

Que peut apporter un point de vue modèle – théorique pour les recherches en didactique des mathématiques

Viviane DURAND-GUERRIER

Université de Lyon, Université Lyon 1,
IUFM de Lyon & LEPS, équipe LIRDHIST¹¹

« La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie. »
(Sinaceur, 1991b)

Introduction

Chevallard (2004) écrit : « Dans une mathématisation complète, on s'assure qu'un fait est vrai sur une base expérimentale, puis on s'assure que dans la théorie qu'on a bâtie par ailleurs, on peut déduire le fait en question. » (p.35). La question que soulève ici Yves Chevallard renvoie à une question essentielle en logique qui est celle de la distinction entre *vérité de facto*, qui exprime la conformité aux faits, et *vérité nécessaire* au sein d'une théorie qui s'obtient comme conclusion d'une preuve valide au sein de cette théorie. Cependant, en conformité avec un point de vue logique qui remonte à Aristote, nous dirons que ce ne sont pas les faits qui sont vrais ou déduits, mais les énoncés à propos des faits, ou des états de choses pour employer le vocabulaire de Wittgenstein : « La proposition *montre* ce qu'il en est des états de choses quand elle est vraie. Et elle *dit* qu'il en est ainsi » (Wittgenstein, 1921, 1993, p.53)

La distinction entre *vérité de facto* et *vérité nécessaire* remonte à Aristote, qui l'explicite dans les *Premiers Analytiques* : une *vérité nécessaire* est une vérité obtenue comme

¹¹ Laboratoire d'Etude du Phénomène Scientifique, EA 4148, équipe Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et Techniques

conséquence d'un syllogisme concluant¹² à prémisses vraies. Il faudra cependant attendre Wittgenstein pour que cette distinction soit clarifiée en logique propositionnelle, puis Tarski pour la logique des classes et le calcul des prédicats du premier ordre.

Notre hypothèse, soutenue par l'ensemble des travaux que nous conduisons depuis plus de quinze ans, c'est que se joue dans la classe de mathématiques une dialectique cachée de la vérité et de la validité que le point de vue modèle - théorique permet de rendre visible et de prendre en compte dans les analyses (Durand-Guerrier, 2005).

Notre communication comporte deux parties. Dans la première partie, nous présentons brièvement le point de vue modèle – théorique et nous illustrons sur un exemple simple la méthodologie d'analyse qu'il permet de mettre en œuvre. Dans la seconde partie, nous revisiterons à la lumière de ce point de vue certains aspects des travaux de Gérard Vergnaud d'une part, de Guy Brousseau d'autre part.

Première partie

Qu'est-ce qu'un point de vue Modèle - théorique ?

Le point de vue modèle – théorique en logique s'inscrit dans le courant de la sémantique logique initié par Frege. La théorie des modèles est développée par Tarski dans la suite de ses travaux sur la définition sémantique de la vérité, qui met en relation un langage formalisé avec des structures interprétatives de ce langage. Bien qu'il ne fasse pas référence directement aux travaux de Wittgenstein, on peut reconnaître une filiation entre les deux auteurs (Durand -Guerrier, 2006), que l'on retrouve dans la présentation que fait Quine (1950, 1972) du concept d'implication.

I. Une version sémantique du calcul des propositions (Wittgenstein, 1921)

Dans le *Tractatus logico philosophicus*, Wittgenstein cherche à résoudre l'ensemble des problèmes posés par la philosophie de la logique et pense à ce moment là avoir réussi. Il

¹² Un syllogisme est concluant si dès lors que ses prémisses sont vraies, on peut affirmer la conclusion. « Si A peut être affirmé de tout B et si B peut être affirmé de tout C, alors A peut être affirmé de tout C » est un syllogisme concluant.. « Si A peut-être affirmé de quelques B et B peut être affirmé de tout C » est un syllogisme non concluant

aborde de nombreuses questions philosophiquement très difficiles dont nous ne parlerons pas ici. Dans la perspective didactique qui est la nôtre, nous retenons qu'une lecture attentive de l'ouvrage permet de faire émerger une version sémantique aboutie du calcul des propositions.

Le système élaboré par Wittgenstein est fondé sur deux principes. Étant donné que la valeur de vérité d'une proposition élémentaire exprime sa conformité ou sa non-conformité avec les faits qu'elle prétend décrire, le premier principe affirme qu'il y a exactement deux valeurs de vérité pour les propositions : c'est le principe de *bivalence*. Le second principe affirme que la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend exclusivement de la valeur de vérité des propositions élémentaires qui le compose : c'est le principe de *vérifonctionnalité* (ou d'*extensionnalité*).

Dans le système formel, il y a des lettres de variables propositionnelles $p, q, r, \dots$, qui représentent des propositions, et des signes propositionnels qui expriment les possibilités des conditions de vérité des propositions complexes. Le point de vue adopté est combinatoire : ainsi pour n propositions, il y a $2 \exp 2^n$ groupes possibles de conditions de vérité, soit pour deux propositions, seize groupes possibles. On retrouve naturellement en interprétant certains de ces groupes les connecteurs propositionnels classiques : conjonction, disjonction, implication, équivalence etc¹³. Par exemple, si on prend comme référence les possibilités (VV, VF, FV, FF) pour deux propositions, alors la distribution (VFVV) correspond à l'implication.

Ceci conduit Wittgenstein à considérer deux notions fondamentales : la *tautologie* et la *contradiction*. La *tautologie* est un énoncé du système formel qui prend la valeur de vérité *vrai* pour toute distribution de valeur de vérité (dans le cas de deux propositions, c'est le signe propositionnel (VVVV)). Une tautologie donne lieu à une proposition vraie pour toute interprétation dans tout fragment de discours. La *contradiction* est un énoncé du système formel qui prend la valeur de vérité *faux* pour toute distribution de valeur de vérité (dans le cas de deux propositions, c'est le signe propositionnel (FFFF)). Une contradiction donne lieu à une proposition fautive pour toute interprétation dans tout fragment de discours. Contrairement aux autres propositions, les interprétations des tautologies et des contradictions ne nous disent rien sur le monde. Pour autant « [elles] ne sont pas dépourvues de sens ; elles appartiennent au symbolisme, tout à fait à la manière dont le « 0 » appartient au symbolisme arithmétique. » (op.cité, p. 68)

¹³ Ces seize groupes sont décrits dans Wittgenstein, 1993, p.71

Dans la description des seize signes propositionnels pour deux lettres de variable propositionnelles, Wittgenstein donne comme exemple de tautologie :

« si p , alors p ; si q , alors q et $(p \supset^{14} q \cdot p \supset q)$ » (op. cite. p.71).

L'apparition de la troisième tautologie n'est pas un hasard. En effet, cette tautologie correspond à la règle d'inférence qui affirme que l'on peut déduire « q » de « $p \supset q \cdot p$ », appelée *Modus Ponens* ou *Règle du détachement*. Plus généralement, les tautologies de la forme « $S \Rightarrow S'$ » soutiennent les règles d'inférences classiques (Quine, 1950, 1972). Wittgenstein en conclut que « des « lois de la déduction », qui - comme chez Frege et Russel - doivent justifier les déductions sont vides de sens et seraient superflues » (p.73). C'est également le point de vue de Quine.

À la fin de l'ouvrage Wittgenstein revient sur cette question qu'il développe. Il en tire plusieurs conséquences importantes : que les lois logiques ne peuvent pas être confirmées ni réfutées par l'expérience ; que la logique est la théorie des formes et de l'inférence ; que la marque de la logique n'est pas la validité générale (ce qui vaut accidentellement pour toutes choses), mais une validité essentielle ; que la démonstration logique d'une proposition pourvue de sens (en particulier les propositions mathématiques) et la démonstration *en logique* doivent être deux choses totalement différentes (pp.99-102), toutes choses qu'il convient de prendre en compte si l'on s'intéresse à la question de l'articulation entre la logique, le langage et le raisonnement mathématiques dans une perspective didactique.

II. La conception sémantique de la vérité (Tarski, 1936, 1944)

Le projet de Tarski tel qu'il apparaît dans les deux articles de 1936 et 1944 est de résoudre un problème philosophique difficile, celui de la définition de la vérité, dont il dit qu'il est l'un des plus difficile posé à la philosophie. Plus précisément, pour Tarski, « Le problème principal est de donner une définition de la vérité matériellement adéquate et formellement correcte. » (Tarski, 1974, p.269). Il se place pour cela dans une filiation qui remonte à Aristote, et que nous avons rencontré chez Wittgenstein :

« Dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « *classique* » de la vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle « vraiment » signifie la même chose que « conformément à la réalité »

¹⁴ « $\supset$ » est le symbole d'implication ; « $\cdot$ » est le symbole de la conjonction.

(par opposition à la conception « *utilitariste* », d'après laquelle « vrai » signifie utile sous tel ou tel rapport). » (Tarski, 1972; p. 160)

Dans l'article de 1936, Tarski met en place une définition sémantique de la vérité, ce qui l'amène à préciser ce qu'il faut entendre par cette discipline du point de vue de la philosophie logique dans laquelle il se place :

« La sémantique est une discipline qui, en termes généraux, traite de certaines relations entre les expressions d'un langage et les objets (ou états de choses) auxquels réfèrent ces expressions. » (Tarski, 1936a, 1972)

Les exemples typiques de concepts sémantiques qu'il mentionne sont les concepts de désignation, de définition et de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément. Cette dernière notion très simple qui renvoie à la notion de vérification d'une équation par un élément s'avère jouer un rôle central dans l'élaboration de la définition sémantique de la vérité. En effet, un obstacle auquel on se heurte lorsque l'on veut définir la vérité de phrases complexes analysées en termes de fonctions propositionnelles¹⁵, et variables et / ou constantes, c'est l'impossibilité de pouvoir construire directement une définition récursive de la vérité, contrairement à ce que l'on peut faire pour les propositions non analysées, grâce aux tables de vérité. Le détour employé par Tarski consiste à introduire la notion d'*interprétation d'une fonction propositionnelle* d'un langage donné dans un « domaine de réalité » par une phrase ouverte, puis la notion de *satisfaction d'une phrase ouverte* par un élément de l'univers du discours. Ceci lui permet ensuite de donner la *définition de la vérité d'une phrase complexe* en s'appuyant sur les connecteurs propositionnels, tels qu'ils sont définis par exemple chez Wittgenstein, et sur les quantificateurs universel (*pour tout*) et existentiel (*il existe au moins un*), qui sont définis de manière objectuelle, en accord avec le sens commun. Il distingue également le langage objet, celui pour lequel on met en place la définition de la vérité, et le métalangage qui permet de parler du langage objet. Il précise que la notion de vérité ainsi définie dépend du langage formalisé objet des investigations. Par cette définition, il réalise son projet d'une définition formellement correcte et matériellement adéquate. D'une part, la construction récursive de la vérité *via* la notion de satisfaction et la distinction entre langage objet et métalangage met à l'abri des paradoxes sémantiques ; d'autre part, la notion de modèle d'une formule d'un langage formalisé dans

¹⁵ Ce terme introduit par Frege et Russel est remplacé aujourd'hui par celui de prédicats ; elles permettent de modéliser les propriétés et les relations.

un domaine de réalité (par exemple une théorie mathématique) permet d'articuler la notion de vérité avec la notion de validité logique, ce qui est en particulier l'objet de la *méthodologie des sciences déductives* qui deviendra *la théorie des modèles* (Tarski, 1960). Étant donnés un langage formalisé $\mathcal{L}$, une syntaxe, des énoncés bien formés (des formules) : $F, G, H \dots$ et une structure interprétative Σ (un domaine de réalité, une théorie mathématique), on dira que Σ est un modèle d'une formule F de $\mathcal{L}$ si et seulement si l'interprétation de F dans Σ est un énoncé vrai. Par exemple, dans le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité, on peut considérer la formule F : « $\forall x \forall y (S(x,y) \wedge S(y,x) \Leftrightarrow x=y)$ », et la structure interprétative Σ de l'ensemble des nombres réels ordonnés, dans laquelle on interprète S par la relation binaire « être inférieur ou égal » ; la formule F est alors interprétée par la proposition : « la relation 'inférieur ou égal' est antisymétrique », qui est un théorème de la théorie considérée. Il est facile de voir que d'autres interprétations de cette formule peuvent donner lieu à des propositions fausses. Cette notion de modèle d'une formule permet enfin de définir la notion clé de la théorie modèle ; à savoir la notion de *conséquence logique d'un point de vue sémantique* (Tarski, 1936b) : une formule H est *conséquence logique* d'une formule G si et seulement si tout modèle de G est modèle de H , où l'on reconnaît une généralisation au calcul des prédicats de la notion de « suivre de » définie par Wittgenstein (1921). Par exemple, la formule H : « $q(x)$ » est conséquence logique de la formule G « $p(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x))$ » (on reconnaît une extension de la règle du Modus Ponens), ou encore la formule H : « $q(x)$ » est conséquence logique de la formule F : « $\forall y q(y)$ » (liée à la règle d'instantiation universelle : *ce qui vaut pour tous vaut pour chacun*).

III. Deux résultats fondamentaux en théorie des modèles

En appui sur la théorie sémantique de la vérité, Tarski développe la méthodologie des sciences déductives (Tarski, 1960). Étant donné ce qu'il appelle une *mini théorie*¹⁶, il dégage un système axiomatique formel (sans objets) dont la mini théorie de départ est une interprétation, mais pour lequel d'autres interprétations (d'autres modèles) peuvent être considérées. Le premier résultat établi par Tarski dans le cadre de la théorie des modèles est le *théorème de la déduction* qui affirme que :

¹⁶ L'exemple choisi est la congruence des segments.

« Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre (...). Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (op. cité p.12)

Ce théorème, prouvé également à la même époque par d'autres auteurs, met en évidence le fait que les systèmes formels comme le *calcul des prédicats*, au-delà de la question de savoir s'ils font partie ou non des mathématiques, jouent un rôle à un niveau métamathématique, en fournissant les outils logiques de contrôle de la validité. Ces outils de contrôle logique ne peuvent pas être pris en charge dans les théories mathématiques classiques dans lesquelles les objets jouent un rôle déterminant ; dans ces théories, les contrôles se font par l'expertise mathématique¹⁷.

Une conséquence immédiate du théorème de la déduction est la possibilité de réfuter qu'un énoncé soit conséquence logique d'un système axiomatique donné. C'est ce que Tarski appelle une *preuve par interprétation* : pour prouver qu'un énoncé donné de la théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la formule associée à cet énoncé. Un exemple classique est fourni par le cinquième postulat d'Euclide et les géométries non-euclidiennes.

IV. Un exemple de l'utilisation de la théorie élémentaire des modèles pour résoudre un problème de « certitude »

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'illustrer sur un exemple très simple la méthodologie des sciences déductives ; la situation que nous allons analyser avec cette méthodologie est issue des épreuves du Kangourou des mathématiques 1994 et fait l'objet d'une présentation plus détaillée dans Durand-Guerrier, 2007a. Il s'agit du dernier Item de l'épreuve dont la présentation a été relevée sur Internet.

Les gens malins répondront tous juste à cette question ; ceux qui

¹⁷ Expertise dont ne dispose évidemment pas les novices, qui le plus souvent ne disposent pas non plus des outils de contrôle logique (Durand-Guerrier & Arsac, 2003, 2005).

répondent au hasard ne sont pas malins. Alors il est certain que :

- A. Tous ceux qui répondent au hasard répondent faux.
- B. Ceux qui sont malins répondent au hasard.
- C. Ceux qui répondent juste sont malins
- D. Ceux qui s'abstiennent à cette question sont malins
- E. Les réponses A, B, C et D sont fausses.

Cet item soulève un certain nombre de questions de nature sémantique. Tout d'abord, de par la formulation de la question « il est certain que », *versus* « je suis certain que », il apparaît clairement que la réponse attendue relève d'une certitude *objective* plutôt que *subjective*, qui pourrait renvoyer à des arguments de nature pragmatique, si bien que cette réponse est attendue à l'intérieur du cadre proposé. D'autre part, celui qui répond contribue à modifier l'univers du discours, ce qui peut être la source de paradoxes. Enfin, la cinquième phrase dit quelque chose sur la vérité des quatre premières phrases, et se situe donc au niveau d'un *métalangage* par rapport au *langage objet* de la situation. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux propositions A et B, les propositions C et D se traitant plus ou moins de la même manière. Nous allons examiner la question suivante : la proposition A (respectivement B) ou sa négation est-elle conséquence logique des deux propositions assumées dans l'énoncé de l'Item ? Ceci en utilisant la méthodologie des sciences déductives.

Concernant la possibilité d'une modélisation à la manière de Tarski, nous avons tous les ingrédients nécessaires. Nous disposons d'une *mini - théorie déductive* avec : un univers du discours : *la population formée de ceux qui répondent au test* ; deux axiomes : *les gens malins répondront tous juste à cette question* et *ceux qui répondent au hasard ne sont pas malins*. Pour construire le système axiomatique formel associé, nous introduisons cinq lettres de prédicats *m, j, f, s, h* qui seront interprétées respectivement par les propriétés « être malin », « répondre juste », « répondre faux », « s'abstenir » « répondre au hasard. Ceci va nous permettre de formaliser les axiomes et les quatre premières phrases proposées¹⁸. Comme chaque fois que l'on formalise une théorie exprimée en langue naturelle, il nous faut introduire explicitement des axiomes supplémentaires, qui restent

¹⁸ Comme nous l'avons dit plus haut, la cinquième phrase appartient au méta langage et ne peut pas se formaliser dans le langage objet

implicites dans la formulation en langage ordinaire. Il s'agit ici d'indiquer que « tous ceux qui font le test *s'abstiennent* ou *répondent juste* ou *répondent faux* », la disjonction étant exclusive. On obtient ainsi quatre axiomes supplémentaires, auxquels nous avons choisi de rajouter que chacun des cinq prédicats est d'extension non vide, ce qui donne encore cinq axiomes supplémentaires.¹⁹ On obtient ainsi le système axiomatique formel présenté ci-dessous, que nous noterons T.

Fragment de discours	Calcul des prédicats
<i>Les gens malins répondront tous juste à cette question</i>	$A_1 : \forall x (m(x) \Rightarrow j(x))$
<i>Ceux qui répondent au hasard ne sont pas malins</i>	$A_2 : \forall x (h(x) \Rightarrow \neg m(x))$
<i>Tous ceux qui font le test soit s'abstiennent, soit répondent juste, soit répondent faux.</i>	$A_3 : \forall x (s(x) \vee j(x) \vee f(x))$
<i>Il existe au moins une personne dans chaque catégorie</i>	$A_4 : \forall x \neg(j(x) \wedge f(x))$
	$A_5 : \forall x \neg(j(x) \wedge s(x))$
	$A_6 : \forall x \neg(f(x) \wedge s(x))$
	$A_7 : \exists x j(x) \quad A_8 : \exists x f(x)$
	$A_9 : \exists x s(x) \quad A_{10} : \exists x m(x)$
	$A_{11} : \exists x h(x)$

Figure 1 : Un système axiomatique formel

Dans le langage choisi, les propositions A et B se formalisent de la manière suivante :

A : « *Tous ceux qui répondent au hasard répondent faux* »

$\Phi : \langle \forall x (h(x) \Rightarrow f(x)) \rangle$

B : « *Tous ceux qui sont malins répondent au hasard* »

$\Psi : \langle \forall x (m(x) \Rightarrow h(x)) \rangle$

À l'issue du test du *Kangourou*, nous avons une réalisation du système axiomatique formel T, mais nous ne savons pas laquelle, puisqu'en effet, nous ne connaissons pas l'extension des différents prédicats. La certitude *objective* ne peut donc a priori se fonder que sur une forme de nécessité : pour être certain que « A » (respectivement « non A »), il est nécessaire et suffisant que « Φ » (respectivement « $\neg\Phi$ ») soit conséquence logique des axiomes de T. De même, pour être certain que « B » (respectivement « non B »), il est

¹⁹ Il s'agit bien d'un choix qui permet de simplifier l'analyse

nécessaire et suffisant que « Ψ » (respectivement « $\neg\Psi$ ») soit conséquence logique des axiomes de T.

Nous allons montrer à l'aide d'une preuve par interprétation que ce n'est le cas ni pour « A », ni pour « non A ». Pour cela nous construisons un modèle fini à trois éléments de T dans lequel l'interprétation de Φ est une phrase vraie et un modèle fini à trois éléments de T dans lequel l'interprétation de Φ est une phrase fausse.

Modèle de T et de Φ $\Sigma = \langle U, M, J, F, S, H_1 \rangle$	Modèle de T et de $\neg\Phi$ $\Sigma = \langle U, M, J, F, S, H_2 \rangle$
Univers du discours $U = \{\alpha, \beta, \delta\}$. Extension des prédicats : $J^* = \{\alpha\}$ $F^* = \{\beta\}$ $S^* = \{\delta\}$ $M^* = J^* = \{\alpha\}$ $H_1^* = F^* = \{\beta\}$ Chaque instance de « $h(x) \Rightarrow f(x)$ » est une proposition vraie. Φ est interprétée par un phrase vraie	Univers du discours $U = \{\alpha, \beta, \delta\}$. Extension des prédicats : $J^* = \{\alpha\}$ $F^* = \{\beta\}$ $S^* = \{\delta\}$ $M^* = J^* = \{\alpha\}$ $H_2^* = S^* = \{\delta\}$ Comme on a $H(\delta)$ et $\neg F(\delta)$, une des instances « $h(x) \Rightarrow f(x)$ » est fausse. Φ est interprétée par un phrase fausse

Figure 2 : une preuve par interprétation

On conclut de ce qui précède que ni « Φ », ni « $\neg\Phi$ » ne sont conséquences logiques de T et par conséquent, on ne peut pas affirmer « il est certain que la phrase A est fausse ». L'énoncé est contingent²⁰ pour l'élève au moment où il doit répondre.

On montre par contre facilement que « $\neg\Psi$ » est conséquence logique de T. Comme T est consistante (elle admet au moins un modèle), tout modèle de T est modèle de « $\neg\Psi$ ». Par conséquent, on peut affirmer « Il est certain que la phrase B est fausse ».

Finalement, il n'est donc pas certain que « les phrases A, B, C et D sont fausses » ; par contre, il est certain que « aucune des réponses A, B, C ou D ne convient ». Ceci nous renvoie à la cinquième phrase proposée aux élèves « les réponses A, B, C et D sont fausses », considérée par les auteurs de l'épreuve comme la réponse correcte. Nos analyses

²⁰ Un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant donné si le sujet n'a pas, à cet instant, les moyens de se prononcer sur la valeur de vérité de cet énoncé. La vérité peut-être intrinsèque (l'énoncé n'a pas de valeur de vérité) ou extrinsèque (l'énoncé a une valeur de vérité, mais le sujet ne la connaît pas) Durand-Guerrier, 1995,1996)

montrent que c'est bien le cas si on choisit la deuxième interprétation, mais pas si on choisit la première interprétation, qui pourrait sembler la plus naturelle²¹.

Cet exemple montre clairement selon nous que le point de vue modèle - théorique initié par Tarski permet de repenser l'articulation entre *vérité*, *nécessité* et *certitude*. Plus généralement, en se plaçant au plus près de la notion commune de vérité, cela lui permet d'opérer un va-et-vient entre formalisme logique et interprétation dans un modèle et de réduire ainsi la distance supposée entre logique de sens commun et logique mathématique, et de définir

« (...) un type de rapport original où il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permise par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète »
(Sinaceur H. 1991a, p.313).

Deuxième partie

Place et rôle de la logique dans les travaux en didactique des mathématiques : Deux exemples

I. Le rôle des catégories logiques dans les travaux de Gérard Vergnaud²²

La place des questions de logique apparaît chez Vergnaud à plusieurs reprises et de manière très explicite dans l'article de 1991 paru dans la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques*, dans lequel il insiste sur la distinction entre propositions et fonctions propositionnelles (pp. 142-144) et sur l'intérêt des catégories logico mathématiques pour parler des processus de conceptualisation :

« Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories

²¹ C'est Sylvie Coppé qui avait attiré mon attention sur cet Item du Kangourou, car en raison précisément de l'ambiguïté de cette dernière réponse, il se pourrait qu'il n'y ait aucune réponse correcte, contrairement à la règle pour les épreuves du Kangourou des mathématiques

²² Ceci est développé plus longuement dans Durand-Guerrier, 2007a

de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets - arguments » (Vergnaud, 1991, p. 145)

On reconnaît dans *les catégories explicites de la connaissances* mentionnées ici les éléments qui sont modélisés dans le calcul des prédicats du premier ordre, éléments qui apparaissent ici dans une relation dialectique entre l'explicite et l'implicite à l'œuvre dans les processus de conceptualisation, qui fait écho à l'articulation entre forme et contenu, entre syntaxe et sémantique, que nous avons rencontré chez Tarski. Comme on le sait, les invariants opératoires jouent un rôle essentiel dans les processus de conceptualisation ; ils fournissent des propositions *tenues pour vraies sur le réel*, lesquelles sont nécessaires pour l'action :

« Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle *théorèmes-en-acte*, y compris pour d'autres domaines que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence ; ils peuvent rester implicites : ils peuvent même être faux ». (Vergnaud, 2001, p.25)

Ainsi un théorème en acte est un invariant opératoire ayant un certain domaine de validité. Il existe donc des domaines d'interprétation (des contextes ou domaines de réalité) dans lesquels un théorème en acte donné conduit à une règle d'action valide, même si ce n'est pas un théorème de la théorie mathématique de référence, ou de la théorie locale considérée, c'est-à-dire même s'il ne découle pas logiquement des axiomes assumés dans cette théorie. Il se peut que pendant un certain temps, le sujet ne rencontre que des interprétations dans lesquelles le théorème en acte conduit à des règles d'actions valide, ce qui renforce la confiance du sujet. C'est lorsqu'un théorème en acte est utilisé en dehors de son domaine de validité qu'il peut conduire à des décisions d'action, ou à des prévisions erronées. Éprouver la limite de validité de l'énoncé se fait en classe par la rencontre provoquée (par le professeur) avec une interprétation (un contexte, un domaine de réalité) dans laquelle l'utilisation de ce théorème en acte est mis en défaut, en particulier parce qu'il fait émerger une contradiction entre les résultats qu'il permet de prévoir et les résultats que l'on peut éprouver expérimentalement. Un exemple très résistant de théorème en acte est fourni par la règle de comparaison des nombres décimaux : « Pour comparer deux nombres décimaux, je compare les parties entières ; si elles sont égales, je compare les parties

décimales ». Le domaine de validité de cette règle est étendu puisqu'elle vaut dès lors que l'on travaille avec des décimaux ayant même format. On peut la mettre en défaut en faisant par exemple comparer des aires de rectangles avec des mesures bien choisies permettant que la comparaison par décomposition - recombinaison rendent indiscutable la contradiction entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. Ceci permet alors d'établir que soit l'on doit s'assurer que l'on travaille toujours avec des décimaux au format, soit il faut utiliser une autre règle de comparaison, valide dans toutes les interprétations puisqu'elle s'appuie sur un théorème de la théorie des Décimaux, à savoir la comparaison chiffre par chiffre de gauche à droite pour la partie décimale. Comme le montrent bien les analyses de Vergnaud, il serait tout à fait illusoire de vouloir éradiquer les théorèmes en actes de portée seulement locale, au motif qu'il vaudrait mieux enseigner directement ce qui est valide ; en effet, leur développement participe pleinement du processus de conceptualisation, et contribue à l'articulation nécessaire entre la partie visible et la partie cachée de l'iceberg, entre la forme et le contenu.

II. Le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques

Pour modéliser les situations de validation, Guy Brousseau se réfère au modèle de la logique dialogique de Lorenzen (1962), en lui empruntant les notions d'opposant et de proposant :

« Dans le schéma de la validation explicite (ou schéma de la preuve), l'émetteur devient un proposant et le récepteur devient un opposant ; on est en présence d'un enjeu de vérité et il s'agit « de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoir déjà établis. (Brousseau, Conférence de Montréal, p.8) »

Dans la logique dialogique de Lorenzen, la modélisation en termes de dialogue permet de traiter la question de la vérité à l'intérieur du système logique, tandis que l'on voit ici pour Brousseau qu'elle permet de traiter la notion de nécessité et partant de validité logique, qui comme nous l'avons vu avec l'exemple du Kangourou, permet de prendre en compte la notion de certitude objective. C'est ainsi, nous semble-t-il, qu'on peut interpréter l'enjeu de vérité tel qu'il est présenté dans la citation ci-dessus. Cette interprétation est également en accord avec ce qu'écrit Brousseau (1986, 1998) à propos de la validité logique :

« (...) il est utile de conserver la distinction faite en logique entre l'énoncé considéré comme une expression bien formée ou comme un ensemble de

réalisation et l'assertion qui enclôt cet énoncé dans une déclaration métathéorique sur sa validité, sur un domaine donné ou sa déductibilité d'un système d'axiomes." (p. 100)

Toutefois, il semble assez clair que le modèle de Lorenzen est insuffisant pour rendre compte de la richesse des situations de validation telles qu'elles sont décrites dans la théorie des situations.

« Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produit d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part. Les deux joueurs échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple milieu/message » (Brousseau, 1998, p. 109)

Comme le montre la citation ci-dessus, il est nécessaire de prendre en compte et d'articuler les aspects syntaxique et sémantique. En effet, dans la plupart des situations, si les échanges portent sur les énoncés, ils réfèrent le plus souvent à des propriétés d'objets ou des relations qui se dégagent à partir des rétroactions du milieu obtenues comme réponses aux actions des sujets. En outre, dans les situations de validation, on peut être amené à mettre à l'étude la théorie elle-même :

« Toutes les assertions de la théorie sont susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction » (Brousseau, 1998, p. 111)

Dans le paragraphe suivant, nous présentons une analyse du travail d'un groupe d'enseignants en formation continue en situation de résolution de problème qui permet d'illustrer ce que l'on peut entendre par « la théorie est objet d'étude et de construction ».

III. Un exemple de « travail de la théorie » en géométrie des solides²³

Le problème qui a été proposé aux participants est un problème classique de géométrie des solides. Il s'agit de déterminer tous les polyèdres réguliers, c'est-à-dire les polyèdres convexes dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables, et ayant le même nombre de faces à chaque sommet. La première partie de l'activité de formation est

²³ Ceci est développé plus longuement dans Durand-Guerrier, 2007b

organisée suivant les modalités du problème ouvert. Le matériel mis à disposition, dont l'utilisation est laissée à la discrétion des participants, est varié : règles, équerres, compas, ciseaux, feuilles de papiers, pièces en plastiques pouvant s'assembler type Clix ou Polydrons,

Les polyèdres réguliers sont au nombre de cinq, ils sont connus sous le nom de *Solides de Platon*. Il n'y a pas de polyèdre régulier à faces hexagonales ; en effet, lorsque l'on assemble trois hexagones réguliers, on obtient un angle plein (de 360°), autrement dit ceci permet un pavage du plan ; il n'est donc pas possible d'obtenir un angle dièdre. Or, par ailleurs, il faut au moins trois faces pour obtenir le sommet d'un polyèdre. Très régulièrement, lorsque l'on propose cette situation, certains groupes envisagent la possibilité d'obtenir un polyèdre régulier à faces hexagonales, ceci étant conforté éventuellement par la souplesse des pièces en plastique. C'est ce qui se produit dans le groupe de quatre enseignants en poste dans l'AIS²⁴ en formation continue dont nous allons analyser ci-dessous quelques échanges, à partir d'un corpus transcrit et recueilli en 2004²⁵. Notons que ces échanges sont tout à fait représentatifs de ce que l'on peut régulièrement observer en formation avec ce problème²⁶.

Nous allons nous intéresser à l'évolution de ce que nous appelons la « théorie locale » du groupe. Cette théorie est locale en ce sens qu'elle ne prend en compte que les questions liées directement au problème de recherche. Elle comporte la définition des polyèdres réguliers (et les sous définitions associées comme *hexagones réguliers*, *faces*, *sommets*, *polyèdre convexe*²⁷), et deux axiomes explicités par les participants :

A₁ : Il y a exactement un polyèdre régulier par polygone régulier

A₂ : Il y a une infinité de Polygones réguliers convexes.

Notons que le premier axiome (contrairement au second) n'est pas un théorème de la géométrie euclidienne, et que précisément, le problème vise à le reconsidérer.²⁸

De ces deux axiomes découlent deux conséquences logiques :

E₁ : il est possible de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales,

E₂ : il y a une infinité de polyèdres réguliers.

À ces deux énoncés, va venir s'ajouter un troisième :

²⁴ Dispositif d'Adaptation et d'Intégration Scolaire pour des élèves en situation de handicap

²⁵ Une description plus complète se trouve dans Dias & Durand-Guerrier, 2005

²⁶ Voir par exemple Durand-Guerrier, 2004a

²⁷ La question des définitions dans ce problème est étudiée dans Durand-Guerrier & Héraud, 2007, à partir d'un autre corpus recueilli dans une classe de CM2 (élèves de 10-11 ans)

²⁸ On pourrait éventuellement parler ici d'axiomes en actes, cependant, nous n'avons pas fait ce choix, car il ne nous semble pas que ces axiomes soient à proprement parlé associés à des invariants opératoires,

E₃ : il existe des polyèdres réguliers ayant un très grand nombre de faces.

Cet énoncé, qui pourrait sembler découler lui aussi des axiomes de la théorie locale du groupe, est en fait légitimé par une référence externe (diamants) : cet énoncé est vrai car il est en conformité avec les faits. Il vient conforter l'énoncé E₁. En effet, l'énoncé E₁ oriente fortement l'action de certains membres du groupe, qui associent un nombre de plus en plus important de pièces dans l'espoir d'obtenir un volume.

Parallèlement, dans le groupe, un des participants soutient la négation de l'énoncé E₁, soit

E₄ : « On ne peut pas réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales », ou encore

E₄ « Aucun polyèdre régulier n'a des faces hexagonales »

Ceci s'appuie pour lui sur un nouvel axiome :

A₃ « On peut paver le plan avec des hexagones »

La référence qui permet de poser ce nouvel axiome est une référence externe (le carrelage). Dès lors qu'il est apparu, il reste présent tout au long des échanges, et sert de référence pour son auteur. À un certain moment, dans le groupe, les deux énoncés contradictoires E₁ et E₄ sont en concurrence. En vertu du principe de contradiction, il faut rejeter l'un des énoncés. Dans une telle situation, on peut soit a) travailler à établir l'énoncé existentiel E₁ ; b) prouver que l'énoncé universel E₄ découle des axiomes ; c) retravailler la théorie (axiomes et/ou définitions) ; d) mettre en cause le dispositif expérimental.

Celui qui soutient l'axiome A₃ commence par mettre en cause le dispositif expérimental en évoquant la possibilité de « prendre des trucs rigides » ; puis il propose un aménagement de la définition en proposant de « jouer sur les petits espaces » pour que le solide, que deux de ses collègues restant sur la position a) cherchent à construire, réponde à la définition. Ceci va durer jusqu'à ce que l'un des deux membres du groupe qui jusque-là était sur la position a) introduise un nouvel axiome :

A₄ : pour réaliser un polyèdre, il faut pouvoir faire un angle (sous-entendu un angle dièdre)

Il y a alors accord sur le fait que ceci permet d'éliminer E₁ (*il est possible de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales*), qui par ricochet détruit l'axiome A₁ (*Il y a exactement un polyèdre régulier par polygone régulier*), en fournissant un contre-exemple à l'énoncé général. Il faut noter toutefois que ceci n'est pas explicité par le groupe et que l'énoncé E₂ (*il existe une infinité de polyèdres réguliers*) n'est pas remis en cause. Cet énoncé ne découle plus à ce moment-là des axiomes assumés ; nous savons qu'il est faux,

mais leur recherche va cependant les conduire à le *tenir pour vrai* en considérant les polyèdres convexes obtenus avec les losanges.

Dans cette analyse rapide, nous avons essayé de mettre en lumière ce travail de la théorie qui nous paraît ici particulièrement révélateur de ce que, en situation de recherche de problème, certains énoncés particulièrement robustes ne sont que difficilement remis en cause par l'expérience. Dans le cas qui nous intéresse, le renoncement à l'existence du polyèdre à faces hexagonales nécessite que les rétroactions du milieu fassent émerger un nouvel axiome qui permette de prendre en compte la contradiction entre deux énoncés qui coexistaient pourtant depuis déjà un certain temps dans les échanges du groupe. Cette étude de cas illustre également le va-et-vient entre théorie et expérience qui caractérise la dimension expérimentale en mathématique, pour lequel le point de vue modèle – théorique fournit des outils d'analyse féconds²⁹.

Conclusion

Parce qu'elle adopte un point de vue sémantique et se situe sur un plan métamathématique, la théorie des modèles fournit un cadre pour analyser l'activité des sujets en situation de résolution de problème, en particulier en mettant à la disposition du chercheur une méthodologie pour repérer et étudier l'élaboration, l'évolution et le dépassement éventuel des axiomatiques locales. Pour autant, il lui manque la dimension dialogique très présente dans le modèle de Brousseau. Nous explorons actuellement ce que pourrait apporter la sémantique des jeux de Hintikka pour l'étude des interactions langagières en situation d'élaboration de preuves mathématiques (thèse en cours de Thomas Barrier).

Références

- ARISTOTE *Organon III Les Premiers Analytiques*, traduction Jean Tricot 1983, Paris : Vrin.
- BROUSSEAU G. (1986), *Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*.7(2) 33-115.
- BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, pp.237-241

²⁹ Voir pour d'autres exemples Durand-Guerrier, 2004a et 2005

BROUSSEAU, G. , Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal , A paraître dans « *Interactions didactiques* » (Genève), consulté en ligne

http://pagesperso-orange.fr/daest/guybrousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

CHEVALLARD Y. (2004) Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *Les cahiers Pédagogiques*, n°427, 34-36.

DIAS T. & DURAND-GUERRIER V. (2005), Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères-IREM*, 60, 61-78.

DURAND-GUERRIER, V. (1995) Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Thibergien, *Différents types de savoirs et leurs articulations*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DURAND-GUERRIER, V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER. (2004a) Deux problèmes pour penser les rapports entre mathématiques et réalité, in *Actes du XXX^e Colloque national des professeurs et formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres*, Avignon 19-21 mai 2003, IREM de Marseille.

DURAND-GUERRIER, V. (2004b) La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques, in Durand-Guerrier, V. & Tisseron, C. (eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2003*, IREM de Paris 7.

DURAND-GUERRIER, V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.*, Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les Recherches, Université Lyon 1, IREM de Lyon

DURAND-GUERRIER, V. (2006), "Lire le Tractatus dans une perspective didactique", in M. Ouelbani (dir.), *Thèmes de Philosophie Analytique*, Tunis: Université de Tunis, Faculté des Sciences Humaines et Sociales, 49-66

- DURAND-GUERRIER, V. (2007a) Théorie des modèles et certitude. À propos d'une récréation mathématique, in *Activité humaine et conceptualisation- Questions à Gérard Vergnaud*, (Coordonné par M. MERRI), Presses Universitaires de Toulouse –le Mirail
- DURAND-GUERRIER, V. (2007b) Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski, in *Actes électroniques du colloque : Quelles references épistémologiques pour les didactiques*, Bordeaux, 25-27 mai 2005.
- DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G.: (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, 295-342.
- DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G., (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, in *Educational Studies in Mathematics*
- DURAND-GUERRIER, V. & HERAUD, J.L. (2006) Définition et règle, le mythe de la transparence en Géométrie, in Guernier, M.C., Durand-Guerrier, V. & Sautot, J.P. (eds) *Interactions verbales, didactiques et apprentissages, recueil, traitement et interprétation didactiques des données langagières en contextes scolaires*, Presses universitaires de Franche-Comté
- LORENZEN, P. (1962) *Metamathématique*. Edition Gauthier-Villars,
- QUINE, W.V.O. (1950) *Methods of logic*, Holt, Rinehart & Winston; Traduction française Armand Colin, 1972
- SINACEUR, H, 1991a *Corps et modèles*, Paris : Vrin,
- SINACEUR, H. 1991b, Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ?, in *Hommage à Jean Toussaint Desanti*, (TER)
- TARSKI, A. (1936a) Le concept de vérité dans les langages formalisés, traduction française in G.G. GRANGER (dir.) *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 157-269. Armand Colin, 1972.
- TARSKI, A. (1936b) Sur le concept de conséquence, traduction française in G.G. GRANGER (dir.) in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 141-152. Armand Colin, 1972.
- TARSKI, A. (1944) La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique, traduction française Georges KALINOWSKI in G.G. GRANGER (dir.) *Logique, sémantique et métamathématique, volume 2* : 265-306. Armand Colin, 1974..
- TARSKI, A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris-Louvain : Gauthier-Villars

VERGNAUD, G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3 pp.133-169

VERGNAUD, G. (2002), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, in *Actes du Colloque GDM-2001 Jean Portugais (Ed) La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, pp. 6-27.

WITTGENSTEIN, L. (1921) *Tractatus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française G.G. GRANGER, Gallimard, 1993

