

La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques

Michèle Artigue

Université Paris-Diderot

I. Introduction

Je voudrais tout d'abord dire à quel point je suis honorée d'être invitée à ce Colloquium, après les lauréats des prix Félix Klein et Paul Erdos, Guy Brousseau et André Deledicq. Cette invitation, je la dois à mon statut actuel de Présidente de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (ICMI¹), et c'est à la fois comme didacticienne et comme présidente d'ICMI que j'ai préparé cette conférence.

Le Colloquium a pour ambition de s'adresser à un public plus large que celui des seuls didacticiens, même si l'on s'attend à un auditoire composé surtout de didacticiens, et j'ai bien sûr respecté cette règle du jeu. Cela m'a paru d'autant plus important que l'ambition d'ICMI est, depuis sa création par le mathématicien Félix Klein en 1908 lors du congrès des mathématiciens à Rome, de faire communiquer et collaborer tous ceux qui ont un intérêt et peuvent contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, et des apprentissages que cet enseignement permet. S'inscrire dans cette histoire, c'est reconnaître la diversité des expertises existantes en matière d'enseignement des mathématiques et vouloir s'enrichir de leur dialogue.

Dans le texte introductif à cette conférence, j'ai rappelé que la didactique des mathématiques avait commencé à se développer comme champ de recherche dans une période de turbulence pour l'enseignement des mathématiques, celle de la réforme des mathématiques modernes, et qu'aujourd'hui nous nous trouvons à nouveau dans une période de turbulence. Mais il y a turbulence et turbulence. Les débats parfois violents qui ont accompagné les années des mathématiques dites modernes se situaient à une époque d'expansion économique et sociale et les mathématiques, les sciences plus généralement, en étaient vues comme des moteurs essentiels. Il fallait certes repenser profondément leur

¹ ICMI: International Commission on Mathematical Instruction. La Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM) est devenue ICMI lorsqu'elle est devenue, en 1954, une sous-commission permanente de l'Union Mathématique Internationale mais la dénomination originale reste utilisée dans la sphère francophone.

enseignement mais tout semblait possible et l'on était prêt à y investir l'énergie et les moyens nécessaires. La lecture des actes du premier congrès ICME² qui s'est tenu à Lyon en 1969 est de ce point de vue particulièrement éclairante (EB ESM, 1969). Des points de vue divers s'y expriment sur ce qu'il convient d'enseigner et la manière de le faire mais l'on ne doute pas de pouvoir traduire les valeurs exprimées dans la réalité des classes. Les diverses expériences engagées déjà depuis plusieurs années à l'époque, y compris celles qui nous paraissent avec le recul singulièrement irréalistes, semblent donner des résultats prometteurs. Cela renforce sans aucun doute le sentiment de confiance. Les moyens donnés aux premiers IREM en sont un autre exemple, cette fois national : pour l'IREM³ de Paris par exemple, six postes d'enseignants-chercheurs, vingt postes d'enseignants du secondaire à mi-temps, six postes d'ATOS⁴, pour ne citer que les moyens humains. Il faudrait mentionner aussi ceux donnés au COREM, le Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques créé à l'initiative de Guy Brousseau, à Bordeaux, en 1972.

La situation actuelle n'est porteuse ni de tels espoirs, ni de tels enthousiasmes, et les moyens qui existaient il y a quarante ans semblent avoir en grande partie disparu. La formation continue des enseignants, une raison essentielle de la création des IREM, sans laquelle aucune évolution positive durable ne peut exister, tout le monde en convient, est complètement sinistrée, tout le monde en convient aussi. Les réformes se succèdent sans sembler apporter d'améliorations notables et la confiance dans le système éducatif s'effrite. On cherche à cette situation des responsables et l'on met régulièrement en cause les programmes, trop ou pas assez ambitieux selon leurs détracteurs mais aussi, de plus en plus, les méthodes pédagogiques que ces programmes prônent. Aux Etats-Unis, les débats sont parfois si virulents que l'expression « Math Wars » est devenue commune. Le premier texte de présentation de la conférence intitulée « The future of Mathematics Education in Europe » organisée en décembre à Lisbonne, à l'initiative du Portugal qui assure actuellement la présidence de l'Union Européenne, y faisait explicitement référence⁵.

La recherche en didactique des mathématiques, il ne faut pas se le cacher, se trouve elle aussi sur la sellette. En serait-on là si elle avait été sans influence sur les réformes

² ICME : International Congress in Mathematics Education. Les congrès ICME sont organisés par ICMI tous les quatre ans. Le prochain, ICME-11, aura lieu en juillet 2008 à Monterrey au Mexique.

³ IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

⁴ ATOS : Agent Technique, Ouvrier et de Service.

⁵ Précisons que cette référence a disparu dans le texte de présentation définitif.

curriculaires ? Qu'a-t-elle à dire sur la situation actuelle ? Quelles solutions a-t-elle à proposer ? Quelles évidences peut-elle fournir pour guider les débats ?

En préparant cet exposé, j'avais ces questions à l'esprit. Elles m'ont conduite à me demander en quoi ce que la recherche en didactique des mathématiques avait construit depuis les années 60 nous armait pour affronter les problèmes du présent, en quoi elle avait accru notre compréhension des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, en quoi elle nous rendait mieux capables d'orienter l'action. La recherche en didactique a débuté pour moi en 1974 quand André Revuz, qui était alors le directeur de l'IREM Paris 7 m'a proposé d'organiser avec François Colmez et Jacqueline Robinet l'enseignement des mathématiques dans l'école élémentaire expérimentale dont il avait obtenu la création dans la banlieue de Melun. Cette école s'inspirait de l'école Michelet de Talence, attachée au COREM mentionné plus haut, même si elle ne disposait pas des mêmes moyens. Grâce aux contacts étroits de François Colmez avec l'IREM de Bordeaux, nous y testions certaines des ingénieries didactiques de Guy Brousseau. Le travail sur la numération et l'addition était motivé par le besoin de dénombrer de grandes quantités, la multiplication était introduite via le dénombrement de grilles rectangulaires et la première technique de multiplication introduite était l'algorithme *per gelosia*. Nous initions les élèves à la pensée probabiliste dès le CE2 en utilisant des bouteilles opaques dont il fallait deviner la composition, une situation tombée ensuite dans l'oubli avant de revenir récemment sur le devant de la scène (Brousseau & al., 2002). Je me souviens encore de l'introduction des fractions via la comparaison des épaisseurs de feuilles de papier qui m'avait semblé une si étrange façon d'introduire les fractions mais m'avait fait, un peu tardivement, découvrir le sens de la commensurabilité (Brousseau G. & Brousseau N., 1985).

Petit à petit, nous avons développé nos propres ingénieries. Je me souviens de l'introduction de lettres et de formules en CE2 pour généraliser des régularités numériques observées, ce que l'on qualifierait aujourd'hui d'« early algebra » (Stacey & al., 2004). Je me souviens du travail mené en géométrie au CE2 et au CM1 et de notre émerveillement devant la diversité des conceptions du cercle que les élèves étaient capables de mobiliser dès cet âge (Artigue & Robinet, 1982).

Les souvenirs que je garde de cette époque sont des souvenirs de bonheur. Tout ce que nous essayions, après au besoin quelques ajustements, marchait. Nous voyions les élèves faire de vraies mathématiques, visiblement ils apprenaient, leurs enseignants et leurs parents étaient

contents et il ne serait venu à l'idée de personne d'insinuer qu'ils sortaient de l'école primaire sans savoir calculer. Les expériences menées parallèlement par Régine Douady et Marie- Jeanne Perrin à Montrouge dans la classe de Madame Latour donnaient des résultats tout aussi satisfaisants, au point que l'on peut lire dans un article écrit par Régine à propos de cette expérience (Douady, 1986) : « En fait, la plupart des objectifs, et en particulier l'apprentissage des nombres décimaux (avec les compétences attendues à la fin de l'école primaire au moins) ont été atteints en fin de CE2 (3^{ème} année du cursus) ».

Aux débuts des années 80, je suis passée sans transition des expérimentations à l'école primaire à des expérimentations à l'université, dans le cadre de la mise en place d'une section expérimentale math-physique à l'université Paris 7. L'IREM, une fois de plus, était moteur avec une équipe de physiciens incluant deux didacticiennes de la physique : Edith Saltiel et Laurence Viennot dont les travaux sur les raisonnements des étudiants en mécanique et cinématique étaient déjà reconnus (Saltiel, 1978), (Viennot, 1979). Avec le recul, ce que nous avons monté à l'époque semble presque irréel. Nous avons choisi une douzaine de thèmes qui nous semblaient mériter une prise en charge commune. Pour chacun d'eux, deux volontaires : un mathématicien et un physicien préparaient une séance en amphithéâtre qu'ils gèreraient en commun, développant, illustrant par des exemples et articulant leurs points de vue respectifs jusqu'au niveau des notations. Ils testaient leur projet au cours d'une des réunions hebdomadaires de l'équipe et puis le réalisaient. La première année, nous assistions tous à ces amphithéâtres communs. A ceci s'ajoutaient des tests maths-physique réguliers corrigés en binôme, des projets maths-physique au deuxième semestre, des TP avec ordinateur en maths pour lesquels les étudiants rédigeaient des comptes rendus substantiels, prolongeant chez eux le travail mené en séance. Chacun essayait aussi de faire les sujets d'examen de l'autre discipline et cela changeait le regard que l'on portait sur les étudiants et leurs erreurs, si proches de celles que nous faisons nous-mêmes sur les sujets de l'autre discipline.

Pendant les années qu'a duré cette expérimentation, nos efforts nous ont semblé là encore récompensés (Artigue, 1981, 1986). Certes, la question des différentielles avait séparé la première année mathématiciens et physiciens et avait donné lieu au seul amphithéâtre qui n'ouvrait pas de possibilité à une synthèse cohérente des points de vue, mais nous nous y étions attaqués en tant que chercheurs avec les didacticiens de la physique au sein du

GRECO⁶ Didactique qui avait été créé au CNRS et, quelques années après, il nous semblait que non seulement nous avions compris la logique qui gouvernait l'enseignement de chaque discipline et ce qu'elle produisait chez les étudiants (Artigue & al., 1988a), mais nous avions développé des questionnaires pour sensibiliser enseignants et étudiants à ces problèmes, et des séances de TP de modélisation dirions-nous aujourd'hui, qui nous semblaient permettre aux étudiants de donner sens aux procédures différentielles et intégrales au lieu de se borner à repérer les marqueurs linguistiques dans les énoncés et à travailler ensuite le plus mécaniquement possible, sans chercher à comprendre (Artigue & al, 1988b, 1988c).

Mon discours pourrait paraître un discours nostalgique. Il n'en est rien. Ce qu'une équipe motivée avait monté à l'université ne lui a guère survécu et l'école expérimentale où j'avais rencontré la recherche en didactique est sans doute aujourd'hui en ZEP. Nous n'avons pas réussi visiblement à bâtir des constructions didactiques suffisamment robustes pour qu'elles puissent vivre sans l'appui de la recherche ou, tout au moins, nous n'avons pas réussi à permettre à ces constructions de s'adapter de façon satisfaisante à l'évolution des conditions et contraintes qui pèsent sur l'enseignement. Leur réussite évidente n'a pas non plus suffi à assurer la diffusion de ces expériences. Ce qui m'intéresse aujourd'hui dans de telles expériences que je ne suis bien sûr pas la seule à avoir vécues - si c'était le cas, il serait de peu d'intérêt de les évoquer ici - ce sont les questions qu'elles renvoient à la recherche en didactique. Qu'avons-nous appris de leurs succès et de leurs échecs, et plus généralement qu'avons-nous appris au fil des années et de la progression des recherches en didactique ? Sommes-nous mieux armés aujourd'hui que nous ne l'étions hier ? Ma conviction profonde est que c'est bien le cas. C'est cette conviction que je souhaiterais vous faire partager, sans cacher pour autant les limites des connaissances collectivement construites par la recherche en didactique.

Pour cela, je balaierai d'abord ce domaine de recherche, essayant de donner une idée de ses évolutions majeures et des avancées dont chacune de ces évolutions a été porteuse, illustrant au fur et à mesure l'exposé par des recherches qui me sont particulièrement familières et sont sans doute aussi familières à beaucoup de ceux qui m'écoutent. Dans une seconde partie, j'en viendrai à des questions sensibles pour les interactions entre la communauté didactique et les autres communautés directement intéressées à l'enseignement des mathématiques, notamment celle des mathématiciens, et je privilégierai

⁶ GRECO : Groupement de Recherche Coopérative.

au niveau des exemples des recherches étrangères. Dans la dernière partie de l'exposé, enfin, j'essaierai de pointer ce que je vois comme des défis majeurs pour la recherche didactique aujourd'hui.

II. Un balayage de la recherche en didactique

Prétendre balayer la recherche en didactique et ses évolutions majeures en un espace aussi réduit est sans aucun doute présomptueux. Cela impose des choix draconiens dans la partialité desquels se révèle la vision personnelle du chercheur. Celle qui s'exprime ici est bien sûr la mienne, elle n'est qu'une vision parmi bien d'autres possibles.

II.1 Une centration sur l'élève : discontinuités et obstacles

La recherche en didactique a d'abord été attentive à l'élève, refusant de le voir comme un simple récepteur de connaissances. Portée par les idées de l'épistémologie piagétienne, elle a cherché à comprendre les constructions et reconstructions qui permettent l'apprentissage des mathématiques, en mettant plus particulièrement l'accent sur les discontinuités incontournables de l'apprentissage (Bednarz & Garnier, 1989). Elle y voyait la source de difficultés particulièrement résistantes et d'échecs qu'il s'agissait d'identifier et comprendre, pour trouver les moyens de les gérer efficacement. Ceci nécessitait d'autres stratégies didactiques que les stratégies usuelles basées, au contraire, sur la continuité. La façon de penser ces discontinuités s'est diversifiée selon les chercheurs, selon les cultures didactiques. Celle portée par la notion d'obstacle épistémologique empruntée à Bachelard, qui a été introduite très tôt dans le champ par Guy Brousseau (Brousseau, 1976, 1983), a été sans aucun doute une des formes les plus radicales. Les connaissances didactiques que ces recherches ont permis d'élaborer, qu'il s'agisse de l'extension du champ des nombres, des entiers aux décimaux et rationnels (Brousseau, 1986), (Douady, 1984), de la transition entre arithmétique et algèbre (Bednarz, Kieran & Lee, 1996), ou de la conceptualisation de la notion de limite (Sierpiska, 1985), (Cornu, 1991) sont aujourd'hui naturalisées, banalisées. Elles n'en sont pas moins importantes et je me bornerai à rappeler l'exemple des décimaux que je trouve particulièrement illustratif.

Les erreurs résistantes qui étaient observées jusqu'en fin de collège dans les questions relevant de l'ordre ou des opérations sur les décimaux (Pluvinage, 1977) comme : $3,15 > 3,2$ ou $3,6 \times 3,6 = 9,36$, devenaient compréhensibles. Elles résultaient d'une vision des décimaux comme des couples d'entiers et étaient renforcées par un enseignement qui tendait à les présenter comme des entiers à un changement d'unité près et à insister sur les continuités

des techniques opératoires entre entiers et décimaux, la seule chose à apprendre étant de savoir où placer la virgule dans le résultat obtenu. La densité de l'ordre des décimaux y était invisible, les théorèmes en acte que les élèves s'étaient progressivement construits au fil de leur fréquentation des entiers : le résultat d'un produit est plus grand que chacun des facteurs, celui d'une division plus petit, le carré d'un nombre lui est supérieur, tout entier a un successeur... n'étaient pas questionnés, les exercices proposés dans les manuels sur l'ordre des décimaux permettaient 85% de réussite aux élèves appliquant des règles fausses (Leonard & Sackur, 1991). Il n'y avait donc pas lieu de s'étonner que les difficultés perdurent jusqu'à la fin du collège.

Nous, didacticiens, considérons aujourd'hui ceci comme des banalités. Dans une recherche récente portant sur la spécificité des connaissances mathématiques nécessaires aux enseignants menée aux USA (Hill & al., 2007), les chercheurs ont proposé la même tâche à différentes populations : quatre listes de nombres décimaux étaient données qu'il s'agissait d'ordonner. Il était demandé de dire si chacune de ces listes présentait le même intérêt pour travailler l'ordre sur les décimaux avec des élèves de l'école primaire. Parmi les populations concernées, il y avait des enseignants de mathématiques à l'université d'une part, des professeurs d'école élémentaire d'autre part. Les résultats différencient nettement les deux populations et ce n'est pas à l'avantage des universitaires !

Ces premières recherches ont aussi montré la diversité des conceptions qui peuvent être associées à une même notion mathématique et permis de mieux comprendre les dynamiques possibles entre ces conceptions. La recherche que j'avais menée avec Jacqueline Robinet montrait ainsi la diversité des conceptions du cercle mobilisables par des élèves de l'école élémentaire dès le CE2 et le fait que la conception ponctuelle et statique associée à la définition usuelle était plus difficilement opérationnalisable par ces élèves que d'autres conceptions, cinématiques, locales ou globales. Elle montrait aussi l'étroite dépendance entre conceptions mobilisées et caractéristiques des tâches proposées, et les apprentissages nécessaires pour développer des relations plus flexibles entre conceptions. Les résultats obtenus par Gérard Vergnaud sur les structures additives et multiplicatives (Vergnaud, 1990) montrent de même la diversité sous-jacente à des tâches qui sont mathématiquement isomorphes quand on les aborde sous l'angle de l'apprentissage, les décalages qui existent entre réussite aux unes et réussite aux autres, et les expliquent. Ces résultats aussi sont aujourd'hui naturalisés et certains didacticiens

s'étonneront sans doute que je prenne du temps dans cet exposé pour rappeler des choses aussi connues.

II.2 D'une centration sur l'élève à une centration sur les situations et les institutions

Ce qui a permis à la recherche en didactique de progresser au-delà de ces premiers acquis, c'est d'élargir son horizon au-delà de l'élève. En France, cet élargissement a été en quelque sorte consubstantiel au développement de la didactique des mathématiques, porté d'abord par la théorie des situations didactiques (cf. (Perrin-Glorian, 1994), (Brousseau, 1998) pour une vision synthétique), assez vite aussi par la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985) qui allait déboucher ensuite sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992). Ce que je vois fondamentalement dans le changement de perspective que ces théories induisent, c'est la reconnaissance et la mise sur le devant de la scène, d'une part du fait que ce que l'élève apprend à l'école, c'est d'abord ce que l'école lui permet d'apprendre, d'autre part que pour comprendre ce que l'école permet à l'élève d'apprendre, on ne peut se contenter d'analyser les textes qui régissent l'enseignement : programmes et instructions, de comptabiliser les heures d'enseignement, d'étudier les sujets d'examens proposés. Ceci, la CIEM l'a fait dès le début du siècle en produisant, en l'espace de quelques années, de 1908 à 1920, 187 volumes contenant 310 rapports et études (Letho, 1998). Pour comprendre, il faut rentrer dans l'intimité du fonctionnement des systèmes didactiques, il faut en comprendre l'économie, il faut comprendre ce qui se joue en classe entre mathématiques, enseignants et élèves, comment se partagent et évoluent les responsabilités mathématiques respectives, comprendre ce qui contraint les dynamiques observées mais aussi ce qui relève du champ des possibles même si nous ne l'avons encore jamais observé.

La théorie des situations didactiques mais aussi d'autres constructions comme celle de Régine Douady (Douady, 1984) ont relativement tôt développé des outils conceptuels pour cette compréhension. Comment aujourd'hui observer une classe et comprendre ce qui s'y joue d'un point de vue mathématique sans prendre en compte les phénomènes de contrat didactique ? Comment analyser des changements de programme et anticiper leurs effets possibles sans s'interroger sur les perturbations que ces changements vont faire subir à l'écologie des savoirs mathématiques directement ou indirectement concernés par la réforme, se demander comment ces perturbations écologiques vont être, peuvent être gérées. Quelles sont les chaînes trophiques qui vont se trouver coupées et quels peuvent en

être les effets ? Quelles sont les nouvelles possibilités offertes et comment peuvent-elles être exploitées ? Pour répondre à toutes ces questions, il ne fait aucun doute que les outils dont nous disposons aujourd'hui sont sans commune mesure avec ceux dont nous disposions au moment de la réforme des mathématiques modernes. Avec le recul, les dérapages de cette dernière apparaissent complètement prévisibles.

La théorie des situations didactiques a déplacé la centration du regard de l'élève vers la situation didactique dont l'élève pris individuellement ou collectivement est un des acteurs. La théorie anthropologique, qui se conjugue aisément à cette dernière, a déplacé à nouveau cette centration des situations vers les institutions dans lesquelles ces situations s'inscrivent. Personnellement, j'ai vraiment pris conscience de l'intérêt de cet élargissement en encadrant la thèse de Brigitte Grugeon au début des années 90 (Grugeon, 1995). La théorie n'était pas alors développée comme elle l'est aujourd'hui mais son état était suffisant pour montrer ce qu'elle pouvait apporter au travail didactique.

A l'origine de cette recherche, se trouvait un constat d'échec : celui des classes d'adaptation créées pour permettre aux meilleurs élèves issus des lycées professionnels (LP) de rejoindre l'enseignement général technologique. Des élèves motivés qui devenaient en l'espace de quelques mois, pour beaucoup d'entre eux, des élèves en échec, perdant progressivement toute confiance en eux. Au centre de cet échec : l'algèbre, et au niveau des explications du dysfonctionnement, des raisonnements très tentants comme le suivant : l'orientation de ces élèves vers l'enseignement professionnel étant majoritairement due à un échec dans l'enseignement général, rien d'étonnant à ce que, quelques années plus tard, on récupère, en dépit de la réussite en LP, des élèves cognitivement incapables de suivre un enseignement général. La recherche en didactique de l'algèbre pouvait même être mise au service de ces argumentations. Elle permettait en effet de proposer aux élèves des tâches bien répertoriées, de rapporter leurs réponses à des catégories bien identifiées, de les interpréter en termes de conceptions et de niveaux de conceptualisation pour constater la faiblesse de ces derniers.

Dans la recherche de Brigitte Grugeon, l'adoption d'une approche anthropologique a permis de dépasser cette vision. Ce que cette approche a en fait changé, c'est la problématique de la recherche elle-même, en projetant le problème rencontré dans une plus grande catégorie de problèmes : les problèmes de transition institutionnelle, car ce qui était d'abord en jeu, c'était la transition entre deux institutions : le lycée professionnel et le lycée d'enseignement général. La théorie anthropologique conduisait à postuler que ces deux

institutions avaient développé, sans aucun doute, des rapports institutionnels différents au domaine de l'algèbre qu'elles reconnaissent toutes deux comme un domaine d'enseignement. Ces différences pouvaient être de nature diverse. Certains objets pouvaient exister dans une institution et non dans l'autre. Par exemple, dans l'institution lycée professionnel concernée vivaient des contenus portant sur des rudiments de mathématiques financières : formules liées à des calculs de taux, de remboursements d'emprunts, qui n'étaient pas au programme de l'enseignement général. Inversement, faisaient partie du programme du lycée général à un niveau similaire, des savoirs sur les fonctions qui ne faisaient pas partie de l'enseignement professionnel. Mais ce n'étaient pas là les différences les plus problématiques car elles étaient aisément repérables. Les différences de rapports institutionnels sur des objets communs, lorsqu'une lecture superficielle des programmes donne l'impression que l'on est passé de l'un à l'autre par une simple opération de "couper-coller" accompagnée de changements de style mineurs, étaient bien plus problématiques. Ce sont ces différences qui sont la source essentielle des malentendus de la transition institutionnelle.

Postuler leur existence avant même d'avoir cherché à les identifier précisément, conduisait à re-problématiser la recherche. Était-il légitime d'attribuer aux seules difficultés cognitives des élèves leur échec en algèbre dans ce processus de transition institutionnelle ? Ne pouvait-on faire l'hypothèse que cet échec était dû en partie, fortement renforcé, par des différences subtiles de rapports institutionnels ? Génératrices de malentendus, elles empêcheraient les élèves de comprendre les attentes des enseignants et de réinvestir leurs connaissances pour y faire face, elles empêcheraient les enseignants de repérer les connaissances de leurs élèves et de les aider à les mobiliser, alors même qu'élèves et enseignants semblaient parler des mêmes objets, travailler sur les mêmes objets. A ceci se rajouterait une autre difficulté, elle aussi inhérente aux transitions institutionnelles. Les connaissances mathématiques que les élèves développent sont contextualisées. Seule une faible portion de ces connaissances est décontextualisée sous forme de savoirs. Les enseignants le savent bien, même s'ils ne l'explicitent pas, et cette connaissance se manifeste dans les stratégies qu'ils développent pour aider les élèves à mobiliser les connaissances nécessaires, en évoquant un moment, un épisode de l'histoire de la classe (Matheron, 2000). Toute transition institutionnelle met à mal ces stratégies d'évocation car il n'y a plus d'histoire à partager, et l'établissement des connections permettant la

mobilisation des connaissances, passant sous la seule responsabilité de l'élève, devient bien plus aléatoire.

C'est en se situant dans cette approche que Brigitte Grugeon s'est attaquée au problème de la transition en algèbre entre lycée professionnel et lycée général, refusant de se laisser piéger par des premières interprétations trop tentantes. Cela lui a permis un autre regard sur les élèves, beaucoup plus constructif. Cela a aussi mis en évidence que, pour ces élèves issus de l'enseignement professionnel, dont la culture algébrique était organisée principalement autour du monde des formules, et non comme au lycée général autour du monde des équations puis des fonctions, d'autres leviers étaient possibles, passant notamment par l'enrichissement du travail sur les formules, sa complexification technique progressive et sa mise en relation avec le monde fonctionnel. Cette analyse a permis de mettre en place, dans un second temps, une ingénierie didactique mieux adaptée à ces élèves et d'obtenir au bout de deux ans des résultats non pas miraculeux mais pour le moins inespérés.

Pour terminer ce balayage de la recherche en didactique, j'évoquerai maintenant une autre évolution, tout aussi fondamentale : celle concernant le regard porté sur l'enseignant.

II.3 De l'élève vers l'enseignant

L'enseignant n'a pas été considéré d'emblée comme un acteur problématique de la relation didactique au même titre que l'élève. Ce n'est plus le cas aujourd'hui et les recherches concernant l'enseignant, ses conceptions et représentations, ses modes d'action et de décision, ses connaissances et compétences et la façon dont elles se construisent, se sont multipliées comme l'ont montré par exemple deux des synthèses préparés pour le congrès ICME10 en 2004, l'un sur les rapports entre théorie et pratique dans la recherche (Sfard, 2005), l'autre sur les travaux concernant la formation des enseignants (Adler & al., 2006). Comme dans le cas des élèves, c'est l'étude des conceptions, représentations, croyances des enseignants qui a été d'abord au centre des recherches, motivée par les difficultés rencontrées dans l'articulation entre théorie et pratique, notamment les difficultés rencontrées à assurer la diffusion de constructions didactiques élaborées par les chercheurs et ayant fait la preuve de leur efficacité dans des terrains expérimentaux (cf. (Thompson, 1992) pour une première vision synthétique). L'hypothèse alors faite est que les représentations des enseignants sur les mathématiques, leur enseignement, leur apprentissage, en décalage avec celles des chercheurs, font obstacle à cette diffusion. Mais

assez vite cependant, les liens entre représentations et action didactique apparaissent comme des liens complexes et la question des déterminants de l'action didactique, du rôle exact que jouent parmi ces déterminants les représentations des enseignants sur les mathématiques et l'apprentissage se trouve posée. D'autres recherches se développent visant à comprendre le fonctionnement de l'enseignant au sens large, ses prises de décision en classe et hors classe et ce qui les gouvernait, visant à identifier les différents gestes professionnels de l'enseignant et les connaissances qui les sous-tendent, visant plus largement à identifier les connaissances et compétences nécessaires à l'exercice de cette profession et la façon dont elles se développent (Margolinas & Perrin, 1997), (Schoenfeld, 1998), (Ma, 1999), (Ball & Even, à paraître).

Dans les recherches françaises, les principaux cadres théoriques existants sont mis à contribution. Dans la théorie des situations didactiques, on exploite notamment les travaux sur la structuration du milieu, permettant d'identifier différentes positions et rôles pour l'enseignant, et la structuration initiale, aujourd'hui qualifiée d'ascendante, se complète d'une structuration descendante permettant de prendre en compte le travail de l'enseignant hors de la classe dans sa dimension de concepteur de situations d'enseignement (Perrin-Glorian, 1999), (Margolinas, 2002). Dans la théorie anthropologique, un travail systématique est fait pour identifier les gestes professionnels de l'enseignant et trouver les moyens de décrire, caractériser, voire évaluer des praxéologies didactiques définies, de façon parallèle aux praxéologies mathématiques, en termes de tâches didactiques et techniques didactiques permettant de les réaliser, ces techniques étant plus ou moins sous le contrôle de technologies didactiques c'est à dire de discours permettant d'expliquer et justifier les techniques, voire de théories didactiques (Chevallard, 1999).

D'autre part, des constructions plus spécifiques sont développées comme la « double approche » due à Aline Robert et Janine Rogalski (Robert & Rogalski, 2002), (Robert & Rogalski, 2005) qui s'appuie à la fois sur des travaux issus de psychologie ergonomique et de didactique des mathématiques. Dans cette double approche qui s'est révélée ces dernières années très productive (cf. par exemple (Vandebrouck, 2008) pour une sélection de travaux relevant de cette approche), l'enseignant est vu comme un individu exerçant un métier dans un environnement à la fois dynamique et ouvert, ce qui explique le recours aux travaux de psychologie ergonomique. L'objectif est de contribuer à l'analyse et à la compréhension des pratiques des enseignants tant du point de vue de ce qu'elles peuvent engendrer en termes d'apprentissages des élèves que du point de vue des impératifs

professionnels auxquels elles répondent, par rapport à l'enseignant lui-même, et pas seulement par rapport à ses élèves.

Dans cette double approche qui s'appuie sur la théorie de l'activité, les séances en classe sont d'abord analysées selon deux dimensions dites « cognitive » et « médiative » qui relèvent de l'approche didactique : la première concerne les tâches proposées aux élèves et les activités mathématiques des élèves qu'elles permettent potentiellement, a minima et a maxima, les formes de travail des élèves pendant les séances et la répartition des responsabilités entre enseignant et élèves, la seconde concerne les échanges avec l'enseignant, les aides fournies par ce dernier, les questions qu'il pose et leur effet sur l'activité mathématique des élèves. Ces analyses conduisent à une lecture des pratiques de l'enseignant selon deux composantes : la composante « cognitive » qui résulte de l'analyse de ce qui est planifié par le professeur pour agir sur les connaissances mathématiques des élèves et la composante « médiative » qui renseigne sur l'organisation par l'enseignant dans sa classe des médiations entre lui et les élèves ou entre les élèves. Ensuite, afin de saisir les régularités dans les pratiques d'un même professeur ou entre professeurs et de préciser les marges de manœuvre réellement investies par les enseignants, trois autres composantes sont considérées : les composantes « sociale » et « institutionnelle » relatives aux contraintes institutionnelles et sociales qui pèsent sur les pratiques enseignantes et la composante « personnelle » liée aux conceptions du professeur quant au savoir et au métier, sa tolérance en matière de risque, son besoin de confort... Les différentes analyses sont enfin croisées pour reconstruire ce qui apparaît en classe du système complexe et cohérent des pratiques des professeurs étudiés, en le reliant aux contraintes et décisions en jeu.

Il est évident que ces travaux de recherche, qui nous donnent un accès plus réaliste au travail de l'enseignant, influencent notre perception des rapports entre théorie et pratique, et de la formation, élément crucial dans l'établissement de ces rapports. L'enseignant est moins vu comme un mentor ou comme un ingénieur de l'éducation que comme un professionnel travaillant dans des environnements complexes et changeants auxquels il doit sans cesse s'adapter. Les formations qui s'appuient sur ces travaux se veulent plus respectueuses de la réalité des pratiques, de leurs modes d'élaboration et d'évolution, des contraintes diverses du métier d'enseignant. L'évolution des pratiques y est vue comme un processus à long terme qui doit prendre en compte les cohérences propres à chaque enseignant, son style. Et la distance entre l'ancien et le nouveau (Assude & Gelis, 2002) est vue dans la dynamique de cette évolution comme une variable critique.

Je vais arrêter là ce rapide balayage. On s'étonnera peut-être que, travaillant sur les questions d'intégration technologique, je n'ai jusqu'ici pas parlé de technologie. J'y viendrai dans les questions sensibles. On s'étonnera aussi peut-être que j'ai fait une part aussi belle aux travaux français. C'était un choix délibéré et il traduit ma conviction que cet élargissement du regard qui était nécessaire aux avancées didactiques s'est développé particulièrement tôt chez nous, et que, s'il a été porté par les visions de quelques chercheurs, il a aussi été plus largement l'œuvre collective d'une communauté, ce qui a donné à ces constructions une cohérence et une force particulières. Mais, et j'aurai l'occasion de le dire dans la suite de mon exposé, la situation est aujourd'hui au niveau international bien différente de ce qu'elle était il y a une vingtaine d'années. L'élargissement des regards, l'attention portée aux enseignants, sont un fait général, donnant lieu à un foisonnement de travaux et d'approches théoriques par rapport auxquels nos recherches doivent aujourd'hui apprendre à se situer.

III. Des questions sensibles

J'ai évoqué au début de mon exposé la « Math War » et je reprendrai la citation faite dans l'introduction initiale de la conférence de Lisbonne :

« There is a major controversy in K-12 math education. New curricula are coming into vogue that in large part replace the systematic teaching of algorithms with discovery learning, in which students are asked to find their own methods of solving problems. The new methods also de-emphasize memorization of multiplication tables in favour of reliance on calculators.

These new curricula are bad for several reasons: First the instructional methods used are very time consuming, and much less material can be covered. Also, if you develop your own algorithms, they may well not be as powerful and efficient as the standard ones. As a result, students come away with less mastery of the material they study, and it takes them longer to solve new problems whose solution would be immediate if they had learned comprehensive, efficient algorithms.”

Il y a dans cette citation une succession d'affirmations et une argumentation que l'on peut certes critiquer mais elle traduit un malaise que l'on ne peut pas ne pas prendre au sérieux. L'enseignement systématique des algorithmes y est opposé à une pédagogie de la découverte. Dans le premier cas, on couvre un contenu plus large, on met en place rapidement des algorithmes puissants et efficaces et les élèves sont finalement mieux armés

pour résoudre des problèmes nouveaux. Dans le second cas, on perd beaucoup de temps, on en reste à des techniques artisanales, on ne mémorise pas et finalement l'élève est moins efficace pour résoudre de nouveaux problèmes. Il y a là une naïveté évidente quant à la vertu supposée de l'apprentissage des algorithmes et à la facilité de cet apprentissage. On semble oublier que, si les recherches en didactique se sont développées, c'est justement parce que cet enseignement là, tel qu'il était mené, ne donnait pas satisfaction. D'une part, tout en sachant exécuter de façon fiable les dits algorithmes, de nombreux élèves étaient incapables d'en reconnaître les conditions d'emploi dès que cet usage n'était pas induit plus ou moins directement par le contrat didactique, ce qui est le cas dès que l'on sort de la classe de mathématiques ; d'autre part, dès que l'usage n'en était pas régulièrement entretenu, les algorithmes étaient oubliés et leur reconstruction impossible à l'élève.

Le didacticien ne se reconnaîtra pas non plus bien sûr dans la description faite de l'alternative en vogue à ces pédagogies traditionnelles si ce n'est dans l'observation tout à fait juste que, si l'on veut donner plus de responsabilité à l'élève dans la production des connaissances et des techniques, cela consomme du temps. L'ambition des ingénieries didactiques qui ont été développées pour l'école élémentaire n'était pas de se contenter de techniques artisanales, de déléguer l'exécution des opérations aux calculatrices ni de mettre de côté la mémorisation des tables. Et ce n'est pas non plus ce que prônent les programmes, au moins en France, même s'ils mettent l'accent sur l'activité mathématique de l'élève. Mais il serait aussi faux de nier qu'arriver à des équilibres efficaces compte-tenu des contraintes qui pèsent sur l'enseignement n'est pas un problème trivial et qu'il est loin d'être résolu dans le cas général, il suffit d'aller dans des classes pour s'en apercevoir.

En tant que chercheurs, nous avons aussi une certaine responsabilité car il est clair que nous avons mis beaucoup plus d'énergie dans nos recherches à l'élaboration de situations permettant d'optimiser la responsabilité mathématique des élèves dans l'introduction de nouvelles notions que dans le travail des techniques et la consolidation des connaissances. Et ce que l'on retient, ce que l'on montre des ingénieries didactiques, ce sont le plus souvent quelques situations emblématiques : la situation du puzzle de Guy Brousseau, celle des rectangles de Régine Douady, en oubliant les détails de la progression dans laquelle elles s'inscrivaient, et le temps qui y était consacré à mettre en place et consolider les techniques de calcul, à assurer leur flexibilité, tout en les reliant à leurs situations d'emploi.

III.1 Pratiques d'enseignement et réussite des élèves

La recherche en didactique permet-elle aujourd'hui de dépasser cet état de choses, nous fournit-elle des résultats pour analyser les effets de choix didactiques, de pratiques pédagogiques différents, nous permet-elle d'aller au-delà de la mesure d'effets constatés dans des contextes expérimentaux écologiquement protégés ? Il me semble que c'est effectivement le cas et la thèse Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Perrin-Glorian, 1992) a été par exemple en France un travail pionnier dans ce domaine. On cite souvent à l'étranger les travaux de Jo Boaler qui a d'abord travaillé en Angleterre puis à Stanford aux Etats-Unis avant de revenir à Oxford et c'est pourquoi, quittant la scène française, j'ai choisi de les évoquer. Sa thématique de recherche est justement depuis le début celle de l'impact sur l'apprentissage de différentes approches de l'enseignement des mathématiques. Ses études portent chaque fois sur plusieurs établissements contrastés, sur des centaines d'élèves et s'étalent sur plusieurs années. Ses premiers résultats (Boaler, 2002) obtenus via la comparaison en Angleterre de deux lycées, l'un utilisant des méthodes traditionnelles et des classes regroupant les élèves par niveau, l'autre des méthodes plus ouvertes avec des projets et des classes hétérogènes avait clairement montré que, en moyenne, les élèves du second lycée apprenaient plus de mathématiques, développaient une attitude plus positive par rapport à la discipline et que l'enseignement y était plus équitable (moins de différences entre les résultats par classes sociales et par sexe). La seconde étude, menée à Stanford avec 8 étudiants en thèse pendant 5 ans, soutenue par la *National Science Foundation* (the Stanford Mathematics Teaching and Learning Study) est celle que je vais plus particulièrement évoquer (Boaler, à paraître). Trois high schools y sont considérées, dénommées Greendale, Hilltop and Railside, de taille équivalente, avec des enseignants de mathématiques qualifiés de « committed and knowledgeable », mais différant par leur situation et population. Railside est située dans une zone urbaine et offre une grande diversité culturelle et ethnique ; Hilltop est dans une zone plus rurale, avec une moitié d'élèves latino et une moitié de blancs, Greendale est sur la côte et accueille une population blanche homogène. Les comparaisons principales portent sur 300 élèves environ dans chaque école, suivant un cursus « reform oriented » dans la première et traditionnel dans les deux dernières. Des centaines d'heures d'enseignement ont été filmées puis, pour un certain nombre d'entre elles, codées avec une attention particulière portée à l'organisation du temps de l'enseignement et aux questions posées par les enseignants. Les enseignants et 60 élèves ont été aussi interviewés chaque année et des questionnaires soumis à tous les élèves.

A ceci s'ajoutèrent chaque année des tests d'évaluation des connaissances des élèves, élaborés avec les enseignants et comportant de façon équilibrée des items représentatifs de chaque approche. Les chercheurs ont aussi organisé des tests avec des problèmes plus longs et appliqués que les élèves devaient résoudre en groupes. Enfin ils ont collecté les scores des élèves aux tests de l'Etat.

Dans les classes de Hilltop et Greendale, dans une séance de mathématiques typique, les enseignants présentent les éléments nouveaux de façon magistrale (21% du temps) et les élèves résolvent des exercices pendant 48% du temps ; 15% est occupé par des discussions collectives, l'enseignant posant des questions aux élèves. La très grande majorité des questions posées est de nature procédurale (>90%). La répartition du temps est très différente à Railside où les élèves travaillent en groupes sur des problèmes plus longs et pas seulement procéduraux. Les questions posées par les enseignants sont plus variées même si 61% d'entre elles sont aussi d'ordre procédural.

Les résultats du pré-test et des deux post-tests (post test en algèbre à la fin de la première année, en algèbre et géométrie à la fin des deux ans, sont donnés dans le tableau ci-dessous⁷.

	Traditionnel		Railside	
	Moyenne	Nombre	Moyenne	Nombre
Y1 pre-test	22.23	311	16.00	347
Y1 post-test	23.90	293	22.06	344
Y2 post-test	18.34	313	26.47	199

Tableau 1. Résultats des tests, high schools traditionnels (Greendale, Hilltop) et Railside

Des différences significatives ont aussi été observées concernant les attitudes vis-à-vis des maths et, à la fin de la 4^{ème} année, 41% des élèves de Railside choisissent des cours avancés de pré-calculus et calculus, contre 30% à Hilltop et 23% à Greendale. Les différences de résultats selon l'origine ethnique des élèves sont aussi significativement inférieures à Railside.

Quelles peuvent être les raisons de ces différences et du succès de Railside ? Jo Boaler et ses collègues les ont recherchées dans l'analyse des données recueillies et dans la

⁷ Le nombre plus faible d'élèves de Railside évalués en deuxième année est lié au fait que ces derniers pouvaient choisir de suivre l'enseignement de géométrie en deuxième ou troisième année, mais le fait que ceci ne biaise pas les résultats a été contrôlé.

triangulation de ces analyses. Ils montrent, comme l'on pouvait s'y attendre, qu'il n'y a pas une raison unique mais une combinaison de raisons.

Le département, l'organisation curriculaire, celle de l'emploi du temps

Les enseignants travaillent beaucoup en collaboration, élaborent ensemble leur programme et contenus d'enseignement, discutent de leurs pratiques (650mn dont 450mn reconnues comme travail de préparation). Ils sont associés aux nouveaux recrutements et ont mis en place un dispositif pour assurer l'acculturation des nouveaux recrutés. Tous partagent une sensibilité aux questions d'équité.

Les séances sont de 90 minutes. Les enseignements sont sur le semestre, ce qui donne plus de flexibilité. Les classes sont hétérogènes. Mais le lycée a à gérer une image difficile d'établissement ghetto avec des résultats faibles aux tests d'Etat.

Un travail en groupes soigneusement pensé : « the complex instruction approach »

Tout enseignant sait qu'il ne suffit pas de mettre des élèves en groupes pour qu'ils apprennent mieux. Les enseignants de Railside s'appuient sur une méthode développée par Liz Cohen et Rachel Lotan (Cohen & Lotan, 1997) qui présente en particulier les caractéristiques suivantes :

- *Affectation de rôles :*

Elle vise à contrer les différences de statut social et académique qui naissent des interactions. Dans chaque groupe, des rôles sont attribués aux élèves : facilitateur, capitaine, rapporteur, responsable ressources. Les rôles sont régulièrement rappelés par l'enseignant qui intervient dans les groupes en en tenant compte. Ils changent à la fin de chaque unité de travail.

- *Multidimensionalité de la réussite :*

La réussite est évaluée à travers une diversité de compétences et il est entendu qu'à la fois personne n'est bon sur toutes et chacun peut être bon sur au moins une. En mathématiques, un accent fort est mis sur la capacité à expliquer et pas seulement à trouver, ce qui aide aussi à gérer l'hétérogénéité. Cette diversité se retrouve dans les entretiens avec les élèves et contraste avec les points de vue exprimés dans les deux autres lycées où la vision de la réussite est étroitement liée à ce qui est demandé dans les tests d'Etat.

- *Valorisation de compétences :*

Une grande importance est donnée au rôle joué par l'enseignant pour valoriser publiquement les apports, même modestes, des élèves qui peuvent avoir un statut inférieur dans un groupe, pour diverses raisons.

- *Apprendre à chaque élève à se sentir responsable de l'apprentissage des autres :*

Ceci se fait à travers différentes stratégies : noter la qualité des interactions dans le groupe, évaluer le travail du groupe, interroger un élève d'un groupe et s'il ne répond pas, laisser le groupe travailler sachant que l'on reviendra interroger le même élève...

Disponibilité et exigence des enseignants :

Des enseignants très disponibles mais aussi très exigeants, qui aident sans donner les réponses, demandant systématiquement des explications et des justifications (« Follow-up questions »), se centrent sur ce qu'ils considèrent important mais essaient de le traiter en profondeur. De plus, ils n'hésitent pas à clarifier ce qu'ils attendent comme façons de travailler, et à souligner en les commentant de façon réflexive les moments où les élèves se comportent de façon attendue.

La réussite en maths est vue comme résultat du travail plus que d'habiletés innées. Elle est ainsi jugée accessible à condition de s'accrocher pour 84% des élèves de Railside (52% dans les autres lycées). En particulier les étudiants de Railside apparaissent significativement meilleurs sur les tâches longues de 90mn, mais l'analyse montre que la différence est due en premier lieu au fait qu'ils n'ont pas abandonné. A la question : « Combien de temps en moyenne cherchez-vous un exercice avant d'abandonner ? », la moyenne de leurs réponses est 19.4mn contre 9.9mn pour les autres. Ceci est bien sûr aussi lié aux types de tâches qu'ils rencontrent, en moyenne significativement moins courtes.

Je ne peux m'attarder plus sur cet exemple mais il montre bien je pense que comparer des méthodes d'enseignement requiert des études de fond, et ne peut se satisfaire d'une identification des méthodes à travers des slogans. Comme le fait remarquer par ailleurs Liping Ma dans l'ouvrage qui est issu de son travail de thèse et écrit à destination d'un large public (Ma, 1999), quand elle visitait d'une part des classes élémentaires aux USA et celles assurées par Deborah Ball (Ball, 1996), elle ne pouvait manquer de remarquer que si l'on regardait la surface des choses, il y avait une grande similarité entre beaucoup de classes américaines et celles de Deborah Ball et une grande différence avec les classes chinoises, mais si elle analysait les mathématiques qui s'y faisaient et le contenu réel des interactions entre enseignants et élèves, les similarités basculaient : elles étaient fortes cette fois entre les classes chinoises et la classe de Deborah Ball, tandis que le contraste était saisissant avec beaucoup de classes américaines apparemment proches (p.153).

III.2 Les questions technologiques

Les questions technologiques sont également un point sensible dans les débats concernant l'enseignement des mathématiques. Comme nous le rappelions dans l'introduction au panel sur les controverses dans la « K-12 mathematics education » organisé lors du congrès ICM 2006 à Madrid (Artigue, Ralston & de Shalit, 2006), la première étude ICMI sur la technologie datant de 1985 et dont l'ouvrage avait été réédité par l'UNESCO en 1992 faisait de nombreuses propositions pour faire bénéficier l'enseignement des mathématiques des avancées technologiques et présentait de nombreuses expériences encourageantes, mais il y était aussi souligné que, en dépit de leur intérêt « such suggestions are fundamentally speculative at the level of large scale implementation – by which we mean that converting them into a well-developed and tested curriculum for the typical teacher and the typical student is still a major challenge » (Cornu & Ralston, 1992).

Et nous ajoutons : « Since that time, more and more sophisticated technological tools have continued to be developed for supporting the learning and teaching of mathematics, and their use is today encouraged by the K-12 mathematics curriculum in most countries. Nevertheless, in spite of the existence of an increasing amount of positive small-scale experiments, the real nature of the effect of technology on mathematics education in the large remains under discussion. The problems raised in the first ICMI Study have not been solved, and the discourse of those who think that the impact of technology is globally negative and ask for a strict limitation of the use of calculators and software, and even for their banishment from mathematics education in the early grades, is opposed by those who consider that it does not make sense today to think about mathematics learning and teaching without taking into account the existence of technology and without trying to benefit from the real and increasing potential it offers for mathematics education. »

Encore une fois, il me semble important de prendre au sérieux les malaises que de telles tensions expriment et, personnellement, je pense que le développement de l'approche instrumentale en didactique des mathématiques auquel j'ai contribué a bien aidé à en comprendre les raisons (cf. (Guin & Trouche, 2002) pour une première synthèse). Cette approche a conduit à questionner l'opposition entre technique et conceptuel qui dominait le discours technologique militant et parfois aussi celui des chercheurs, et donnait à croire que l'usage de la technologie, déchargeant l'élève du travail technique, pouvait lui donner directement accès à une activité conceptuelle. Les travaux qui ont été menés, d'abord avec des logiciels de calcul formel, ensuite avec d'autres technologies, ont bien montré à quel

point cette supposition était erronée. Ils ont par là même attiré l'attention sur la double valence, épistémique et pragmatique des techniques : elles aident à produire des résultats (valence pragmatique) mais elles aident aussi à comprendre les objets qu'elles engagent, et c'est cette fonction épistémique qui, tout autant que leur fonction pragmatique, légitime leur présence dans l'enseignement (Artigue, 2002), (Artigue & al., à paraître). Les technologies informatiques perturbent les équilibres entre ces deux valences qui se sont établis dans une culture papier / crayon. Face à ces perturbations non identifiées, non gérées, les enseignants restent démunis.

De nombreux travaux, en France comme à l'étranger, montrent par ailleurs que les usages qui semblent les premiers accessibles aux enseignants ne sont justement pas ceux qui tirent le mieux parti des potentialités pour l'apprentissage des technologies considérées (Laborde, 2001), (Monaghan, 2004). Proposant d'une part à des enseignants débutants, d'autre part à des formateurs des situations utilisant le tableur, volontairement contrastées quant à leur intérêt pour l'apprentissage, Mariam Haspekian dans sa thèse (Haspekian, 2005) a par exemple montré, que systématiquement les choix des premiers, tout en étant argumentés, étaient opposés aux choix des seconds qui, eux, correspondaient à ceux que sa recherche la conduisait elle-même à effectuer. La tendance observée et bien compréhensible consiste à utiliser les outils technologiques juste pour leur valeur pragmatique : produire rapidement et facilement des résultats dans des tâches qui se différencient peu de celles traditionnellement pensées pour l'environnement papier/crayon. Or, comme les recherches concourent aussi à le montrer, ceci ne permet pas que s'exprime dans l'enseignement des mathématiques la puissance épistémique des techniques instrumentées. L'expression de cette dernière passe en effet souvent par la construction de tâches qui n'ont pas d'analogue direct dans l'environnement papier/crayon et, pour les tâches qui sont a priori envisageables dans cet environnement, par une véritable reconstruction des scénarios didactiques associés. La pente naturelle des usages contribue de ce fait fortement aux décalages observés entre attentes et réalisations effectives, et explique les tensions observées.

Arriver à surmonter ces obstacles demande de penser les usages de la technologie dans la durée, la progression coordonnée dans le temps des connaissances instrumentales et mathématiques ainsi que les institutionnalisations associées, les rapports à construire et à faire évoluer entre techniques papier-crayon et techniques instrumentées. Nous mesurons donc mieux aujourd'hui la tâche à accomplir et nous sommes certainement bien mieux armés pour y faire face que nous ne l'étions il y a dix ans, mais le travail à accomplir pour

parvenir à une intégration des technologies informatiques qui serve efficacement la cause de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques reste énorme.

IV. Les défis actuels

Ces défis sont de deux ordres. Certains sont internes au champ didactique, d'autres comme pour les autres champs scientifiques lui viennent de l'extérieur. Ils mériteraient à eux seuls un exposé complet. Je ferai donc une sélection draconienne et j'essaierai d'être synthétique.

IV.1 Les défis internes

J'ai souligné à la fin de la partie consacrée au balayage du champ didactique que l'élargissement des perspectives progressivement observé en France n'était pas un phénomène isolé. Mais cette évolution s'est traduite en l'espace d'une dizaine d'années par un foisonnement d'approches, une explosion théorique qui, tout en exprimant la vitalité de la communauté didactique, ne sont pas sans poser problème. Communiquer entre chercheurs alors même que nous sommes de plus en plus proches en un certain sens, se faire une idée claire des résultats obtenus dans tel ou tel domaine pour soi-même ou pour pouvoir les communiquer à d'autres est aujourd'hui difficile. C'est ce qui a conduit par exemple, dans les deux derniers colloques européens CERME en 2005 et 2007, à créer un groupe de travail sur la comparaison et l'articulation de cadres théoriques dont les travaux vont faire l'objet en 2008 d'un numéro spécial de ZDM. C'est aussi un travail dans lequel je suis personnellement investie avec d'autres dans le cadre de deux projets européens : les travaux de l'équipe de recherche européenne TELMA au sein du réseau d'excellence Kaleidoscope et le projet ReMath (Representing mathematics with digital media) du 6^{ème} plan européen de recherche et développement auquel cette équipe a donné naissance en 2006. Dans ces deux projets, notre intérêt porte sur les potentialités offertes par les technologies numériques pour l'apprentissage des maths et nous sommes plusieurs équipes venant de 4 pays différents : Angleterre, Grèce, Italie et France, à travailler ensemble, chacune développant des environnements interactifs d'apprentissage et travaillant depuis de nombreuses années sur ces questions d'apprentissage et d'intégration technologique dans l'enseignement. Pour travailler efficacement ensemble, il nous a fallu essayer de dépasser l'état de fragmentation théorique du champ. Ceci ne pouvait se faire par l'imposition à tous d'un même cadre théorique. Il nous a donc fallu comprendre quels étaient réellement les besoins de connections que nous avions et, pour cela, identifier ce qui faisait la cohérence de chacune de nos approches et quelles en étaient aussi les limites, les points aveugles,

comprendre le rôle que jouaient exactement ces approches théoriques dans notre travail qu'il s'agisse de conception et de développement d'artefacts informatiques ou de conception et développement d'usages. Nous avons mis au point pour cela une méthodologie spécifique d'expérimentations croisées, des outils méthodologiques spécifiques comme la notion de fonctionnalité didactique et le langage des « concerns ». Aujourd'hui, quatre ans presque après le début de ce travail, nous commençons à y voir plus clair. Mais il s'agit là encore d'une avancée très locale par rapport au défi global que la recherche doit relever⁸ (Artigue, 2007).

Le second défi qui me semble crucial est celui des changements d'échelle. La recherche en didactique, pointant à juste titre les limites des études statistiques qui avaient marqué ses débuts au moins dans certains pays et semblaient lui conférer une aura de scientificité, a privilégié les études qualitatives, plongeant de plus en plus profond dans le détail des interactions entre les acteurs du système didactique comme des interactions avec le savoir mathématique. Des expérimentations ont été menées, des ingénieries développées, on a constaté que leur diffusion posait problème, cela a été d'ailleurs l'une des causes du développement de la recherche sur les enseignants et leurs pratiques, mais l'on n'a pas pris, du moins à ma connaissance, la question des changements d'échelle comme une question de recherche en soi. Il est courant en didactique de filer la métaphore, comparant l'évolution de ce champ avec celui de la médecine, et la notion d'ingénierie est elle-même porteuse d'une métaphore, celle de l'enseignant-ingénieur. La métaphore médicale attire notre attention sur le fait que la médecine dispose, elle, de protocoles précis pour gérer les changements d'échelle. Et même s'il ne me semble pas pertinent de poursuivre plus avant cette analogie trop galvaudée, elle devrait attirer notre attention sur les limites inhérentes à une concentration de la recherche sur des objets, certes intéressants et importants, mais dont la petite taille ne nous confronte pas aux problèmes de changement d'échelle, aux phénomènes, changements de contraintes et de dynamiques qui les accompagnent. La recherche ne saurait à mon avis s'en désintéresser en les renvoyant simplement à d'autres instances pour se désoler ensuite que, lorsque certains de ses résultats sont convertis en décisions curriculaires, les résultats ne soient pas ceux attendus. Aujourd'hui de tels travaux, qui nécessitent des moyens humains et financiers lourds, des coopérations institutionnelles diverses, commencent à se développer (cf. (Swan, 2006), (Hill & al.,

⁸ Tous les textes associés à ce travail sont accessibles en ligne sur le site de TELMA : <http://telma.noe-kaleidoscope.org>

2007), (Blum & al., 2007), (Espinoza & al., 2007) par exemple) mais il faut reconnaître que la recherche française n'est en rien pionnière dans ce domaine.

Le troisième défi, à mes yeux, non indépendant de ce qui précède, est de nous rendre en tant que communauté capables d'exprimer ce que nous savons, ce que nous avons appris, avec bien sûr les précautions qui s'imposent, en dehors de la communauté des seuls didacticiens. Nos connaissances didactiques bien sûr nourrissent nos pratiques d'enseignants, de formateurs, nos échanges de chercheurs, mais si cela peut nous apporter une certaine satisfaction, cela reste une satisfaction bien égoïste. Les progrès dans cette direction me semblent bien maigres en l'espace de quarante ans et, pour ne parler que d'elles, il me semble que les études ICMI qui devraient y contribuer jouent trop insuffisamment ce rôle. J'aimerais qu'une évolution sensible s'amorce dans les études ICMI en cours et dans celles que nous allons lancer ces prochaines années. Elles ne doivent pas être des études écrites par des chercheurs pour des chercheurs, elles doivent être beaucoup plus que cela, présenter de façon synthétique et claire l'état des connaissances dans le domaine concerné dans un discours accessible à des non spécialistes ainsi que les enjeux actuels de la recherche, donner à voir des réalisations diverses mais d'ampleur suffisante conduites dans des contextes différents et les analyser, être une source d'inspiration pour tous.

IV.2 Les défis externes

Mes responsabilités au sein d'ICMI me rendent sans aucun doute particulièrement sensible à cette deuxième catégorie de défis : ceux qui nous viennent de l'extérieur et que nous ne pouvons ignorer. Certes, il est sans doute possible de développer une carrière académique en didactique en restant à l'écart de ces contingences mais je connais peu de didacticiens qui se satisferaient d'une telle situation. L'engagement en didactique n'est pas seulement un engagement scientifique, au sens académique du terme, c'est un engagement humain dont la motivation profonde est l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, de la vie mathématique à la fois des professeurs et de leurs élèves. Les défis, à ce niveau, sont nombreux.

Le premier défi que je mentionnerai est celui d'un enseignement des mathématiques équitable pour reprendre les termes de Jo Boaler et de qualité, où l'on sache répondre aux besoins de la formation des futurs scientifiques et mathématiciens sans pour autant écraser la grande masse de ceux dont le rapport aux mathématiques sera tout autre, où les mathématiques servent l'épanouissement intellectuel, social et culturel de chacun au lieu de

renforcer des inégalités. Il est clair que nous ne pouvons prétendre seuls influencer substantiellement sur l'enseignement des mathématiques. Notre contribution sera même sans doute modeste mais je suis profondément convaincue qu'elle est nécessaire, pour orienter l'action, pour accompagner, soutenir et même être à l'origine de projets moteurs, mais aussi pour aider à dénoncer les solutions simplistes mais tentantes pour la personne non avertie qui fleurissent avec régularité et sont souvent reprises sans esprit critique par les médias. Relever ce défi nous impose de savoir communiquer et collaborer efficacement avec d'autres communautés, et nous avons aussi sur ce plan sans doute des efforts à faire. Si ceci est important dans tous les pays, ce l'est tout particulièrement dans les pays en voie de développement où les ressources humaines et matérielles sont comptées.

Le second défi sur lequel je voudrais revenir est le défi technologique. La première étude ICMI était dédiée à la technologie, l'étude 17 qui a été lancée il y a trois ans se proposait de la revisiter. La conférence associée s'est tenue en décembre 2006 à Hanoi et ce n'est bien sûr pas un hasard. Il était très important pour nous qu'elle se tienne dans un pays émergeant, et que l'on y prenne pleinement la mesure de ce que la technologie représente pour l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants dans un tel contexte. La recherche en didactique a nourri et accompagné le développement des logiciels de géométrie dynamique, elle s'est longtemps concentrée sur les calculatrices, les micro-mondes et plus généralement des logiciels ouverts. Aujourd'hui on voit bien à quel point l'évolution technologique nous oblige à sortir de ces espaces technologiques devenus familiers, nous oblige à nous intéresser aux nouvelles générations de bases d'exercices comme Mathenpoche développé par l'association Sésamath⁹ par exemple et à essayer de comprendre quels usages en font enseignants et élèves, avec quels effets sur les apprentissages. Elle nous oblige aussi à essayer de comprendre pourquoi, alors que la géométrie dynamique a mis si longtemps à pénétrer les pratiques effectives, ce type de logiciel semble diffuser aujourd'hui si facilement. Elle nous oblige aussi à remettre en question nos modèles de diffusion des connaissances et à prendre la mesure de ce que peut apporter la technologie aujourd'hui dans des contextes difficiles, en pensant des usages différents de ceux qui nous étaient les plus familiers, en concevant des ressources numériques appropriées pour les enseignants et les étudiants, en numérisant celles

⁹ <http://www.sesamath.net>

existantes et en les rendant largement accessibles¹⁰, en faisant de la technologie un outil au service du travail collaboratif des enseignants.

Le troisième défi est celui de l'action sur les systèmes éducatifs dont les formes sont aujourd'hui profondément insatisfaisantes. Brutalité des interventions, faiblesse des régulations, faiblesse des accompagnements, permanence de systèmes « top-down » rigides là où il faudrait savoir concilier la mise en place de cadres qui permettent l'action et la guident avec la souplesse qui permet de laisser la responsabilité nécessaire aux acteurs, de bénéficier de leurs initiatives et de leur engagement. De ce point de vue, vu de l'extérieur, notre pays paraît particulièrement rigide et peu confiant dans ce que pourrait apporter ce que l'on appelle traditionnellement la base, peu enclin à mettre en place et soutenir des synergies productives. La recherche en didactique elle-même n'échappe pas toujours à ces pesanteurs culturelles dans les rapports qu'elle développe avec les enseignants et avec les institutions alors qu'elle devrait, là encore, jouer un rôle moteur.

Ce ne sont que quelques défis parmi tous ceux que nous avons à relever en tant que communauté. Nous avons à les relever avec la conscience de ce que nous pouvons apporter mais aussi avec celle de nos limites, certaines consenties parce qu'elles constituent l'identité de notre champ, ce qui fait sa consistance et sa force, d'autres liées à l'état de ce champ même et que nous ne saurions confondre avec les premières sans risque grave. Avec, aussi, pour les didacticiens français, la nécessité de consolider les relations d'ouverture et d'apprendre à mieux voir dans les travaux menés à l'étranger ce qu'ils peuvent nous apporter, même lorsqu'ils n'adoptent pas les mêmes approches, les mêmes cadres théoriques. Sur des sujets cruciaux aujourd'hui presque partout dans le monde comme par exemple l'enseignement des mathématiques dans des contextes multi-culturels et multi-linguistiques (Barwell, Setati, Barton, 2007), ce qui sera le thème de la prochaine étude que lancera ICMI, nous avons beaucoup à apprendre de chercheurs qui ont travaillé sur ces problèmes depuis une vingtaine d'années, en Amérique, en Asie ou en Afrique. Depuis que je suis entrée dans le champ didactique, ces valeurs d'ouverture à d'autres cultures, à d'autres communautés sont pour moi essentielles. Elles m'ont personnellement apporté et m'apportent aujourd'hui plus que je ne saurais l'exprimer. Et je suis profondément convaincue que c'est en les faisant vivre que nous pouvons espérer faire face aux défis de l'enseignement des mathématiques aujourd'hui.

¹⁰ Cf. par exemple le projet européen inter2geo : <http://inter2geo.eu>

Références

- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Fou Lai, L., Novotna, J. (2006). Reflections on an Emerging-Field : Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics*, 60/3, 359-381.
- Artigue M. (1981). *DEUG SSM Première année. Section E – Un an de fonctionnement*. Brochure n°29. IREM Paris 7.
- Artigue M., Robinet J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3/1, 5-64.
- Artigue M. (1986). *Une section de DEUG SSM première année en 1984-85*. Brochure n°63. IREM Paris 7.
- Artigue M. et al. (1988a). Le thème « différentielles » : un exemple de coopération math-physique dans la recherche. In G. Vergnaud, G. Brousseau (eds), *Actes du Colloque du GRECO Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques du CNRS*. Sèvres, mai 1987. pp. 5-35. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Artigue M. et al. (1988b). *Différentielles et procédures différentielles au niveau du premier cycle universitaire*. Brochure n°75. IREM Paris 7.
- Artigue M., Menigaux J., Viennot L. (1988c). *Questionnaires de travail sur les différentielles*. Brochure n°76. IREM Paris 7.
- Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, 7, 245-274.
- Artigue M., De Shalit E., Ralston A. (2006). Controversial Issues in K-12 Mathematics Education. In, M. Sanz-Solé & al. (Eds), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. III, pp. 1645-1662. European Mathematical Society.
- Artigue M., Groupe TICE IREM Paris 7 (à paraître). L'utilisation de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques au lycée : du suivi d'une expérimentation régionale à un objet de recherche. In N. Bednarz & al. (Eds.), *Actes du Colloque EMF 2006*, Université de Sherbrooke.

Artigue, M. (2008). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In, D. Pitta-Oantazi & G. Philippou (eds), *Proceedings of CERME 5*, pp. 68-82. Cyprus University Editions.

Assude, T., Gelis, J.M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational studies in Mathematics*, 50/3, 259-287.

Ball, D. (1996). Connecting to mathematics as a part of teaching to learn. In, D. Schifter (Ed.) *What's happening in math class?: Reconstructing professional identities*. Vol.2, pp. 36-45. New York: Teachers College Press.

Ball, D., Even, R. (Eds) (à paraître). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. ICMI Study 15. Springer.

Barwell, R., Setati, M., Barton, B. (Eds) (2007). Multilingual Issues in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*. 64/2.

Bednarz, N., Garnier, C. (1989). *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. Actes du Colloque du CIRADE; Ottawa : Editions Arcine.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*; Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Blum, W. & al. (2007). The professional knowledge of German mathematics teachers : Investigations in the context of the COACTIV project. *Communication à la Conférence "Professional Development of Mathematics Teachers – Research and Practice from an International Perspective*. Oberwolfach, novembre 2007. voir aussi : <http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/>

Boaler, J. (2002). *Experiencing School Mathematics : Traditional and Reform Approaches to Teaching & Learning*. Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, New Jersey.

Boaler, J. (in press). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixedability approach. *British Educational Research Journal* (accessible sur le site personnel de l'auteur).

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117), Louvain-la-Neuve.

- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4/2, 77-111.
- Brousseau, G., Brousseau N. (1985). *La construction des nombres rationnels et décimaux*. IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1986, 7/2, 33-115.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Brousseau, G., Brousseau, N., Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 363-444.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12-1, 77-111.
- Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-265.
- Cohen, E., Lotan, R. (Eds.) (1997). *Working for Equity in Heterogeneous Classrooms: Sociological Theory in Action*. New York Teacher's College Press.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-166.
- Cornu B., Ralston A. (eds) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Science and Technology Education. Document Series 44. Paris: UNESCO.
- Douady R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'Etat. Université Paris 7.
- Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.
- Editorial Board of Educational Studies in Mathematicq (Eds.). (1969). *Actes du Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique*. Lyon, août 1969. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la Educación General Básica chilena y una propuesta para su enseñanza en aula. *Communication au II^{ème} Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, novembre 2007, Uzès, pp. 443-465.

http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm/.

Grugeon B. (1995). *La transition entre enseignement professionnel et enseignement général : le cas de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Guin, D., Trouche, L. (Eds), (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Haspekian M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs*. Thèse de doctorat. Université Denis Diderot, Paris 7.

Hill, H.C., Sleep, L., Lewis, J.M., Ball, D. (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge Matters. In, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 111-156. NCTM. Charlotte, NC: Information Age Publishing

Laborde C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6/3, 283-317.

Léonard, F., Sackur, C. (1991). Connaissances locales et triple approche, une méthode de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 205-240.

Letho, O. (1998). *Mathematics Without Borders. A History of the International Mathematical Union*. Springer.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du Professeur. In, J.L. Dorier & al. (Eds.), *Actes de la 11^{ème} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 141-156. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Monaghan, J. (2004). Teachers' Activities in Technology-based Mathematics Lessons. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9/3, 327-357.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching elementary Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Margolinas, C., Perrin-Glorian, M.J. (Eds). (1997). Recherches sur la modélisation de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3.

Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée*. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille 1.

Perrin-Glorian, M.J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions de didactique liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM. 6e*. Thèse d'état de l'Université Paris 7.

Perrin-Glorian, M.J. (1994). Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives. In, M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnnot (Eds), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M.J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/3. p. 279-321.

Pluvinae, F. (1977). *La difficulté des exercices scolaires en mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Robert A., Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology*, 2(4), 505-528.

Robert, A., Rogalski, J. (2005) A cross-analysis of the mathematics' teacher activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics*, 59/1-2-3. 259-298.

Saltiel, E. (1978). *Concepts cinématiques et raisonnements naturels : étude de la compréhension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en sciences*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Sfard A. (2005). What Could be More Practical Than Good Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 58/3, 393-413.

Schoenfeld, A. (1998). Towards a theory of teaching in context. *Issues in Education*. Vol. 4. Number 1. 1-94.

Sierpiska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6/1, 5-68.

Stacey K., Chick H., Kendal M. (Eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, The 12th ICMI Study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2004.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions : A synthesis of the research. In, D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 127-146. New York : Macmillan.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2007). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Editions Octarès.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 133-170.

Viennot, L. (1979). *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*. Paris : Hermann.

Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics : a challenge to our beliefs and practices*. Leicester: National Institute of Adult Continuing Education.