

Devenir professeur de mathématiques : les mathématiques comme problème professionnel

Gisèle Cirade

IUFM d'Aix-Marseille (Université Aix-Marseille I) & UMR ADEF

Résumé. Une étude clinique de la formation dispensée au fil de plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille nous a permis de préciser de divers points de vue le passage problématique de l'état d'*étudiant* en mathématiques à celui de *professeur* de mathématiques. Cette étude montre que, tant en première qu'en deuxième année, l'*univers mathématique* auquel les élèves professeurs sont confrontés se révèle pour eux plein d'embûches à propos de questions souvent inattendues pour l'observateur extérieur, mais que révèlent les dispositifs de la formation observée. Celle-ci constitue un facteur crucial, qui va forcer les élèves professeurs à reconnaître, à assumer et à affronter la problématique des situations rencontrées dans leur vie professionnelle. Les difficultés qu'ils signalent apparaissent à l'analyse comme les symptômes de difficultés qui affectent en réalité *la profession elle-même*, et pas seulement ceux qui y débutent. La formation des jeunes professeurs apparaît ainsi indissociable d'une évolution du métier à laquelle elle peut contribuer par la diffusion, dans la profession où ils entrent, des praxéologies professorales co-construites dans la formation.

Mots clés. Théorie anthropologique du didactique (TAD). Clinique des systèmes de formation. Formation initiale des professeurs de mathématiques. Praxéologies professorales. Problèmes de la profession. Mathématiques pour l'enseignant. Mathématiques pour l'enseignement.

Le travail que nous présentons ici (Cirade 2006) s'inscrit dans le champ des travaux de recherche relatifs aux métiers de l'enseignement et à la formation à ces métiers. Plus précisément, il porte sur la formation initiale des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et s'articule à l'effort systématique développé depuis de nombreuses années pour construire à l'IUFM d'Aix-Marseille une formation des professeurs de mathématiques⁹⁰ répondant à certaines exigences que nous serons amenée à évoquer dans cet article.

90. Sur cette formation, nous renvoyons à une présentation effectuée en juin 2006 (Chevallard & Cirade, à paraître).

Nous sommes partie d'une question qu'on peut formuler naïvement ainsi : « Quelles difficultés rencontre-t-on quand, étudiant en mathématiques, on décide d'aller vers le professorat de mathématiques ? » Du vaste programme qu'ouvre cette question, nous n'avons bien sûr réalisé qu'une petite partie, mais en étudiant des aspects qui nous ont paru essentiels car situés au fondement du métier et donc déterminants pour ses évolutions possibles. Pour accomplir ce travail, nous nous sommes placée dans le cadre de la *théorie anthropologique du didactique*, sur laquelle Yves Chevallard a récemment présenté une synthèse (Chevallard, à paraître). Cet outillage théorique nous a conduite à reformuler la question précédente dans les termes que voici : « Quelles sont *les conditions et les contraintes* sous lesquelles s'effectue le passage de l'état d'étudiant en mathématiques à l'état de professeur de mathématiques exerçant en collège ou en lycée ? » Nous nous sommes arrêtée sur deux grands systèmes de conditions et de contraintes qui pèsent sur la dynamique de professionnalisation étudiée : d'une part, les conditions et contraintes dues à la *profession* de professeur de mathématiques, d'autre part, les conditions et contraintes exercées par la *formation initiale* – en IUFM – des professeurs. Ce sont ces conditions et contraintes qui sont au cœur de notre recherche, conçue comme relevant d'un *clinique des formations* – qu'il s'agisse de formations professionnelles, de formations scolaires ou de formations universitaires par exemple.

Précisons ici quelques repères par rapport auxquels nous situerons ensuite la mise en œuvre des techniques cliniques employées. La formation professionnelle que nous avons observée au long de plusieurs années est celle des élèves professeurs de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille, sur les deux années dont elle se compose. En 1^{re} année, ces élèves sont donc des étudiants préparant le CAPES⁹¹ de mathématiques, tandis qu'en 2^e année ce sont des professeurs stagiaires qui ont en responsabilité une classe de collège ou de lycée. Depuis plusieurs années, nous avons pu être associée en tant que chercheuse à la vie de cette formation, avec un accès exceptionnel, quasiment libre, à l'ensemble de ses composantes et de ses archives. Ce travail a été facilité par la pratique du responsable de la formation, ainsi que de son équipe, de mettre par écrit l'essentiel du travail accompli avec les élèves professeurs, tant en première qu'en deuxième année. Soulignons en particulier l'importance de cette mise en texte du savoir élaboré dans le cadre de ce qui est le cœur de la formation des professeurs stagiaires (c'est-à-dire des élèves professeurs de deuxième année), le séminaire dit *du mardi matin*, qui s'est déroulé chaque année, sauf exception, au

91. Le CAPES est le *certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré*.

long de vingt-quatre séances de trois heures : ce séminaire est l'un des « personnages » clés de la formation, et donc de nos propres analyses.

L'étude clinique que nous avons conduite s'est donné pour objet la *parole* qui circule au sein de la formation étudiée : parole de *formés*, parole de *formateurs*, parole de ces *professionnels de terrain* que sont les professeurs conseillers pédagogiques, maîtres de stage des élèves professeurs de 2^e année. Pour saisir la parole des formés et de leurs formateurs, nous avons en particulier exploité un dispositif interne à la formation, celui des « *questions de la semaine* », auquel fait écho le « *forum des questions* », où formés et formateurs ont tour à tour la parole, sous une forme écrite ou rapidement mise par écrit. Quant à la parole des professionnels de terrain, c'est à travers les rapports rédigés par les maîtres de stage en vue de la formation et de la validation des professeurs stagiaires que nous y avons eu accès.

Les traces écrites sur lesquelles nous avons travaillé ont ainsi dans notre étude, en tant que matériel clinique, un double mérite : d'une part, elles n'ont pas été sollicitées par le chercheur, d'autre part elles n'ont pas davantage été rédigées en vue de contribuer à répondre à la question que le chercheur étudie. Par ailleurs, pour des raisons tout à la fois de problématique et de méthode, c'est sur la parole des formés que nous avons mis essentiellement l'accent du point de vue de l'analyse. Cependant, il convient de souligner que la dynamique de la formation tresse la parole des formés avec celle des formateurs et que, sans la formation, sans le dispositif des « questions de la semaine », sans le « forum des questions » qui lui fait écho, cette parole des formés n'existerait pas.

Pour exploiter le matériel recueilli, nous avons mis en œuvre une technique qui combine l'examen de la parole d'acteurs du système (les maîtres de stage, les stagiaires), la parole de collectifs suivis sur une brève période – notamment le collectif des professeurs stagiaires –, la parole de collectifs suivis sur une plus longue période – mais à propos d'un objet particulier. Dans notre travail, nous avons successivement étudié les élèves professeurs face aux normes et à la normativité de la profession, face à l'univers mathématique du CAPES, face aux mathématiques à enseigner dans leur classe en responsabilité et, enfin, au chevet de leur classe en responsabilité. Ce sont ces différents volets de l'étude que nous allons maintenant présenter succinctement, en mettant l'accent sur les conditions et contraintes auxquelles les élèves professeurs sont soumis, tant de la part de la profession que du fait de formation initiale reçue à l'IUFM.

1. Face aux normes et à la normativité de la profession

L'exercice du rôle d'enseignant est un véritable métier. Il a ses normes que, au moment d'entrer dans la profession enseignante, les élèves professeurs doivent identifier et tenter de faire leur, en les modifiant éventuellement. Le cœur du problème est la question de la *normativité*⁹² professionnelle, et de la normativité *professorale* en particulier. Pour cette raison notamment, l'exploration du système de normes prévalant, d'une part, et l'exploration des conduites adaptatives des jeunes professeurs à l'endroit de ces normes établies, d'autre part, apparaissent *a priori* fortement solidaires. Que sont les normes qui règlent et régulent l'action et la pensée des professeurs de mathématiques aujourd'hui ? Sans doute faut-il être à cet égard très prudent : même s'il existe des invariants « lourds », à forte inertie, il existe aussi des évolutions normatives variées, qui parfois se côtoient au sein d'un même établissement en s'ignorant les unes les autres. Il apparaît en conséquence non déraisonnable de parler d'un « maquis normatif », avec lequel le jeune professeur va devoir se familiariser en ne sachant pas toujours ce que recèlent ses entrelacs. C'est ce maquis normatif que nous avons exploré, de manière toujours partielle et parcellaire, afin d'identifier la suite quelque peu sous-déterminée des situations problématiques que le nouveau venu dans la profession devra affronter.

Pour ce faire, nous avons choisi comme matériels les rapports rédigés par les maîtres de stage sur l'activité des élèves professeurs de deuxième année⁹³, en exploitant plus particulièrement les rapports rédigés durant l'année 2003-2004, où la promotion comportait 64 stagiaires. Dans ces rapports, rédigés tout à la fois à l'adresse du stagiaire et de l'institution de formation, on voit se dessiner en creux des normes de la profession, telles que les maîtres de stage les évoquent, soit pour dire que le jeune professeur aura su les reconnaître et les mettre en œuvre de manière pertinente, soit pour signifier que, au contraire, il n'aura pas su s'y conformer, au moins provisoirement. Nous avancerons donc à pas comptés en examinant les exigences de la profession telles qu'elles s'expriment à travers les rapports des maîtres de stage, sans jamais oublier, cependant, que, en tant qu'élèves de l'IUFM, les professeurs stagiaires sont confrontés aussi à la normativité de cette institution de formation qui, en droit comme en fait, constitue l'« école normale » d'aujourd'hui.

92. La *normativité* d'une personne ou d'un collectif désigne ici sa capacité à participer à la critique des normes existantes et à l'élaboration de normes alternatives.

93. Chaque professeur stagiaire fait l'objet de deux rapports de la part de son maître de stage, le premier vers la fin du premier trimestre, le second vers la fin du deuxième trimestre.

1.1. Vignettes monographiques

Pour donner une idée du « maquis normatif » que nous avons mentionné, nous commencerons par présenter succinctement certains résultats de l'examen de quelques rapports composant le corpus étudié. Considérons tout d'abord le cas de Ruddy, jeune professeur ayant en responsabilité une classe de 4^e. Voici un extrait du premier rapport rédigé par son maître de stage.

J'ai pu constater que Ruddy respecte le programme, rédige ses préparations. Les devoirs de maison sont nombreux, bien calibrés et bien diversifiés. Ces devoirs ainsi que les contrôles sont annotés de façon constructive.

On saisit, à travers l'éloge de Ruddy, le défilé des exigences normatives : un professeur doit *respecter le programme, rédiger ses préparations, prévoir des devoirs à la maison « nombreux, bien calibrés et bien diversifiés »*, il doit *annoter les devoirs et contrôles de façon constructive*. Comme presque toujours, cependant, on constate ici l'existence de normes sans pour autant que leur contenu opérationnel soit clairement précisé. Que signifie ainsi par exemple l'exigence de proposer aux élèves des devoirs à la maison nombreux, bien calibrés et bien diversifiés ? Là-dessus, les rapports des maîtres de stage ne fournissent pas de renseignements plus précis, alors que, ainsi que nous le verrons ultérieurement, ce sont là des questions qui vont se révéler durement problématiques pour les élèves professeurs.

Bien d'autres points sont mentionnés dans ce premier rapport : ils forment un inventaire hétéroclite qui va des aspects les mieux maîtrisés par Ruddy aux aspects sur lesquels des progrès sensibles sont attendus de lui. Voici le dernier alinéa de ce rapport d'étape.

Ruddy a le souci de bien faire et je suis persuadée qu'il résoudra très vite ses points faibles et deviendra, l'expérience aidant, rapidement autonome.

La maître de stage conclut ce premier rapport en se disant persuadée que Ruddy deviendra rapidement autonome. En réalité, les relations entre Ruddy et sa maître de stage ne sont pas au mieux : concluant son rapport final, cette dernière avouera sans détour regretter que Ruddy n'ait pas su prendre en compte ses remarques et ne lui ait pas communiqué ses préparations – ne serait-ce que « pour éviter certaines erreurs et [pour] avoir une réflexion plus approfondie face à ses élèves ». Ruddy, donc, se croit capable d'autonomie alors même qu'il aurait le plus grand besoin de conseils avisés. On voit là apparaître une analyse qui, semble-t-il, ne peut à l'heure actuelle que rester confinée au cas de stagiaires : on voit mal un professeur en exercice reconnaître que, par delà son autonomie obligée, il aurait besoin

de conseils précis sur le quotidien de son travail ! La norme, profondément intériorisée par beaucoup de professeurs, est que chacun doit trouver *en lui-même* les ressources qui lui permettront d'affronter les difficultés surgissant jour après jour ; et c'est de cette norme même que la maître de stage paraît s'autoriser, subrepticement, pour dire que, dès lors qu'il « a le souci de bien faire », Ruddy saura devenir très vite autonome.

Continuons avec un autre exemple, celui de Sabrina, jeune professeure ayant en responsabilité une classe de seconde. Dans son premier rapport, le maître de stage écrit.

Sabrina dans ses préparations bien dosées et rédigées paraît exigeante avec elle-même ; les documents personnels qu'elle utilise ne sont pas lus, on sent une réorganisation permanente en fonction de la réaction des élèves, et au fur et à mesure que s'étend son autorité sur la classe (il n'est pas commode d'être une « stagiaire » !) elle prend un peu plus de distance par rapport à ses belles préparations écrites mais statiques par nature.

On retrouve là une des exigences déjà rencontrées : la rédaction des préparations. Mais la suite de l'extrait complète le sens à donner à une telle exigence. Sabrina « prend un peu plus de distance par rapport à ses belles préparations écrites mais statiques par nature ». La rédaction des préparations ne suffit donc pas : le professeur doit savoir ensuite prendre par rapport à elle une distance indispensable. Mais ce que dit surtout le rapport, c'est que le professeur doit effectuer une *réorganisation permanente de son enseignement en fonction des réactions des élèves*. On voit ainsi se dégager une norme que l'ensemble des rapports examinés confirme, et qui semble bien être au cœur de la culture enseignante d'aujourd'hui : les élèves sont l'alpha et l'oméga du travail du professeur, le critère ultime, la pierre de touche essentielle, par rapport à quoi tout prend son sens. Sans doute faut-il voir ici un effet de l'état historique du métier dans lequel, faute de critères *théoriques* reconnus et largement acceptés, le seul repère bien partagé est celui de l'*engagement* des élèves dans le travail proposé – sans qu'il soit besoin même de parler de leur réussite.

1.2. Un exemple : la question des programmes

Abandonnant les vignettes monographiques, nous présenterons maintenant, sur la question des *programmes*, quelques aspects des normativités qui s'expriment, émergent ou affleurent dans les rapports des maîtres de stage. Cette question semble, *a priori*, toute simple. Il n'en est rien. La norme, sur ce point, est composite, et en évolution. Dans la culture professorale telle qu'elle se donne à entendre, le « *respect* » des programmes s'affiche comme une exigence essentielle, liée à l'angoisse de ne pas « *finir* » le programme et au désagrément de se rendre compte, après quelques mois de classe, que, décidément, on ne le « *finira* » pas !

Ce qu'est ce « programme » qu'il faudrait respecter et qu'il faudrait finir n'est cependant pas tout à fait clair. Son évocation souffre d'ailleurs d'une anomalie étrange : il ne s'agit pas tant, entend-on, de respecter *le* programme que de respecter *les programmes* – et cela même quand le locuteur « natif » se réfère à un programme bien déterminé, celui qui vaut pour sa classe de seconde ou de troisième par exemple ⁹⁴. Le programme auquel on se réfère, que l'on mentionne, que l'on vitupère, ressemble parfois à une entité semi-légendaire que l'on ne connaît que par ouï-dire. Le stagiaire à qui s'impose l'exigence – présentée comme allant de soi dans sa formation à l'IUFM – de se reporter à chaque instant au texte précis du programme et du document d'accompagnement qui lui est associé pourra découvrir avec un peu d'étonnement que, derrière l'évocation « des programmes », se cache quelquefois, peut-être plus fréquemment qu'il n'est porté à le croire, une méconnaissance du texte du programme que, d'ailleurs, dans la profession telle qu'elle s'offre à son regard, on n'a pas toujours à portée de la main et qu'on regarde souvent comme une simple *check-list*, contraignante, certes, mais inutile pour concevoir et réaliser l'enseignement attendu. Par contraste avec cette norme ancienne, qui semble être aujourd'hui encore largement dominante – le programme comme carcan dont il faut supporter la tyrannie, et non comme outil didactique au service des professeurs et des classes –, le professeur stagiaire rencontre une norme encore minoritaire qu'illustrent quelques rares maîtres de stage et dont la présence résulte sans doute en partie de la percolation normative impulsée par la formation donnée à l'IUFM. Selon cette norme, il ne faut pas seulement « respecter » le programme ⁹⁵, mais *se référer systématiquement à lui*, le connaître par une fréquentation prolongée, répétée, et par un questionnement permanent portant en particulier, au collège, sur les « compétences exigibles » (ou, en seconde, sur les « capacités attendues ») ainsi que sur les notions et résultats qui les sous-tendent, le tout étant situé par rapport aux tenants et aboutissants de l'enseignement à prodiguer – acquis antérieurs, résultats à démontrer ou à admettre, emplois principaux de ces résultats, etc. On conçoit que, au confluent de ces deux orientations normatives, le stagiaire ressente un certain trouble devant des messages subtilement divergents, et fondamentalement incompatibles, que les institutions qui assurent son entrée dans le métier lui envoient de façon tantôt explicite, tantôt subliminale.

94. Dans le corpus examiné, sur les 56 maîtres de stage qui évoquent le programme de la classe dont leur stagiaire a la responsabilité, seuls 23 d'entre eux le font correctement – en utilisant le singulier. Les autres font référence aux *programmes*, aux *programmes officiels* ou encore au *BO*.

95. Le mot de « respect » est ici ambigu : il désigne certes une attention à l'endroit de ce que l'on respecte, mais aussi une réserve caractéristique. Respecter, c'est demeurer extérieur, en quelque façon, à ce que l'on respecte.

1.3. Bruissements mathématiques

L'exploration à laquelle nous avons procédé permet ainsi de repérer un vaste ensemble de conditions et de contraintes relatives à l'organisation de l'étude et au métier de professeur – et en particulier l'exigence de la profession quant à la force de l'engagement du professeur au service de l'engagement didactique des élèves. Mais on constate aussi que, si la référence aux mathématiques n'est pas complètement absente des rapports des maîtres de stage, elle n'en constitue pas de façon manifeste l'axe principal. Si l'examen attentif du corpus recueilli révèle en effet un *bruissement constant du souci mathématique*, ce souci demeure exprimé à travers des principes didactiques plutôt qu'illustré sur un matériel mathématique déterminé, comme en témoigne parmi d'autres l'extrait suivant.

À ma dernière visite, [la professeure stagiaire] fit des exercices sur les pourcentages, la mise en équation et la résolution de ces dernières. Les exercices étaient très bien choisis, permettant un débat sur la résolution par des choix différents d'inconnue. Des élèves, d'habitude inactifs et un peu rebelles aux mathématiques participaient à mon grand étonnement à la résolution et à la rédaction des exercices. Dans la classe les élèves travaillaient seuls ou par deux, cela faisait un peu de bruit, mais tous parlaient de maths.

Quelquefois, les rapports se bornent à décrire le contenu mathématique, sans un seul mot de commentaire.

On commence par une activité sur les valeurs exactes et les valeurs approchées où l'on remplit un tableau pour les nombres $\frac{2000}{7}$, $\frac{\pi}{58}$, $2 - 5\sqrt{6}$, ensuite on compare $A = 5\sqrt{2} + 7$ et $B = \frac{1}{5\sqrt{2} - 7}$, enfin un travail est proposé pour montrer les limites de la calculatrice en cherchant à comparer $\sqrt{2}$ et $\frac{911664}{665857}$. La séance s'est bien déroulée.

Rien, ici, ne semble problématique. La description est celle d'un univers évident, transparent, qui va de soi. On verra plus loin que rien n'est plus faux.

1.4. Refoulement de la problématique mathématico-didactique

Entrer dans le métier, ce serait donc, pour les élèves professeurs tels que les regardent leurs maîtres de stage, se soumettre à certaines règles, à certaines normes consubstantielles au métier. Mais ce que vont découvrir les professeurs stagiaires lors de leur formation, c'est que ces règles ne sont pas elles-mêmes définies de façon univoque, au point qu'elles semblent parfois insaisissables et, quand on les découvre, inattendues. Pour ce qui est des contenus mathématiques, ainsi, ce que révèlent les corpus étudiés, c'est un *refoulement de*

la mise en débat des mathématiques : on n'en parle guère entre gens de métier, pour cette raison définitoire que chacun est censé les bien connaître. Or les élèves professeurs vont découvrir plus ou moins vite que, dans des contextes et des modalités renouvelés, les mathématiques seront indéfiniment un problème, sinon *le* problème, du métier qu'ils embrassent. Mais avant cela nous allons revenir un instant en arrière, au moment où le futur professeur est encore un étudiant, élève de 1^{re} année de l'IUFM préparant le CAPES de mathématiques.

2. Face à l'univers mathématique du CAPES

D'une façon générale, les problèmes évoqués à travers les rapports des maîtres de stage sont, en première année, presque complètement passés sous silence. Les seuls problèmes véritablement soulevés sont les problèmes mathématiques que peut rencontrer un candidat au CAPES. Notons tout d'abord une conséquence de cet état de choses : du fait que le travail sur les questions professionnelles autres que strictement mathématiques n'existe guère, les préparateurs se trouvent confortés dans leurs idées préalables sur l'enseignement et dans l'idée, surtout, que ces idées échappent par nature à un travail systématique, rationnel et scientifiquement informé.

Ici, l'étude clinique va s'appuyer sur deux types de matériels. Tout d'abord les *questions* posées par les élèves professeurs dans le cadre du dispositif des « questions de la semaine ». Le corpus ainsi recueilli sur un peu plus de six années comporte près de 2000 questions. Chaque semaine, les préparateurs sont invités à répondre par écrit, individuellement, à la sollicitation suivante : « Formulez brièvement une difficulté à laquelle vous vous êtes heurté, ou une question que vous vous êtes posée (dans le cadre de la préparation...) » Les questions posées sont regardées, non comme des difficultés personnelles singulières, mais comme des difficultés *liées à la profession*, et plus précisément à *l'entrée dans la profession*, préparation au concours de recrutement incluse. Les autres matériels à valeur clinique sont les *éléments de réponse* apportés dans le cadre du forum des questions et mis par écrit. Ces éléments de réponse ne constituent pas tant une réponse à l'auteur de la question – lequel a d'abord le mérite d'avoir rencontré la difficulté qu'il rapporte – qu'une ébauche de réponse à la *question* posée. Les matériaux de réponse ainsi apportés permettront à chacun de s'engager dans la construction d'une réponse personnelle. Voici d'abord un tout petit florilège de questions recueillies, qui, comme on le verra, peuvent être très diverses :

1. Peut-on mettre l'oral de côté jusqu'à ce qu'on ait passé l'écrit ?
2. Quelle est la définition exacte d'un polygone régulier *convexe* ?
3. Comment montre-t-on que toute fonction continue admet une primitive (sans utiliser la théorie de Riemann). (Lors de la leçon 88 d'oral 1, on donne ce résultat en théorème, au début de la leçon.)
4. Axiome du choix ? Quel en est l'énoncé exact et quelles sont ses applications ?
5. Dans la leçon « Construction de $\mathbb{C}$ », n'est-il pas indispensable de faire une introduction historique ? (des avis divergent à ce propos).
6. Comment montrer de « manière élémentaire » que la dérivée de sinus est cosinus ?
7. Comment définir de manière intuitive un angle orienté ?
8. Quelles sont les « diverses » géométries et leurs axiomes fondamentaux, leurs différences (géométrie euclidienne, de Hilbert, ...) Quand utiliser quoi ?

2.1. Une position un peu excentrée par rapport aux mathématiques

En parcourant les questions, on note bien souvent, de la part des préparateurs, une *position un peu excentrée* par rapport aux « mystères » mathématiques auxquels ils se heurtent. Ces mystères semblent en effet n'exister pour eux que parce qu'une information adéquate leur manquerait. Les mathématiques ne seraient pas en elles-mêmes problématiques ; c'est une diffusion inappropriée des bonnes solutions aux problèmes rencontrés – solutions censées exister quelque part – qui serait la cause principale du mal. Ainsi d'assez nombreuses questions soulèvent-elles le problème des *médias*⁹⁶ – « cours », « rappels de cours », sources imprimées ou, désormais, électroniques, etc. – censés permettre de disposer d'une information juste, pertinente, adéquate. Nous prendrons ici pour exemple la question suivante.

Ceci n'est pas vraiment une question mais plutôt un souhait. Pour les probabilités et les statistiques, je voudrais savoir si l'on va avoir de vrais cours (ou tout au moins de sérieux rappels de cours) car

96. En théorie anthropologique du didactique, on nomme *média* tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public (le cours du professeur de mathématiques, le prêche d'un clerc, le journal d'un présentateur de télévision relèvent en ce sens du système des médias au sens large). La notion de média fait couple avec la notion de milieu : un *milieu* (« adidactique ») est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention (« didactique ») dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite (il faut alors interpréter son comportement de « réponse »), à telle question déterminée. Il se comporte à cet égard comme un fragment de nature. Par contraste, pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, un média peut fort bien, à propos de telle question, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel. Le caractère de milieu ou de média n'est nullement intrinsèque : il dépend de la question que l'on pose au système et de la manière de la lui poser. C'est ainsi que les rapports des maîtres de stage évoqués plus haut constituent dans une large mesure un milieu par rapport à la question « Que sont les normes de la profession de professeur de mathématiques ? ».

c'est un domaine assez complexe, relativement nouveau dans les programmes, qui nécessite des définitions précises et des explications claires.

Les préparationnaires apparaissent par contre peu enclins à demander des interactions de travail sur les documents écrits mis à leur disposition. Sans doute assimilent-ils les types usuels d'interactions avec les préparateurs – cours en amphithéâtre, séances de travaux dirigés, etc. – à de simples moyens de se faire communiquer une matière sur laquelle ils envisagent alors de travailler seuls. L'apprentissage est ainsi vécu comme une affaire personnelle, même si le matériau à œuvrer s'obtient préférentiellement par le truchement des séances de cours ou de travaux dirigés.

Au fil des questions on voit aussi que, devant toute interrogation qui peut surgir, la tendance des préparationnaires est de se référer à un *point de vue supposé*, celui du jury du CAPES, qui apparaît comme l'instance suprême et unique de véridiction, même s'il n'est ni simple ni facile d'accéder à ses « verdicts », comme en témoigne la question suivante, où le jury semble regardé comme l'unique *milieu* auquel on puisse confronter ses interrogations et ses incertitudes.

L'année dernière lors de la deuxième épreuve orale, le jury m'a demandé si l'on pouvait définir une fonction à partir de sa représentation graphique (plus précisément, j'avais donné des allures de courbes représentatives de fonctions assez quelconques dans un exercice et je proposais des résultats sur les fonctions en question). J'ai répondu que oui ; une application de E dans F est un sous-ensemble de $E \times F$. Apparemment, ce n'était pas la bonne réponse mais je ne sais toujours pas pourquoi...

On trouve ici le prolongement d'une situation anciennement rencontrée, longuement fréquentée, où l'étudiant a eu pour milieu essentiel le point de vue de ses professeurs, avec pour contrepartie négative une éducation au bon usage des milieux souvent indigente, y compris, en mathématiques, s'agissant du recours à la déduction dans un système hypothético-déductif, c'est-à-dire à la démonstration. Le professeur en formation ne maîtrisera donc pas le système des milieux qui lui serait nécessaire pour accéder à une certaine autonomie en matière de décision mathématique. La chose ne sera que plus vraie encore s'agissant de décision didactique.

2.2. Vers l'idionomie

Il apparaît que la croyance première en l'existence d'une loi indiscutable fait que, dans un premier temps logique, sinon chronologique, les préparationnaires vont rechercher à toute force le *nomos* caché, la règle, la loi à laquelle il « suffirait » de se conformer, et qui doit

bien se trouver quelque part. Cette croyance première conduit ainsi les préparationnaires à soumettre – de façon mi-imaginaire, mi-réelle – leur propre rapport aux mathématiques au rapport supposé d'une instance tutélaire – l'institution du CAPES – et donc à avoir, tendanciuellement, non un rapport « direct » aux mathématiques, mais un *rapport au rapport* aux mathématiques de cette instance tutélaire, c'est-à-dire, en fin de compte, un rapport soumis à des contraintes elles-mêmes extra-mathématiques, ce qu'on pourrait appeler un rapport « aliéné », jamais complètement assumé à titre personnel. Quand les préparationnaires découvrent enfin qu'il n'existe pas d'instance régulatrice permettant de dégager des points de vue très largement majoritaires et bien acceptés, devant la défaillance constatée de ce *nomos* d'abord supposé, ils sont tentés d'inventer leur propre loi, de fuir dans ce qu'on nomme en théorie anthropologique du didactique l'*idionomie*, celle-ci étant définie comme la propension, plus ou moins réelle ou fantasmée, à fabriquer ses propres lois et à les appliquer. Cette tentation prépare clandestinement à l'idionomie qui imprègne encore aujourd'hui fortement le métier de professeur.

3. Face aux mathématiques à enseigner

Lorsqu'il prend sa classe en main en début d'année, le professeur stagiaire est confronté à un monde de difficultés : celui des *mathématiques à enseigner*, telles que les programmes officiels les lui désignent. Comme en première année, l'abord clinique s'est appuyé en ce cas sur le dispositif des « questions de la semaine » et du « forum des questions ». Soulignons que, par rapport à la première année, la formation de deuxième année repose *très fortement* sur la dynamique des questions formulées par les élèves professeurs et du travail collectif pour élaborer des réponses à ces questions. Le corpus des questions sur lequel nous avons travaillé contient près de 7000 questions, recueillies sur plus de 5 années.

3.1. Face à la problématique des mathématiques

Ce que montre ce corpus, c'est que les mathématiques à enseigner regorgent de difficultés pour les élèves professeurs. Le contraste est à cet égard très net avec les rapports des maîtres de stage dont nous avons parlé plus haut. Ce « refoulement » de la problématique mathématique s'inscrit bien évidemment dans les questions formulées par les stagiaires. Elle y est versée tantôt du côté des *programmes*, tantôt du côté des *élèves*. Nous commencerons par une première question attribuant cette problématique aux *programmes*.

Doit-on parler de la « fraction » $\frac{2}{3}$ ou de « l'écriture fractionnaire » $\frac{2}{3}$ en classe de 4^e ? Il me semble que l'on parle de fraction lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers (non nul pour le dénominateur), et le terme « écriture fractionnaire » est réservé aux quotients de décimaux (non nuls). Cette distinction ne semble pas aussi nette dans les programmes ni chez les collègues. Qu'en est-il exactement ?

Le point de vue exprimé par ce stagiaire semble en vérité prégnant chez nombre de professeurs, qui tentent ainsi de combler *par eux-mêmes* un silence de la culture de la profession, en dépit du caractère relativement clair des indications du programme, qui sont pourtant ici mises en cause. Mais la problématique est aussi versée du côté des *élèves*, comme nous allons le vérifier en examinant une question régulièrement soulevée par les élèves professeurs ayant en responsabilité une classe de seconde, à savoir la question de « l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique ». À cet égard, le programme indique ceci.

La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant $\mathbf{R}$ » sur le cercle trigonométrique.

Le document d'accompagnement précise.

La notion de cercle trigonométrique sera introduite ici. Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels *s'enroule* sur le cercle et comment varient les projections de l'extrémité d'un arc AM en fonction de la longueur de cet arc.

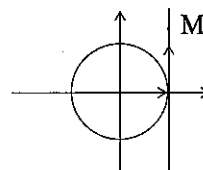
Il s'avère que ces passages ne peuvent guère être lus par un élève professeur d'aujourd'hui, qui, sauf exception, ne dispose pas des connaissances mathématiques nécessaires pour voir clairement ce dont il s'agit, ainsi qu'en témoigne la question suivante.

Le fait d'enrouler la droite réelle sur le cercle unité est une expérience. Il n'existe pas de transformation correspondant à cette expérience. Comment donc légitimer les résultats obtenus ?

Il en est de même des deux questions suivantes qui, de plus, rabattent le problème sur les élèves et, en quelque sorte, le « didactisent ».

1. Que doit-on attendre des élèves [à propos des fonctions sinus et cosinus] ?

Seulement ceci : placer le point m du cercle trigonométrique qui correspond au point M d'abscisse x et en déduire $\cos m$ et $\sin m$?



2. Le programme officiel de 2^{de} préconise l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour expliquer l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Mais comment expliquer cela au tableau, quand on ne peut pas faire autrement ?

Dans la première question, il s'agirait seulement de savoir « ce que l'on peut attendre des élèves », alors que la confusion même commise par l'auteur de la question est révélatrice du dénuement « mathématique » dans lequel il se trouve. Dans la seconde, l'alibi est la non-disponibilité d'un logiciel de géométrie dynamique dont l'usage est officiellement requis et dont l'indisponibilité empêcherait de fournir les « explications » idoines.

Le rôle de la formation sera alors de faire apparaître qu'il y a là autant de faux-fuyants qui organisent l'évitement de la problématique mathématique face à laquelle le jeune professeur ne peut guère attendre de secours de ses collègues ou, plus généralement, de la profession. Celle-ci, comme toute profession, devrait pourvoir aux besoins de connaissances professionnelles de ses membres ; or il apparaît que, sur ces questions comme sur bien d'autres, elle reste désespérément muette (ou, du moins, inaudible).

3.2. Les angles alternes-internes : un problème de la profession

Nous allons maintenant nous arrêter sur un problème mathématique apparemment très élémentaire, qui surgit à propos de la question, étudiée en classe de 5^e, des angles alternes-internes. Voici d'abord l'extrait du programme de 5^e où cette notion apparaît (il s'agit du programme en vigueur jusqu'à l'année scolaire 2005-2006).

Contenus. Caractérisation angulaire du parallélisme

Compétences exigibles. Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante. Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires.

Commentaires. On pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants.

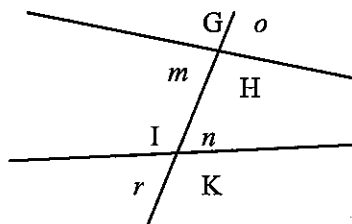
On se trouve ici typiquement devant des mathématiques à enseigner sur lesquelles, sauf exception, le jeune professionnel n'aura pas eu l'occasion de conduire une réflexion appropriée. Or ce que le dispositif des questions de la semaine va permettre de révéler, c'est qu'il faut tout d'abord clarifier ce qu'on appellera, dans la classe, des angles alternes-internes. Voici à cet égard deux questions.

1. Peut-on parler d'angles alternes-internes et d'angles correspondants lorsque les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles ?

2. Quelle définition donner des angles alternes internes ? (Il y a deux possibilités : le cas où les droites sont parallèles et le cas plus général.)

Ces questions, qui se répètent au fil des années, sont prises en charge dans le forum des questions. C'est ainsi que le formateur est amené à présenter une définition donnée dans un manuel de géométrie du niveau collège conforme au programme de l'enseignement court du 18 avril 1947, où la tradition d'enseignement n'a pas encore été sur ce point déstabilisée (elle ne le sera qu'après 1970).

Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, elles forment huit angles ; les quatre angles compris entre les droites se nomment **internes** ou **intérieurs** ; les quatre autres se nomment **externes** ou **extérieurs**.



On appelle **angles alternes-internes** deux angles situés de part et d'autre de la sécante, à l'intérieur des droites et non adjacents. Exemple : les angles m et n , ainsi que H et I .

La réponse est claire. Mais si l'on examine les manuels depuis une vingtaine d'années, on s'aperçoit qu'il y a là le germe d'un *problème mathématique durable de la profession*. En effet, jusqu'à une période très récente, nombre de manuels ne « définissent » les angles alternes-internes que dans le cas où l'on a *deux droites parallèles* coupées par une sécante. Or la caractérisation angulaire du parallélisme appelée par le programme se traduit par deux propriétés que l'on peut schématiquement formuler ainsi.

Soit deux droites coupées par une sécante commune.

1. Si les droites sont parallèles, alors les angles alternes-internes sont égaux.
2. Si les angles alternes-internes sont égaux, alors les droites sont parallèles.

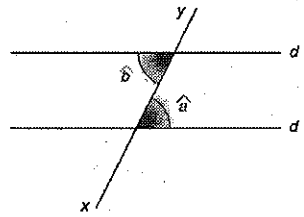
Mais si l'on définit les angles alternes-internes uniquement quand les droites sont parallèles, on ne peut plus ni formuler, ni même *penser* correctement la deuxième propriété. On voit alors certains manuels se tirer de la difficulté par une subtilité de langage, en parlant d'« angles *en position* d'alternes-internes » lorsqu'il s'agit d'énoncer cette propriété (Malaval 1995, p. 170).

UTILISER DES ANGLES POUR RECONNAÎTRE DES PARALLÈLES

(xy) est une sécante aux droites d et d' .

Lorsque l'on sait que $\hat{a} = \hat{b}$

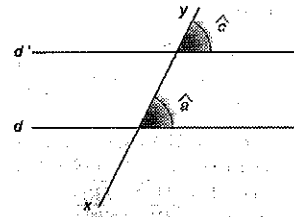
(angles en position d'alternes-internes)



alors on peut affirmer que les droites d et d' sont parallèles.

Lorsque l'on sait que $\hat{a} = \hat{c}$

(angles en position de correspondants)

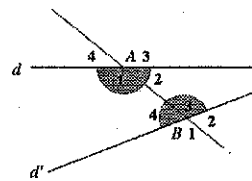


alors on peut affirmer que les droites d et d' sont parallèles.

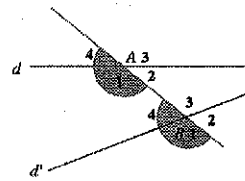
Cette pathologie curriculaire qui a affecté l'enseignement français pendant d'assez longues années tend aujourd'hui à disparaître, les manuels actuels osant de plus en plus présenter la situation « générale » de deux droites non nécessairement parallèles coupées par une sécante (Bordas 2001, p. 186).

c) Angles définis par deux droites d et d' et une sécante (AB)

Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{B}_3$, $\hat{A}_2$ et $\hat{B}_4$ sont alternes-internes par rapport aux droites d et d' et à la sécante (AB).

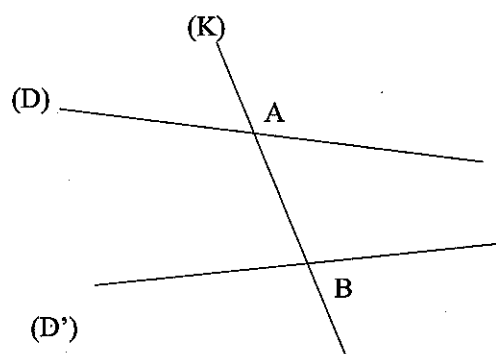


Les angles $\hat{A}_1$ et $\hat{B}_1$, $\hat{A}_2$ et $\hat{B}_2$, $\hat{A}_3$ et $\hat{B}_3$, $\hat{A}_4$ et $\hat{B}_4$ sont correspondants par rapport aux droites d et d' et à la sécante (AB).



En fait, on trouve très tôt, dans le curriculum français, la gêne qui portera certains à parler d'angles *en position* d'alternes-internes. Par exemple, le manuel de 4^e de la collection Brédif publié en 1968 (Wattiaux *et al.* p. 224-227) ne donne guère à voir que le schéma de deux *parallèles* coupées par une sécante, hormis dans un cas, celui de l'étude de la réciproque du théorème selon lequel « deux angles alternes-internes (ou alternes-externes) sont égaux », où, considérant des angles supposés *a priori* égaux sans pour autant que les droites soient supposées parallèles – c'est ce qu'il s'agit précisément de démontrer –, les auteurs écrivent : « On suppose que les angles $x'\hat{A}z'$ et $y\hat{B}z$, dits alternes-internes, sont égaux. » À la même époque pourtant, certains auteurs prennent le parti, non d'éviter la difficulté, mais au contraire de l'affronter sans détour. Ainsi en va-t-il du manuel de 4^e de la collection Cossart et Théron (Théron *et al.* 1969, p. 297). Le texte distingue les droites (D)

et (D'), supposées « quelconques », et la sécante (K). Ensuite, la sécante étant choisie (ou donnée), ce qu'il est facile de définir (parmi les 8 angles déterminés par cette sécante), c'est la relation d'*alternance* : deux angles (parmi ces 8) sont *alternes* si les secteurs angulaires correspondants sont situés de part et d'autre de la sécante (K). Par contraste, la définition du caractère *interne* d'un angle (il ne s'agit plus ici d'une relation binaire entre angles mais d'une propriété de l'angle lui-même) apparaît plus délicate. Les auteurs donnent à ce problème une solution habile, voire élégante, mais qui, pour le débutant, peut apparaître d'abord quelque peu artificielle : un angle (parmi les 8 considérés) est interne si l'une des deux demi-droites qui lui servent de côtés contient le segment [AB], où A et B sont les points d'intersection de la sécante (K) avec les droites (D) et (D').



Tel est le prix à payer, en termes de sophistication mathématique, pour obtenir une définition claire et simple de la notion d'angle interne (et, par négation, d'angle externe). On peut penser que, à la faveur d'une évolution démathématisante qui tend à promouvoir une vision naturaliste des phénomènes géométriques, ce prix à payer est apparu trop élevé, en sorte que l'innocence primitive qui prévalait encore avant la réforme des mathématiques modernes ayant été perdue, il est apparu impossible tout à la fois de ne pas donner de définition et de donner une définition convenable. Faute d'un *definiens* acceptable, le *definiendum* lui-même a donc été occulté, contre la logique même du travail mathématique. Sans s'arrêter plus longtemps sur cette question, on voit que dans ce cas, comme dans bien d'autres, les difficultés rencontrées par les élèves professeurs ne sont pas des difficultés personnelles, mais des difficultés qu'il reviendrait à *la profession*, et non pas à chacun de ses membres, de traiter⁹⁷.

97. Par profession, on désigne un vaste ensemble social comportant, outre les professeurs, les militants associatifs du métier, les formateurs de professeurs, les responsables officiels en matière de formation et d'enseignement et les chercheurs en matière de formation et d'enseignement. Sur la notion de *problème de la profession*, on pourra consulter le journal du séminaire DSMF (didactique des savoirs mathématiques pour formateurs), animé par Yves Chevallard. Ce journal est disponible en ligne à l'adresse suivante : <http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/2006-2007/excursus07.html>.

3.2. Les systèmes de nombres : un immense travail transpositif à prendre en charge

Nous examinerons maintenant une part essentielle de l'univers mathématique, dont l'analyse des questions des élèves professeurs montre qu'elle est une source de difficultés professionnelles toujours recommencées : les systèmes de nombres. Nous présentons une petite partie de ce que nous avons montré à cet égard dans notre travail de thèse, à savoir l'immensité du *travail transpositif* qu'appellerait la prise en charge de ces difficultés par la profession. Plusieurs obstacles importants s'élèvent notamment devant les professeurs en formation. Leur rencontre avec les problèmes liés au système des nombres utilisé concerne tout d'abord les « fractions » et, d'une façon difficilement dissociable, « l'écriture fractionnaire » des nombres, ainsi qu'en témoigne à nouveau la question suivante.

Quelle est la différence entre fractions et écritures fractionnaires ? On m'a dit que les fractions désignaient exclusivement les quotients de nombres entiers, tandis que l'écriture fractionnaire correspond au quotient de deux nombres quelconques. Certains dictionnaires confirment cette distinction mais les fractions rationnelles ne se limitent pas aux entiers et on définit également le corps des fractions d'un anneau intègre quelconque. Qu'en est-il précisément ?

Cette interrogation, qui montre une confusion entre le nombre et son écriture (ou plutôt ses écritures possibles), masque le fait que le recours à l'écriture fractionnaire est engendré par certains *besoins numériques* qui ne peuvent pas être satisfaits par les nombres décimaux. Alors que la construction « moderne » des systèmes de nombres, à son apogée vers 1970 dans l'enseignement secondaire, n'est plus aujourd'hui qu'un souvenir, la construction poussée en avant par les programmes actuels du collège, qui suppose une problématique « réaliste », n'a jamais été véritablement entendue et mise en œuvre par la profession. Le choc avec ce « réalisme numérique » est violent pour les jeunes professeurs, ainsi qu'en témoigne la question suivante.

Pour définir la fraction $\frac{b}{a}$ ($b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}^*$), on dit que c'est l'unique solution de l'équation $a \times x = b$.

Donc, sous-entendu, la multiplication est bien définie ! Mais quelle est cette multiplication ? On définit un objet $\frac{b}{a}$ sur lequel on sait déjà opérer ! En principe, on définit des objets, puis des opérations sur ces objets.

Cette question illustre bien l'erreur de compréhension qu'il s'agit pour le formateur d'éradiquer : l'élève professeur raisonne dans le paradigme « moderniste » au lieu de se placer d'un point de vue « réaliste », où les nombres sont supposés exister comme tels dès

lors qu'ils apparaissent comme la mesure de *grandeurs* à l'existence indubitable. C'est parce qu'on peut couper un segment en trois morceaux de même longueur et qu'on peut considérer le segment formé par deux de ces morceaux qu'on a besoin du nombre $\frac{2}{3}$ pour mesurer la *longueur* du segment ainsi obtenu. Ici, le chantier est immense. La formation dispensée, en faisant apparaître les besoins numériques comme imposés par la nécessité de pouvoir mesurer les différentes espèces de grandeurs va mettre au jour un certain nombre de difficultés qui ne trouvent pas à se résoudre simplement dans la culture professionnelle où ces élèves professeurs font leur entrée. La question des unités de mesure, et notamment de leur rôle dans les calculs à conduire dans les classes de collège, sert en quelque sorte de révélateur de ces besoins, ainsi qu'en témoignent les questions que voici.

1. Une longueur (par exemple la longueur AB) doit-elle forcément avoir une unité ? Peut-on écrire $AB = 3$ sans préciser d'unité ? Dans le cas où l'unité est précisée, les unités doivent-elles figurer dans toutes les étapes de calcul ? Exemples : $AB^2 + BC^2 = 13 \text{ cm} \times 13 \text{ cm} + 20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = \dots$; $AB^2 = 25 \text{ cm}^2$ donc $AB = \sqrt{25 \text{ cm}^2} = 5 \text{ cm} \dots$
2. Lorsqu'on effectue des calculs de distance, de temps ou de vitesse moyenne, doit-on préciser les unités dans les calculs ? Doit-on écrire : $d = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \times 3 \text{ h} = 210 \text{ km}$? Ou bien peut-on écrire : $70 \times 3 = 210$, donc $d = 210 \text{ km}$?
3. Est-il correct d'écrire des unités dans un calcul tel que : $A\hat{O}B = 80^\circ + 12^\circ = 92^\circ$?

D'autres questions font apparaître clairement que de telles pratiques rencontrent des réticences, suscitent des scrupules, se heurtent à des résistances.

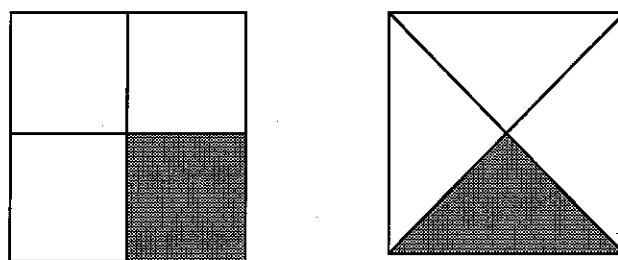
1. Faire apparaître les unités dans les calculs semble n'avoir que des avantages (homogénéité, nécessité des conversions). Mais est-ce légal ?
2. Je me range désormais derrière la possibilité (et même à la nécessité) d'inclure les unités dans les calculs ; mais on ne peut l'exiger encore : en effet, nos élèves doivent savoir que certains professeurs de mathématiques n'en veulent pas...

D'autres questions encore mettent en évidence certains problèmes sensibles que rencontrent les professeurs stagiaires, problèmes qui ont, en partie au moins, motivé historiquement la construction de la théorie des grandeurs.

En 6^e, lorsqu'on introduit les fractions, on « sépare » les fractions en deux groupes. Tout d'abord les fractions inférieures à 1 (et positives) : on parle de $\frac{3}{4}$ d'un gâteau, on coupe le gâteau en quatre parts égales et on en prend 3 parts. Ensuite les fractions supérieures à 1. Pour faire comprendre aux élèves ce à quoi cela correspond, cela me semble plus dur. Avec les deux professeurs avec lesquelles je

travaille pour les 6^{es}, on n'arrivait pas à trouver d'exemples d'emplois de fractions supérieures à 1, si ce n'est la reproduction d'une figure à l'échelle $\frac{6}{5}$ par exemple. Quels emplois peut-on proposer ?

Cette question suscitera dans le forum des questions une assez longue réponse qui insiste d'emblée, avec la plus grande fermeté, sur l'erreur consistant à confondre un certain *objet* – tel un *gâteau* – et telle *grandeur* qui peut lui être associée – tel le *poids* du gâteau. Ce que l'on serait tenté d'appeler « le » quart de gâteau (supposé ici carré) n'est pas défini de manière univoque, comme le montrent les figures ci-après.



Dès lors que cette distinction est faite, c'est-à-dire dès lors qu'on renonce à parler des « trois quarts d'un gâteau » pour parler des « trois quarts du *poids* d'un gâteau », la difficulté évoquée dans la question s'évanouit. En fait, le refoulement de la théorie des grandeurs fait que, dans la culture *mathématique scolaire*, la notion même de grandeur est passée sous silence : le contraste est fort, pour les professeurs en formation, entre les notions regardées par eux comme « strictement mathématiques », et auxquelles ils accordent la vertu d'être précisément définissables, et cette notion qu'ils découvrent comme un problème au moment de l'intégrer dans leur enseignement.

3.4. Mathématiques pour l'enseignant, mathématiques pour l'enseignement

À travers ces exemples présentés à grands traits, on peut voir qu'il y a tout un travail à faire à propos des *mathématiques à enseigner*. Il convient pour cela d'ouvrir largement l'espace de ce qu'on nomme les *mathématiques pour l'enseignant*, c'est-à-dire ces mathématiques que la profession doit connaître pour permettre à ses membres de s'engager de façon adéquate dans l'acte d'enseignement, vaste domaine dont rien de ce qui est mathématique n'est *a priori* exclu. En même temps, on est amené à constater l'inadéquation des matériaux mathématiques « bruts », tels par exemple que l'étudiant les rencontre à l'université, vis-à-vis des problèmes d'interprétation, de compréhension et d'enseignement des contenus à enseigner. La résolution de ces problèmes appelle, au plan mathématique, des *élaborations*

transpositives intermédiaires dont la nature et l'ampleur ne peuvent être fixées à l'avance, et qui constituent un monde mathématique toujours en chantier, le monde des *mathématiques pour l'enseignement*, dont la gestion revient pour l'essentiel à la profession elle-même.

En nombre de cas, en effet, les élèves professeurs se trouvent affrontés à des difficultés qu'il reviendrait en principe à la profession de régler, et devant lesquelles, en attendant, ils se retrouvent tout à fait démunis. L'expérience vécue lors la préparation du concours se répète : ni la profession, ni les institutions tutélaires ne répondent de façon audible et univoque. Dans ces conditions, et dans la mesure de ses moyens, la formation prodiguée tente tout à la fois de former ces jeunes professionnels et de contribuer à restructurer la culture de la profession. Mais l'étude clinique que nous avons réalisée montre de façon presque violente un aspect refoulé du métier que, précisément, l'observation des entrants dans le métier permet de faire accéder à la conscience : les mathématiques sont une source essentielle, permanente, de problématicité pour la profession elle-même, et l'écart est souvent immense entre les mathématiques à enseigner et le repérage nécessaire d'un corpus de *mathématiques pour l'enseignant* permettant à la profession et à ses membres d'élaborer des *mathématiques pour l'enseignement* à la fois épistémologiquement authentiques, formellement cohérentes et didactiquement adéquates.

4. Au chevet de la classe

Les problèmes rencontrés par les professeurs stagiaires au chevet de leur classe sont légion. Pour illustrer la diversité des gestes cliniques permettant d'identifier les conditions et les contraintes sous lesquelles les élèves professeurs entrent dans le métier, nous évoquerons ici trois études portant chaque fois sur du matériel clinique de nature différente.

4.1. Les stagiaires et les attentes de la profession

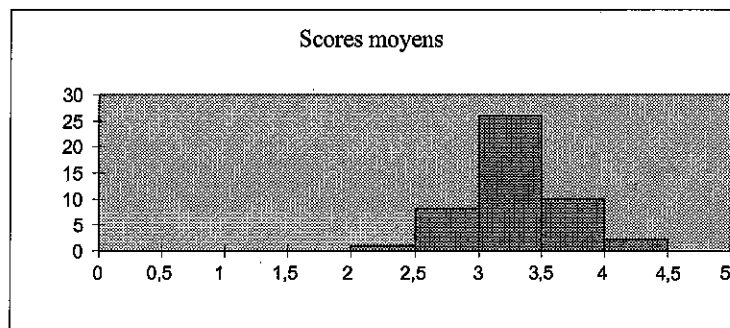
La première étude prend pour objet les résultats d'une enquête interne à la formation conduite en 2000-2001. Les élèves professeurs avaient à apprécier par eux-mêmes, sur une échelle allant de 0 à 5, leur adéquation personnelle supposée à un ensemble d'exigences du métier présenté sous la forme de 29 critères. Ces critères avaient été dégagés dans le cadre d'une recherche, récemment conduite à l'époque, menée sur un corpus de rapports de maîtres de stage. On présente ici trois de ces critères.

« Tenir le rythme dans le traitement du programme »

« Donner un enseignement structuré, diversifié, équilibré, adapté »

« Définir des objectifs d'apprentissage »

L'histogramme des moyennes des scores que s'attribuent les professeurs stagiaires montre clairement que ces scores moyens se situent dans la partie supérieure de l'échelle des scores.



Ainsi l'estimation déclarée par ces professeurs stagiaires traduit-elle un sentiment de bonne adéquation aux exigences du métier. On peut cependant se demander s'il ne s'agit pas là d'une autosatisfaction en quelque sorte *obligatoire* : traditionnellement, dans l'imaginaire professionnel, on devient professeur *d'un coup et complètement*, et il n'est ainsi guère permis d'avouer qu'on ne satisferait pas aux critères définissant le « bon professionnel ». Dans l'imaginaire de la profession, le métier de professeur fait partie de ces métiers qui ne laissent guère à leurs praticiens le temps de se construire comme praticiens.

4.2. La sédimentation historique des contraintes

La deuxième étude que nous présenterons nous a amenée à une plongée dans l'histoire du système éducatif afin d'analyser les conditions et contraintes que cette histoire a sédimentées. Dans les lycées du XIX^e siècle, le travail scolaire est structuré par l'opposition entre *la classe* et *l'étude*. La classe est alors un point de rendez-vous entre deux périodes passées en étude : le professeur y corrige les devoirs faits en étude et fournit aux élèves de nouveaux devoirs à faire. Pour des raisons multiples, dont l'élévation du niveau de connaissance disciplinaire des professeurs, souvent agrégés ou au moins licenciés, à la fin du XIX^e siècle un autre paradigme émerge, celui dont l'emblème et le dispositif essentiel est le *cours magistral*, par lequel le professeur présente le savoir à étudier en même temps qu'il exhibe la maîtrise qu'il en a. À la Libération, à travers l'expression de « *méthode active* », surgit une nouvelle figure du professeur, qui va désormais devoir conduire en classe certains des travaux jusque-là accomplis en étude ou à la maison. Les textes parlent

d'ailleurs d'*exercices improvisés*, c'est-à-dire que les élèves n'ont pas préparés (contrairement au professeur, bien entendu). Le professeur devient ainsi un directeur d'étude et un aide à l'étude *dans l'espace même de la salle de classe*. Plus près de nous, sous diverses influences, dont celle des recherches en didactique des mathématiques, les programmes de collège parus en 1985 demandent que les séances en classe soient centrées sur l'étude de *situations* sollicitant l'emploi des outils dont l'apprentissage est visé. Dans la perspective ainsi ouverte, le programme de seconde introduit la notion de *synthèse* – synthèse des résultats de l'activité mathématique conduite en classe qui constitue, peut-on y lire, « le cours proprement dit ».

Ces contraintes historiques pèsent sur l'organisation scolaire de l'étude, tout particulièrement à propos des *devoirs à la maison*. Depuis les années 1980, les textes officiels préconisent l'abandon d'une structure didactique où le professeur proposait à ses élèves, selon l'usage ancien, de « *gros devoirs* », et cela au profit d'une structure didactique où les DM sont à la fois *courts* et *fréquents*. Sur un tel changement, les questions foisonnent.

1. J'ai donné à mes élèves quatre DM dans le premier trimestre. Mon PCP m'a dit qu'il craignait que ce ne soit pas suffisant. A-t-il raison ou dois-je dissiper mes angoisses ?
2. De quelle longueur doivent être les DM ? J'ai eu plusieurs versions différentes ; donc j'aimerais savoir ce que je dois faire.
3. Quel doit être le rythme au niveau des interrogations ? Un DM par semaine ? Une interrogation de cours chaque semaine ? Un gros devoir après chaque chapitre ?...

Vestiges d'un temps enfui, certains voudraient encore utiliser ces DM pour avancer dans le traitement du programme, au risque d'un désengagement didactique corrélatif du professeur.

1. Peut-on donner, pendant les vacances, un DM qui va permettre d'avancer dans le chapitre ?
2. Peut-on traiter certaines parties du cours sous forme de DM ?
3. Peut-on proposer la démonstration d'un théorème en DM (à la condition évidemment de guider suffisamment les élèves) ?

La polyvalence didactique des DM paraît ainsi indéfiniment extensible, en conformité avec l'ancien rôle dévolu aux « devoirs », qui en faisait un lieu essentiel des apprentissages scolaires.

On peut voir ici l'un des obstacles contre lesquels les élèves professeurs vont buter quand ils seront amenés à mettre au point une organisation du travail dans leur classe. Il est

vraisemblable que l'on rencontre ici les effets de ce qu'on peut appeler une *formation professionnelle anticipée* des élèves professeurs, qui se seraient imprégnés, notamment durant leurs années de lycée, de *praxéologies professorales d'autrefois*. Comme pour les mathématiques à enseigner, les problèmes soulevés à propos des DM, exposés ici partiellement, sont des problèmes qu'il reviendrait à *la profession* de prendre en charge.

4.3. Les activités d'étude et de recherche (AER)

La troisième étude a pour objet un type de contraintes qu'apporte la modernité didactique et dont la formation donnée à l'IUFM se fait le relais. Dès la rentrée pédagogique, la formation proposée met l'accent sur le changement de paradigme. Ce qu'il y a de neuf est symbolisé par le mot d'*activité* qui, dans la culture professorale encore dominante, ne semble désigner souvent qu'une simple phase *préparatoire*, voire un pur échauffement. Par contraste, la formation va mettre en avant la notion d'*activité d'étude et de recherche* (AER), qui, en laissant une large place à l'action et à la réflexion des élèves, est *le cœur de la vie mathématique de la classe*. Bien entendu, ce dispositif didactique fondateur qu'est l'AER ne saurait vivre à l'état isolé : il ne peut exister durablement qu'en association organique avec deux autres dispositifs, celui des *synthèses*, qui mettent en forme le *produit* des activités d'étude et de recherche, et celui des *exercices & problèmes* – le mot d'exercice retrouvant ici son sens vrai –, qui font « travailler » l'organisation mathématique construite et la maîtrise qu'on en a. À l'ancienne structure binaire Cours / Exercices, la formation oppose ainsi la structuration ternaire suivante : AER / Synthèses / Exercices & problèmes. D'emblée le choc est violent pour les élèves professeurs. Par sa confusion extrême, la question suivante en témoigne de façon significative :

Faut-il faire en module des activités préparatoires au cours ?

Deux grands problèmes de la profession se dressent ici devant les élèves professeurs. Il leur faut tout d'abord *problématiser* les savoirs mathématiques à enseigner. Dans un autre langage, davantage utilisé dans la formation, on dira que, étant donné un savoir proposé à titre de thème d'études par le programme de la classe considérée, il convient d'en découvrir – ou d'en retrouver – les *raisons d'être*, ou, plus exactement, les raisons d'être en adéquation avec le programme et la tradition d'enseignement de ce programme. Sur ce point, les questions foisonnent. Nous en citerons trois.

1. J'envisage de faire avec ma classe l'étude du thème « Développement décimal illimité périodique ». Quelles sont les raisons d'être ?

2. Je ne trouve pas de raisons d'être aux fonctions linéaires (en 3^e) ; elles modélisent certes des situations de proportionnalité mais je ne vois pas ce que l'*outil* fonction apporte à ce niveau.

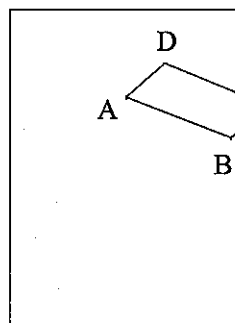
3. J'aimerais savoir quelles sont exactement les raisons d'être de l'indépendance (stochastique, causale), car je n'ai pas encore réussi à répondre à cette question.

Connaître *exactement* les raisons d'être ! La formulation de la dernière question trahit le manque d'expérience et de vécu en la matière. Car déterminer les raisons d'être d'une notion ou d'une théorie n'est pas chose simple : un tel effort participe d'un travail – individuel et collectif – de reconstruction de toute une culture peu présente ou laissée très implicite dans la formation reçue jusqu'alors. C'est un immense chantier que la profession doit faire progresser, dans le cadre de l'élaboration des mathématiques pour l'enseignement.

Le deuxième grand problème est celui de la *conception et de la réalisation* d'une telle AER. Pour illustrer notre propos, nous nous appuierons sur le compte rendu d'observation d'une séance rédigé à l'occasion de la validation des professeurs stagiaires. On y verra que le travail de formation accompli en la matière ne reste pas sans effet dans la pratique et la pensée des élèves professeurs. Il s'agit du cas de Julia qui, dans la classe de 5^e qu'elle a en responsabilité, propose l'activité suivante.

Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille.

Tracer la partie visible de la droite (AC).



Soulignons que la classe de 5^e à laquelle ce problème est proposé *ne connaît pas* la propriété clé, à savoir le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : c'est précisément pour tenter de résoudre le problème proposé que l'idée va émerger qu'il pourrait bien en être ainsi. Le travail de la classe met en jeu alors un certain nombre de dispositifs étudiés en formation : emploi de *questions cruciales*, formulation de *résultats partiels*, etc. Nous allons tout d'abord examiner un extrait mettant en évidence l'emploi de questions cruciales.

Julia : « Qu'est-ce qu'il faut pour tracer une droite ? » Une élève : « Une droite ? Un compas, un crayon, une gomme. » Julia : « Laissez de côté les instruments de géométrie. » Un élève intervient, sans succès ; puis une élève trouve : « Des points ! », s'écrit-elle. Julia : « Combien ? » L'élève : « Deux ! » « Tout le monde est d'accord ? » « Oui... » « Par quels points passe la droite ? » « A et C » « C, on ne peut pas s'en servir. Comment faire ? » Julia relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait faire ? »

Comme l'indique l'extrait suivant du compte rendu, le résultat partiel auquel la classe est parvenue est alors noté au tableau.

Après quelques essais infructueux, la classe dégage la réponse attendue : il faudrait avoir un autre point. Julia écrit :

Pour tracer (AC), il faut 2 points

Ici, on n'en a qu'un : le point A

Il faudrait trouver un autre point

[...]

... qui est sur (AC), et sur la feuille.

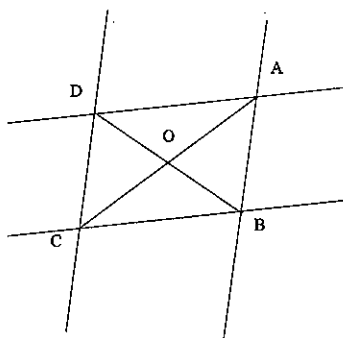
Un peu plus tard dans la séance, un résultat technologique émerge.

Une élève, interrogée, va droit au but : « On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu... » Plusieurs ont trouvé cette solution. [...] Julia écrit :

Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,
en un point O

Julia : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix.

La classe est alors prête pour une nouvelle étape, que Julia enchaîne aussitôt. Car la solution trouvée est conditionnelle, elle suppose que ce qui est apparu comme une propriété « bienvenue » du parallélogramme soit *vraie*. Julia propose alors une vérification expérimentale de ce résultat à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique,



Cette vérification est alors présentée comme distincte d'une « démonstration », c'est-à-dire d'une déduction à l'intérieur de la théorie géométrique disponible, et, le cas échéant, comme préalable à cette dernière.

L'élève au tableau a écrit :

On a bougé les diagonales AC et BD

On mesure BO et OD pour savoir si O est le milieu puis on fait pareil avec AO et OC

On a bougé les droites et on remarque que O est bien le milieu des segments DB et AC

[...] Puis [Julia] demande à un élève de formuler la propriété étudiée, ce qu'il fait : « Les diagonales se coupent en leur milieu. » Elle ajoute : « On pourrait le démontrer, mais c'est un peu long. Donc on va l'admettre. »

On perçoit ici pleinement des conduites adaptatives et transformatrices de jeunes professeurs en formation qui, comme dans le cas de Julia, s'efforcent de faire vivre dans la classe les praxéologies professorales co-construites dans la formation.

5. Les résultats dégagés et les perspectives ouvertes

5.1. L'école et la société

Dans les sociétés démocratiques, le choix de la matière à enseigner donne lieu à débat, voire à polémiques. Ainsi en va-t-il notamment en ces périodes de crise où le savoir enseigné a, aux yeux d'une partie au moins de la société, perdu une part essentielle de son crédit. Mais tout se passe ensuite comme si, une fois un choix effectué, le savoir à enseigner ne faisait problème que pour ceux qui doivent l'apprendre – les élèves. Or l'étude que nous achevons de présenter ici établit l'évidence contraire : la matière mathématique est presque toujours mal définie, insuffisamment travaillée et indéfiniment problématique, au double plan mathématique et didactique.

L'afflux de connaissances savantes autour de l'école, dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques, permet un renouvellement de fait des *mathématiques pour l'enseignant*. Mais il n'engendre pas pour autant les *mathématiques pour l'enseignement* sans lesquelles il n'est pas d'écologie mathématico-didactique fonctionnelle et durable.

5.2. Les conditions et contraintes

L'effort d'élaboration des mathématiques pour l'enseignement qui apparaît nécessaire doit être conduit sous une foule de contraintes, que notre recherche s'est efforcée d'identifier de façon forcément partielle. D'une part, rappelons-le, il y a les usages établis, qui font norme, d'une profession à forte inertie : certaines des normes correspondantes s'imposent presque

brutalement aux professeurs stagiaires, même si d'autres paraissent fuyantes, voire insaisissables, ou encore en quelque sorte subsidiaires. D'autre part, en dialogue parfois engagé avec cette normativité, il y a la normativité de fait et de droit de cette « école normale » – au sens originel du terme – qu'est la formation proposée à l'IUFM.

Signalons en ce point un système de conditions et de contraintes – que nous avons aperçu sans en approfondir l'examen – lié à la diffusion parfois *sauvage* de savoirs savants au sein de la noosphère de l'enseignement secondaire : aujourd'hui encore, nous semble-t-il, les mathématiques pour l'enseignant ne sont pas tant choisies pour leur pertinence vis-à-vis de l'effort d'élaboration des mathématiques pour l'enseignement qui apparaissent nécessaires ou utiles, que pour leur pure et simple disponibilité savante et, parfois, leur attractivité culturelle.

5.3. La formation et les problèmes de la profession

La tribune offerte aux élèves professeurs par la formation à travers le dispositif des questions de la semaine (et le forum des questions qui lui répond) permet de voir ce que, ordinairement, les professionnels du métier sont portés à dissimuler en le refoulant : la formidable pression de la problématique mathématico-didactique éprouvée par les professeurs. Ce que la pratique du métier fait apparaître comme difficultés, la formation prodiguée a pour objet de le problématiser, c'est-à-dire d'en faire autant de problèmes, défis lancés à la profession elle-même, entendue ici au sens large, qui inclut notamment les formateurs et les chercheurs en didactique des mathématiques.

Mais ce qui apparaît aussi, une fois ces difficultés transmuées en *problèmes de la profession*, c'est l'état de relatif dénuement de la profession et son impuissance chronique à trouver des solutions, laquelle va de pair, au moins dans le cadre français, avec une incapacité apparente à assumer la nécessité indépassable d'une recherche organiquement articulée à ses problèmes de développement.

Le dépassement de cette situation suppose l'abandon du point de vue individualiste, où chacun est une île qui vit en autarcie intellectuelle et professionnelle, pour adopter le point de vue de la *profession*, regardée comme *intellectuel collectif*, étalon du savoir professionnel de ses membres – un professionnel sachant *grosso modo* ce que sait la profession, et ignorant de même ce qu'elle ignore, selon le principe au fondement de toute profession véritable.

5.4. Les perspectives et le rôle crucial de l'institution de formation

À travers le cas de Julia, nous avons illustré rapidement la manière dont les professeurs stagiaires s'emparent des apports de la formation pour les intégrer dans leurs praxéologies professionnelles et les faire vivre ainsi dans le système éducatif. Pour étudier plus avant cette question, on dispose d'une masse énorme d'archives réunies par l'équipe de formation de l'IUFM d'Aix-Marseille, à l'instar des questions de la semaine et des matériaux du forum des questions, et ce sur une période de semblable durée. La poursuite de l'étude que nous avons menée à bien nous paraît capitale. Car c'est par le truchement des jeunes professeurs que vont se diffuser, dans l'École et dans la profession, les solutions que les collectifs de chercheurs et de formateurs s'emploient à élaborer et à faire reconnaître. Mais il s'agirait là d'une autre recherche, prolongement naturel du travail présenté ici.

Références

- CHEVALLARD Y. (2007), Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García, (eds), *Actes du 1^{er} congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005)*. Universidad de Jaén.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD.pdf
- CHEVALLARD Y., CIRADE G., Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques, *Actes du 13^e colloque des professeurs et formateurs chargés de la formation des enseignants de mathématiques du second degré organisé par la CORFEM (Toulouse, 22-23 juin 2006)*. À paraître.
- CIRADE G. (2006), *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel*. Thèse de doctorat. Marseille : Université Aix-Marseille I.
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709>
- MALAVAL J. et al. (1995), *Maths 5^e* (Collection Transmath). Paris : Nathan.
- SERRA É. (dir.) (2001), *Math 5^e. Mathématiques*. Paris : Bordas.
- THERON P. et al. (1969), *Mathématiques. Classe de 4^e* (Collection Cossart et Théron). Paris : Bordas.
- WATTIAUX L. et al. (1968). *Mathématiques 4^e* (Cours Brédif). Paris : Hachette.