation du formalisme de ces définitions pouvant nécessiter des changements de registre (A3);
- montrer que
 1. les trois premiers axiomes en (*) sont satisfaits par la loi externe (A1),
 2. le dernier axiome n'est pas vérifié par la loi externe (analyse faite ci-dessus).

Etant donné que les étudiants découvrent la notion d'espace vectoriel en travaux dirigés, nous considérons que la vérification de chacune de ces propriétés nécessite une adaptation de type (A1) et n'est pas une tâche simple et isolée : ces vérifications ne sont pas, à ce moment là de l'année, des applications immédiates des connaissances des étudiants.

Il faut s'attendre à difficultés liées au formalisme de la définition d'espace vectoriel et plus généralement au fait que la notion d'espace vectoriel est une notion FUG. Cela pourrait inciter l'enseignant à vouloir dégager l'aspect généralisateur de cette notion dès le début de la séance et à prendre des tâches à sa charge. Des difficultés liées au symbolisme logique et ensembliste peuvent également être attendues notamment dans l'utilisation des quantificateurs dans les définitions et pour la production d'un contre-exemple (négation d'une proposition).

Pour le deuxième acte d'analyse, nous rendons compte du déroulement de la séance dans le tableau suivant² :

Nature du travail : type, forme, durée	Interventions de l'enseignant	Activités proposées aux étudiants
Prologue assuré par l'enseignant (5'20") -Introduction et rappels de cours (4'25") -Ecriture de l'énoncé (55")	L'enseignant prépare l'introduction de la notion d'espace vectoriel aux étudiants en insistant sur son caractère simplificateur. Il rappelle ce qu'est une opération interne, une opération externe. L'enseignant écrit au tableau l'énoncé de l'exercice 1.	Les étudiants écoutent. Les étudiants recopient.
Rappel collectif de la notion d'espace vectoriel (4'26") -Énumération des propriétés de la loi interne (1'10") -Énumération des propriétés de la loi externe (3'16")	L'enseignant mentionne oralement ces propriétés en sollicitant les réponses des étudiants. L'enseignant écrit ces propriétés au tableau en sollicitant les réponses des étudiants.	Quelques étudiants participent. Quelques étudiants participent.
Mise en place de la stratégie (4'19") -les lois de l'exercice sont interne/externe (32") - $\mathbb{R}^2$ muni de la loi de l'exercice est un groupe abélien (2'59") -Stratégie collective pour la suite de l'exercice (55")	L'enseignant explique oralement aux étudiants que les deux lois de l'exercice sont respectivement interne et externe. L'enseignant écrit au tableau la structure classique d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et leur fait constater que la loi interne de l'exercice est la loi interne classique. L'enseignant indique une stratégie de résolution pour le cas de la loi externe	Les étudiants écoutent. Les étudiants recopient. Certains interviennent. Les étudiants écoutent.
Recherche individuelle (3'09")	L'enseignant circule et discute avec les étudiants qui en éprouvent le besoin.	Recherche individuelle des étudiants.
Début de la correction collective et rappel de la stratégie (4'51") -l'axiome (2) de la loi externe est satisfaite (3'51") -rappel de la stratégie (1')	L'enseignant prouve au tableau que l'axiome (2) de la loi externe est vérifié. L'enseignant rappelle aux étudiants la stratégie de recherche pour les axiomes (1), (3) et (4) de la loi externe.	Les étudiants recopient. Certains interviennent. Les étudiants écoutent.
Recherche individuelle (suite) (3'34")	L'enseignant circule et discute avec certains étudiants.	Recherche individuelle des étudiants (suite).
Correction collective (3'47") -l'axiome (4) de la loi externe (3'09") -Epilogue (38")	L'enseignant montre, en sollicitant les étudiants, que la loi externe ne satisfait pas la propriété (4). L'enseignant mentionne aux étudiants que les axiomes (1) et (3) sont satisfaits par la loi externe de l'exercice.	Les étudiants interviennent et recopient. Les étudiants écoutent.

Figure 3.1: Déroulement de l'exercice 1

Pour cette première analyse, nous décrivons précisément les activités possibles des étudiants.

²Rappelons que la construction et le rôle de ce tableau ont été précisés dans la méthodologie

L'enseignant fournit des aides procédurales avant que les étudiants aient pu réfléchir à l'exercice, décompose lui-même la tâche demandée en sous-tâches et prend certaines d'entre elles en charge (reconnaissance de l'addition classique de $\mathbb{R}^2$, preuve de l'axiome (2) de la loi externe après un temps de recherche individuelle).

A minima, les étudiants ont pu recopier les définitions de loi interne et loi externe sur un ensemble, (re)voir la structure classique d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et constater que la loi interne de l'exercice est la loi interne "classique". Ils n'ont par contre pas revu les axiomes que doit vérifier la loi interne : seuls deux d'entre eux sont mentionnés oralement (existence d'un élément neutre et d'un symétrique pour chaque élément de l'ensemble). La seule activité à laquelle les étudiants ont accès a minima concerne la vérification ou l'invalidation des axiomes de la loi externe de l'exercice. A l'issue d'un premier temps de recherche, l'enseignant montre que la loi externe satisfait l'axiome (2) de l'exercice. Après un nouveau temps de recherche, les étudiants recopient la correction consacrée au fait que l'axiome (4) n'est pas satisfait par la loi. L'enseignant mentionne oralement que les axiomes (1) et (3) sont tous deux satisfaits par cette loi, sans temps de réflexion supplémentaire et sans preuve.

A posteriori, on constate qu'à minima les étudiants n'ont accès qu'à des tâches simples et isolées ce qui concorde avec les prévisions de l'analyse a priori.

Nous en venons maintenant au troisième acte. Dans l'acte 2, le déroulement a été découpé en sept phases (voir tableau). Les deux premières phases sont clairement des phases de prologue. Nous considérons également que la troisième phase est une phase de prologue puisqu'elle vient avant toute recherche individuelle et que les points que l'enseignant corrige dans cette phase ont pour effet de réduire les tâches a priori. Les phases de recherche individuelle sont les phases 4 et 6 tandis que les phases 5 et 7 sont des phases de correction. Le prologue occupe ainsi 47 pour cent du temps total, la recherche individuelle 22 pour cent du temps total et la correction en occupe 30 pour cent. Le quadruplet associé à cet exercice est donc (47, 22, 30, 0).

3.2 Exercice 4 Feuille 2

Exercice 4

Soient a et b des nombres réels. Montrer que l'ensemble des solutions sur $[0; 1]$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel.

Cet exercice vient chronologiquement après l'exercice 2 feuille 2, aussi les étudiants ont-ils déjà vu la notion de sous-espace vectoriel dans le cas matriciel. En vertu de cela, on peut penser que la tâche va consister à montrer que l'ensemble considéré est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ou encore de l'espace vectoriel $C^2([0; 1], \mathbb{R})$ des applications de classe C^2 de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$) muni de ses lois usuelles. On peut en effet prévoir que la solution consistant à montrer que c'est un espace vectoriel en vérifiant un à un tous les axiomes aura soit été discréditée chez certains étudiants par l'exercice précédent (exercice 2), soit le sera par l'enseignant dès le début s'il subsiste (c'est probable) des étudiants n'ayant pas compris l'aspect simplificateur offert par la notion de sous-espace vectoriel vis à vis de celle d'espace vectoriel.

Il faut tout d'abord choisir (A6) l'espace vectoriel (A2) qui va contenir l'ensemble qui nous

intéresse. Cela peut être l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui fait partie des exemples d'espaces vectoriels vus en cours (A1); comme c'est la première fois que les étudiants ont affaire à cet ensemble en travaux dirigés, on peut penser que l'identification de la loi interne et de la loi externe qui lui confèrent une structure d'espace vectoriel nécessite également une adaptation de type (A1). Ensuite il s'agit d'utiliser le résultat du cours sur les sous-espaces vectoriels (A1) qui conduit à la vérification de trois propriétés (A4) (c'est un ensemble non vide, stable pour la loi interne et pour la loi externe), chacune nécessitant encore soit des adaptations de type (A1) (chez certains étudiants pour lesquels les lois sur l'espace des fonctions réelles sont nouvelles) soit des tâches simples et isolées chez d'autres. Un passage par le cadre fonctionnel (A3) pourra être nécessaire pour

- identifier les paramètres de l'équation différentielle et la fonction solution,
- interpréter ce que signifie "être solution sur $[0; 1]$ ",
- utiliser le calcul fonctionnel pour manipuler l'équation différentielle.

Notons enfin que même si l'on montre que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il est en fait implicitement utilisé que $C^2([0; 1], \mathbb{R})$ est lui-même un espace vectoriel (pour avoir le droit, par exemple, de parler de la dérivée seconde de la somme de deux fonctions deux fois dérivables). En outre, la linéarité de la dérivation est une connaissance supposée disponible.

Le déroulement de cet exercice est dans le tableau figurant page suivante : dans celui-ci nous utilisons l'abréviation "ev" (resp. "sev") pour signifier "espace vectoriel" (resp. "sous-espace vectoriel"). On peut constater que les activités possibles des étudiants correspondent aux activités prévues dans l'analyse a priori. Le quadruplet rappelant la proportion des indicateurs globaux pour cet exercice est le suivant : (30, 42, 23, 0).

3.3 Exercice 5 Points 1 et 2 Feuille 2

Exercice 5 Dire si les sous-ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- (1) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 5x_2\}$,
- (2) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 7\}$.

Pour le point 1, les étudiants peuvent reconnaître que l'ensemble est inclus dans $\mathbb{R}^2$ (TSI) et utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ muni de ses lois usuelles est un espace vectoriel ((A1) ou (TSI)) pour vouloir montrer que l'ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ((A1) ou (TSI)) en montrant que l'ensemble n'est pas vide et est stable pour les deux lois ((A1) ou (TSI) pour chaque point) et ((A4) ou (TSI)). Durant leur raisonnement ils peuvent passer dans le cadre géométrique et représenter l'ensemble proposé comme une droite vectorielle dans le repère orthonormé usuel pour appuyer leur intuition (A3). Il y a une autre solution très peu probable : montrer que l'ensemble est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(5, 1)$ (par exemple); ceci a été vu en cours au moment de cette séance.

Pour le second point, il y a existence de choix non forcés (A6). Ils peuvent montrer que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (A1) muni de ses lois usuelles de différentes manières. Ils peuvent :

Nature du travail : type, forme, durée	Interventions de l'enseignant	Activités proposées aux étudiants
Correction d'une erreur 35"	L'enseignant corrige une erreur d'énoncé	Les étudiants corrigent.
Lecture orale de l'énoncé 2'24"	L'enseignant lit l'énoncé et choisit de ne s'intéresser qu'aux solutions à valeurs réelles.	Les étudiants écoutent puis écrivent.
Recherche d'une stratégie collective 2'	L'enseignant demande aux étudiants s'ils connaissent un espace vectoriel contenant l'ensemble de l'exercice. Il les amène à parler de fonctions.	Les étudiants écoutent, certains répondent aux questions de l'enseignant.
Rappel et discussion autour d'un résultat du cours 5'49"	L'enseignant rappelle la structure usuelle d'espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Il demande aux étudiants d'en préciser l'élément neutre. Il précise ensuite que cet ensemble hérite sa structure d'ev de celle des nombres réels.	Les étudiants écoutent, certains font part de leur incompréhension.
Rappel de la stratégie 43"	L'enseignant explique qu'il suffit de montrer que l'ensemble considéré est un sev.	Les étudiants écoutent. Un étudiant répond à sa question.
Interrogation des étudiants 1'29"	L'enseignant interroge les étudiants afin qu'ils rappellent les propriétés à vérifier pour montrer que l'ensemble est un sev.	Certains étudiants rappellent les axiomes d'ev. D'autres répondent aux interrogations.
Recherche individuelle 3'26"	L'enseignant circule dans la classe et discute avec certains étudiants.	Recherche individuelle des étudiants.
Rappel d'une notion 1'28"	L'enseignant rappelle la notion de solution d'une équation différentielle, s'étant aperçu de difficultés chez certains étudiants.	Les étudiants recopient.
Recherche individuelle 14'27"	L'enseignant circule et discute avec les étudiants.	Recherche individuelle des étudiants.
Correction des trois points à prouver. 10'05"	L'enseignant corrige l'exercice en interrogeant parfois les étudiants du regard.	Les étudiants recopient. Un étudiant demande si sa solution est correcte.

Figure 3.2: Déroulement de l'exercice 4

- utiliser une intuition géométrique (A3) qui consiste à représenter l'ensemble comme étant un "faisceau de vecteurs" (vecteurs dont l'origine est en O et l'extrémité sur la droite affine d'équation $x_1 + x_2 = 7$). Ils peuvent alors constater que cette droite affine ne passe pas par l'origine (TSI) et s'en contenter ou montrer en conséquence que l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ n'est pas dans l'ensemble (TSI). Par ce biais, ils peuvent également se rendre compte de la non-stabilité des lois;
- montrer directement que l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ pour l'addition n'est pas dans l'ensemble considéré (TSI);
- montrer que l'ensemble n'est pas stable pour la loi interne en produisant un contre-exemple, e.g. $(3, 4)$, $(8, -1)$ sont dans l'ensemble mais pas leur somme (A1); notons qu'ici, il n'y a pas de réel choix pour le contre-exemple : en effet, si on choisit deux éléments quelconques dans l'ensemble, leur somme n'est pas dans l'ensemble. Il est donc possible de prouver formellement que l'ensemble considéré n'est pas stable pour l'addition mais le peu de facilité des étudiants vis à vis du calcul formel rend, à ce moment de l'année, cette solution improbable;

- montrer que l'ensemble n'est pas stable pour la loi externe en produisant un contre-exemple, e.g. $(3, 4)$ est dans l'ensemble mais $2.(3, 4) = (6, 8)$ n'est pas dans l'ensemble (A1). De même que ci-dessus, si on prend un élément x dans l'ensemble et si on choisit un scalaire λ différent de 1, alors $\lambda.x$ n'est pas dans l'ensemble : on peut donc prouver formellement que l'ensemble n'est pas stable pour la loi externe.

Dans chacun des cas, les étudiants peuvent essayer de chercher l'intuition de la réponse en passant dans le cadre géométrique (A3) et en représentant la droite correspondante. Le tableau du déroulement de la séance est le suivant :

Nature du travail : type, forme, durée	Interventions de l'enseignant	Activités proposées aux étudiants
Dévolution et réduction de la tâche. 1'03"	L'enseignant écrit l'énoncé des deux premiers points et les identifie comme des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$.	Les étudiants écoutent, écrivent l'énoncé. Un étudiant rappelle que $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.
Recherche individuelle des deux premiers points 20'30"	L'enseignant circule et discute avec les étudiants individuellement.	Recherche individuelle.
Correction du premier point : l'ensemble n'est pas vide 44"	L'enseignant découpe la tâche, nomme l'ensemble E_1 et prouve que E_1 est non vide.	Les étudiants recopient.
Correction du premier point : E_1 est stable pour l'addition 2'53"	L'enseignant prend en charge la correction.	Les étudiants recopient.
Correction du premier point : stabilité de la loi externe et conclusion. 1'57"	L'enseignant prend en charge la correction.	Les étudiants recopient.
Réflexion a posteriori sur l' utilisation du cadre graphique vis à vis du premier point. 6'20"	L'enseignant trace la droite affine qui correspond à E_1 et met en valeur la droite vectorielle correspondante en interrogeant les étudiants.	Certains étudiants donnent des vecteurs de E_1 que l'enseignant représente.
Interrogation orale des étudiants vis à vis de E_2 . 23"	L'enseignant demande aux étudiants s'ils pensent que le second ensemble nommé E_2 est un espace vectoriel ou pas.	Certains étudiants disent que E_2 ne contient pas l'élément neutre ou n'est pas stable pour l'une des deux lois.
Discussion collective sur le fait que E_2 est non vide et sur la manière de le prouver. 2'25"	L'enseignant discute avec certains étudiants sur le sens du mot "vide". Il discute de l'économie consistant à montrer que le neutre est dans E_2 .	Certains étudiants participent à la discussion. Un étudiant dit enfin qu'il vaut mieux montrer que le neutre est dans E_2 .
Mise en place du cadre pour prouver la non stabilité de E_2 pour +. 4'06"	L'enseignant incite les étudiants à représenter graphiquement le droite affine qui correspond à E_2 .	Les étudiants écoutent. Quelques-uns réagissent et répondent aux incitations de l'enseignant.
Correction de la non-stabilité de E_2 vis à vis de +. 2'10"	L'enseignant fournit une preuve géométrique de ce fait.	Un étudiant dit que ça n'est "jamais stable".

Figure 3.3: Déroulement des deux premiers points de l'exercice 5

Ce tableau permet de constater, qu'un fois encore, les activités possibles des étudiants correspondent aux activités potentielles déterminées par l'analyse a priori. Le quadruplet rendant compte des indicateurs globaux pour cet exercice est $(2, 49, 18, 28)$.

3.4 Exercice 5 Points 3 et 4 Feuille 2

Exercice 5 On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire si les sous-ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- (3) $\{f \in \mathcal{P} \mid f(0) = 1\}$,
 (4) $\{f \in \mathcal{P} \mid f(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

Il s'agit tout d'abord de se rendre compte que l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de ses lois usuelles est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'exemple des fonctions C^∞ n'a pas été vu en cours) ce qui demande des adaptations de type (A1) et (A4) comme on l'a vu dans les analyses a priori précédentes. Ensuite, pour le point (3), il y a existence de choix (A6) pour montrer que l'ensemble considéré n'est pas un espace vectoriel pour les lois usuelles (TSI) :

- identifier l'élément neutre comme étant la fonction nulle ((A1) ou (TSI)) et constater que la fonction nulle n'est pas dans l'ensemble ((A1) ou (TSI));
- montrer que l'ensemble n'est pas stable pour la loi interne par production d'un contre-exemple, e.g. les fonctions définies par $f(x) = x + 1$ et $f(x) = -x + 1$ pour tout x réel sont dans l'ensemble (A1) mais pas leur somme (TSI);
- montrer que l'ensemble n'est pas stable pour la loi externe par production d'un contre-exemple, e.g. la fonction définie par $f(x) = 1$ pour tout x réel est dans l'ensemble (A1) mais pas $2.f$ (A1).

Comme pour les points (1) et (2), il n'y a pas de réel choix dans les contre-exemples à la stabilité des lois et il est possible d'en produire une preuve formelle. Pour certains étudiants, il peut y avoir nécessité à opérer un changement de registre (A3) pour passer du registre intrinsèque fonctionnel au registre des valeurs des fonctions. Pour le point (4), on peut considérer que la tâche est simple et isolée à ce moment là des travaux dirigés.

Nature du travail : type, forme, durée	Interventions de l'enseignant	Activités proposées aux étudiants
Modification de l'énoncé du point (3) 1'20"	L'enseignant choisit de traiter un autre exemple.	Les étudiants recopient.
Construction de la stratégie pour les points (3) et (4). 2'07"	L'enseignant précise que $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il propose de montrer que E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}$.	Les étudiants écoutent les rappels.
Recherche individuelle des point (3) et (4). 20'40"	L'enseignant circule. Il rappelle ce qu'est E_3 .	Les étudiants cherchent.
Correction du point (3). 1'33"	L'enseignant montre que E_3 n'est pas un espace vectoriel.	Les étudiants écoutent. Certains donnent leurs raisons.
Correction du point (4). 2'27"	L'enseignant s'appuie sur les étudiants pour décrire $\mathcal{P}$.	Les étudiants participent.
	COUPURE	

Figure 3.4: Déroulement des points 3 et 4 de l'exercice 5

Notons que la vidéo est coupée juste avant la fin. Vu l'avancement de la correction, on peut supposer que le quadruplet $(9, 76, 14, 0)$ rendant compte des indicateurs globaux de gestion est proche de la réalité. Une fois de plus, activités potentielles et activités possibles sont similaires.

3.5 Exercice 5 Point 5 Feuille 2

Exercice 5 Dire si le sous-ensembles suivant est un espaces vectoriel :

(5) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ ou } x_1 = x_3\}$.

Pour ce point, un passage par le cadre géométrique (A3) permet aux étudiants de constater que l'ensemble considéré est l'union de deux plans mais il est probable que cela ne remette pas en cause leurs conceptions des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$ d'autant plus que l'élément neutre de $\mathbb{R}^3$ pour ses lois usuelles est dans chacun des plans. Cette vision peut toutefois servir d'intuition à certains étudiants mais beaucoup moins naturellement que dans le cas de $\mathbb{R}^2$ (les représentations de plans de l'espace sont invoquées moins naturellement que celles des droites dans le plan). L'ensemble considéré contenant l'élément neutre et étant stable pour la loi externe, il s'agit de montrer que l'ensemble n'est pas stable pour la loi interne. Il y a existence de choix non forcés (A6) :

- en considérant qu'il y a trois façons possibles (A4) de choisir deux éléments dans cet ensemble. Cet ensemble est en fait l'union de deux sous-espaces vectoriels F et G (A1) où

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}, \quad G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}.$$

Si les deux éléments sont dans F (resp. dans G), leur somme est dans F (resp. dans G) (A1). Par contre, si on choisit un élément dans F et pas dans G et un élément dans G et pas dans F , tous deux distincts de l'élément neutre de $\mathbb{R}^3$, leur somme ne sera jamais dans l'ensemble. Cette étude est sous-jacente à la construction du contre-exemple attendu mais elle n'est pas nécessaire. Elle peut être suggérée par un passage au cadre géométrique (A3) par le biais d'une représentation graphique;

- en prenant deux éléments "bien choisis" dans chacun des plans, e.g. $(1, -1, 1)$ est dans le premier plan, $(1, 1, -1)$ dans le second (TSI) mais leur somme $(2, 0, 0)$ n'y est pas ((A1) ou (TSI)) ce qui prouve que l'ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ pour les lois usuelles (A1);
- en invoquant le fait que l'union de deux espace vectoriels n'en est un que lorsque l'un est inclus dans l'autre ce qui est très peu probable.

Dans cet exemple, les étudiants peuvent se heurter au sens courant de la locution "ou" qui est plutôt celle du "ou exclusif", à savoir ou l'un, ou l'autre, mais pas les deux. Ils peuvent également confondre cette locution avec la locution "et" ce qui peut provoquer des erreurs d'interprétations d'autant plus qu'ils ont vu en cours que l'intersection de deux sous-espace vectoriels du même espace vectoriel est un sous-espace vectoriel. Le tableau du déroulement de cette séance figure page suivante.

Nature du travail : type, forme, durée	Interventions de l'enseignant	Activités proposées aux étudiants
Recherche individuelle du point (5). 8'03"	L'enseignant circule dans la salle et discute avec les étudiants. Au préalable, il a nommé E_5 l'ensemble considéré.	Les étudiants cherchent.
Traitement collectif d'un exemple pour le point (5). 3'17"	L'enseignant demande aux étudiants de donner des exemples de vecteurs de E_5 qu'il additionne. Il fait constater que la somme est à nouveau dans E_5 . Il y a discussion sur la notion de stabilité d'une loi.	Les étudiants participent en donnant des vecteurs et leurs sentiments sur la notion de stabilité.
Correction collective du point (5) (ensemble non vide) et stratégie pour la question de la stabilité de la loi interne. 5'00"	L'enseignant montre que E_5 est non vide. En prenant deux vecteurs quelconques, il amène les étudiants à se rendre compte qu'il y a plusieurs cas à considérer.	Les étudiants participent. Quelques étudiants identifient les cas à examiner.
Correction du premier cas. 1'13"	L'enseignant montre que, dans ce cas, la somme des éléments est dans E_5 .	Les étudiants recopient. Certains discutent de la stabilité.
Discussion sur la stratégie avec un étudiant. 50"	L'enseignant discute avec un étudiants de la stratégie entreprise.	Cet étudiant discute avec l'enseignant. Les autres écoutent.
Correction du second cas. 1'	L'enseignant montre que, dans ce cas, la somme des éléments est dans E_5 .	Les étudiants recopient.
Correction du dernier cas. 3'43"	L'enseignant montre que les deux cas restants se réduisent à un seul cas. Il amène les étudiants à se douter qu'il n'y aura pas stabilité.	Certains étudiants pensent finalement qu'il n'y aura pas stabilité.
Construction d'un contre- exemple. 3'17"	L'enseignant explique la stratégie pour construire ce contre-exemple. Il incite les étudiants à lui donner des vecteurs pour y arriver.	Certains étudiants participent à cette construction.
Commentaires a posteriori sur la difficulté posée par E_5 . 5'10"	L'enseignant évoque les difficultés linguistiques ("ou" et "et") et met en valeur les sous-espaces vectoriels dont E_5 est l'union. Il fait référence au cours pour l'union de sev.	Les étudiants écoutent. Un étudiant mentionne le résultat du cours attendu par l'enseignant.
Discussion collective sur l' intersection de sev. 40"	L'enseignant interroge les étudiants sur ce qu'ils savent concernant l'intersection de deux sev et fait un lien avec certaines difficultés causées par E_5 .	Un étudiants répond à la question.
Discussion sur l'utilisation du signe " " pour "tel que". 50"	L'enseignant apporte une aide ponctuelle à une étudiante ayant des difficultés avec ce symbole.	Les étudiants écoutent

Figure 3.5: Déroulement du point 5 de l'exercice 5

Il ressort de ce tableau et de l'acte 2 de l'analyse que les activités possibles des étudiants sont cohérentes avec les activités potentielles prévues par l'analyse a priori et que le quadruplet rendant compte des indicateurs globaux de gestion est (0, 24, 55, 20).

Chapitre 4

Résultats globaux

4.1 Résultats bruts

Avant d'en venir aux résultats bruts, donnons quelques compléments concernant l'enseignement de Gilles. On notera tout d'abord que, quel que soit l'exercice, Gilles laisse toujours un temps de recherche individuelle aux étudiants qui se mettent au travail de bonne grâce.

Ensuite, le repérage des indicateurs globaux chez cet enseignant nous a montré que, dans la plupart des cas, chaque type de phase (prologue, recherche individuelle, correction, postlogue) n'est présent qu'une seule fois par exercice. Dans des cas plus rares, il y a eu par exemple deux temps de recherche individuelle ou de correction (c'était le cas de l'exercice 1 feuille 2 mais cela arrive notamment quand l'exercice comporte plusieurs questions) et nous avons alors additionné leurs durées respectives pour en rendre compte mais cela ne change pas globalement la façon dont il a géré la séance.

Nous n'avons pas fait apparaître l'exercice 10 de la feuille 2 pour la raison que l'on ne sait pas vraiment si Gilles a laissé un temps de recherche individuelle ou non. De plus, les déroulements de certains exercices n'apparaissent pas entièrement sur la vidéo qui est quelquefois coupée¹ : c'est le cas de l'exercice 5 feuille 2 (3) et (4), de l'exercice 5 feuille 2 (5), de l'exercice 6 feuille 2 et de l'exercice 1 feuille 3 (1). Nous les avons néanmoins pris en compte dans notre analyse

- soit parce l'on se rend compte que la coupure n'est pas loin du terme de l'exercice et que l'on peut penser que les proportions que l'on observe pour les indicateurs globaux sont proches de ce qui s'est passé réellement² (c'est le cas des trois premiers exercices cités),
- soit parce que l'on a pris en compte cette coupure et signalé les points précis dont on peut voir le déroulement sur la vidéo (c'est le cas du dernier exercice cité).

Notons également que pour deux exercices (l'exercice 8 feuille 2 et l'exercice 8 feuille 3), le

¹sans doute parce que Gilles se filmait lui-même et que la durée des cassettes utilisées n'était pas adaptée à la durée des travaux dirigés.

²disons également que l'on peut évaluer la durée des coupures en soustrayant la somme des temps des vidéos qui correspondent à une séance de travaux dirigés d'une heure et demie, ce qui permet de constater que la coupure est relativement courte dans tous ces cas.

traitement en classe a eu lieu sur deux séances de travaux dirigés.

Ci-dessous, nous avons fait figurer un tableau qui rend compte des résultats concernant les proportions des quatre indicateurs globaux de gestion des déroulements en mentionnant également la durée exacte de chaque phase (entre parenthèses et en italique), la durée totale de l'exercice et l'espace vectoriel sous-jacent dans chaque exercice. Le découpage des exercices comportant plusieurs questions (tel l'exercice 5 feuille 2) suit le découpage opéré par l'enseignant et nous avons fait figurer les exercices chronologiquement.

Exercice	Espace	Prologue	Recherche	Correction	Postlogue	Durée totale
Exercice 1 F2	$\mathbb{R}^2$	47 (14'08")	22 (6'41")	30 (9'06")	0	(29'55")
Exercice 2 F2	$M_{2,2}(\mathbb{R})$	50 (13'53")	30 (8'24")	18 (5'08")	0	(27'25")
Exercice 4 F2	$\mathcal{F}([0; 1], \mathbb{R})$	30 (12'51")	42 (18'06")	23 (9'59")	0	(42'17")
Exercice 5 F2 (1) et (2)	$\mathbb{R}^2$	2 (58")	49 (20'34")	18 (7'48")	28 (11'50")	(41'33")
Exercice 5 F2 (3) et (4)	$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	9 (2'26")	76 (20'42")	14 (3'59")	0	(27'07")
Exercice 5 F2 (5)	$\mathbb{R}^3$	0	24 (8'04")	55 (18'14")	20 (6'42")	(33')
Exercice 5 F2 (6)	$\mathbb{R}^3$	3 (40")	57 (12'17")	35 (7'36")	0	(21'33")
Nouvel Exercice F2	$\mathbb{R}^2$	44 (32'11")	19 (13'50")	30 (21'40")	6 (4'35")	(1h12'16")
Exercice 6 F2	$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	31 (7'24")	31 (7'33")	26 (6'16")	10 (2'33")	(23'56")
Exercice 7 F2	$\mathbb{R}^2$	2 (1')	42 (14'40")	36 (12'47")	18 (6'15")	(34'42")
Exercice 8 F2	$\mathbb{R}^3$	4 (4'15")	47 (42'55")	33 (30'16")	13 (11'39")	(1h29'59")
Exercice 9 F2	$\mathbb{R}^n$	0	77 (25'03")	6 (2'01")	16 (5'16")	(32'20")
Exercice 11 F2	$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$	13 (6'35")	51 (24'58")	35 (17'07")	0	(48'40")
Exercice 12 F2	$M_{3,3}(\mathbb{R})$	0	87 (21'17")	12 (2'58")	0	(24'15")
Exercice 1 F3 (1)	$\mathbb{R}^3$	23 (10'17")	33 (14'39")	32 (14'26")	10 (4'40")	(44'02")
Exercice 1 F3 (2)	$\mathbb{R}^3$	0	54 (13'48")	25 (6'22")	20 (5'05")	(25'25")
Exercice 1 F3 (3) et (4)	$\mathbb{R}^3$	0	29 (12'30")	49 (21'09")	22 (9'28")	(43'07")
Exercice 8 F3	$\mathbb{R}^3$	18 (12'27")	43 (30'06")	22 (15'17")	16 (11'20")	(1h08'35")
Exercice 5 F3	$\mathbb{R}^4$	0	54 (25'50")	17 (8'18")	28 (13'31")	(47'39")

L'étape suivante de notre méthodologie consiste à essayer de repérer des similitudes entre certains exercices dans la répartition des proportions des différents indicateurs globaux de gestion et la présence ou non de certaines phases afin de les regrouper en des types. Dans ce cas, c'est effectivement possible et nous rendons compte de ces regroupements dans le tableau figurant page suivante. Le lecteur pourra trouver en Annexe B des graphiques présentant les pourcentages cumulés des phases de chaque exercice qui permettent de se rendre compte visuellement de la pertinence des regroupements que nous avons faits.

On remarquera que l'exercice 5 feuille 2 (6) ne figure pas dans ce tableau pour la raison qu'il ne présente de similitude avec aucun autre exercice. En résumé, les regroupements par types suivent grossièrement la logique suivante :

- pour le type 1, le prologue occupe près de 50 pour cent du temps total et il n'y a pas de postlogue (ou alors il est rapide); c'est typiquement la répartition (50, 20, 30, 0);
- pour le type 2, le prologue occupe encore près de 30 pour cent du temps total mais la recherche individuelle augmente en proportion par rapport au type 1 et il y a parfois un postlogue; c'est typiquement la répartition (30, 40, 20, 10);

Exercice	Prologue	Recherche	Correction	Postlogue
Type 1				
Exercice 1 Feuille 2	47	22	30	0
Exercice 2 Feuille 2	50	30	18	0
Nouvel Exercice Feuille 2	44	19	30	6
Type 2				
Exercice 4 Feuille 2	30	42	23	0
Exercice 6 Feuille 2	31	31	26	10
Exercice 11 Feuille 2	13	51	35	0
Exercice 1 Feuille 3 (1)	23	33	32	10
Exercice 8 Feuille 3	18	43	22	16
Type 3				
Exercice 5 Feuille 2 (1) et (2)	2	49	18	28
Exercice 7 Feuille 2	2	42	36	18
Exercice 8 Feuille 2	4	47	33	13
Exercice 1 Feuille 3 (2)	0	54	25	20
Exercice 5 Feuille 3	0	54	17	28
Type 4				
Exercice 5 Feuille 2 (3) et (4)	9	76	14	0
Exercice 9 Feuille 2	0	77	6	16
Exercice 12 Feuille 2	0	87	12	0
Type 5				
Exercice 5 Feuille 2 (5)	0	24	55	20
Exercice 1 Feuille 3 (3) et (4)	0	29	49	22

- pour le type 3, il n'y a plus de prologue, la recherche individuelle occupe près de 50 pour cent du temps total tandis que le postlogue occupe près de 20 pour cent du temps total; c'est typiquement la répartition (0, 45, 30, 20);
- pour le type 4, il n'y a pas de prologue, la recherche individuelle occupe près de 80 pour cent du temps total et il n'y a pas de postlogue (ou alors il est court); c'est typiquement la répartition (0, 80, 15, 0);
- pour le type 5, il n'y a pas de prologue, la recherche individuelle occupe près de 25 pour cent du temps total, la correction près de 50 pour cent du temps total et le postlogue près de 20 pour cent du temps total; c'est typiquement la répartition (0, 25, 50, 20).

4.2 Retour aux tâches mathématiques sollicitées

Dans cette section, nous appliquons la dernière partie de l'acte 3 de notre méthodologie : interpréter, si possible, les regroupements opérés par types en fonction des tâches mathématiques sollicitées dans les exercices de chacun de ces types. Pour ce faire, nous nous basons sur l'analyse a priori de l'acte 1 et sur la connaissance précise des déroulements et de leur analyse de l'acte 2. Nous avons présenté dans le chapitre précédent des exemples d'analyse.

On peut remarquer que les exercices analysés au chapitre précédent figurent tous dans un

type différent. Ce choix voulu avait pour but d'analyser des exercices dont les déroulements étaient aussi variés que possible afin que le lecteur puisse se rendre compte de la pertinence des interprétations faites ci-dessous.

On peut aussi remarquer une première régularité dans ce découpage en types : il respecte la chronologie de certaines suites d'exercices. Ainsi, on peut y repérer les séquences d'exercices suivantes :

- exercice 1 feuille 2 (type 1), exercice 4 feuille 2 (type 2), exercice 5 feuille 2 (1) et (2) (type 3), exercice 5 feuille 2 (3) et (4) (type 4) et exercice 5 feuille 2 (5) (type 5) : c'est d'ailleurs en référence à ces exercices que les types ont été numérotés mais il est tout de même remarquable que cette numérotation respecte un tel enchaînement d'exercices;
- exercice 6 feuille 2 (type 2), exercice 7 feuille 2 (type 3) et exercice 8 feuille 2 (type 4);
- exercice 1 feuille 3 (1) (type 2), exercice 1 feuille 3 (2) (type 3) et exercice feuille 3 (3) et (4) (type 5).

Dans les descriptions ci-dessous, nous ferons explicitement référence aux énoncés des exercices sans forcément en rappeler tous les détails pour lesquels nous renvoyons à l'annexe A.

4.2.1 Type 1

Dans ce type, le prologue occupe près de 50 pour cent du temps total, la recherche individuelle est assez courte et il n'y a pas de postlogue (ou alors il est très rapide). Les trois exercices regroupés dans ce type (exercice 1 feuille 2, exercice 4 feuille 2, nouvel exercice feuille 2) abordent des notions FUG que les étudiants voient pour la première fois en travaux dirigés (la notion d'espace vectoriel pour l'exercice 1, la notion de sous-espace vectoriel pour l'exercice 2 et les notions de sous-espace vectoriel engendré par une partie et de somme de sous-espaces vectoriels pour le nouvel exercice). En conséquence, dans chacun de ces exercices, Gilles assure un prologue dans lequel il fait des rappels de cours, propose des méthodes et fournit des aides procédurales (et notamment des aides qui correspondent à la mise en place d'une stratégie de résolution) avant la recherche individuelle qui est plutôt courte. Pour ces raisons, nous proposons de baptiser ce type "nouveau".

4.2.2 Type 2

Dans ce type, rappelons que s'il y a toujours présence d'un prologue, la part de recherche individuelle augmente en proportion par rapport au type 1, et qu'il y a quelquefois un postlogue. En regardant ces exercices et les déroulements de plus près, on voit que ces exercices ont encore une certaine part de nouveauté.

Ainsi, dans l'exercice 4 feuille 2, l'espace vectoriel sous-jacent (par exemple $C^2([0; 1], \mathbb{R})$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) n'a pas encore été vu en travaux dirigés mais le résultat à utiliser a été vu dans un autre cadre à l'exercice 2 feuille 2 (le fait qu'un sous-espace vectoriel est en particulier un espace vectoriel).

Dans l'exercice 6 feuille 2, l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a déjà été vu (exercice 4 feuille 2), ainsi que la somme de sous-espaces vectoriels (nouvel exercice) mais la

notion de somme directe est nouvelle. En postlogue, Gilles revient sur le cas de la fonction exponentielle qu'il avait évoqué en prologue comme pouvant donner l'intuition du résultat aux étudiants.

Dans l'exercice 11 feuille 2, la notion d'équation cartésienne est une nouveauté et Gilles assure un prologue à ce sujet en faisant des rappels et en montrant une méthode pour la déterminer dans le cas de l'espace vectoriel F .

Dans l'exercice 1 feuille 3 point (1), la notion de famille génératrice a déjà été vue de nombreuses fois au cours de la feuille 2 mais les notions de familles libres et de familles liées sont nouvelles. En postlogue, Gilles introduit la notion de dimension et discute du cardinal d'une famille libre ou génératrice (en se limitant au cas de $\mathbb{R}^3$).

Enfin, dans l'exercice 8 feuille 3, la notion de base est nouvelle mais les notions de famille liée et d'équation cartésienne ont été vues précédemment (respectivement dans l'exercice 1 feuille 3 et l'exercice 11 feuille 2). Le postlogue est consacré à la manière de vérifier si l'équation cartésienne trouvée est juste ou non et au traitement d'une nouvelle question : donner les coordonnées d'un certain vecteur dans la base trouvée de F .

Dans les exercices de ce type, Gilles est conscient qu'il reste encore de la nouveauté et il assure toujours un prologue destiné à l'atténuer. Il fait parfois des bilans en postlogue et laisse un peu plus chercher (en proportion) que dans les exercices du type 1. Tous ces exercices contiennent encore une part importante de nouveauté mais elle est moindre par rapport aux exercices du type 1 soit parce que ces notions sont nouvelles mais présentées au sein d'un espace vectoriel que les étudiants ont déjà vu en travaux dirigés (exercice 6 feuille 2, exercice 11 feuille 2, exercice 3 point (1), exercice 8 feuille 3), soit parce qu'il faut utiliser un résultat déjà vu auparavant mais au sein d'un nouvel espace vectoriel (exercice 4 feuille 2). Le postlogue, quand il y en a un, a pour but de faire des bilans ou d'introduire de nouvelles notions dans un cadre délimité et imposé par l'enseignant. On pourrait ainsi appeler ce type "semi-nouveau".

4.2.3 Type 3

Le type 3 regroupe des exercices pour lesquels il n'y a plus de prologue³, la phase de recherche individuelle avoisine les 50 pour cent du temps total et le postlogue est, en proportion, plus important et consistant que dans le type 2. L'enseignant laisse chercher les étudiants dès le début mais assortit sa correction d'un postlogue assez important. La proportion de la correction est plus ou moins stable par rapport au type 2. Si on regarde les exercices d'un peu plus près, on voit qu'il n'y a pas de nouveauté ou que celle-ci est plutôt minoritaire.

Pour l'exercice 5 feuille 2 point (1), le résultat à utiliser a été vu dans les exercices 2 feuille 2 et 4 feuille 2 et la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est connue des étudiants. Le point (2) de ce même exercice est plus délicat puisqu'il faut montrer que l'un des trois axiomes qui garantirait que l'ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ n'est pas vérifié (en fait aucun des trois n'est vérifié ce qui atténue cette difficulté). Cela étant, Gilles a déjà abordé ce type de raisonnement dans l'exercice 4 de la feuille 2 (qui comportait à l'origine deux questions) où il s'agissait de savoir

³ou alors celui-ci est négligeable puisque très court et concerne plutôt la vie de la classe que le rappel de notions.

si l'ensemble des matrices 2×2 dont le produit des éléments diagonaux est nul est un espace vectoriel⁴. Dans le postlogue, Gilles représente graphiquement les ensembles considérés dans ces deux points pour, selon lui, aider les étudiants à avoir une intuition visuelle.

Pour l'exercice 7 feuille 2, la notion de somme de sous-espaces a été vue dans le nouvel exercice et l'exercice 6, et la notion de somme directe a été vue dans ce même exercice 6. La nouveauté de cet exercice réside dans le fait que l'on considère la somme de trois sous-espaces vectoriels. Dans le postlogue, il y a recherche d'une décomposition explicite d'un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$ en somme de vecteurs de ces trois sous-espaces vectoriels et appui sur une représentation graphique.

Pour l'exercice 8 feuille 2, il n'y a plutôt pas de réelle nouveauté. Comme pour l'exercice 7 feuille 2, le postlogue est consacré à la recherche d'une décomposition explicite d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ en somme d'un vecteur de la droite vectorielle et d'un vecteur du plan vectoriel considérés avec l'aide d'une représentation graphique.

Pour l'exercice 1 feuille 3 point (2), les notions de famille liée et famille génératrice ont été vues lors de la correction du point (1) du même exercice. La famille considérée comporte trois vecteurs ce qui empêche les étudiants d'utiliser un argument de non-colinéarité des vecteurs (même deux à deux) pour conclure et rend la tâche plus délicate que dans le point (1). Cette nouveauté est toutefois atténuée par le fait que, même si la famille du point (1) comporte deux vecteurs, sa correction a été faite sans utiliser la colinéarité desdits vecteurs (mais elle a été mentionnée ensuite). Dans le postlogue, Gilles mentionne que la famille du point (2) est une base de $\mathbb{R}^3$, puisqu'elle est libre maximale : elle est donc aussi génératrice.

Pour l'exercice 5 feuille 3, la notion de base a déjà été vue explicitement dans l'exercice 8 feuille 3. La notion de dimension a déjà été évoquée même si elle n'apparaît pas sur les feuilles d'exercice. Dans le postlogue, la notion de rang est introduite et l'exercice est fait à nouveau à la lueur de cette nouvelle notion.

Dans ce type, l'enseignant consent donc à laisser chercher les étudiants dès le début puisque, si nouveauté il y a, elle est minoritaire. En revanche, le postlogue occupe plus de temps que dans le type 2 et traite plutôt de questions plus cruciales pour la suite du cours. Puisque Gilles consent à ce que les étudiants découvrent ces exercices, on pourrait appeler ce type "découverte".

4.2.4 Type 4

Dans ce type, il n'y a pas de prologue ou celui-ci est très court, la recherche individuelle occupe plus de 75 pour cent du temps total, la correction est rapide.

Dans l'exercice 5 feuille 2 points (3) et (4), l'espace vectoriel qui contient ces deux sous-ensembles a déjà été vu lors de l'exercice 4 feuille 2. Du reste, cette tâche est neutralisée par Gilles lors d'un court prologue dans lequel il rappelle que $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La tâche qui reste à la charge des étudiants est simple et isolée.

Dans l'exercice 9 feuille 2, la notion principale est celle de combinaison linéaire de vecteurs (de

⁴nous n'avons pas un enregistrement vidéo de cette partie de l'exercice mais Gilles nous a confirmé l'avoir traité avec les étudiants.

$\mathbb{R}^n$). Cette notion a déjà été utilisée précédemment lors des exercices 6 et 8 feuille 2 (à propos de la notion de sous-espace vectoriel engendré par une partie). La tâche demandée dans cet exercice est donc simple et isolée. Dans le postlogue, il y a discussion sur l'unicité de la décomposition d'un vecteur écrit comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs. Cette discussion permet à Gilles de réinterpréter les résultats de l'exercice 8 feuille 2.

Quant à l'exercice 12 feuille 2, la notion de sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs a été vue maintes fois auparavant (exercices 7, 8 et 11 feuille 2).

Dans ces exercices l'autonomie des étudiants est grande mais il sont face à des tâches simples et isolées pour lesquelles il n'y a pas de postlogue (ou alors celui-ci est une reprise de ce qui a été fait). On est en droit de baptiser ce type "entraînement".

4.2.5 Type 5

Dans ce type, il n'y a pas de prologue, la recherche individuelle est courte (moins de 30 pour cent du temps total), la correction est longue (plus de 50 pour cent du temps total) et assortie d'un postlogue.

Dans l'exercice 5 feuille 2 point (5), le résultat à utiliser n'est pas nouveau (montrer que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni des lois usuelles) mais la présence du "ou" rend cette tâche nouvelle et plus délicate. Dans le postlogue, Gilles organise une discussion à propos du sens courant et du sens mathématique des locutions "ou" et "et". Cette discussion débouche sur la question de savoir si une union (resp. une intersection) de sous-espace vectoriels est un sous-espace vectoriel ou non.

Dans l'exercice 1 feuille 3 point (3), il n'y a pas de réelle nouveauté par rapport au point (2) du même exercice. En revanche, la famille du point (4) est une famille dépendant d'un paramètre sur lequel il faut discuter pour conclure. Le postlogue (qui est un postlogue au point (3)) permet à l'enseignant de donner un exemple de famille liée et génératrice et de dire que la famille considérée dans ce point est à la fois liée et de cardinal 3 donc ne peut être génératrice. Il exhibe aussi une équation cartésienne de l'espace engendré par ces trois vecteurs.

Face à ces exercices, l'enseignant laisse chercher les étudiants directement mais pas très longtemps, corrige longuement l'exercice puis met en scène un postlogue dans lequel il insiste sur des conséquences de la résolution ou sur des résultats vus en cours qui ont un lien avec l'exercice. Les étudiants ont à réinvestir leurs connaissances dans une situation dont un paramètre est nouveau : on peut parler de "réinvestissement".

4.3 Compléments relatifs aux prologues et aux postlogues

Dans l'analyse précédente, nous avons pu constater des moments d'institutionnalisation dans certains prologues et certains postlogues. Dans cette section, nous donnons quelques précisions concernant ces moments à l'aune des trois questions suivantes :

- les connaissances institutionnalisées lors des prologues sont-elles reprises lors des postlogues ? Plus précisément, quelle est la "direction principale" des institutionnalisations :

peut-on plutôt dire que les connaissances institutionnalisées en prologue sont précisées, commentées en postlogue ou peut-on plutôt dire, au contraire, que les institutionnalisations qui ont lieu en postlogue anticipent les prologues qui suivent ?

- peut-on interpréter ces moments d'institutionnalisation en lien avec le type de l'exercice dans lequel ils ont été repérés (autrement dit, ces moments sont-ils à la fois liés aux tâches mathématiques et à la gestion des déroulements par l'enseignant ?) ?
- quel lien avec l'autonomie laissée aux étudiants par l'enseignant ?

Une analyse rapide des moments d'institutionnalisation des différents prologues et postlogues nous montre que si la "direction principale" des institutionnalisations va plutôt du prologue vers le postlogue, cela n'est pas un fait général sur tout le corpus d'exercices. Ainsi, dans le postlogue du nouvel exercice feuille 2, l'enseignant introduit la notion de somme directe qui est la notion centrale de l'exercice qui suit (exercice 6 feuille 2). C'est aussi le cas dans le postlogue de l'exercice 1 point (1) où l'enseignant donne une introduction à la notion de dimension qui sera reprise dans les points (2), (3) et (4) de cet exercice.

En fait, il semble que les moments d'institutionnalisation n'aient pas la même fonction (objet, outil) selon qu'ils ont lieu en prologue, en postlogue, au sein d'un type ou d'un autre.

Dans les exercices du type 1, l'enseignant fait une institutionnalisation théorique poussée qui est similaire à celle que les étudiants ont eu en cours : par exemple, il écrit les axiomes de la loi externe d'un espace vectoriel (dans l'exercice 1 feuille 2) ou donne une preuve détaillée du fait que la somme de deux sous-espaces vectoriels est le sous-espace vectoriel engendré par l'union de ces deux sous-espaces (dans le nouvel exercice feuille 2). Dans ce type, l'enseignant (re)fait des parties du cours : on peut parler d'institutionnalisation à fonction objet.

Dans quatre des cinq exercices du type 2, l'enseignant donne une méthode générale mais adaptée à l'exercice pour faciliter l'entrée des étudiants dans la tâche demandée (par exemple, rappel de la définition d'une famille libre et méthode pour déterminer si une famille est libre ou non (dans l'exercice 3 point (1) feuille 3) ou méthode pour trouver une base de $\text{Vect}(P)$ où P est une famille finie et liée (dans l'exercice 8 feuille 3)). Quand il y a un postlogue (dans trois de ces exercices), celui-ci est consacré au rappel d'une notion dans le cadre fourni par l'exercice. L'enseignant donne plutôt des méthodes générales avant toute recherche ou des points de cours adaptés aux exercices dans les postlogues : on peut parler d'institutionnalisation à fonction outil.

Dans le postlogue des exercices du type 3, l'enseignant donne aux étudiants des moyens d'appuyer leur intuition par des représentations graphiques (exercice 5 points (1) et (2), exercice 7, exercice 8 feuille 2), fournit des preuves explicites (exercice 7, exercice 8 feuille 2) ou rappelle une notion dans le but de montrer son aspect simplificateur dans l'exercice considéré (la notion de base dans l'exercice 1 point (2) feuille 3 et la notion de rang dans l'exercice 5 feuille 3). Là encore, c'est l'aspect outil de l'institutionnalisation qui est utilisé par l'enseignant.

Dans les types 4 et 5, on ne repère pas de réelle institutionnalisation.

Il nous paraît intéressant de lier les constats précédents à l'évolution de l'autonomie des étudiants. On a déjà pu voir que l'autonomie des étudiants est absente ou faible dans les types 1 et 2 et que les étudiants sont plus autonomes dans les types 3 à 5 (notamment en ce que la recherche individuelle intervient dès le début). Les constats ci-dessus illustrent ce transfert d'autonomie

par le biais de la fonction et de la place que l'enseignant donne aux institutionnalisations. En effet, quand institutionnalisation il y a,

- c'est une institutionnalisation objet qui a lieu durant le prologue dans le type 1;
- c'est plutôt une institutionnalisation outil qui a lieu en prologue et en postlogue dans le type 2;
- c'est une institutionnalisation outil qui a lieu en postlogue dans le type 3;

Dans le type 1, la nouveauté est maximale et l'enseignant assure un prologue dans lequel la fonction de l'institutionnalisation est objet ce qui ne laisse pas d'autonomie aux étudiants. Dans le type 2, la nouveauté est encore majoritaire, la fonction de l'institutionnalisation (qui a souvent lieu en prologue ET en postlogue) est plutôt outil et l'autonomie reste faible. Dans le type 3, la nouveauté est moindre, l'autonomie plus grande et la fonction de l'institutionnalisation (qui a lieu exclusivement en postlogue) est outil. Lorsque l'autonomie est grande (types 4 et 5), on ne repère plus d'institutionnalisation.

On peut donc faire l'hypothèse que le passage par les types 2 et 3 est crucial quant au transfert d'autonomie aux étudiants et qu'il y a un lien entre la fonction et la place de l'institutionnalisation d'une part et la part d'autonomie qui leur est laissée d'autre part.

4.4 Résumé des résultats globaux

De l'analyse précédente, nous retenons notamment les résultats suivants.

Plus les notions abordées dans les exercices sont nouvelles (types 1 et 2), moins cet enseignant laisse chercher. Plus les notions abordées dans les exercices sont vues au travers de tâches simples et isolées (type 4), plus cet enseignant laisse chercher.

Lorsque les notions sont nouvelles (types 1 et 2), l'enseignant assure un prologue destiné à rappeler les notions et résultats principaux pour faire le lien avec le cours. L'enseignant consent à laisser chercher les étudiants dès le début (types 3, 4 et 5) lorsque la nouveauté est minoritaire ou absente (types 3 et 4) ou lorsqu'il souhaite que les étudiants réinvestissent leurs connaissances (type 5) et alors la recherche est plutôt courte. Lorsqu'il reste une part de nouveauté (types 3 et 5), il assure un postlogue destiné à recadrer les connaissances mises en jeu dans l'exercice.

Pour cet enseignant, tout se passe comme si le cours ne sert à pas grand chose puisque lorsque la nouveauté est majoritaire (types 1 et 2), il l'atténue en faisant des rappels de cours. Toutefois, nous interprétons le fait que le prologue disparaisse dans les trois derniers types comme un indice d'apprentissage chez les étudiants : du reste, les étudiants sont mis en autonomie face à des exercices qui ont encore une part de nouveauté (types 3 et 5).

Nos constats mettent en valeur un phénomène d'institutionnalisation double :

- une institutionnalisation faite en cours;
- une institutionnalisation faite en travaux dirigés dont la fonction est plus ou moins objet ou outil.

L'analyse des institutionnalisations faites en travaux dirigés permet de supposer qu'il y a un lien entre l'autonomie laissée aux étudiants et la place et la fonction (objet ou outil) de ces institutionnalisations.

On peut aussi conclure des analyses précédentes que, globalement, la gestion des déroulements organisée par cet enseignant est en lien fort avec les tâches mathématiques sollicitées pendant le déroulement. Nous dirons donc que la gestion de cet enseignant est "transparente" vis à vis des tâches mathématiques qu'il organise, c'est à dire que l'organisation qu'il fait des déroulements permet de "lire" le type de tâches qu'il propose aux étudiants.

Plus encore, le deuxième acte de la méthodologie montre que, pour chaque exercice et quel que soit son type, les activités possibles des étudiants déterminées a posteriori correspondent exactement aux activités potentielles déterminées dans l'analyse a priori⁵. Ceci ajouté aux analyses ci-dessus est l'indice que Gilles a complètement en main l'attribution d'un type à un exercice et qu'il le fait a priori : il décide totalement lui-même de ce qui est neuf et de ce qui ne l'est pas. Ce faisant, il prend le risque de masquer en partie la nouveauté aux étudiants en ne leur donnant pas une part de responsabilité, même petite, vis à vis de la nouveauté. Cela nous amène à nous poser une question : étant donné que Gilles semble décider globalement de tout a priori, n'y a-t-il pas des événements dans les déroulements qui lui échappent ? Pour cela, il faut aller regarder les déroulements d'un peu plus près : c'est l'objet du chapitre suivant.

⁵ ceci avait déjà été noté dans chacun des exercices analysés au chapitre précédent.

Chapitre 5

Résultats complémentaires

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'il y avait un lien global fort entre les déroulements que cet enseignant organise et les tâches mathématiques qu'il sollicite. Une analyse des activités possibles des étudiants nous a montré que l'enseignant semble décider du type de chaque exercice a priori. Ces résultats nous poussent à tenter de discriminer plus finement la gestion de cet enseignant.

5.1 Problématique

En général, le fait de trouver des régularités et des variabilités globales dans les pratiques d'un ou de plusieurs enseignants nécessite que l'on s'y intéresse plus finement. Ainsi, en [21], Robert se pose les questions suivantes à propos d'un enseignant générique : *“Comment ménage-t-il les liens entre ce qu'il expose et ce que les élèves ont fait ? Quels moyens se donne-t-il pour repérer l'état des élèves, les évaluer, les forcer à écouter, à travailler ?”*.

Dans la méthodologie de Pariès, Robert et Rogalski (voir [26] Partie 2 Chapitre 2), le troisième acte consiste habituellement en l'analyse des accompagnements langagiers fins de l'enseignant. Ce troisième acte, plus fin que les deux premiers actes, vise à analyser tout ce qui dans le discours de l'enseignant contribue à développer l'activité des élèves. Par exemple la qualité du discours (fonctions du discours et buts illocutoires), l'utilisation répétée de certains marqueurs langagiers ou encore le repérage de certaines unités de discours sont des indicateurs pris en compte dans ces analyses. Ces précisions sur le discours renseignent sur la manière d'accompagner ou d'influencer le travail des élèves.

Dans l'enseignement supérieur, un certain nombre de questions se posent à propos des interventions collectives de l'enseignant aussi bien que de sa façon d'accompagner le travail des étudiants :

- Si les étudiants ont des difficultés à faire le lien avec le cours, comment l'enseignant se renseigne-t-il sur la compréhension que les étudiants en ont et en quoi cela influence-t-il sa gestion et ses interventions collectives ?
- Compte tenu des exigences nouvelles en matière de pratiques mathématiques, comment

l'enseignant fait-il pour développer/évaluer ces pratiques compte tenu de la grande hétérogénéité des étudiants ?

- Comment l'enseignant gère-t-il les difficultés des étudiants spécifiques à l'enseignement supérieur, telles le formalisme ou le rapport aux notions FUG ?
- Fait-il participer les étudiants à la construction des connaissances mathématiques ? Les fait-il réfléchir sur les Mathématiques ?

Enfin, à la fin du chapitre précédent, le constat du fait que Gilles semble décider du type d'un exercice a priori nous avait amené à poser la question suivante : n'y a-t-il pas des événements dans les déroulements qui lui échappent ? S'il décide du caractère "nouveau" d'un exercice à l'avance, cette nouveauté est-elle visible pour les étudiants ?

Les rappels précédents et ces dernières questions motivent l'intérêt qu'il y a à considérer les accompagnements langagiers de l'enseignant et notamment la façon dont l'enseignant tient ou ne tient pas compte de l'activité des étudiants dans sa gestion des déroulements. En conséquence, nous précisons un peu plus notre problématique.

Problématique (ter). *Est ce que sa gestion locale va dans le sens de sa gestion globale ou plutôt contre ? L'enseignant repère-t-il les activités des élèves ? En tient-il compte ? Exploite-t-il ce qu'il a repéré chez les élèves ? Quelle est sa part d'improvisation par rapport à son projet initial ?*

5.2 Méthodologie

Expliquons la méthodologie que nous allons utiliser afin d'apporter des éléments de réponses à cette nouvelle problématique.

Comme pour l'analyse globale, cette nouvelle recherche s'inscrit dans le cadre théorique de la Théorie de l'Activité. Pour cette méthodologie, il aurait été naturel d'utiliser l'acte 3 de la méthodologie générale de Pariès, Robert et Rogalski détaillé en [16] puisqu'il s'agit de l'analyse des interventions langagières fines de l'enseignant. Nous n'avons toutefois pas fait ce choix essentiellement parce nous tenions à pouvoir analyser toutes les séances dont nous disposions et que cela aurait été trop coûteux en temps : il nous a donc fallu trouver un autre moyen pour savoir dans quelle mesure l'enseignant repère et exploite les activités des étudiants.

Les questions que l'enseignant pose aux étudiants constituent un premier moyen de repérer leurs activités. En conséquence, dans chaque séance d'exercice et au sein de chaque phase collective repérée dans l'analyse globale (prologue, correction, postlogue) nous repérons le nombre de *vraies questions* et de *fausses questions* que l'enseignant pose aux élèves : sera une "vraie question" toute question que l'enseignant pose à toute la classe face aux élèves et pour laquelle soit un élève répond, soit l'enseignant laisse un temps suffisant pour répondre. Toute autre question sera qualifiée de "fausse question" soit parce que l'enseignant y répond lui-même, soit parce qu'il ne laisse pas le temps de répondre pour diverses raisons. Nous pensons qu'ici la vidéo sera d'une grande aide pour repérer dans l'attitude de l'enseignant s'il pose une vraie question ou non.

Un moyen simple de se rendre compte si l'enseignant exploite les activités des étudiants est de noter les références qu'il fait à ces activités dans son discours : ces références explicites au

travail des élèves sont également comptabilisées. Enfin, nous avons aussi choisi de comptabiliser les questions, remarques et interventions des élèves à l'attention de l'enseignant qu'il les prenne en compte ou pas : en effet, nous considérons que le fait de prendre en compte une question d'un étudiant est un moyen d'exploiter le travail qu'il a fait.

Toutes ces données constituent nos indicateurs locaux pour savoir dans quelle mesure l'enseignant tient compte des activités des étudiants dans sa gestion de la classe.

5.3 Résultats

Nous avons appliqué la méthodologie précédente à tous les exercices de travaux dirigés que nous avons analysé globalement dans le chapitre 4. Les résultats se trouvent dans le tableau figurant en annexe C. Dans ce tableau, nous avons rendu compte du nombre de vraies questions (v), de fausses questions (f), d'exploitations du travail des étudiants (e), de questions d'étudiants prises en compte par l'enseignant (o) ou pas (n) au sein de chaque phase (prologue, correction et postlogue) et globalement. Nous avons regroupé les exercices au sein des types que nous avons déterminé au chapitre précédent et avons rappelé pour chacun de ces types les proportions globales de chacune des phases.

Dans ce tableau, nous n'avons pas constaté de régularités concernant les questions d'étudiants prises en compte ou pas par l'enseignant (codées "o" ou "n") et ne les évoquerons donc pas dans l'analyse.

Concernant l'exploitation du travail des étudiants, nous n'avons pas non plus repéré de régularités. Le seul résultat que l'on peut mentionner à ce sujet est que l'enseignant exploite pas ou peu le travail des étudiants quel que soit le type d'exercices que l'on considère (à l'exception peut-être de l'exercice 5 feuille 2 point (5)).

Pour la suite de l'analyse, nous ne considérerons donc que le nombre de vraies et de fausses questions posées par l'enseignant que nous rappelons, par commodité pour le lecteur, dans le tableau simplifié ci-dessous.

Dans ce tableau, on remarque d'emblée qu'il y a globalement équilibre entre vraies et fausses questions dans les exercices des types 1, 2 et 3 alors qu'il y a globalement une majorité de vraies questions dans les exercices des types 4 et 5. Précisons ce premier constat en regardant ce qui se passe dans les différentes phases (prologue, correction, postlogue).

5.3.1 Types 1 et 2

Dans ces deux types, où les notions abordées sont majoritairement nouvelles, l'équilibre global des vraies et des fausses questions résulte de l'équilibre de ces questions dans les phases de prologue et de correction (sauf pour l'exercice 1 feuille 3 (1)).

Les questions posées en prologue de ces exercices ont toujours trait aux nouvelles notions en jeu dans l'exercice. En regardant les questions de plus près, on voit que très souvent l'enseignant baisse peu à peu le niveau de ses questions. Par exemple, dans l'exercice 1 feuille 2, l'enseignant demande d'abord "quelle est la structure classique d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}^2$?" (fausse question) qu'il reformule quelques secondes plus tard par "est ce que la loi + ici présente, c'est la loi

Exercice	Prologue	Correction	Postlogue	Total
Type 1	50	30	0	
Exercice 1 Feuille 2	6v 6f	3v 3f		9v 9f
Exercice 2 Feuille 2	4v 3f	2v 2f		6v 5f
Nouvel Exercice Feuille 2	21v 18f	10v 13f	1v 0f	32v 31f
Type 2	30	20	10	
Exercice 4 Feuille 2	14v 10f	3v 5f		17v 15f
Exercice 6 Feuille 2	6v 5f	5v 3f	0v 0f	11v 8f
Exercice 11 Feuille 2	10v 6f	2v 5f		12v 11f
Exercice 1 Feuille 3 (1)	7v 2f	8v 5f	1v 0f	16v 7f
Exercice 8 Feuille 3	4v 4f	4v 3f	7v 4f	15v 11f
Type 3	0	30	20	
Exercice 5 Feuille 2 (1) et (2)		1v 2f	7v 4f	8v 6f
Exercice 7 Feuille 2		5v 2f	2v 3f	7v 5f
Exercice 8 Feuille 2	0v 0f	6v 8f	7v 4f	13v 12f
Exercice 1 Feuille 3 (2)		0v 1f	0v 1f	0v 2f
Exercice 5 Feuille 3		1v 1f	0v 0f	1v 1f
Type 4	0	15	0	
Exercice 5 Feuille 2 (3) et (4)	1v 0f	5v 0f		6v 0f
Exercice 9 Feuille 2		0v 0f	7v 0f	7v 0f
Exercice 12 Feuille 2				0v 0f
Type 5	0	50	20	
Exercice 5 Feuille 2 (5)		20v 6f	4v 1f	24v 7f
Exercice 1 Feuille 3 (3) et (4)		11v 1f	11v 1f	22v 2f

classique sur $\mathbb{R}^2$?" (vraie question). Puisque ces questions touchent à de la nouveauté et souvent à des notions FUG, l'enseignant baisserait peu à peu le niveau de ses questions pour inciter les étudiants à prendre part à ces rappels, baisse qui pourrait expliquer cet équilibre entre vraies et fausses questions dans le prologue (une fausse question trop délicate serait suivie par une vraie question de niveau plus abordable).

Il y a aussi équilibre entre vraies et fausses questions lors de la phase de correction dans ces deux types. En regardant les questions posées, on remarque qu'elles sont souvent du type "Qu'est ce que ça donne ?" ou "Que peut-on en déduire ?", toute demande implicite ou non de résultats de calcul tels " $5x_2$ c'est quoi ?" ou " f_1 elle est ?" ou toutes questions qu'il s'agit de compléter relativement simplement comme "Tel que les deux coordonnées sont ?" qui attend pour réponse "Egales.". Dans ces types, l'enseignant montre plutôt sa propre activité mathématique lors de la phase de correction et il semblerait que ces questions soient plutôt destinées à essayer d'associer les étudiants à cette activité. L'équilibre traduirait alors le fait que les étudiants ne suivent que partiellement cette activité mathématique.

Il n'est pas étonnant de voir que dans les types 1 et 2, il n'y a pas ou peu de questions en postlogue (sauf pour l'exercice 8 feuille 3) soit parce que celui-ci est absent (type 1), soit parce que, quand un postlogue a lieu, on a vu que c'était un point de cours délimité que l'enseignant impose : il prend peu d'informations sur le ressenti des étudiants puisqu'il est convaincu que ce point de cours leur sera nécessairement utile pour la suite du cours.

5.3.2 Type 3

Il y a également équilibre global des vraies et fausses questions dans les exercices du type 3 dont on rappelle qu'ils sont des exercices de découverte. On constate que cet équilibre global résulte d'un équilibre des vraies et fausses questions dans les phases de correction et de postlogue. Concernant la phase de correction, on peut faire à peu près les mêmes constats que pour les types 1 et 2.

En postlogue, soit il n'y a pas de questions, soit on constate un relatif équilibre entre vraies et fausses questions. Quand Gilles pose des questions, on constate qu'il a en vue un rappel précis d'une méthode ou d'une comparaison de méthodes. Ses questions sont alors destinées à guider les étudiants en direction de ce rappel. Il tient un peu plus compte des étudiants dans ses rappels : cela n'est pas étonnant puisque les étudiants sont en phase de découverte et ont cherché plus longtemps dès le début du déroulement consacré à l'exercice.

5.3.3 Types 4 et 5

Dans les types 4 et 5, il n'y a pas de prologue et soit il n'y a pas de questions en correction (exercice 9 feuille 2, exercice 12 feuille 2) soit une grande majorité de vraies questions (exercice 5 feuille 2 (3) et (4), exercice 5 feuille 2 (5) et exercice 1 feuille 3 (3) et (4)).

Quand il n'y a pas de questions en correction, on a affaire à une correction magistrale intervenant après un temps de recherche très long : on peut donc penser que Gilles a pu constater l'évolution de l'activité des étudiants pendant ce temps de recherche individuelle et qu'il a moins besoin de l'évaluer au moyen de questions.

Quand il pose des questions en correction, elles interviennent soit après un long temps de recherche (ceux du type 4) soit dans le cadre d'un réinvestissement (type 5) : l'enseignant consent à poser une majorité de vraies questions soit quand les tâches sont simples et isolées (type 4), soit quand il souhaite que les étudiants réinvestissent leurs connaissances (type 5). Dans ce cas, on remarque que plutôt que de montrer son activité mathématique en correction comme il le fait dans les types 1, 2 et 3, il semble tenir un peu plus compte des activités des étudiants en leur posant de vraies questions lors de la phase de correction.

Dans ces deux types, quand il y a des questions en postlogue, celles-ci sont aussi majoritairement de vraies questions et on constate que l'enseignant associe par ce biais les étudiants au point de cours qu'il rappelle qui est plutôt plus crucial pour la suite du cours que dans les autres types.

5.4 Résumé des résultats locaux dans l'enseignement supérieur

Résumons maintenant les résultats locaux que nous avons obtenus en revenant à la problématique posée.

Disons tout d'abord que certains indicateurs locaux que nous avons relevés et comptabilisés ne nous ont pas paru être cruciaux vis à vis de notre problématique en ce sens qu'il ne vont ni dans le sens de la gestion globale de l'enseignant ni contre sa gestion globale. Si on se réfère à l'annexe C, on voit que les indicateurs "o" et "n" comptabilisant respectivement la prise en compte de leurs

questions ou la non prise en compte de leurs questions ne présentent pas de régularité au sein des différents types ou des différentes phases des exercices : de ces points de vue, la gestion locale de l'enseignant paraît indifférenciée. Pour l'indicateur "e" qui comptabilise les références explicites au travail des étudiants, la seule régularité que l'on peut constater est que Gilles exploite pas ou peu le travail des étudiants quel que soit le type d'exercices que l'on considère.

En revanche le comptage des vraies et fausses questions nous a permis de préciser quelque peu la gestion globale de l'enseignant. Sa gestion locale du point de vue des questions aux étudiants va plutôt dans le sens de sa gestion globale et dépend fortement à la fois du type de l'exercice considéré et des phases dans lesquelles ces questions sont posées.

Ainsi, dans les types 1, 2 et 3 où les notions abordées sont nouvelles ou en phase de découverte et où l'autonomie des étudiants a été identifiée comme faible, on a constaté un équilibre des vraies et des fausses questions à la fois globalement et au sein de chaque phase. On a vu également que cet équilibre traduisait une baisse progressive du niveau des questions en prologue et une volonté de l'enseignant d'associer les étudiants à sa correction magistrale.

En revanche, dans les types 4 et 5, où l'autonomie des étudiants est plus grande, soit parce qu'ils sont face à des tâches simples et isolées, soit parce qu'ils sont amenés à réinvestir leurs connaissances, il y a une grande majorité de vraies questions au sein de toutes les phases ce qui se traduit par une volonté de l'enseignant d'associer les étudiants soit à la construction de la solution de l'exercice, soit aux commentaires faits en postlogue. Quelquefois, il y a très peu de questions : cela traduit alors une correction magistrale qui s'explique par le fait que la recherche individuelle a été longue et que l'enseignant a sans doute pu observer les activités des étudiants.

On a vu que la gestion globale de cet enseignant est en lien fort avec les tâches mathématiques sollicitées. Cette nouvelle analyse nous permet de dire que l'enseignant cherche toujours à tenir compte des activités des étudiants par les questions qu'il pose mais qu'il le fait différemment selon que les notions sont nouvelles (et alors il y a équilibre entre les vraies questions et les fausses questions) ou simples et isolées (et alors il pose en majorité des vraies questions). De ce point de vue, la gestion locale de Gilles va donc plutôt dans le sens de sa gestion globale et il y a plutôt cohérence entre la gestion des déroulements que Gilles organise en lien avec la tâche mathématique et l'organisation des questions qu'il pose aux étudiants.

Chapitre 6

Ouverture sur l'enseignement secondaire

Pour finir ce travail, nous proposons une ouverture en direction de l'enseignement secondaire. La problématique générale de ce travail était de se demander s'il n'y avait pas une rupture entre enseignement secondaire et enseignement supérieur du point de vue de la gestion des déroulements organisés par l'enseignant. Pour le moment, nous avons montré l'existence d'enseignants dans l'enseignement supérieur¹ pour lesquels la gestion est en lien fort avec les tâches mathématiques et semble décidée a priori par l'enseignant. Dans ce chapitre, nous appliquons nos méthodologies (globale et fine) à quelques séances de l'enseignement secondaire.

Précisons clairement que le but de ce chapitre n'est pas de dégager des résultats de recherche² mais plus modestement de faire quelques observations à partir de séances de l'enseignement secondaire. Il nous faut alors choisir un domaine situé plutôt à la fin de l'enseignement secondaire. Notre choix s'est porté sur l'introduction aux nombres complexes en terminale scientifique pour plusieurs raisons :

- c'est un domaine dont la portée est algébrique et qui pose généralement des problèmes aux élèves de terminale;
- c'est un domaine où la nouveauté est présente et qui généralise des notions vues antérieurement par les élèves;
- nous avons facilement à disposition des vidéos concernant l'introduction aux nombres complexes.

6.1 Description rapide des séances

Nous disposons de trois vidéos consacré à l'introduction aux nombres complexes. Il s'agit d'une classe de terminale scientifique dans laquelle certains élèves ont choisi l'option Mathématiques

¹le fait que nous ayons montré l'existence d'un enseignant dont la gestion est transparente vis à vis des tâches mathématiques sollicitées implique qu'il existe une certaine classe d'enseignants de l'enseignement supérieur dont les pratiques et la manière de gérer les séances sont proches de celles de cet enseignant.

²il eut fallu pour cela que nous disposions de plus de temps à consacrer à l'enseignement secondaire.

alors que d'autres ont choisi une autre option. L'enseignant a filmé lui-même ces séances en plaçant la caméra au fond de la salle centrée sur le tableau. Les trois séances sont succinctement découpées de la manière suivante.

La première séance et la moitié de la seconde sont consacrée à la correction d'un devoir maison introductif aux nombres complexes. Il s'agit de la résolution de cas particuliers de l'équation $(E) : x^3 = px + q$ avec $p, q > 0$. Dans ce cas, les élèves ont vu en demi-groupes que si $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$ alors l'équation (E) a pour solution

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

d'après la formule de Cardan. Dans un premier cas, on demande aux élèves de trouver une solution de l'équation dans le cas $p = 0$ et $q = 1$. Dans un second et un troisième cas, il s'agit de trouver toutes les solutions de l'équation (E) avec $p = 3$ et $q = 2$ et $p = 2$ et $q = 4$ respectivement. Dans le quatrième cas ($p = 15$ et $q = 4$), où la formule de Cardan n'est a priori pas utilisable, les élèves constatent que l'équation (E) possède néanmoins trois solutions réelles, puis en supposant l'existence de $\sqrt{-1}$ et le prolongement des opérations de $\mathbb{R}$ aux symboles $a + b\sqrt{-1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, les élèves sont amenés à voir que la formule de Cardan donne une solution de (E) .

La seconde partie de la seconde séance consiste en un cours préliminaire sur les nombres complexes qui part de l'existence (admise) de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes satisfaisant certaines propriétés. Certaines définitions usuelles sont ensuite données (forme algébrique d'un nombre complexe, partie réelle, partie imaginaire) et les opérations conférant à $\mathbb{C}$ sa structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel sont rappelées.

Dans la troisième séance, il s'agit de la correction d'un exercice que l'enseignant laisse chercher individuellement en classe. Les questions abordées pendant la vidéo sont les suivantes :

Exercice

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé et une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite de leurs affixes $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $z_0 = 8$ et

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} z_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1)(a) Donner le module et un argument de $Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}$.

(b) Donner la forme trigonométrique de Z .

(2) Donner les formes algébriques de z_1 , z_2 et z_3 et vérifier que $z_3 \in \mathbb{R}$. Placer ces points sur une figure.

(3) Calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n}$.

6.2 Résultats globaux dans l'enseignement secondaire

6.2.1 Déroulements des séances

Nous passons sur l'analyse a priori des exercices proposés et donnons une rapide chronologie des déroulements de ces trois séances en tentant, comme nous l'avons fait dans l'enseignement supérieur, de délimiter des phases (prologue, recherche individuelle, correction, postlogue) quand cela est possible.

Séance 1

Rappelons que cette séance est consacrée à la correction d'un devoir que les élèves ont fait au préalable.

- de 48" à 4'20" : prologue historique et rappel de la formule de Cardan vue en demi-groupes;
- de 4'20" à 12'05" : correction des deux premiers cas, description de la méthode de division polynômiale pour résoudre le second cas;
- de 12'05" à 14'20" : postlogue consacré à la division polynômiale;
- de 14'20" à 16'58" : correction et bilan du second cas;
- de 16'58" à 21'21" : retour sur la division polynômiale à la demande d'un élève;
- de 21'21" à 27' : correction du troisième cas;
- de 27' à 29'40" : phase de recherche individuelle;
- de 29'40" à 30'50" : correction d'un élève au tableau;
- de 30'50" à 34'25" : bilan du troisième cas et correction du quatrième cas;
- de 34'25" à 43' : postlogue sur le théorème de la bijection pour montrer que l'équation admet trois solutions réelles malgré le fait que la formule de Cardan ne s'applique pas;
- de 43' à 47'40" : postlogue sur la formule de Cardan et son utilisation.

Séance 2

Cette séance fait suite à la séance 1.

- de 0' à 55" : prologue et rappels;
- de 55" à 7'10" : suite de la correction;
- de 7'10" à 13'51" : postlogues;
- de 13'51" à 22'15" : distribution de feuilles et vie de la classe;
- de 22'15" à 51'43" : début du cours sur les nombres complexes;

Séance 3

- de 0' à 2'57" : rappels sur les nombres complexes et écriture des premières questions de l'exercice;
- de 2'57" à 5'36" : recherche individuelle;
- de 5'36" à 7'57" : rappels faits par l'enseignant sur l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe;
- de 7'57" à 10'10" : recherche individuelle;

- de 10'10" à 11'28" : correction d'une élève;
- de 11'28" à 14' : correction de l'enseignant;
- de 14' à 14'50" : postlogue et discussion sur la méthode;
- de 14'50" à 15'15" : bilan;
- de 15'15" à 16'15" : correction de l'enseignant;
- de 16'15" à 17'50" : réponse à des questions d'élèves;
- de 17'50" à 20' : postlogue et discussion sur une méthode;
- de 20' à 20'51" : écriture de la seconde question;
- de 20'51" à 25'52" : recherche individuelle;
- de 25'52" à 27'50" : correction d'une élève;
- de 27'50" à 28'50" : bilan et recherche d'un volontaire pour passer au tableau;
- de 28'50" à 30' : correction d'un élève;
- de 30' à 30'50" : écriture de la troisième question;
- de 30'50" à 32'54" : recherche individuelle;
- de 32'54" à 35'36" : correction de l'enseignant;
- de 35'36" à 38'30" : utilisation de Géogebra pour montrer la position des points dans le plan complexe;
- de 38'30" à 41'30" : commentaires sur l'épreuve pratique;
- de 41'30" à 43'40" : recherche individuelle;
- de 43'30" à 47' : correction de l'enseignant.

6.2.2 Bilan de la gestion globale de l'enseignant du secondaire

Globalement, l'enseignant aborde ici une notion nouvelle (les nombres complexes) mais choisit de le faire par le biais d'une activité préparatoire donnée en Devoir Maison. La première séance est alors un corrigé point par point de ce devoir. Cela étant, cette correction est complexe et c'est aussi l'occasion de faire des bilans (formule de Cardan vue en demi-groupe, factorisation d'un polynôme admettant une racine, division polynomiale, utilisation du théorème de la bijection). La correction est faite par l'enseignant en interaction avec les élèves sauf pour une question qu'il laisse chercher deux minutes quarante secondes et qu'il fait corriger par une élève.

La seconde séance est la suite de la précédente. Elle comprend également vingt minutes de cours. Le cours part donc d'activités dont on peut supposer qu'elles ont été faites par les élèves dans le Devoir Maison.

La troisième séance est une séance d'exercices. Ce qui frappe à la lecture du déroulement de cette séance est le nombre des phases qui le constituent.

Plus précisément, l'exercice traite d'une notion qui vient d'être vue à l'heure précédente (la forme trigonométrique d'un nombre complexe) et la séance dure 47 minutes. En additionnant les différents temps de recherche individuelle du déroulement, on trouve environ 14 minutes soit environ 30 pour cent du temps consacré à cet exercice dans cette séance. Cela étant, la recherche individuelle se déroule en cinq temps et on peut se demander s'il est légitime de les ajouter comme cela³.

³pour les séances de Gilles, il arrivait qu'il y ait plusieurs questions dans un exercice mais cela ne donnait jamais plus de deux phases de recherche individuelles et encore, dans trois exercices (sur 19) seulement.

La correction est soit assurée par l'enseignant en interaction avec les élèves, soit faite par un élève à la demande de l'enseignant. Il n'est pas aisé de distinguer dans ces corrections ce qui fait partie des commentaires (et qui s'apparenterait à un postlogue) de la correction elle-même, chose que nous avons pu faire aisément dans l'enseignement supérieur.

La situation est de toute évidence plus complexe chez cet enseignant du secondaire que chez l'enseignant du supérieur que l'on a observé : tout se passe comme si plusieurs phases du type prologue-recherche-correction-postlogue se succèdent tout en étant quelquefois entremêlées.

Pour ces raisons, il ne paraît pas légitime d'utiliser les indicateurs globaux de gestion pour ces séances :

- l'enseignant aborde ici une notion nouvelle mais il le fait en partant d'un travail préliminaire personnel des élèves et cela sert d'appui au cours (chose qui est impossible dans l'enseignement supérieur puisque le cours précède souvent les travaux dirigés) : on voit donc mal comment la grille d'indicateurs globaux du supérieur renseignerait ici puisque, par exemple, le temps de recherche individuelle (deux minutes quarante) n'est pas significatif en ce sens qu'il a été précédé d'une recherche individuelle à la maison;
- on peut repérer des temps de prologue, de recherche individuelle, de correction, de postlogue (ou de commentaires) mais ceux-ci sont multiples et entremêlés : il n'est donc pas facile de déterminer les temps consacrés à ces diverses activités et même si c'est le cas, on peut se demander si la simple addition de ces temps pour en repérer une proportion globale sera un indicateur sérieux qui pourra se traduire de façon aussi transparente que dans le supérieur.

Tout cela pour dire qu'au regard de ces observations, la gestion de cet enseignant paraît moins transparente que celle de Gilles tout en étant plus complexe et il ne paraît pas pertinent d'appliquer à ces séances la même méthodologie globale que dans l'enseignement supérieur.

6.3 Résultats complémentaires dans l'enseignement secondaire

Terminons ce chapitre en observant dans quelle mesure l'enseignant du secondaire tient compte ou non de l'activité de ses élèves. Nous utilisons la même méthodologie que pour les séances de l'enseignement supérieur.

Les résultats bruts obtenus sont les suivants (nous utilisons les mêmes codages) :

-séance 1 : 24v 15f 2e 7o 0n;

-séance 2 : 1v 2f 0e 1o 0n;

-séance 3 : 6v 7f 0 e 5o 0n;

On constate que cet enseignant ne fait pas référence aux activités des élèves : en cela, il semble similaire à Gilles.

Il y a équilibre des vraies et fausses questions dans les séances 2 et 3 et il y a une majorité de vraies questions dans la séance 1. Le peu de questions dans la séance 2 est sans doute dû au fait que l'enseignant assure un cours pendant plus de la moitié du temps de la séance et il faut sans doute considérer les séances 1 et 2 ensemble de ce point de vue (puisqu'elles se suivent et traitent d'une même activité). Il y a beaucoup plus de questions dans la séance 1, justement

peut-être parce que l'enseignant sait qu'il va partir de cette activité pour faire son cours : c'est une manière pour lui d'associer les élèves à l'activité proposée, activité dont il a sans doute pu constater qu'elle a été faite par eux à la maison. L'enseignant part donc de fait de l'activité des élèves et essaie majoritairement de les associer à la correction par ses questions ce qui est une différence majeure dans la gestion de la nouveauté avec l'enseignant du supérieur.

Lors de la séance 3, les questions se raréfient et il y a équilibre entre vraies et fausses questions. En regardant la teneur des questions, on peut faire à peu près les mêmes constats que dans l'enseignement supérieur pour expliquer cet équilibre : les questions sont plutôt plus directes que dans les deux séances précédentes et ont lieu exclusivement lors des corrections. L'enseignant cherche à s'assurer que les élèves suivent la correction.

Pour finir, même s'il y a des ressemblances dans la gestion locale de ces enseignants (notamment pour la séance 3), nous observons que cet enseignant tient beaucoup plus compte des activités des élèves notamment dans sa gestion de la nouveauté (séances 1 et 2) que ne le faisait Gilles.

Chapitre 7

Conclusion

7.1 Résumé des résultats obtenus

Dans ce travail, nous avons dégagé trois problématiques auxquelles nous avons pu apporter des éléments de réponse. Nous revenons sur chacune d'entre elles en allant de la plus précise à la plus générale : problématique (ter) p. 38, problématique (bis) p. 17 et problématique p.11.

Problématique (ter)

Dans cette problématique, nous nous demandions si la gestion locale de Gilles allait dans le sens de sa gestion globale ou pas et notamment s'il prenait en compte les activités des étudiants. Nos résultats montrent qu'il tient peu compte des activités des étudiants quel que soit le type de l'exercice et que sa gestion locale des déroulements vient conforter sa gestion globale : nous précisons cela ci-dessous en réponse à la problématique (bis).

Problématique (bis)

Dans cette problématique, nous nous posons la question de savoir s'il y avait un lien entre la gestion globale organisée par l'enseignant et les tâches mathématiques, notamment s'il était possible de mettre en valeur des différences de ce point de vue entre enseignement secondaire et enseignement supérieur. Notre travail s'est concentré sur le cas de l'enseignement supérieur et a pu apporter des réponses partielles à cette problématique.

Au moyen de la distribution des indicateurs globaux de gestion, nous avons pu classer les exercices d'un enseignant (Gilles) en cinq types. Les fortes régularités mises en valeur par cette classification montrent que la gestion globale de cet enseignant en classe est transparente vis à vis des tâches mathématiques qu'il sollicite pendant le déroulement c'est à dire qu'il y a un lien fort entre la gestion organisée par cet enseignant et sa perception des tâches mathématiques en jeu (notamment si elles ont trait à des notions nouvelles).

Sa façon de gérer globalement la nouveauté (type 1 et 2) est marquée par la présence d'un prologue pendant lequel il fait des rappels de cours, nouveauté qu'il essaie de tempérer localement en baissant progressivement le niveau des questions qu'il adresse aux étudiants en prologue (ce

qui se traduit par un équilibre entre vraies et fausses questions) et en correction (afin de les associer à l'activité).

Lorsque la nouveauté devient moindre ou lors de réinvestissements (types 3, 4 et 5), il consent à laisser une plus grande autonomie aux étudiants en les laissant chercher dès le début et assure un postlogue destiné à recadrer les connaissances mises en jeu (types 3 et 5) : cela est confirmé localement par le fait qu'il associe réellement les étudiants à la solution en leur posant une majorité de vraies questions.

Par ailleurs, une analyse des institutionnalisations au sein des exercices des différents types a montré une évolution de la fonction (objet ou outil) et de la place de celles-ci. Dans les exercices où l'autonomie est inexistante ou faible (types 1 et 2), une grande part de l'institutionnalisation a lieu avant toute recherche et elle est à fonction objet (pour le type 1) ou outil (pour le type 2). Dans les exercices où l'autonomie est plus importante ou grande (types 3, 4 et 5), soit l'institutionnalisation a lieu après la correction (type 3), soit il n'y en a plus. On peut supposer qu'il y a un lien entre la place, la fonction des institutionnalisations et l'autonomie que l'enseignant consent à laisser aux étudiants.

Un autre résultat de notre travail est le fait qu'il y ait correspondance entre les activités potentielles des étudiants (déterminées dans l'analyse a priori) et leurs activités possibles (déterminées a posteriori de l'analyse) dans chacun des exercices. Cela montre que Gilles a complètement en main l'attribution d'un type à un exercice et qu'il le fait a priori. Autrement dit, Gilles décide de tout à l'avance et en particulier décide ce qui est nouveau et ce qui ne l'est pas : on peut parler chez lui de "gestion a priori" des déroulements.

Par cette gestion a priori, Gilles ne donne pas l'opportunité aux étudiants de questionner cette nouveauté à l'aune de leurs connaissances anciennes et ne leur donne pas une petite part de responsabilité vis à vis de celle-ci. Sa gestion locale ne laissant pas de réelle place aux étudiants, elle vient renforcer sa gestion globale de ce point de vue.

Les exercices pour lesquels Gilles décide a priori d'aménager un prologue sont les exercices pour lesquels il y a une grande nouveauté en terme de mise en fonctionnement. En cela, il ne prend en considération qu'une faible partie des exigences nouvelles relevée par Robert, Praslon, Bloch et Ghedamsi. On pourrait considérer que certaines tâches qui ne sont pas nouvelles du point de vue des mises en fonctionnement puissent également nécessiter des prologues qui seraient d'une autre nature mais qui prendrait un peu plus en compte l'hétérogénéité des étudiants vis à vis de ces exigences.

Si on ne peut tirer aucun résultat de recherche de notre brève incursion dans l'enseignement secondaire, elle nous montre au moins une plus grande complexité potentielle de la gestion des déroulements par l'enseignant et nous incite à étudier ce qu'il en est réellement.

Problématique

Dans notre problématique principale, nous nous posons la question d'une rupture entre enseignement secondaire et enseignement supérieur du point de vue des déroulements en classe et nous demandons si cette rupture pouvait venir amplifier d'autres ruptures déjà constatées entre ces deux institutions. Les résultats ci-dessus sont de nature à renseigner cette problématique.

Notre travail a montré l'existence d'un enseignant dont la gestion globale et locale des

déroulements est en relation étroite avec les tâches mathématiques, à tel point qu'il semble décider lui-même du caractère "nouveau" a priori : nous avons évoqué cela en parlant de gestion a priori. Selon les hypothèses didactiques usuelles, cela signifie qu'il existe une classe d'enseignants dans l'enseignement supérieur gérant leurs séances d'une manière similaire.

Pour ces enseignants, le fait que tout soit décidé a priori peut impliquer qu'ils minorent ou qu'ils ne prennent pas en compte certaines difficultés des étudiants, en particulier celles dues aux ruptures déjà identifiées entre enseignement secondaire et enseignement supérieur. Cela pourrait être d'autant plus le cas si ces enseignants sont insuffisamment renseignés sur l'enseignement secondaire et sur les pratiques des enseignants du secondaire vis à vis de l'introduction de la nouveauté.

En même temps, cette gestion a priori pourrait, on l'a vu, réduire les exigences nouvelles des étudiants aux nouvelles mises en fonctionnement, ce qui minore aussi l'hétérogénéité constatée des étudiants.

Ces deux derniers points montrent que la gestion a priori de ces enseignants offre une possibilité de rupture entre enseignement secondaire et enseignement supérieur qui amplifierait certaines ruptures déjà constatées. La possibilité de cette rupture sera à questionner dans des travaux futurs.

7.2 Limites

Même s'il nous semble qu'il y a relativement peu de variabilités dans l'enseignement supérieur, ces constatations sont à tempérer au regard d'un certain nombre de limites.

Tout d'abord, ce travail exploratoire ne sera pertinent que s'il est complété par un travail similaire sur un certain nombre de domaines de l'enseignement supérieur et répété pour un certain nombre d'enseignants du supérieur.

Ensuite, nous ne pouvons pas omettre de dire qu'une partie des régularités observées (notamment les régularités fines) pourrait tenir aux règles générales du discours, à la pragmatique du discours. Il y a en particulier des régularités que l'on retrouve chez un enseignant quel que soit l'enseignement qu'il a à dispenser. Pour le moment, notre analyse ne nous permet pas de discriminer ce qui tient des règles générales du discours de ce qui tient à telle ou telle séance particulière en lien avec les tâches mathématiques.

Enfin, nous n'avons répondu qu'à une partie de nos problématiques. Pour espérer y répondre moins partiellement et déterminer s'il existe une rupture entre enseignement et enseignement supérieur du point de vue de la gestion des déroulements, notamment a priori, il faut également s'intéresser aux enseignants de terminale scientifique sur un certain nombre de chapitres et sur un nombre raisonnable de séances. Or, on a vu que l'acte 3 de notre méthodologie globale et notre méthodologie locale ne paraissent pas adaptées à l'enseignement secondaire puisqu'elles ne permettent pas, apparemment, de distinguer la richesse des phases des déroulements dans cette institution. L'ouverture que nous avons présentée au chapitre 6 nous incite au moins à poursuivre un travail dans cette direction.

7.3 Perspectives

Le présent travail a permis de mettre en valeur une certaine classe d'enseignants du supérieur dans leur façon de gérer les séances de travaux dirigés. Une perspective naturelle à ce travail est de se demander si on peut déterminer d'autres caractéristiques de cette classe d'enseignants. Il est certain qu'il existe d'autres classes d'enseignants du supérieur qui gèrent leurs séances différemment mais peut-on utiliser la même méthodologie pour montrer leur existence ?

Nous avons déjà signalé qu'une suite naturelle de ce travail serait de s'intéresser à ce qui se passe dans l'enseignement secondaire du point de vue de la gestion des déroulements pour savoir si on peut parler de rupture entre enseignement secondaire et enseignement supérieur de ce point de vue.

La vision des séances de Gilles nous a permis de faire un certain nombre de constats que notre méthodologie ne nous permettait pas d'appréhender ou d'exploiter réellement.

Premièrement, nous avons évoqué un phénomène de double institutionnalisation : une institutionnalisation faite en cours et une institutionnalisation en lien avec les tâches mathématiques faite en travaux dirigés dont la fonction est plus ou moins objet ou outil. Il nous semble intéressant d'étudier ce phénomène. Par exemple, étant donné le peu de lien que les étudiants ont avec le cours, quel est le rôle de l'institutionnalisation faite en cours ? Les étudiants arrivent-ils à créer des liens entre les institutionnalisations faites en cours et celles faites en travaux dirigés ? Est-ce que l'institutionnalisation faite en travaux dirigés participe au transfert éventuel d'autonomie aux étudiants notamment dans sa fonction (objet ou outil) et dans sa place (avant toute recherche, après la correction) ? Surtout, y a-t-il un lien entre la fonction, la place de l'institutionnalisation et les apprentissages des étudiants ?

Deuxièmement, pendant notre analyse complémentaire au chapitre 5, nous avons dit plusieurs fois que l'enseignant montrait aux étudiants sa propre activité mathématique (dans les type 1, 2 et 3) sans que notre méthodologie ne nous permette de l'attester. Comment voir que l'enseignant montre son activité mathématique aux étudiants et à quel moment choisit-il de le faire ? Qu'est-ce que cette pratique induit sur les activités des étudiants ? En lien avec cela, à propos du raisonnement et de la preuve, Durand-Guerrier et Arsac [10] montrent qu'on ne propose pas aux étudiants un enseignement qui leur permettrait un apprentissage des différents types de preuves et de leur contrôle en même temps que *"les enseignants utilisent des règles de raisonnement contextualisées, dont la bonne application repose sur l'expertise mathématique de l'acteur, d'où les difficultés des étudiants."*

Troisièmement et cela n'est pas indépendant du point précédent, nous avons pu repérer chez Gilles une gestion de la conversion entre différents registres sémiotiques médiée à la fois par l'écriture, les gestes et la parole et qui nous semblent être celle d'un mathématicien professionnel. Or, Dorier [8] constate que cette activité de conversion¹ est rarement enseignée et est considérée comme allant de soi dans l'enseignement supérieur. Du point de vue de la conversion, la différence entre un étudiant et un mathématicien expert est que l'expert possède déjà un grand catalogue

¹Duval distingue trois types d'activités cognitives liées à la sémosis, c'est à dire la production de registres sémiotiques : *"la formation d'une représentation identifiable comme appartenant à un registre donné, le traitement et la transformation d'une représentation à l'intérieur du registre où elle a été créée, et enfin la conversion, c'est-à-dire la transformation d'une représentation sémiotique d'un registre dans un autre."*

de savoirs et nombre de registres qu'il a organisés les uns en fonction des autres et qu'il possède justement une expertise dans l'activité de conversion entre registres. Nous pensons que l'activité de conversion de registres pourrait aussi source de difficultés chez certains étudiants et cela nous semble un point qu'il serait intéressant d'appréhender méthodologiquement.

Enfin, nous avons pu repérer chez cet enseignant des régularités discursives tant dans ses interactions avec les étudiants que dans le discours qui accompagne le raisonnement mathématique qu'il présente lors des phases de correction et qui n'apparaissent pas dans nos analyses. Dans [11], Durand-Guerrier rappelle que ses travaux avec Arsac sur l'enseignement de l'Analyse ont montré que *"d'une certaine manière, la logique est le plus souvent absente du discours du professeur, remplacée par un certain nombre de règles de raisonnement relevant d'un savoir-faire qui n'est pas constitué en savoir théorique"* et que *"le caractère très contextualisé de ces règles de raisonnement montrent aussi combien elles sont imbriquées avec le savoir mathématique si bien que d'une manière générale, la bonne application de ces règles repose sur l'expertise mathématique de l'acteur."* En lien avec cela, il nous semble donc intéressant de se demander dans quelle mesure ces règles de raisonnement transparaissent dans l'introduction de nouveaux savoirs mathématiques dans l'enseignement supérieur. Plus particulièrement, dans le cas d'introduction de notions FUG, il faut peut-être plus tenir compte du discours de l'enseignant et de ses règles de raisonnement.

Annexe A

Enoncés des exercices d'Algèbre Linéaire

Dans cette annexe, nous présentons les exercices abordés par Gilles de façon chronologique. Certaines erreurs initialement présentes dans les énoncés ont été corrigées par l'enseignant, nous les avons également modifiées. Ne figurent dans les énoncés que les questions dont on peut voir un traitement par l'enseignant sur une vidéo. Par contre nous n'avons pas fait figurer les questions annexes traitées en postlogue par Gilles.

A.1 Feuille 2 : Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les opérations

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, 0).$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telles que $a + d = 0$ est un espace vectoriel.

Exercice 4

Soient a et b des nombres réels. Montrer que l'ensemble des solutions sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel.

Exercice 5

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dire si les sous-ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- (1) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 5x_2\}$.
- (2) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 7\}$.

- (3) $\{f \in \mathcal{P} \mid f(0) = 1\}$.
 (4) $\{f \in \mathcal{P} \mid f(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.
 (5) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ ou } x_1 = x_3\}$.
 (6) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$.

Nouvel exercice

Soient dans $\mathbb{R}^2$ les droites F de vecteur directeur $(1, 1)$ et F_a de vecteur directeur $(2, a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a , le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par $F \cup F_a$.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F l'ensemble de celles qui sont paires et G l'ensemble de celles qui sont impaires. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G$.

Exercice 7

Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$D_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 0\}; \quad D_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0\}; \quad D_3 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = b\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^2 = D_1 + D_2 + D_3$. La somme est-elle directe ?

Exercice 8

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$ et l'ensemble

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$

Démontrer que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ différent de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$(x, y, z) = (x', y', z') + (x'', y'', z'')$$

où $(x', y', z') \in P$ et $(x'', y'', z'') \in D$.

Exercice 9

Soient les n -uplets $(x_1, \dots, x_n)$, $(x'_1, \dots, x'_n)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Exprimer chacun des n -uplets suivants comme combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$:

- (1) $(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n)$ (2) $(x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n)$ (3) $(0, \dots, 0)$ (4) $(x_1, \dots, x_n)$
 (5) $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Exercice 10

Peut-on déterminer x, y réels tels que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ soit combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $u_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 11

Donner une équation cartésienne des sous-espaces vectoriels suivants :

- (1) $F = \text{Vect}\{(1, 3)\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- (2) $G = \text{Vect}\{(1, 2, 3); (1, 0, 1)\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (3) $H = \text{Vect}\{(1, 0, 1, 0)\}$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12

Soit E l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & b-c & 2c \\ 2a & a+b & -b \\ b & c & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A.2 Feuille 3 : Familles de vecteurs

Exercice 1[pour la question (4), seule la question de savoir si les vecteurs sont liés ou non figure sur la video]

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, les familles suivantes sont-elles liées ? Sont-elles génératrices ?

- (1) $u_1 = (-1, 2, 1)$, $u_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- (2) $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, -2)$, $u_3 = (1, 2, 1)$.
- (3) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 2, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$.
- (4) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (m, 1, m)$, $u_3 = (m, m, m^2)$, où m désigne un paramètre réel.

Exercice 8

Soient $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, -1, 1)$ et $w = (2, -3, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- (1) Montrer que la famille (u, v, w) est liée et déterminer une base de $F = \text{Vect}\{u, v, w\}$.
- (2) Donner une équation cartésienne de F .

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $v_1 = (2, 1, 3, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 1, -3, 0)$. Soit $E = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Déterminer la dimension de E . En donner une base.

Annexe B

Visualisation des différents types

Dans cette annexe, nous présentons graphiquement les résultats concernant les indicateurs globaux de gestion des exercices proposés par Gilles en travaux dirigés. Nous présentons le détail des pourcentages cumulés globalement puis par types vis à vis des différents indicateurs globaux afin que le regroupement opéré dans le chapitre 4 de ce travail apparaisse visuellement raisonnable au lecteur.

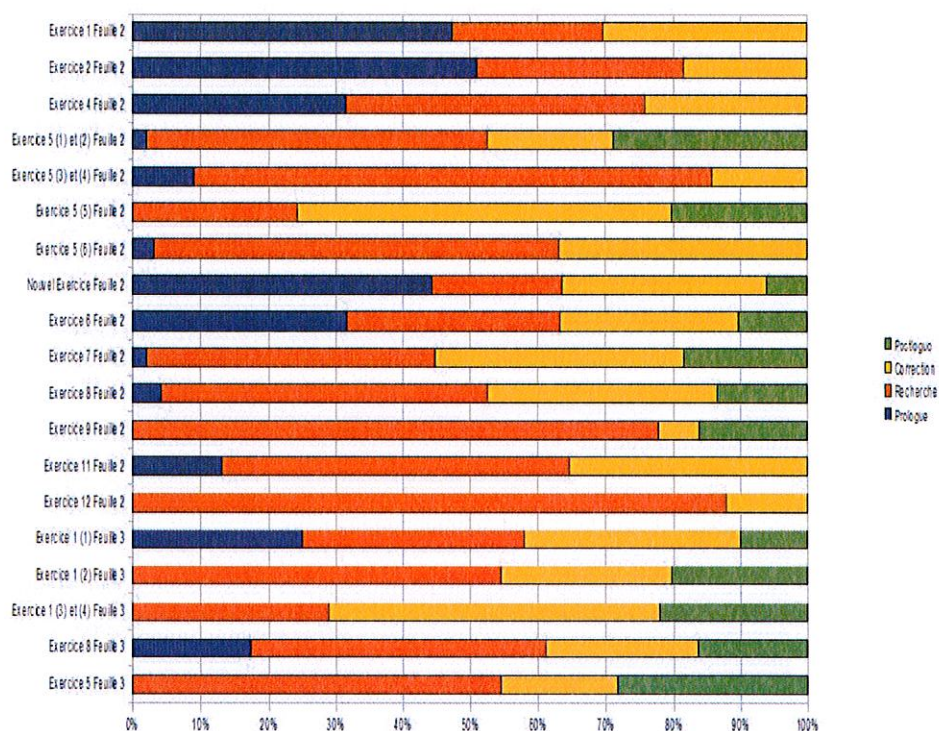


Figure B.1: Le corpus d'Algèbre Linéaire

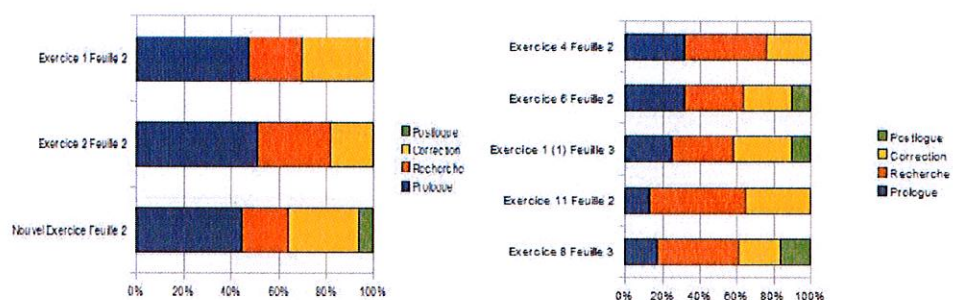


Figure B.2: Types 1 et 2

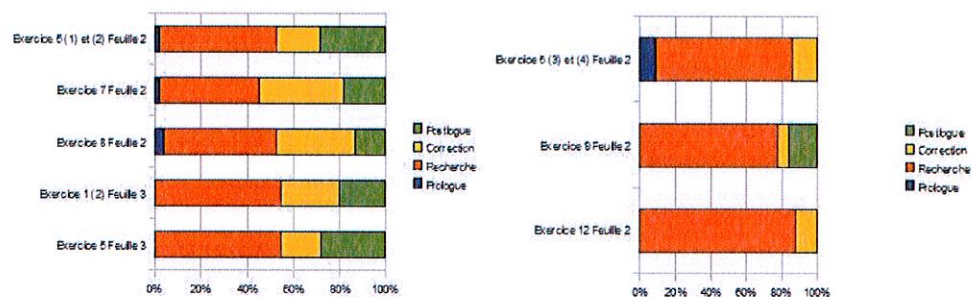


Figure B.3: Types 3 et 4

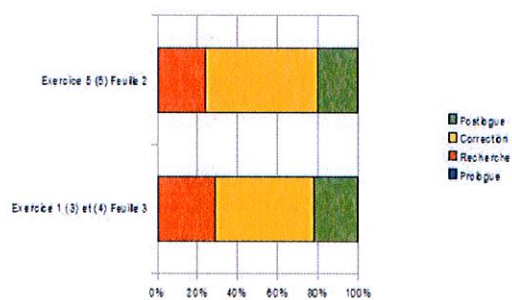


Figure B.4: Type 5

Annexe C

Indicateurs locaux dans l'enseignement supérieur

Rappelons le codage employé dans ce tableau : "v" réfère au nombre de vraies questions, "f" au nombre de fausses questions, "e" au nombre d'exploitation du travail des étudiants par l'enseignant, "o" au nombre de remarques d'étudiants prises en compte par l'enseignant et "n" au nombre de remarques d'étudiants non prises en compte par l'enseignant.

Exercice	Prologue	Correction	Postlogue	Total
Type 1	50	30	0	
Exercice 1 Feuille 2	6v 6f 0e 0o 1n	3v 3f 3e 1o 0n		9v 9f 3e 1o 1n
Exercice 2 Feuille 2	4v 3f 1e 3o 0n	2v 2f 0e 1o 0n		6v 5f 1e 4o 0n
Nouvel Exercice Feuille 2	21v 18f 0e 7o 0n	10v 13f 1e 3o 0n	1v 0f 0e 2o 0n	32v 31f 1e 12o 0n
Type 2	30	20	10	
Exercice 4 Feuille 2	14v 10f 0e 0o 1n	3v 5f 2e 0o 0n		17v 15f 2e 0o 1n
Exercice 6 Feuille 2	6v 5f 0e 2o 0n	5v 3f 0e 2o 0n	0v 0 f 1e 0o 0n	11v 8f 1e 4o 0n
Exercice 11 Feuille 2	10v 6f 0e 0o 0n	2v 5f 0e 1o 0n		12v 11f 0e 1o 0n
Exercice 1 Feuille 3 (1)	7v 2f 1e 1o 0n	8v 5f 2e 6o 0n	1v 0f 1e 1o 0n	16v 7f 4e 8o 0n
Exercice 8 Feuille 3	4v 4f 1e 4o 0n	4v 3f 5e 1o 0n	7v 4f 0e 8o 0n	15v 11f 6e 13o 0n
Type 3	0	30	20	
Exercice 5 Feuille 2 (1) et (2)	0v 0f 1e 0o 0n	1v 2f 1e 4o 0n	7v 4f 1e 2o 1n	8v 6f 2e 6o 1n
Exercice 7 Feuille 2		5v 2f 1e 3o 0n	2v 3f 0e 1o 0n	7v 5f 1e 4o 0n
Exercice 8 Feuille 2		6v 8f 1e 6o 0n	7v 4f 0e 1o 0n	13v 12f 2e 7o 0n
Exercice 1 Feuille 3 (2)		0v 1f 0e 1o 0n	0v 1f 1e 0o 0n	0v 2f 1e 1o 0n
Exercice 5 Feuille 3		1v 1f 0e 4o 0n	0v 0f 0e 11o 0n	1v 1f 0e 15o 0n
Type 4	0	15	0	
Exercice 5 Feuille 2 (3) et (4)	1v 0f 0e 0o 0n	5v 0f 1e 2o 0n		6v 0f 1e 2o 0n
Exercice 9 Feuille 2		0v 0f 1e 0o 0n	7v 0f 3e 0o 0n	7v 0f 4e 0o 0n
Exercice 12 Feuille 2				0v 0f 0e 0o 0n
Type 5	0	50	20	
Exercice 5 Feuille 2 (5)		20v 6f 3e 4o 2n	4v 1f 11e 1o 0n	24v 7f 14e 5o 2n
Exercice 1 Feuille 3 (3) et (4)		11v 1f 3e 6o 1n	11v 1f 0e 2o 0n	22v 2f 3e 8o 1n

Bibliographie

- [1] ARTIGUE M. (1998), L'évolution des problématiques en Didactique de l'Analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 18 (2), 231–262.
- [2] BEHAJ A. (2003), *Eléments de structuration à propos de l'enseignement à long terme de l'Algèbre Linéaire*. Thèse de doctorat Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fès.
- [3] BLOCH I., GHEDAMSI I. (2004), The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and university, *Actes du colloque ICME10*, Copenhague, Danemark.
- [4] BOSCHET F., ROBERT A. (1984), *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur $\mathbb{R}$ dans une section ordinaire de DEUG première année*, Cahier de didactique des mathématiques n°7, IREM Paris VII.
- [5] BRIDOUX S. (2005), *Analyse d'un enseignement de Topologie en première année d'Université*, Cahier gris de DIDIREM, IREM Paris VII.
- [6] CASTELA C. (2004), Institutions influencing mathematics students'private work : a factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics* 57, 33–63, Kluwer.
- [7] DORIER J.-L. (Ed.) (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La pensée sauvage, Grenoble.
- [8] DORIER J.-L. (1998), Etat de l'art de la recherche en Didactique à propos de l'enseignement de l'Algèbre Linéaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 18 (2), 191–230.
- [9] DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 7 (2), 5–32.
- [10] DURAND-GUERRIER V., ARSAC G. (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 23 (3), 295–342.
- [11] DURAND-GUERRIER V. (2005), *Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université Lyon I.
- [12] DUVAL R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 16 (3), 349–382.

- [13] GUEUDET G. (2004), Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'Algèbre Linéaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 24 (1), 81–114.
- [14] GUEUDET G. (2006), La transition secondaire-supérieur : résultats de recherches didactiques et perspectives dans ROUCHIER R. ET AL. (ed.), *Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, 1–18.
- [15] GUEUDET G. (2008), Investigating the secondary-tertiary transition, *Educational Studies in Mathematics* 67, 237–254.
- [16] PARIÈS M., ROBERT A., ROGALSKI J. (2009), Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques, *Travail et apprentissages* 3, 95–123.
- [17] PRASLON F. (2000), *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/ DEUG Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII.
- [18] RAVEL L. (2003), *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*. Thèse de doctorat de l'Université Grenoble I Joseph Fourier.
- [19] ROBERT A. (1993), Analyse du discours non strictement mathématiques accompagnant les cours de mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, *Educational Studies in Mathematics* 28(1), 73–86.
- [20] ROBERT A., ROBINET J. (1996), Prise en compte du méta en Didactique des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 16 (2), 145–176.
- [21] ROBERT A. (1998), Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 18 (2), 139–190.
- [22] ROBERT A., ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies* 2 n° 4, 505–528.
- [23] ROGALSKI M. (1991), *Un enseignement de l'Algèbre Linéaire en DEUG A première année*, Cahier de Didactique des Mathématiques n°53, IREM de Paris VII.
- [24] ROGALSKI M. (1994), L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en première année de DEUG A, *La Gazette des Mathématiciens* 60, 39–62.
- [25] ROGALSKI M. (1996), Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel, que la dialectique outil/objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait pas apparemment de situation fondamentale ? L'exemple de l'Algèbre Linéaire, *Séminaires DidaTech* 1994-1995, n°169, 127–162.
- [26] VANDEBROUCK F. (Ed.) (2008), *La classe de Mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants*, Octarès, Toulouse.

TITRE :

Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université

AUTEUR/S :

Grenier-Boley Nicolas

RESUME :

Dans ce travail, nous questionnons l'existence d'une éventuelle rupture entre enseignement secondaire et enseignement supérieur du point de vue de la gestion des déroulements par les enseignants. Nous nous demandons également si la façon dont l'enseignant du supérieur gère les déroulements en travaux dirigés serait susceptible de renforcer les ruptures déjà constatées entre ces deux institutions.

Pour contribuer à répondre à ces questions, nous avons étudié les cours et travaux dirigés d'un groupe d'étudiants au début de l'Algèbre Linéaire en Licence 1 en nous plaçant au sein de la Théorie de l'Activité et en suivant une méthodologie générale de Pariès, Robert et Rogalski.

Nous avons montré un lien fort entre la gestion globale des déroulements organisés en travaux dirigés par cet enseignant et sa perception des tâches mathématiques en jeu dans les exercices. Ce lien fort est notamment mis en valeur par le classement des exercices en cinq types qui dépendent à la fois de l'organisation de l'exercice (prologue, recherche, correction, postlogue) et des tâches mathématiques sollicitées. Des analyses plus fines viennent renforcer ces constats globaux.

Cette gestion globale est de plus entièrement décidée par l'enseignant a priori ce qui pourrait avoir pour conséquence une minoration voire une non prise en compte d'autres difficultés des étudiants.

Ce travail montre que la façon dont l'enseignant du supérieur gère les déroulements en travaux dirigés peut potentiellement renforcer certaines difficultés des étudiants et contribuer à rompre avec l'enseignement secondaire. Cette inférence devra être interrogée dans des travaux ultérieurs.

MOTS CLES :

Algèbre Linéaire, espace vectoriel, tâche, activité, notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice, rupture secondaire/supérieur, déroulement, gestion des déroulements.