

L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique

Virginie Deloustal-Jorrand
IUFM de Strasbourg

Introduction

Notre étude est motivée par la place essentielle du concept d'implication à la fois dans la vie de tous les jours et dans l'activité scientifique.

D'une part, l'implication de la logique naturelle est omniprésente dans notre vie quotidienne et nous est nécessaire. Nous l'utilisons, par exemple, dès que nous employons les expressions *Si ... alors...* ou *il suffit que...* ou encore *il est nécessaire que ...* Mais, alors que son utilisation nous paraît naturelle, une définition de l'implication ne va pas de soi. En effet, toute définition est en fait la donnée d'une équivalence, or l'équivalence n'est rien d'autre que la conjonction de deux implications. Définir l'implication apparaît ainsi d'emblée comme un paradoxe.

D'autre part, l'implication est au centre de toute activité mathématique, elle est constitutive des preuves. Il semblerait donc normal que son apprentissage ait une place centrale dans l'enseignement. Pourtant, elle n'est presque pas enseignée en tant qu'objet mathématique, sa place dans l'enseignement est vague et elle apparaît plutôt comme un outil *paramathématique* : devant être connu sans être enseigné [Chevallard Y., 1985, p.50].

Il en résulte que l'implication apparaît comme un objet transparent et facile à manipuler alors que, paradoxalement, de nombreux étudiants manifestent des difficultés relativement à l'implication jusqu'en maîtrise et au-delà, notamment en ce qui concerne les conditions nécessaires et les conditions suffisantes. C'est pourquoi, nous affirmons que cette identification de l'objet mathématique à l'implication de la logique naturelle est insuffisante pour une « bonne » appréhension et une « bonne » manipulation de cet objet.

Cette recherche est issue de notre thèse sur l'implication mathématique [Deloustal-Jorrand V., 2004] soutenue en 2004. Nous avons choisi de respecter dans cet article, le plan suivi lors de notre exposé au séminaire national. Après l'étude de deux situations mettant en jeu l'implication, nous distinguons trois cadres pour l'implication avant de présenter nos premiers constats issus d'une étude de manuels et de premières expérimentations. Nous énonçons alors la thèse que nous avons soutenue, éclairée par le cadre théorique, et les choix que nous avons faits en conséquence pour notre ingénierie. Nous concluons par quelques résultats.

choix que nous avons faits en conséquence pour notre ingénierie. Nous concluons par quelques résultats.

Deux problèmes de mathématiques

Situation Géométrie 1

Voici le premier problème de géométrie proposé aux PLC2³⁰.

Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur.

À quelles conditions sur les diagonales a-t-on 2 autres côtés parallèles entre eux ?³¹

Dans la suite de l'analyse nous appellerons :

H : La propriété « avoir deux côtés opposés de même longueur »

P1 (H étant vérifiée) : La propriété « avoir les deux autres côtés parallèles entre eux »

A : La condition sur les diagonales cherchée

Nous appellerons H , $P1$ et A les ensembles associés à ces propriétés.

Type de tâches et questionnement

La tâche consiste à répondre, à l'aide des connaissances sur les objets et les propriétés de la géométrie classique à la question :

$H \text{ et } (A ?) \Rightarrow (\text{ou } \Leftarrow ?) H \text{ et } P1$, A étant la condition sur les diagonales cherchée.

On peut soit considérer que les conditions à chercher sont des conditions suffisantes pour P1 (Sous H, $A ? \Rightarrow P1$) soit considérer que ce sont des conditions nécessaires (Sous H, $P1 \Rightarrow A ?$) puisque rien ne le précise mathématiquement dans notre énoncé.

Nous présentons ici quatre approches du problème pouvant induire des stratégies différentes.

La première approche pose la question des conditions suffisantes. La première stratégie proposée consiste à lister des conditions classiques sur les diagonales (diagonales de même longueur, diagonales perpendiculaires...) puis à contrôler le fait que ces conditions, additionnées à l'hypothèse H, impliquent la conclusion P1. La deuxième stratégie proposée se rapporte à des objets connus. Certains quadrilatères bien connus vérifient à la fois H et P1, par exemple les carrés, les rectangles, les parallélogrammes. Or les propriétés de leurs

³⁰ Professeurs des Lycées et Collèges en année de stage à l'IUFM de Grenoble (deuxième année de formation).

³¹ La situation comportait deux autres questions :

À quelles conditions sur les diagonales a-t-on 2 angles droits ? 2 autres côtés de même longueur (entre eux) ?

diagonales sont elles aussi bien connues. Cependant, si elles permettent de trouver quelques conditions suffisantes de façon très économique, ces stratégies ne renseignent pas quant à l'exhaustivité des résultats. Enfin, une troisième stratégie liée à cette première approche est basée sur l'utilisation de la contraposée : Sous H, Non P $\Rightarrow$ Non A. Toutefois, la propriété Non P « avoir deux côtés non parallèles » ne représente pas une classe d'objets facilement identifiable, c'est ce que nous avons appelé une propriété *non remarquable*. C'est pourquoi cette stratégie utilisant la contraposée paraît ici inadaptée pour résoudre le problème. En conclusion, cette première approche replace le problème dans le cadre du point de vue déductif et permet de trouver quelques conditions suffisantes à P1.

La deuxième approche pose la question des conditions nécessaires et suffisantes. Quels sont les objets qui vérifient à la fois l'hypothèse H et la conclusion P1 ? Et quelles sont les propriétés de leurs diagonales ? Pour étudier les objets qui vérifient (H et P1), on peut soit parcourir l'ensemble de ces éléments en construisant ce que nous avons appelé une *figure ensembliste*³² soit essayer de trouver un *élément représentant* de cette classe et utiliser ce que nous avons appelé une *figure scolaire*.

Pour parcourir l'ensemble des éléments, il y a deux stratégies possibles, soit se placer dans H et ajouter la propriété P1 (stratégie 3), soit se placer dans P1 et ajouter la propriété H (stratégie 4). La première stratégie est plus proche du texte du problème mais la seconde est plus facile d'accès, il semble en effet plus facile de représenter deux côtés parallèles que deux côtés opposés égaux. Enfin, pour la cinquième stratégie proposée, il ne s'agit plus de parcourir la classe $H \cap P1$, comme dans les stratégies ensemblistes précédentes, mais de chercher à construire un élément générique de cette classe. Suivant que l'on contrôle, tout au long de la résolution, que l'élément reste générique ou que l'on se contente d'un élément *quelconque* au départ, l'exhaustivité des cas est garantie ou non.

Figure scolaire, figure ensembliste

Il est courant dans les recherches didactiques et dans l'enseignement de faire la différence entre dessin et figure. Soit un objet géométrique donné, défini par des propriétés, Parzysz (1988, p.80) distingue la *figure géométrique*, une idée, une création de l'esprit, du *dessin* qui n'en est qu'une représentation.

³² Les termes *figures scolaires* et *figures ensemblistes* au sens où nous les utilisons seront définis dans le paragraphe suivant.

Dans l'enseignement, cette différence est en fait écrasée. On s'assure simplement de représenter un élément n'ayant aucune propriété autre que celles de la classe à laquelle il appartient. Si l'on doit représenter un parallélogramme, on ne représentera pas un rectangle, si l'on doit représenter un triangle, on ne représentera ni un triangle isocèle ni un triangle rectangle. Le contrôle effectué pour éviter la particularité du dessin est essentiellement visuel. Cette figure *quelconque* est censée représenter un élément que l'on considèrera *générique* de la classe. Cependant, quelle que soit la non particularité du dessin en jeu, il n'en reste pas moins que ce dessin représente un *objet particulier* de sa classe. Nous soutenons que, même lorsque la figure ne présente aucune particularité visible, elle ne représente pas forcément tous les objets de la classe. Ceci peut évidemment avoir des conséquences dans une démonstration³³. D'une figure considérée *a priori quelconque*, on découvrira qu'elle était en fait particulière car elle ne permettait pas de rendre compte de tous les éléments de l'ensemble. Il est donc particulièrement difficile de contrôler qu'un élément d'un ensemble est *quelconque* et qu'il est bien un *représentant générique* de cet ensemble.

La distinction entre *dessin* et *figure* proposée par l'enseignement paraît insuffisante, il faut donc revenir à une distinction plus forte. C. Laborde et B. Capponi réinterprètent la distinction *figure-dessin* de B. Parzisz à l'aide du triangle référent-signifiant-signifié.

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente, le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. (...) En tant que signifiant d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un domaine de fonctionnement au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin). Ainsi un dessin ne rend-il pas compte du domaine de variation des éléments de l'objet géométrique. [Laborde C., Capponi B., 1994]

³³ Pour avoir un exemple, le lecteur pourra se référer à [Deloustal-Jorrand 2004, p.168]

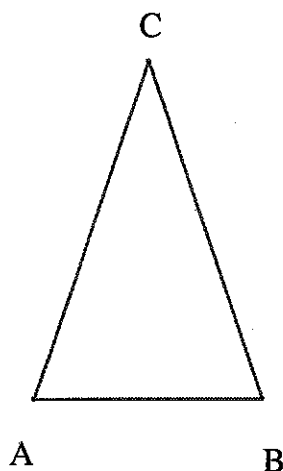
A la suite de cette citation, nous voyons l'importance de la variation des éléments de l'objet géométrique pour dépasser le statut de *dessin* et atteindre le statut de *figure*. Ainsi, c'est en tenant compte de cette variation que l'on peut passer d'un élément *quelconque* d'une classe d'objet à un élément *générique* représentant de cette même classe d'objets.

Nous soutenons l'hypothèse qu'avoir un *point de vue ensembliste* sur les objets permet ce passage du *dessin* à la *figure* et de l'élément *quelconque* à l'élément *générique*. Avoir un *point de vue ensembliste* revient, dans ces cas, à ne travailler ni sur un *dessin* ni sur une *figure au sens scolaire* mais à avoir présente à l'esprit ce que nous appellerons une *figure ensembliste*.

Une *figure ensembliste*, n'est pas la représentation d'un élément de l'ensemble, mais la représentation envisageable de **tous** les éléments de cet ensemble. Une *figure ensembliste* doit être dynamique, les points peuvent se déplacer dans les limites fixées par les propriétés définissant l'appartenance à l'ensemble. Une *figure ensembliste* ne peut donc être réduite à une reproduction physique sur une feuille, l'action de la pensée est nécessaire pour prendre en compte le fait que les points décrivent des ensembles.

Utiliser une *figure ensembliste* dans la résolution d'un problème signifie garder présent à l'esprit le fait que les points varient et en tenir compte dans la construction des différentes configurations. L'utilisation de la figure ensembliste permet alors d'atteindre, de façon certaine, l'exhaustivité des configurations qui sont solutions.

Nous montrons, ci-dessous, sur un exemple, comment nous différencions le *dessin*, la *figure scolaire* et la *figure ensembliste*.



Dessin

Triangle isocèle particulier

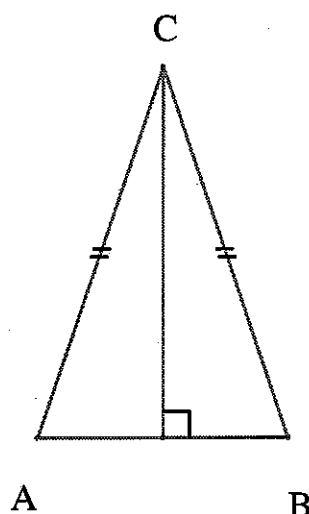


Figure scolaire

Les propriétés du triangle sont comprises dans la figure (qu'elles soient notées isocèles. explicitement ou non)

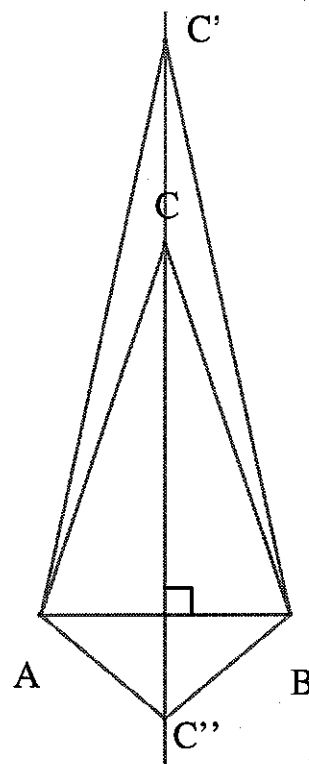


Figure ensembliste

Lorsque le point C décrit la médiatrice, on atteint l'ensemble des triangles

Pouvoir travailler sur *l'élément générique* d'une classe pour faire une démonstration est une caractéristique des mathématiques. Cependant *l'élément générique* est très difficile à atteindre par une figure et il faut de nombreux contrôles, tout au long de la preuve, pour garantir que celle-ci ne cache pas des propriétés particulières. En réponse à cette difficulté, la *figure ensembliste* remplace *l'élément générique* par *l'ensemble* des éléments en parcourant toute la classe, alors que la *figure scolaire* le réduit à un *élément quelconque*.

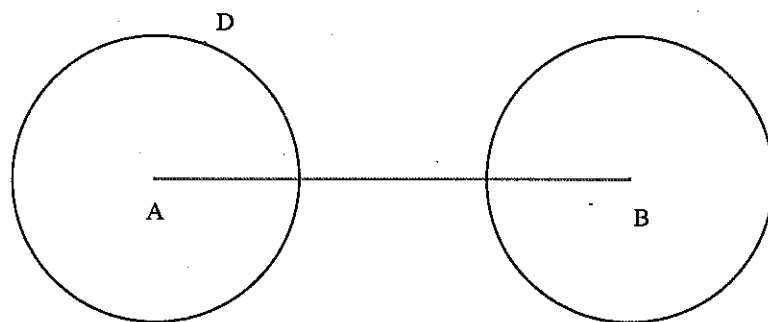
Nous ne prétendons pas que l'utilisation de la *figure ensembliste* soit facile. Au contraire, la prise en compte du dynamique pendant la résolution rend celle-ci plus délicate. Nous soutenons simplement que l'utilisation de la figure ensembliste est un moyen efficace de contrôle de l'exhaustivité des configurations obtenues quand l'utilisation du *dessin* ou de la *figure scolaire* ne permet pas toujours ce contrôle.

Résolution du problème dans le cadre ensembliste (Stratégie 3 : H puis P1)

Nous considérons cette situation en géométrie plane et nous intéressons uniquement aux quadrilatères plans. Nous détaillons ici uniquement la stratégie 3 (figure ensembliste), pour les autres stratégies le lecteur pourra se référer à [Deloustal-Jorrand, 2004].

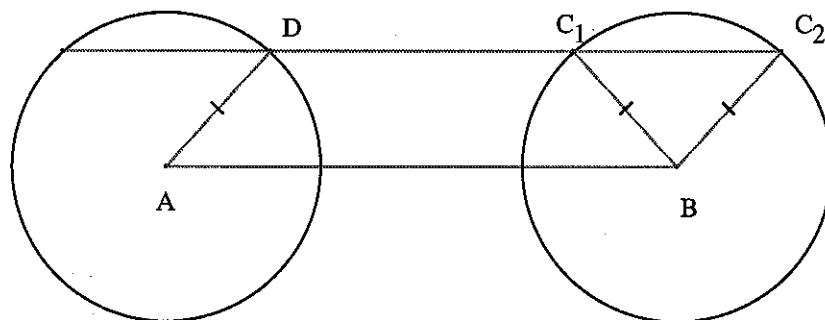
Recherche des configurations vérifiant H et P1

Une fois les points A et B placés dans le plan, l'hypothèse *H deux côtés opposés de même longueur* se traduit par $AD = BC$. C'est-à-dire que les points C et D appartiennent respectivement à deux cercles de même rayon, l'un centré en B, l'autre centré en A.



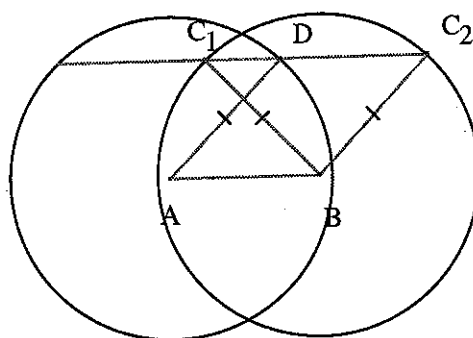
Une fois D fixé, pour traduire la propriété P1 *les deux autres côtés sont parallèles*, il faut tracer la droite parallèle à (AB) passant par D. C est alors point d'intersection de cette droite avec le cercle de centre B. Il y a ici deux points d'intersection C_1 et C_2 .

On obtient les configurations : trapèze isocèle (ABC_1D) et parallélogramme (ABC_2D).



[ABC_1D : trapèze isocèle ; ABC_2D : parallélogramme]

Toutefois, pour décrire l'ensemble des objets qui vérifient H et P1, sans en oublier aucun, il convient de faire varier tous les paramètres utilisés dans cette construction. A fixé, on peut faire varier la distance AB, le rayon des cercles et la position de D (liée à celle de C) sur son cercle. Lorsque D se trouve entre C_1 et C_2 , on se trouve en présence d'une autre configuration : un trapèze isocèle croisé (ABC_1D).



[ABC_1D trapèze isocèle croisé ; ABC_2D : parallélogramme]

On a donc l'équivalence :

$H \text{ et } P1 \Leftrightarrow \text{parallélogramme OU trapèze isocèle OU trapèze isocèle croisé}$

Il reste maintenant à trouver les conditions que vérifient leurs diagonales.

Les conditions sur les diagonales

Être un parallélogramme équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *les diagonales qui se coupent en leur milieu*.

Les trapèzes isocèles et les trapèzes isocèles croisés ont des *diagonales de même longueur*.

Nous avons ainsi l'implication :

$H \text{ et } P1 \Leftrightarrow \text{parallélogramme OU trapèze isocèle OU trapèze isocèle croisé}$
 $\Rightarrow \text{diagonales se coupant en leur milieu OU diagonales de même longueur}$

C'est à dire que nous avons trouvé une condition nécessaire pour avoir (H et P1) et que nous avons résolu un sens de l'implication de la question de départ. Il nous faut maintenant examiner si cette condition est aussi une condition suffisante en étudiant l'autre sens.

Interprétation logique

Appelons les propriétés :

A1 : *avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu*

A2 : *avoir des diagonales de même longueur*

Nous venons de démontrer :

Sous l'hypothèse H, $P1 \Rightarrow (A1 \text{ ou } A2)$ (1)

Nous voulons maintenant essayer de démontrer la réciproque, c'est-à-dire :

Sous l'hypothèse H, $(A1 \text{ ou } A2) \Rightarrow P1$ (2)

Ce qui peut se traduire par :

Sous l'hypothèse H, $(A1 \Rightarrow P1) \text{ et } (A2 \Rightarrow P1)$ (2')

Cette condition (A1 ou A2) est-elle suffisante ?

Avoir ses diagonales qui se coupent en leur milieu (A1) est bien une condition suffisante puisqu'il y a équivalence avec la propriété *être un parallélogramme*. En effet, on a :

diagonales se coupent en leur milieu $\Leftrightarrow$ être un parallélogramme $\Rightarrow$ P1

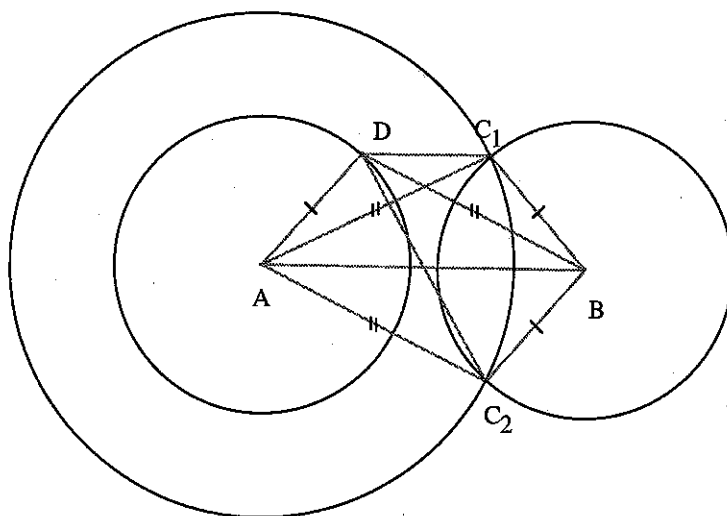
Nous venons donc de démontrer que : $A1 \Rightarrow P1$.

et donc a fortiori que : Sous l'hypothèse H, $A1 \Rightarrow P1$.

Reste à examiner si la propriété *avoir ses diagonales de même longueur* (A2) est une condition suffisante, c'est-à-dire si l'implication suivante dans les quadrilatères est vraie :

Sous l'hypothèse H, $A2 \Rightarrow P1$ Ou encore : $(H \text{ et } A2) \Rightarrow P1$

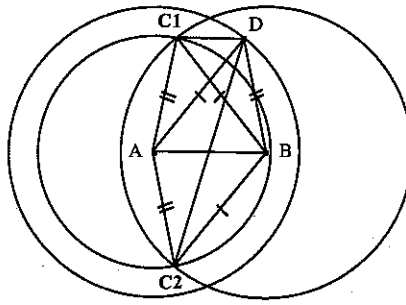
Pour cela, reprenons le point de vue ensembliste et intéressons-nous aux quadrilatères qui vérifient H et A2. Comme dans la précédente construction, pour vérifier H, C et D se trouvent sur deux cercles de même rayon ayant respectivement pour centre B et A. D étant fixé, pour vérifier A2, C doit se trouver sur le cercle de centre A et de rayon BD. Il y a deux positions possibles (éventuellement confondues) pour le point C, les deux intersections C1 et C2 des cercles.



[ABC_1D : trapèze isocèle ; ABC_2D parallélogramme croisé]

On obtient deux configurations : *trapèze isocèle* (ABC_1D) et un quadrilatère croisé associé au parallélogramme que nous appellerons *parallélogramme croisé* (ABC_2D).

Lorsqu'on réduit la distance AB, le trapèze isocèle devient croisé.



[ABC_1D : trapèze isocèle croisé ; ABC_2D parallélogramme croisé]

Or, le parallélogramme croisé ne convient pas, il a bien deux côtés égaux mais les deux autres se croisent et ne sont donc pas parallèles. Nous avons là un contre-exemple montrant que la condition A2, *avoir des diagonales égales*, n'est pas suffisante pour P1 sous H.

Recherche d'une condition nécessaire et suffisante

Puisque A2 n'est pas suffisante, nous allons la restreindre à une condition *plus forte*. Nous allons chercher une nouvelle condition A2i qui soit non seulement suffisante mais qui permette en plus d'avoir une équivalence finale. Nous cherchons donc une condition A2i telle que :

Sous H, $A2i \Rightarrow P1$ et Sous H, $P1 \Rightarrow (A1 \text{ ou } A2i)$

Il faut donc renforcer A2 pour éliminer le cas du parallélogramme croisé, mais attention, nous devons être vigilants à ne pas éliminer en même temps le cas particulier du rectangle croisé qui vérifie, lui, P1. Nous ne détaillerons pas ici la suite de la résolution, le lecteur pourra, s'il le souhaite, se référer à [Deloustal-Jorrand, 2004 pp.194-202].

Finalement, nous pouvons énoncer l'équivalence :

Dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux,
Avoir les deux autres côtés parallèles (P1)

$\Leftrightarrow$

Avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu (A1)	OU	Avoir des diagonales égales et les côtés opposés égaux non parallèles (A2d)
---	----	---

Ce résultat découle d'une résolution dans le *cadre ensembliste* : on cherche une solution comme intersection de deux classes d'objets, la classe des objets qui vérifient H et la classe des objets qui vérifient P1. Elle nécessite une visualisation « dynamique » : les points peuvent bouger sous certaines contraintes. Elle permet d'atteindre toutes les configurations, que ce soient des quadrilatères croisés ou non.

Structure de différents types de tâches concernant l'implication

Nous analysons, dans cette partie, différents types de tâche concernant l'implication, afin de montrer les spécificités de la structure du problème *géométrie 1*.

Dans H , $A \Rightarrow B$ où A et B sont connus

La question de démontrer $A \Rightarrow B$ où A et B sont connus est habituelle dans l'enseignement des mathématiques. Pour répondre au problème, on met alors en œuvre un raisonnement déductif dans lequel on ne considère que le cas où A est vrai. La plupart du temps, il n'y a même pas d'enjeu de vérité, la question porte sur *l'explication* et non pas sur la *preuve de la vérité*. Le travail consiste à déterminer les bonnes propriétés ou théorèmes qui serviront *d'énoncé tiers* [Duval, 1993, p. 44] pour aller de A à B .

Cette précédente implication prend place d'ordinaire dans une classe d'objets déterminée H , par exemple les quadrilatères, les parallélogrammes, les nombres naturels... On regarde en fait l'implication : Dans H , $A \Rightarrow B$. Mais, dans l'enseignement, H est le plus souvent implicite puisque la classe d'objets dans laquelle on se place est en général très institutionnalisée, c'est-à-dire bien connue, ainsi que toutes ses propriétés, par les élèves. En effet, si l'implication se place dans la classe des parallélogrammes, pour résoudre le problème on utilise implicitement des propriétés des parallélogrammes (par exemple, la convexité), sans pour autant rendre cette restriction explicite.

La problématisation de l'implication est mieux réalisée dans le cas où H ne représente pas une classe d'objets institutionnalisée, comme par exemple la classe des quadrilatères dont *une des diagonales coupe l'autre en son milieu*. La propriété H qui lui est associée doit alors être présente explicitement au cours de la résolution.

Nous faisons l'hypothèse que l'obligation de rester à l'intérieur d'un ensemble, au cours de la résolution, favorise l'utilisation du cadre ensembliste en rendant celle-ci plus économique.

Dans H , $(A ?) \Rightarrow (B ?)$

Lorsque l'on émet des conjectures, on se place, le plus souvent, dans le schéma où l'on connaît H et A mais pas B : Dans H , $A \Rightarrow (B ?)$.

Lorsque l'on cherche d'une condition suffisante A pour B dans H , on est alors dans le schéma : Dans H , $(A ?) \Rightarrow B$. Ce dernier type de tâche entrave l'utilisation du cadre du raisonnement déductif puisque l'on ne connaît pas la propriété de départ.

Dans H, $(A_1 \text{ ou } A_2) \Rightarrow B$

Dans l'enseignement, la prémisses A est le plus souvent de la forme $(A_1 \text{ et } A_2 \text{ et...})$. Les hypothèses *s'ajoutent*. Dans le cadre ensembliste, cela revient à dire que l'ensemble de départ est une intersection d'ensembles.

Lorsque la prémisses A peut être écrite sous la forme $(A_1 \text{ ou } A_2)$, les enseignants préfèrent parfois écrire dans le cours deux propriétés distinctes, l'une avec la prémisses A_1 , l'autre avec A_2 . Cela revient pourtant à affaiblir la portée de chacune des implications données.

Si A est de la forme $(A_1 \text{ ou } A_2)$, il faut alors contrôler les propriétés vérifiées par l'élément x que l'on considère, suivant que x est dans A_1 ou bien dans A_2 , des allers-retours entre les deux ensembles étant nécessaires. Nous faisons l'hypothèse que ce type de tâche favorise l'utilisation du cadre ensembliste. Toutefois, selon les ensembles A_1 et A_2 , l'utilisation d'un raisonnement par disjonction des cas peut ramener facilement au cadre déductif.

Dans H, $A ? B$

Le sens $(\Rightarrow \text{ ou } \Leftarrow)$ de l'implication n'est pas précisé. Un travail doit être fait à la fois sur les conditions suffisantes et nécessaires. La vérité de l'implication est problématisée, A (respectivement B) est-elle une condition suffisante et si oui pourquoi ?

Passer de l'ensemble A à l'ensemble B sans arrêt, jusqu'à connaître toutes les relations entre ces deux ensembles permet de résoudre le problème en ayant une vue globale sur lui. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que le cadre ensembliste est ici un outil performant.

Structure du problème géométrie 1

Le problème *géométrie 1* regroupe différentes structures décrites ci-dessus.

H est une classe non institutionnalisée, celle des quadrilatères ayant deux côtés égaux.

La condition cherchée A est de la forme $(A_1 \text{ ou } A_2)$.

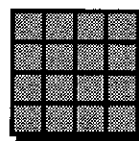
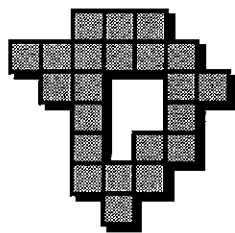
On doit s'intéresser à la fois aux conditions suffisantes et aux conditions nécessaires puisque l'énoncé n'explicite pas ce qui doit être cherché.

Situation Polymino 1

Nous ne donnerons, dans cette analyse, pas d'autres définitions concernant les polyminos que celles données aux stagiaires PLC2. Voici le texte du problème.

Définitions :

Polymino : assemblage connexe de cases carrées dans le plan.



Domino : polymino à 2 cases.



Taille d'un polymino : nombre de cases du polymino.

Pair : un polymino est pair si sa taille est paire.

Paver un polymino par des dominos : recouvrir entièrement et sans chevauchement un polymino à l'aide de dominos.

Dans ce cas-là, on dira qu'un polymino est **pavable** par des dominos.

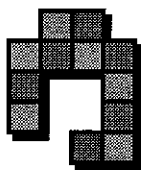


pavable



Non pavable

Équilibré : Si l'on colorie le polymino en damier, il est dit équilibré lorsque le nombre de cases blanches est égal au nombre de cases noires.



Question :

Soit P1, P2 et P3 les propriétés suivantes d'un polymino :

(P1) : pavable (par des dominos)

(P2) : équilibré

(P3) : pair

Quelles sont les relations entre ces propriétés ?

Rédigez une preuve satisfaisant tout le groupe.

Type de tâches et questionnement

La tâche consiste à décider de la validité ou non d'implications entre propriétés concernant le pavage de polyminos. Nous avons proposé cette situation Polymino car nous faisons l'hypothèse que les preuves dans ce contexte sont différentes des preuves dans le contexte de la géométrie. En effet, les objets et les propriétés en jeu dans le pavage de polyminos ne sont pas connus des PLC2. En conséquence, nous faisons l'hypothèse que pour résoudre le

problème, ils vont devoir faire des essais de pavages, émettre des conjectures et les prouver ou les invalider, ainsi le cadre ensembliste est un outil nécessaire.

Nous donnerons, pour chaque question, une démonstration mathématique dans le cadre déductif et nous détaillerons quelques aspects de ce que nous appellerons une stratégie par essais et conjectures. De précédentes expérimentations [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003] ont montré que l'une et l'autre sont présentes et nécessaires pour la résolution. La stratégie par essais et conjectures est le moyen de « rentrer » dans le problème et la démonstration dans le cadre déductif est le moyen satisfaisant de rendre publique la réponse pour la plupart des étudiants.

Par souci de clarté, nous faisons le choix, dans la suite, d'écrire les implications sans quantificateurs bien qu'ils soient évidemment sous-entendus. Par exemple, nous écrirons « pavable $\Rightarrow$ pair » pour « quel que soit le polymino P, P est pavable $\Rightarrow$ P est pair ».

Implications entre pavable (P1) et pair (P3)

Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples

Les essais de pavages montrent en général assez vite que « Non pair $\Rightarrow$ Non pavable », il faut alors utiliser l'équivalence de l'implication avec sa contraposée pour en déduire que « pavable $\Rightarrow$ pair ». La conjecture que les propriétés pavable (P1) et pair (P3) sont équivalentes est très courante au moins au début. Elle est d'ailleurs vraie, par exemple, sur l'ensemble des polyminos rectangles.

Démonstration dans le cadre déductif

L'implication « pavable $\Rightarrow$ pair » ($P1 \Rightarrow P3$) est vraie. En effet, un polymino pavable est, par définition, recouvert sans chevauchement par des dominos. Or un domino recouvre deux cases. En conséquence, le nombre de cases du polymino, c'est-à-dire sa taille, est un nombre pair.

L'implication « pair $\Rightarrow$ pavable » ($P3 \Rightarrow P1$) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est pair et non pavable.



contre-exemple 1

Implications entre pavable (P1) et équilibré (P2)

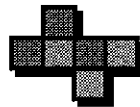
Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples

Dans les essais, lorsqu'on n'arrive pas à paver un polymino équilibré, on remarque qu'il reste toujours 2 cases non contiguës non pavées. Cela ne prouve pas que le polymino ne soit pas pavable, il pourrait exister un autre pavage. Il faut remarquer que les deux cases restantes sont de la même couleur et transformer la coloration en outil, pour formuler la conjecture que « Non équilibré $\Rightarrow$ Non pavable ». L'outil coloration n'est pas un outil habituel, il est même rarement reconnu comme un outil mathématique. La conjecture de l'équivalence entre les deux propriétés est assez courante, au moins au début.

Démonstration dans le cadre déductif

L'implication « pavable $\Rightarrow$ équilibré » ($P1 \Rightarrow P2$) est vraie. En effet, supposons que le polymino soit colorié comme un échiquier, alors un domino posé sur ce polymino couvre une case blanche et une case noire. Et ceci est vérifié, que le domino soit placé horizontalement ou verticalement. De plus, un polymino pavable, par définition, peut être recouvert sans chevauchement par des dominos. Il s'ensuit qu'un polymino pavable a le même nombre de cases blanches que de cases noires, c'est-à-dire qu'il est équilibré.

L'implication « équilibré $\Rightarrow$ pavable » ($P2 \Rightarrow P1$) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est équilibré mais non pavable.



contre-exemple 2

Implications entre équilibré (P2) et pair (P3)

Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples

L'implication « équilibré $\Rightarrow$ pair » est démontrée, en général, à partir de la définition de équilibré (autant de cases noires que de cases blanches) et ne nécessite pas d'essais.

Le contre-exemple à l'implication réciproque est trouvé, le plus souvent, très rapidement.

Démonstration dans le cadre déductif

L'implication « équilibré $\Rightarrow$ pair » ($P2 \Rightarrow P3$) est vraie. Puisque le polymino est équilibré, il contient le même nombre N de cases noires et de cases blanches. Par suite, la taille du polymino est $2N$ et le polymino est pair.

L'implication « pair $\Rightarrow$ équilibré » ($P3 \Rightarrow P2$) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est pair mais non équilibré.



contre-exemple 1

Structure de la situation Polyminos 1

Formulation de la question : résultat non évident

L'énoncé ne dit pas quelles sont les implications vraies et, a priori, rien ne permet de le savoir. Il y a donc un enjeu de vérité réel. Pour répondre il faut faire des conjectures et chercher des contre-exemples.

Les implications ne sont pas des équivalences

Toutes les implications vraies, ici, ont des réciproques fausses. Il n'y a pas d'équivalences. Cela oblige à faire la distinction entre les conditions nécessaires et les conditions suffisante, ce qui est essentiel pour problématiser l'implication.

Analogies entre les situations Géométrie et Polyminos

Les objets mathématiques sont facilement manipulables

Notre hypothèse est que, pour qu'un apprentissage puisse se faire sur l'implication, il faut que le travail se fasse sur le raisonnement et la preuve. D'autre part pour qu'on puisse repérer des erreurs dues à l'implication, nous devons nous donner les moyens de contrôler que ces erreurs ne sont pas dues à des concepts mathématiques. Pour cela, il faut que les concepts mathématiques en jeu n'apportent pas, par eux-mêmes, de difficultés. Les objets que nous proposons dans ces situations ont donc été choisis pour satisfaire ce critère. Les polyminos sont des objets nouveaux pour les PLC2 mais facilement et rapidement appréhensibles, comme l'ont montré de précédentes expérimentations [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003]. Les objets mathématiques en jeu dans notre problème de géométrie sont, quant à eux, depuis longtemps connus et utilisés par les PLC2. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que ces objets permettent un travail sur le raisonnement.

Enjeu de découverte, enjeu de vérité : conjectures, exemples, contre-exemples

Dans les deux problèmes, les objets mathématiques étant faciles d'accès, c'est la question, elle-même, qui nécessite une activité mathématique. Ces questions paraissent inhabituelles puisqu'il faut « trouver les conditions telles que... » ou discuter de la véracité (non évidente) d'implications données alors que l'enseignement traditionnel propose le plus souvent des problèmes de la forme « Montrez que ... », le résultat proposé étant souvent évident. Dans le problème de géométrie, il y a un enjeu de découverte, on ne connaît pas d'avance le résultat qu'on va obtenir, il faut découvrir les propriétés des diagonales.

Pour les deux problèmes, l'activité mathématique est faite d'essais (configurations géométriques connues, essais sur des petits polyminos), de conjectures, d'exemples et de contre-exemples. C'est la résolution du problème qui nécessite cette activité mathématique et non pas une demande extérieure (professeur ou questions intermédiaires). L'enjeu de vérité est réel dans ces problèmes et nous faisons l'hypothèse que cela facilite le passage au cadre ensembliste puisque le cadre déductif n'est plus alors suffisant.

Les classes d'objets en jeu ne sont pas des classes institutionnalisées

Dans nos deux problèmes, les classes d'objets en jeu ne sont pas des classes d'objets institutionnalisées. Les polyminos ne sont pas des objets connus et les quadrilatères de la classe H du problème de géométrie, les quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux, n'en sont pas non plus. Contrairement aux parallélogrammes dont les propriétés sont bien établies à partir de la quatrième, les propriétés et les théorèmes associés aux objets en jeu dans nos problèmes ne sont pas familiers. Nous faisons l'hypothèse que ceci rend l'utilisation du cadre ensembliste nécessaire ou tout au moins économique. Il n'est plus possible de penser les propriétés comme des qualités d'objets, il faut considérer les ensembles qui leurs sont associés.

Différences entre les situations Géométrie et Polyminos

Propriétés remarquables

Nous dirons qu'une propriété est *remarquable* si elle est associée à un ensemble de mesure petite. Cette définition est évidemment vague mais nous l'utiliserons surtout dans la comparaison de deux propriétés. Par exemple, *être un parallélogramme* est une propriété

très *remarquable* puisque l'ensemble des parallélogrammes est de mesure nulle dans l'ensemble des quadrilatères. En effet, un parallélogramme est déterminé par trois points A, B, C, le quatrième point étant déterminé par les trois autres. À ces trois points, on peut associer une infinité de quadrilatères ABCE, E décrivant le plan. Réciproquement soit un quadrilatère ABCD, on ne peut lui associer que quatre parallélogrammes déterminés par les trois points ABC, ABD, ACD ou BCD.

Au contraire, dans l'ensemble des polyminos, il n'y a pas de propriétés *remarquables*. Par exemple, les deux propriétés *être pavable* ou *être non pavable* ont des mesures de grandeurs comparables.

Les propriétés *remarquables* sont au cœur de la géométrie scolaire, puisqu'on y met en valeur des ensembles d'objets de mesures petites (parallélogrammes, rectangles, carrés...). Au contraire, dans les polyminos, les propriétés que nous demandons d'étudier sont pareillement *remarquables*, c'est pourquoi nous faisons l'hypothèse qu'il y a nécessité de travailler sur les ensembles d'objets et que l'émergence du cadre ensembliste est favorisée. De plus, le caractère *remarquable* d'une propriété a une incidence sur le caractère *non remarquable* de la négation de cette propriété. Alors qu'en logique la propriété P et la propriété Non P peuvent être utilisées de la même façon, ceci n'est pas vrai en géométrie. En effet, plus une propriété est *remarquable* plus sa négation est *non remarquable*, c'est-à-dire associée à un ensemble de grande mesure. Il est alors difficile de dessiner un représentant générique de cette classe d'objets. Par exemple, alors qu'il est possible de dessiner un représentant générique des parallélogrammes, un représentant générique des « non parallélogrammes » n'est pas représentable.

Dans l'ensemble des polyminos, puisque les propriétés que nous proposons sont également *remarquables*, la propriété Non P et la propriété P sont au « même niveau » et peuvent être également représentées. En revanche, dans notre situation de géométrie, le fait que Non P1 (*avoir des côtés opposés non parallèles*) soit une propriété *non remarquable* et sur laquelle on ne peut pas construire d'exemple freine l'utilisation de la contraposée et du raisonnement par l'absurde comme moyen de résolution.

Cette différence fondamentale entre les propriétés des objets dans les deux situations participe à rendre ces deux situations complémentaires dans notre ingénierie.

Approche perceptive ou non d'un objet en lien avec sa structure

On reconnaît, en général, de manière perceptive, si un quadrilatère est ou n'est pas un parallélogramme. En revanche, il est rarement possible de reconnaître, de la même manière, un polymino pavable, sauf dans certains cas précis, par exemple pour un polymino de très petite taille ou pour un polymino rectangle de deux lignes. La plupart du temps, pour vérifier qu'un polymino est pavable, il faut mettre en œuvre des outils théoriques, comme par exemple vérifier la parité du nombre de cases à recouvrir si l'on pave avec des dominos, et il est souvent nécessaire d'exhiber un pavage. La propriété *être pavable* ne caractérise pas, structurellement, le polymino comme c'est le cas, dans une certaine mesure, avec la propriété *être un parallélogramme* pour les quadrilatères. Les polyminos dessinés sont toujours particuliers, on ne peut pas avoir un représentant *quelconque* des polyminos pavables (respectivement pairs, équilibrés....) comme on peut en avoir un des carrés.

En conséquence, la propriété *être un parallélogramme* sera plus perçue comme la qualité d'un objet que comme la caractéristique d'une classe, contrairement à la propriété *être pavable*. Par suite, les enjeux de découverte et de vérité seront différents suivant les objets. Il est plus facile de trouver des conditions suffisantes pour être un parallélogramme (on les « voit » !) que pour être un polymino pavable que rien ne permet de reconnaître.

C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que la situation Polymino favorise l'utilisation du cadre ensembliste et qu'ainsi l'activité doit nécessairement être centrée sur la recherche d'exemples, contre-exemples et conjectures.

Position institutionnelle des objets de savoir

Les connaissances géométriques sur les quadrilatères mises en jeu dans nos problèmes de géométrie sont enseignées depuis le collège. Ces outils ont donc une forte place institutionnelle même si la classe des objets H n'est pas, elle-même, connue. Cela permet une dévolution facile de notre problème auprès des PLC2 qui se sentent très concernés par l'utilisation du raisonnement en géométrie dans l'enseignement secondaire.

En revanche, les polyminos sont absents de l'enseignement. Ils n'ont pas de place institutionnelle. D'ailleurs, d'après d'autres expérimentations, les élèves placés devant ces problèmes de pavage de polyminos, n'ont pas l'impression de faire des mathématiques et les professeurs ont le sentiment de travailler hors programme. Les stagiaires PLC2 n'ont donc pas d'outils spécifiques pour la résolution de problèmes de polyminos.

Problématique sur l'implication

Le type de questionnement sur l'implication est différent dans ces deux situations. En effet, alors qu'il s'agit, dans le problème de géométrie, de chercher une propriété et pour cela d'établir des implications et de vérifier leur domaine de validité, il s'agit, dans le problème sur les pavages de polyminos de vérifier la validité d'implications données. Le second problème est plus fermé mais la nature même de ces objets, en particulier le fait que les implications données ne paraissent pas vraies ou fausses dès le premier abord, permet un travail de recherche que permettraient difficilement les objets géométriques en jeu dans le premier problème.

Trois cadres pour l'implication mathématique

La notion d'implication existe dans la logique naturelle³⁴. Nous l'utilisons tous les jours par exemple lorsque nous disons *le ciel est bleu donc il ne pleuvra pas*, ou *tu auras du dessert si tu manges ta soupe....* Mais, si tout le monde semble se comprendre, il apparaît toutefois que certaines expressions sont ambiguës. De nombreux abus de langage contribuent à rendre floue *l'implication naturelle*. Une étude de cette *implication naturelle* nous a, par exemple, permis de relever des confusions entre les expressions *si...alors* et *si et seulement si* ou encore *seulement si*, des connotations de causalité et de temporalité, des interprétations dépendant du contexte... Ceci a évidemment des conséquences sur la compréhension et l'utilisation du concept mathématique d'implication.

Objet mathématique : modélisation de l'objet naturel

Le concept mathématique d'implication peut être interprété comme un modèle du concept de la logique naturelle. Comme tout modèle, le concept mathématique est fidèle à l'objet naturel sous certains aspects et moins, voire pas du tout, sous d'autres. C'est-à-dire qu'il vérifie certaines propriétés et d'autres pas, certaines propriétés logiques vont même parfois à l'encontre de la logique naturelle. Ainsi, la vérifonctionnalité de l'implication mathématique n'est pas proche de la logique naturelle. En revanche, l'équivalence de la contraposée avec l'implication directe est conforme au Modus Tollens.

³⁴ Nous appelons *logique naturelle* toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante.

Trois cadres pour l'implication

Le concept d'implication, omniprésent dans l'activité mathématique, apparaît sous différentes formes selon les cadres mathématiques dans lesquels on le trouve. Pour cette étude épistémologique, nous avons choisi de distinguer trois cadres au sens de Régine Douady. Le cadre théorique qu'elle a défini nous est apparu pertinent pour notre recherche puisqu'elle soutient que les changements de cadres sont nécessaires à l'enseignement d'un concept. C'est aussi la thèse que nous défendons en ce qui concerne l'implication comme nous l'exposerons plus loin. Rappelons la définition introduite par Régine Douady.

Le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique..., mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique. Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. [Douady R. 1986, p10]

Nous avons choisi de mener notre analyse épistémologique à partir de trois cadres qui nous paraissent pertinents pour l'implication :

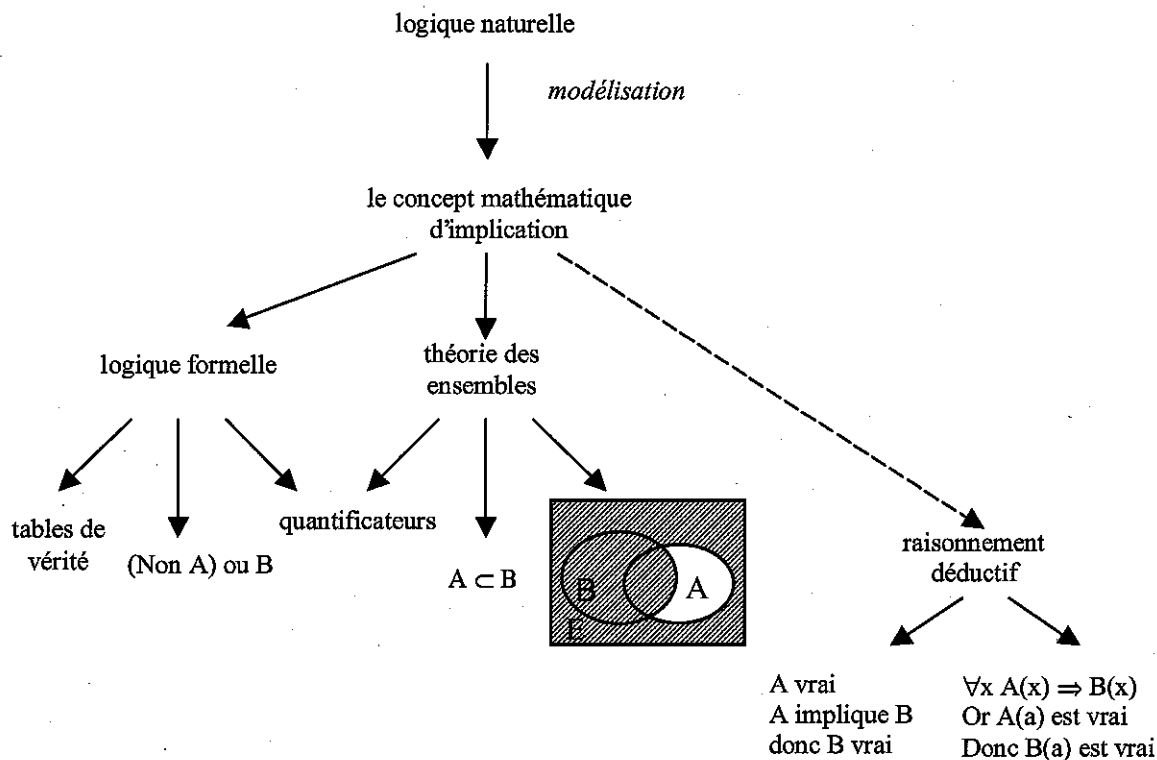
- le cadre ensembliste
- le cadre de la logique formelle
- le cadre du raisonnement déductif

Le troisième cadre n'a pas le même statut que les deux autres. Alors que les deux autres font référence à des théories mathématiques, théorie des ensembles et logique formelle, celui-ci est le cadre de l'utilisation habituelle de l'implication mathématique. En effet, il ne s'agit pas de définir l'objet implication mais d'utiliser l'outil implication dans un raisonnement mathématique. Ce point de vue est couramment utilisé dans la pratique mathématique et, omniprésent dans l'enseignement des mathématiques, il y fait souvent office de seule définition. Nous définirons le cadre du raisonnement déductif comme constitué par les objets liés au raisonnement déductif, les relations entre ces objets, leurs formulations et les images mentales associées à ces objets et ces relations.

Le mot cadre n'est pas à prendre au sens strict. En fait, se placer dans le cadre ensembliste ou adopter le point de vue ensembliste pour résoudre un problème de mathématique, ce

n'est pas seulement utiliser les outils de la théorie des ensembles, c'est aussi « réfléchir de façon ensembliste ».

Le schéma ci-dessous présente l'implication mathématique, modèle de l'implication naturelle, dans les trois cadres.



Nous expliquons succinctement, ci-dessous, ce que nous entendons par cadre ensembliste avant de décrire l'implication dans ce cadre. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [Deloustal-Jorrand V., 2004]

Les propriétés d'objets dans le cadre ensembliste

Se placer dans le cadre ensembliste ne signifie pas, pour nous, qu'il faut nécessairement connaître et maîtriser la théorie des ensembles, même si l'on est amené à en utiliser quelques outils. Cela signifie, avant tout, qu'on considère les propriétés d'objets non comme des qualités des objets mais comme des spécificités d'ensembles d'objets. Une propriété définit un ensemble, l'ensemble des objets qui vérifient cette propriété. Prenons un exemple :

Si A est la propriété « être un quadrilatère avec quatre côtés de même longueur », alors l'ensemble correspondant est l'ensemble A des losanges. Réciproquement, un ensemble A définit la propriété A qui s'énonce « appartenir à l'ensemble A ».

Pour travailler dans le cadre ensembliste, on se place, dans un ensemble de référence ou univers. L'ensemble A correspondant à la propriété A dépend, le plus souvent, de cet ensemble de référence.

Dans l'exemple précédent, l'ensemble de référence est l'ensemble des quadrilatères Q , il est englobé dans la propriété A . Dans cet ensemble Q , la propriété A' « avoir 4 côtés de même longueur » correspond à l'ensemble A des losanges. Cependant, dans l'ensemble de référence des rectangles, que nous noterons R , l'ensemble correspondant à la même propriété A' est cette fois, l'ensemble des carrés.

Un seul ensemble peut représenter plusieurs propriétés a priori différentes. Par exemple, dans l'ensemble des parallélogrammes, les propriétés « avoir quatre côtés de même longueur » et « avoir les diagonales perpendiculaires » sont équivalentes et représentent toutes les deux l'ensemble des losanges.

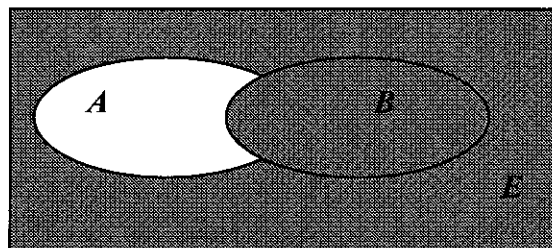
Définition de l'implication dans le cadre ensembliste

Plaçons-nous dans un ensemble de référence E .

Soit A le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété A .

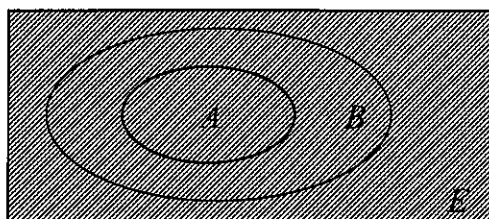
Soit B le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété B .

La zone hachurée ci-dessous représente tous les objets x de E pour lesquels l'implication entre énoncés contingents $A(x) \Rightarrow B(x)$ est vraie. L'implication est fausse uniquement pour les éléments x qui sont dans A sans être dans B , c'est-à-dire tels que la prémisse $A(x)$ est vraie alors que la conclusion $B(x)$ est fausse.



C'est l'ensemble des éléments qui ne vérifient pas la propriété A à moins qu'ils ne vérifient aussi la propriété B . C'est donc l'ensemble correspondant à la propriété $(\text{Non } A \text{ ou } B)$.

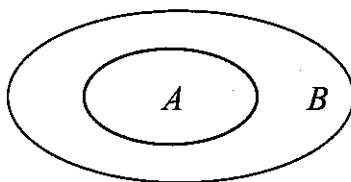
Étudions maintenant le cas particulier où l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B , comme dans le schéma ci-dessous.



Dans ce cas, l'implication $A(x) \Rightarrow B(x)$ est vraie dans toute la partie hachurée, c'est-à-dire pour tous les éléments x de E . En effet, il n'existe pas d'éléments de E appartenant à A sans appartenir à B . Nous sommes alors dans le cas où l'implication est universellement quantifiée. Le schéma précédent représente l'implication : $\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)$ est vrai.

L'inclusion d'un ensemble dans un autre peut donc être exprimée par une implication universellement quantifiée concernant les propriétés correspondantes.

La pratique mathématique scolaire ne représente l'implication que par ce dernier schéma d'inclusion. Cela montre que, dans l'enseignement, les implications sont implicitement quantifiées universellement [Durand-Guerrier V., 1999]. En fait, la pratique scolaire cache encore davantage la quantification universelle de l'implication car le schéma proposé aux élèves ne représente pas toujours l'ensemble de référence :



Or, une implication universellement quantifiée dépend bien de l'ensemble de référence. L'implication « Avoir 1 angle droit implique Avoir 4 angles droits » est vraie dans l'ensemble des parallélogrammes et est évidemment fausse dans l'ensemble des quadrilatères. Rendre implicite l'ensemble de référence contribue à cacher la quantification universelle en jeu.

Quelques constats dans l'enseignement

Nous présentons, ici, les conclusions de notre étude de la *vie*, au sens de la théorie anthropologique développée par Y. Chevallard, de l'implication dans quelques manuels de la quatrième à l'université.

Le cadre ensembliste est absent

Aucun manuel n'utilise ce cadre pour l'implication. Seuls quelques manuels, dans des chapitres de théorie des ensembles, font le lien avec l'inclusion : $A \subset B$ si $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$.

Prépondérance du cadre déductif

Le cadre déductif est prépondérant notamment en collège et lycée où il est l'unique cadre présenté. En DEUG, il est présenté pour définir des typologies de raisonnements : par contraposée, par l'absurde, par récurrence...

Cloisonnement des cadres

Les manuels adoptent, en général, un unique cadre pour définir l'implication : raisonnement déductif ou logique formelle dans quelques manuels d'université. Les rares manuels de DEUG présentant les deux ne mettent jamais en relation ces deux cadres.

Identification à la logique naturelle

Les manuels de seconde issus des programmes 2000 ne prennent pas en charge la définition de l'implication, il y a une identification du concept mathématique à celui de la logique naturelle. Les expressions *si...alors*, *entraîne*, *implique*... sont supposées claires, connues et comprises. Certaines définitions sont particulièrement dépourvues de sens mais il faut les remettre dans le contexte des programmes de l'époque. Le concept d'implication, banni des programmes depuis quelques années, retrouve une place dans les manuels de seconde 2000 alors qu'aucun cours de logique formelle n'est autorisé. Les manuels ont donc la difficile tâche de faire *revivre* un concept, mais ceci sans pouvoir le placer dans la niche « logique », ils se rattachent donc à la logique naturelle pour définir ce concept mathématique.

Voici trois exemples :

Une implication est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (1) entraîne (ou implique) une conclusion (2). [Déclic, 2^{nde}, 2000]

Si...alors : tournure "standard" qui tend à expliquer que si une propriété est satisfaite, on peut en déduire qu'une seconde l'est également. [Pyramide, 2^{nde}, 2000]

La phrase "si A alors B" est une implication. On note $A \Rightarrow B$ et on lit "A implique B" ou "A donc B". [Collection Indice, Bordas, 2^{nde}, 2000]

Causalité et temporalité : définitions dans le cadre du raisonnement déductif

Ce dernier exemple identifie linguistiquement les mots *implique* et *donc*. Or, les rôles de ces deux mots sont différents dans le Modus Ponens, le *donc* permettant l'inférence de la

conclusion. Alors que « $A \Rightarrow B$ » ne dit rien sur la vérité de A et B, le mot *donc* connote la vérité de A et de B. Il s'ensuit que l'expression *A donc B* ne rend compte que du cas où A et B sont vrais dans l'implication. L'implication est ainsi souvent « écrasée » sur le cas où la prémisse et la conclusion sont toutes les deux vraies, comme le montrent les expressions qui lui sont associées dans certains manuels :

P vrai implique Q vrai ; Si P est vrai, alors Q est vrai ; P donc Q.

D'autres expressions connotent souvent une notion de causalité voire de temporalité :

On a Q dès qu'on a P ; Q résulte de P ; Q est conséquence de P.

Cet écrasement induit ce que nous avons appelé une *conception causale* de l'implication.

Conception causale-temporelle de l'implication

Nous appelons « théorème-en-acte de causalité » la *propriété-en-acte* suivante :

A implique B n'a de raison d'être, et a fortiori ne peut être vraie, que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles.

Ce théorème-en-acte est faux en mathématique où la vérifonctionnalité est une convention. Cependant, ce théorème-en-acte est très proche de la logique naturelle et il est renforcé par certaines expressions langagières associées à l'implication : *B résulte de A ; B est la conséquence de A*. Ceci induit très souvent un ordre chronologique entre la prémisse et la conclusion, puisque la cause précède la conséquence. Cela conduit à la propriété-en-acte :

Lorsque A implique B, A doit être vérifiée avant B

Mais alors si dans $A \Rightarrow B$, A doit précéder B, il est difficile d'admettre, par exemple, que B soit une condition nécessaire pour A. Pour faire référence à ce théorème-en-acte et aux réponses qui lui sont associées nous utiliserons, dans la suite, le terme de *conception causale-temporelle*, le terme *conception* étant employé au sens de G. Brousseau (1986).

Nous faisons l'hypothèse que cette conception est source d'erreurs dans le maniement de l'implication mathématique comme le montrent les exemples suivants.

Sarah a une maîtrise de mathématiques et prépare le CAPES au moment où elle répond à ces questions [Deloustal V., 1999] :

Question : M est condition nécessaire pour T et T est condition suffisante pour M³⁵. Y a-t-il des implications entre ces deux phrases ?

³⁵ Ces deux phrases sont équivalentes logiquement à $T \Rightarrow M$.

Sarah : Pour la première, « M condition nécessaire pour T » donc nécessairement il faut avoir M pour avoir T. Donc M implique T. Pour la deuxième, il suffit d'avoir T pour avoir M, donc T implique M.

Question : Donnez des expressions équivalentes à la phrase *W seulement si S*³⁶.

Sarah : S entraîne W et seulement S. Aucune possibilité d'avoir W sans passer par S

Question : Donnez la négation de l'implication $P \Rightarrow Q$:

Sarah : Q peut se réaliser sans que P se réalise.

Nous pouvons conclure ces premiers constats dans l'enseignements en affirmant qu'il y a des difficultés liées à l'utilisation de l'implication, notamment dans la distinction des conditions nécessaires et conditions suffisantes, et ceci jusqu'en fin d'université. Ces difficultés sont souvent liées à une *conception causale* de l'implication prédominante. Or, notre étude des manuels a montré que cette conception est non seulement présente dans la logique naturelle mais qu'elle est encore renforcée par certaines pratiques de l'enseignement, notamment par l'utilisation de certaines expressions langagières liées au raisonnement déductif. En outre, nos premières expérimentations ont montré qu'un cours de logique formelle ne permettait pas d'éradiquer cette conception causale, cette dernière pouvant cohabiter avec des connaissances sur les tables de vérité par exemple.

Thèse soutenue et cadre théorique

À la suite de ces constats, nous avons recentré notre problématique autour de l'hypothèse suivante :

Il est nécessaire de connaître et d'établir un jeu dialectique entre les trois cadres, logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif, pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication.

En particulier :

Sans un point de vue ensembliste sur l'implication, il n'est pas possible d'accéder à l'utilisation correcte et à la compréhension « complète » de ce concept mathématique.

La thèse que nous soutenons est que cette condition sur le jeu de cadres est suffisante.

Pour vérifier ces hypothèses et étudier notre thèse, nous essayons de répondre à la question suivante :

Comment à l'aide de différentes situations relevant de différents cadres problématiser l'implication, dans l'objectif d'une meilleure connaissance de ce concept ?

³⁶ Cette phrase est logiquement équivalente à $W \Rightarrow S$.

Pour répondre à cette dernière question, nous avons construit une ingénierie didactique que nous avons testée dans deux classes de PLC2 en mathématiques de l'IUFM de l'académie de Grenoble. Pour concevoir cette ingénierie, nous nous sommes appuyée sur la *théorie des situations* de G. Brousseau [Brousseau G., 1997], sur la *théorie des champs conceptuels* de G. Vergnaud [Vergnaud G., 1990] qui nous a aidée à modéliser les connaissances des étudiants ainsi que sur les *jeux de cadres* développés par R. Douady [Douady R., 1986].

Notre ingénierie propose des problèmes pour la résolution desquels les différents cadres, déductif, logique et ensembliste, interviennent, soit qu'ils soient nécessaires à la résolution et doivent cohabiter, soit qu'ils donnent des réponses différentes et doivent être confrontés. Notre étude de la *vie* de l'implication dans les manuels basée sur la *théorie écologique* de Y. Chevallard [Chevallard Y., 1992] a montré que le cadre déductif était le plus, sinon le seul, connu, nous cherchons donc surtout à rendre nécessaires les cadres logique et ensembliste.

Choix généraux pour notre ingénierie didactique

Choix du public

Le public des professeurs stagiaires nous a paru très pertinent pour deux raisons. D'abord, les PLC2 sont des étudiants expérimentés en mathématiques qui utilisent très souvent l'implication, ce concept n'ayant, à leur avis, aucun secret pour eux. D'autre part, ces professeurs débutants sont confrontés à des élèves qui ne savent pas comment utiliser l'implication et qui ne reconnaissent pas ses propriétés. D'ailleurs, V. Durand-Guerrier [Durand-Guerrier, 1996] montre comment les pratiques des professeurs contiennent des implicites incompris des élèves. Nous avons donc jugé opportun de leur donner les moyens de revenir sur leurs connaissances de l'implication et d'en construire de nouvelles.

Types de tâches : élaboration de preuves / analyse de preuves

Notre situation propose deux types de tâches pour permettre un travail sur l'implication : la construction d'une preuve (séance 1) et l'analyse d'une preuve écrite (séance 2). Le premier type oblige à la recherche de conjectures, d'exemples ou de contre-exemples, alors que le second type oblige au contrôle du résultat, des outils et des pas d'inférence.

Mise en jeu des trois cadres : logique / ensembliste / raisonnement déductif

Nos premières expérimentations ont privilégié l'étude de l'implication dans les cadres de la logique formelle et de la logique naturelle. Nous nous sommes attachée, ici, à ce que nos problèmes permettent et nécessitent la mise en œuvre du cadre ensembliste et/ou logique pour la résolution, considérant que le cadre déductif sera toujours présent pour peu que les problèmes ne soient pas uniquement posés dans le cadre logique.

Choix pour problématiser l'implication

Les objets mathématiques sont faciles d'accès

Comme nous l'avons déjà expliqué, nous faisons ce choix, d'une part, pour qu'un vrai travail sur l'implication puisse se faire et, d'autre part, pour pouvoir repérer les erreurs liées à l'utilisation de celle-ci.

Les implications en jeu ne sont pas des CNS

Notre hypothèse est que, pour problématiser l'implication, il faut pouvoir distinguer les conditions nécessaires des conditions suffisantes. C'est pourquoi, nous proposons des situations où la plupart des implications en jeu ont des réciproques fausses. Notre situation montre que, contrairement à une idée très répandue, il est possible de construire des problèmes de géométrie où les implications ne sont pas des équivalences.

Choix pour problématiser le cadre ensembliste

Les enjeux de vérité et de découverte sont présents

Comme nous l'avons dit auparavant, nous soutenons que cet enjeu de vérité favorise une résolution dans le cadre ensembliste puisque le cadre déductif s'avère alors insuffisant.

Types d'objets : objets institutionnels / objets non institutionnels

Pour une classe d'objets non institutionnels, les propriétés des objets ne sont pas connues. Comme nous l'avons déjà mis en valeur, nous faisons l'hypothèse que ceci défavorise l'utilisation du cadre déductif et favorise celle du cadre ensembliste puisqu'il faut alors utiliser explicitement les propriétés des objets de l'ensemble donné. En revanche, le choix d'une situation concernant des objets géométriques très institutionnels nous permet de

dévoluer notre tâche plus facilement et d'engager des réflexions avec les PLC2 sur la façon de travailler le raisonnement dans leur propre classe. Cependant, pour favoriser le cadre ensembliste, nous avons choisi une sous-classe d'objets (les quadrilatères ayant deux côtés égaux) dont les propriétés ne sont ni connues ni facilement reconnaissables.

Organisation sociale : Travail individuel / Travail en groupe

Notre hypothèse est que le travail de groupe, parce qu'il favorise les échanges et les débats, est indispensable pour qu'une confrontation puisse avoir lieu entre les différents cadres. Le travail individuel, quant à lui, permet à chacun d'essayer une piste de résolution dans le cadre qui lui convient. Cette phase individuelle est, pour nous, un préalable nécessaire pour nourrir le débat à venir, la richesse des argumentations en découlant directement.

Le choix du support papier-crayon

Dans la situation de géométrie, les raisonnements mathématiques sont basés sur des constructions géométriques qui vérifient certaines propriétés. Une partie de la tâche consiste à faire ensuite varier certains paramètres (longueur des rayons, distance entre A et B, position de D sur le cercle, angle aigu ou obtus...). Un logiciel de géométrie permettant la manipulation d'objets géométriques faciliterait évidemment cette phase de recherche. Cependant, la présence de ce support ne nous permettrait pas de vérifier si le point de vue ensembliste est mobilisable. En effet, il semble que, dans ces conditions, nous n'ayons pas les moyens de distinguer la manipulation d'ensembles de la manipulation d'une figure.

D'autre part, nous faisons l'hypothèse que ce support peut même être un frein à l'apparition du point de vue ensembliste. En effet, il y a des difficultés, pour ceux qui utilisent les logiciels à repérer le rôle de la figure dans leur preuve. Ce rôle n'est, le plus souvent, même pas mis en question et les manipulations de la figure sont plus un effet du contrat lié à ce support qu'un effet de l'utilisation du point de vue ensembliste. Puisque le point de vue ensembliste est, d'une certaine manière, pris en charge par le logiciel, cela dispense l'élève de l'avoir. C'est pourquoi nous avons choisi un environnement papier-crayon pour notre situation de géométrie.

Présentation succincte de notre ingénierie didactique

Une première expérimentation a concerné plus particulièrement la confrontation entre les cadres de la logique formelle et de la logique naturelle. C'était l'objet de notre mémoire de

DEA avec quatre étudiants en fin d'université [Deloustal V., 1999]. Cette expérimentation, enrichie d'un travail sur les tables de vérité, a été reprise avec une classe de maîtrise de mathématiques donnant globalement les mêmes résultats.

Notre nouvelle expérimentation, s'adressant à deux classes de PLC2 de l'IUFM de Grenoble sur deux séances de trois heures, concerne plus spécialement les cadres ensembliste et logique formelle. Elle comporte deux types de tâches, la première séance étant consacrée à l'élaboration de preuves, en géométrie et sur les pavages de polyminos, alors que la seconde porte sur l'analyse de preuves dans ces deux domaines. Cette organisation nous permet de voir fonctionner l'implication lors de la construction de preuves dans les deux contextes, puis de re-problématiser, au cours de la deuxième séance, les difficultés, erreurs et questions apparues lors de la première. Ceci s'est avéré efficace pour amorcer le débat et permettre de confronter les différents cadres pour l'implication.

Quelques résultats

Problématisation de l'implication

Où l'on atteste qu'il y a des difficultés

Notre premier constat est que la situation Géométrie 1 est un réel problème mathématique pour eux, qui amène des questions, des difficultés, des débats. En effet, en une heure et quart aucun groupe n'a apporté de « solution finie », et aucun groupe ne considère en avoir apporté une. La complexité du problème par rapport au raisonnement apparaît au fur et à mesure. Alors qu'au départ, Robert, stagiaire agrégé, n'est pas très intéressé :

R : C'est de la géométrie de collège ça !

Il conclut la séance en disant :

R : Moi c'est un problème que je ne donnerais pas avant la licence.

Ces deux phrases montrent, pour nous, que nous avons satisfait l'une de nos contraintes. Nous sommes arrivée à dissocier les difficultés sur le raisonnement et les difficultés dues aux objets mathématiques. L'implication est problématisée avec des objets faciles d'accès.

Perturbations sur les conditions nécessaires et suffisantes

Dans tous les groupes, il y a, au centre des débats, un questionnement explicite portant sur les conditions suffisantes, nécessaires ou équivalentes. Par exemple, une question récurrente, pour une majorité de groupes, est de savoir si *avoir des diagonales égales* est

une condition suffisante pour P1. D'autre part, on relève plusieurs fois, dans des groupes différents, des confusions entre condition nécessaire et condition suffisante.

D : Une condition suffisante elle est bien toujours nécessaire forcément!

Enfin, une stagiaire cherche des conditions suffisantes qui ne soient pas en lien avec les conditions nécessaires déjà trouvées. Nous interprétons ceci par le fait qu'elle ne reconnaît pas que les objets vérifiant une condition suffisante à une propriété X vérifient aussi les conditions nécessaires à cette propriété X (on est dans le cas où $CS \Rightarrow X \Rightarrow CN$). Nous faisons l'hypothèse que ceci est dû à une *conception causale-temporelle* de l'implication.

Quantification universelle implicite : deux types de « Faux »

À partir de l'implication *impair* $\Rightarrow$ *pavable*, un étudiant essaie de faire la différence entre les implications qui sont fausses pour tous les objets de l'univers (ici les polyminos) et celles qui sont fausses pour certains et vraies pour d'autres. Il développe ainsi le fait que pour démontrer le deuxième type de faux il suffit d'un contre-exemple alors que le premier type de faux nécessite une démonstration. Le reste du groupe ne le comprend pas car la prégnance des implications universellement quantifiées dans la pratique usuelle des mathématiques empêche les autres PLC2 de faire cette distinction.

D : là c'est pas juste un contre-exemple, c'est même une démonstration...

Di : Ben le contre-exemple ça te sert de démonstration!

D : Ça te, un contre-exemple ça te dit que dans certains cas c'est faux mais que c'est pas tout le temps faux alors que là ma démo c'est tout le temps faux.

A : qu'est-ce qu'il raconte ? Mais un contre-exemple, ça veut dire que c'est faux.

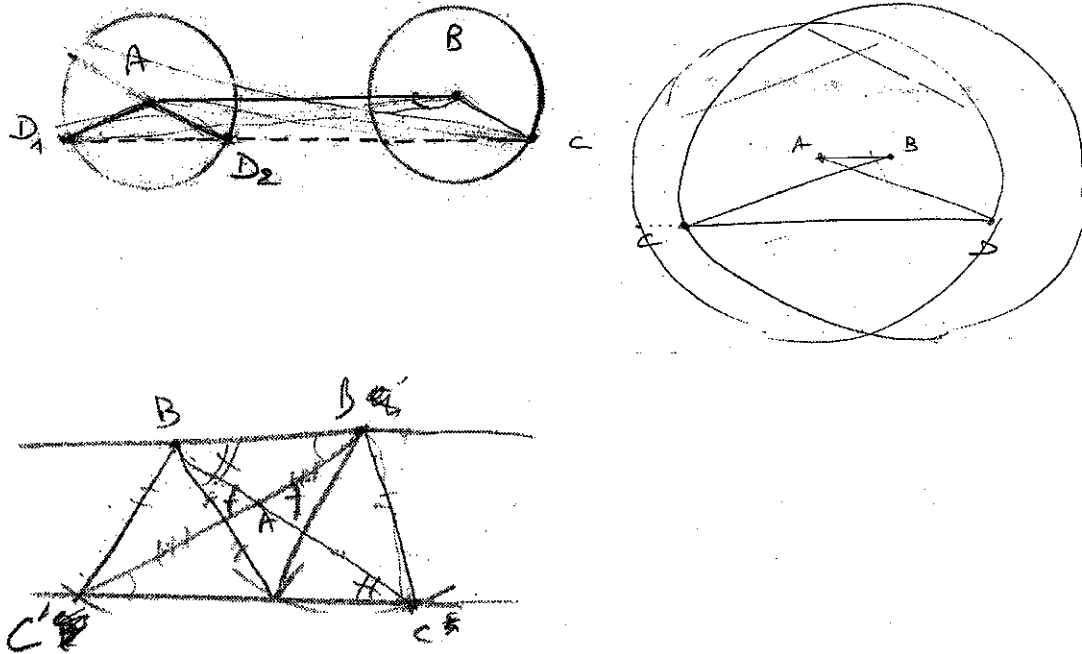
Di : On est en math ou on n'est pas en maths ?

Problématisation du cadre ensembliste

L'analyse des réponses montre que le cadre ensembliste n'est pas un outil disponible pour les PLC2 comme, par exemple, lorsqu'ils éliminent d'emblée les quadrilatères croisés. Cependant, nous voyons aussi apparaître des témoins implicites du cadre ensembliste, comme les contre-exemples et les conjectures. Le cadre ensembliste, qui n'est pas un outil mobilisable, ressort sous forme de questionnement, sur le rôle de la figure par exemple.

Des stratégies se rapprochant des stratégies ensemblistes prévues

Tous les groupes basent leur recherche de condition sur une construction géométrique. Certaines constructions sont très proches des stratégies ensemblistes que nous avons développées.



Cependant, il n'y a pas de contrôle de la variation des paramètres et par suite pas de contrôle du caractère générique de l'élément construit, elles ne sont donc pas ensemblistes à notre sens. Néanmoins, elles montrent que les objets sont construits comme des intersections de lieux de points. Les propriétés sont représentées par des ensembles, c'est pourquoi nous les prenons comme des marques du cadre ensembliste.

Les conjectures, exemples et contre-exemples sont au cœur des débats

Tous les groupes émettent des conjectures sur les conditions à partir d'exemples. Ils essaient ensuite de les prouver ou de les réfuter par des contre-exemples. L'analyse de la séance montre un véritable enjeu de découverte et de vérité. Pour nous, les conjectures et contre-exemples sont témoins de la présence implicite du cadre ensembliste, puisque l'on se place dans des ensembles d'objets.

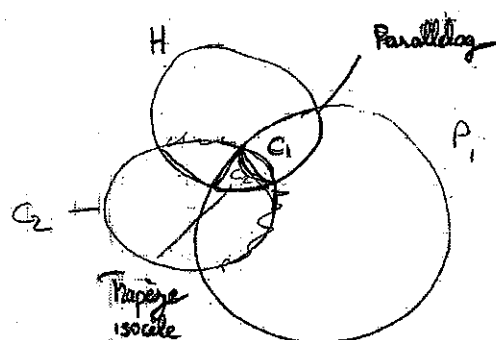
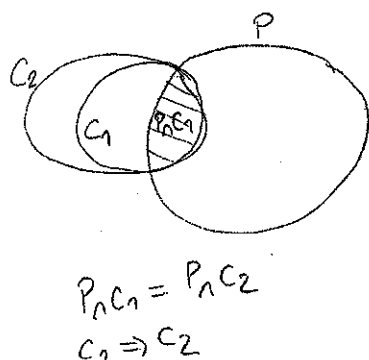
Quel rôle pour le dessin dans la preuve ?

Tous les groupes s'interrogent sur le rôle, dans la preuve, des dessins qu'ils construisent. D'après eux, il peut servir à formuler des conjectures et même à se persuader ou à trouver

des contre-exemples lors de la vérification des conditions suffisantes mais il ne permet, en aucun cas, de démontrer. De nombreux débats portent sur l'exhaustivité des cas trouvés grâce au dessin et sur le contrôle possible de celui-ci pour maîtriser cette exhaustivité. Nous interprétons cela comme la recherche d'un moyen permettant de passer d'un élément quelconque (figure scolaire) à l'ensemble de tous les éléments (figure ensembliste).

Argument ensembliste théorique

Lors de la deuxième séance, quelques stagiaires utilisent des « patates », cependant ce type d'argument n'est pas convaincant pour le reste du groupe.



les PLC2 travaillent explicitement sur des sous-classes d'objets

À plusieurs reprises, les PLC2 se placent dans une classe d'objets et utilisent des stratégies qui garantissent de ne pas en sortir. Par exemple, pour trouver un contre-exemple à l'implication *équilibré* $\Rightarrow$ *pavable*, ils prennent un polymino équilibré et le rendent non pavable tout en restant à l'intérieur de la classe des équilibrés. Pour cela, lorsqu'ils ajoutent (ou enlèvent) une case blanche, ils ajoutent (ou enlèvent) aussi une case noire.

Problématisation du cadre logique

À plusieurs reprises, l'utilisation du cadre logique apparaît chez certains stagiaires. Il est souvent utilisé comme moyen de contrôle des implications énoncées, garantissant par exemple l'équivalence entre deux implications. Il est aussi utilisé plusieurs fois lors de la deuxième séance pour invalider un argument énoncé dans une preuve. Enfin, on remarque une grande difficulté à utiliser le connecteur « ou » ou tout au moins à accepter l'équivalence : $[A1 \Rightarrow P \text{ et } A2 \Rightarrow P] \Leftrightarrow [(A1 \text{ ou } A2) \Rightarrow P]$. En effet, dans le problème de géométrie, les stagiaires n'arrivent pas à exprimer à l'aide d'une seule propriété les différentes conditions sur les diagonales qu'ils ont trouvées.

Le jeu de cadre

Notre hypothèse sur le cadre du raisonnement déductif, naturellement présent dans les situations, a été vérifiée et nous avons vu ce cadre apparaître de nombreuses fois. L'implication naturelle est apparue aussi par le biais de la *conception causale-temporelle*. D'autre part, le cadre de la logique formelle est apparu plusieurs fois (connecteurs **ou**, **et**, invalidation d'argument...). Comme nous en avons fait l'hypothèse, le cadre ensembliste a réellement été problématisé. En effet, même s'il est loin d'être maîtrisé, il se manifeste de nombreuses fois au moins implicitement ou lors de questionnements. Notre situation a donc permis une véritable confrontation des cadres au sein des différents groupes.

Conclusion

Nous avons formulé la thèse qu'établir un jeu de cadres sur les cadres ensembliste, de la logique formelle et du raisonnement déductif était non seulement nécessaire mais aussi suffisant à une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication. Au terme de notre recherche, nous n'avons pas les moyens de prouver que ceci est suffisant. En effet, nous n'avons pas fait d'étude diagnostique de l'appréhension et de l'utilisation de l'implication par les PLC2, il ne nous est donc pas possible de « mesurer » l'apprentissage qu'ont permis ces séances. Cependant, nous pouvons, tout au moins, affirmer que cette thèse est confortée par nos résultats. En effet, l'analyse des productions montre un réel questionnement sur l'implication de la part de PLC2, notamment en termes de condition nécessaire, suffisante, équivalente ou encore minimale. Si l'apprentissage permis par ce questionnement n'est pas mesurable, il n'en reste pas moins qu'il existe. D'autre part, le cadre ensembliste, non connu des PLC2 est aussi questionné dans ces situations. Nous avons d'ailleurs montré une évolution au cours de l'ingénierie du rapport implicite des PLC2 avec ce cadre, ne serait-ce que par la prise en compte des quadrilatères croisés ou l'apparition de diagrammes ensemblistes (patates).

Un résultat important est donc la pertinence et l'efficacité de l'outil jeu de cadre, mis en œuvre avec les cadres théorie des ensembles, logique formelle et raisonnement déductif, pour la construction d'une situation d'apprentissage sur le raisonnement.

Nous continuons donc à soutenir cette thèse qui mérite d'autres recherches. Cependant, enseignant-chercheur depuis deux ans à l'IUFM d'Alsace, engagée dans la formation des professeurs d'école, nous avons préféré orienter nos recherches sur l'enseignement du raisonnement en primaire. Pour cela, appartenant à l'Erté « Maths à modeler », nous

sommes impliquée dans le développement et l'utilisation des *situations recherche en classe* [Grenier D., Payan C., 2003]. Ces situations, basées sur des problèmes ouverts, permettent d'aborder des notions transversales telles que le raisonnement, la preuve, les contre-exemples, la modélisation, la récurrence...

Bibliographie

Brousseau G., 1997, La théorie des situations didactiques. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y., 1985, La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y., 1992, Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques 12-1*, La Pensée sauvage, Grenoble, pp. 73-112.

Deloustal V., 1999, Le concept d'implication : l'objet mathématique, quelques aspects dans les manuels, conceptions de futurs enseignants. *mémoire de DEA*, université Joseph Fourier, Grenoble.

Deloustal-Jorrand V., 2000, L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x n°55*, IREM de Grenoble, pp. 35-70.

Deloustal-Jorrand V. (2004) L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication, *thèse*, Grenoble I.

Douady R., 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 5-31.

Durand-Guerrier V., 1996, Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse, Université Lyon I.

Durand-Guerrier V., 1999, L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit X, Vol.50*, IREM de Grenoble, pp. 57-79.

Duval R., 1993, Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit X, Vol.31*, IREM de Grenoble, pp. 37-61.

Grenier D., Payan C., 1998, Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 18/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 59-100.

Grenier D., Payan C., 2003, Situations de recherche en « classe ». Essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris VII.

Laborde C., Capponi B., 1994, Cabrigéomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14 n°1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 165-210.

Parzisz B., 1988, Knowing vs Seing, problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics Vol. 19-1*, pp. 79-92.

Rogalski J., Rogalski M., 2004, Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 9, pp. 175-203.

Vergnaud G., 1990, La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10 n°2,3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 133-170.