

Présentation des conclusions du travail PIREF : L'efficacité différentielle de l'action conjointe des professeurs et des élèves

Alain Mercier, Gérard Sensevy, Teresa Assude

Partie 1 : Résultats de la recherche

Nous nous sommes plus particulièrement engagés sur l'interprétation de certaines séances d'enseignement qui ouvraient pour nous une question. Nous étudions donc les professeurs experts engagés dans un travail proche de ce qui leur est en principe demandé, ceux qui sont allés le plus loin dans ce que Guy Brousseau décrivait ce matin... La mise en place d'un enseignement que l'on pourrait dire "par problèmes"⁹⁸. Nous n'oublions pas qu'ils s'engagent dans cette voie pour nous montrer leur savoir faire plus que pour nous montrer leurs usages ordinaires.

SITUATION pour enseigner N'EST PAS PROBLÈME à résoudre

Pour commencer de répondre en didacticien à propos de l'efficacité d'un enseignement, une première question est utile : « Sur quoi une activité proposée ouvre-t-elle ? Sur quoi devrait-elle ouvrir ? » Nous avons quelques éléments permettant d'avancer, ils tiennent à l'analyse des thèmes et des valeurs portés par un projet de leçon.

Deux questions nous ont semblé permettre de décider:

« Quel est l'enjeu actuel de l'activité, est-elle *robuste, fidèle, juste* ? »

A plus long terme, « Quels sont les *avenirs possibles* de l'activité ? »

Plus précisément, l'activité proposée à des élèves

Ouvre-t-elle sur une question *cruciale* ?

Ouvre-t-elle sur un thème d'étude dont elle est *génératrice* ?

Ouvre-t-elle sur une théorie dont elle est *fondamentale* ?

Permet-elle un ou plusieurs *parcours* dans une organisation de savoirs ?

⁹⁸ On remarquera rapidement que certains professeurs enseignant en Zones de Discrimination Positive ont refusé d'entrer dans la démarche expérimentale, parce que leurs élèves ne supporteraient pas l'incertitude que créerait le problème et que leur organisation de classe n'y résisterait pas.

Nous avons engagé des travaux qui permettent de répondre positivement à ces questions, comme par exemple ceux de l'équipe de Bordeaux, qui prend l'idée de Lebesgue au sérieux et développe le *calcul de l'aire du rectangle* comme situation fondamentale des calculs de produits, de nombres entiers dans l'enseignement élémentaire, de fractions et de décimaux ensuite. Ce travail conduit chaque fois à des éléments théoriques, puis à la construction d'un algorithme et, enfin, à la mise en place d'un dispositif permettant d'asseoir des routines de calcul sur un répertoire connu.

Notre travail de didacticiens consiste à identifier, avec les professeurs et à leur intention, des *outils* techniques, qui ne sont pas toujours décrits dans les travaux mathématiques théoriques mais qui permettent de gérer le curriculum que les professeurs mettent en place au quotidien et de même, à leur fournir des *résultats*, des *dispositifs*, des *faits*, pouvant donner des objets d'enseignement conformes aux programmes. LA didactique est AUSSI une théorie de la pratique⁹⁹.

Les contraintes sont multiples et l'enseignement est déterminé à plusieurs niveaux relatifs aux mathématiques d'un côté, aux professeurs et aux élèves de l'autre, ce qui interdit une intervention directe ; des points d'appui d'une évolution possible peuvent pourtant être identifiés, par exemple autour de l'observation des *erreurs persistantes des élèves ordinaires* et des *élèves en difficulté, comme des besoins exprimés des professeurs*.

Nous savons d'expérience qu'il n'y a pas de mutualisation sans théorie commune, pas de ressources produites par les professeurs eux-mêmes en position de professeur, sinon pour eux-mêmes. Nous savons aussi que le système d'enseignement n'a pas produit les personnes dont ce serait le métier.

Car ce qu'il y a à concevoir ce sont des situations au sens plein, c'est-à-dire à la fois des contenus d'enseignement et les conditions de leur enseignement. Mais le travail des professeurs pour conduire les enseignements décrits ainsi n'est pas simple et ne va pas de

⁹⁹C'est ainsi par exemple que nous proposons de réaliser le travail de développement que demande l'INRP. Les outils sont peut-être les éléments les moins visibles. Ils sont identifiés par des systèmes sémiotiques, des *notations* « calculables » et les *notions* associées (tableau de nombres, colonne des différences ; programmes de calcul écrits comme formules d'un tableur ; etc.) dont la vie appartient parfois seulement à la culture d'un niveau d'études. Les résultats sont énoncés et lorsqu'ils sont de quelque ampleur on les nomme théorèmes, les dispositifs s'appuient sur leur usage et certains comme l'algorithme de multiplication sont suffisamment connus pour figurer au programme des études. Ces systèmes de notations et de notions à *usage didactique* sont indispensables au professeur comme aux élèves parce qu'ils correspondent à leur niveau de travail théorique. Mais si ces systèmes langagiers et symboliques, étroitement associés, ne sont pas stables et identifiés comme *les enjeux officiels du travail de la classe*, les activités des élèves et du professeur ne produisent pas de savoir mathématique visible et bientôt, ces activités ne sont plus légitimes.

C'est en ce sens que notre travail de développement participe à la production d'un curriculum effectif : nous nous sommes donné pour enjeu de produire, systématiquement et en coopération, les supports de situations d'enseignement robustes.

soi. L'étude des difficultés que les professeurs rencontrent est aussi l'une de nos questions de travail et c'est aussi sur cette question, un peu en aval de ce qui fait le coeur de notre ligne d'attaque, que nous travaillons en didacticiens des mathématiques.

Mais pour conduire ce travail nous disposons de peu de moyens humains et nous avançons dans un environnement instable où les injonctions venues du système de pilotage de l'enseignement sont parfois contradictoires, parce que la question : " Quels sont les savoirs à enseigner pour qu'ils forment le cadre de pensée de la génération à suivre ? " est toujours un enjeu politique fort, dans toute société.

Or, les choix ne sont jamais complètement explicites et leur réalisation nécessite aujourd'hui une professionnalisation du métier de professeur dont la société ne semble pas avoir idée. Ce qui laisse la place à tous les mouvements de mode idéologique, qu'ils viennent des tenants du savoir (les mathématiciens, dans notre cas) ou de la société civile (les utilisateurs de mathématiques, les employeurs, les idéologues, les porteurs de bonnes intentions qui conduisent tout droit à l'enfer et enfin, tous ceux qui ont intérêt à ce que la connaissance ne soit pas largement disponible, parce qu'ils transmettraient volontiers à leurs héritiers le pouvoir qu'elle donne).

Souvent, les professeurs, même expérimentés, que nous avons observés ne sont pas professionnels au sens par exemple de leur connaissance des mathématiques qu'ils enseignent (Liping MA). Peut-être pour montrer leur expertise au chercheur qui vient les visiter, ils font fonds sur une "situation" produite par un groupe de travail ou ils font fonds sur une question venue d'eux-mêmes et dont ils connaissent une solution, et se lancent dans un *enseignement par problèmes* sans se demander dans aucun des deux cas ce qu'un élève peut en apprendre et ce qu'il est possible d'enseigner.

Ils ne sont pas responsables seuls de cette situation. En particulier, *la construction de progressions est actuellement un problème didactique des professeurs que, je crois, nous les didacticiens avons sous-estimé.* Comme si nous didacticiens n'avions pas encore bien compris que les situations proposées par nos théories n'existent que comme longues théories de jeux, engendrées par une ou plusieurs situations fondamentales dont ils déclinent les cas, sous le prétexte que nous n'avons pas les moyens, comme Brousseau l'a fait à Michelet, d'observer plus de deux ou trois séances. Des phénomènes didactiques ont été identifiés, dans notre recherche.

Analyse a priori

C'est un geste essentiel de l'analyse et nous avons appris à la conduire plus sûrement après coup, mais toujours a priori c'est à dire avant toute interprétation de ce que nous avons observé. Car c'est cette analyse qui nous donne des clés d'interprétation de ce qui se voit lorsque l'on suit une classe ordinaire. Elle confronte le projet déclaré du professeur et son impression après coup à ce que notre construction imagine, en termes d'apprentissage, pour un élève qui se trouverait dans la classe. Teresa en a parlé longuement.

Dévolution et régulation didactiques

L'analyse a priori montre un premier phénomène didactique qui s'applique aux cas particuliers étudiés ici, mais aussi à d'autres classes et autres professeurs. Ce phénomène est celui de la *réduction de la complexité conceptuelle* : *il y a une réduction de la complexité conceptuelle des problèmes proposés d'autant plus importante que le modèle mathématique standard qui les définit demeure porté par les systèmes sémiotiques ordinairement associés à des organisations praxéologiques hautement techniques*. En clair, plus les questions posées relèvent de mathématiques identifiées comme des savoirs de haut niveau, plus il devient impossible au professeur de proposer un système sémiotique adapté et plus il doit laisser les élèves inventer à partir du peu de mathématiques qu'ils savent, en appuyant leur travail sur une manipulation matérielle qui ne permet pas de montrer ou de nommer les mathématiques qu'ils sont censés étudier.

Cela contraint fortement les éléments d'efficacité du professeur, qui dépendent des connaissances mathématiques dont chaque professeur dispose. Celui-ci doit savoir quelles sont les stratégies d'élève possibles pour l'activité qu'il propose et comment ces stratégies peuvent évoluer vers des savoirs de plus haute technicité.

Il nous semble avoir montré par exemple que la contrainte de la double inégalité qui caractérise les problèmes des étoiles et des œufs doit être signifiée par un système sémiotique peu mathématique que les élèves puissent inventer ou dont ils puissent s'emparer, par exemple le discours « juste ce qu'il faut, ni trop ni pas assez ». Mais si nous imaginons un professeur qui pense la double inégalité en termes de "test d'arrêt d'un algorithme", alors la stratégie à partir de laquelle il interprètera les actions des élèves sera différente, le système de notation qu'il pourra proposer sera tout autre. L'analyse a priori dans la construction du jeu est un élément essentiel, comme nous avons pu le montrer, pour

pouvoir définir, dévoluer et réguler le jeu de l'élève avec le savoir, mais le professeur n'en dispose en général pas. Sinon, l'un laisse les élèves patauger dans l'activité tandis que l'autre leur démontre une technique qui lui est personnelle, mais les deux échouent à assurer, pour la majorité de leurs élèves, la double rencontre du problème et du savoir qui permet de le résoudre.

Puisque certaines potentialités du milieu sont investies par les élèves sous le contrôle du contrat didactique qu'ils connaissent et supposent pérenne, la dévolution apparaît comme un processus complexe qui ne se réduit pas à l'engagement d'un sujet dans une tâche prescrite. Cette dévolution suppose, entre autres, un engagement du professeur dans le travail du savoir, notamment dans une analyse qui lui permet de préciser les enjeux de la situation et en particulier les objets symboliques nécessaires et le discours qui leur est associé. Cet engagement du professeur à étudier pour lui-même les mathématiques qu'il enseigne peut lui permettre d'éviter des définitions incertaines et des rebondissements de la dévolution. Il y a donc là une catégorie de questions à poser dans un questionnaire d'enquête sur les pratiques d'enseignement efficaces : je fais référence ici au travail remarquable de Liping Ma (1997).

Chronogenèse et topogenèse

Nous avons donc pu identifier plusieurs stratégies non proprement mathématiques des professeurs, relatives à la définition et de la dévolution du problème : par exemple le professeur contextualise le problème en le présentant sous la forme d'une situation familiale ou sociale. Mais les stratégies qui nous semblent importantes tiennent compte des règles constitutives du jeu (dont l'enjeu est un savoir), et qui construisent une référence commune par explicitation progressive des règles du jeu. Certaines semblent ne satisfaire qu'à une seule des contraintes qui déterminent ensemble l'espace de liberté du professeur.

Ainsi un de nos professeurs observés semble chercher d'abord à ne pas passer trop longtemps dans la définition et dans la dévolution du problème et plus généralement, sur les mathématiques. D'ailleurs, il le dit explicitement : *« j'évite de proposer des situations + ou de mettre en place des situations + euh...style celle d'Ermel où euh...où y a beaucoup de temps de mise en place »*. Comment s'y prend-t-il ? Il cherche d'abord à impliquer personnellement les élèves, par des situations placées dans leur contexte personnel ou familial. Il parle de « simplifier les situations » et pour lui les mathématiques au CP consistent à « jouer avec les nombres » : *« on simplifie au maximum pour avoir une*

situation de...de classe... la maman d'untel + le papa d'untel + les crêpes qui ont été amenées euh...euh + untel qui a des bonbons euh...euh...<... ?> qu'a des couettes sur la tête + on fait des calculs avec tout ça et on joue avec euh...avec les nombres ». Le rythme des séances mathématiques de cette classe est particulièrement rapide : les élèves travaillent individuellement sur l'ardoise et très vite on passe à une correction collective. Le temps des activités collectives est donc plus important que le temps de travail individuel, le professeur veut qu'ils travaillent sur le calcul mental et sur ce qu'il appelle le « raisonner dans la tête » : « *maintenant c'est...dur pour les enfants c'est que...je travaille beaucoup sur le...calcul mental + sur euh...euh les stratégies d'calcul euh...pas forcément un raisonnement euh...les forcer à s- raisonner dans la tête et...y vont d'moins en moins s'appuyer sur de l'écrit* ». Le rythme des séances est accéléré par le renvoi des moments de la construction du temps personnel des élèves à l'extérieur de la classe.

En revanche, le rythme de la séance de l'autre professeur, observé en parallèle, est plus lent. Il propose aux élèves de manipuler les bandes d'étoiles et les boîtes d'œufs : cette phase de manipulation ralentit le rythme de la séance car le capital-temps dépensé est assez important par rapport à l'avancement du temps didactique. Renée, lors de l'entretien, dit explicitement l'importance qu'elle accorde aux manipulations dans ce contexte : « *quand j'ai préparé ça, je me suis beaucoup basée sur Ermel mais je me suis beaucoup basée sur l'idée qu'il fallait les faire absolument vérifier leurs anticipations par manipulation concrète donc c'est pour ça que tu as vu, tous, toutes les manip au tableau plus les collages sur feuille, etc., je voulais absolument les imprégner, on va dire, de différentes manipulations.* » Renée dit dans l'entretien post- que, si elle avait fait des changements, « *Je n'aurais pas refait de manipulation sur les boîtes d'œufs et je leur aurais peut-être proposé les exercices boîtes d'œufs directement avec une valeur d'évaluation.* ». Le rythme plus lent de cette classe est effectivement fondé sur une alternance de travail individuel et collectif avec une importance donnée au travail individuel de manipulation.

Un phénomène didactique important est donc celui de *l'économie temporelle* de la classe, qui peut être formulé de la manière suivante : *la gestion temporelle dans la classe est faite en partie en estimant la valeur temporelle des situations de manière à économiser le maximum de capital-temps tout en faisant avancer le temps didactique*. En d'autres termes, le rythme d'une séance doit être ni trop lent ni trop rapide. Si le rythme est trop lent, le professeur va mettre en œuvre des stratégies pour économiser le capital-temps (en

supprimant des manipulations) si le rythme est trop rapide les élèves ne suivent plus (et le professeur est obligé de revenir en arrière pour expliquer).

Mais on ne sait pas évaluer vraiment le fait que le professeur avance *au bon rythme*, sans doute parce que ce rythme dépend beaucoup de la capacité des élèves à produire une avancée personnelle adéquate, mais aussi parce qu'il semble que l'observation des phénomènes d'apprentissage produits par un rythme apparemment très rapide ou très lent suppose une durée qui dépasse de beaucoup la séance.

Dans les deux cas, on observe que ces tempos extrêmes laissent beaucoup de l'étude à la charge des élèves, soit qu'ils doivent produire hors classe le savoir institutionnel attendu soit qu'ils doivent se former par eux-mêmes une expérience personnelle des phénomènes étudiés. La variable principale serait donc relative non pas au tempo public des séances de classe, mais à l'organisation d'une production partagée du temps didactique.

C'est ce qu'un questionnaire devrait pouvoir chercher à identifier.

La production d'un milieu ou mésogenèse

Un troisième phénomène didactique est celui du *rôle des techniques dans la production des milieux* de la situation et dans l'organisation des rapports des sujets à ces milieux. Ainsi, le type de tâches proposé aux élèves est le même dans trois classes observées, mais les situations créées ne sont pas les mêmes. Elles varient selon la présence ou l'absence des outils sémiotiques que les interactions avec les objets du milieu conduirait à mobiliser (par exemple, une bande numérique individuelle sur laquelle cocher 9 et surligner des groupes de 5 ou, la suite écrite des multiples de 5 qui permet immédiatement d'encadrer, dans le problème des étoiles). La présence possible de telle technique tient en effet au fait que ces outils aident ou non à l'inventer, par productivité du système sémiotique, ou à l'appeler en mémoire, et à la travailler dans un nouveau contexte.

L'analyse des outils sémiotiques disponibles est ainsi un moyen pour imaginer les diverses manières dont les élèves peuvent s'attaquer à un type de tâche ; c'est donc un moyen pour décrire différents types de milieux, et d'accéder in fine aux situations didactiques.

Les milieux sont en effet un moyen de régulation, notamment par les processus *d'expansion ou de réduction du milieu*, qui sont une des techniques de régulation à disposition du professeur par la gestion de l'incertitude des élèves qui leur est ainsi permise. Dans l'une des séances analysées, cette expansion du milieu est double : soit le maître apporte des informations ou des énoncés contradictoires (par exemple en proposant un contre-exemple

et en se plaçant comme contradicteur) soit le maître apporte des éléments problématiques qui auraient pu placer l'élève dans une dialectique de formulation et validation. Le professeur contrôle ainsi les moments où la nécessité de savoir vient du fait que quelque chose de connu dans d'autres conditions devient problématique.

Mais une expansion n'implique pas forcément que les élèves puissent rentrer dans des dialectiques nouvelles : cela dépend de la rétroaction que fournit le milieu, comme nous avons pu l'observer dans la séance analysée. Par opposition, certains milieux sont tellement étendus que le professeur va procéder à des réductions drastiques, par élimination des propositions ou des interprétations apportées par les élèves. Dans ce cas, le professeur dispose et oriente peu à peu les élèves en fonction des réponses qui l'intéressent. Ce type de réduction ne correspond pas au contrôle d'un certain nombre de variables didactiques comme nous le montrent certaines des situations adidactiques, bien au contraire il pilote le comportement des élèves par les effets du contrat didactique. Nous retrouvons ici des éléments qui rappellent certains résultats de l'équipe toulousaine, bien que nous puissions en donner une description à proprement parler didactique.

En effet, il est possible que le phénomène de variabilité des formes pédagogiques, repéré comme un des éléments d'efficacité d'un enseignant, corresponde à la variation nécessaire des rapports aux objets du milieu des situations didactiques selon le type de travail épistémologique qui est attendu des élèves. Ainsi par exemple, les débats ne sont pas utiles en soi mais au moment où il est nécessaire de démontrer, dans le cadre d'un discours théorique, des propositions venues d'un autre temps de l'étude, qui peut être un temps de pratique ou même, un temps de travail expérimental qui est un retour à la pratique pour une vérification. Ces temps différents de l'étude correspondent, dans l'analyse didactique, au rapport à des milieux ayant des propriétés différentes comme formes de vie de rapports épistémologiquement différents aux savoirs étudiés. On peut évaluer de même le travail de groupe, la prise de notes de cours ou la réalisation d'exercices d'entraînement.

Sur ce sujet, une enquête par questionnaire auprès des professeurs devrait pouvoir être construite.

Le contrat didactique différencié

Un autre phénomène didactique est celui du contrat didactique *différencié* qui pourrait alors être formulé de la manière suivante : *le type, la présence, ou l'absence d'un discours qui*

accompagne la production d'une réponse est un élément différenciant des milieux auxquelles les élèves sont confrontés.

L'analyse a priori montre en effet que les différents niveaux de l'étude ne sont pas de la seule responsabilité de l'élève ni de celle du seul professeur. Dans les classes observées, les élèves peuvent avoir un rôle important pour proposer des embryons de techniques (qui ne sont pas forcément repris par le professeur), et le professeur prend parfois la responsabilité de la technique soit en indiquant aux élèves des systèmes sémiotiques constitutifs d'une technique à partager, soit en laissant ses élèves développer des embryons techniques qu'ils n'institueront jamais. Alors, la présence ou non de techniques de validation de la réponse produite est un élément qui peut faire varier la direction de développement d'une situation dans les conditions de sa vie ordinaire. C'est là un phénomène didactique important car le renvoi systématique des élèves à des procédures de vérification interdit l'évolution d'un jeu d'action en jeu de formulation et le passage au développement d'une technique. Or, il semblerait que ce soit ce que font les professeurs quand ils considèrent avoir affaire à un élève faible.

Une autre dynamique tient aux différentes manières dont le partage topogénétique influence le jeu avec le milieu. *Les postures d'accompagnement et d'analyse adoptées par le maître tantôt placent le maître et l'élève dans le même jeu, tantôt placent le maître en tant que professionnel qui analyse et évalue les actions des élèves. Ainsi le maître peut à certains moments faire partie intégrante du milieu (en jouant avec et contre l'élève) et à d'autres moments le maître peut être à l'extérieur du milieu en créant une distance qui lui permettra de réguler la suite du travail de l'élève. Ces dynamiques peuvent créer des conditions pour que certains élèves plus que d'autres assument un rapport au milieu, à l'ignorance et à l'incertitude, et tout simplement au savoir. Mais leur observation doit être conduite classe par classe, et dans une classe, presque élève par élève. Sur ce point donc, nous n'avons pas l'espoir de pouvoir obtenir des renseignements par le moyen de questionnaires.*

Pour conclure la partie I

Nous concluons d'abord le rapport sur les résultats obtenus dans les techniques de description de l'enseignement que la recherche entreprise nous a conduits à mettre au point. D'une certaine manière, le projet de base de données vidéo VISA est une conséquence de ce progrès, qui rend ces projets réalistes.

Nous le concluons ensuite bien sûr avec les éléments de réponse à la question posée : nous savons plus sûrement observer un enseignement pour en voir l'efficacité potentielle comme l'efficacité probable. Notre travail conduit en parallèle en mathématiques et en français, nous a montré comment *des déterminations apparemment génériques se spécifiaient très concrètement dans une discipline donnée et comment ce sont les propriétés mêmes de cette spécification qui sont déterminantes*. J'en ai retenu trois grandes catégories.

Le jeu didactique se joue à deux niveaux au moins : entre, d'une part, le jeu avec les systèmes d'objets et de notations sur lesquelles s'appuie l'activité demandée aux élèves et, d'autre part, le jeu avec les systèmes langagiers et les notions par lesquelles l'activité se parle et se contrôle. L'articulation de ces deux niveaux fait le principal du problème didactique que le professeur doit résoudre pour aider les élèves, et cette articulation suppose de sa part un travail préalable qui n'appartient pas à la panoplie des « gestes professionnels » de professeur.

Un des acquis importants de notre travail tient sans doute dans le fait que nous pensons pouvoir produire un questionnaire qui mettrait en évidence ce travail, pour tel chapitre, ce qui nous permettra de tester le poids relatif de cette variable dans l'efficacité d'un professeur. De plus, nous savons comment la gestion temporelle pèse sur le processus d'enseignement et nous pouvons là aussi enquêter de manière large, par questionnaires auprès des professeurs et de leurs élèves.

Un autre de nos acquis est le fait que nous devrions pouvoir observer des élèves dont l'activité était jusque là hors de notre portée parce qu'ils n'avaient pas de comportement public observable : leur rapport aux notations et aux systèmes langagiers associés peut être observé dans leurs notes de cours et lors d'entretiens hors classe.

Mais il y a une autre leçon, qui nous concerne de plus près encore, comme didacticiens, parce qu'elle correspond à un travail que nous n'avons pas conduit à son terme et qui manque.

Partie 2: Problèmes, activités, situations

La question est générale et vous me permettrez de la construire en partant de loin, mais il m'a fallu prendre cette distance pour comprendre ce que nous avons observé. Nous avons observé :

- comment des professeurs proposaient à leurs élèves des activités, et
- comment ils accompagnaient leurs élèves dans ces activités (pour qu'ils produisent des savoirs)

Nous avons tenté d'évaluer *a priori* l'efficacité des professeurs que nous observions. Cela nous a conduit *a posteriori* à centrer notre regard sur deux types de jeux de langage :

- la manipulation des systèmes de notations,
 - la mobilisation des notions associées,
- sans oublier la mise en place, l'accompagnement, les suites des activités.

Il semblerait que la manière dont les professeurs pensent leur travail ne les aide pas à s'améliorer, parce qu'ils ne sont pas centrés sur *la production de savoir (les notations, et les notions éventuelles que ces notations appellent)*.

Que veut-on enseigner?

Lorsque l'on consulte le texte du programme 2002 relatif au Cycle 2, on peut lire dès les premières lignes que : « *Élaborées comme réponses efficaces à des problèmes, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables pour résoudre de nouveaux problèmes.* »

Ce qui correspond très précisément à la philosophie générale des textes de tous les enseignements de l'école obligatoire. *Les problèmes sont le moteur de l'activité mathématique* et donnent le sens ou la signification des apprentissages, qu'ils demandent. Mais ces problèmes, dans le curriculum actuel en France, visent à *enseigner des notions mathématiques*. L'enseignement peut donc être pensé comme une genèse artificielle des savoirs, réalisée sous la direction d'un professeur par un groupe d'élèves organisé en communauté scientifique autour de problèmes dont ils fournissent une réponse efficace. La chose s'argumente aisément, plus nettement encore au Collège : les modèles des situations problématiques sont bien des représentations et ces représentations permettent de résoudre efficacement les problèmes ; le calcul algébrique est par exemple un système de représentation socialement stabilisé parce que ses manipulations sont particulièrement efficaces, tout comme les figures géométriques qui donnent une représentation universelle des configurations spatiales ; la démonstration est une forme argumentative venue de l'usage réglé de ces représentations. *Il y a des mathématiques à enseigner à tous, parce*

qu'elles fondent toutes les pratiques mobilisant des mathématiques, C'est non seulement vrai pour le secondaire, mais dès le cycle 2 du primaire. Que ce soit dans le travail scientifique ou dans la société, ce sont bien des mathématiques et chacun peut en être d'accord.

On peut remarquer la progression d'un cycle à l'autre et pour le Collège, qui mérite d'être étudiée et commentée puisque les mathématiques proposent en fin de compte non seulement le développement d'une pensée rationnelle mais, comme le disent fort bien les textes, l'expérience pratique d'une démarche scientifique.

On peut enfin rapporter à ces déclarations les termes du rapport de l'Inspection Générale, qui a observé la grande difficulté des professeurs d'école avec la tâche qui leur est ainsi demandée : enseigner des mathématiques en faisant faire des mathématiques aux élèves. C'est l'enjeu de mon intervention.

On peut demander alors, ce sera la dimension polémique de mon intervention, si le mot d'ordre n'appellerait pas trop souvent une utopie, *parce que les conditions techniques de sa mise en oeuvre efficace ne sont pas réalisées*. Les phénomènes que l'Inspection Générale observe comme nous seraient alors tout à fait normalement, hélas, l'effet d'une demande qui ne peut pas aboutir à l'invention d'une technique efficace, une demande appelant un état que l'autorité peut toujours opposer aux réalisations maladroites des professeurs et qui fonctionne donc comme un discours moral inquisiteur.

Je tenterai de montrer les conditions qui risquent d'avoir pavé de bonnes intentions un chemin qui se retrouve, trop souvent, conduire tout droit les professeurs et leurs élèves à l'enfer de l'activisme.

Quelques éléments de réflexion pour construire une réponse

On remarquera d'abord que très souvent, le mot d'ordre ne parle pas d'apprendre les mathématiques mais d'en faire, et que, dans le cas du CE2 où il s'agit bien de faire des mathématiques pour en apprendre, le texte ne pose pas la question de savoir si « en faire » suffit pour « en apprendre », comme si tous les professeurs savaient se débrouiller de cette injonction. Prenons le texte le plus explicite, celui pour le Collège. Les élèves en effet sont supposés avoir un rapport mieux qualifié et plus scolaire aux autres objets de la liste qu'ils "rencontrent" (les modèles des situations), comprennent (le sens du calcul algébrique), découvrent (les propriétés universelles des figures)" ou dont ils "font l'apprentissage (la

démonstration)", tandis que les problèmes, ils ont simplement à "les résoudre". Au point que l'on pourrait se demander s'il faut apprendre quelque chose des problèmes que l'on résout ou s'il faut seulement *en avoir fait* (résolu) et s'en souvenir pour en faire, à la demande, "résoudre des problèmes" devenant ainsi chez certains auteurs... *une compétence, sans plus aucun contenu mathématique déclaré*. Ainsi, apprendre des mathématiques ne serait plus l'enjeu de l'enseignement des mathématiques : après tout, on n'enseigne plus le latin pour que les élèves sachent écrire ou parler cette langue, les mathématiques pourraient devenir elles aussi *une pratique culturelle morte*.

Cette position est défendue par certains courants cognitivistes, au Québec en Suisse et en Belgique et elle sera bientôt, peut-être, vivace en France. Actuellement sans doute, la lecture des programmes montre que, si certains mathématiciens rejoignent ce courant de pensée et affirment que, pour faire des mathématiques il n'y a rien à savoir, sauf à être mathématicien professionnel ce qui est fort rare, ce n'est pas la position officielle de l'enseignement. Pourtant, la dernière description du socle commun parle bien de... compétences, utilisant très précisément le terme qui est porteur potentiel de cette position.

Revenons donc au texte pour le cycle 2, le texte de 2002 qui définit les contenus de l'enseignement semble décrire très fermement le processus attendu. Un processus qui s'engage par "la recherche de réponses efficaces à des problèmes" et "débouche sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure)" quoique... « *Les divers champs disciplinaires n'émergent que progressivement tout au long de l'école primaire.../...*

Dès le cycle 2, les élèves doivent prendre conscience du fait que résoudre un problème ne revient pas à trouver, tout de suite, les calculs à effectuer pour répondre à la question posée. Une élaboration est, en général, nécessaire, faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés. Un même problème, suivant le moment où on le propose, suivant les connaissances des élèves à qui on le destine et suivant la gestion qui en est faite, peut être résolu par élaboration de procédures personnelles ou, plus tard, par reconnaissance et utilisation d'une procédure experte appropriée. Dans certains cas, la résolution des problèmes est organisée par l'enseignant pour, à partir des solutions personnelles élaborées par les élèves, déboucher sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure). L'entraînement, nécessaire pour fixer certains savoir-faire essentiels et les rendre plus facilement disponibles, ne doit pas occulter la phase, parfois longue, au cours de laquelle

les connaissances sont élaborées par les élèves, puis progressivement précisées et structurées. »

En ce point du débat, il est essentiel de noter que les premiers à avoir traité de la question n'ont pas porté le mot d'ordre lui-même. Ainsi, rejoignant sur ce point Régine Douady à qui il réfère, Yves Chevallard écrit (1981), dans *Pour la didactique*. Marseille: IREM. p 28. :

« ...les mathématiques sont moins un ensemble de connaissances (à acquérir) ou un corpus d'énoncés (à apprendre) qu'une activité spécifique dont les éléments essentiels sont *des problèmes* que l'on s'essaie à résoudre et qui sont en quelque sorte le moteur de l'activité mathématique, et *des outils* (concepts, méthodes, techniques) dont la construction elle-même est un problème mathématique et qui seront mis en fonctionnement pour résoudre des problèmes. »

Faire des mathématiques, c'est *utiliser* des outils pour résoudre des problèmes et donc aussi, *construire* des outils permettant de résoudre des problèmes ou encore, *étudier* des outils et les problèmes qu'ils permettraient de résoudre. Résoudre des problèmes est *le moteur et le motif* de l'activité mathématique, ce n'est pas rien mais ce n'en est pas le tout¹⁰⁰, le texte des programmes dit aussi cela.

Les inventeurs de la didactique des mathématiques ne sont pas les premiers à insister sur ces questions. Ainsi Lebesgue commençait-il, en 1935, son cours à l'ENS de Sèvres sur "la mesure des grandeurs", dont il a renouvelé les techniques, par cette déclaration :

« Un tout jeune enfant, invité à prendre un bonbon et à en donner à ses deux soeurs, s'assurera d'abord de sa part, puis portera un bonbon à l'une de ses sœurs et reviendra en chercher un autre pour le porter à son tour. Plus âgé, il évitera ses allées et venues ; il prendra les trois bonbons en disant "pour moi, pour Louise, pour Renée. On imagine volontiers .../... que par un mécanisme analogue les hommes en sont arrivés, quand ils veulent comparer deux collections, à compter ; c'est-à-dire à comparer les deux collections à une même collection type, la collection des mots d'une certaine phrase. Ces mots sont appelés des nombres. Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres ; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection. Ce nombre est

¹⁰⁰

Comme dirait Bobby Lapointe.

considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences. Les règles des quatre opérations nous dispensent des opérations de dénombrement pour certaines collections... »

Lebesgue signifie ainsi à la fois le caractère *d'activité scientifique expérimentale* des mathématiques, le fait que les représentations obtenues sont des modèles de certaines situations expérimentales et que ces modèles permettent de résoudre certaines classes de problèmes qui en font le sens. Lebesgue insiste sur les conséquences de cette déclaration et on peut inviter tout professeur de mathématiques à s'y reporter car le texte a été réédité (LEBESGUE (1975) *La mesure des grandeurs*. Paris: Blanchard), il se trouve dans toutes les bibliothèques de mathématiques et il est lisible par toute personne cultivée.

L'équipe premier degré de l'INRP (ERMEL (1993), CE1, *Apprentissages numériques*. Paris: Hatier, p. 39-51) retrace aussi, et parallèlement, l'histoire d'un tout autre objet, les "problèmes pour apprendre à chercher" dans l'enseignement, et montre qu'en 1945 les problèmes sont classés par le nombre d'opérations que leur résolution mobilise. En 1970, ils doivent permettre aux élèves d'apprendre à "analyser une situation ou une chaîne de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent", la notion de "situation-problème, beaucoup plus ouverte, élaborés par l'enseignant ou par les élèves, à propos desquelles la recherche peut s'exercer dans de multiples directions... " n'intervenant qu'en 1978-80, sous l'impulsion d'équipes IREM que je ne nommerai pas...

ERMEL pour sa part fait explicitement référence à l'approche de la psychologie cognitive et cite BRUN (1990, *La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives*. Math-Ecole 141) pour différencier un exercice, un problème pour apprendre et un "véritable" problème, "pour lequel l'élève ne dispose pas d'un modèle de résolution qui lui ait été enseigné" : c'est-à-dire, un problème pour apprendre à chercher et non pas un problème permettant d'apprendre les mathématiques avec lesquelles on résout les problèmes du même type. Car la "résolution de problème" est une épreuve connue de psychologie cognitive, au point que le "problème des Tours de Hanoï" a dû être posé à tous les petits genevois, dans les années 70 : Brousseau lui-même a travaillé dessus. Elle est alors considérée comme l'activité cognitive par excellence et finalement, Brun a critiqué ces

expériences de laboratoire sur "les seuls problèmes que les psychologues connaissent et qui ont pour limite les connaissances collectives de cette communauté".

On remarquera ensuite que les tenants du mot d'ordre peuvent facilement être reconnus à cela : le mot d'ordre suppose que là seulement, dans la recherche à laquelle engagent les situations faisant problème, est l'activité "vraie", qui permet de faire *vraiment* des mathématiques bien sûr, et d'en éprouver *la vraie nature*. Le mot d'ordre l'affirme, la vraie nature de l'activité mathématique c'est... de chercher à résoudre des problèmes. Le débat n'a pas plus de fin que les débats métaphysiques. D'ailleurs, la dernière livraison de l'INRP s'intitulait « Faire des maths en classe ? » avec un point d'interrogation rendant compte du fait que certains se demandent si c'est possible et que deux au moins des IREM impliqués ont interprété la question sous cette forme : « Qu'est-ce que faire véritablement des mathématiques (en classe ou, en situation scolaire) ? »

Le paradoxe est que, alors qu'ils affirment tenir pour la discipline plus que quiconque, toutes ces déclarations et les travaux correspondants laissent de la place aux tenants de l'enseignement par "véritables situations-problèmes" proposant "de véritables problèmes pour de véritables recherches" sans considération pour l'organisation des contenus d'apprentissage en organisations disciplinaires de savoirs (DE VECCHI et CARMONA-MAGNALDI, 2002) puisque l'enjeu est que les élèves SE construisent LEURS propres savoirs, relatifs à un obstacle issu de leurs conceptions initiales personnelles. *Ce qui, n'en déplaise aux bonnes intentions des auteurs, conduit à oublier que les savoirs sont des objets sociaux, des connaissances publiques et partagées construites par les hommes comme des outils pour penser et agir de manière normalisée afin d'obtenir des résultats socialement garantis. Démontrés en principe et dont il est possible de rendre compte.*

Etude exemplaire d'un problème typique : "Combien y a-t-il de patrons du cube ?"

Souvent, le problème est posé sous une forme voisine : "Voici un patron du cube, trouve tous ceux que tu peux !" Les deux formes méritent analyse. D'abord, parce que ce problème a bien une réponse et une seule, mais que personne ne sait comment garantir qu'il la possède parce qu'il a formé tous les patrons de cube possible : il faudrait pour cela que l'on sache comment on fabrique un patron de cube... Alors, ce problème ne serait-il dit "ouvert" que parce que la réponse est garantie par l'autorité mathématique ? Ce serait dommage pour les tenants des problèmes ouverts ! Nous ne pouvons donc échapper à la question : "Est-il

vraiment hors de portée des élèves de CM et de leurs professeurs ?" Et pour répondre, nous devons faire quelque chose qui appartient au programme du Collège, produire une description permettant de contrôler la fabrication des patrons de cube, soit pour les produire systématiquement soit pour en contrôler la production, et ainsi les compter. Quelques éléments de réponse apparaissent en effet si l'on prend au sérieux la demande de dénombrer les éléments constitutifs d'un cube ou plus généralement d'un parallélépipède : faces, sommets, arêtes, tous éléments impliqués dans la fabrication des *patrons de polyèdres*.

Pour les dénombrer il en faut une description qui ait les propriétés attribuées aux nombres par Lebesgue, une description qui permette de nommer les arêtes connaissant les sommets ou inversement. Je ne vous ferai pas chercher ici ; la meilleure description commence par les faces, comme chacun le sait dans la vie courante. Une face avant AV, une face arrière AR, une face droite ID et une gauche IG, un dessus OH et un dessous OB. Trois paires, donc, que l'on peut colorier de trois couleurs Noir (AV et AR) Rouge (ID et IR) et Bleu (OH et OB). Alors, deux faces parallèles étant de même couleur, une arête est l'intersection de deux faces de deux couleurs différentes et un sommet, l'intersection de trois faces de trois couleurs différentes : on peut donc former la liste des faces et des sommets sans disposer d'une représentation autre du cube, notre description est suffisante pour ce travail. Permet-elle de fabriquer des patrons ? Oui, parce que l'on peut rapidement donner les règles de leur construction, qui sont la traduction de la description du cube que la coloration des faces permet : le cube est composé de trois paires de faces parallèles, coloriées de la même couleur. Ce qui se traduit par la description suivante :

- 1) *Les patrons (les cubes) comprennent six faces liées en un ensemble d'un seul tenant.*
- 2) *Ils comprennent deux faces de chacune des trois couleurs (les cubes sont des parallélépipèdes, les faces de même couleur sont parallèles).*
- 3) *Deux faces adjacentes par une arête ou un sommet sont de couleur différente (les faces parallèles n'ont aucun point commun, elles sont opposées).*
- 4) *Trois faces de trois couleurs différentes ne sont pas alignées sur le patron (elles sont sécantes et définissent un sommet).*

Nous avons trouvé de nombreux sites de classes et plusieurs sites mathématiques personnels qui traitent de ce classique. Même, une classe de CE2 a trouvé onze patrons, pour un travail de recherche d'un an... sans réussir ni à montrer qu'ils les avaient tous produits ni à installer une recherche systématique commode. Il semble que les deux techniques de travail d'une telle question soient inconnues des professeurs qui y Engagent

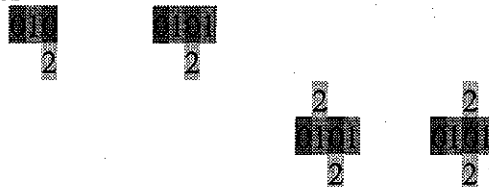
leurs élèves. Pourtant, le codage des arêtes sur chaque face d'un cube permet de fabriquer des patrons validés par la correspondance des numéros, ce qui est déjà une réponse à la situation qui utilise les nombres comme système de codage, un usage trop rare à l'école alors qu'il est devenu omniprésent dans la société. Et si on considère que la coloration des faces donne un autre codage on obtient la description d'un patron comme arbre composé de six chiffres 1, 2, 3, disposés selon les quatre règles ci-dessus. Ce qui donne une systématique et donc, une énumération permettant le dénombrement :

1 ^e face	2 ^e face	3 ^e face	4 ^e face	5 ^e face	6 ^e face (patrons du cube)
		deux choix	trois choix	quatre choix	

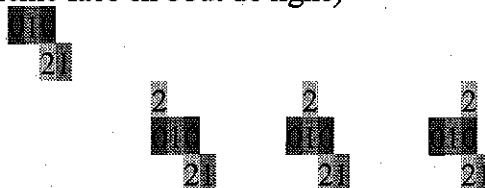
On choisit ici d'explorer d'abord les configurations réalisant le plus grand alignement de faces, sachant la règle 3 (deux faces ayant une arête ou un sommet communs ne sont pas de même couleur) et la règle 4 (trois faces de trois couleurs différentes ne sont pas alignées)



Les quatre premiers patrons ont été obtenus par déplacement de la sixième face sur ses quatre positions possibles



Ces deux patrons ont été obtenus de même, à partir d'un choix alternatif de la quatrième face et du choix de la cinquième (pour ne pas retrouver une configuration déjà obtenue on élimine les deux positions de la sixième face en bout de ligne)



Ces trois patrons là ont été obtenus à partir du choix alternatif de la cinquième face, sur la deuxième ligne



Ce patron là a été obtenu à partir d'un autre type de position de la sixième face



Ce dernier patron est obtenu par développement d'une alternative construite dès la troisième face (recherche d'une configuration sans alignement)

Si l'énumération a été systématique, elle fait la preuve de ce que tous les patrons du cube ont été produits. On peut donc les compter sûrement.

On peut alors se demander pourquoi limite-t-on la question au cube, alors que la poser à propos d'un parallélépipède rectangle permet de repérer les faces par leur forme (chaque paire de faces parallèles a une forme repérable), ce qui correspond au même codage que la couleur, ou de repérer la conformité des configurations par les arêtes (chaque quadruplet d'arêtes a une longueur caractéristique), ce qui correspond au premier codage évoqué. Mais je n'ai pas trouvé, même en Sixième, de demande de compte de tous les patrons des parallélépipèdes conduisant à s'apercevoir qu'il y en a 11, comme pour le cube, parce que la forme des faces n'importe pas : ce savoir est sans doute celui du premier mathématicien qui a posé la question et qui pour cela n'a pas demandé d'autre compte, mais aujourd'hui, il n'appartient pas aux professeurs.

La propriété qui permet de compter les patrons du cube tient dans un savoir mathématique peu connu, parce qu'il a été nommé par un didacticien et non par un mathématicien. Ce savoir est pourtant la clé de tous les problèmes de *dénombrement d'une collection*, c'est que *pour compter des objets il faut les organiser en collection* c'est-à-dire, les individualiser par une procédure de désignation qui les ordonne et que l'on nomme "une énumération". Organiser, comme je viens de la faire, la manière de produire les patrons de cube pour les lister, c'est le seul moyen de les compter. Cela dit, il existe sans doute de meilleures manières d'organiser cette collection, c'est l'objet du travail des chercheurs en mathématiques que l'on nomme combinatoriciens. Mais les professeurs qui ne connaissent même pas une de ces manières sont incapables de diriger l'étude du problème c'est-à-dire, de leur indiquer une direction à suivre, d'évaluer les idées qu'ils proposent, de les enseigner. Je ne dis pas là quelque chose d'étonnant puisque depuis maintenant plusieurs années, des chercheurs de tous pays et cultures ont montré que l'efficacité d'un corps d'enseignement tient à la maîtrise à la fois pratique et théorique des questions précises que les enseignants posent aux élèves (LIPING MA, 1999, *Knowing and teaching elementary mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Publishers).

La recherche des patrons du cube peut être *instructive*, si les professeurs connaissent au moins une manière de la réaliser et s'ils savent à quel corps de mathématiques elle appartient, au moins, et peut-être la classe des questions auxquelles le problème appartient,

ce que d'autres appelleraient *le type de cette tâche*. Sinon, ce qu'un élève apprendra en s'y engageant tiendra de ses contingences personnelles : il n'y a peut-être pas de pratique enseignante plus discriminatoire.

Mais l'exemple que j'ai développé ici met en cause tout le système d'enseignement qui demande que la question des patrons du cube soit posée comme "problème ouvert" ou "problème pour chercher", alors qu'il n'y a, en le cherchant, rien à trouver que le système d'enseignement ait identifié. Pire, il semble bien que ce soit, pour beaucoup, le critère du fait que l'on tient là un véritable problème pour chercher. Je ne donnerai pas les exemples venus d'une classe, il est trop désolant de voir des enseignants ne pas savoir quoi faire des instructions qui leur sont données et des élèves perdre leur temps. D'autant que, dès le début, les didacticiens qui posaient "le problème (didactique) des problèmes (pour enseigner)" mettaient en garde contre le fait que rendre ainsi à l'élève, sa place est le fait d'une ambition sans moyens. Je citerai le même texte de CHEVALLARD, page 29 suivante :

"En pratique, je ne vois pas qu'on ait fait autre chose, à ce jour, que de mettre à la disposition des enseignants, pour tout viatique, des "activités" ou des séquences d'activités (c'est le cas aussi bien dans les IREM qu'à l'APM) .../... c'est une attitude cohérente avec le principe de compétence de l'enseignant ! Qu'on lui dise ce qu'il doit faire .../... et lui saura agir, sa compétence fera le reste - puisqu'il est enseignant. Pourvu qu'il veuille bien se conformer à ce qu'il lui est demandé de faire ! .../... Malheureusement, nous savons tous ce qui va arriver .../... c'est à peu près ceci : dans une majorité de cas, même s'il a entendu, et reçu parfois avec enthousiasme, l'appel à donner plus de place aux activités dans la classe, à plus ou moins brève échéance .../... elles deviendra un extra ; mais surtout la signification qu'on leur attribue sera dénaturée.../... paradoxalement, le respect de la signification et de la place donnée à l'activité des élèves sera d'autant mieux sauvegardé qu'on travaillera avec des classes plus "faibles" ; .../... parce que là on demande d'occuper les élèves, tout en leur apprenant un peu si c'est possible.../... Le problème qu'il nous faut examiner nous est posé par ce clivage entre notre volonté, tendue vers un but clairement désigné, et notre connaissance pratique des choses.../... Nous nous faisons les hérauts de ce qui doit être en oubliant ce qui peut être.../... Le problème tel que nous le posions concernait l'élève, c'est sur l'enseignant qu'on bute maintenant.../... C'est l'illusion volontariste dont la forme

collective est le juridisme.../... qui nous conduit à verser dans le moralisme : nous construisons des machines que nous appelons volantes et nous voudrions que par cela seul elles volent."

Nous avons besoin d'une technologie du possible. Nous avons besoin d'apprendre à poser des problèmes qui permettent d'enseigner, et d'apprendre à enseigner à partir des connaissances produites par des élèves qui ont cherché à résoudre des problèmes, ce qui suppose des problèmes d'un type particulier que l'on nomme "des situations didactiques". Il nous faudra renoncer à enseigner en fondant notre enseignement sur l'étude de problèmes si nous ne nous occupons pas à ce que le temps des activités proposées à l'élève soit un élément constitutif et nécessaire de la progression du cours de mathématiques. L'activité de l'élève ne peut pas être un enjeu en soi ; elle doit être un enjeu pour l'enseignement, ou elle constitue un temps perdu. Cela, nous le savons en didactique depuis 1981 et c'est toujours dans le texte de Chevallard que je cite depuis le début de mon exposé, page 118-119 cette fois. Seulement, c'est une rupture profonde avec le fonctionnement ancien et on ne peut l'obtenir par une évolution progressive. Prenons le cas des exercices, qui sont dans la forme d'enseignement classique le lieu de l'activité des élèves. Le professeur ne fait pas dépendre son cours de la progression des élèves dans la résolution des exercices et même, il serait tout à fait inconvenant qu'il fasse démontrer aux élèves, en exercice, les théorèmes d'un cours qui consisterait à entériner et organiser les résultats obtenus par les élèves. C'est pourtant ce à quoi des activités efficaces devraient conduire : la progression devrait être le résultat du travail des élèves, l'enseignant authentifiant culturellement le savoir produit, dont il a par ailleurs organisé la production.

C'est mieux *en théorie*, mais le passage pratique d'un fonctionnement à l'autre, dans lequel nous nous sommes engagés voici bientôt une génération, est problématique et suppose des inventions techniques qui ne viennent que si nous décidons collectivement qu'il y a un problème posé au système d'enseignement entier et non pas la mauvaise volonté des professeurs ou de leurs élèves.

PARTIE 3 : Faire des mathématiques pour en apprendre ?

C'est le travail des mathématiciens. Pour cela il leur faut :

produire les moyens de résoudre des types de problèmes les plus vastes possible,

*organiser les problèmes en types que l'on sait résoudre
pour identifier ce que l'on sait,
reconnaître ce que l'on sait faire,
et poser les problèmes qui demeurent.*

Pour imaginer ce que cela suppose, avec un problème tel qu'on en rencontre dans les classes et en considérant qu'une classe soit organisée en organisme de production mathématique, prenons un premier exemple (le faire avec une feuille) :

« On plie une feuille de papier une fois, le pli la partage en deux morceaux. On plie de nouveau, on obtient trois plis qui partagent la feuille en quatre morceaux. Combien de morceaux obtient-on si on plie la feuille une troisième fois? »

Cela ne semble pas encore un problème quoique, si vous n'avez pas de feuille à votre disposition pour faire l'épreuve l'argument qui prouve le résultat n'est pas si simple. C'est que le problème n'advient que si la question posée devient plus générale. « On plie dix fois de suite sur elle-même, combien de morceaux obtient-on? » est donc peut-être déjà une manière de « faire problème ». Mais ce n'est le cas que si l'on renonce à chercher cette réponse pour chercher comment répondre pour tout autre nombre de plis. Ce problème se rencontre, dans les ouvrages d'enseignement. Comment se résout-il? A quoi cela sert-il de le résoudre? Le poser permet de répondre à quel enjeu d'enseignement? Le résoudre, est-ce faire des mathématiques?

La réponse, on le comprend, ne dépend pas du problème lui-même, mais des conditions dans lesquelles il est posé, que l'on décrit comme une situation : c'est sans doute pour cela que le problème figure même deux fois dans les moyens d'enseignement suisses, en troisième année et en sixième année. Confondre les deux interdit de poser les questions essentielles ci-dessus. Voici donc un problème proche :

« On trace, sur une feuille de papier rectangulaire, un trait parallèle à un bord, qui la partage en deux puis, un trait perpendiculaire (parallèle au bord suivant) qui partage en deux, chacun des morceaux obtenus. On obtient quatre morceaux. »

A quelle classe de problèmes appartient-il? Cela dépend du choix qui va venir. Soit par exemple :

« Combien de morceaux obtient-on si on partage en trois dans un sens et en deux dans l'autre? »

Cela est encore un problème de dénombrement à traiter directement, mais si la question devient plus difficile...

« On partage un rectangle en dix-huit dans un sens et en trente quatre dans l'autre, combien de morceaux élémentaires obtient-on ? »

Le problème peut commencer à advenir comme type de question de dénombrement, si vous savez par exemple les réponses pour des rectangles plus petits de huit sur vingt, dix sur quatorze, etc. : vous chercherez en effet à former une réponse à partir des problèmes précédents que vous avez résolus, reconnaissant par là que le problème appartient à la même catégorie. A quoi la catégorie se connaît-elle? A la procédure d'énumération, qui relève d'un art tant qu'elle n'est pas identifiée parce qu'aucune technique de production de la collection d'individus organisable en une liste n'a été nommée, comme nous l'avons fait pour les patrons du cube. Mais le dernier problème ouvre sur une technique de désignation des rectangles qui ressemble à celle que nécessite le dénombrement des patrons du cube : il ne faut pas décrire ces types d'objets spatiaux par leurs sommets mais par leurs bords (plans/faces dans l'espace ou arêtes/droites dans le plan). La différence entre le dernier problème et le précédent montre que les questions de dénombrement dépendent de l'opération élémentaire matérielle qui produit les objets à dénombrer. Les cas où ces objets ne sont pas précisément matériels sont bien plus difficiles (comme celui des rectangles tracés), parce que nous n'en avons pas l'expérience.

Et puis, pour mieux comprendre comment les conditions ordinaires d'une institution scolaire limitent l'envergure des questions mises à l'étude, posons le problème suivant :

" Multiplier, par le procédé de votre choix, le nombre de 23 chiffres suivant 39587100985672987193375 par le nombre de 33 chiffres que voici 765584937728347927911205474638992, en vous donnant les moyens de garantir votre résultat"

Il appartient à la même classe (mais si!), et sa résolution est grandement aidée par cette indication : dans ce cas, non seulement le savoir "multiplier deux nombres" est le résultat

de l'étude du problème du rectangle, mais les connaissances venues de l'expérience de la recherche que ce problème provoque sont utiles dans le cas où l'algorithme socialement connu s'avère insuffisant.

Et pour bien me faire comprendre, voici deux problèmes proposés comme « problèmes ouverts » par des membres de l'IREM de Lyon de retour du congrès de la CIEM à Berkeley, en 1980 (source : Bulletin inter-IREM 1984). Ces problèmes permettraient de « Chercher, Essayer, Conjecturer, Découvrir, Prouver » et on trouve toujours, à Lyon, une équipe travaillant sur les « problèmes ouverts » qui font, nous l'avons vu hier, d'excellents moyens d'observation du travail d'étude mais qui sont en général des moyens d'enseignement parfaitement détestables :

Problème 1) « On donne un rectangle de dimensions n et p tracé sur un quadrillage unité. Combien de carrés unité traverse la diagonale du rectangle? (exemple dessiné, rectangle 10×4) »

Problème 2) « Etant donnés trois nombres positifs a , b , et c , est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres? Si ce n'est pas toujours possible, quelles conditions doivent vérifier ces nombres pour que ce soit possible? »

Comment se résolvent-ils? À quoi cela sert-il de les résoudre? Les poser permet de répondre à quels enjeux d'enseignement? Les résoudre, est-ce faire des mathématiques? Cela n'est pas dit, dans le texte qui les présente aux professeurs. Alors, pourquoi les leur proposer?

Dans le cas du rectangle découpé en rectangles élémentaires, vous saviez les réponses possibles : c'est *un problème de multiplication*, le résoudre sert à apprendre à faire toutes les multiplications usuelles, en apprenant comment le décomposer en produits partiels dont on fait la somme, mais aussi à identifier les questions de dénombrement de collections disposées en rectangles comme des *questions de multiplication* et à répondre par une multiplication au problème « Paul a trente quatre chemises et dix-huit cravates, de combien de manières différentes peut-il les coordonner? » dès que vous aurez eu l'idée d'organiser chemises et cravates en un tableau rectangulaire de trente quatre sur dix-huit dit « tableau cartésien ».

Mais le problème ne répond pas tel quel à ces enjeux: il faut encore que le professeur enseigne c'est-à-dire, qu'il désigne aux élèves le type de problèmes associés, en le préparant par les problèmes élémentaires relatifs par exemple ici à huit sur vingt et dix sur quatorze qui eux-mêmes... et qu'il poursuive l'enseignement en le faisant suivre d'autres problèmes permettant aux élèves d'explorer et d'étudier l'algorithme de la multiplication. Cela suppose que la catégorie « problèmes de multiplication » soit identifiée et que son exploration systématique ait été explicitement mise au programme de travail des élèves (enfin, on peut leur demander de produire eux-mêmes et d'apporter des problèmes de multiplication des types les plus divers). Les travaux sur ce point sont nombreux, publics, et connus.

Les problèmes dits ouverts ne sont pas du même niveau. L'un conduit à éprouver dans le monde physique une propriété de géométrie plane qui énonce l'impossibilité de la construction d'un triangle, dans certains cas (le problème change, sur une sphère): "Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite". Mais ce problème ne fait sens que si une technique de construction validée par une théorie est déjà connue appartient au milieu de la situation que le problème ouvre. Le premier conduit sur des voies inconnues même s'il mériterait l'exploration qu'il ouvre, en raison de son esthétique.

En classe, il faut faire faire des mathématiques *pour les enseigner*. Je reprends ici l'idée de François Conne. Mais cela ne suffit pas tout à fait. Car pour apprendre, il faut le plus souvent être enseigné: seuls les mathématiciens professionnels ont pour métier d'apprendre les mathématiques par eux-mêmes. *Pour que les élèves résolvent une question et pour cela, produisent des mathématiques, il faut comme toujours que le professeur enseigne, c'est-à-dire par exemple, qu'il organise le passage du problème initial à un problème numérique en proposant un modèle pour son traitement. Il va donc devoir organiser la mise en commun des résultats obtenus par différentes équipes, jusque-là concurrentes dans la première exploration. Il ne fait pas cette mise en commun parce que c'est "la synthèse du travail de groupe" ou "l'institutionnalisation de la séance". Il le fait pour engager les élèves dans l'usage d'une forme mathématique permettant de progresser dans la résolution du problème particulier posé et si possible, de quelques problèmes de la même classe de problèmes.*

Ce changement de registre, comme on dit paraît-il dans le Nord, induit un changement de cadre, comme on dit à Paris, qui se décrit tout aussi bien comme *passage du système étudié à son modèle*, ou encore comme *passage de l'expérience à son compte-rendu*, dirait

Lebesgue (si on veut faire de la didactique dans le cadre des mathématiques, autant utiliser le lexique des mathématiciens et être compris d'eux). C'est en tout cas ce que l'on appelle *un geste d'enseignement*. Sa nécessité a été identifiée depuis plus de trente ans par les didacticiens, c'est même le passage de l'action à la formulation, comme on dit du côté de Bordeaux. Mais pour en imaginer la nécessité il faut comprendre comment et pourquoi les mathématiciens inventent des mathématiques, il ne suffit pas de savoir résoudre soi-même le problème. D'autant que le travail du professeur ne s'arrête pas là, puisqu'il doit assurer les liaisons entre ce que ce travail permet d'apprendre, en rapport à ce que l'activité d'hier a permis de savoir et ce que l'activité de demain enseignera à la classe.

C'est pourquoi le professeur devrait être en droit de demander quel est l'intérêt de poser ce problème aux élèves si, comme dans le cas où il est posé en CE2, on ne cherche pas le TYPE DE QUESTIONS DE DENOMBREMENT auquel le problème appartient, pour voir par exemple qu'il relève d'une multiplication répétée ou exponentiation. Imaginons en effet qu'on ne le cherche ni pour apprendre que c'est un problème d'exponentiation ni pour apprendre à calculer les exponentielles comme multiplication répétées et par exemple, s'apercevoir que l'opération n'est pas commutative, mais qu'on le prenne comme un "problème ouvert", les élèves vont perdre leur temps et la société gaspiller le salaire du professeur.

Car si le professeur ne peut répondre à ces questions, les élèves devront donc apprendre seuls, de leur expérience personnelle de ce problème, que « *pour résoudre certains problèmes, il faut changer de cadre et passer de l'expérimentation dans le monde au travail sur un système symbolique qui modélise les opérations matérielles* (c'est-à-dire, qu'il faut se comporter en mathématicien)? » Si c'est le cas, il faut le déclarer ! Comme dans le cas précédent de la multiplication il faut enseigner l'usage des tableaux de nombres comme moyen de traiter de questions autrement inaccessibles.

Pour aller au terme des réflexions auxquelles nos observations nous conduisent, il nous faut donc introduire cette idée : les savoirs ne sont pas tous de même nature et on peut les distinguer selon le travail de leur production. Ce qui fait qu'on ne peut pas imaginer enseigner de la même manière deux savoirs de natures différentes et qu'il devient nécessaire d'inventer des manières d'enseigner pouvant garantir certaines propriétés des savoirs dont

on vise la transmission. C'est pourquoi le professeur professionnel est capable de varier son "organisation pédagogique" : nos collègues pédagogues de Toulouse l'ont montré. Nous savons pourquoi : le professeur doit agir en fonction des impératifs didactiques qu'il a identifiés.

POUR CONCLURE

A la suite des travaux de Brousseau (1998), nous pouvons dire que les savoirs s'organisent en plusieurs types, et qu'ils sont constitués :

de *théories* ou discours sur le monde de l'expérience,
d' *algorithmes* ou règles d'action dans le monde de l'expérience,
de *routines* ou manières d'agir dans le monde de l'expérience,
d' *expérience* ou connaissances dans le monde de l'expérience.

Chaque type est produit à partir d'un type précédent : la problématisation des *faits* d'expérience produit, par mathématisation, des *résultats* qui se décrivent dans des organisations théoriques. Les résultats sont *démontrés* en théorie (sous la condition de vérité des axiomes et des théorèmes précédemment connus). L'usage systématique des *résultats* théoriques produit, par démathématisation, des *outils* qui se décrivent comme algorithmes. Les outils sont *vérifiés* par ce qu'ils réalisent en pratique (sous les conditions données par la théorie) ; l'emploi usuel des *outils* algorithmiques produit, par désinstitutionnalisation, des *dispositifs* qui appellent des routines ou pratiques. Les dispositifs sont *validés* par ce qu'ils permettent de faire (dans des conditions pratiques diverses, sous le contrôle de la contingence). La mise en oeuvre des *dispositifs* produit, par réinstitutionnalisation, des *faits* qui sont issus de l'expérience, et des connaissances. Les faits sont *prouvés* expérimentalement (dans le domaine de réalité dont une institution donnée traite).

Tout enseignement réalise un équilibre dans cet espace. Mais enseigner des problèmes, des théories, des algorithmes, ou des routines ne se fait pas de la même manière. C'est sans doute cette nécessaire variabilité de l'enseignement attendu qui fait le principal problème *professionnel des professeurs de mathématiques*.

On peut bien sûr essayer d'enseigner des théories sans les problèmes qui les motivent, des algorithmes qui ne sont pas les résultats de l'usage de théories, etc., mais...

- ce n'est pas très motivant, pour le professeur comme pour les élèves, puisque le savoir enseigné n'a pas de motif ;
- c'est coûteux en efforts parce que la composition des gestes élémentaires (dont l'exécution n'est pas sous le contrôle d'une évaluation (théorique, démonstration des résultats, algorithmique, vérification des outils, routinière, validation des dispositifs, ou d'expérience, preuve des faits) appartenant à l'agent, augmente rapidement la complexité de l'action ;
- c'est donc long et pénible pour les élèves, qui ne peuvent pas contrôler leur action et corriger leurs erreurs (Brousseau l'avait déjà dit en, 1973, à propos de la multiplication).

Il faudrait donc enseigner des savoirs qui tiennent solidairement à ces quatre dimensions (routines, expérience, théories, algorithmes) ; et on peut montrer en effet que tout enseignement stable propose un parcours organisé d'une telle organisation mathématique, l'enjeu de l'enseignement et la culture des élèves déterminant les points de départ et d'arrivée du parcours.

Mais nous savons que la difficulté d'un enseignement organisant l'ensemble du parcours n'est pas seulement épistémologique, elle tient aussi à la nécessité de *changer d'activité de référence* chaque fois que l'on change de niveau dans le parcours. C'est ce que déclare par exemple la Théorie des Situations Didactiques (TSD), qui propose trois étapes, pour passer du niveau de *l'action dans un milieu* à la *production de représentations* puis, à la *validation des résultats* obtenus, pour produire des éléments de théorie relatifs à l'action. Mais bien d'autres mouvements sont nécessaires, qui nécessitent peut-être des étapes que la TSD ne nomme pas. Le travail épistémologique à l'usage de l'enseignement manque cruellement aux professeurs qui ont suivi les bonnes idées des didacticiens et de leurs épigones. Certains mathématiciens ont alors beau jeu, en nous dénonçant comme les responsables de certaines difficultés récurrentes des professeurs. On comprend même qu'il se trouve des professeurs pour leur donner raison.