

Le diagnostic de l'aide à l'étude, en mathématiques : analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde

Abdulkadir ERDOGAN

Université Anadolu-Turquie

Introduction

Dans ce séminaire je vais vous présenter mon travail de thèse que j'ai soutenu l'année dernière à l'Université Paris 7 (Erdogan, 2006). Sous l'angle de diagnostic, cette thèse avait l'ambition de contribuer à l'avancement de la problématique d'étude et d'aide à l'étude en mathématiques. Elle portait sur la classe de Seconde et sur la partie algébrique et fonctionnelle du programme de cette classe.

L'objet de ma recherche était donc la notion d'étude, plus précisément la notion d'étude autonome, plus précisément encore la notion d'étude autonome de l'élève, c'est-à-dire cette part du travail scolaire où l'élève doit agir seul (maîtrise du cours, exercices d'entraînement, révisions, devoirs à la maison, préparation de contrôle, etc.), de sa propre initiative, à partir d'apports magistraux et du travail collectif de la classe.

L'étude autonome se trouve à l'origine des phénomènes didactiques qui prennent aujourd'hui une importance particulière : malgré l'insistance des textes officiels sur son importance pour la réalisation des apprentissages visés par l'école et malgré la mise en place de nouveaux dispositifs d'enseignement (Travaux personnels encadrés, enseignement modulaire, aide individualisée...), la force est de constater que l'étude autonome des élèves leur pose de vrais problèmes. Cela engendre pour de nombreux élèves un besoin d'aide et d'accompagnement, besoin dont témoignent aujourd'hui les questions massivement posées par les élèves sur Internet et l'expansion extraordinaire du système de cours particulier. De tels systèmes proposent alors une aide à la réalisation mais semblent totalement ignorer les enjeux de l'étude autonome pour les apprentissages et les conditions nécessaires à une aide efficace.

Identifier les enjeux de l'étude autonome pour les apprentissages, en l'occurrence pour les apprentissages mathématiques, et déterminer les conditions appropriées de sa réalisation

c'est là que réside en effet toute la question. Comme c'est une question jusque là très peu étudiée en didactique, elle faisait pour moi appel à une approche "diagnostic".

J'ai donc formulé ma problématique en termes de construction d'un diagnostic, en considérant cela comme étape nécessaire et comme préalable à toute proposition de remédiation et d'amélioration des conditions de l'étude. L'objectif était alors de dégager des éléments constitutifs d'un diagnostic, ce qui demandait la mise en œuvre d'un système d'interprétation et d'un outil d'analyse.

Il existe sans doute une multitude d'approches possibles pour un diagnostic, chacune pouvant fournir des interprétations dans le cadre choisi. En adoptant un point de vue strictement didactique et en m'appuyant sur un certain nombre de situations d'aide qui s'avèrent problématiques, j'ai considéré que l'étude autonome est essentiellement déterminée par et dans le travail à réaliser, c'est-à-dire que ce sont les enjeux et les objets des situations d'étude qu'il convient d'étudier pour un diagnostic. Ainsi, quels sont les enjeux et les objets des situations d'étude proposées aux élèves ? Comment nous pouvons les décrire ? Comment ces enjeux et ces objets se présentent aux élèves et interviennent dans leurs activités ?... telles sont les premières questions auxquelles j'ai été amené à chercher une réponse. Pour mieux fonder l'étude théorique que je vais vous présenter, je commencerai ici par une petite analyse de deux situations d'étude apparemment simples qui font pourtant problème.

Etude préliminaire

Première situation

La première situation est issue des observations dans le cadre de ma thèse, c'est-à-dire qu'elle est relative aux travaux algébriques et fonctionnels de la classe de Seconde. L'énoncé du problème est le suivant :

"Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$. Etudier le sens de variation de f sur $[4; +\infty[$ "

C'est une réelle situation d'étude autonome pour les élèves. Je préciserai plus tard les circonstances de son observation. Ici analysons la question d'un point de vue mathématique seulement :

Il s'agit donc d'étudier le sens de variation d'une fonction du second degré, un objet explicite du programme de la classe de Seconde. L'expression est donnée sous une forme

appelée, dans le cours et dans les manuels, "la forme canonique". On aurait pu très bien avoir cette expression sous d'autres formes, soient $-4(x^2 - 8x + 15)$ et $-4(x-3)(x-5)$ deux autres formes de cette expression. On peut tout de suite voir qu'on n'a pas dans ces deux derniers cas les mêmes outils "sémiotiques" pour attaquer le problème, notamment au niveau de la classe de Seconde où le problème est posé. Par contre l'expression donnée dans l'énoncé nous permet facilement de déterminer les variations de cette fonction, soit le raisonnement suivant : on peut transformer l'expression de $4-(2x-8)^2$ en $4-Y^2$ sachant qu'ici on opère le changement de variable $Y = 2x-8$. L'expression $4-Y^2$ indique une parabole. Le coefficient de Y est négatif, alors la parabole est vers le bas. Donc la fonction a un maximum et ce maximum est 4. On peut facilement voir avec calcul que ce maximum est atteint en 4. Alors la fonction est croissante sur $]-\infty;4]$, ensuite décroissante sur $[4;+\infty[$.

Quels sont donc les objets qui interviennent dans cette procédure et en général, quels sont les objets mathématiques qui interviennent, qui ont une pertinence dans une question qui demande d'étudier les variations d'une fonction du second degré? D'abord le concept d'expression algébrique du second degré, ensuite le concept de fonction et le concept de parabole, enfin le concept de changement de variable qui est important. Bien entendu tous ces concepts ne sont pas de même importance et n'interviennent pas de la même façon dans la résolution. Ici, le concept de fonction permet le calcul algébrique et le calcul numérique, le calcul algébrique et le concept de parabole permettent de s'assurer de l'existence de deux racines réelles et le concept de changement de variable permet de mettre en œuvre une technique.

Quelle autre technique pouvons-nous mettre en œuvre pour cette question? On peut se servir de la définition de monotonie et étudier le signe de la différence des images par f de deux réels pris dans l'intervalle donné. Cette fois-ci, on aura plus à faire à des expressions algébriques, à leurs transformations et au concept de comparaison ou plus généralement au concept d'ordre. On peut se servir encore d'autres fonctions dont les variations sont connues pour en déduire les variations de la fonction composée (la fonction carré et la fonction affine par exemple). Cette fois-ci on sera plus dans le travail fonctionnel et l'un des concepts qui aura une importance particulière sera le concept, encore une fois, de changement de variable. Nous verrons ainsi qu'un réseau d'objets et de concepts s'organise rapidement autour d'une question qui demande d'étudier le sens de variation d'une fonction du second degré :

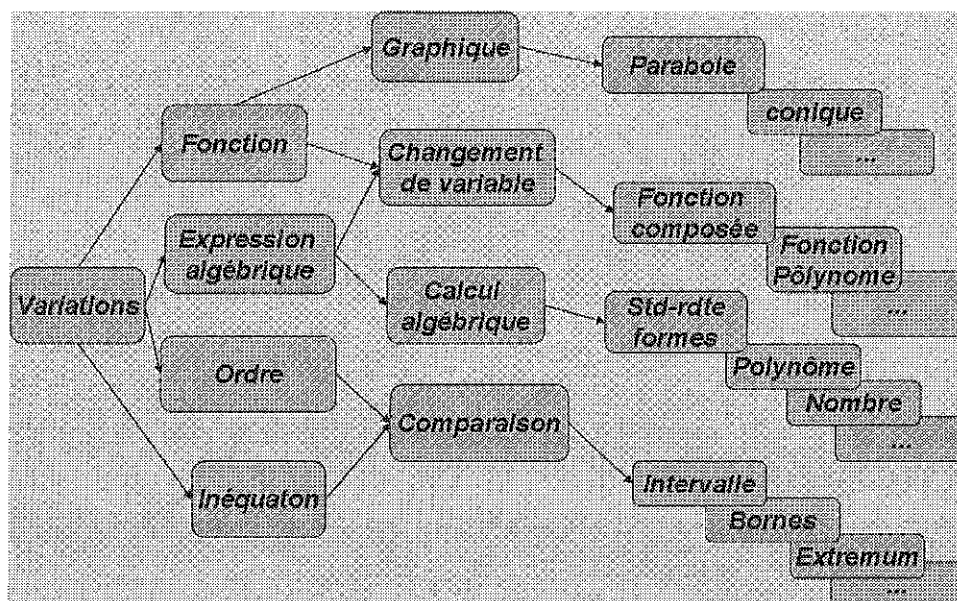


Schéma 1 : Les objets mathématiques de la tâche "étudier les variations d'une fonction du 2 degré"

Par conséquent, nous pouvons dire que l'étude d'un objet mathématique met en place un certain nombre d'objets et des relations parmi ces objets, chacun jouant un rôle particulier dans l'activité. Je qualifierai ceci en disant que c'est la dimension épistémique de l'activité mathématique, c'est-à-dire que c'est un tel agencement des objets mathématiques qui donne sens à la situation et lui assure une dimension autonome.

Mais le contrat didactique peut altérer la structure épistémique de l'activité mathématique, voire complètement la changer. La technique ci-dessous illustre bien ce phénomène :

Soient a et b deux réels tels que $4 \leq a < b$
alors $8 \leq 2a < 2b \Rightarrow 0 \leq 2a - 8 < 2b - 8$. Donc $2a - 8$ et $2b - 8$ sont deux
nombres positifs rangés dans l'ordre croissant, et comme la fonction carré est
croissante sur $[0; +\infty[$, on peut écrire $(2a - 8)^2 < (2b - 8)^2$. Ensuite

$$-(2a - 8)^2 > -(2b - 8)^2$$

$$4 - (2a - 8)^2 > 4 - (2b - 8)^2$$

$$\text{donc } f(a) > f(b)$$

Conclusion : pour tout a et b de $[4; +\infty[$ tels que $4 \leq a < b$, $f(a) > f(b)$. Donc la
fonction $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$ est décroissante sur $[4; +\infty[$.

Il s'agit de la technique de résolution proposée par les manuels et mise en œuvre par les professeurs en classe. C'est une technique purement algébrique. Mais dans cette technique, on demande de se référer à moment donné aux variations de la fonction carré, pour la simple raison que la fonction carré est un objet explicite du cours comme fonction de référence et que le professeur est obligé de créer les conditions de son usage. À cet effet, il

propose une combinaison artificielle et non réussie des techniques algébrique et fonctionnelle. Je montrerai plus tard combien ce jeu du contrat didactique a eu des conséquences fâcheuses sur le travail des élèves. Prenons maintenant une seconde situation où nous avons encore à faire à la fonction carré et à ses variations.

Deuxième situation

Il s'agit cette fois-ci d'une question venue sur un de ces forums mathématiques sur Internet. Elle est également relative aux travaux algébriques et fonctionnels de la de la classe de Seconde. Analysons rapidement l'énoncé de la question ainsi que la réponse fournie sur le forum⁴⁰:

II- Encadrement de $\sqrt{1+x}$

Soit x un réel strictement positif. On pose: $A = \sqrt{1+x}$, $B = 1 + \frac{x}{2}$, $C = \frac{x^2}{8} + \sqrt{1+x}$

1- Montrer que A , B et C sont strictement plus grand que 1

Réponse : A : Utilise la croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$

B : Pas dur

C : Tu as $C \geq A > 1$

2- Comparer A^2 et B^2 . En déduire que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$

Réponse : Développe et mets tout du même côté (pour comparer A^2 et B^2)

Croissance de la fonction carré (pour en déduire que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$)

3- Prouver que $C^2 - B^2 = \frac{x^2}{4}(\frac{x^2}{16} + \sqrt{1+x} - 1)$

Réponse : Développe et mets tout du même côté

Comparer B^2 et C^2 . En déduire que $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$

Réponse : Croissance de la fonction carré

Note: Nous venons donc d'établir l'encadrement suivant de $\sqrt{1+x}$:

Pour $x > 0$, $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$

4- Donner sans calculatrice un encadrement de $\sqrt{1,0002}$ et une valeur approchée de $\sqrt{1,0000001}$ à 10^{-14} près.

Réponse : Même méthode que précédemment

Voilà.

⁴⁰ Pour une analyse plus détaillée de cette question, voir (Erdogan & Mercier, 2007).

A chaque fois, on demande de comparer deux de trois nombres donnés pour en déduire un encadrement et à la fin cet encadrement va devenir une technique pour comparer et donner les valeurs approchées d'un certain type de nombres. Même en regardant la réponse donnée sur le forum (*utilise la croissance de la fonction carré...*), on s'aperçoit tout de suite qu'on a à faire à la fonction carré, mais pas seulement :

Ce sont d'abord des expressions algébriques qui sont convoquées et amenées à être comparées. La comparaison en question s'appuie sur le concept de relation d'ordre comme un objet du second plan qui s'appuie lui-même sur le concept de relation binaire. Mais ce passage fait intervenir le concept de fonction (approximation, croissance, développement limité) et les problématiques d'analyse (infinitésimal, continuité, limite). C'est ainsi qu'une technique s'organise autour des fonctions particulières faisant ainsi référence : fonction $1/x$, fonction x^2 (fonctions de référence explicite du programme de la classe de Seconde) et fonctions polynômes (référence implicite pour les procédures d'approximation : $1/(1+x)$ comparé à $1+x$). Soit le schéma suivant :

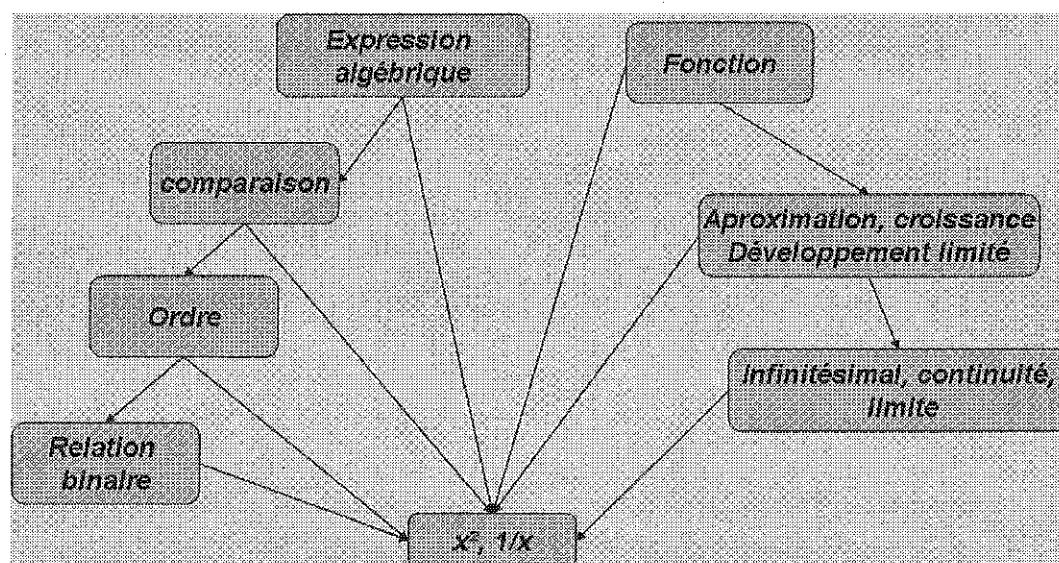


Schéma 2 : les objets mathématiques de la situation convoquée par la question d'encadrement ci-dessus.

Là encore, le contrat didactique alterne le jeu parce qu'il ne désigne pas l'usage des variations de la fonction carré comme une nécessité interne à la technique à mettre en œuvre mais indique simplement un usage possible de cet objet.

Sans développer davantage ici ces arguments, je vais reprendre ma remarque précédente et dire que l'étude autonome a deux dimensions : une dimension épistémique et une dimension contractuelle. Je vais faire l'hypothèse que si l'étude autonome est

essentiellement gérée par le contrat didactique, ne serait-ce que pour parler d'autonomie, la dimension épistémique doit être formulée comme une dimension régulatrice. Dans la suite, je tenterai d'expliquer la formulation adoptée dans le cadre de cette thèse.

L'Approche théorique

En références aux situations précédentes, nous pouvons dire que l'activité mathématique fait intervenir, ne serait-ce que par le besoin d'identification des tâches et par la nécessité de création de techniques, un vaste champ d'objets mathématiques et de relations parmi ces objets, un champ que nous avons convenu d'appeler *un site mathématique*, en référence au site archéologique où on effectue des fouilles :

Le champ des objets mathématiques dont l'étude se révèle pertinente ou est supposée telle pour la connaissance d'un objet scientifique donné, O , peut être considéré comme un réseau d'objets et de relations, *le site mathématique de O* . Certains de ces objets et relations sont visibles, d'autres sont cachés. Pour chaque sujet en position d'étudiant, le site mathématique se présente sous forme d'un champ de signification, d'investigation et d'expérience suffisamment stable, à son échelle, pour conférer à son étude un référentiel fiable [Duchet & Erdogan, 2005].

Cela nous permet de considérer que l'étude autonome est essentiellement déterminée non par la production de réponses à une question posée - ou à une tâche problématique - mais par la construction d'un rapport aux objets du site relatif à cette question.

Suivant ce point de vue, j'ai fait l'hypothèse que l'écologie des objets de savoir en situation d'étude est marquée par un fort déséquilibre entre les dimensions contractuelle et épistémique. L'étude se régule pour l'élève par des interprétations du contrat, la conformité au contrat devenant le mode de contrôle dominant.

Pour étudier cette hypothèse de diagnostic, j'ai conçu une analyse en termes de site. J'ai considéré qu'il faut d'abord mettre en évidence la partie émergente du site mathématique supportant l'étude des objets du programme ou d'une partie du programme d'une classe donnée, ensuite analyser l'écologie scolaire de ce site. J'ai supposé que le degré d'adéquation entre ce que révèlent ces deux niveaux d'analyse, éclairé avec les résultats de l'examen complémentaire de la dimension institutionnelle de l'étude autonome, permettrait de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves dans les situations d'étude autonome réelles, les contraintes et les conditions de l'étude qui déterminent les choix du professeur et les actions des élèves et ainsi d'établir un diagnostic.

La démarche expérimentale

L'étude autonome étant de cette manière située sur un plan théorique précis et une hypothèse testable étant proposée, ma démarche expérimentale a d'abord fait intervenir deux choix essentiels : le premier est celui d'une institution d'observation, le second est celui d'un corpus d'étude.

J'ai choisi de mener ma recherche au niveau de la classe de Seconde, parce qu'elle apparaît avec les enjeux du contenu du programme et les modalités de l'enseignement dispensé à ce niveau comme une institution spécifique de l'étude. J'ai choisi de centrer mes analyses sur la partie algébrique et fonctionnelle du programme parce que cette partie constitue l'objet d'un véritable enjeu pour l'enseignement et appelle à un site important.

Plus précisément, le programme de la classe de Seconde est composé de trois chapitres : "*statistique*", "*calcul et fonctions*", "*géométrie*". Les objectifs du chapitre "*calcul et fonction*" qui nous intéresse sont présentés comme :

- Approfondir la connaissance des différents types de nombres
- Expliciter sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction
- Etudier quelques fonctions de références, préparant à l'analyse
- Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration
- Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques

Ces objectifs sont aussitôt suivis d'une explication :

La plupart de ces activités concernent les trois années de lycée. Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions [...]

C'est ainsi qu'un site algébrique-fonctionnel d'une grande importance se trouve impliqué derrière l'étude demandée à ce niveau relativement à l'algèbre et aux fonctions.

Même si les sujets de l'étude autonome sont les élèves, ma démarche devait également prendre en compte le travail du professeur comme directeur et organisateur de l'étude et le savoir dans ses dimensions à la fois épistémique et institutionnelle. En fonction de ces trois axes, j'ai retenu trois catégories de variables : les variables institutionnelles qui sont relatives à des moments et à des lieux d'étude institutionnellement reconnus (apprentissage du cours,

révisions, résolution d'exercices... en classe, à la maison ou dans d'autres dispositifs)⁴¹; les variables épistémiques qui sont relatives au domaine mathématique considéré (absence et ou pertinence des objets et des relations); les variables éducatives et socioculturelles qui sont relatives aux facteurs discriminants de l'étude (établissements, parcours scolaires, expériences des professeurs, etc.), et j'ai fait un recueil de données allant des observations aux productions écrites des élèves.

Les étapes de la construction d'un diagnostic

Il me fallait désormais concevoir un plan d'exploitation de ces données comme diverses étapes de la construction d'un diagnostic. Conformément au modèle d'analyse proposé, j'ai d'abord choisi d'explorer les *topos* mathématico-épistémiques des élèves et du professeur relativement à la partie algébrique et fonctionnelle que j'appellerai désormais le site algébrique-fonctionnel. J'ai ensuite choisi d'examiner leurs *topos* institutionnels à travers une construction des classes comme institution, et tout ceci avant d'aller voir comment ses *topos* trouvent leurs places respectives en classe, comment le *topos* des uns et des autres se définissent, évoluent et se délimitent.

En consacrant d'abord mes analyses au site algébrique-fonctionnel, je l'ai conçu comme un repère avec les questions suivantes:

- En quoi consiste le site algébrique-fonctionnel ?
- Comment ce site devient un domaine d'étude tout au long du cycle secondaire (dès la classe de Sixième jusqu'en classe de Terminale en passant par la classe de Seconde) ?
- Comment les transitions arithmétique - algèbre - analyse ont-elles lieu ?
- Quels sont les phénomènes de rupture ou de continuité qui s'y observent ?
- Comment ces phénomènes peuvent intervenir dans les actions du professeur et dans l'étude autonome des élèves ?

J'ai ensuite centré mes analyses sur la dimension institutionnelle de l'étude autonome, de manière à pouvoir identifier le rapport à l'étude de ses sujets (élèves-professeur), les moyens que les élèves semblent avoir à leur disposition pour étudier et les moyens dont disposent les professeurs pour organiser l'étude et pour aider à l'étude.

⁴¹ Notons que cette catégorie de variable est celle qui fait souvent l'objet des travaux sociologiques lorsqu'ils se proposent d'étudier ce qu'ils appellent « *le travail scolaire* » des élèves. (Barrère, 1997 ; Félix, 2002 ; Perrenoud, 1994).

L'angle d'attaque principalement choisi ici est celui de la notion de *contrat d'étude*, c'est-à-dire la composante spécifique du contrat didactique relatif à l'étude. Quelles sont les caractéristiques de l'institution - classe de Seconde vis-à-vis de l'étude autonome ? Quel est le contrat d'étude que les professeurs essaient d'installer dans leurs classes ? Comment ce contrat est compris par les élèves ?... mais aussi, comment le site, en l'occurrence le site algébrique-fonctionnel, est perçu par l'institution, par les élèves et par les professeurs ?... telles sont les questions qui ont guidé cette partie.

Les résultats des analyses précédentes ont alors permis de pénétrer au cœur de l'activité des classes pour y étudier plus finement les conditions et les contraintes pesant sur le *topos* des élèves. À propos du contrôle - moment d'étude crucial et enjeu didactique important aussi bien pour les élèves que pour le professeur - j'ai d'abord mis en œuvre une analyse *a priori* du sujet du contrôle grâce au repère fiable que fournissait l'étude du site algébrique-fonctionnel. Il s'agissait de regarder quelle est la partie du site algébrique-fonctionnel qui est enjeu dans ce contrôle, en y identifiant également les types de tâches et les organisations mathématiques correspondantes. L'analyse des erreurs des élèves et celle des séances d'enseignement précédant le contrôle viennent alors confirmer ce que cette analyse *a priori* et l'examen de la dimension institutionnelle de l'étude autonome avaient permis d'anticiper :

En l'absence de ressources épistémiques appropriées, faute de prise en charge par l'enseignant l'indication des objets d'étude et l'organisation des conditions de leur viabilité, l'étude autonome est délaissée au jeu subtil du contrat didactique. Dans ces conditions, l'enseignement ne saurait être efficace et l'étude autonome de l'élève ne peut combler le manque.

Si ce résultat est l'élément essentiel de cette approche du diagnostic, il existe d'autres résultats qui contribuent à l'établissement d'un diagnostic solide. Je vais les présenter après avoir précisé ce que les étapes successives de mes analyses ont permis d'établir. À cet effet, je reviendrai d'abord sur le site algébrique fonctionnel et je commencerai par sa construction.

Le site algébrique-fonctionnel et son écologie scolaire

Quelques points clés de la construction du site algébrique- fonctionnel

Essayons d'abord identifier les principaux objets d'étude de ce site, c'est-à-dire des objets que l'on étudie au sens mathématique :

Les deux principaux objets de ce site sont sans doute les **équations algébriques et les fonctions**. Si l'on suit le mode d'émergence et de développement des objets mathématiques en se centrant sur les relations épistémologiquement pertinentes qui les relient, nous pouvons d'abord voir que le traitement algébrique des équations apparaît comme étant consubstantiellement lié à deux autres concepts, ceux de **nombre et de polynôme** qui sont eux-mêmes des objets d'étude du site algébrique-fonctionnel.

Mais le lien entre le cadre algébrique et le cadre des fonctions n'est pas si évident. Un tel lien s'établit à travers des objets communs à ces deux modes de pensée. Les premiers objets qui relient les équations algébriques au concept de fonction sont les courbes géométriques. Elles se présentent sous forme de **graphique** comme objet d'étude. Dans l'histoire, les courbes géométriques trouvent toute leur place dans la résolution des équations au moyen de leur intersection, comme elles ont joué un rôle dans l'émergence de la relation fonctionnelle dans la géométrie de Descartes (Muhammed, 1998), mais surtout dans l'apparition du concept de variation en unifiant les pensées qualitative et quantitative (René de Cotret, 1998). De ce fait, la représentation graphique a surtout du sens dans le cadre fonctionnel lorsqu'elle est considérée ensemble avec le concept de **variation**.

À ces 6 objets principaux (équations, fonctions, polynômes, nombres, graphiques, variations), il faut ajouter le concept d'**ordre**, d'une importance particulière dans le cadre de l'analyse et le concept d'**inéquation** qui l'accompagne.

Mais identifier les objets principaux du site algébrique-fonctionnel n'en fait pas pour autant un ensemble structuré et cohérent. Il convient également d'identifier les concepts qui interviennent lors qu'on étudie ces objets. Par exemple, l'étude des fonctions fait intervenir le concept de fonction polynôme, qui fait intervenir lui-même les concepts de fonction composé, fonction numérique ou le concept d'approximation dans le cadre de l'analyse. L'étude graphique s'appuie sur des concepts tels que droite, parabole ou encore sur le concept plus général de conique. L'étude des équations met en jeu le concept de polynôme qui renvoie lui-même aux concepts de solution, fonction réciproque ou encore aux concept plus généraux de corps, anneau, etc. il s'agit bien entendu des concepts qui font tous partie d'un ou plusieurs domaine d'étude mathématique au sens strict.

Mais si l'on considère qu'un concept devient un outil lorsqu'il est mobilisé pour résoudre un problème (Douady, 1986), on se trouve inévitablement devant la problématique de la création technique au sens de l'approche anthropologique (Chevallard, 1999). Il s'agit alors

de créer ou d'élaborer des techniques, les concepts en question devant être pensés par rapport aux techniques qu'ils permettent de mettre en place et dont ils assurent le sens.

Il s'agirait alors des techniques liées au calcul numérique et au calcul algébrique pour l'étude des nombres et des polynômes, des techniques liées aux transformations des expressions pour les équations, et ces techniques vont convoquer d'autres concepts et ainsi de suite.

De cette manière, nous pouvons concevoir la structure d'un site mathématique autour des objets principaux, des concepts, des techniques qui s'y rapportent et des relations parmi eux. Le schéma suivant présenté pour la première fois dans (Duchet & Erdogan, 2005) donne une construction relativement complète du site algébrique-fonctionnel :

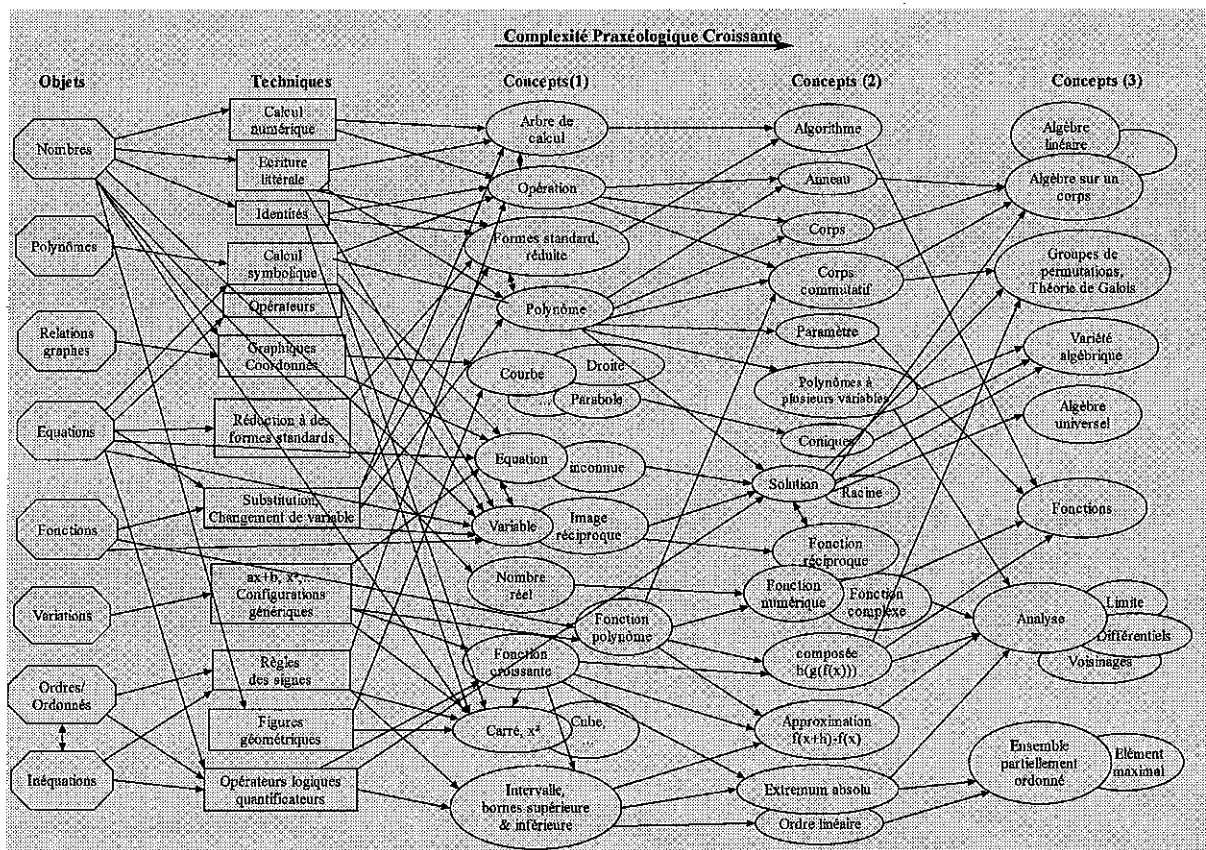


Schéma 3 : le site algébrique-fonctionnel (Duchet & Erdogan, 2005).

Ce schéma est une représentation en deux dimensions d'une profondeur. Les concepts sont présentés avec l'idée d'une complexité croissante, c'est-à-dire de plus en plus généraux, une généralité allant des objets sensibles de la classe de Seconde jusqu'à un niveau théorique comme horizon de cette généralité. La généralité de ces concepts est en lien avec les différents niveaux et différents moments d'une activité où ils peuvent intervenir.

Certains peuvent se rapprocher du côté de l'action, de la technique tandis que d'autre du côté de la validation et de justification.

Pour une analyse écologique, nous pouvons voir sur ce schéma des objets et des relations qui doivent exister parce qu'ils ont une pertinence épistémique, identifier des objets et des relations qui sont absents dans l'écologie considérée, mais aussi des objets et des relations qui sont uniquement soutenus par le contrat didactique.

Ecologie scolaire du site algébrique-fonctionnel

Au collège

En ce qui concerne l'écologie de ce site au niveau du Collège, nous constatons d'abord que la rencontre des élèves avec le concept de nombre réel est reportée en Seconde. Il s'agit d'un *vide didactique* suivant la terminologie utilisée par Bronner (1997), un vide à remplir inévitablement en classe de Seconde pour qu'une combinaison quelconque des études algébriques et fonctionnelles devienne possible.

Le calcul algébrique ne se développe que très lentement, la résolution algébrique des équations repose totalement sur des problèmes d'arithmétique et sur le contexte numérique sans que le travail algébrique apparaisse comme un mode de pensée efficace et économique.

Nous observons par ailleurs une introduction naturelle de la notion d'inéquation et de la résolution d'inéquations comme une extension de celle des équations

Quant à la notion de fonction, elle tarde à venir et seuls quelques aspects élémentaires de cette notion sont au programme. L'étude est limitée aux fonctions affines et linéaires dont l'introduction est exclusivement appuyée sur les situations de proportionnalité, notamment sur des situations présentant un tableau de quelques nombres proportionnel, qui ne sont pas susceptibles de faire émerger le concept de variation.

Les contextes du travail algébrique et du travail fonctionnel étant tout à fait différents, il n'existe par ailleurs aucun lien explicite entre le cadre algébrique et le cadre fonctionnel.

En Seconde

En classe de Seconde, avec le contenu pré-analytique que propose le programme, la rupture avec le Collège est donc remarquable, mais cette rupture est condamné à être bâtie sur du sable parce que d'une part l'écart avec le Collège est trop important, d'autre part le programme n'est pas pensé comme un tout structuré et cohérent. Car, des objets et des

relations manquent pour que ce contenu d'enseignement puisse représenter une partie émergente du site fournissant aux élèves et au professeur les outils de travail dont ils ont besoin dans leurs *topos* :

Toute connaissance relative au concept de polynôme est absente à tel point que l'on ne puisse parler du degré d'une équation.

L'étude qualitative des fonctions et des fonctions de référence est au programme mais toute relation entre les concepts de variation et d'extremum est absente, et les problèmes d'optimisation qui leur donneraient sens ne sont pas construits dans cette perspective.

L'étude du sens de variation des fonctions de référence est un enjeu explicite du programme, la technique d'étude proposée à cet effet fait appel à la notion de fonction composée, notion qui est totalement absente, y compris sous la forme de changement de variable.

La résolution des équations - inéquations s'appuie sur des techniques purement algébriques, des techniques rigides (usage explicite d'un tableau de signes, par exemple), et en aucun cas suffisamment exhaustives pour englober les problèmes qui relèvent du site algébrique-fonctionnel.

En effet, les objectifs ainsi définis semblent conduire, aussi bien les rédacteurs de programme que les auteurs de manuels, à un jeu d'équilibre improbable entre la volonté de concevoir une organisation préparant l'entrée dans l'analyse et une nécessité de modérer, à chaque moment, cette entrée en raison du fait qu'il s'agit d'une classe d'orientation. Cela débouche sur une organisation incomplète, d'une part avec des techniques pour un certain nombre de types de tâches dont la justification n'appartient pas aux contenus d'enseignement concerné (par exemple, étude du sens de variations), parce que ces tâches sont censées seulement assurer une ouverture pour la suite des études et un lien entre le travail algébrique et le travail fonctionnel. Nous observons d'autre part des technologies sans techniques (ainsi pour les variations et les extrema) parce qu'elles servent seulement à la justification des objets ainsi introduits (comme les fonctions de référence) sans que des techniques d'étude efficaces ne soient visées.

Mais il y'en a plus dans ces analyses : au vu de la manière dont l'étude de ces objets est proposée dans le programme et dans le manuel, il est possible d'affirmer qu'il manque aux rédacteurs de programme une vision de ce que suppose un tel objectif comme organisation et il manque aux auteurs de manuels une vision de ce qui est visé par un tel contenu,

comme une vision de ce qui nécessite le travail des élèves et du professeur comme moyens d'étude

Etude des classes comme institution

Arrivé à l'étude de la dimension institutionnelle de l'étude autonome, une question se pose: Quelles sont les positions des uns et des autres vis-à-vis de l'étude autonome, en particulier, vis à vis de la complexité des relations auxquelles il faut faire face en classe de Seconde?

Les analyses menées à partir des textes officiels, du questionnaire et des entretiens ont permis d'établir les résultats suivants :

Les élèves déclarent n'avoir rencontré aucun problème particulier en arrivant en classe de Seconde, notamment au niveau du travail algébrique, tandis que les résultats scolaires les démentent.

Un nombre important d'élèves déclarant refaire seulement les exercices faits en classe, par exemple, pour préparer un contrôle, en les considérant des exercices types, tandis qu'ils semblent confondre la typicité qu'il faut construire avec la ressemblance des exercices.

Quant aux professeurs, ils déclarent très peu contrôler la réalisation par les élèves du travail donné à la maison et ils semblent ne pas prendre en charge en classe les difficultés rencontrées. Ils mettent en avant les acquis du calcul algébrique du Collège tandis qu'ils ignorent totalement l'importance du site algébrique-fonctionnel pour la suite des études et la difficile combinaison que nécessitent les études relevant de ce site. Ils semblent par ailleurs ignorer comment construire la typicité ou même qu'il faut permettre aux élèves de la construire. Ils semblent réduire les enjeux d'apprentissage à des compétences facilement évaluables.

Quant au pouvoir éducatif, nous assistons à une insistance permanente sur l'étude autonome. La tendance est alors d'aider les élèves, tandis que la question du contenu de l'aide dont ils ont besoin n'est jamais posée. Les actions du professeur étant par ailleurs considérées comme allant de soi, aucune piste sérieuse ne leur est proposée pour une telle aide.

Activités effectives des classes

Arrivé à l'analyse de l'activité effective des classes, une autre question se pose : frappés par les ignorances relatives à la complexité des relations auxquelles ils doivent faire face,

comment les professeurs peuvent organiser leur enseignement et comment les élèves peuvent s'emparer des objets du cours et les investir lors de l'étude autonome ?

Il existe sans doute plusieurs approches possibles pour étudier cette question. Nous avons choisi de centrer nos analyses, du point de vu de ses enjeux institutionnels, sur le contrôle venant clore l'enseignement de la partie algébrique et fonctionnelle du programme et sur le travail des élèves et du professeur autour de ce contrôle.

Prenons ici un de ces contrôles et regardons rapidement ce qui est en jeu concernant le site algébrique fonctionnel, ce qui est attendu des élèves et ce qu'ils ont pu effectivement réaliser.

Analyse d'un moment d'étude autonome particulier : le contrôle

Classe 2^e Vendredi 21 mars 2003

Contrôle n° 8

Les calculatrices sont autorisées, les téléphones portables sont interdits.

g#15 Exercice 1 (6 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$

1.) Etudier le sens de variation de f sur $[4, +\infty[$.

2.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

g#17 1 a) $f(x) = 0$ 1 b) $f(x) = 2x - 6$ 1,5 c) $f(x) \leq 8$ 1,5 d) $f(x) \geq -5$

Exercice 2 (6 points)
ABCD est un rectangle tel que $AB = 13$ et $BC = 11$.
M est un point du segment $[AB]$ distinct de A et de B.
N est sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que $AM = BN = CP = DQ$.
Les triangles AMQ et NPC sont isométriques, de même pour BMN et DPQ.
On note $AM = x$.

1.) Exprimer les aires suivantes en fonction de x .

1 + 1 a) triangles AMQ et BMN

2 b) parallélogramme MNPQ

g#18 2) A l'aide de la calculatrice, chercher l'aire minimale de MNPQ.

Exercice 3 (4 points)
Représenter dans un repère orthogonal (O, I, J) une fonction f définie sur $[-5, 4]$ et vérifiant les propriétés suivantes :

g#37 *pas compté* *marc 03*

- f est croissante sur $[-5, -2]$, décroissante sur $[-2, 1]$ et croissante sur $[1, 4]$;
- les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont -4 , 0 et 3 ;
- 1 et -5 sont les seuls zéros de $f(x)$;
- l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est $[-5, 4]$;
- l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ est $[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}] \cup [1, 4]$.

marc de l'après

Exercice 4 (4 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $4x - 7 < 7(x - 5) + 3x$ 1 $4x^2 < (x + 1)^2$

1 5 $x(1 - x)(2 + 4x) \geq 0$ 1 4 $(5x + 3)(3x^2 + 3) \leq 0$

g#45

hypothèses par une machine la correction sera faite en classe jeudi 20/9/03

Ce sujet du contrôle est celui d'une classe dont le rapport à l'étude de ses sujets (élèves-professeur) diffère considérablement de celui des autres classes. Il existe de la part du professeur une volonté explicite d'organiser l'étude autonome de ses élèves et une volonté de la part de la majorité des élèves de réussir et faire une classe de première scientifique. Il s'agit du premier contrôle du troisième trimestre. L'enjeu est donc important pour plusieurs élèves qui veulent s'assurer de l'orientation qu'ils souhaitent et certains déclarent avoir passé plus d'une semaine pour préparer le contrôle.

La technique se compose des étapes suivantes:

- Choisir deux nombres réels dans l'intervalle donné
- Composer la première fonction à élever au carré, ce qui demande d'abord de reconnaître la forme de cette fonction et les étapes de montage à faire. Le reste doit être confié au calcul algébrique
- S'assurer que la fonction obtenue est supérieure ou égale à 0
- Appliquer la croissance de la fonction carré
- Confier le reste de la résolution au calcul algébrique
- S'assurer que la fonction obtenue est bien la fonction demandée et conclure si cette fonction est croissante ou décroissante sur l'intervalle donné

Donc, on voit bien que la technique est essentiellement basée sur le calcul algébrique qui assure le montage de la fonction. Cependant cette technique fait intervenir à un moment donné la référence aux variations de la fonction carré puisqu'elle est objet explicite du cours comme fonction de référence.

L'analyse de leurs copies montre que cet usage de la fonction carré n'a pas été compris par les élèves et les insistances du professeur à ce propos pendant trois séances précédant le contrôle ne semblent rien arrangé, si ce n'est le contraire.

Les élèves semblent tous savoir qu'ils ont à faire à la fonction carré mais ignorent complètement où et comment. Car, il existe d'abord un jeu subtil du contrat didactique qui change tout : les exercices résolus en classe portaient tous sur un intervalle qui faisait intervenir la décroissance de la fonction carré alors qu'ils devaient mener l'étude à la maison sur l'autre intervalle, ce qui change de façon critique le travail à effectuer.

Mais une analyse plus fine montre que les élèves n'ont pas compris cet usage de la fonction carré parce que le fait d'utiliser ici la fonction carré comme référence ne va pas de soi. Car, pour en faire une propriété technique, il faut mobiliser le non ostensif fonction à propos d'un objet ordinairement associé au calcul littéral, prendre en compte la croissance de la fonction " x au carré", un objet qui ne se voit que pour qui pense la fonction initiale en termes de fonction composée.

Il y a donc une difficulté particulière dans le fait que la technique demandée est une sorte de mélange entre une technique fonctionnelle et une technique algébrique. On demande aux élèves qui sont en train de travailler dans le cadre algébrique, de passer au cadre fonctionnel pour aller chercher une justification qui ne peut pas exister sans les connaissances sur le concept de fonction composée ou au moins sans les connaissances sur

le concept de changement de variable. Deux objets qui sont absents à ce niveau sous quelque forme que ce soit.

Bref, pour une combinaison du cadre algébrique et du cadre fonctionnel, la référence à la fonction carré est ici introduite par le contrat didactique dans ce sens que le professeur demande aux élèves – en fonction des injonctions officielles – de justifier par les variations de la fonction carré qui n'interviennent que d'une manière non indispensable à la mise en œuvre de la technique.

En nous appuyant sur le schéma du site ci-dessus nous pouvons interpréter tout ceci en termes de relation dans le site.

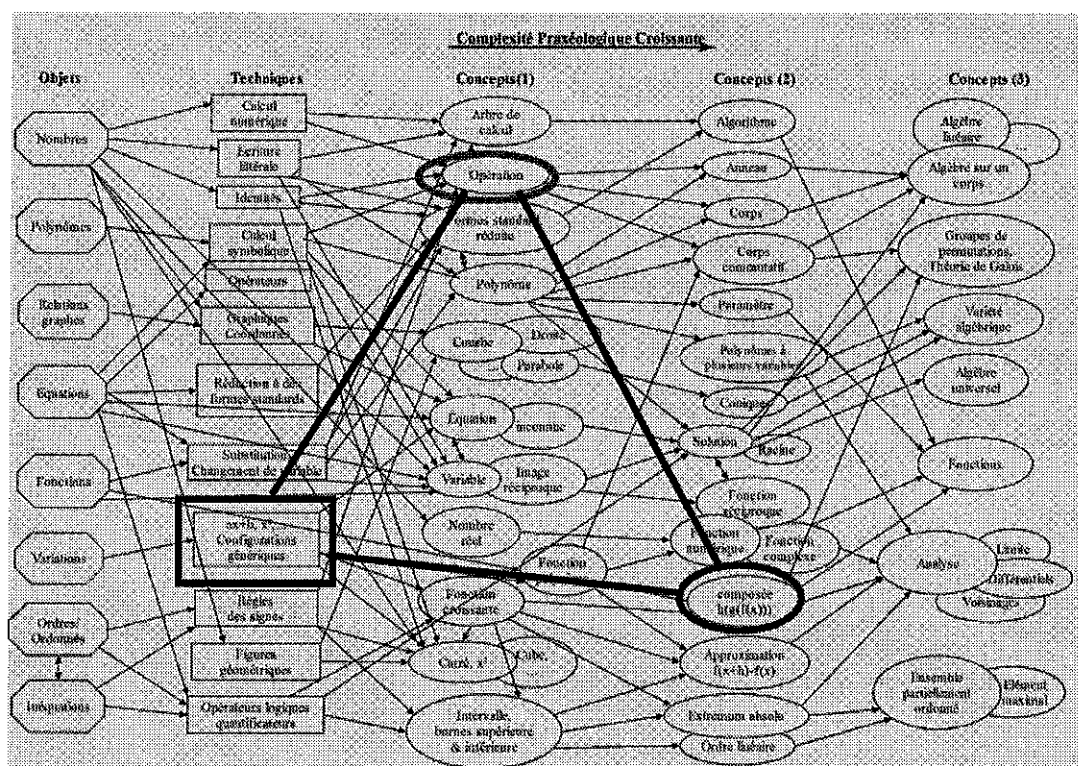


Schéma 4 : les relations dans le site relativement à la technique proposée pour étudier les variations d'une fonction du second degré

La relation visée par le contrat didactique à propos de l'objet de l'étude du sens de variations est celle qui se trouve entre des opérations algébriques et la technique algébrique de l'étude du sens de variations, mais qui tend à faire exister un autre concept, celui de la fonction composée. Autrement dit, les relations étudiées en classe se trouvent sur ces trois axes dont la viabilité ne semble assurée que par le contrat didactique. L'écart est donc révélateur de l'adéquation de ce qui est officiellement visé par rapport à ce que les élèves peuvent effectivement comprendre et contrôler lors de leur étude autonome.

N'étant pas ici en mesure de développer davantage ces analyses, donnons les résultats principaux de notre thèse, des résultats que l'on pourra formuler comme éléments de diagnostic.

Résultats saillants de la thèse: éléments de diagnostic

Etude et la matière d'étude

Nous avons supposé que le professeur a besoin d'une structure dans le site pour organiser et diriger l'étude et les élèves ont besoin d'une structure dans le site pour mener à bien les tâches mathématiques qui relèvent de leurs *topos*. Cette structure dans le site avec ses objets et ses relations est la matière d'étude sur laquelle l'effort didactique doit se centrer.

Or, nous avons montré que cette *matière d'étude apparaît fortement fragmentée en classe de Seconde*, voire mutilée, à tel point qu'il n'est pas possible de baser, ni l'enseignement, ni l'étude autonome sur un ensemble porteur de sens. *L'enseignant ne peut donc fournir à l'élève les moyens dont il a besoin et l'étude autonome de l'élève ne peut combler le manque. Pour ainsi dire, le rapport des élèves à ces objets ne peut pas devenir ultérieurement conforme.*

Etude et les ignorances

Nous avons ensuite souligné les ignorances relatives à la complexité des relations auxquelles il faut faire face en classe de Seconde. En effet, de telles ignorances vont de pair avec les mouvements pédagogiques actuels, avec le déni de la nécessité d'une rupture et avec la négation de l'objet d'étude : les idées selon lesquelles "l'enseignement doit s'appuyer sur les connaissances anciennes et doit être progressif" et "il faut privilégier la compréhension, la méthode s'en suit" sont plus que jamais prégnantes. Sous prétexte qu'il s'agit d'une classe d'orientation (mais aussi d'élèves en difficulté, d'établissement en difficulté... nous allons revenir sur ce dernier), l'enseignement est majoritairement appuyé sur les exercices et le savoir est plus que jamais réduit à son expression évaluable.

Ainsi se dégage le deuxième résultat de notre thèse : *l'étude autonome est profondément marquée par les ignorances, les indigences et les dénis, quitte à ne devenir qu'un moyen pour renvoyer dans le camp des élèves tout ce que l'enseignement n'est pas capable de gérer.*

Seuls face à leur étude autonome que le travail en classe engendre, que peuvent faire les élèves pour combler le manque et pour affronter la rupture à laquelle ils ne peuvent pas échapper ? Hélas, pas grand-chose, puisque nos analyses montrent qu'il leur manque des gestes d'étude efficaces, l'autonomie de la plupart d'entre eux apparaît fortement dépendant de la position du professeur et leur culture d'étude s'avère fragile, faible en ressources adéquates.

Etude et les institutions-classes

Cependant, nos analyses montrent que là où il y a une volonté du professeur à organiser explicitement l'étude autonome des élèves, les élèves entretiennent un rapport favorable aux activités mathématiques en classe et à la maison qui sont la marque d'une grande autonomie. Réciproquement, là où le mot étude autonome est réduit à des exigences sans substrat épistémique et didactique, le rapport à l'activité mathématique se réduit pour les élèves à "comprendre ce que le professeur a fait et a corrigé en classe".

Nous pouvons alors dire comme troisième résultat que le rapport des élèves à l'étude dépend fortement des institutions-classes et le rôle du professeur est loin d'être négligeable dans le rapport que les élèves entretiennent à l'étude et dans la qualité du travail autonome qu'ils sont appelés à fournir.

Ce résultat est d'autant plus important dans la mesure où la première situation est observée dans un établissement de milieu socioculturel élevé où les élèves sont, *a priori*, aptes à donner un travail autonome, tandis que la seconde situation est relative aux établissements moins favorisés par le contexte socioculturel, notamment à l'établissement situé en ZEP, où les élèves ont pourtant plus besoin de l'organisation de l'étude et d'une direction d'étude efficace.

Nous pouvons alors affirmer que l'exigence d'autonomie est sélective, par conséquent *l'école est sélective en fonction des difficultés qu'elle crée et en fonction de ce qu'elle ne prend pas en charge*. D'une part, le parcours de sélection est marqué par la fragmentation de la matière d'étude, d'autre part il manque une organisation effective de l'étude et une aide appropriée, notamment pour les élèves qui en ont le plus besoin.

Avant de conclure cet exposé, il convient aussi de dire quelques mots sur l'apport de notre travail au niveau théorique, sur les perspectives pour une aide à l'étude qui s'en dégagent et des perspectives de recherche qui s'imposent à nous.

L'apport de la thèse sur le plan théorique

Avec la notion de site comme outil d'analyse, les objets d'étude sont insérés dans un contexte beaucoup plus large que le curriculum, ce qui permet une vision évolutive, souple et relativement indépendante de l'institution.

Autrement dit, avec la notion de site, nous rattachons les organisations mathématiques ponctuelles ou locales à une structure plus globale - le site d'un domaine d'étude - et pouvons ainsi mettre en évidence des phénomènes de rupture ou de transition permettant d'évaluer la viabilité des projets didactiques. En cela, la notion de site nous semble constituer un moyen de diagnostic efficace pour repenser les questions didactiques d'étude et l'organisation du curriculum.

Par ailleurs, si l'on considère le site algébrique-fonctionnel comme un parcours obligé d'élèves, du moins pour ceux qui suivent une section scientifique, et si l'enseignement est considéré comme organisateur de parcours d'élèves, le site se noue inévitablement avec le texte du savoir et s'intègre au temps d'enseignement/apprentissage : rappelons-nous tous ces objets et ces relations dans le site, ainsi que les nécessaires transitions/transgressions arithmétique-algébrique-fonctionnelle-analytique-topologique. Quelle organisation pour le texte du savoir, quelle gestion du temps de l'enseignement et de l'apprentissage convient-il de prendre en compte ? Ce sont des questions importantes qu'il convient alors d'étudier comme de sérieuses pistes de réflexion et de recherche.

Au niveau d'une articulation avec la théorie des situations didactiques, au-delà du fait que les situations d'étude sont, par nature, des situations où il n'y pas de professeur, il apparaît que toute situation d'étude ne relève pas d'une situation a-didactique dans la mesure où le rapport d'un élève à un objet culturel qu'il cherche à refaire vivre apparaît bien plus vaste que le rapport au milieu d'une situation a-didactique. Le rapport que nous imaginons aujourd'hui en termes du site des objets mathématiques à étudier. En retour, nous pensons que la notion de site est un moyen efficace pour décrire les milieux a-didactiques des situations didactiques.

Des pistes pour une aide efficace à l'étude

En ce qui concerne les pistes que notre travail ouvre pour une aide efficace à l'étude, au vu de tout ce qui précède, il convient d'entendre par ce mot une aide sur un plan macro didactique et une aide sur un plan micro didactique. Autrement dit, notre conception d'aide à l'étude se décline comme la problématique d'amélioration et d'organisation des

conditions de l'étude et la problématique d'une aide ponctuelle devant une situation problématique pour l'élève.

Notre première perspective s'appuie sur une analyse de la pertinence épistémique de l'organisation d'un programme, via la notion de site mathématique, et s'inscrit dans une problématique d'amélioration et d'organisation des conditions de l'étude. Nous supposons qu'une organisation du curriculum doit tenir compte des objets d'étude dans leur évolution d'une année sur l'autre, chaque organisation mathématique devant pouvoir s'insérer dans la partie émergente du site considéré.

Une forme d'aide à l'étude au niveau micro didactique se dégage de cette perspective : une fois l'étude est considérée comme entrer en rapport avec les objets du site, il est en effet difficile d'imaginer qu'une aide ponctuelle va pouvoir efficacement aider l'élève. Cependant, nous pouvons dire que l'aide apportée doit rencontrer le besoin de l'élève, qui est une structure dans le site, et nous pouvons faire l'hypothèse que l'on aide un élève à étudier si l'on oriente son étude dans une direction précise qui lui permette de rencontrer le site des objets mathématiques à étudier.

Des perspectives de recherche

Avant de terminer, évoquons les perspectives de recherche qui s'imposent à nous dans l'immédiat. Il nous paraît important de mener quelques recherches complémentaires pour développer notre outil de diagnostic et notre modèle didactique. Pour ce faire, il convient sans doute de regarder ce qui se passe autour d'autres sites mathématiques.

Il conviendrait ensuite de développer une ingénierie didactique qui s'appuierait d'abord non sur la théorie des situations didactiques mais sur le modèle de site ici présenté, afin de voir comment il sera possible d'orienter les efforts didactiques des élèves et du professeur sur un terrain pertinent afin qu'ils puissent mener à bien les tâches qui relèvent de leurs *topos* respectifs.

Bibliographie

- [1] BARRÈRE A. (1997), *Les lycéens au travail*, Paris : PUF.
- [2] BRONNER A. (1997a), *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de troisième cycle, Université Joseph Fourier.

- [3] CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 19 (2), pp. 221-266.
- [4] DOUADY R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 7/2, pp. 5-31.
- [5] DUCHET P. & ERDOGAN A. (2005), Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis. In Bosch M. (eds), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, pp. 663-674, FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull, 17 - 21 Şubat 2005, Sant Feliu de Guíxols, İspanya
- [6] ERDOGAN A. (2006), *Le diagnostic de l'aide à l'étude, en mathématiques : analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde*. Thèse du troisième cycle, Univeristé Denis Diderot-Paris 7.
- [7] ERDOGAN A. & MERCIER A. (2007), Les forums de questions mathématiques sur Internet et les attentes sur le travail des élèves, *Annales de didactique et des sciences cognitives*, volume 12, pp.147-163.
- [8] FÉLIX C. (2002), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire*. Thèse du troisième cycle, Univ. d'Aix-Marseille I.
- [9] MAHAMMED N. (1998), *Histoire des équations algébriques*, Paris : Diderot.
- [10] PERRENOUD P. (1994), *Métier d'élève et sens du travail scolaire*, Paris : ESF.
- [11] RENÉ-DE-COTRET S. (1988), Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante, *Petit x*, n° 17, pp. 5-27.