

Le calcul numérique dans l'enseignement mathématique secondaire : reprise des travaux de notre thèse

Alain Birebent

Equipe Didactique et Informatique pour l'Apprentissage des Mathématiques

Laboratoire LIG

A la question « sur quoi travailles-tu en ce moment ? » il m'arrive le plus souvent de répondre « je travaille sur ma thèse ». Evidemment je suis obligé de m'expliquer puisque j'ai soutenu la dite thèse en mai 2001 (Birebent 2001). En fait dès l'année universitaire suivante, nous avons décidé avec Annie Bessot, qui fut directrice de la thèse, d'utiliser les matériaux théoriques et expérimentaux de la thèse dans des séances de travaux dirigés en didactique des mathématiques dispensées dans deux masters, l'un à Grenoble¹⁰¹ (France) et l'autre à Hô Chi Minh Ville¹⁰² (Viêt Nam).

Tout à la fois porté par des objectifs d'enseignement de la didactique et orienté par notre activité de chercheurs, ce travail avec la thèse nous a obligés à travailler sur la thèse. Il s'agissait de rendre enseignables au niveau master des matériaux produits dans le contexte d'une recherche et d'intégrer certaines évolutions de la théorie anthropologique du didactique.

Pour rendre compte ici de l'évolution du travail sur la thèse, nous commençons par présenter la thèse, sa méthodologie et ses principaux résultats. Nous expliquons ensuite comment nous importons dans la thèse deux concepts qui en étaient absents : celui de praxéologie de référence et celui d'incomplétude et de rigidité des praxéologies mathématiques. Nous concluons en revisitant l'ingénierie didactique qui est un élément clef de la thèse.

I. Le travail de thèse

1. La question naïve de départ

Pourquoi faut-il qu'un sujet d'examen de mathématiques comporte la mention « calculatrice autorisée » ou la mention « calculatrice interdite » ?

¹⁰¹ Master EIAHD de l'Université Joseph Fourier

¹⁰² Thac Sy spécialité didactique des mathématiques de l'Université Pédagogique

Une première étude sur le(s) contrat(s) didactique(s) en collège et lycée nous avait permis de produire une première réponse : dans l'enseignement mathématique secondaire, le couple calcul exact/approché est associé au couple sans/avec calculatrice. Pour dépasser ce constat de territorialisation de la calculatrice dans le calcul numérique enseigné, nous avons engagé une problématisation de la question en termes de vie institutionnelle du calcul numérique et de la calculatrice.

2. L'hypothèse de travail sur la vie institutionnelle du calcul numérique

Le calcul numérique tel qu'il est institutionnalisé dans l'enseignement mathématique secondaire (EMS) réduit le calcul approché à un sous-produit du calcul exact piloté par la calculatrice et conséquemment assujettit l'effectivité décimale au résultat de la calculatrice :

- au collège, le calcul sur les nombres sacralise le calcul exact en délaissant de nombreux savoirs mathématiques utiles à la conduite d'un calcul approché ;
- au lycée, la venue de savoirs mathématiques nouveaux attachés à l'Analyse ne semble pas déstabiliser cette vie institutionnelle.

3. Les questions de recherche

Question 1 : dans quelle mesure cette hypothèse doit-elle être corrélée à l'arrivée de la calculatrice dans EMS et à l'éviction des tables numériques ?

Nous nous interrogeons sur la signification et la portée des modifications de l'écologie du calcul numérique enseigné dès que l'on change d'instrument de calcul. Nous décidons un détour épistémologico-historique par les calculs trigonométriques qui constituent un lieu sensible aux problèmes mathématiques de l'approximation décimale et au basculement instrumental table/calculatrice.

Question 2 : de quelle façon l'institution didactique EMS, depuis que s'est imposée la présence de la calculatrice, parvient-elle à organiser, en son sein, la vie d'objets et de problèmes mathématiques attachés à l'approximation numérique décimale ?

Nous voulons analyser les aspects écologiques et économiques de la vie mathématique actuelle des calculs sur nombres et de leur instrumentation dans EMS pour dégager une image praxéologique du calcul numérique dans EMS actuel.

Question 3 : peut-on construire dans l'EMS un processus d'enseignement dont l'enjeu serait une modification du contrat institutionnel relatif au Calcul numérique ?

L'existence et la viabilité d'un tel processus dans l'EMS actuel ne sont pas transparentes. Il s'agit de trouver, dans le champ des contraintes institutionnelles, un ensemble de conditions capables d'opérer des modifications institutionnelles, ensemble à la fois idoine et robuste.

4. D'emblée le travail s'installe dans la TAD

Nous postulons que tout savoir mathématique, pratique ou théorique présent dans l'institution EMS peut être regardé comme la construction organisée d'un rapport institutionnel à un objet permettant une activité des sujets de l'institution sur cet objet.

L'objet visé par notre étude étant un « gros » objet (le Calcul Numérique¹⁰³), nous décidons d'utiliser le concept de contrat institutionnel¹⁰⁴ relatif à un objet O en l'articulant à celui de contrat didactique.

Le contrat institutionnel relatif à O peut être défini comme le système des rapports institutionnels à O et à o_i , o_i institutionnellement pertinents pour O. Un tel système que nous appelons ici contrat institutionnel relatif au calcul numérique s'entend comme la mise en jeu didactique, de façon stable et prégnante dans l'institution, d'objets mathématiques qui appartiennent au calcul numérique, ou qui entretiennent des liens étroits avec lui. Il énonce la manière dont élèves et enseignants doivent se comporter avec ces objets pour être de bons sujets-acteurs de l'institution.

Dans cette modélisation de l'activité mathématique et didactique de EMS, le contrat didactique est l'instanciation spatiale et temporelle du contrat institutionnel ; c'est la forme que prend le contrat institutionnel dans la classe. Cette vision fait écho à la présentation formulée par Chevallard (1989) : « le contrat didactique est l'état de la chronogenèse et de la topogenèse à un instant donné ».

5. Mais la méthodologie ne s'enferme pas dans la TAD

Elle articule la TAD :

- à l'ergonomie cognitive, autour de la notion de genèse instrumentale

Pour analyser la vie institutionnelle d'un instrument de calcul [ici la calculatrice] il nous paraît opportun de projeter sur l'institution d'enseignement elle-même les concepts

¹⁰³ Nous mettons les majuscules à « calcul numérique » quand nous faisons référence à un certain domaine des mathématiques. Nous les retirons quand nous parlons du calcul sur les nombres dans l'enseignement.

¹⁰⁴ Chevallard (1989)

d'instrumentation et d'instrumentalisation issus des travaux d'ergonomie cognitive en plaçant les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation dans les organisations mathématiques et didactiques actuelles ou passées.

Nous désignons par genèse instrumentale institutionnelle la conjugaison dans l'institution des deux processus d'instrumentation et d'instrumentalisation.

- à la TSD, pour la conception, l'expérimentation et l'exploitation d'une ingénierie didactique.

Pour avancer dans la question 3, nous fabriquons une ingénierie didactique en la concevant comme l'expérimentation d'une première rencontre avec une praxéologie à construire dans l'enseignement (ici une praxéologie de décimalisation).

Si, à l'évidence, la première rencontre ne détermine pas entièrement le rapport à l'objet – lequel se construit et se remanie tout au long du processus d'étude –, elle joue un rôle important dans l'économie de l'apprentissage, parce que, étant donné l'investissement institutionnel et personnel qu'elle impose (au double plan cognitif et libidinal), elle oriente en général fortement le développement ultérieur des rapports institutionnel et personnel à l'objet rencontré (Chevallard, 1999).

6. Le corps de la thèse

A propos de la question 1 : les choix épistémologiques noosphériens relatifs à la construction des systèmes numériques et à la numérisation décimale (ou sexagésimale) des grandeurs géométriques ou physiques déterminent l'EMS qui répond :

- en produisant et faisant produire des résultats numériques effectifs sous forme décimale (ou sexagésimale) ce qui place l'approximation décimale (ou sexagésimale) au cœur du contrat institutionnel ;
- en choisissant des instruments de calcul et en organisant une genèse instrumentale de ces instruments.

La prise en charge de l'approximation décimale dans le contrat oscille entre deux niveaux :

- Un niveau faible : se protéger empiriquement de la propagation des erreurs dues aux arrondis décimaux

Une protection complète est illusoire et elle s'affaiblit au fur et à mesure que les calculs se complexifient. L'enfermement algébrique (mener les calculs exacts le plus loin possible) ou le recours à des tables comme à des calculatrices de grande précision décimale peuvent devenir très coûteux.

- Un niveau fort : construire une problématique de l'approximation décimale.

Une telle construction a existé dans EMS, d'abord attachée à l'Arithmétique décimale (et sexagésimale) « supérieure » (avec les logarithmes décimaux par exemple) puis attachée à la construction de $\mathbb{I}, \mathbb{R}$. La première a quasiment disparu des savoirs « savants » de référence et la seconde a été repoussée au-delà de EMS. L'entrée dans l'ère des calculatrices s'est faite sur l'espoir d'un abaissement du coût des techniques de calcul et de l'évitement de leurs justifications théoriques en ignorant les effets inéluctables de la complexification instrumentale et les répercussions sur les organisations mathématiques et didactiques.

A propos de la question 2 : l'étude menée dans la thèse (120 pages que nous ne cherchons pas à présenter ici) examine à partir des programmes, des manuels, des sujets d'examen et des devoirs de classe sur la période 1980-2000 et pour les niveaux 3^e à Terminale S de l'enseignement français :

- l'évolution (dans le temps et par niveau) des problèmes liés à l'approximation numérique décimale ;
- la présence ou l'absence d'objets mathématiques pertinents pour l'approximation décimale, leur statut topogénétique ;
- les types de tâche de décimalisation.

Elle débouche sur une description, au collège et au lycée, des praxéologies de décimalisation et une caractérisation des contrats institutionnels. En voici un résumé qui met en évidence l'écart entre les ambitions des réformateurs de 1981 et l'état actuel de la transposition didactique :

Au collège : une opposition entre calcul exact et calcul approché,

- fortement hiérarchisée de l'exact sans la calculatrice vers l'approché avec la calculatrice
- très marquée dans les contextes de modélisation où elle s'appuie sur une séparation théorie-pratique : les théorèmes se recommandent de valeurs exactes tandis que les applications dites pratiques utilisent des valeurs approchées décimales (cas de la Géométrie métrique où la mesure effective crée de l'approché)
- les degrés de précision dans l'approximation décimale sont imposés par l'enseignant sans négociation mathématique

Au collège et au début du lycée : un évitement des problèmes de l'approximation numérique

- où l'exact reste la seule source fiable de connaissance de l'approché et le passage de l'approché à l'approché n'est pas problématisé,

- où l'évaluation de la dépendance de la précision décimale à l'égard de facteurs comme la propagation des erreurs, l'organisation des calculs ou les performances intrinsèques des instruments de calcul n'a pas de visibilité institutionnelle (partage privé/public) ;

Au Lycée : une approximation numérique très présente mais toujours pas problématisée,

- avec un énorme potentiel d'objets et de techniques apportés par l'Analyse ;
- sans lisibilité des problèmes fondamentaux de l'approximation numérique ; leur insertion dans les champs de l'Analyse et de l'Algorithmique n'est pas transparente, ce qui retarde et même compromet la mise en place de techniques instrumentées nouvelles dans les calculs approchés ;
- où l'arrêt de la transposition didactique de la notion de fonction¹⁰⁵ obère la négociation du passage de l'encadrement à l'intervalle ;
- l'absence de construction des nombres réels¹⁰⁶ ; les praxéologies de décimalisation enseignées sont privées d'appuis technologico-théoriques (notamment topologiques).

Question 3 : pour permettre la mise en place d'un autre contrat lycée il y a nécessité d'organiser une rupture avec le contrat collège ; cette rupture doit s'opérer contre l'enfermement algébrique de l'approximation décimale qu'institutionnalise le collège à travers le couple « formule-calculatrice »

Nous concevons donc une première rencontre avec une praxéologie de décimalisation « potentielle » dans l'institution lycée sous la forme d'une ingénierie didactique découpée en trois situations didactiques. La troisième partie de cet article présente et (re)analyse cette ingénierie.

II. Le travail sur la thèse

1. Le concept de praxéologie de référence

Etant donné un processus didactique sur un thème mathématique déterminé, la première étape de notre technique d'analyse suppose l'adoption de ce que nous appelons un modèle épistémologique de référence sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'organisations ou praxéologies mathématiques (Bolea et al. 2000).

¹⁰⁵ C'est à Assude (1992) que nous empruntons cette caractérisation de la transposition didactique de la notion de fonction dans EMS.

¹⁰⁶ Bronner (1997), qui parle de vide didactique institutionnel relativement à l'objet nombre réel.

Vers un modèle épistémologique de référence du calcul numérique

La méthodologie décrite suggère donc de construire un ensemble, épistémologiquement structuré et pérenne dans l'institution I étudiée, de praxéologies mathématiques de calcul numérique. Cet ensemble de praxéologies, ou plutôt ce système – le caractère systémique d'un tel ensemble surgit de l'enchevêtrement des différentes praxéologies et de leur évolution temporelle pour répondre aux contraintes internes et externes de l'institution – doit permettre de rendre idéalement compte de tous les types de tâches de calcul numérique qui sont présents dans I. Pour confectionner ce modèle de praxéologies de référence le niveau le plus approprié pourrait être le niveau régional où chacune des praxéologies s'appuie sur une théorie mathématique consistante avec des énoncés théoriques (des théorèmes, par exemple) explicitables – à défaut d'être explicités dans I – et en mesure de produire les éléments technologiques (des règles de calcul par exemple) nécessaires à l'accomplissement des tâches via les techniques institutionnalisées dans I.

Fabriquée empiriquement à partir des praxéologies à enseigner, celles qu'affichent programmes et instructions et que reconstituent d'une certaine manière manuels et sujets d'examen, ce modèle devrait rendre compte des rapports institutionnels aux objets de savoir impliqués dans les praxéologies et de leur contractualisation dans l'institution. Nous reprenons l'étude de la question 2 de la thèse avec la nouvelle méthodologie :

Six praxéologies régionales de référence pour EMS

- celle de simplification
- celle de décimalisation
- celle de comparaison
- celle de résolution d'une équation ou d'une inéquation numérique
- celle de calcul de la mesure d'une grandeur géométrique
- celle d'optimisation

Le modèle Collège :

Soit E le sous-ensemble des nombres réels de ce modèle,

- la simplification agrège tous les types de tâche relatifs aux écritures canoniques dans des sous-ensembles "remarquables" de E tels que I, N, D, I, Q et A (nombres algébriques de degré 2). Le postulat théorique est que l'appartenance d'un nombre de E à l'un de ces

sous-ensembles se reconnaît à une écriture canonique (unique) effectivement atteignable par des transformations sur l'écriture proposée de ce nombre.

- la décimalisation déploie les types de tâche « calculer une valeur approchée décimale du nombre ». Elle s'appuie sur la densité de D dans E qui autorise toute approximation à une précision décimale arbitraire.
- la comparaison entre deux ou plusieurs nombres se développe sur le postulat que la relation d'ordre "naturel" entre deux nombres produit un ordre total dans E.
- la résolution d'une (in)équation numérique s'appuie sur la stabilité de E pour les opérations arithmétiques (+, -, x, /) et postule que E contient ses propres intervalles.
- le calcul de la mesure d'une grandeur géométrique (longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, écart d'un angle, aire d'une surface plane, volume d'un solide) rassemble tous les types de tâche dont les techniques ont recours aux théorèmes de géométrie métrique (dont ceux de Thalès, Pythagore et ceux de la Trigonométrie) et suppose l'appartenance à E de tous les nombres constructibles à la règle, au compas et au rapporteur.

Le modèle Lycée se différencie du modèle Collège :

- par l'apparition de nouveaux objets : fonctions et suites numériques, algorithmes numériques, limites, distances, voisinages, erreur, négligeabilité, etc. ;
- par la reprise d'anciens objets : intervalles, équations et inéquations, précision décimale, ordres de grandeur ;
- par la construction de nouveaux types de tâche : calculer une limite, tabuler une fonction sur un intervalle, minorer, majorer une fonction sur un intervalle, calculer l'extremum d'une fonction sur un intervalle.

Ainsi les cinq praxéologies « collège » sont remodelées et une nouvelle praxéologie (l'optimisation) se développe. Prenons l'exemple de la décimalisation :

La praxéologie de décimalisation de référence

- initiée au Collège : ensemble numérique E $\rightarrow$ valeur exacte $\rightarrow$ algorithmes numériques décimaux $\rightarrow$ densité de D dans E $\rightarrow$ encadrements décimaux $\rightarrow$ valeur approchée décimale ;

- poursuivie au lycée : $E = I, R \rightarrow$ propriété de complétude de $I, R \rightarrow$ variations de fonctions continues sur des intervalles fermés bornés de I, R + algorithmes numériques convergents dans $I, R \rightarrow$ valeur approchée décimale.

Que permet ce modèle ?

Il structure l'analyse écologique institutionnelle et lui permet de :

- décrire le contrat institutionnel (comment se forme-t-il, quels sont ses états successifs ?)
- guider l'étude des règles implicites du contrat didactique (quelles sont les limitations du savoir ? quelles en sont les manifestations dans la relation didactique ?)
- analyser des productions d'enseignants et d'élèves (quelles sont les praxéologies apprêtées et celles qui sont effectivement enseignées ?)
- soutenir la conception d'une ingénierie didactique (en quoi élargit-elle et approfondit-elle la problématique didactique de notre étude ?)

Le concept de contrat institutionnel est enrichi : le contrat institutionnel émerge de la distance entre ce système des praxéologies de référence et celui des praxéologies à enseigner qu'affichent programmes et instructions et que reconstituent d'une certaine manière manuels et sujets d'examen ; il pilote dans l'institution le processus didactique de reconstitution des praxéologies de référence dans les praxéologies à enseigner et conditionne les praxéologies effectivement enseignées. A la fois processus et état, le contrat institutionnel :

- énonce la manière de se comporter par rapport à O , dans I , pour les élèves et pour l'enseignant (les attentes de I relativement à O) ;
- fabrique un clivage topogénétique entre l'élève et l'enseignant relativement à O dans I ;
- assure, au moyen de ruptures / transitions ou de reprises / oublis, l'avancée du temps didactique pour O (chronogenèse) $\rightarrow$ changements d'états du contrat ;
- détermine un champ de contraintes et de conditions pour les praxéologies enseignées ;
- constitue une matrice des contrats didactiques pour les objets o_i institutionnellement associés au calcul numérique.

Pour soutenir l'idée de « continuités et ruptures dans le contrat institutionnel » qui est à l'origine de la question 3 de la thèse, nous cherchons à compléter le modèle du contrat institutionnel en dégagant des états et des changements d'état.

Trois des différents états du contrat institutionnel « calcul numérique »

- une configuration arithmétique : l'approximation décimale n'est présente qu'à travers quelques troncatures "limitées", pour des calculs ne comportant que l'une des quatre opérations arithmétiques (l'addition, la soustraction, la multiplication et la division) sur des entiers ou des décimaux de peu de décimales ; le contrôle se fait isolément sur chaque opération ;
- une configuration algébrique : l'approximation décimale vit dans des calculs approchés qui sont tous précédés par des calculs dans un mode exact bâti sur des structures algébriques pré-construites¹⁰⁷. Dans cette configuration, seule la valeur exacte explicite d'un nombre fonde l'existence du nombre visé et rend possible sa décimalisation finie via sa reproduction dans l'éditeur de la calculatrice. Approcher un nombre et donc contrôler la production des chiffres de son écriture décimale n'a d'autre sens que de le décimaliser à partir de sa valeur exacte. Le contrôle porte sur la formule, sa fabrication et son écriture sur papier puis dans l'éditeur de la machine.
- une configuration analytique¹⁰⁸ du contrat institutionnel : l'approximation décimale vit consubstantiellement avec la définition du nombre comme élément de l'ensemble I, R , structure topologique tout autant qu'algébrique. Dans cette configuration, ce sont des propriétés topologiques, celle de complétude en plus de celle de la densité de D dans I, R , qui permettent la décimalisation du nombre visé par le calcul numérique. Même si la décimalisation passe par la fabrication et l'usage d'un ensemble (par exemple une table) de valeurs décimales d'une fonction ou d'une suite numérique, généralement obtenues avec l'aide de la calculatrice (commandes table ou trace, par exemple) [filiation Collège] ... le contrôle porte sur la fonction (ou la suite) numérique, les intervalles de valeurs de la variable et de leurs images par la fonction grâce aux théorèmes de l'Analyse [rupture Collège].

¹⁰⁷ Ces structures ne sont pas des objets d'enseignement en tant que structures. Seuls apparaissent les ensembles numériques dans lesquels elles opèrent, tels que D (anneau des décimaux) , Q (corps des rationnels) et C (le corps des nombres constructibles à la règle et au compas), R (corps des réels) et les quatre opérations arithmétiques sur ces nombres. Par l'intermédiaire d'une écriture plus ou moins canonique, c'est la structure qui parle de la valeur exacte du nombre mais ce sont les opérations arithmétiques qui parlent de la décimalité de ce nombre.

¹⁰⁸ Ce qualificatif est préférable à celui de topologique ou de fonctionnel car il fait référence aux éléments théoriques qui permettent les contrôles des calculs dans l'institution

L'exemple de la notion d'intervalle

- d'abord ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré et segment de la droite "réelle" ← pratiques de résolution d'inéquation (algébriques ou graphiques) essentiellement au collège
- également lieu borné des valeurs approchées d'un nombre ← pratiques d'encadrements au collège et au début du lycée (approximation = processus fini déterminé par la valeur exacte, valeur approchée = milieu ou l'une des bornes de l'intervalle)
- ensuite voisinage (au sens topologique) d'un nombre ← pratiques des intervalles emboîtés en lycée (approximation = processus infini, valeur approchée = arrêt dans le processus)

Les changements d'état du contrat expliquent les transformations institutionnelles (caractérisables en termes de filiations ou en termes de ruptures) des praxéologies par apparition de nouvelles tâches ponctuelles ou locales et l'enrichissement subséquent de leur typologie. Par exemple, la simplification s'enrichit des expressions trigonométriques, logarithmiques ou exponentielles, la comparaison intègre les majorations, minoration de fonctions sur des intervalles (l'égalité analytique prend place à côté de l'égalité algébrique). Et dans l'exemple de la notion d'intervalle, on peut repérer une double rupture :

- un encadrement réduit à ses deux bornes devient un intervalle continu des valeurs d'une fonction ;
- le calcul d'une valeur approchée abandonne la décimalisation d'une valeur exacte connue pour se constituer en tant que processus d'encadrement d'une valeur exacte inconnue.

2. Incomplétude et rigidité des praxéologies enseignées

Nous nous appuyons sur la conjecture générale formulée par Bosch et al. (2004) : incomplétude des praxéologies locales ou régionales enseignées dans EMS et rigidité des praxéologies ponctuelles enseignées.

Las OML que aparecem explicitamente en las instituciones escolares se han constituido a partir de una integracion incompleta et una coordinaacion demasiado debil de ciertas OMP, y, como consecuencia, las OML que viven en las instituciones escolares presentan multiples incompletitudes (p. 215).

En resumen, la actividad matemática que se lleva a cabo en [EM]S es esencialmente práctico-técnica y raramente alcanza el nivel tecnológico. Como consecuencia, las OM que se estudian en [EM]S son generalmente OM puntuales, muy rígidas y aisladas (o poco coordinadas entre sí), lo que dificulta, e

incluso impide, que en dicha institución se reconstruyan efectivamente OML relativamente completas (p. 221).

La conjecture générale est déclinée en sous-conjectures qui décrivent différents aspects de l'incomplétude et de la rigidité des organisations mathématiques dans EMS :

- dépendance de la technique à l'égard des ostensifs qui en constituent le support matériel
- l'application de la technique n'inclut pas l'interprétation du résultat
- unicité de la technique pour un type de tâches
- le travail de la technique (modification de la technique pour réussir une tâche légèrement différente) n'est pas de la responsabilité de l'élève (ni du professeur)
- absence de situations ouvertes de modélisation (où il faut choisir les données pour formuler le problème mathématique) et donc de techniques de modélisation (les relations entre la réalité et le modèle ne sont pas problématisées).

Ces caractéristiques d'incomplétude et de rigidité peuvent être mises en évidence dans une analyse conjointe du processus de construction (dans l'institution) de la praxéologie et de sa structure (types de tâches, techniques, technologies, théories)

Hay que subrayar que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todos los casos, de una cuestión de grado : existen OML más o menos "completas" que otras en función de grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores [del grado de completitud]. Dualmente, si nos fijamos en el proceso de construcción y no solo en el producto, entonces el grado de completitud de una OML dependerá también de la manera como se cumplan las condiciones didácticas (Bosch et al. 2004).

La méthodologie décrite suggère donc, entre autre, d'examiner aux différentes étapes de la construction des praxéologies dans l'institution, le degré de complétude de chacune d'elles et la qualité des liens entre elles. Avec les matériaux rassemblés dans les études menées sur la question 2, nous réexaminons les six praxéologies du modèle en portant particulièrement notre attention sur trois d'entre elles, celles de comparaison, de décimalisation et de simplification.

Il apparaît que la construction au collège de la praxéologie de comparaison se fait par juxtaposition de praxéologies ponctuelles au fur et à mesure que s'enrichit l'ensemble des nombres E et systématiquement en aval des praxéologies de décimalisation et de simplification. En effet toute tâche de comparaison de type nouveau et sa technique sont déduites de la nouvelle structure algébrique, comme application de l'écriture canonique dans cette structure. A la comparaison des entiers, on accole celle des décimaux puis celle

des fractions puis celle des nombres algébriques de degré 2. Lors du passage collège-lycée, au moment de l'intronisation de $\mathbb{I}, \mathbb{R}$ comme le nouvel ensemble numérique E , cette soumission de l'ordre et du topologique à l'algébrique conditionne les rapports institutionnels à la comparaison entre nombres alors même que la seule écriture canonique disponible pour tous les nombres réels est celle¹⁰⁹ du développement décimal illimité.

Pour reprendre les termes mêmes de Bosch, Fonseca et Gascon, la praxéologie de comparaison est, au début du lycée, une praxéologie à fort degré d'incomplétude et dont les rigidités sont imputables à sa subordination aux praxéologies de simplification et de décimalisation. Cette nouvelle description du contrat institutionnel « Calcul numérique » – nouvelle au sens qu'elle était absente de notre thèse – nous offre un nouveau regard sur l'expérimentation de l'ingénierie didactique.

III. Regards différents sur l'ingénierie didactique

En effet l'ingénierie conçue dans la thèse faisait appel à des tâches de comparaison de nombres et associait de fait la praxéologie de décimalisation aux deux autres praxéologies : la comparaison et la simplification.

Le problème mathématique de l'ingénierie

Un fabricant de tables numériques reçoit commande d'une table décimale donnant $\cos(x^\circ)$ pour x entier dans l'intervalle $[0 ; 90]$ avec indication de la précision. Pour aider le fabricant, en plus des instruments « anciens » tels que règle, compas, rapporteur, papier quadrillé on dispose de calculatrices électroniques scientifiques « modernes » dépourvues des touches trigonométriques. On dispose également des trois formules suivantes :

complémentaire : $\cos x \rightarrow \cos(90 - x)^\circ$; $\cos(90 - x)^\circ = \sqrt{1 - (\cos x^\circ)^2}$

double : $\cos x^\circ \rightarrow \cos(2x)^\circ$; $\cos(2x)^\circ = 2 \cdot (\cos x^\circ)^2 - 1$

moitié : $\cos x^\circ \rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$; $\cos\left(\frac{x}{2}\right)^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos x^\circ}{2}}$

sans aucune autre formule.

¹⁰⁹ Unicité seulement si on écarte le double développement décimal illimité des nombres décimaux.

Les trois situations didactiques :

- S1 : *comparer $\cos 75^\circ$ et 0,25* ; cette situation se caractérise par un jeu algébrique, au sens où ce sont les règles opératoires attachées à la structure algébrique de $\mathbb{R}$ qui devraient conduire la comparaison entre les deux nombres ;
- S2 : *le fabricant possède déjà trois valeurs approchées de $\cos 18^\circ$: 29/30, 8/9 et 27/29. Il veut retenir la plus proche de $\cos 18^\circ$. Que lui conseiller ?* ; cette situation se caractérise par un jeu topologique, au sens où la décision de retenir la meilleure valeur approchée devrait passer par des évaluations de distances entre nombres et des opérations sur ces distances ;
- S3 : *est-il possible d'obtenir l'arrondi à 4 décimales de $\cos 72^\circ$, ou celui de $\cos 9^\circ$, lorsque l'on ne dispose que d'un arrondi décimal d'ordre 4 de $\cos 18^\circ$?* ; cette situation se caractérise par un jeu fonctionnel, au sens où ce sont les propriétés fonctionnelles des formules de base qui permettront de produire et de contrôler les valeurs approchées souhaitées.

La conception de l'ingénierie répondait à la nécessité, selon nous, d'organiser la rupture Algébrique / Analytique dans le numérique à travers une première rencontre avec une praxéologie de décimalisation potentielle au lycée. C'est ainsi que nous l'avons présentée lors d'un atelier de la treizième école d'été¹¹⁰ en explicitant l'hypothèse de recherche fondatrice de l'ingénierie : dans une tâche de comparaison, l'inaccessibilité d'une expression algébrique de la valeur exacte du nombre favorise des stratégies qui, en s'appuyant sur les notions d'encadrement et de distance, sont susceptibles de faire évoluer le statut institutionnel de l'intervalle. L'intervalle, comme nous l'avons dit plus haut, est un objet pertinent de l'approximation décimale au cœur du changement d'état du contrat institutionnel algébrique-analytique.

A présent, l'ingénierie nous apparaît aussi comme une complétion expérimentale de la praxéologie de comparaison dans l'institution EMS du lycée et certains épisodes de l'expérimentation, relatés et analysés dans la thèse, révèlent les rigidités des trois praxéologies qui piègent les sujets-acteurs de l'institution. Par exemple :

¹¹⁰ Sous le titre « la rupture algébrique/analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales », Birebent 2005.

- « la dépendance de la technique à l'égard des ostensifs » se lit dans l'obstination des élèves et de leurs enseignants à mener la comparaison de $\cos(75^\circ)$ avec 0,25 en utilisant la forme algébrique de $\cos(75^\circ)$ ¹¹¹ sans envisager la valeur prise par la fonction cos ;
- « l'application de la technique n'inclut pas l'interprétation du résultat » se manifeste dans cette même tâche de comparaison par le peu d'attrait chez les élèves et leurs enseignants pour le cercle trigonométrique ou la sinusoïde.

IV. Conclusion

La volonté d'actualiser en continu nos interventions d'enseignants dans les séances de DEA tout en conservant le même corpus extrait de la thèse a nourri pendant des années le questionnement d'une recherche sans la clore. Cette expérience d'enseignement de la didactique conduite en obligeant les enseignants-chercheurs à se (ré)engager dans leur propre recherche nous semblait bénéfique pour les étudiants ; elle l'a été aussi pour les enseignants-chercheurs eux-mêmes. Dans cette expérience d'enseignement il faut souligner le rôle de l'ingénierie ; irremplaçable dans la méthodologie de recherche, l'ingénierie est un outil puissant dans l'enseignement de la didactique. Disposer de plusieurs lectures de la conception et des faits expérimentaux d'une même ingénierie, reprendre chaque année des analyses a priori de ses situations didactiques illustre toujours mieux la pertinence de la méthodologie employée et aidait à l'exposition des concepts fondamentaux de la didactique. J'ajoute, pour en remercier Annie Bessot, que le choix de faire (re)vivre le corpus de sa propre thèse dans des travaux dirigés d'enseignement représente une expérience forte, rare et donc précieuse.

¹¹¹ Beaucoup écrivent $\cos(75^\circ) = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{0,75}}{2}}$

Références bibliographiques

Assude T. (1992), Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "Racine carrée" et analyse du curriculum, Thèse de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Birebent A. (2001), Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Birebent A. (2005), La rupture algébrique/analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales, Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bolea P., Bosch M., Garcia J., Gascon J., Ruiz L. et Sierra T. (2000), Analyse de "La mesure en CM1" d'après la Théorie anthropologique du didactique. In P. Clanché, M.-H. Salin, B. Sarrazy (Eds) Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures... Hommage à Guy Brousseau. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bosch M., Fonseca C., Gascón J. (2004), Incompletud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 24/2.3, pp. 205–250, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bronner A. (1997), Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, pp. 211–235. LSD-IMAG Grenoble.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in R. Noirfalise (ed.), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques de La Rochelle, pp. 89-118, IREM de Clermont-Ferrand.