

Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne

Richard CABASSUT,
richard.cabassut@alsace.iufm.fr,
IUFM d'Alsace, Didirem Paris 7

Nous rendons compte d'une recherche³⁷ sur la validation des assertions dans l'enseignement secondaire des mathématiques autour des conjectures de recherche suivantes : la validation est un objet à enseigner et un objet d'enseignement; la validation dans l'enseignement est la double transposition de la validation mathématique et de la validation non mathématique; les variations d'institutions, d'organisations mathématiques et d'organisations didactiques permettent d'expliquer des variations dans l'enseignement de la validation.

Au niveau de la méthodologie, d'une part nous adaptons le cadre théorique de Toulmin, sur les arguments de plausibilité et de nécessité, à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard, et d'autre part nous suivons une approche comparative franco-allemande qui permettra de contraster différentes praxéologies.

Quatre études ont permis de répondre aux questions :

- une comparaison de réflexions et de recherches sur la validation ou sur des comparaisons franco-allemandes, qui permettra notamment de dégager une typologie de la validation et de ses fonctions (nous ne rendrons pas compte cette étude faute de place);
 - une comparaison de programmes d'enseignement et de textes officiels d'accompagnement, indiquant si la validation est un objet à enseigner et quelles en sont ses caractéristiques;
 - une comparaison de la validation dans des manuels scolaires qui confirmera que la validation peut être un objet d'enseignement, lieu de la double transposition de la validation mathématique et de la validation non mathématique;
 - une comparaison de productions d'élèves qui permettra d'illustrer des différences de techniques et de contrats, avec pour des tâches, et des technologies disponibles, semblables.
- Rappelons tout d'abord quelques éléments du cadre théorique

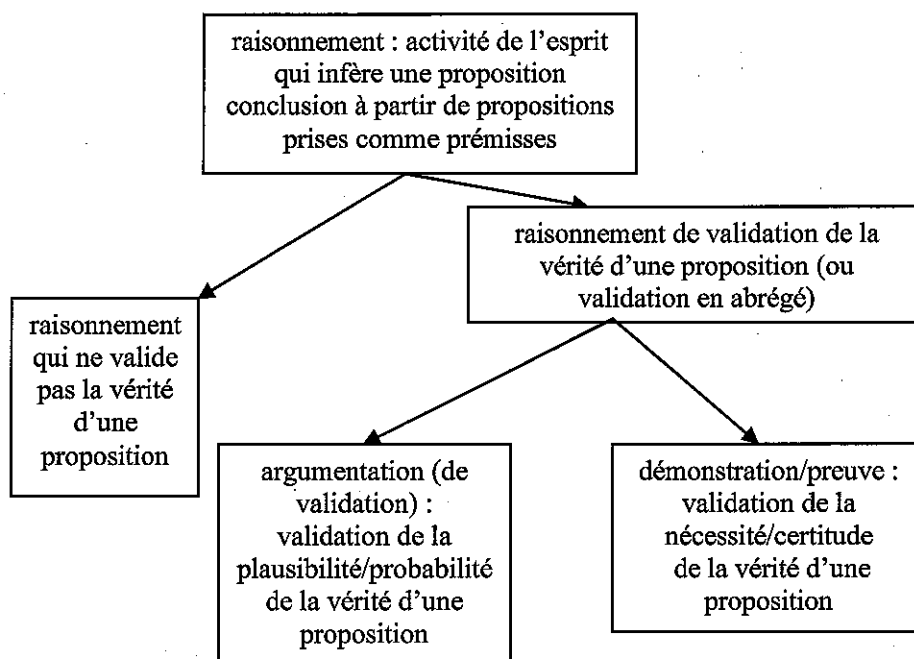
³⁷ Recherche conduite de 1999 à 2005 au laboratoire Didirem de PARIS 7 sous la direction de Bernard Parzysz.

1 cadre théorique

1.1 théorie de l'argumentation de Toulmin

Nous nous référerons à Toulmin qui propose « la distinction entre arguments nécessaires et probables : c'est-à-dire entre les arguments dont la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion (qui peut donc être accompagnée du qualificatif modal « nécessairement ») et ceux dont la garantie ne nous habilite qu'à tirer une conclusion provisoire (nuancée par le mot « probablement »), sujette à de possibles exceptions (« vraisemblablement ») ou conditionnelle (« pourvu que... ») ». [Toulmin 1993, trad. P.d.B., p.184]. Nous préférons l'expression « argument de nécessité » ou « raisonnement de nécessité » où la nécessité se réfère à la conclusion (et non pas aux conditions de réalisation de la conclusion, conditions qui sont suffisantes). Nous préférons au mot « probable » le mot « plausible » qui a une connexion beaucoup moins forte avec la théorie des probabilités. Il est très souvent utilisé dans les programmes de l'enseignement secondaire des mathématiques comme nous l'observerons plus loin.

Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire/certaine, nous appellerons le raisonnement de validation une preuve ou une démonstration ; lorsqu'elle est plus ou moins plausible nous l'appellerons argumentation.



1.2 théorie anthropologique du didactique

« Le point crucial à cet égard, dont on découvrira peu à peu les implications, est que la théorie anthropologique du didactique situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales » [Chevallard 1999 p.223]. « Une institution peut être à peu près n'importe quoi [...]. Une école est une institution de même qu'une classe ; mais il y a aussi l'institution « travaux dirigés », l'institution « cours », l'institution « famille ». La vie quotidienne est une institution ». [Chevallard, 1992, p.88].

Nous distinguons deux variations institutionnelles relatives au savoir autour du raisonnement de validation : d'une part une variation entre les institutions de la vie quotidienne et les institutions mathématiques avec un point de rencontre dans les institutions d'enseignement des mathématiques, d'autre part une variation dans les institutions d'enseignement des mathématiques entre la France et l'Allemagne. Les tableaux suivants précisent la descriptions de nos objets d'études dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique.

types d'institutions productrices de savoirs	<i>institutions mathématiques produisant le savoir mathématique</i> « savant » : départements de mathématiques des universités, centres de recherches mathématiques,...	<i>institutions d'enseignement des mathématiques</i> : classe de mathématiques d'un lycée français ou d'un Gymnasium du Bade-Wurtemberg,...	<i>autres institutions</i> : famille, école, clubs, vie quotidienne ; classe de sciences physiques ; classe de philosophie ;...
savoirs produits par les institutions précédentes	savoirs mathématiques « savants » : théories mathématiques et logiques mathématiques	savoirs mathématiques enseignés	savoirs non mathématiques et connaissances sociales ; logiques « naturelles » ; logiques non mathématiques
exemples de critères de	conformité à la théorie mathématique, non	conformité aux méthodes de validation	adéquation avec la réalité, adéquation

vérité d'une proposition	contradiction avec la logique associée	autorisées (perceptives, instrumentées, déductives,...), conformité à l'avis d'une autorité (professeur ou manuel scolaire)	entre les faits et les théories ; succès dans l'action ; convergence des croyances
arguments pour valider	arguments de nécessité	arguments de nécessité ou arguments de plausibilité	
exemples d'éléments des technologies justifiant les raisonnements de validation	définitions, axiomes, théorèmes, règles de logique	définitions, théorèmes et règles d'inférences des mathématiques enseignées, règles des contrats d'enseignement	actions, expériences, définitions, propriétés, principes, lois, règles d'inférences et règles de contrats de la vie sociale
théories organisant des savoirs, des technologies et des règles d'inférence	théories mathématiques et logiques, souvent formalisées et globales, construites de manière systématique	théories peu formalisées, souvent locales (souvent construites autour d'un objet de savoir)	« théories » de la vie sociale ou de la vie quotidienne : en général très peu formalisées, souvent implicites

On analysera une validation dans une institution I au travers des quatre notions proposées par Chevallard : tâche, technique, technologie, théorie.

tâche	technique	technologie	théorie
valider une proposition mathématique dans une institution I dans des conditions institutionnelles données	manière d'utiliser des règles de validation pour valider la proposition précédente	règles de validation, définition des objets utilisés, règles de contrat, justification, explication, production de la technique	justification, explication, production de la technologie

routinière, problématique	registres de la technique : matériel, graphique, langagier	mathématique, non mathématique	
------------------------------	--	-----------------------------------	--

1.3 Fonctions de la validation

Pour répondre à la question « pourquoi valider ? » nous nous appuierons essentiellement sur des travaux qui ont étudié les fonctions de la démonstration : De Villiers [1990] dans l'institution mathématique et Hanna [1995, 2000] dans l'institution didactique, et nous dégagerons les cinq fonctions principales de la validation.

Fonction	Description
vérification (preuve ou plausibilité)	valider la nécessité ou la plausibilité de la vérité d'une proposition
explication	fournir un aperçu de pourquoi la proposition est vraie
systématisation (incorporation)	organiser des connaissances en système déductif, incorporer des connaissances nouvelles, utiliser des connaissances anciennes
découverte	découverte, invention, préparation, production de nouveaux résultats
communication	transmission des connaissances

1.4 Typologie des arguments

Nous distinguerons essentiellement les **trois types d'arguments** suivants :

formel (ou syntaxique) : tout argument dont la structure est clairement explicitée (données, règle de validation, conclusion) et dont l'application de la règle de validation repose sur la forme des termes de la règle et des données, et ne nécessite pas une interprétation supplémentaire basée sur la signification ou le contenu de ces termes ou de ces données.

pragmatique : tout argument utilisant le succès d'une action comme règle de validation, par exemple avec le recours à une action du type mesure, reconfiguration de surfaces par déplacement, construction d'une figure, lecture directe d'une figure. L'action peut être effectivement réalisée ou pensée. On comprend que le recours à une action ne correspond pas à une règle formelle.

sémantique : tout argument dont la règle de validation est constituée de règles qui ne sont pas formulées de manière formelle mais qui s'appuie sur la signification ou le contenu des

objets qu'elles mettent en jeu. C'est le cas des règles qui ne sont pas complètement explicitées ou formalisées, par exemple lorsque le registre de représentation des objets n'est pas une langue formelle comme dans le cas d'un calcul automatique non explicité, ou dans la conversion d'un registre de représentation à un autre.

Cabassut	argument pragmatique	argument sémantique	argument formel (ou syntaxique)
Balacheff	preuves pragmatiques	preuves intellectuelles	démonstration calcul sur les énoncés
Duval		inférence sémantique inférence discursive	déduction syllogisme
Holland	argumentation	argumentation déduction sémantique	déduction formelle
Tietze	preuve préformelle preuve par l'action argument de plausibilité	preuve préformelle intuition sémantique argument de plausibilité	démonstration déductive formelle
Knipping	argumentation pragmatique	argumentation sémantique	argumentation (conceptuelle déductive ou abductive)

2 Etude des programmes d'enseignements et des textes officiels

2.1 La démonstration en Bade-Würtemberg

On observe que **la démonstration n'est pas un objet d'enseignement de la Hauptschule et de la Realschule**. Les élèves y rencontrent des validations utilisant principalement des arguments de plausibilité et des arguments pragmatiques. Les arguments formels sont apparemment absents. **La preuve est un objet paramathématique de la Realschule** au sens de Chevallard [1985 p.49-50]: « A côté de ces « notions mathématiques » désignées ci-dessus se rangent des notions qu'on peut dire « *paramathématiques* » : par exemple, la

notion de paramètre, la notion d'équation, la notion de démonstration. Les notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématique ; elles ne sont pas « normalement » des objets d'études pour le mathématicien [...] Seuls les objets de savoir sont pleinement des candidats à être des objets d'enseignement. Les notions paramathématiques, par exemple, ne font pas l'objet d'un enseignement ; ce sont des objets de savoir « auxiliaire » nécessaire à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être « appris » (ou plutôt « connus »), mais ils ne sont pas « enseignés » selon le plan d'enseignement des notions mathématiques ». Il n'y a pas d'indication sur le fait que l'élève doit apprendre à produire des preuves. Il semblerait que seul le professeur produise des preuves en situation de classe, éventuellement dans un travail collectif avec les élèves. Mais aucune indication ne le précise.

Par contre **la démonstration est un objet d'enseignement de Gymnasium** dès les programmes de 1971. La référence à cet enseignement apparaît explicitement en classe 8 sous la forme d'un paragraphe dans le corps du programme et en classe 9 sous la forme d'une unité d'enseignement. De plus, des références ponctuelles apparaissent à l'occasion dans l'exposé des contenus du programmes ou des objectifs, de la classe 5 à la classe 13.

On observe une explicitation et un discours plus expansif³⁸ accordé à la preuve et à la démonstration. **L'étude diachronique**, des programmes de 1971 aux programmes à venir, montre un déplacement de la preuve dans l'enseignement des mathématiques, transposée de la démonstration mathématique, centrée sur ses fonctions de vérification et de systématisation, à la preuve dans l'enseignement des mathématiques, élément d'une formation sociale qui intègre d'autres formes de validation comme l'argumentation, et d'autres formes de raisonnement comme le raisonnement de plausibilité, centrée sur ses **fonctions d'explication et de communication**. Dans ce déplacement les arguments formels ne sont pas toujours les arguments préférables : **les arguments de plausibilité, les arguments pragmatiques et les arguments sémantiques sont valorisés**, y compris dans le cycle supérieur (Oberstufe).

Un principe didactique semble mis en évidence : **le principe de renoncement au formalisme** qui consiste à renoncer à un argument formel dans les cas suivants. Soit la

³⁸ Nous songeons à l'expansion, à une même période, dans les programmes de Gymnasium par rapport à ceux de Realschule ou Hauptschule. Pour ce qui est de l'expansion dans le temps, celle-ci ne peut préjuger d'une importance croissante de la preuve. On remarque en effet une expansion générale des programmes dans le temps, avec des considérations générales et des commentaires plus abondants, peut-être liée à l'importance de la communication dans un enseignement de masse.

limitation est cognitive : par exemple la complexité d'une axiomatisation de la géométrie euclidienne ne serait pas accessible à un certain âge. Soit l'argument formel n'est pas mobilisable pour des raisons de constitution du programme qui l'a rejeté à plus tard. Soit pour des raisons didactiques : l'argument formel est mobilisable, mais ne sert pas la fonction d'explication de la validation. Dans ce cas on lui substitue un autre argument estimé remplir la fonction d'explication. La plupart du temps, il s'agit d'arguments de plausibilité, d'arguments pragmatiques ou d'arguments sémantiques, utilisant souvent les registres matériels ou graphiques.

Il n'y a aucune indication de théorèmes à admettre. Quitte à utiliser des arguments de plausibilité ou sémantiques, une validation s'opère pour remplir sa fonction de systématisation, parfois dans une dimension élémentaire ou contemplative.

Les indications sur les activités dans lesquelles l'élève produit des démonstrations sont assez rares : travail autonome de l'élève pour développer l'idée de preuve sur le centre de gravité ou l'orthocentre en classe 8, travail, individuel ou en groupe, pour chercher des arguments et démontrer dans l'unité correspondante de classe 9, exploitation autonome du livre à propos des démonstrations sur les aires et volumes en classe 10, conduite autonome de démonstrations pour les théorèmes de géométrie métrique en classe 12 et 13.

2.2 La démonstration en France

Dans les programmes de 1996 la démonstration apparaît explicitement comme objet d'enseignement au cycle central (cinquième-quatrième) du collège.

Au collège, l'analyse diachronique montre que c'est d'abord la démonstration qui est désignée comme objet d'enseignement, ensuite c'est le raisonnement déductif qui devient l'objet d'enseignement tandis que la démonstration est un objet paramathématique, enfin la démonstration redevient objet d'enseignement. Mais entre les deux moments, elle passe d'objet transposée de la démonstration mathématique savante, basé sur la logique et l'axiomatique, à un objet d'enseignement, basé sur des arguments divers : pragmatiques, intuitifs, sémantiques, formels.

Alors qu'au début ce sont essentiellement les fonctions de vérification de la preuve, de communication discursive et de systématisation locale qui étaient valorisées, maintenant les **fonctions de découverte, d'explication et de vérification de la plausibilité** sont également valorisées.

Les arguments pragmatiques ou intuitifs, au début limités à la phase d'initiation au raisonnement déductif, ou à la fonction de découverte heuristique, aident maintenant à remplir les **fonctions d'explication globale et de vérification de la plausibilité**.

De même, alors qu'au début la fonction de communication discursive était soutenue essentiellement par des arguments formels, maintenant des **arguments sémantiques ou intuitifs et des registres non linguistiques** y participent. On va jusqu'à parler de « démonstration graphique » ou de « démonstration empirique ».

La fonction de systématisation est assurée dans les activités de résolutions de problèmes, par utilisation des théorèmes déjà démontrés ou admis, plus que dans la démonstration des théorèmes de cours, qui est à éviter si elle n'aide pas à la compréhension du théorème ou pour laquelle une démonstration intuitive peut remplacer une démonstration formelle. Concernant les théorèmes admis, ils peuvent l'être d'après le **principe du théorème admis** : un théorème est admis si sa démonstration apporte peu.

Le contrat précisant les normes de rédaction d'une démonstration est très variable suivant le contexte : classe, domaine, fonction de la démonstration (par exemple explication globale ou vérification de la nécessité).

2.3 Comparaison franco-allemande

Alors que le Bade-Wurtemberg s'oriente vers une filière unique en Gymnasium pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, la France parle de différencier sa filière collège et différencie les programmes de mathématiques en trois séries, à leur tour différenciées en enseignement de base et enseignement optionnel. **On va donc vers un enseignement unique de la preuve en Bade-Wurtemberg et, au contraire, vers un enseignement différencié en France.**

Dans les deux pays **la démonstration commence à être un objet d'enseignement à la même période, en classe 8 allemande et au cycle central français**. Cette apparition est progressive.

Par contre **la première apparition d'une technologie mathématique donnée peut varier considérablement d'un pays à l'autre.**

Thème technologique	Première validation	Première validation en	Domaine et commentaire

	en France	Bade- Wurtemberg	
Somme des angles d'un triangle	Cinquième	7	Géométrie Avant la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles
Périmètre et aire du cercle	Sixième et cinquième	10	Grandeurs Avant en France
Théorème de Pythagore	Quatrième (puis seconde)	9	Géométrie Après la leçon sur la démonstration avant en France
Théorème de Thalès	Troisième (puis seconde)	9 (puis 12-13)	Géométrie Après la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles
Variation des fonctions	Seconde	11	Fonctions Après la leçon sur la démonstration avant en France
Equations du second degré	Première S	9	Equations Après la leçon sur la démonstration Après en France
Triangles isométriques	Seconde	8	Géométrie Après la leçon sur la démonstration après en France
Triangles semblables	Seconde	9	Géométrie Après la leçon sur la démonstration Après en France
Formules de volume	Collège	10	Grandeurs

	(puis terminale)	(puis 12-13)	avant en France
Différentiabilité	Première S	11	Analyse Après la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles

Quelques éléments de contrat apparaissent :

le principe de renoncement au formalisme, appliqué dans chaque pays pour mieux servir la fonction d'explication,

le principe du théorème admis, qui semble énoncé seulement en France.

Pour ce qui concerne les différentes fonctions de la démonstration, concernant le contexte actuel, **la filière unique de Gymnasium permet d'aborder la fonction de systématisation dans sa dimension globale, alors que la fonction de systématisation est évoquée, dans les programmes français dans sa dimension locale (« flots déductifs, application d'un théorème »).**

La fonction découverte peut être propédeutique en Bade-Wurtemberg, alors qu'elle est plutôt heuristique en France. On peut remarquer cependant l'apparition de cette fonction propédeutique en France, par exemple à propos de la validation du théorème des gendarmes en première S.

La fonction de **communication** discursive est très importante et motive une part importante des activités en **France**, donnant une **importance à la rédaction écrite**.

Cependant nous avons observé que toutes les fonctions sont évoquées dans les programmes de chaque pays.

Il est vrai que les **arguments pragmatiques ou sémantiques** semblent plus valorisés que les arguments formels en **Bade-Wurtemberg**, notamment compte tenu des nouveaux programmes à partir de 1999. Par contre en **France** on observe une évolution quant à la valorisation des arguments formels. Alors que dans la progression du collège vers le lycée, les arguments pragmatiques très présents en début de collège étaient progressivement abandonnés dans les précédents programmes au profit d'arguments plutôt formels, on voit dans les programmes de lycée de 2000 un **renouveau des arguments sémantiques** (avec recours à différents registres non langagiers : tableau, graphique, arbre, figure).

Nous allons maintenant examiner, au travers de manuels scolaires, si nos analyses de programmes sont mises en œuvre, et si oui, comment.

3 Etude de la validation dans des manuels scolaires

Au point de vue méthodologique nous opérons comme suit :

- nous choisissons la collection de manuels de classe la plus répandue en Gymnasium du Bade-Wurtemberg, d'après les avis convergents des experts consultés : il s'agit de la collection de Lambacher-Schweizer aux éditions Klett, composée des 9 livres des classes 5 à 13, les classes 12 et 13 ayant en commun deux livres, l'un d'analyse et l'autre de géométrie ;
- nous sélectionnons un objet à étudier (par exemple une leçon sur la démonstration ou la validation d'un théorème de cours donné) et nous étudions cet objet dans les livres où il apparaît ;
- puis en application du principe de dialectique différences-similitudes (inspiré de [Clarke 2004]) nous cherchons une étude semblable dans un manuel français de collège ou lycée.
- Si nous trouvons le même objet traité de manière semblable dans un manuel pour chaque pays, nous comparons ces traitements en essayant de dégager et d'expliquer les éléments de similitudes. Mais nous essayons également de les contraster et d'essayer de faire apparaître des différences que nous pourrions expliquer notamment à partir de la composante nationale.
- Si nous ne trouvons pas de traitement semblable du même objet, nous comparons alors les deux traitements en essayant d'expliquer les différences et de relever éventuellement des points communs permanents.

La solution consistant à partir de la collection allemande la plus répandue est une solution de confort, car il nous était plus facile d'accéder à différentes collections en France qu'en Allemagne. On pourrait réaliser la même étude en partant de la collection française la plus répandue, et observer s'il y a des différences par rapport à nos conclusions.

3.1 La démonstration comme thème d'étude

On observe l'existence d'une leçon sur la démonstration dans le manuel de **Klasse 8**, Gymnasium, Baden-Württemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 1999 (première édition

1995) et dans le manuel de la **classe de quatrième**, collection triangle, Hatier, 1998. la démonstration apparaît donc clairement comme un objet d'enseignement dans ces deux manuels analysé dans le tableau comparatif suivant.

	leçon allemande	leçon française
genre de tâches	découvrir (conjecturer ou reconnaître), contrôler (reconnaître les statuts, les formes de raisonnement, l'application des énoncés conditionnels), changer de registre (tracer, encoder, décoder), démontrer (avec ses variations calculer, constater, étudier)	
	découvrir, conjecturer, contrôler sont peu présents	
technologie	une technologie logique ou de raisonnement, présentée de manière assez sommaire, une technologie mathématique avec une emphase particulière pour la géométrie, une technologie non mathématique, constituée essentiellement par les arguments visuels, pragmatiques (mesure sur des figures) ou inductifs (vérification sur quelques exemples). <i>les technologies non mathématiques sont sollicitées dans les tâches du genre</i>	
technique	démontrer la fausseté à l'aide d'un contre-exemple, démontrer la vérité en appliquant un théorème de forme conditionnelle,	
		découvrir en reconnaissant une configuration particulière dans une figure, démontrer par le calcul découvrir par conditions
fonction	découvrir, systématisation locale, vérifier (preuve ou plausibilité), communication	

3.2 La validation de théorèmes de cours

On choisit différents théorèmes suivant les variables suivantes : positions relatives, selon le pays, du moment de première validation du théorème, position relative de première validation du théorème par rapport à la classe de quatrième ou à la classe 8 où la démonstration est introduite, domaine mathématique du théorème, technologie mathématique mobilisable ou non.

Thème du théorème	Analyse allemand français	Domaine et commentaire
somme des angles d'un triangle	argumentation : plausibilité, explication, preuve avec recours à la figure (géométrie de l'ordre) le recours à la figure est un élément de technologie validations semblables fonction d'explication	Géométrie. Avant la leçon sur la démonstration. Dans des classes parallèles. Cinquième/7.
périmètre et aire du cercle	preuve avec recours à la figure et argument d'induction remplaçant une technologie non mobilisable fonctions d'explication, de propédeutique	preuve avec argument pragmatique, d'induction et d'autorité remplaçant une technologie non mobilisable fonctions de plausibilité, découverte
	validations distinctes	
théorème de Pythagore	technique visuelle en substitution à technique formelle mais technologie mathématique mobilisable argument visuel pour la décomposition/recomposition dans surfaces fonction d'explication preuves semblables	Géométrie Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Quatrième (puis seconde)/9
théorème de Thalès	technique visuelle pour technologie du théorème des milieux argument d'induction technologie mathématique absente (passage à la limite)	Géométrie. Après la leçon sur la démonstration. Dans des classes parallèles :

	une organisation déductive différente déplace le moment d'intervention d'un argument d'induction preuves semblables		Troisième (puis seconde)/9
variation de la fonction carrée	technologie formelle mobilisable mais une autre technologie permet de remplir une fonction de systématisation argument visuel en l'absence de technologie mobilisable fonctions d'explication et de systématisation	technologie formelle mobilisable et mobilisée fonctions de preuve, de sytématisation	Fonctions. Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Seconde/11
	preuves distinctes		
équations et inéquations du second degré	technique visuelle pour technologie des inégalités contrat de rédaction implicite et concise en langue symbolique pour calcul fonction d'explication	technique des tableaux de signes pour technologie des inégalités contrat de rédaction explicite, même pour calcul fonctions de preuve et de systématisation	Equations Après la leçon sur la démonstration. Première S/9
	preuves distinctes		
formules de volume des solides usuels	preuve avec recours à la figure et argument d'induction remplaçant une technologie non mobilisable fonctions propédeutique, d'explication et de systématisation	preuve avec argument pragmatique, d'induction et d'autorité remplaçant une technologie non mobilisable fonction de plausibilité et de systématisation	Grandeurs Avant et après la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Collège (puis Terminale)/ 10 (puis 12-13)
	preuves distinctes		

3.3 Observations

Parmi les **technologies** didactiques mises en évidence on note :

le principe en Bade-Wurtemberg comme en France de recours à la figure (par exemple dans la somme des angles du triangle),

le principe en Bade-Wurtemberg comme en France du renoncement au formalisme (en Bade-Wurtemberg comme en France par exemple dans le théorème de Pythagore)

en Bade-Wurtemberg le principe de rédaction implicite et concise (recours à codage, recours à figure, implicite dans calcul algébrique, ...) (par exemple dans la somme des angles d'un triangle, l'équation du second degré, ...),

en France le principe français de rédaction explicite (marqueurs de statuts, explication de démarche, ...) (par exemple dans les équations et inéquations du second degré),

en France le principe du théorème admis (que nous n'avons pas observé en Bade-Wurtemberg).

Les **technologies** non mathématiques du type arguments visuels, pragmatiques, d'induction, d'autorité, apparaissent :

lorsque la technologie mathématique n'est pas complètement mobilisable (géométrie de l'ordre pour la somme des angles d'un triangle, passage à la limite pour le périmètre et l'aire d'un cercle ou pour le théorème de Thalès, théorème des accroissements finis pour les variations de la fonction carrée) ou lorsque l'on veut réaliser certaines fonctions de la validation (explication pour la somme des angles d'un triangle, propédeutique pour le périmètre et l'aire d'un cercle, explication pour le théorème de Thalès, systématisation pour les formules de volumes ou pour les variations de la fonction élévation au carré)

lorsque des technologies mathématiques mobilisables ne sont pas mobilisées pour des raisons didactiques (principe du renoncement au formalisme (théorème de Pythagore, inéquation du second degré) ou à cause des fonctions assignées à la validation (systèmeatisation pour la variation de la fonction carrée dans le manuel allemand, explication pour le théorème de Pythagore).

Dans les exemples ci-dessus, on voit que les situations relèvent de différents domaines (géométrie, grandeur, fonction, équation, ...), aussi bien avant la classe d'introduction de la démonstration ou après, dans des classes parallèles ou différentes.

Les technologies non mathématiques précédentes cohabitent avec des technologies mathématiques, c'est ce qui illustre le phénomène de double transposition.

D'une part on adapte (on transpose) la démonstration mathématique en remplaçant des arguments mathématiques mobilisables (exemple du théorème de Pythagore) ou non (exemple de la formule de l'aire et du périmètre en Bade-Wurtemberg, exemple de la somme des angles d'un triangle) par des arguments non mathématiques. On transpose une validation mathématique en validation didactique.

D'autre part on ne se contente pas d'arguments non mathématiques (par exemple du seul argument d'autorité, ou encore d'un seul argument pragmatique de mesure, ou encore d'un seul argument visuel). On complète ces arguments non mathématiques par des arguments mathématiques (par exemple dans les formules de l'aire et du périmètre du cercle, dans le théorème de Thalès), qui assurent à l'argumentation une qualité mathématique : on transpose une validation non mathématique en une validation didactique.

C'est le phénomène de double transposition qui constitue **la validation didactique comme lieu de la cohabitation d'arguments mathématiques et d'arguments non mathématiques**.

Concernant les **techniques** mises en œuvre on observe :

différents registres (figure, graphique, tableau, ...) pour alléger le formalisme alors que la technologie mathématique est mobilisable (dans le théorème de Pythagore avec la technologie des angles mobilisable ; dans l'inéquation du second degré avec la technologie des inégalités et avec la technique de disjonction des cas par lecture graphique),

différentes techniques mathématiques justifiant une démonstration (méthode des aires pour le théorème de Pythagore, méthode du tableau des signes pour l'inéquation du second degré en France, recours à la figure pour l'inéquation du second degré en Bade-Wurtemberg).

Il peut arriver qu'une même technique puisse être justifiée au choix, par des arguments mathématiques, ou par des arguments non mathématiques (induction, argument visuel, argument pragmatique, argument d'autorité) (exemple du théorème de Pythagore).

Dans les observations faites il est difficile de déterminer le rôle des différentes variables : domaine mathématique concerné, technologies mathématiques mobilisables, techniques mobilisables, rang de la classe, pays concerné, thème étudié, ...

Nous avons cependant montré que les fonctions de la validation pouvaient, en partie, expliquer le type d'arguments, de technologie ou de technique mis en œuvre. Nous avons observé que la **fonction d'explication** était plus fréquente dans les validations observées dans les manuels allemands, ce qui s'accompagnait d'un recours à des registres figuraux,

graphiques ou pragmatiques plus fréquents (exemple de l'inéquation du second degré, des variations de la fonction élévation au carré). Il reste cependant délicat de discerner si les différences observées correspondent à des fluctuations de manuels ou reposent sur des différences entre pays. On peut juste remarquer que ces observations corroborent nos observations des textes officiels : plus de poids à la fonction d'explication dans le Bade-Wurtemberg, et plus de poids à la fonction de communication discursive notamment dans la rédaction écrite en France.

Nous allons maintenant nous intéresser aux validations produites avec une technologie commune aux deux pays, avec une même fonction assignée à la validation dans chaque pays et dans des conditions institutionnelles de production de la validation assez semblables, dans le but de comparer les techniques mises en oeuvre et les contrats les accompagnant.

4 Etude de la validation dans des copies d'élèves

4.1 Choix du dispositif d'étude

Il existe une compétition annuelle « mathématiques sans frontières » qui s'est déroulée le 14 mars 2000 en Alsace et en Bade-Wurtemberg. Dans cette compétition nous avons sélectionné un exercice qui correspondait à une tâche du genre : « démontrer un résultat donné dans le temps limité de la compétition ».

Ce dispositif d'étude a retenu notre attention car il présentait les avantages suivants : beaucoup de similitudes entre les deux pays :

même contexte institutionnel de compétition pour les deux pays : conditions de passations semblables (même jour, même texte d'épreuve dans la langue maternelle).

mêmes fonctions assignées aux démonstrations : les élèves doivent démontrer le résultat par des arguments mathématiques qui sont donc des arguments de nécessité, ce qui correspond à la fonction de preuve ; les élèves doivent rédiger leur démonstration pour la communiquer au correcteur, ce qui correspond à la fonction de communication ; les autres fonctions (explication, systématisation, découverte) ne sont pas des objectifs du contrat implicite.

pour démontrer le résultat, des technologies disponibles chez les élèves sont communes aux deux pays (même s'il peut exister éventuellement d'autres technologies propres à un pays).

dans les deux pays l'enjeu de la compétition pour la scolarité des élèves n'existe pas puisque les copies ne sont pas individuelles : il n'y a pas de notes pour le bulletin. La compétition donne lieu à l'attribution de prix (pour chaque élève de la classe : T-shirt, sac de sport, entrée à la patinoire, à un parc d'attraction, voyage à Paris ou Berlin, ...). Il y a des prix de participation par tirage au sort, ce qui permet à des classes faibles de pouvoir gagner.

le facteur « professeur » est minimisé car il y a autant de professeurs que de copies. Nous avons vu, par exemple dans les travaux de [Knipping 2003] ou [Rauscher 1993], la grande hétérogénéité des professeurs. En variant les professeurs, ceci permet ne pas introduire un biais trop fort lié au professeur, ce qui est le cas lorsqu'on considère les productions d'élèves d'un même professeur.

l'organisation de la compétition (préparation, déroulement, collecte et correction des copies) est prise en charge par l'équipe d'organisation.

la date de la compétition : l'année 2000 permettait d'avoir des classes françaises où les nouveaux programmes avaient été mis en place (en 1999 pour la troisième et en 2000 pour la seconde) et des classes allemandes non encore affectées par la réforme des programmes mis en place en début de cursus en 1999. Ces niveaux de classe correspondaient aux programmes et aux manuels étudiés dans notre recherche.

Dans les deux pays, on étudie les « bonnes » copies, produites dans des conditions comparables, c'est-à-dire avec la même tâche à résoudre, dans des conditions institutionnelles semblables, avec les mêmes fonctions, avec un bloc technologico-théorique disponible semblable. Nous allons essayer de **comparer les techniques et les contrats**, en mettant en évidence éventuellement des différences. On a donc sélectionné les 23 meilleures copies du corpus de copie françaises

4.2 Méthodologie d'analyse

Nous avons choisi un exercice présentant les caractéristiques suivantes :

la résolution de l'exercice consiste en la rédaction d'une démonstration ;

la démonstration n'est pas immédiate et ne consiste pas en la simple application immédiate d'un théorème ;

la méthode de résolution n'est pas indiquée dans le problème (problème ouvert) ;

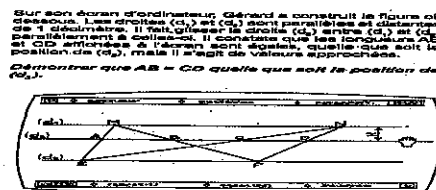
le résultat à démontrer est indiqué dans le sujet (ce n'est pas un problème d'étude ou une situation-problème où le résultat à montrer est d'abord à conjecturer), en effet nous nous

intéressons moins à l'heuristique (qui vise en partie à conjecturer un résultat) qu'aux arguments développés dans une démonstration ;

la démonstration peut être réalisée avec des technologies disponibles et accessibles dans les deux pays : les théorèmes de Thalès et le calcul sur les fractions (pour plus de détail voir l'analyse a priori qui suit) ;

la démonstration comprend une partie géométrique et une partie algébrique, ce qui permet de représenter deux grands domaines mathématiques.

L'exercice choisi est le suivant :



Différentes méthodes d'analyse sont développées pour étudier le corpus. Nous allons à titre d'exemple illustrer l'analyse par unités démonstratives qui permet de mesurer l'expansion du discours.

La terminologie suivante s'inspire des travaux de [Houdebine 1998, p.10].

On appelle **unité démonstrative** un ensemble de mots ou symboles ou graphies exprimant : soit le contexte d'un argument de démonstration : par exemple « dans le triangle MEF » compte pour une unité. Houdebine [Ibid.] précise : « cette indication, que nous appellerons le contexte du pas, peut être très explicite avec des expressions du genre : « dans le triangle ABC ». Mais elle peut être assez implicite : simplement les propriétés P et Q du théorème sont explicitées dans le texte pour l'objet particulier choisi. Par exemple : « comme le triangle ABC est rectangle en A, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ».

soit une entrée d'argument : « Les points M,A,E et M,B,F sont alignés. De plus $(AB)/(EF)$ » compte pour deux unités, « la droite d_1 parallèle à la droite d_2 » compte pour une unité,

soit une citation explicite de la règle d'argument ; le nom d'un théorème, d'une règle de calcul ou d'une définition : « d'après la propriété de Thalès » ou « j'utilise le théorème de Thalès » compte pour une unité,

soit une sortie d'argument : « on a les rapports $MA/ME = MB/MF = AB/EF$ » compte une unité,

soit un ajout de données « on trace une droite perpendiculaire à d_2 et qui passe par M ».

On compte, pour chaque copie d'élève, le *nombre d'unités démonstratives* de géométrie, respectivement d'algèbre.

Nous allons donc constituer la population des copies françaises, notée **F**, avec les 23 « meilleures » et celle de la population des copies allemandes, notée **A**, constituée des 23 « meilleures » copies. Rappelons que **F** et **A** ne sont pas des échantillons représentatifs de copies d'élèves français, respectivement allemands. **F** et **A** représentent les « meilleures » démonstrations de l'exercice choisi du point de vue des correcteurs.

4.3 Résultats de l'observation

L'examen des productions d'élèves a permis de mettre en évidence les éléments suivants.

Fonctions semblables :

Les productions de démonstration étudiées semblent remplir les mêmes fonctions : **fonction de preuve** de la conclusion demandée et **fonction de communication** de cette preuve, dans sa dimension d'évaluation. Les copies devaient transmettre au correcteur la preuve qu'elles proposaient. Les autres fonctions nous semblent moins présentes : la fonction de plausibilité n'est pas, dans le contrat habituel d'une situation d'évaluation, prise en compte. D'ailleurs nous n'avons observé aucun argument de plausibilité dans les « bonnes » copies étudiées. La fonction d'explication n'est pas non plus privilégiée dans cette situation d'évaluation : il s'agit moins de produire une démonstration rendant intelligible les raisons de la véracité de la conclusion est vraie, que de montrer au correcteur qu'on sait appliquer correctement des théorèmes ou des règles de calcul pour prouver la conclusion. Nous n'avons pas observé de différence dans les fonctions de cette tâche de démonstration dans les copies françaises et dans les copies allemandes étudiées, alors que nous avons vues dans des manuels scolaires des fonctions différentes suivant le pays, pour une même tâche de démonstration.

Éléments semblables de technologie disponible :

En géométrie, nous avons observé que toutes les copies utilisaient le théorème de Thalès sauf une qui utilisait les homothéties. Les autres éléments de technologies viennent en appoint et nous n'avons pas observé de différences significatives dans leur emploi.

En algèbre, nous avons observé que ce sont les mêmes règles de calculs qui sont utilisées dans le traitement des fractions et des égalités.

Dans l'ensemble nous avons observé une grande similitude dans les éléments de technologie employés.

Eléments semblables dans la structure des démonstrations.

Nous n'avons pas observé de différences significatives quant à la structure des démonstrations. On observe en fait dans chaque population, une grande hétérogénéité des structures de démonstration, tant pour le nombre d'arguments utilisés, que pour le nombre de niveaux ou celui du nombre de feuilles, l'imbrication des parties algèbre et géométrie. Les démonstrations sont exposées des hypothèses vers la conclusion.

Différences de contrats et de techniques

En géométrie, nous avons mis en évidence des différences de contrat dans l'exposition des arguments. **Le discours est plus expansif en F** (nombre d'unités démonstratives plus important, nombre d'unités fonctionnelles plus important, moindre ajout d'une figure au texte de la démonstration). **Le discours est également plus précis en F** : marquage du statut des unités démonstratives par une citation plus fréquente du contexte de la démonstration, de l'entrée de l'argument, vérification plus fréquente de la condition de parallélisme dans l'application du théorème de Thalès.

En algèbre, par contre, **la règle d'argument est plus fréquemment citée en A qu'en F**, alors qu'il n'y a pas de différences significatives pour la citation du contexte, de l'entrée ou de la sortie des arguments. **L'expansion du discours paraît semblable en F et en A** (nombre d'unités démonstratives, nombre d'unités démonstratives symboliques, nombre d'unités fonctionnelles symboliques).

On observe enfin des écarts qui, même s'ils ne sont pas statistiquement significatifs, convergent vers la même direction et mériterait peut-être des investigations plus poussées.

On observe que l'ajout de données se fait davantage dans un texte en F qu'en A, alors qu'il se fait davantage sur la figure en A qu'en F.

On observe une différence entre géométrie et algèbre entre F et A

Alors qu'en F, le nombre d'arguments est légèrement plus important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 1,17), le nombre d'unités démonstratives est nettement plus important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 2,55).

En A on observe le contraire : le nombre d'arguments est légèrement moins important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 0,91), le nombre d'unités démonstratives est semblable en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 1,09).

La géométrie donne lieu à un discours plus expansif en F qu'en A.

On observe bien une différence de contrat :

en F la langue naturelle est le registre privilégié d'expression pour les démonstrations de géométrie qui sont expansives et précises ; par contre en algèbre les règles de calcul ou opératoires sont plutôt utilisées de manière concise et sans citation explicite de la règle.

en A la langue symbolique, le registre graphique, la non explicitation des contextes ou des entrées d'arguments participe à un discours moins expansif, plus concis et moins précis, aussi bien en algèbre qu'en géométrie. Les règles d'arguments sont très souvent citées en géométrie (19 copies sur 23) et un peu moins citées en algèbre (13 copies sur 23).

Comme chaque copie représente une classe différente, et donc un professeur différent, on peut penser que ces différences de contrat ne sont pas attachées au contrat mis en place chez un professeur particulier mais ont bien une dimension culturelle plus large.

On observe également, dans les techniques utilisées, des différences entre F et A qui peuvent être illustrées à l'aide des copies prototypiques reproduites ci-après.

Handwritten mathematical proof in French. The diagram shows a triangle ABC with a line segment DE parallel to the base BC, where D is on AB and E is on AC. The proof uses the properties of similar triangles and the Thales' theorem to show that $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. The text is written in French and includes several steps of reasoning and calculations.

Handwritten text (left side):

Handwritten text (right side):

Handwritten text (bottom right):

En géométrie : la présentation rituelle d'un argument dans F, illustrée par la copie prototypique n°6, pourrait être : « Dans le contexte ..., comme ... est vérifié, d'après le

théorème ..., on a la conclusion ... ». Dans A la présentation rituelle, illustrée par la copie prototypique n°2 serait : « D'après le théorème ..., on a la conclusion ... ».

En algèbre, la présentation rituelle d'un argument dans F, illustrée par la copie prototypique n°10, pourrait être une suite d'égalités exprimant un calcul. Dans A la présentation rituelle, illustrée par la copie prototypique n°13, serait une présentation ligne par ligne d'un calcul, avec une codification de la règle de passage d'une ligne à la suivante (comme indiquée dans les copies n°12 et 13).

Alors qu'en géométrie il est important dans F de marquer les différents statuts des énoncés (contexte, entrée, règle, sortie) et en algèbre d'effectuer les calculs, en A c'est le marquage de la règle qui est essentiel, aussi bien en géométrie qu'en algèbre. Illustrons notre propos pour la technique de marquage de la règle d'inférence en algèbre.

Dans le cadre du groupe Europe de l'IREM de Strasbourg nous avons rendu compte, dans [Cabassut 1998, p.17-26], d'une visite dans une classe 9 allemande où nous avons assisté à la résolution d'une équation. Voici une traduction de l'affichage au tableau de cette résolution.

Extrait de la résolution au tableau :

$$\begin{array}{l}
 2 \times \frac{x-2}{5} + \frac{5}{x-2} = 3 \quad \left. \vphantom{\frac{x-2}{5}} \right) \text{DP} = 5(x-2) \quad (\text{DP pour Dénominateur Principal}) \\
 \text{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad (\text{D pour Ensemble de définition de l'équation}) \\
 2 \times \frac{(x-2)(x-2)}{5(x-2)} + \frac{25}{5(x-2)} = 3 \quad \left. \vphantom{\frac{(x-2)(x-2)}{5(x-2)}} \right) \times \text{DP} \\
 2 \times (x^2 - 4x + 4) + 25 = 15x - 30 \quad \left. \vphantom{2 \times (x^2 - 4x + 4)} \right) - 15x \quad \left. \vphantom{2 \times (x^2 - 4x + 4)} \right) + 30 \\
 2x^2 - 23x + 63 = 0 \\
 x_{1/2} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{4} = \frac{23 \pm 5}{4}
 \end{array}$$

On retrouve la même technique dans un livre³⁹ de Klasse 8 :

³⁹

Livre édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.47), édition 1995

$$\begin{array}{rcl}
7(2x - 5) = 3x - 2 & | & \text{Klammer auflösen} \\
14x - 35 = 3x - 2 & | & - 3x \\
11x - 35 = -2 & | & + 35 \\
11x = 33 & | & : 33 \\
x = 3 & & \\
\text{Lösungszahl: } 3 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
2(5 - 3x) + 2x < 8 & | & \text{Klammer auflösen} \\
10 - 6x + 2x < 8 & | & \text{zusammenfassen} \\
10 - 4x < 8 & | & - 10 \\
-4x < -2 & | & : (-4) \\
x > \frac{1}{2} & & \\
\text{Lösungsmenge: } L = \{x | x > \frac{1}{2}\} & &
\end{array}$$

On retrouve ici des différences de technique que nous avons observés dans les manuels scolaires à propos de l'étude des variations d'une fonction : tableau de signes de la dérivée dans le manuel français, étude de cas dans le manuel allemand.

Nous avons donc bien mis en évidence des différences de contrat et de technique pour ce qui concerne des démonstrations auxquelles les mêmes fonctions sont assignées, utilisant les mêmes éléments technologiques et situées dans un même cadre institutionnel.

Ces différences concernent le domaine étudié (géométrie, algèbre), le registre utilisé (langue naturelle, langage symbolique, registre graphique), les techniques développées (application d'un théorème de géométrie, application de règles de calcul ou opératoires). Ces différences ont été expliquées par des différences de contrats relatifs à la rédaction d'une démonstration.

Ces différences ne semblent pas affecter la structure des démonstrations, ni la nature des arguments qui les composent.

Nous rappelons cependant que nous nous sommes intéressés uniquement aux démonstration correctes, ou plus exactement aux représentations, chez les enseignants, de ce qu'est une démonstration correcte.

Les observations faites ne concernent pas les démonstrations incorrectes ou les erreurs d'élèves.

5 Conclusions

Les validations de l'enseignement des mathématiques sont la double transposition des démonstrations de l'institution mathématique (qui produit le savoir) et des validations, argumentations ou preuves, d'autres institutions (comme la « vie quotidienne »). L'étude diachronique des programmes du collège-lycée en France, et du Gymnasium en Bade-Würtemberg, confirmée par l'étude de manuels, montre que la démonstration est devenue explicitement un objet à enseigner, contrairement aux cas des Hauptschule et Realschule. Ces programmes recommandent l'usage de différents types de validation (argumentation, preuve) et d'arguments (pragmatiques, sémantiques, syntaxiques) suivant leurs fonctions et les moments ; on retrouve dans des leçons sur la démonstration l'influence des fonctions de la validation dans les différents genres de tâche (découvrir, contrôler, changer de registres...). Malgré les difficultés linguistiques, institutionnelles et culturelles liées à la comparaison, l'examen des validations de théorèmes de cours dans les manuels et de démonstrations produites par des élèves montre des similitudes quant à la cohabitation des différents types d'arguments et différentes fonctions de la validation. On observe des différences sur les types de technologie ou de technique mis en œuvre et sur le poids donné aux types d'arguments et aux registres utilisés, avec une explication liée aux conditions institutionnelles (moment considéré, contrat, fonction privilégiée, organisation de l'enseignement ...)

Différentes **difficultés didactiques** ont été repérées du fait de cette double transposition :

- La première difficulté se situe au **niveau théorique**. Cette double transposition entraîne en général une cohabitation de deux théories différentes, une théorie sociale et une théorie mathématique. Une des grandes difficultés est que ces théories reposent en général sur des conceptions de la vérité différentes, voire incompatibles. La conception pragmatique de la vérité s'accommode mal d'une conception logique. Les objets, les technologies seront également différents. Ici un **contrat implicite** va essayer de négocier la cohabitation de ces deux théories au sein d'une théorie didactique qui essaiera de synthétiser ces deux théories. Dans le domaine de la géométrie, les travaux de Parzysz, Houdement et Kuzniak proposent différents niveaux théoriques intégrant cette double transposition. Nous avons également vu comment les programmes officiels suggèrent cette cohabitation : progressivité,

passage du local au global, distinction entre validations de théorèmes de cours et démonstrations lors de la résolutions d'exercices ou de problèmes.

- Une seconde difficulté se situe au **niveau de la distinction entre technologie et technique**. Nous avons montré que certaines techniques pragmatiques, visuelles voire inductives ne sont qu'une manière moins formelle d'appliquer des éléments de technologie mathématique. Comment savoir si le recours à la figure repose sur une justification visuelle non mathématique, sur une justification mathématique mobilisable mais non formalisée, sur une justification mathématique non mobilisable ? C'est à nouveau le recours au **contrat implicite** qui est sensé régler cette cohabitation. Nous avons vu des recours à la figure aussi bien pour le théorème de Pythagore en 4^{ème}/Klasse 9, qu'à propos de la démonstration graphique du théorème des gendarmes en première S ou de la démonstration du théorème sur les variations d'une fonction dérivable d'après le signe de sa dérivée en Klasse 11.
- La troisième difficulté concerne **les contrats implicites**. D'une part ces contrats implicites ne sont pas explicités clairement aux enseignants, par exemple les programmes officiels ne précisent pas clairement que le recours à la figure est toléré dans la géométrie de l'ordre ou quel niveau de rigueur est exigible dans une rédaction. Il s'en suit une grande hétérogénéité des conceptions chez les enseignants, relevée par différents auteurs [Houdebine et al 1998 p.69], [Antibi 1996, p.356]. En conséquence la perception du contrat par l'élève sera elle aussi d'une grande variabilité. Faut-il expliciter ces contrats ? Est-ce possible ? Est-ce souhaitable ?

Nous n'avons pas étudié les situations d'enseignement dans les classes.

Il serait intéressant d'observer comment la démonstration est traitée comme objet d'enseignement dans les classes. Comment les validations de théorèmes de cours sont effectuées ? Les travaux de Knipping ont étudié la validation du théorème de Pythagore dans différentes classes. Il serait intéressant d'examiner le cas d'autres théorèmes.

Y a-t-il une distance entre l'enseignement de la démonstration qui est pratiqué et celui qui est prescrit par les programmes et des manuels ?

Est-il intéressant de mettre en place une ingénierie didactique visant à réduire les distances entre le curriculum officiel et le curriculum réel ? Si oui, comment ?

Avec le développement dans la formation initiale d'enseignants français de mathématiques avec des stages de pratiques professionnelles en Allemagne, le développement des échanges entre classes entre la France et l'Allemagne, et plus généralement le développement de la mobilité des élèves et des enseignants entre la France et l'Allemagne, décrit dans [Cabassut 1996 a,b], est-il souhaitable de proposer des ingénieries de formation des enseignants, d'échanges des classes, ... qui permettent de mieux appréhender ces évolutions ?

Ces questions mériteraient de poursuivre les recherches pour y répondre. Le fonctionnement actuel de la recherche en France ne me permet pas de poursuivre ce travail ; je livre donc ces réflexions comme un testament didactique à qui voudra s'en emparer.

Bibliographie :

BALACHEFF Nicolas (1999) Apprendre la preuve, *Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Presse Universitaire de France, Paris, pp.197-236

CABASSUT Richard (1998) Mathématiques dans un lycée allemand, journal « *L'ouvert* », numéro 91, juin 1998, IREM de Strasbourg, pp.17-26.

CABASSUT Richard (2005) *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne*, Thèse, IREM Université de Paris 7.

téléchargeable à : http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/97/16/index_fr.html

CABASSUT Richard (2005) Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks, C in *Proceedings of 4th Cerme (congress of European society for research in mathematics education)*, Sant Feliu de Guixols; parution en ligne sur <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/4/wg4listofpapers.htm>

CABASSUT Richard (2006) « Beweisen in Schulbüchern in Frankreich und Baden-Württemberg », *Communication en allemand au colloque de Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Osnabrück*, mars 2006 téléchargeable le 03/08/06 sur http://www.ikm.uos.de/gdm2006/gdm2006_osnabrueck_beitraege_kf06.pdf

CABASSUT Richard (2007) Examples of comparative methodologies in the teaching of mathematics in France and in Germany, in *Proceedings of 5th Cerme (congress of European society for research in mathematics education)*, Larnaca, Cyprus, parution en ligne sur <http://www.cyprusisland.com/cerme/group15.htm>

- CHEVALLARD Yves (1985) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD Yves (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Editions la pensée sauvage , vol.19 n°2, pp.221-266.
- CHEVALLARD Yves (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12 n°1, pp.73-112.
- CLARKE David (2004) Issues of Voice and Variations : The Problematics of International Comparative Research in Mathematics Education, paper submitted to discussion group 11: International comparaisons in mathematics education (ICME 10), Copenhagen, Denmark, July 4-11, 2004
- DE VILLIERS Michael (1990) The role and the function of proof in mathematics, *Pythagoras* n°24, pp.17-24.
- DUVAL Raymond (1995) *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.
- HANNA Gila (1995) The role of proof in mathematics education, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, pp. 14-21
- HOLLAND Gerhard (2001) *Geometrie in der Sekundarstufe*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- HOUEBINE Jean et al.(1998) *La démonstration: écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette éducation.
- KNIPPING Christine (2003a) *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*, Verlag Franzbecker
- RAUSCHER Jean-Claude (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes* Thèse de doctorat, Université des Sciences Humaines de Strasbourg.
- TIETZE Uwe-Peter , KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F. (2000) *Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II, Band I*, Vieweg.
- TOULMIN Stephen .E. (1993) *Les usages de l'argumentation*, (traducteur : Philippe de Brabanter), Presses universitaires de France, Paris