

## **Le projet AMPERES (Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Etudes et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire), vers un autre type de processus d'étude**

Ce que nous donne à voir l'enseignement actuel des mathématiques est le plus souvent une étude non motivée d'objets mathématiques. Comme le dit Y. Chevallard, l'enseignement « tend à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs qu'on visite à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessées d'être comprises »<sup>80</sup>. C'est seulement lorsque l'étude d'un objet a été réalisée que, dans les meilleurs des cas, des applications en sont proposées dans des travaux dirigés ou dans des exercices. La majorité des « activités introductives » des manuels, massivement reprises par les professeurs dans les classes, suivant en cela la forme dominante d'un enseignement sous forme d'ostension déguisée, « oublie » les questions fondatrices motivant les mathématiques et leur étude. Cet état de fait est conséquence de problèmes profonds qui trouvent leurs fondements dans la société pensant son école, la pédagogie qu'elle entend y voir pratiquée et la formation des professeurs. Il n'en demeure pas moins que les mathématiques enseignées ne faisant, dans la plupart des cas, vivre dans les classes aucune motivation fondatrice de ce savoir, on comprend qu'en retour, elles ne puissent guère rencontrer la motivation des élèves envers leur étude<sup>81</sup>.

Le travail engagé par le projet AMPERES, regroupant à ce jour cinq équipes (quatre d'IREM et une d'IUFM) soutenues par l'INRP et constituées d'enseignants-chercheurs et de professeurs du second degré, vise à développer des pratiques enseignantes permettant d'engager le « collectif-classe » dans « une genèse artificielle du savoir », en le faisant vivre comme réponse à des questions fondatrices de l'étude. Le projet reprend donc l'idée initiale au fondement des ingénieries didactiques, mais avec l'ambition de les faire vivre au

---

<sup>80</sup> Chevallard Y. (2005) : "la place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire" in Actes de l'université d'été d'Animath "La place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire" Ed APMEP, brochure n°168

<sup>81</sup> Voir l'étude menée par Estabiet et al., (2005) *Radiographie du peuple lycéen*. Préface de P.Meirieu, Paris, ESF, qui montre que pour les lycéens, les sciences dures sont « inutiles ou ennuyeuses aux yeux des littéraires, pourvues de grandes valeurs de professionnalisation aux yeux des élèves scientifiques, elles semblent pour tous dénuées de toute valeur culturelle. Voilà qui devrait alerter, mais qui résulte sans doute de la position hiérarchique forte de ces disciplines. Elles sont des instruments stratégiques, sans pour autant être porteuses de sens ». Dans l'enquête dont Estabiet rend compte, les mathématiques arrivent en dernière position dans le classement des lycéens, avec une différence entre opinions favorables et défavorables de 56 % environ en faveur des négatives...

sein du système éducatif « ordinaire ». Dans ce sens, AMPERES étudie la viabilité de l'implantation de ses propositions en tenant compte des déterminants contraignant l'action enseignante. Par exemple, contre la pratique en vigueur de nos jours, il a parfois été choisi de soumettre à l'étude une question problématique sans pour autant que la réponse soit donnée dans l'heure. Ou encore, en suivant une démarche inverse de celle sous laquelle se déroule ordinairement l'enseignement des mathématiques, partir de questions problématiques et ne lancer l'étude que parce que celle-ci peut contribuer à l'élaboration de réponses, éventuellement partielles, aux questions posées. À titre de seul exemple sur la disparition de questions motivant les mathématiques, est particulièrement significative la place accordée à l'étude de cette figure emblématique qu'est le triangle, au Collège et au Lycée. De multiples propriétés en sont démontrées de diverses manières. Mais qui parmi les professeurs de mathématiques peut encore donner les raisons justifiant d'accorder une telle importance à la géométrie du triangle dans le secondaire ? En quoi cela informe-t-il l'élève sur le monde actuel, à venir ou passé ? Où se trouve le sens d'une telle étude mathématique pour les élèves ? Ainsi certains contenus de programme semblent perdurer parce que dans la tradition, l'héritage scolaire, que les enseigner apparaît « bel et bon » sans plus d'interrogations sur la pertinence de cet enseignement : il n'apparaît guère que purement gratuit et formel à une majorité d'élèves, et on peut s'interroger sur l'avenir d'un tel enseignement. Sur ce seul cas, et il y en a bien d'autres, on a perdu de vue les questions fondamentales que les propriétés de l'objet permettent de résoudre. Dans cette courte contribution, nous montrons trois brefs extraits de propositions d'enseignement que des équipes AMPERES ont faites sur ce thème, et qui peuvent s'articuler en un parcours d'étude et de recherche courant sur plusieurs niveaux.

## Partie I. Construction de triangles et inégalité triangulaire en 5<sup>e</sup><sup>82</sup>

L'extrait du travail de l'équipe clermontoise porte sur un petit point du programme de 5<sup>e</sup> :

|                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Construction de triangles et inégalité triangulaire | Construire un triangle connaissant : <ul style="list-style-type: none"> <li>- la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents,</li> <li>- les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés,</li> <li>- les longueurs des trois côtés.</li> </ul> |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

<sup>82</sup> Geneviève Le Quang et Robert Noirfalise, Equipe Ampères, groupe de l'IREM de Clermont-Ferrand

Cette partie de programme apparaît, de prime abord, comme le vestige d'une époque révolue où l'on étudiait les cas d'égalité des triangles, ce qui permettait alors de déterminer des longueurs et des angles, de démontrer des propriétés de configurations. Le programme ajoute d'ailleurs « ces constructions permettent un premier contact (implicite) avec les trois cas d'isométrie des triangles (théorèmes rencontrés en classe de seconde) ».

En observant la structure du programme et en utilisant l'échelle des niveaux de co-détermination didactique proposée par Yves Chevallard, « Constructions de triangles et inégalité triangulaire » apparaît comme un thème d'étude. C'est un déterminant pour le professeur car, inscrit dans le programme, il se doit de le traiter. *Comment en rendre l'étude dynamique? Comment répondre à une telle question de façon quelque peu générique?* Il ne s'agit pas en effet de fournir « clés en main » quelques pratiques satisfaisantes, mais bien de construire des praxéologies professorales qui permettent, à ceux qui en ont la charge, de piloter un enseignement dynamique.

*Une première réponse est de rechercher des questions à fort pouvoir générateur d'étude et de recherche et qui aient un rapport avec le thème !* Pour ce faire, ne pas aller vers une spécification du thème en sujets, comme cela semble se faire ordinairement et correspond à une descente dans l'échelle des niveaux de co-détermination didactique, mais au contraire remonter vers les secteurs, le domaine, la discipline. À la lecture du programme, le thème est inscrit dans le secteur « figures planes » du domaine « Géométrie ». Le secteur « figures planes » ne nous convient guère ici, car il nous paraît difficile de répondre à la question « Pourquoi étudier des figures planes ? » Il nous faudrait trouver des raisons d'être de l'étude des figures planes. En revanche, en nous plaçant au niveau de la géométrie, nous pouvons trouver deux grandes questions génératrices d'études et de recherches :

- Comment déterminer des grandeurs géométriques : longueurs, aires, volumes, angles ? Cette grande question générique peut, elle-même, se décomposer en d'autres telles que « Comment déterminer la distance entre deux points dont l'un au moins est inaccessible ? Comment déterminer l'aire d'une surface ? »
- Comment construire une figure géométrique satisfaisant à des spécifications données ? Nous pouvons citer ici des exemples plus spécifiques pouvant faire l'objet d'AER (Activités d'Etude et de Recherche) : Peut-on construire un cercle passant par deux points, par trois points ? Peut-on carrer un rectangle ?

Chacun de ces deux grands types de questions peut se décliner en « Parcours d'Etudes et de Recherches (PER) », tant les questions problématiques pouvant le jalonner sont diverses et

multiples selon les conditions du problème posé. Dans cette façon de concevoir une dynamique d'étude de la géométrie, celle des figures géométriques n'est pas première mais est motivée dans un tel parcours pour répondre à une question portant sur la détermination d'une grandeur géométrique, ou encore pour résoudre un problème de construction géométrique.

La lecture du programme peut nous conduire à penser que le thème est à classer dans le secteur des constructions géométriques « Construire un triangle connaissant... » Certes, il conviendra que les élèves sachent techniquement réaliser de telles constructions et à quelles conditions, à partir de la donnée de trois longueurs pour les côtés, la construction est possible (inégalité triangulaire) ; mais ce sont là des tâches bien insignifiantes si on ne sait pas pourquoi on peut être amené à réaliser de telles constructions. On est donc conduit à se poser la question du pourquoi de ces constructions et donc à se demander « *quelles en sont les raisons d'être ?* » L'une d'elles, relative aux triangles<sup>83</sup>, apparaissait dans d'anciens programmes traitant des cas d'égalité : ces derniers permettaient de déterminer la longueur d'un segment en montrant que celui-ci avait même longueur qu'un autre. Le principe consiste à utiliser des triangles « égaux », c'est-à-dire superposables. On est amené à construire un triangle qui soit superposable à un autre ! Cette technique d'usage de triangles superposables conduit alors à se demander à quelles conditions des triangles le sont.

On obtient ainsi une première esquisse d'une dynamique d'étude. D'abord une première question à résoudre « comment déterminer une longueur que l'on ne peut mesurer directement, autrement dit une distance inaccessible ? » Puis, répondre à cette question à l'aide de triangles superposables. Se demander alors, et ce sera la deuxième question motivée par la réponse à la première, « Quelles données suffisent à caractériser un triangle ? » Cette deuxième question, formulée classiquement, étant ici comprise dans le sens « Quelles données sur un triangle suffisent pour pouvoir en construire un autre qui lui soit superposable ? » L'étude engagée, cette dernière question conduit elle-même à des questions qualifiées de « cruciales ». Car d'une part, aux yeux des élèves, leur abord apparaît nécessité par la dynamique de l'étude, s'imposant quasiment à partir d'elle, et

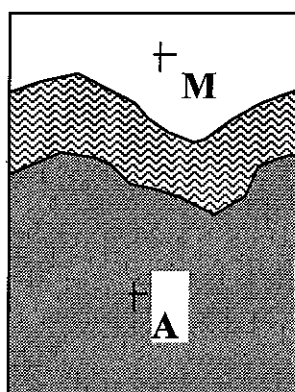
---

<sup>83</sup> Il y en a d'autres : les triangles servent aussi à la détermination des aires d'une surface plane : on découpe, de façon éventuellement approchée, la surface en triangles. Sachant calculer l'aire d'un triangle, on sait calculer, de façon approchée, l'aire de la surface. Avec une telle raison d'être, il conviendrait de se demander quelles sont les données utiles pour déterminer l'aire d'un triangle ou encore se demander si avec de telles données on peut en calculer l'aire et si oui, comment ? Connaissant les longueurs des trois côtés d'un triangle, peut-on en calculer l'aire ? La formule de Héron est une réponse à cette dernière question.

d'autre part, du point de vue enseignant, surgissent ainsi les questions permettant de traiter des cas d'isométries... et aussi de cas où il n'y a pas isométrie.

Une activité d'étude et de recherche (AER) a été expérimentée dans une classe de 5<sup>e</sup> par une enseignante participant à la recherche. Nous la décrivons telle qu'elle a été réalisée. Quelques remarques au fil du texte évoquent d'autres voies qui peuvent être envisageables.

1° Tout d'abord une question portant sur une détermination de distance inaccessible :



Déterminer la longueur du segment  $[AM]$ .

On n'a pas le droit de dépasser la berge du fleuve qui est du côté du point  $A$ .

Le dessin de gauche se trouvait sur une feuille  $21 \times 29,7$  fournie par le professeur en tant que micro-espace modélisant un macro-espace évoqué. La partie de la feuille sur laquelle les élèves étaient autorisés à travailler était recouverte d'une feuille rose. Les élèves disposaient de leurs instruments de géométrie et « d'appareils de visée » sommaires. Cette situation a pour fonction de simuler sur feuille de papier un problème effectif de détermination d'une distance inaccessible, problème qu'un géomètre topographe peut avoir à résoudre. Un commentaire du professeur évoque cette situation du monde, précisant que les topographes peuvent mesurer des distances entre points accessibles – l'accessibilité dépendant des outils dont dispose l'opérateur –, effectuer des visées d'un point à un autre et mesurer des angles. Au passage, s'il existe bien d'autres outils, comme les laser mètres, pour déterminer des distances entre points, la triangulation et le recours aux propriétés du triangle et à la trigonométrie restent encore une pratique contemporaine des topographes.

Les élèves de 5<sup>e</sup> ne pensent généralement pas à placer un point  $B$  et à faire les « relevés » nécessaires pour tracer un triangle  $A'B'M'$  « isométrique » du triangle  $ABM$ . Aussi le professeur leur montre-t-il comment faire, et justifie ainsi que l'on s'intéresse aux triangles et à leur détermination. Notons, c'est d'importance, que nous nous émancipons ainsi du principe voulant que dans une activité problématique, les élèves puissent avoir, grâce à leur seul répertoire de connaissances, la possibilité d'élaborer eux-mêmes une stratégie de

résolution<sup>84</sup>. Leur répertoire de connaissances leur permet néanmoins de comprendre le problème posé.

2° La technique de résolution avec construction d'un triangle superposable étant proposée par le professeur, selon le principe de questionnement dynamique évoqué ci-dessus, une deuxième question est posée : « Comment déterminer un triangle ? » Pour étudier cette question, le professeur propose alors aux élèves la succession de tâches suivantes<sup>85</sup> :

1 – Sur une feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm, 8 cm et 6,5 cm. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les angles de ce triangle ?

Cette question est traitée rapidement : les élèves comprennent le problème posé, tracent avec la règle et le compas (nous sommes au mois de décembre) le triangle demandé, et sont convaincus de la superposabilité de toutes les figures de la classe. Ils effectuent les mesures des angles et ils peuvent vérifier leur construction grâce au calque du professeur.

2 – Sur une deuxième feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les angles mesurent  $59^\circ$ ,  $74^\circ$  et  $47^\circ$ . Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les côtés de ce triangle ?

Pour cette deuxième question, les élèves poursuivent le travail commencé dans la question 1 et construisent un triangle connaissant ses trois angles. Très rapidement, certains se rendent compte qu'il n'y aura pas superposabilité des figures – la longueur du premier segment tracé étant indéterminée –, d'autres poursuivent méticuleusement leurs tracés. En comparant les figures obtenues par des voisins, il est facile de répondre que le triangle obtenu n'est pas unique ; par conséquent, il n'est pas possible de donner les longueurs des côtés du triangle dessiné par le professeur. Les élèves dessinent alors un deuxième triangle

---

<sup>84</sup> Nous n'ignorons pas pour autant le problème du paradoxe du professeur mis en évidence par G. Brousseau. Le fait de s'autoriser à donner des réponses existant dans la culture nous conduit à nous interroger sur les conditions pouvant faire que les élèves acceptent ces réponses sans pour autant se soumettre à l'autorité professorale, mais à l'autorité du contenu. Cette question didactique est d'importance et est abordée, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), à partir de la dialectique des médias et des milieux. Sur cet exemple, on aurait pu imaginer que les élèves soient invités à rechercher dans divers médias (ouvrages ou Internet) des informations qui leur manquent sur les « relevés » topographiques.

<sup>85</sup> Notons que ce qui est proposé revient à « transposer » par la nécessité de « ne pas se déplacer » dans le méso-espace de la classe, l'impossibilité évoquée de mesures directes due à « l'inaccessibilité » des distances réelles dans le macro-espace.

ayant les mêmes angles que le précédent, mais « beaucoup plus grand ou beaucoup plus petit » que le premier tracé.

3 – Est-ce que 2 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Est-ce que 3 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Est-ce que 4 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Avant de donner ces questions, le professeur avait conduit les élèves à remarquer qu'on peut effectuer six mesures dans un triangle et que « déterminer un triangle » signifie obtenir des triangles tous superposables. Cette remarque pourrait donner lieu à une question cruciale que l'on pourra tenter de faire vivre ultérieurement, dans une autre classe confrontée pour la première fois à ce même travail ; ce qui poussera peut-être les élèves à se poser eux-mêmes les questions de la troisième consigne.

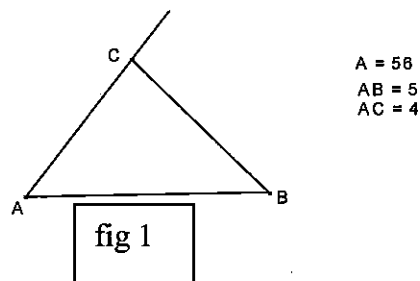
Les élèves sont invités à faire des essais avec des valeurs de leur choix, et il n'est plus fait référence au triangle de la première question, sauf pour éventuellement déboucher sur des impossibilités, des cas particuliers...

**2 données :** les élèves essaient 2 côtés, 2 angles, 1 côté et un angle et dessinent plusieurs triangles.

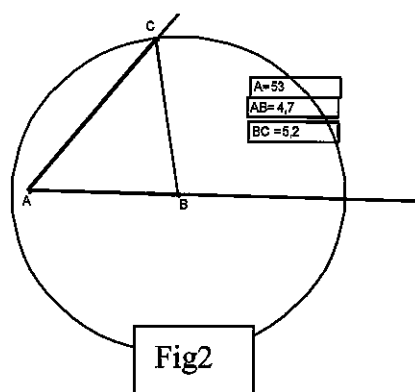
**3 données :**

3 côtés : les élèves font référence à la première question et proposent des valeurs qui ne posent pas de problème pour les longueurs des côtés. Si besoin, il conviendra ultérieurement, après l'étude des trois « cas », que le professeur relance l'étude en disant « si vous choisissez trois nombres au hasard, êtes-vous sûrs que vous pouvez construire un triangle dont les mesures des côtés sont ces trois nombres ? » C'est une nouvelle question cruciale qui surgira peut-être d'elle-même devant des tentatives d'élèves qui auraient échouées ; elle permet d'engager l'étude de l'inégalité triangulaire.

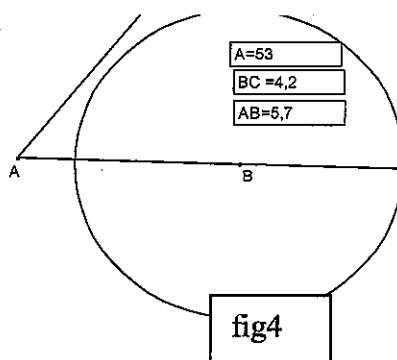
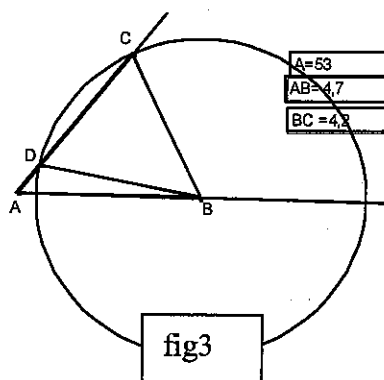
2 côtés, 1 angle : Plusieurs élèves obtiennent une figure comme celle de l'exemple ci-contre qui est le cas attendu :



D'autres élèves obtiennent la figure 2 : l'angle  $\hat{A}$  n'est pas l'angle compris entre les deux côtés donnés qui sont ici  $[AB]$  et  $[BC]$ .



Dans ce cas, le professeur invite les élèves à faire d'autres essais, ou propose lui-même des données afin de faire apparaître les figures 3 et 4.



Une discussion et une institutionnalisation locale sont nécessaires pour ne pas retenir ce « cas ».

1 côté, deux angles : pas de difficultés particulières mais, cette fois encore, c'est le professeur qui doit intervenir et demander si l'on peut choisir au hasard les deux nombres qui sont les mesures des angles. La troisième partie de la question 3 se règle oralement avec la classe entière. L'étude se poursuit par l'inégalité triangulaire et, en conformité avec le programme de la classe de 5<sup>e</sup>, par des exercices classiques de construction.

Notons, en guise de transition avec ce que présentent les équipes de Marseille et Bordeaux, qu'on peut regretter – contrainte relative au programme obligeant - de ne pas pouvoir utiliser la dynamique ainsi produite en poursuivant par l'étude de triangles semblables. En effet, réduire pour déterminer une longueur comme  $AB$  dès lors que  $AB$  est grande est une idée à la portée des élèves. De plus, certains élèves ont remarqué, au cours du travail précédent, que des triangles ayant trois angles égaux ne sont certes pas nécessairement superposables, mais qu'ils ne sont cependant pas sans lien entre eux...

## Partie II : Un PER sur la similitude qui débute avec le théorème de Thalès en 4<sup>e</sup><sup>86</sup>

### ***La forme traditionnelle d'enseignement du théorème de Thalès en 4<sup>e</sup>***

Dans le premier alinéa du programme de 4<sup>e</sup> concernant la géométrie, on trouve sous l'intitulé « triangles », et dans cet ordre, les paragraphes « milieux et parallèles », puis « triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes ». C'est l'ordre que suivent les manuels et, par conséquent, un usage très fréquent chez les professeurs. Le choix d'une telle progression ne trouve sans doute son origine que dans une transposition didactique s'appuyant sur l'idée qu'il est plus facile d'étudier d'abord le particulier pour aller vers le général. Après que les propriétés directe et réciproque de « la droite des milieux » ont été démontrées, la propriété dite de Thalès arrive comme une généralisation ; on peut en démontrer quelques cas particuliers pour des valeurs rationnelles du rapport ; certains manuels en proposent une démonstration proche de celle des *Eléments d'Euclide*, par les aires. Enfin, des applications de la propriété de Thalès sur quelques exercices de calculs de distances inaccessibles sont proposées.

On voit assez bien comment, en conséquence, les raisons qui motivent l'étude de ces propriétés ne sont pas transparentes pour les élèves puisqu'il n'ont l'occasion de les rencontrer que lors des derniers exercices d'application du chapitre, s'ils y arrivent ; par exemple dans des problèmes de distances inaccessibles dont les manuels fournissent des exemplaires. Certains élèves saisiront peut-être là l'occasion d'une première rencontre avec un problème motivant l'étude du théorème de Thalès, et feront pour eux-mêmes le parcours d'étude à l'envers... Beaucoup d'autres, nous en sommes convaincus, considèreront une fois de plus que « les maths, on les fait parce qu'on nous dit de les faire », ou on y renonce..., mais « il n'y a pas grand-chose à comprendre ! »

### ***Une brève analyse***

Nous sommes d'abord partis à la recherche de raisons qui pourraient motiver que l'on s'intéresse, tant de l'intérieur des mathématiques que du point de vue d'élèves de 4<sup>e</sup>, à l'étude du théorème de Thalès « dans les triangles ». On peut voir ce théorème comme se rapportant, dans des cas particuliers, à des problèmes « d'agrandissements et réductions » comme l'écrivent les programmes de 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>, quoique la rencontre avec de tels problèmes

---

<sup>86</sup> Yves Matheron, Alain Mercier, Marie-Christine de Redon, IREM d'Aix-Marseille et INRP, UMR-ADEF.

ait eu lieu bien avant ; sans doute dès l'école primaire, en tout cas dès l'étude du thème des échelles en 6<sup>e</sup>. Au-delà de ce que le programme appelle « agrandissements et réductions », se trouve la notion de similitude ; à ce propos, D. Hilbert note, dans *Les fondements de la géométrie*, que le théorème de Thalès est le « théorème fondamental de la similitude ». Le problème didactique posé peut donc devenir celui de la rencontre des élèves avec le concept de similitude, de telle manière que l'étude du théorème de Thalès soit vécu dans le travail de la classe comme une nécessité pour répondre à une ou des questions relevant de la similitude ; notamment de celle des triangles. Partir ainsi d'une question générant davantage de mathématiques que celles issues du seul théorème induit deux conséquences didactiques :

- L'ordre de la progression traditionnelle – d'abord la droite des milieux, ensuite le théorème de Thalès – est inversé. On rencontre d'abord la notion de triangles semblables, au cours de laquelle on étudie expérimentalement les relations entre longueurs des côtés. On réduit la propriété observée à l'énoncé de la propriété de Thalès en conformité avec le programme. À la suite de cette étude, la rencontre avec la propriété « parallèles et milieu » est vue comme preuve très partielle du théorème, dans le cas du rapport  $\frac{1}{2}$ . Ce cas établi, on peut alors le démontrer dans d'autres cas particuliers (rapports  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ , etc.), et nous nous en contenterons ; c'est une manière courante en mathématiques dont une illustration tient par exemple dans l'histoire de la démonstration du théorème de Fermat. Dans une institution didactique, le professeur peut attester de la validité du savoir garantie par une autre institution mathématique que celle de la classe ; on dira donc que l'on admet le théorème lorsque le rapport est quelconque. Enfin on énoncera et démontrera la réciproque, dont un cas particulier est appelé « propriété de la droite des milieux ».
- La question étant relative à une notion mathématique de plus grande ampleur – la similitude –, elle a un fort pouvoir générateur d'étude. Elle pourra ainsi se décliner sous forme de reprises du travail de la question, dans un parcours d'étude et de recherche courant sur plusieurs années : les « agrandissements-réductions » en 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>, les « triangles de même forme », comme les désigne le programme de 2<sup>de</sup>, l'homothétie en 1<sup>re</sup> S et enfin les similitudes, directe et inverse, en Terminale.

## Nos propositions

La question initiale, posée aux élèves, porte sur l'étude des triangles en fonction de leurs angles : que peut-on dire d'un triangle dont on connaît un angle ? deux angles ? les trois angles ? Des triangles de ce type ayant été construits par les élèves, il s'agit ensuite de les observer et les « comparer » ; autrement dit d'évaluer leur degré de... similitude. Pour cela, et afin de les « transporter », l'utilisation du papier calque est nécessaire.

Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de l'organisation didactique que nous avons conçue et qui a servi de support aux séances passées dans plusieurs classes de 4<sup>e</sup>. Cette présentation intègre les éléments d'analyse *a posteriori* qui nous ont conduit à modifier quelques-unes des parties.

Afin que les élèves puissent voir « émerger » la propriété saisissante que constitue le théorème de Thalès, il est nécessaire d'organiser un milieu pour cela. Le terme de milieu est à entendre dans un sens élargi par rapport à celui qui lui est primitivement donné en TSD. Il s'agit en fait de ce que l'on pourrait nommer un « milieu pour l'enseignement » (Matheron, 2000) ou de la « construction d'une référence commune » (Sensevy et Mercier, 2007) propre à l'institution-classe à un moment donné de son histoire didactique. On part de la définition qu'en donne Y. Chevallard, (1992<sup>87</sup>) ; le milieu apparaît ainsi dans une dimension qui le fait voir sous un jour nouveau, comme ensemble des rapports personnels qui se sont stabilisés en conformité aux rapports institutionnels, rapports socialement partagés, non questionnables car ils vont de soi au moment considéré de l'histoire de la classe. Les deux premières étapes, présentées ci-dessous, constituent un temps nécessaire à la construction du milieu au sens où nous l'entendons, afin que puisse avoir lieu la première rencontre des élèves avec la propriété qui est l'objet d'étude, et l'étude elle-même : la proportionnalité des côtés de triangles « en situation » de Thalès.

---

<sup>87</sup> « À chaque institution  $I$  est associé un ensemble d'objets,  $O_I$ , dit ensemble des objets *institutionnels* (pour  $I$ ), qui est l'ensemble des objets  $O$  que connaît  $I$ , c'est-à-dire pour lesquels existe un rapport institutionnel  $R_I(O)$ . [...]. Pour toute institution  $I$ , il existe ce que j'appellerai un *temps institutionnel*  $t_I$ . L'ensemble  $O_I$  dépend de  $t_I$ , et il serait donc plus exact de la noter  $O_I(t)$ . [...]... à chaque "instant"  $t$ , de nouveaux objets institutionnels apparaissent, tandis que d'autres disparaissent (pour n'être plus, par exemple, qu'institutionnellement visibles depuis  $I$ ). Il en va de même des rapports institutionnels  $R_I(O, t)$ . [...]

On désigne par  $C_I(t)$ , et on nomme contrat institutionnel relatif à  $I$  au temps  $t$ , l'ensemble des couples  $(O, R_I(O, t))$ , où  $O$  est un élément de  $O_I(t)$ . On nomme alors milieu institutionnel relatif à  $I$  au temps  $t$ , et on note  $M_I(t)$ , le sous-ensemble de  $C_I(t)$  formé des couples  $(O, R_I(O, t))$  "stables" au temps  $t$ . [...] les éléments  $(O, R_I(O, t))$  qui constituent le milieu – les éléments "stables" – sont ceux qui, subjectivement, c'est-à-dire pour les sujets de l'institution  $I$ , [...] apparaissent comme *allant de soi, transparents, non problématiques*. »

## Première étape

Ayant étudié en 5<sup>e</sup> les situations où des triangles avaient des côtés de longueurs égales, la classe est engagée par le professeur dans la recherche de la question : *qu'obtient-on quand on construit des triangles vérifiant des conditions sur leurs angles, par exemple quand on fixe la valeur d'un angle ?*

Une feuille de papier calque a été distribuée à chaque élève, et le professeur demande de tracer un triangle dont un angle mesure  $43^\circ$ , par exemple ; puis de comparer le triangle obtenu avec ceux des voisins de groupe. Que peut-on en dire ? Les élèves ne trouvent rien de particulier à dire et ils ont raison : les triangles qui ont un même angle ne montrent pas de particularité intéressante.

On s'interroge alors sur ce qu'il se passe lorsqu'on fixe deux angles. Sur la même feuille de papier calque, le professeur demande que chacun construise un triangle  $ABC$  tel que  $\hat{A} = 43^\circ$  et  $\hat{B} = 115^\circ$  et compare son triangle avec ceux des voisins de groupe.

Très vite apparaît l'idée que deux angles donnés c'est comme trois, car le troisième était fixé par la propriété de la somme des angles d'un triangle, propriété bien connue des élèves. Cela permet même à certains d'entre eux de trouver que leur angle « de  $115^\circ$  » est faux, puisque le troisième angle qui devrait mesurer  $22^\circ$  d'après le calcul est autre. Il y a là une dialectique de la géométrie expérimentale (construction) et de la géométrie théorique (un théorème dans ce cas) ; l'une et l'autre fournissant à tour de rôle des informations et des moyens de contrôle « sur l'autre et l'une ».

Pour pouvoir « comparer deux triangles », les élèves essaient de faire coïncider deux à deux des côtés ou des sommets. La configuration de Thalès apparaît ainsi dans l'expérience de comparaison des triangles par superposition des calques. L'utilisation du papier calque règle le problème des similitudes directes ou inverses ; les élèves manipulent le papier calque et le retournent lorsque nécessaire. La question du déplacement ou du retournement est « transparente » ; elle n'est pas vue en tant que problème, donc en tant que question qui mériterait une étude à ce niveau. Dès que la configuration apparaît dans quelques groupes, c'est au professeur d'interrompre le travail et de proposer une mise en commun, en donnant la parole à ceux qui l'ont trouvée ; ce sont d'ailleurs ces élèves qui veulent parler, car la découverte est saisissante. Ceux qui ne l'avaient pas obtenue la recherchent alors, la trouvent facilement et l'explorent à partir des sommets en tentant de superposer successivement les trois angles, un à un. La démarche de travail est collective dans la classe, au sein des élèves, mais le professeur a un rôle essentiel à jouer dans la direction de

ce travail ; il ne laisse pas la situation avancer toute seule, il intervient en fonction des informations qu'il prend.

Ainsi, si les constructions ne sont pas faites avec suffisamment de soin, les parallèles n'apparaissent pas dans certains groupes ; ce qui n'est pas grave si un groupe au moins les a mises en évidence. Après la mise en commun, les élèves qui n'y sont pas parvenus vérifient alors de nouveau leurs angles car ils aimeraient bien avoir les parallèles ; s'ils ne le font pas, c'est au professeur à les y inciter à le faire.

Si la configuration n'apparaît pas, on passe au « défi » présenté plus loin dans ce texte, après l'institutionnalisation suivante, et sans la conjecture\*\*.

***Institutionnalisation :***

***Propriété : la somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$ .***

***Nous en déduisons la mesure du troisième angle :  $180^\circ - (43^\circ + 115^\circ) = 22^\circ$ .***

***Cela nous permet par exemple de vérifier qu'on a bien construit les deux angles donnés***

***Propriété : Si on connaît deux angles dans un triangle le troisième est déterminé.***

***Définition : Deux triangles qui ont les mêmes angles sont appelés triangles semblables.***

***\*\*Conjecture : Lorsque des triangles sont semblables, il semble que si on les superpose en faisant coïncider un angle (sommet et support des côtés, quitte à retourner le calque), les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.***

P relève les calques sur lesquels chacun écrit son nom et les re-distribue lors de la prochaine séance car ils sont nécessaires pour la suite. Il corrige les angles de mesures erronées.

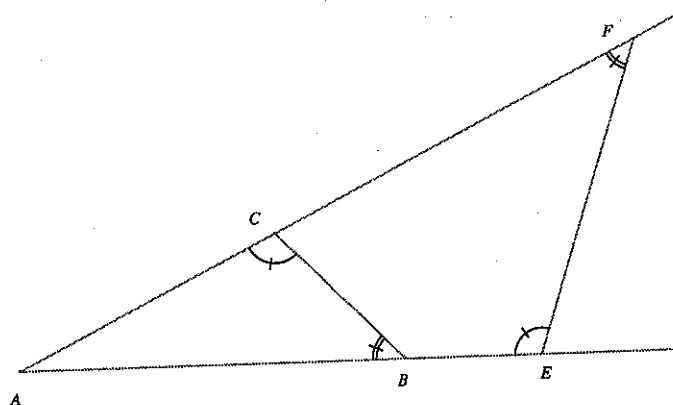
Le caractère relatif à l'étude est essentiel dans une activité ou un parcours (d'étude et de recherche). G. Sensevy (1994) a pu montrer que la dévolution aux élèves d'un espace (un *topos*) à partir duquel le savoir puisse apparaître comme le résultat d'une étude collective, menée par les élèves sous la direction du professeur, suppose que le dispositif rende les élèves « chronogènes » ; c'est-à-dire « constructeur du temps de l'étude ». En partant du point où en sont arrivés les élèves après constructions et comparaisons des triangles sur les calques et en poursuivant l'engagement dans une dialectique de l'expérimental et du théorique, l'étude nécessite contractuellement que la conjecture soit mise à l'épreuve d'une démonstration mathématique. Il apparaît naturel que cette recherche fasse l'objet d'un

travail mené dans un temps et un lieu extérieurs à ceux de la classe ; ceci afin de faire, dans un deuxième temps, avancer la reprise de l'étude en classe.

C'est donc l'objet d'un travail à la maison dont l'énoncé peut être construit en classe par les élèves, sous la direction du professeur qui articule ainsi chacune des étapes du travail d'étude : « Trace un triangle  $ABC$  de ton choix et construis un triangle  $AEF$ , semblable au triangle  $ABC$ , tel que les côtés  $[AE]$  et  $[AB]$  aient pour support la même demi-droite, ainsi que les côtés  $[AF]$  et  $[AC]$ . Démontre que les droites  $(BC)$  et  $(EF)$  sont parallèles. »

## Deuxième étape

Le travail donné à la maison est corrigé. Avoir engagé les élèves dans cette recherche permet de faire vivre un certain nombre de questions qui font partie d'une culture mathématique à transmettre, et qui se vit plus facilement qu'elle s'énonce. Ce « résultat » avait été établi dans le cadre d'une géométrie expérimentale : était-il prévisible, explicable, déductible du point de vue de la géométrie théorique dont on dispose ? Les droites sont-elles parallèles dans le cadre de cette géométrie ? De fait, certains élèves se sont peut-être aperçus que l'énoncé du problème méritait une sérieuse retouche si l'on souhaitait en faire un résultat valide dans le cadre de la géométrie théorique : il est nécessaire de préciser auquel des deux angles  $\hat{B}$  ou  $\hat{C}$  est égal chacun des angles  $\hat{E}$  et  $\hat{F}$  car, sinon, le parallélisme de  $(CB)$  et  $(EF)$  n'est pas garanti. C'est l'expérience « qui a parlé », en construisant au moins une figure qui vérifiait l'énoncé du problème, mais pas sa conclusion. De fait, pour une telle configuration, il est impossible d'utiliser le résultat théorique qui énonce que si les angles correspondants sont égaux alors les droites sont parallèles.

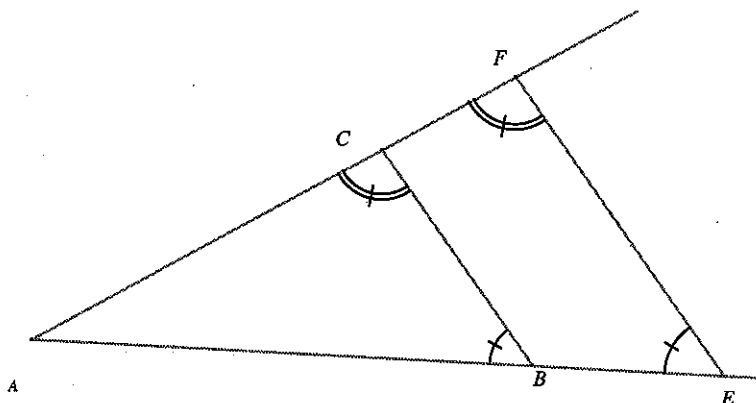


Si ce constat n'apparaît pas, du fait de la « transparence » entre similitudes directe et inverse évoquée plus haut et de l'adidacticité trop faible du milieu associé au problème posé, c'est alors au professeur de faire rencontrer à la classe l'insuffisance des hypothèses

du problème donné. Le nouveau travail qui vient d'être mené aboutit à l'institutionnalisation du résultat suivant :

**Propriété :**

*$ABC$  et  $AEF$  étant deux triangles semblables avec  $E \in [AB)$  et  $\hat{E} = \hat{B}$ ,  $F \in [AC)$  et  $\hat{F} = \hat{C}$ , alors les droites  $(BC)$  et  $(EF)$  sont parallèles.*



Une nouvelle question émerge alors, qui peut être amenée par des élèves car une certaine culture mathématique a commencé de s'installer en 4<sup>e</sup>, ou bien encore qui est posée par le professeur si ce n'est le cas : celle de la réciproque de la propriété qui vient d'être énoncée. En poursuivant le même objectif d'une continuité de l'étude entre les divers lieux et temps qui la voient se dérouler, le travail de recherche de la validité de la réciproque peut être mené à la maison, et guidé par un énoncé élaboré collectivement en classe.

« Soient un triangle  $EFG$  et une droite parallèle à  $(FG)$  qui coupe  $[EF]$  en  $P$ , et  $[EG]$  en  $R$ . Peut-on affirmer que les triangles  $EFG$  et  $EPR$  sont semblables ? Prouvez votre réponse. »

Revenant au cours de la séance, le professeur annonce : « Vous avez trouvé beaucoup de triangles semblables. Je vous mets au **défi** de construire sur chacun de vos calques, tous de même dimension, un triangle semblable aux autres, mais très grand ; celui qui aura construit le plus grand en respectant la condition de similitude aura gagné. C'est un travail individuel et le professeur distribue du papier transparent. Au bout des 10 minutes, dans chaque groupe, les élèves sélectionnent le plus grand des trois ou quatre triangles ; en même temps ils vérifient évidemment leur similitude. Puis collectivement la classe sélectionne le plus grand triangle parmi ceux proposés, en utilisant pour cela un rétroprojecteur.

La configuration devrait facilement s'imposer pour la comparaison et apparaître à ceux qui ne l'auraient pas encore rencontrée au cours de la première étape. Il est essentiel que la comparaison collective soit effectuée par des élèves (plusieurs), et que ce ne soit pas le professeur qui la fasse, en sortant de sa poche la configuration : les élèves font « coulisser » une parallèle à un côté, le plus loin possible sur leur calque, sachant par avance qu'ils obtiendront ainsi un triangle semblable au premier. Le professeur demande au vainqueur de présenter sa méthode et fait remarquer que les trois côtés « grandissent ensemble » ; lorsque cela semble ne pas être le cas, c'est que les triangles ne sont en fait pas semblables. Les élèves vérifient avec leurs triangles et tombent d'accord sur l'idée des trois côtés qui « grandissent ensemble ».

Le professeur propose alors que l'on fasse le point sur la question initiale qui portait sur les angles. Il apparaît qu'on y a répondu dans les divers cas qui se présentaient à la recherche – un, deux et trois angles – , dans la mesure où l'on vient de trouver des propriétés relatives aux côtés – certains sont parallèles – et à leurs longueurs – ils grandissent ensemble !

### **Troisième étape**

La correction du deuxième travail à rechercher à la maison permet de consigner un résultat :

#### ***Propriété :***

*Si dans un triangle  $EFG$ , une droite parallèle à  $(FG)$  coupe les côtés  $[EF]$  et  $[EG]$  respectivement en  $P$  et  $R$ , alors les triangles  $EFG$  et  $EPR$  sont semblables.*

Il s'agit maintenant d'utiliser le modèle « triangles semblables » pour prédire les résultats par le calcul. Pour cela, le professeur annonce qu'il a lui-même fabriqué un triangle qui suit les mêmes contraintes que celles des triangles de la séance précédente (question 2) : un triangle  $ABC$  avec  $\hat{A} = 43^\circ$  et  $\hat{B} = 115^\circ$ . Joignant le geste à la parole, le professeur présente le triangle découpé : « C'est bien un triangle semblable aux vôtres ? Vous pouvez vérifier si vous voulez ». Le triangle peut passer dans les groupes, mais le professeur le récupère avant de poser la question suivante. « J'ai choisi un côté  $[AC]$  de longueur 60 cm : pouvez-vous trouver la longueur des deux autres côtés ? ». Le choix de la longueur 60 cm implique pour les élèves de ne pas pouvoir dessiner le triangle en vraie grandeur, même sur une copie double qui correspond au format A3 ; l'activité a aussi été testée avec 63 cm et 66 cm, sans changement significatif dans le travail des élèves. En présentant un « grand » triangle, on plonge les élèves dans un milieu où la notion d'agrandissement – réduction devrait apparaître : l'espace de la feuille A 4 habituelle et celui du grand triangle n'ont pas la même

échelle. Il s'agit ici de passer du méso-espace au micro-espace (Berthelot & Salin, 1992). Un tel changement d'échelle contraint à recourir à l'utilisation de la proportionnalité en tant que pré-construit (Chevallard, 1985) adhérent à l'expérience empirique de la similitude. Cela n'empêche pas que pour une minorité parfois significative d'élèves, agrandir ou réduire renvoient encore à un raisonnement de type additif, comme nous avons pu l'observer pour des élèves de 3<sup>e</sup>. Certains élèves peuvent demander s'ils peuvent mesurer les longueurs des côtés du grand triangle pour les trouver. Le professeur répond que « non, on ne peut pas mesurer, et qu'il faut les trouver depuis sa place, en pouvant toujours vérifier sa méthode avec les triangles semblables déjà obtenus sur les calques ». On retrouve en ce point la problématique du calcul des « longueurs inaccessibles ». Certains élèves peuvent vouloir vérifier la similitude des triangles. Certains se restreignent à n'utiliser que les triangles qu'ils ont déjà construits, d'autres en construisent de nouveaux dont les longueurs sont adaptées à la technique qu'ils explorent.

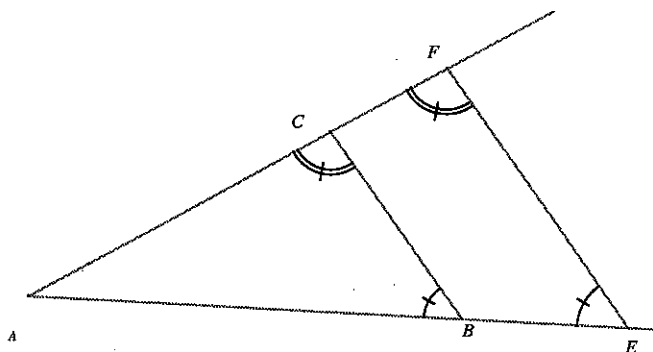
Quelques élèves ajoutent la même longueur à tous les côtés : cette méthode n'a souvent qu'une brève existence dans leur groupe, l'idée de la proportionnalité gagnant rapidement du terrain. Ceux qui se servent des triangles déjà construits trouvent en général un coefficient rationnel. Dès lors que l'un d'entre eux a « la chance » d'avoir un coefficient décimal, ou mieux entier, ou bien qu'un autre pense à construire un triangle *ad hoc*, l'idée diffuse très rapidement dans la classe. Les rationnels ne sont pas encore suffisamment familiers et les élèves les évitent dès qu'ils le peuvent... Ils passent alors de la mesure des côtés de leur triangle au calcul des côtés du grand triangle.

Une mise en commun des résultats a lieu : les propositions sont relevées dans **un tableau**. Dans ce cas, c'est le professeur qui décide du type d'ostensifs à utiliser : les élèves ont déjà, en acte, utilisé la proportionnalité des longueurs, il s'agit maintenant de l'identifier en... la donnant à voir. Ce qui est évidemment l'une des fonctions d'un ostensif (Bosch & Chevallard, 1999) !

| AC   | AB | BC |
|------|----|----|
| 60cm |    |    |
| 6cm  |    |    |
| 10cm |    |    |
|      |    |    |
|      |    |    |

Lors de la mise en commun, plusieurs groupes trouvent les mêmes résultats, alors qu'ils ont des coefficients de proportionnalité différents. La méthode est alors acceptée, y compris par ceux qui ont fait des erreurs de calcul ou de choix de côtés, et qui corrigent. La conjecture de proportionnalité des longueurs des côtés des triangles semblables est forte, car elle devient l'élément technologique justifiant la technique que l'on a précédemment mise en œuvre. Elle s'impose comme une nécessité éprouvée expérimentalement, même si elle n'est pas validée « en raison » : c'est-à-dire depuis la théorie géométrique. On peut donc noter :

**Conjecture :** *Si deux triangles sont semblables, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. En particulier, pour des triangles ABC et AEF dans la configuration suivante, les longueurs AB, AC et BC d'une part et AE, AF et EF d'autre part, sont proportionnelles.*



Une fois encore, le travail donné à la maison constitue un prolongement d'étude : à défaut de le démontrer, on peut vérifier que deux triangles semblables déjà dessinés ont leurs côtés proportionnels, les élèves disposant pour cela des divers triangles qu'ils ont dû dessiner en classe.

#### Quatrième étape

La séance débute par la correction de ce travail. On appelle  $A_1B_1C_1$  et  $A_2B_2C_2$  les deux triangles de chacun des élèves, et on dispose les longueurs dans un tableau, dont on recherche le coefficient de proportionnalité pour arriver à l'égalité des rapports. On écrit ensuite le théorème de Thalès dans les triangles en tant que synthèse du travail mené :

Nous venons de vérifier sur plusieurs cas que :

**Dans un triangle ABC :**

*Si E appartient à [AB) et F appartient à [AC), et si les droites (EF) et (BC) sont parallèles, alors on peut écrire :*

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF} \text{ ou } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}.$$

*C'est ce que nous appelons le « théorème de Thalès dans les triangles » et cette configuration géométrique est appelée « configuration de Thalès »*

### **En conclusion**

Si l'on demande à quoi sert le théorème de Thalès, il est fort probable que la réponse donnée par les élèves ayant vécu cette situation évoque la détermination de longueurs de segments, ceux des côtés d'un triangle, qui étaient hors de portée d'une mesure, et que cela correspond à un cas particulier de triangles semblables. Une autre des dimensions que cette proposition de début de PER tente d'atteindre est la conduite des élèves vers une rencontre avec la puissance du modèle mathématique dans sa confrontation à l'expérience : le modèle prédit les longueurs des côtés d'un « grand » triangle, c'est alors le modèle qui prédit comment doit être la réalité ! Des exercices à la maison relatifs aux distances inaccessibles trouvent alors leur sens, de même qu'a alors plus de chances d'en prendre l'enseignement des mathématiques... Comme indiqué dans les lignes qui ont précédé, l'étude se poursuit au Collège par la rencontre avec le théorème dans d'autres configurations, sa réciproque et les agrandissements / réductions, puis au Lycée par les cas de similitude, l'homothétie et les similitudes directe et inverse en tant que transformations. On dispose ainsi d'une esquisse de PER concernant les mathématiques de programmes s'étalant sur cinq à six années, et dont l'étude peut être relancée par des questions génératrices amenées par le professeur, en liaison avec les questions précédemment étudiées.

### **III. Enseigner le cosinus en 4<sup>e</sup> <sup>88</sup>**

Nous utilisons depuis une quinzaine d'années les recherches en didactique pour mieux comprendre les difficultés des élèves et aussi pour analyser et construire des situations d'enseignement. Nous sommes impliqués dans la recherche AMPERES mais le travail que nous allons vous présenter avait débuté avant cela, avec les mêmes objectifs. Nous avons publié un article sur le sujet dans la revue *Petit x* dès 2004 dont l'aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique était le titre.

---

<sup>88</sup> A. Berté - J. Chagneau - L. Conquer - C. Desnavres - J. Lafourcade - M.C. Mauratille - D. Roumilhac - C. Sageaux, équipe AMPERES, Groupe didactique de l'IREM de Bordeaux

### **1) Pourquoi le cosinus est-il enseigné comme première ligne trigonométrique en 4<sup>e</sup> ?**

Dans les actuels programmes de Collège, le cosinus doit être enseigné en 4<sup>e</sup> tandis que la tangente et le sinus ne sont abordés qu'en 3<sup>e</sup>. Ce primat donné au cosinus est un vestige des réformes successives de programmes. L'introduction du rapport de projection orthogonale – sans prononcer le mot de cosinus – d'un axe sur un autre a été faite pour la première fois en 3<sup>e</sup> lors de la réforme dite « des mathématiques modernes » de 1969. Il s'agissait d'admettre que le rapport de projection orthogonale d'un axe ( $D$ ) sur un axe ( $D'$ ) est le même que le rapport de projection orthogonale de ( $D'$ ) sur ( $D$ ). Dans cette construction théorique de la géométrie, le théorème de Thalès admis en 4<sup>e</sup> permettait de transporter la structure affine d'un axe à l'autre par projection d'une graduation. Cet axiome permettait en 3<sup>e</sup> de transporter la structure métrique, en l'utilisant pour définir la même unité sur tous les axes. L'axiome d'égalité du rapport de projection orthogonale servait à démontrer le théorème de Pythagore en 3<sup>e</sup>. Au cours des réformes successives la notion de rapport de projection, puis de projection même, a disparu des programmes. Le programme introduit maintenant le cosinus en partant des angles aigus d'un triangle rectangle. Le cosinus et le théorème de Pythagore sont appris actuellement en 4<sup>e</sup> mais sans lien nécessaire entre eux.

Des questions se posent : puisque tout lien a été rompu entre le cosinus et l'axiomatique de la géométrie métrique, pourquoi enseigner le seul cosinus en 4<sup>e</sup> ? Si on veut enseigner une seule ligne trigonométrique en 4<sup>e</sup> pourquoi le cosinus plutôt que la tangente ou le sinus ? En l'état actuel du programme, la tangente ne serait-elle pas plus utile pour organiser l'enseignement à partir de questions dévolues aux élèves : la tangente est en effet liée à la pente d'une droite, c'est-à-dire à l'alignement de points ?

Rien, dans les programmes actuels ou les commentaires, ne soulève une quelconque interrogation sur cette priorité donnée au cosinus. C'est l'un des acquis de la didactique que d'avoir rendu compte de ce phénomène : au fil des réformes successives, certaines notions continuent d'être enseignées alors que sont coupés les liens qui les rattachaient mathématiquement aux autres notions du programme. Or, en géométrie particulièrement, cette structuration théorique était souvent la seule source de sens conférée à l'ensemble de l'étude.

## **2) Enchaîner les questions pour aborder l'étude d'une ligne trigonométrique en 4<sup>e</sup>**

### **2. 1. Questions concernant les triangles**

Les élèves ont étudié en 5<sup>e</sup> la détermination des triangles par trois mesures : un côté compris entre deux angles, un angle compris entre deux côtés, ou trois côtés (cf. I). La conviction de la vérité de ces déterminations provient du fait que ces données permettent de les construire géométriquement. Une question se pose en 4<sup>e</sup> : « Combien d'éléments sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle ? »

La construction géométrique prouve que deux côtés suffisent, particulièrement l'hypoténuse et un côté de l'angle droit ; ce qui étonne car l'angle droit donné n'est pas compris entre eux. « Cela veut-il dire qu'avec la mesure de deux côtés quels qu'ils soient, on pourrait trouver par un calcul la mesure de tous les autres éléments du triangle rectangle ? Et si oui, comment ? » Plus généralement, puisqu'un triangle rectangle est déterminé par deux éléments seulement, un angle aigu et un côté ou deux côtés, « peut-on trouver la mesure de tous les autres avec ces deux éléments seulement ? » Les élèves savent déjà répondre en partie : la donnée d'un angle aigu permet de calculer l'autre car la somme des angles est égale à  $180^\circ$ . Il reste à répondre à trois questions :

- quand on connaît deux côtés, peut-on calculer le troisième ?
- quand on connaît deux côtés, peut-on calculer les angles aigus ?
- quand on connaît un angle aigu et un côté, peut-on calculer les autres côtés ?

Le premier problème est résolu grâce au théorème de Pythagore, l'étude d'une ligne trigonométrique permet de résoudre les deux autres. La question se prolonge pour les triangles quelconques : si on connaît les mesures de trois des éléments qui permettent de les construire, pourra-t-on calculer les autres ? Certains élèves de Collège peuvent poser la question. La réponse viendra plus tard, après le Collège.

### **2. 2. Questions concernant la similitude**

Les élèves de 4<sup>e</sup> savent que des triangles ayant deux côtés communs et les deux autres côtés parallèles ont leurs côtés proportionnels et ont les mêmes angles, d'après la propriété de Thalès (cf. II) étudiée avant le cosinus. Cela est également vrai pour les triangles rectangles : les côtés sont nécessairement parallèles s'ils ont un angle aigu commun. Dans ce cas, tous ces triangles rectangles ont donc leurs côtés proportionnels.

Inversement si on constitue une famille de triangles rectangles tels que les rapports entre deux de leurs côtés soient les mêmes, ont-ils les mêmes angles ? La connaissance d'une quelconque des trois lignes trigonométriques donne la réponse. Ceci amène les élèves à considérer la ligne trigonométrique comme étant caractéristique non pas d'un triangle rectangle précis, mais de toute une famille de triangles rectangles ayant un même angle ; cela les conduit finalement à l'idée que le rapport ainsi défini caractérise un angle aigu. Naturellement la question va se poser pour des triangles quelconques qui auraient un angle commun compris entre deux côtés proportionnels. La réponse viendra en 3<sup>e</sup> avec la réciproque du théorème de Thalès, puis s'élargira en 2<sup>de</sup> avec les cas de similitude des triangles.

### 2. 3. Questions concernant les angles

Depuis la 6<sup>e</sup>, nous répondons aux questions suivantes avec des outils différents selon les niveaux :

- Quand dit-on que c'est le même angle ? En 6<sup>e</sup> nous abordons cette question en utilisant une situation basée sur un puzzle, inspirée de la thèse de M-H. Salin et R. Berthelot. Un des premiers objectifs en 6<sup>e</sup> est d'arriver à la conclusion que la « grandeur » angle ne dépend pas de la longueur des côtés adjacents. Nous amenons ainsi, sans formalisation aucune, les classes d'équivalence de secteurs. Au Lycée, avec les angles orientés, le « même angle » signifiera « la même rotation ».
- Ces angles sont-ils mesurables ? Pouvoir reporter facilement une unité est nécessaire. Les élèves de 6<sup>e</sup> sont amenés à construire un appareil de mesure se rapprochant progressivement du rapporteur usuel.
- Comment obtenir le dessin d'un même angle sans avoir de rapporteur ? En 5<sup>e</sup>, conformément au programme, nous traitons les angles déterminés par deux parallèles et une sécante, la somme des angles d'un triangle, la détermination des triangles par la mesure des angles et des côtés. Ce dernier point conduit les élèves à trouver qu'un angle peut se reproduire par une prise d'information sur les longueurs des côtés d'un triangle arbitraire dans lequel on peut l'inclure. Cela nécessite donc la donnée de trois informations si le triangle est quelconque, et deux informations s'il est isocèle. De plus, les théorèmes appris permettent de prouver des égalités d'angles de façon théorique dans des figures particulières, et de calculer certaines mesures d'angle à partir d'autres, données sur la figure.

- Peut-on reproduire sans rapporteur, puis déterminer la mesure en degré d'un angle à partir d'un seul nombre qui serait un rapport entre deux côtés d'un triangle rectangle ? La réponse est donnée en 4°. Pour ne pas nous éloigner du programme, nous traitons le cosinus d'un angle comme fonction bijective de l'angle dans l'intervalle étudié. En 3°, le professeur complète cette étude en introduisant sinus et tangente d'un angle aigu. Le choix des côtés dans le triangle rectangle n'a pas d'importance, notre cheminement proposé pour la 4° avec le cosinus peut se transposer à l'identique, quels que soient les deux côtés choisis dans le triangle rectangle, au cas où les programmes changeraient.

Au Lycée, cette étude se poursuivra par l'étude des angles orientés et des fonctions trigonométriques comme applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Le cosinus se situe donc en 4° à la croisée de ces trois types de questions. Il reste à voir l'essentiel, et le plus difficile pour l'enseignant : comment amener les élèves à se poser ces questions, dans quel ordre et à partir de quelles situations ?

### **3) Analyse mathématique du contenu dans le cadre des programmes**

Voici ce que dit le programme de 4° : « Utiliser pour un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents » (*phrase 1*), « Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné et de l'angle aigu dont on connaît le cosinus » (*phrase 2*). Un commentaire rajoute : « La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueur. » (*phrase 3*).

Il y a implicitement dans cette leçon deux théorèmes.

***Enoncé 1 : Si des triangles rectangles ont un même angle aigu, leur hypoténuse et le côté adjacent à cet angle sont proportionnels. En d'autres termes : il existe un rapport de proportionnalité, donc une fonction linéaire permettant de passer des hypoténuses aux côtés, et une deuxième fonction qui, à un angle associe un rapport.***

***Enoncé 2 : Lorsqu'un côté de l'angle droit et l'hypoténuse sont proportionnels dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle aigu compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même. En d'autres termes : cette deuxième fonction est bijective pour les angles aigus, elle permet d'associer un rapport à chaque angle et réciproquement, et elle n'a rien de linéaire.***

L'énoncé 2 ne figure sous aucune forme dans les leçons des manuels usuels, bien qu'il soit nécessaire de l'appliquer ensuite dans des exercices. Par conséquent, ce qui se fait d'habitude dans les classes se réduit à amener l'énoncé 1. En effet, le libellé du programme n'incite pas le professeur à construire sa leçon autrement puisque les phrases 1 et 3 mettent plutôt en avant l'énoncé 1. C'est seulement dans la phrase 2, concernant la calculatrice, qu'on utilise le fait que le cosinus caractérise l'angle aigu ; comme s'il s'agissait d'une application technique de ce qu'on vient d'apprendre, alors que sans l'énoncé 2 on ne peut pas comprendre comment on peut trouver l'angle à partir du cosinus. Doit-on laisser à la présence d'une touche sur la calculatrice le soin de convaincre les élèves de l'existence d'une fonction cosinus intéressante ? Sans mise en scène du savoir, organisée par le professeur, la calculatrice ne sert guère qu'à résoudre des exercices d'école dénués de sens.

### **Passage des triangles aux angles**

Faire travailler les élèves dans plusieurs triangles rectangles amène une double difficulté : un triangle rectangle a deux angles aigus, le cosinus de l'un étant le sinus de l'autre. Il faudra surtout « oublier » les triangles si l'on souhaite parvenir à la définition du cosinus d'un angle, comme le demande le programme dans la phrase 2, et implicitement dès la phrase 1. Les énoncés 1 et 2 précédents doivent être formulés à nouveau sans référence aux triangles rectangles : à un angle correspond un cosinus et réciproquement. Il est donc nécessaire de ménager une troisième étape de reformulation des résultats en termes d'angles et non de triangles.

C'est donc *l'analyse mathématique* qui nous a permis dans un premier temps de distinguer deux étapes dans la progression et une nécessité de reformulation.

## **4) Enchaînement de problèmes et analyse didactique des situations au sens de la Théorie des Situations**

### **Situation 0 : Première situation en deux temps**

*Consigne 1* : Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure la moitié de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Trois conjectures sont prévisibles, qui ont effectivement été observées : ce sont les mêmes triangles mais à une échelle différente, ou bien c'est le même triangle qu'on agrandit et qu'on rétrécit ; un des angles mesure la moitié de l'autre ; il y a un angle de  $60^\circ$  et un autre de  $30^\circ$ . Une question surgit. La mesure des angles avec le rapporteur se fait au degré près :

peut-on être sûr de ce que nous apprendra l'usage de cet instrument ? Les élèves possèdent à ce moment-là un savoir suffisant sur le triangle équilatéral pour se convaincre, à partir de la théorie géométrique et en complétant la figure, qu'il s'agit bien exactement d'angles de  $30^\circ$  et  $60^\circ$ .

On passe ensuite à une deuxième consigne :

*Consigne 2 :* Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure les  $\frac{3}{4}$  de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Les élèves réalisent une vérification empirique de la conjecture sur les angles en découpant les trois triangles et en les « empilant » pour superposer les angles de même mesure. Contrairement au cas précédent, ils ne peuvent pas la prouver théoriquement. Ceci donne l'occasion au professeur de faire la distinction entre une conjecture prouvée théoriquement pour les angles de  $60^\circ$  et une conjecture admise quand le rapport est  $\frac{3}{4}$ . Le professeur peut demander à chaque élève d'écrire les mesures des côtés pour les trois triangles, de façon à préciser un rapport de proportionnalité faisant passer d'un triangle à l'autre.

Le bilan des échanges sur le tableau conduit à conclure qu'on passe d'un triangle à l'autre à l'aide d'un rapport variable sur les longueurs, mais que, par contre, il y a un rapport fixe qui est  $\frac{3}{4}$  entre hypoténuse et côté et à noter :

***Il semble que lorsque des triangles rectangles ont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse dans le même rapport de proportionnalité, alors ils ont les mêmes angles.***

Remarquons que ce bilan permet d'explicitier le fait que si les rapports sont les mêmes les angles sont les mêmes, mais garde dans l'implicite que si les rapports sont différents ( $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{4}$ ) les angles le sont. C'est la contraposée de la réciproque qui arrive en même temps que le théorème. Ceci est un phénomène très général. Quand le savoir visé est un théorème, et sa réciproque, l'organisation d'une situation en classe, même réduite à l'énoncé de simples conjectures comme c'est le cas ici, amène de façon amalgamée le théorème et sa réciproque sous forme de la contraposée de cette réciproque. Ce qu'on peut traduire par : si telle relation est vérifiée, on obtient la propriété attendue, si elle n'est pas vérifiée, la propriété n'est pas vraie. L'objectif de cette étape a été double :

- donner un sens à l'expression « rapport entre les longueurs des côtés du triangle rectangle », en faisant construire effectivement des côtés dans un rapport particulier.
- amener les élèves, à partir de deux cas particuliers, à l'idée du rapport de proportionnalité pour résoudre le problème qui va suivre pour lequel ils devront faire fonctionner, dans l'action, la réciproque : si les angles sont les mêmes alors les rapports sont égaux. C'est difficile car il y a plusieurs rapports de proportionnalité, et un seul doit être reconnu comme pertinent. Si cette étape manque, les élèves ne peuvent attaquer seuls le problème de l'étape suivante.

### **Situation 1 : problème de détermination d'une longueur dans un triangle rectangle**

#### **Dévolution du problème:**

Les élèves doivent tracer trois triangles rectangles ayant tous un angle donné de  $20^\circ$  ou de  $35^\circ$  : par exemple, une rangée trace trois triangles ayant un angle de  $20^\circ$  et la voisine trois triangles ayant un angle de  $35^\circ$ . Le professeur demande de mesurer les hypoténuses et les côtés adjacents à l'angle de  $20^\circ$  ou  $35^\circ$ . À ce moment, le vocabulaire « côté adjacent à un angle » est rencontré. Le professeur donne alors le problème suivant : « il annonce qu'il possède plusieurs autres triangles rectangles ayant aussi un angle de  $20^\circ$ , mais hors d'atteinte des élèves. L'un de ces triangles est tracé au tableau et son hypoténuse mesure 98 cm. Il s'agit de prévoir, pour ce triangle, la mesure du côté de l'angle droit adjacent à l'angle de  $20^\circ$ . Le professeur annonce qu'il posera ensuite le même problème pour les autres triangles qu'il détient, en donnant aussi la mesure des hypoténuses. Les élèves ne peuvent plus rien tracer ni mesurer, mais ils ont le droit de faire tous les calculs qu'ils veulent à partir des mesures déjà faites dans leurs triangles. »

Les élèves n'ont aucune connaissance théorique leur permettant de résoudre le problème de façon économique en utilisant le cosinus. Pour y parvenir, ils vont devoir s'appuyer sur un modèle implicite. Une fonction de l'étape précédente, dite situation 0, en était la construction. Les élèves disposent de deux méthodes pour résoudre ce problème dans une problématique de modélisation<sup>89</sup>.

---

<sup>89</sup> Nous utilisons pour l'enseignement de la géométrie la dialectique entre « problématique de modélisation » et « problématique géométrique ou théorique » au sens de ces mots introduits par R. Berthelot et M-H. Salin dans leur thèse. Nous avons explicité l'usage que nous en faisons avec des exemples au Collège dans notre article : « Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique » *Petit x*- n°65 -2004

- soit conjecturer que le rapport de deux hypoténuses entre elles est le même que le rapport de deux côtés de l'angle droit entre eux, éventuellement le vérifier avec les trois triangles tracés, et se servir des mesures sur l'un des triangles tracés pour résoudre le problème
- soit conjecturer que l'angle de  $20^\circ$  étant le même pour tous les triangles, il y a un rapport constant entre côté de l'angle droit et hypoténuse, puis tenter de vérifier cela empiriquement sur les trois triangles tracés, enfin, ayant déterminé un rapport « constant » aux erreurs de mesures près, s'en servir pour le calcul demandé.

### **Remarques sur les variables de la situation**

- Parmi les triangles dont il faut déterminer le côté, le professeur donne d'abord un grand triangle. En effet si la longueur de l'hypoténuse est voisine d'un mètre, l'erreur absolue sur la mesure du côté risque d'être grande en raison de l'utilisation d'un rapport approché, ce qui conduit à douter du modèle ; d'où la nécessité de la démonstration qui suivra.
- La consigne indique aux élèves qu'ils ne doivent plus rien dessiner dès que la question est posée. Pourquoi cette contrainte ? Si les élèves pouvaient tracer un autre triangle, ils pourraient avoir l'idée de tracer un triangle ayant un angle de  $20^\circ$  et dont l'hypoténuse mesurerait 9,8 cm par exemple (pour eux, le « même » en réduction). En multipliant la mesure du côté de l'angle droit par 10 ils obtiendraient le côté du triangle cherché. Mais comme aucun tracé supplémentaire n'est possible, ils ne peuvent utiliser que les triangles tracés avant d'avoir cette donnée ; ils sont donc contraints d'utiliser un rapport entre des hypoténuses qu'ils ne peuvent choisir, mais qu'ils doivent calculer. De ce fait, on tente de faire en sorte qu'ils privilégient les calculs des rapports entre côté et hypoténuse qu'ils viennent de voir dans l'étape précédente. Mais rien n'est exclu.
- Le professeur demande le même calcul pour plusieurs triangles (deux ou trois, pas plus). En effet, pour éprouver la fonctionnalité du cosinus il faut que le problème se répète plusieurs fois pour le même angle de  $20^\circ$ . Les élèves s'aperçoivent alors qu'un seul rapport donne tous les résultats, tandis qu'une proportionnalité d'un triangle à l'autre oblige chaque fois à refaire les calculs puisque le rapport change.

### **Passage à une problématique géométrique**

Les élèves doivent d'abord conjecturer le modèle de la proportionnalité, calculer les rapports des côtés aux hypoténuses, trouver des nombres sensiblement différents pour enfin douter de la proportionnalité. S'ils jugent le modèle proportionnel assez fortement adapté à la situation, ils passent outre et choisissent un rapport moyen pour faire le calcul. La

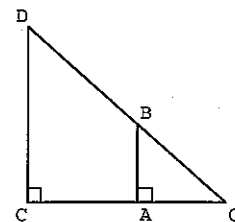
vérification avec le grand triangle montre une erreur absolue assez grande : une preuve théorique de cette proportionnalité est la bienvenue.

Certains élèves ont l'idée de découper leurs triangles ou de les dessiner à nouveau de façon à obtenir des triangles « empilés » comme cela a été fait dans l'étape précédente à titre de vérification empirique. Dans ce cas, l'égalité des angles n'est plus une conclusion mais une hypothèse.

Le théorème de Thalès réduit au triangle est au programme de la classe de 4<sup>e</sup> ; à savoir que le parallélisme entraîne l'égalité des rapports.

Dans la figure ci-contre, on sait que,

les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  étant parallèles :  $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ .



Mais les élèves ne savent pas que  $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$  ; c'est la conjecture à démontrer.

Il s'agit d'une simple inversion des moyens dans la proportion, mais un tel théorème sur les proportions n'est plus disponible, car plus enseigné. Il faut donc le retrouver dans ce cas particulier en passant par l'égalité :  $OA \times OD = OC \times OB$ . Pour cette raison, il est probable que le professeur soit obligé d'aider les élèves. La capacité des élèves à prendre une preuve en charge dépend, entre autres, de la disponibilité de théorèmes antérieurs ; c'est-à-dire de la cohérence d'une progression qui n'est pas toujours bien assurée dans les programmes. Au moins a-t-on fait éprouver, par les élèves, la nécessité de cette preuve.

Le bilan de la situation 1 est le suivant :

**Enoncé 1 (démontré) :** *Si des triangles rectangles ont le même angle aigu, le rapport entre côté adjacent et hypoténuse est le même.*

**Conjecture :** *Pour des angles différents les rapports sont différents. (C'est la contraposée de l'énoncé déjà envisagé sous sa forme directe dans la situation 0).*

## Situation 2 : problème de détermination d'un angle dans un triangle rectangle

Le professeur annonce qu'il possède un triangle rectangle inaccessible aux élèves dans lequel le rapport entre un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse est  $\frac{3}{10}$ . Les élèves doivent trouver la mesure des angles de ce triangle, les instruments de dessin étant à leur disposition. Une erreur d'un demi-degré est permise.

Les élèves utilisent la proportionnalité des côtés des triangles rectangles, conjecturée dans la situation 0. Dans la situation 1, avant de poser la question relative au côté du triangle inconnu, le professeur demandait aux élèves de construire des triangles rectangles de leur

choix avec un angle donné. Désormais, ils ont à leur charge la construction d'un triangle rectangle semblable à celui du professeur, la mesure attendue étant celle de l'angle.

*Bilan de la situation 2 :* Quand l'hypoténuse et un côté de l'angle droit sont dans le rapport  $\frac{3}{10}$ , l'angle qu'ils font est le même pour tous les triangles ainsi tracés ; il mesure environ  $72,5^\circ$ . On peut trouver la mesure de l'autre angle en en prenant le complémentaire. Ceci ne permet pas d'être certain du résultat mais, au minimum, de ne pas donner des mesures en désaccord avec le théorème sur la somme des angles du triangle connu depuis la 5<sup>e</sup> : on sait qu'il faut trouver  $17,5^\circ$  à un demi-degré près. Les élèves peuvent alors vérifier que le rapport entre le côté adjacent au deuxième angle aigu et l'hypoténuse est lui aussi constant dans tous les triangles, en accord avec l'énoncé 1.

#### **Enoncé 2 admis :**

*Lorsque le rapport entre un côté de l'angle droit et l'hypoténuse est le même dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même dans tous les triangles. L'autre angle aigu est aussi le même.*

#### **Situation 3 : définition du cosinus et exercice**

*Définition :* Le professeur donne la définition du cosinus de l'angle aigu d'un triangle rectangle comme rapport entre côté adjacent et hypoténuse et fait reformuler l'énoncé 1 en utilisant le mot « cosinus » :

*Si des triangles rectangles ont un même angle aigu, le cosinus de cet angle est le même.*

*À un angle donné est donc associé un nombre, son cosinus, qui est compris entre 0 et 1.*

Ceci permet d'utiliser l'expression « cosinus d'un angle » sans référence à un triangle rectangle particulier.

*Exercice :* Parmi différents triangles rectangles dessinés sur une feuille, avec indications des mesures de leurs côtés, trouver ceux qui ont les mêmes angles.

#### **Situation 4 : reproduction d'un angle non inclus dans un triangle rectangle**

*La consigne :* Le professeur dit qu'il détient un angle et le montre rapidement de loin (plusieurs feuilles pourront circuler dans la classe au moment de la validation). Le professeur fait remarquer que sur son dessin il n'y a pas de triangle rectangle, seulement un angle. Le professeur annonce un cosinus de 0,25 pour cet angle. Les élèves doivent dessiner l'angle du professeur et la validation se fera par superposition. Une erreur d'un demi-degré est permise. Les élèves n'ont pas de calculatrice.

*Remarque sur la variable* : au lieu de le présenter sous forme de fraction dont numérateur et dénominateur permettraient de trouver les deux mesures nécessaires à la construire de l'angle – en les multipliant si nécessaire par un même facteur –, on choisit un rapport décimal. Si l'angle dessiné par l'élève ne coïncide pas à un demi-degré près avec celui du professeur, l'élève devra être certain qu'il s'agit de sa part d'une erreur de tracé qui ne remet pas en cause son modèle ; et donc trouver cette erreur de tracé. Dès que l'existence de cette fonction cosinus bijective sera établie de manière certaine, l'élève utilise une machine qui lui donne avec toute la précision désirée la valeur de l'angle ou la valeur du cosinus. Une nouvelle formulation de l'énoncé 2 est institutionnalisée :

***A tout nombre entre 0 et 1 est associé un seul angle si ce nombre est donné comme le cosinus de l'angle.***

C'est une formulation difficile. Elle arrive à la fin de cette progression.

## **Perspectives, développements macro-didactiques**

L'objet du travail mené au sein du projet AMPERES n'est pas de fournir aux professeurs des ingénieries « clé en mains ». Certaines contraintes portant sur l'usage d'ingénieries ont été volontairement levées. Ainsi, l'ambition du projet n'est pas de produire une série de situations dont les dialectiques permettraient de faire construire le savoir par la classe ; ce type d'enseignement nécessite des professeurs disposant de la théorie didactique et sachant l'utiliser. L'état actuel des connaissances professionnelles enseignantes ne permet pas de remplir cette condition. De même, plutôt que de ne recourir qu'au seul registre des connaissances disponibles des élèves, il a été décidé la mise en œuvre, lorsque nécessaire, d'une dialectique des médias et des milieux ; certaines informations ou connaissances nécessaires au bon déroulement de l'étude des tâches problématiques peuvent être recherchées par les élèves eux-mêmes dans divers médias (manuels, Internet, discussions avec d'autres personnes plus avancées telles que des élèves plus âgés ou des parents), ou encore fournies par le professeur.

Avec l'ensemble des matériaux didactiques permettant la construction *a priori* des propositions d'enseignement, et les analyses *a posteriori* conduites après les avoir expérimentées dans des classes « ordinaires », l'ambition de ce travail est plutôt de fournir aux professeurs des fiches de direction de l'étude organisées autour de « balises » constituées des questions cruciales *fondées en raison et nécessitées par l'étude*. C'est une démarche inverse de celle des activités des manuels qui ne constituent souvent que les seules aides professionnelles auxquelles recourent les professeurs. Il s'agit de leur donner

des outils leur permettant de dépasser des jugements d'évaluation de cours souvent réduits à des énoncés du type « ça a marché » ou au contraire « ils n'ont pas accroché », de comprendre un certain nombre de phénomènes didactiques afin de les anticiper et les contrôler, et de leur fournir des dispositifs viables car bâtis à partir de la théorie didactique et observés dans les classes. Un certain « jeu » est laissé au travail du professeur dès lors qu'il dispose de la connaissance des matériaux sur lesquels s'appuie la construction des propositions d'enseignement. D'une part, il lui est signifié que la modification des propositions est possible, mais qu'elle engage vers des conséquences didactiques dont on peut anticiper les effets si l'on dispose des outils théoriques ; ceci l'incite à davantage assumer en conscience sa responsabilité professionnelle. Dans ce sens, à travers la lecture exigeante des matériaux fournis, il s'agit aussi d'un dispositif de formation des professeurs en leur donnant des outils pour une autonomie professionnelle. D'autre part, l'existence d'un « jeu » pour le professeur est garantie du fait qu'une partie de la relation didactique est toujours non déterminée par avance ; les propositions faites visent à réduire cette indétermination, mais une part des phénomènes contingents ne peut être anticipée. Retrouvant la problématique de laquelle nous sommes partis, et dont l'objet était la perte de sens de l'étude des mathématiques éprouvée par les élèves, une autre des dimensions visées par le projet AMPERES tient enfin dans la volonté d'apporter la preuve d'un enseignement possible à partir d'AER et PER au sein des classes du système éducatif secondaire. Il s'agit ainsi de faire vivre dans les classes les idées suivantes :

- le rapport à l'autorité vient du savoir et cela crée de l'autonomie pour l'étude
- l'erreur est normale : elle est inhérente à la construction et engage à son dépassement
- l'élève peut être « chronogène » et accepte alors le temps long de la recherche
- les mathématiques prennent du sens quand elles sont vécues comme réponses à des questions que l'on a collectivement instruites