

A PROPOS D'EOLIENNES

Quelques modélisations à l'usage du collège et du lycée

Maya Akkari

Fabien Brugier

Thierry Duquesne

Master de didactiques des mathématiques

Module de modélisation – Juin 2008

Université Paris VII

Table des matières

1. Quelques généralités	3
1.1. <i>Sur l'origine du mot :</i>	3
1.2. <i>Sur l'historique</i>	3
1.3. <i>Sur l'avenir de l'éolien :</i>	5
1.4. <i>Sur les modélisations possibles</i>	5
2. Le choix d'une problématique	5
3. Quelques propos liminaires.....	6
3.1. <i>Différents composants d'une éolienne, fonctionnement</i>	6
3.2. <i>Puissance du vent à l'approche d'une éolienne</i>	7
4. Une modélisation des vitesses du vent	8
4.1. <i>La mesure de la vitesse du vent dans la pratique</i>	8
4.2. <i>Le choix d'un modèle : les lois de Weibull</i>	9
4.3. <i>Eclairage sur les lois de distribution de Weibull</i>	10
4.4. <i>Incidences des deux paramètres de la loi de Weibull</i>	11
5. Modélisation de l'énergie disponible.....	13
5.1. <i>Une distribution à prendre en compte en terme d'énergie</i>	13
5.2. <i>Densité de puissance</i>	14
5.3. <i>Puissance moyenne</i>	15
6. Modélisation de la puissance récupérable : La loi de Betz.....	17
6.1. <i>Courbe</i>	20
6.2. <i>Variations de f</i>	21
7. Transposition didactique.....	22
7.1. <i>Généralités</i>	22
7.2. <i>Nous retiendrons ici</i>	22

1 Quelques généralités :

1.1. *sur l'origine du mot :*

Le mot éolienne vient du grec « éole » le dieu du vent. Le terme signifie également « rapide », « vif », « inconstant ».

1.2. *sur l'historique :*

Il y a bien longtemps que les « éoliennes » existent. Dès le **Moyen-Age**, on « en » trouve chez les Perses, et dans la région de la Mésopotamie. C'étaient en fait des roues à aubes que le vent faisait tourner. Elles étaient utilisées pour irriguer les cultures. Elles étaient alors simples et à axe vertical. Elles se sont répandues dans tout le monde arabe, puis ensuite dans l'occident.

En France, au **XIII^{ème} siècle**, on trouve les premiers moulins à vent qui utilisent la transformation de l'énergie éolienne en force de travail. Ils survivront jusqu'au début du **XX^{ème} siècle**.



Moulin à vent à axe vertical –

" Recueil d'ouvrages curieux de mathématique et de mécanique ",

Nicolas Grollier de Servière, 1719



Poul LA COUR
et sa femme

En 1890, le danois **Poul LA COUR** (1846-1908) invente la première éolienne permettant de produire de l'électricité. Météorologue de formation, c'est un des pionniers de l'aérodynamique moderne.

Cette invention marque le début de la production d'éoliennes semblables à celles d'aujourd'hui. Dès 1900 elles permettent de produire de grandes quantités d'électricité.

Les éoliennes modernes (actuelles)

On les trouve regroupées dans des parcs dont le nombre est plus restreint sur terre qu'en mer. Les sites sont devenus très nombreux dans la plupart des pays. Néanmoins la tendance s'oriente actuellement vers un développement de parcs offshore

Quelques éoliennes actuelles :

 <p>Eoliennes individuelles</p>	 <p>Eoliennes plutôt individuelles</p>
 <p>Eoliennes industrielles au Danemark</p>	 <p>Grand parc d'éoliennes industrielles et terrestres au Danemark</p>
 <p>Parc d'éoliennes en pleine mer en Manche (France)</p>	 <p>Le plus grand parc d'éoliennes industrielles en mer au Danemark</p>

Remarques : les éoliennes offshore sont beaucoup plus coûteuses à l'installation (problème de corrosion, de résistance des mâts aux courants et aux vagues, installation de câbles sous-marins, etc.) mais elles permettent des productions actuelles de 5 MégaWatts alors que dans les sites terrestres les plus ventés, la production maximale n'est que de 3 MW. De plus, lorsque la mer n'est pas très profonde il est assez simple de les installer

1.3. sur l'avenir de l'éolien :

Depuis quelques années, selon certaines sources, le gouvernement Danois aurait arrêté sa production d'éoliennes. En effet de nouvelles études¹ mettent en relief le « coût énergétique » (énergie grise), notamment en termes d'émission de CO₂, de la fabrication des éoliennes ; le béton et l'acier qui sont respectivement utilisés lors de la fabrication de la « fondation », et des « tours » et des « pales » produiraient une quantité de CO₂ supérieure à celle économisée lors de l'usage des éoliennes en lieu et place du pétrole.

1.4. Sur les modélisations possibles :

Modélisation :

- du vent,
- de la production énergétique,
- du coût financier,
- du coût énergétique : l'énergie grise,
- de l'impact environnemental.

2 Le choix d'une problématique :

Nous avons été tentés dans un premier temps de nous pencher sur la modélisation du coût énergétique. Avec la crise pétrolière (énergie fossile) que nous traversons le sujet est d'actualité. Mais en faisant nos recherches nous nous sommes rendus compte que très peu d'informations à ce sujet étaient accessibles; il aurait fallu « fouiller » les comptes des entreprises fabriquant des éoliennes afin d'évaluer la quantité de béton et d'acier nécessaire à leur fabrication, puis calculer la quantité d'émission de CO₂ lors de cette fabrication ... mais nous n'en n'avions pas le temps !

Nous avons fait le choix de nous pencher sur deux modélisations de la production énergétique:

- Modélisation du vent : *La distribution de Weibull*
- Modélisation de la puissance récupérable : *La Loi de Betz* exploitable au lycée.

¹ Sciences et vie, Mars 2008

3. Quelques propos liminaires :

3.1. *Différents composants d'une éolienne, fonctionnement:*

Une éolienne doit être implantée dans un site où le vent est régulier et suffisamment puissant en absence d'obstacles, comme une forêt, des bâtiments, des pylônes...



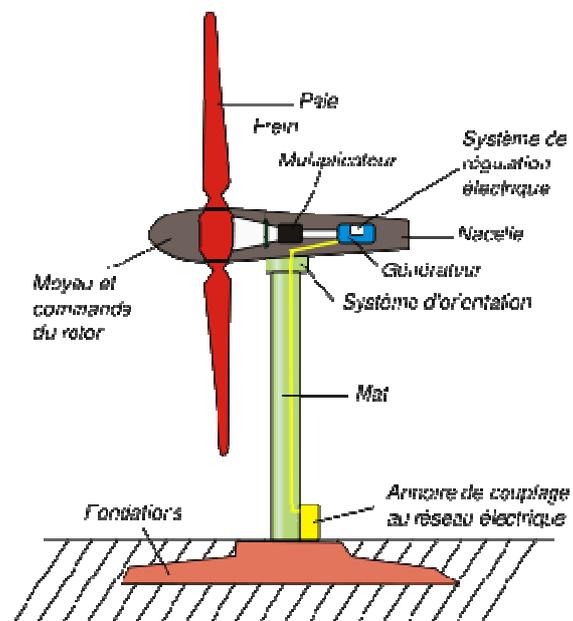
Elle est constituée d'un rotor avec pâles (de diamètre variable, monté sur un mât), d'un générateur électrique et d'une cabine de transcription.

Les pâles sont toujours orientées face au vent grâce à un ensemble de moteurs reliés à une girouette. Elles peuvent également, sur certains équipements, tourner sur elles-mêmes en fonction de la vitesse du vent, évaluée grâce à un anémomètre, et ainsi avoir une vitesse de rotation régulée.

Les pâles tournent grâce à la force du vent et entraînent le générateur électrique.

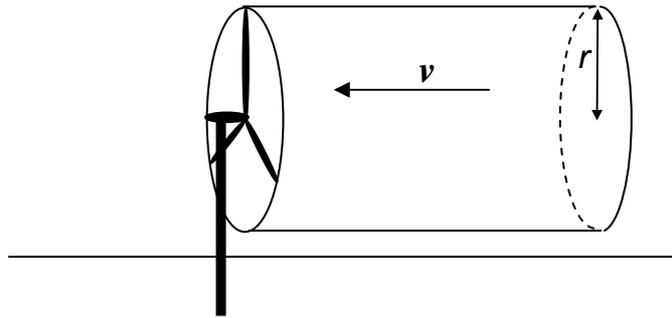
L'électricité produite peut être utilisée directement ou stockée dans des batteries de petite puissance. La puissance éolienne récupérable augmente avec le diamètre des pales et la vitesse du vent.

Schéma d'une éolienne



3.2. Puissance du vent à l'approche d'une éolienne :

Le calcul de la puissance du vent peut être fait en considérant que l'air qui agit sur les pales d'une éolienne est celui situé dans un tube cylindre de section la surface balayée par le rotor (πr^2)



La pression d'un fluide est la force qu'il exerce par unité de surface, perpendiculairement à cette surface. Dans le cas d'un fluide en mouvement on parle de pression dynamique (notée q).

On a : $q = \frac{1}{2} \rho v^2$ où ρ est la densité de l'air exprimée en kg/m^3

v est la composante de la vitesse du vent orthogonale à la surface balayée par le rotor en m/s

Soit F la force de pression associée.

On a : $F = q.S = \frac{1}{2} \rho S v^2$ où S est la surface balayée par le rotor (πr^2)

Soit P la puissance du vent. Par définition : $P = F . v$

Finalement on obtient:
$$P = \frac{1}{2} \rho S v^3 = \frac{1}{2} \rho \pi r^2 v^3$$

Trois facteurs déterminent la puissance du vent à l'approche d'une éolienne :

- la densité de l'air sec ρ mesurée en kg/m^3 (la densité de l'air sec à pression atmosphérique moyenne, au niveau de la mer, à 15°C vaut $1,225 \text{ kg/m}^3$)
- la surface balayée par le rotor : disque de rayon r
- la vitesse du vent v mesurée en m/s

Ainsi lorsque l'air est plus dense (ρ augmente) ou que la vitesse ou que la surface balayée par le vent augmentent (respectivement v et/ou r augmentent), on a une plus grande puissance.

4. Une modélisation des vitesses du vent

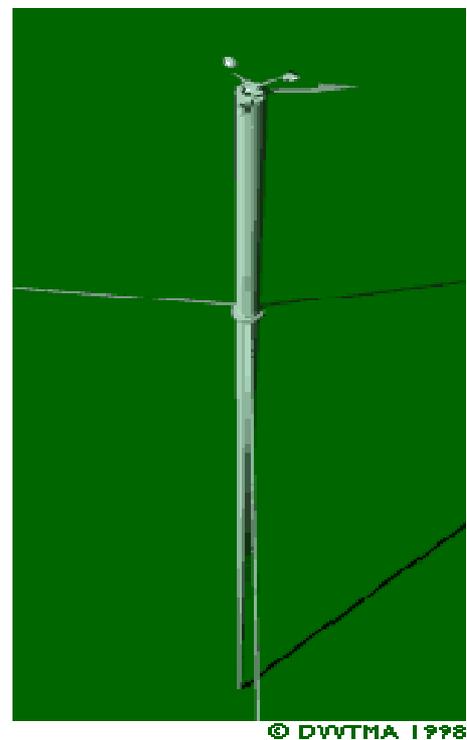
Il est très important pour l'industrie éolienne d'être en mesure de décrire les variations de la vitesse du vent. En effet, l'énergie électrique produite provient de l'énergie contenue dans le vent, elle-même proportionnelle au cube de la vitesse du vent (V^3). Les fabricants utilisent ces informations pour optimiser la conception des éoliennes dans le but de minimiser les coûts liés à la production d'électricité. Les investisseurs, eux, ont besoin de ces informations afin de pouvoir estimer le revenu lié à la production d'électricité.

4.1. La mesure de la vitesse du vent dans la pratique

La mesure de la ressource éolienne sur un site potentiel se réalise le plus souvent par l'installation d'un anémomètre en haut d'un mât dont la hauteur correspond à la hauteur du moyeu de l'éolienne prévue. De cette façon, on évite l'ingérence liée à l'estimation de la vitesse du vent à une hauteur donnée à partir de mesures faites à une hauteur différente.

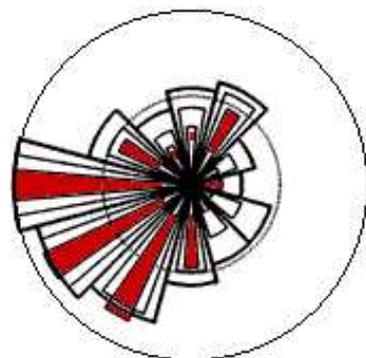
L'installation de l'anémomètre en haut du mât réduit au minimum le risque de perturbations de l'écoulement de l'air causées par le mât lui-même.

Une puce située dans un petit ordinateur enregistre les données sur les vitesses et les directions du vent. En général, la vitesse du vent mesurée est la moyenne des vitesses enregistrées pendant un intervalle de 10 minutes. Le choix de cet intervalle de temps a une incidence importante lors du calcul de la puissance moyenne du vent (ce point sera repris dans le paragraphe 5.3)



© DWYMA 1998

Les vents les plus forts soufflent en général d'une direction particulière. Afin de se faire une idée plus précise de la distribution des vitesses et des directions du vent, on peut construire une rose des vents à partir des observations météorologiques faites dans une région donnée. La rose des vents va donc permettre de définir la direction du vent pour laquelle l'étude de la distribution des vitesses du vent paraît la plus intéressante.



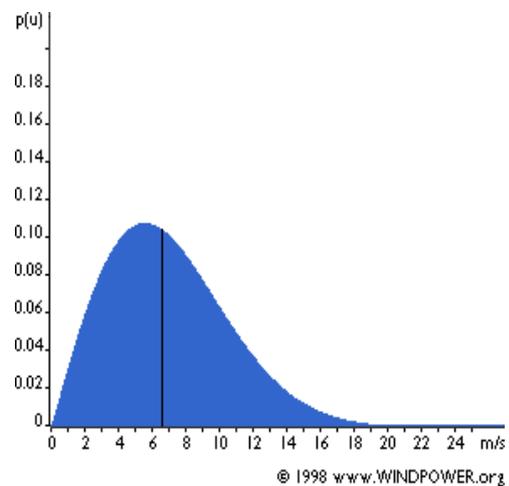
4.2. Le choix d'un modèle : les lois de Weibull

A l'aide des vitesses du vent mesurées sur un site durant une année, il est possible de construire un graphe de distribution de probabilité (distribution fréquentielle). Ce graphe est obtenu de manière discrète de la façon suivante :

- En abscisse : la vitesse du vent en m/s
- En ordonnée : la probabilité (ou fréquence) de la vitesse considérée sur une année, calculée ainsi :

$$p(v_i) = \frac{\text{nombre d'intervalles de temps où } v=v_i}{\text{nombre total d'intervalles de temps}}$$

Le graphe de distribution des vitesses du vent ressemble généralement à celui présenté ci-contre. C'est une distribution à valeurs positives qui a presque toujours la même allure. Elle part d'une fréquence d'apparition nulle, croît jusqu'à un maximum et décroît plus lentement. Un tel graphe traduit le fait que dans la plupart des régions du monde, les vents extrêmes sont très rares alors que des vents modérés sont assez fréquents.



On décrit normalement les variations du vent sur un site donné en utilisant une distribution de Weibull à deux paramètres. En effet, l'expression *loi de Weibull* recouvre toute une famille de lois ayant les caractéristiques recherchées :

- Distribution à valeurs positives
- Possibilité d'avoir $P(0) = 0$
- Croissance « rapide » jusqu'à un maximum et décroissance « plus lente ».

Ces lois permettent des approximations particulièrement utiles alors qu'il serait très difficile et sans grand intérêt de justifier une forme particulière de loi. Grâce à leur flexibilité, elles permettent de représenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité. Ainsi il est possible de trouver dans la famille des lois de Weibull une loi qui ne s'éloigne pas trop des données disponibles en calculant les deux paramètres qui la caractérise à partir de la moyenne et de la variance observées.

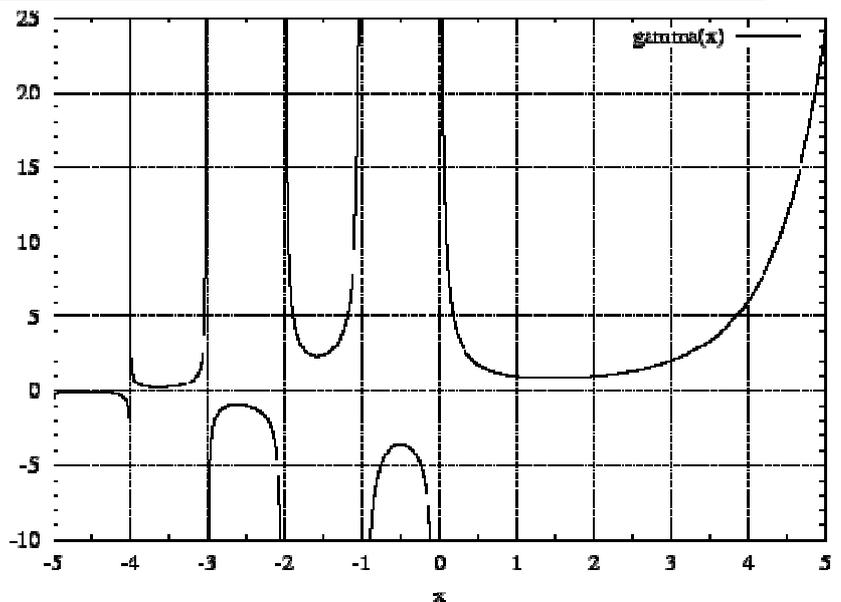
4.3. Les lois de distribution de Weibull

La loi de Weibull, nommée d'après Waloddi Weibull, est une loi de probabilité continue dont les fonctions caractéristiques (dans sa forme à deux paramètres) sont :

Densité de probabilité :	$f(x; k, \lambda) = (k/\lambda)(x/\lambda)^{(k-1)} e^{-(x/\lambda)^k}$ <p>Avec : $x \geq 0$</p> <p>$k > 0$ est le paramètre de forme</p> <p>$\lambda > 0$ est le paramètre d'échelle</p>
Fonction de répartition :	$1 - e^{-(x/\lambda)^k}$
Espérance (moyenne) :	$\mu = \lambda \Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right)$
Médiane (centre) :	$\lambda \ln(2)^{1/k}$
Mode (valeur maximale) :	$\lambda \left(\frac{k-1}{k} \right)^{1/k}$ si $k > 1$
Variance :	$\sigma^2 = \lambda^2 \Gamma \left(1 + \frac{2}{k} \right) - \mu^2$

Avec

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dt t^{x-1} e^{-t}$$



Notons que ces lois comprennent la loi exponentielle ($k = 1$) et la loi de Rayleigh ($k = 2$) importantes en matière de processus stochastique.

4.4. Incidences des deux paramètres de la loi de Weibull

Ce paragraphe a pour objectif de ce faire une idée des différentes formes que peut prendre une distribution de Weibull.

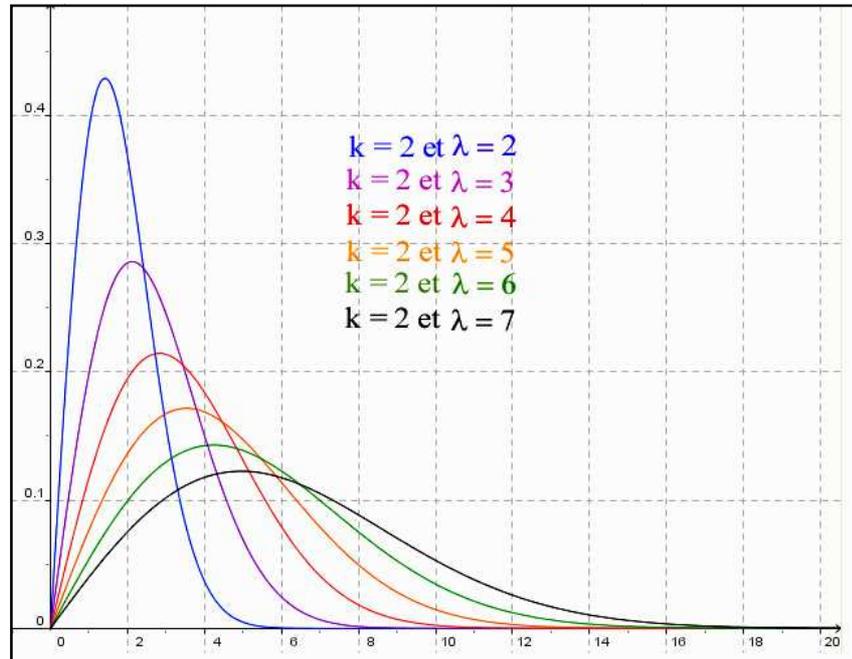
Incidence du facteur d'échelle λ :

Pour une valeur de k donnée le facteur d'échelle λ influe sur la « position » de la distribution.

Par exemple pour $k = 2$

$$\text{médiane} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda$$

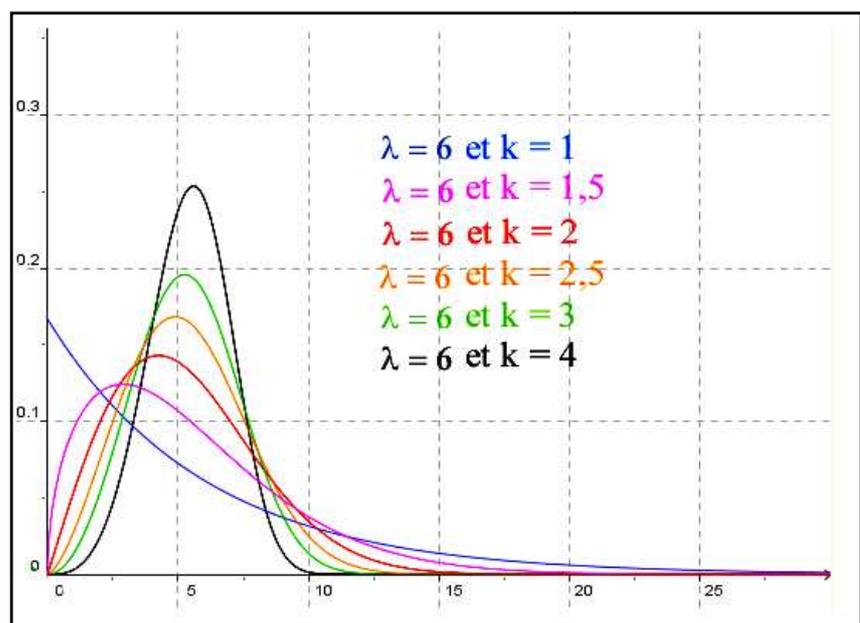
$$\text{moyenne} = \lambda \sqrt{\ln 2}$$



Incidence du facteur de forme k :

Le facteur de forme indique combien la distribution est « pointue ».

De plus, plus la valeur de k est petite et plus la distribution est « dissymétrique »

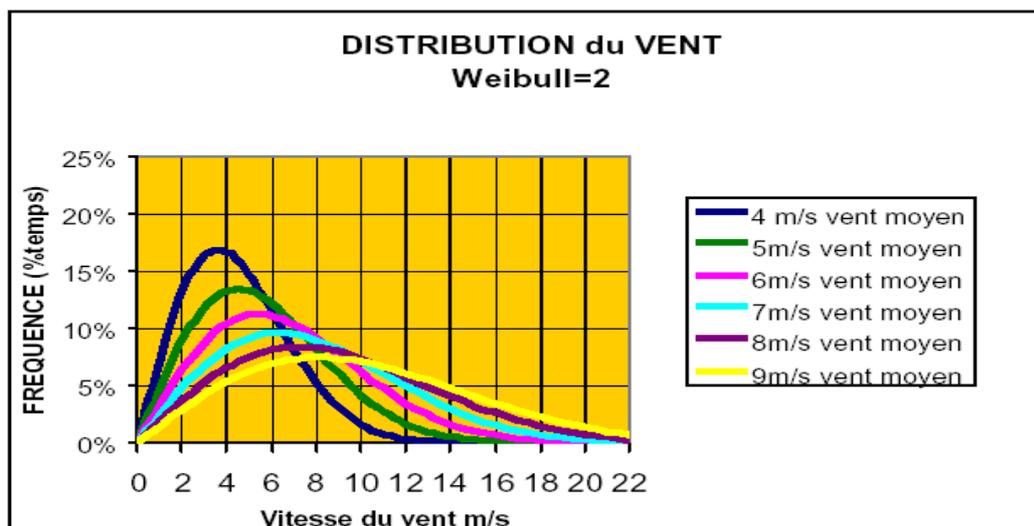
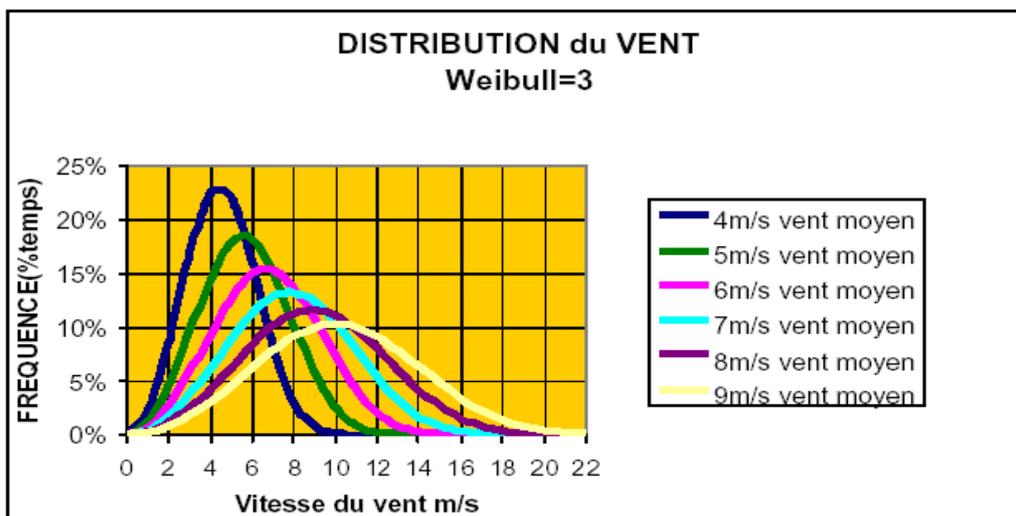


La distribution statistique des vitesses du vent varie d'un endroit à l'autre vu qu'elle dépend des conditions climatiques locales, du paysage et de sa surface. La distribution de Weibull tend donc à varier, tant en forme qu'en valeur moyenne.

En pratique, la vitesse moyenne du vent, ou le paramètre d'échelle λ , indique combien il vente en moyenne sur un site donné.

Le paramètre de forme k montre combien la distribution est pointue. Si les vitesses du vent ont tendance à se situer toutes autour de la même valeur, la distribution aura une valeur de k élevée et une forme très pointue. En général :

- $k = 2$ pour un site dans les terres,
- $k=3$ pour le bord de mer,
- $k=4$ pour les îles.



Remarque : Dans le cas où le paramètre de forme est égal à exactement 2, on parle d'une distribution de Rayleigh. Les fabricants fournissent souvent les calculs de performance en utilisant la distribution de Rayleigh.

5. Modélisation de l'énergie disponible

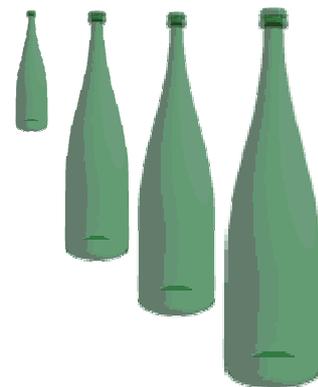
5.1. Une distribution à prendre en compte en terme d'énergie

Quel est le contenu énergétique moyen du vent sur le site où est située une éolienne ?
Peut-on se passer de la distribution de Weibull ? Si nous connaissons la vitesse moyenne du vent, connaissons-nous également sa puissance moyenne ? Ne pourrions-nous donc pas utiliser la puissance (ou l'énergie) à la vitesse moyenne du vent pour calculer la puissance (ou l'énergie) qui arrivera à la surface balayée par le rotor ?

En d'autres termes, ne pourrions-nous pas simplement dire qu'avec une vitesse moyenne de vent égale à 7 m/s, nous obtiendrons une puissance d'entrée proportionnelle au cube de cette vitesse (cf . paragraphe 3.2) ?

En fait, avec un tel calcul, nous ferions une sous-estimation de presque 100 % des ressources éoliennes. Si nous calculions ainsi, nous serions alors victimes de ce que nous pouvons appeler l'illusion de la bouteille moyenne.

Si on observe la plus grande et la plus petite des bouteilles de l'image, on remarque que les deux ont exactement la même forme. L'une mesure 0,24 m de haut, l'autre 0,76 m. Quelle est alors la hauteur de la bouteille moyenne ?



La réponse n'est pas 0,5 m, car ce qui nous intéresse ici est évidemment le volume des bouteilles. Celui-ci varie avec le cube (puissance 3) de la taille de la bouteille. Il s'en suit que bien que la plus grande bouteille ne soit que 3,17 fois plus grande que la plus petite, le volume de celle-ci est en fait $3,17^3 = 32$ fois plus grand que celui de la plus petite.

Par conséquent, le volume moyen est 16,5 fois celui de la petite bouteille. Cela signifie qu'une bouteille d'un volume moyen doit avoir une hauteur 2,55 fois plus grande que celle de la petite bouteille, donc de 0,61 m (du fait que $2,55^3 = 16,5$).

Ce que nous cherchons à démontrer par cet exemple est qu'il n'est pas souhaitable de se limiter à calculer la puissance du vent à partir de la vitesse moyenne du vent sur le site en question. Il faut en fait prendre en compte la probabilité de l'occurrence de chaque vitesse de vent et la puissance correspondante.

C'est à cause de leur contenu énergétique que les vitesses du vent nous intéressent, comme nous intéressait le volume des bouteilles (et non leur hauteur). La puissance du vent varie avec le cube de la vitesse du vent de la même façon que le volume de la bouteille varie avec le cube de sa taille. Dans ce cas, bien qu'ils ne soient que peu fréquents, les vents forts pèsent lourd à cause de leur contenu énergétique important.

5.2. Densité de puissance

Nous pouvons maintenant combiner tout ce que nous avons vu précédemment en multipliant la puissance de chaque vitesse de vent par la probabilité de l'occurrence de cette vitesse selon le graphe de Weibull, ce qui nous permet de calculer la distribution de l'énergie éolienne à des vitesses de vent différentes, distribution appelée aussi la densité de puissance.

La densité de probabilité de la distribution de Weibull est définie par :

$$f(v;k,\lambda) = (k/\lambda) \cdot (v/\lambda)^{(k-1)} \cdot \exp(-(v/\lambda)^k)$$

Concernant la densité de puissance, nous avons vu précédemment que la puissance du vent s'écrit $P = \frac{1}{2} \rho \pi r^2 v^3$ donc pour une valeur de ρ et de r donnés on peut écrire :

$$P(v) = \alpha v^3$$

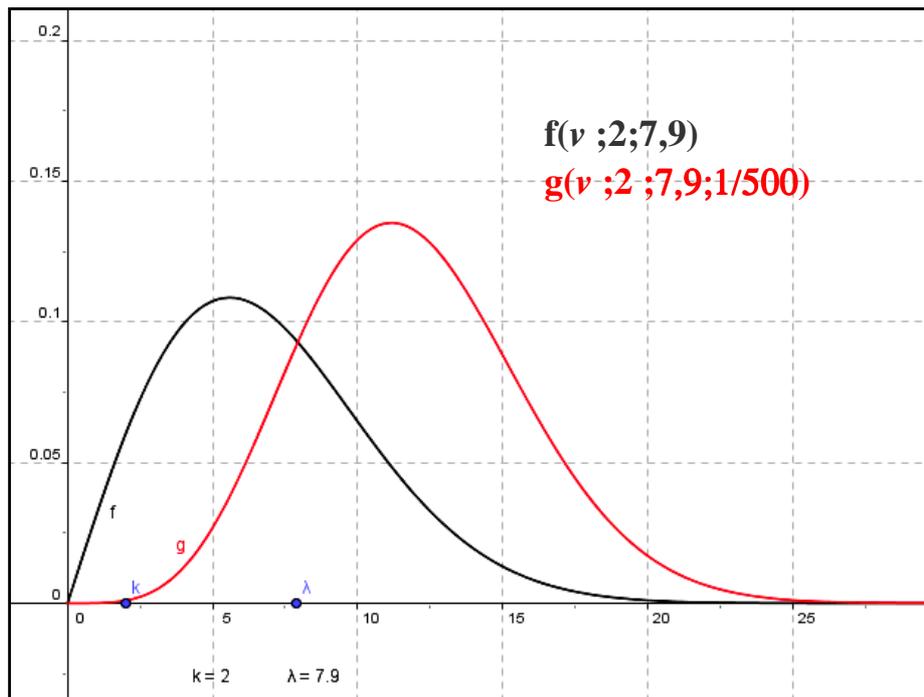
La fonction de distribution de l'énergie est donc définie par :

$$g(v ; k, \lambda, \alpha) = \alpha v^3 \times f(v; k, \lambda)$$

Intéressons nous, par exemple, à la représentation de la densité de puissance correspondant à une distribution de Weibull de paramètres $k = 2$ et $\lambda = 7,9$ (Vent moyen = 7 m/s).

Nous nous proposons de présenter sur le même graphique la fonction de distribution de Weibull et la fonction de distribution de l'énergie. Nous prendrons arbitrairement $\alpha = 1/500$ par souci de visualisation simultanée.

Ainsi on a :



On notera que la distribution de Weibull change de forme par le fait que ce sont les vents forts qui contiennent le plus d'énergie.

5.3. Puissance moyenne théorique

Nous allons maintenant faire deux calculs comparatifs afin d'illustrer la nécessité de prendre en compte la distribution de Weibull dans le calcul de la puissance moyenne.

$$\text{Vent moyen} = \bar{V} = \int_0^{+\infty} v \cdot f(v; k, \lambda) \, dv$$

$$\text{Puissance du vent moyen} = P(\bar{V}) = \frac{1}{2} \rho S (\bar{V})^3$$

$$\text{Puissance moyenne du vent} = \overline{P(V)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \rho S v^3 \cdot f(v; k, \lambda) \, dv$$

$$\text{Vent moyen pondéré} = \left(\frac{P(V)}{\frac{1}{2} \rho S} \right)^{1/3}$$

$$\overline{P(V)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \rho S v^3 \left(\frac{k}{\lambda}\right) \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{\lambda}\right)^k} dv$$

$$\overline{P(V)} = \frac{1}{2} \rho S \frac{k}{\lambda^k} \int_0^{+\infty} v^{k+2} e^{-\left(\frac{v}{\lambda}\right)^k} dv$$

$$P(\overline{V}) = \frac{1}{2} \rho S (\overline{V})^3$$

$$P(\overline{V}) = \frac{1}{2} \rho S \left[\int_0^{+\infty} v \left(\frac{k}{\lambda}\right) \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{\lambda}\right)^k} dv \right]^3$$

posons $t = \left(\frac{v}{\lambda}\right)^k$ donc $v = \lambda t^{1/k}$ et $dv = \frac{\lambda}{k} t^{1/k - 1} dt$

On obtient après changement de variable :

$$\overline{P(V)} = \frac{1}{2} \rho S \lambda^3 \int_0^{+\infty} t^{3/k} e^{-t} dt$$

$$P(\overline{V}) = \frac{1}{2} \rho S \left[\lambda \int_0^{+\infty} t^{1/k} e^{-t} dt \right]^3$$

Soit $\overline{P(V)} = \frac{1}{2} \rho S \lambda^3 \Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right)$

Soit $P(\overline{V}) = \frac{1}{2} \rho S \lambda^3 \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^3$

Finalement $\frac{\overline{P(V)}}{P(\overline{V})} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^3}$

Le rapport entre la puissance moyenne du vent et la puissance du vent moyen ($\overline{P(V)} / P(\overline{V})$) dépend donc exclusivement du paramètre de forme k .

On obtient les résultats suivants :

k	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
λ	8	8	8	8	8	8	8
\overline{V}	8	7,22	7,09	7,10	7,14	7,20	7,25
$\overline{P(V)} / P(\overline{V})$	6,00	2,72	1,91	1,58	1,40	1,30	1,23
$\overline{V}_{\text{pondéré (m/s)}}$	14,36	9,95	8,69	8,16	7,90	7,76	7,68

Ainsi plus le paramètre de forme est faible, plus la distribution est « dissymétrique » et donc plus le rapport est grand. Notons que pour $k = 2$ le rapport vaut presque 2, ce qui justifie la nécessité de prendre en compte la forme de la distribution dans le calcul de la puissance moyenne.

Remarque : Rappelons que lors de l'enregistrement des mesures du vent par l'anémomètre, les vitesses de vent sont moyennées sur 10 minutes. Ainsi pour chaque vitesse mesurée, la puissance correspondante est sans doute minimisée en raison de la non prise en compte de la distribution du vent sur chaque intervalle de 10 minutes.

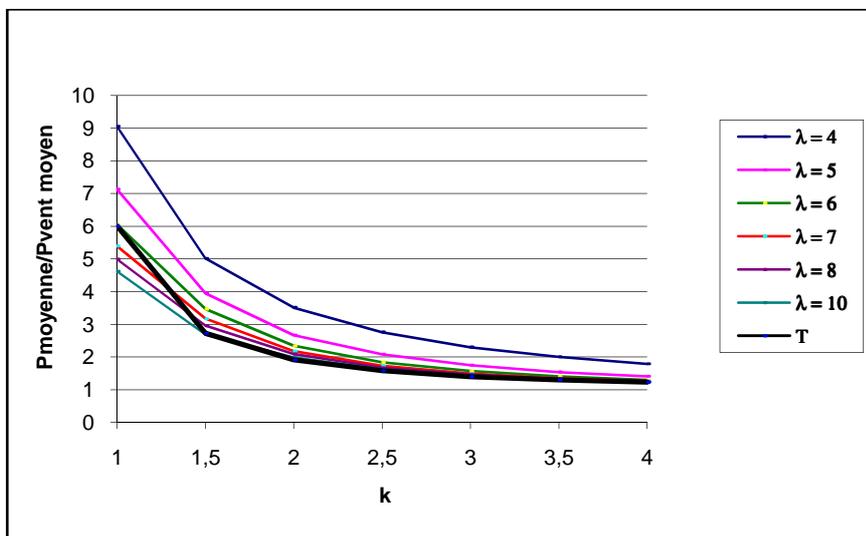
Ainsi nous allons subdiviser l'axe des abscisses avec un pas ($v_i - v_{i-1}$) de 0,01 et nous limiter à des valeurs de v telles que : $2,8 \text{ m/s} < v < 25 \text{ m/s}$.

Ainsi si on calcule de cette façon, on a (avec $\alpha = \frac{1}{2}\rho S$):

$$\overline{V_e} \approx 0,01 \sum_{i=280}^{2500} 0,01 i \times f(0,01 i; k, \lambda) \text{ et } \overline{P(V_e)} \approx 0,01 \alpha \sum_{i=280}^{2500} (0,01 i)^3 \times f(0,01 i; k, \lambda)$$

Nous avons effectué les calculs à l'aide d'une feuille de calcul Excel (cf. feuille de calcul Excel « Caractéristiques du vent »). On obtient les résultats suivants :

$\overline{P(V_e)} / \overline{P(V_e)}$		k						
		1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
λ	4	9,05	5,01	3,51	2,76	2,3	2	1,79
	5	7,13	3,95	2,67	2,08	1,75	1,54	1,41
	6	6,05	3,47	2,34	1,84	1,57	1,41	1,3
	7	5,39	3,17	2,18	1,73	1,49	1,35	1,27
	8	4,99	2,96	2,09	1,67	1,46	1,33	1,25
	9	4,75	2,8	2,03	1,64	1,44	1,32	1,24
	10	4,62	2,69	1,98	1,62	1,43	1,31	1,24



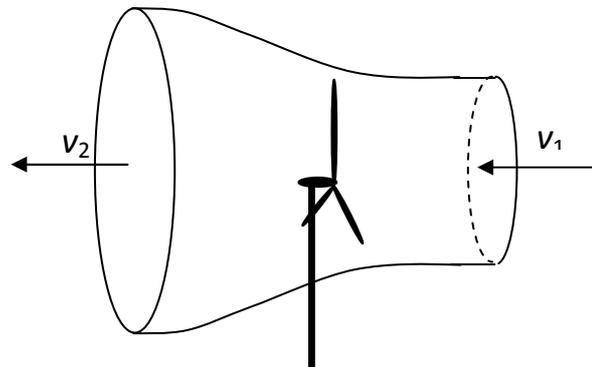
T correspond à la courbe théorique $\overline{P(V)} / \overline{P(V)}$ en fonction de k

On constate que, sur site, le rapport $\overline{P(V_e)} / \overline{P(V_e)}$ dépend de k mais également de λ .

Toutefois, pour $\lambda = 8$ et $k = 2$ on a : $\overline{P(V)} = 681 \alpha$ et $\overline{P(V_e)} = 679 \alpha$ soit un écart entre la puissance moyenne théorique et la puissance moyenne sur site d'environ 0,3%. Ainsi, si on s'intéresse exclusivement au calcul de la puissance moyenne (ce qui est la véritable problématique) le modèle théorique donne beaucoup plus simplement des résultats très satisfaisants.

6. Modélisation de la puissance récupérable : La loi de Betz

Supposons que le vent arrive de notre droite avec une vitesse v_1 , l'éolienne et en l'occurrence les pales vont absorber une certaine énergie, et le vent, après avoir traversé les pales, repartira avec une vitesse v_2 , et on aura : $v_1 > v_2$.



On suppose maintenant que la vitesse moyenne v du vent qui traverse le rotor est égale à la moyenne arithmétique de la vitesse moyenne du vent non perturbé à l'avant de l'éolienne v_1 et de sa vitesse après le passage à travers le rotor v_2 , on aura alors :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Si on note P , la puissance du vent récupérable à la traversée du rotor,

Sachant que la différence de pression dynamique est : $\frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$

et que la vitesse du vent qui traverse le rotor (de section S) est v , on en déduit :

$$P = \frac{1}{2} \rho \times S \times v \times (v_1^2 - v_2^2), \quad \text{or} \quad v = \frac{v_1 + v_2}{2},$$

Ainsi
$$P = \frac{1}{4} \rho \times S \times (v_1 + v_2) \times (v_1^2 - v_2^2)$$

$$P = \frac{1}{4} \rho \times S \times v_1 \times \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right) \times v_1^2 \times \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{4} \rho \times S \times v_1^3 \times \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right) \times \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$$

Or si on considère la puissance P_1 d'un flux d'air non perturbé traversant une surface similaire S sans la présence du rotor qui ralentit le vent, on a :

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho \times S \times v_1^3$$

Ainsi
$$P = \frac{1}{2} \times P_1 \times \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right) \times \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$$

Finalemment :
$$\frac{P}{P_1} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right) \times \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2}\right)$$

On note $x = \frac{v_2}{v_1}$. On a donc:
$$P = \frac{1}{2} P_1 \times (1+x) \times (1-x^2)$$

et
$$\frac{P}{P_1} = \frac{1}{2} (1+x)(1-x^2)$$

Ainsi, si on considère la fonction $x \xrightarrow{f} \frac{1}{2} (1+x)(1-x^2)$,

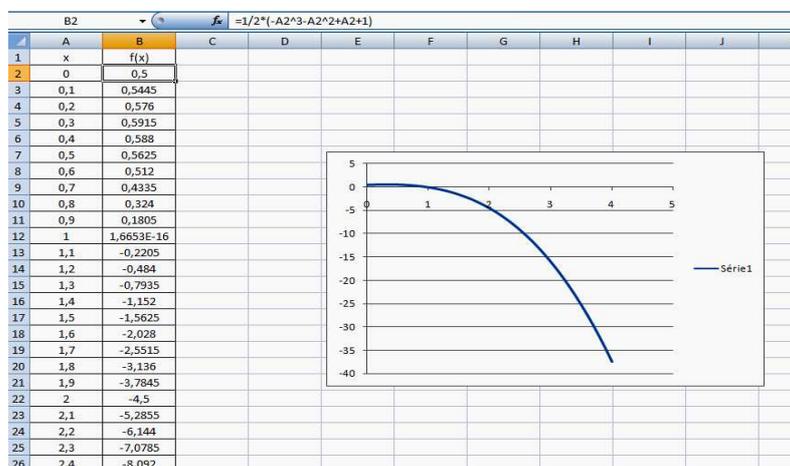
Deux méthodes peuvent être envisagée (suivant le niveau de la classe) pour étudier le maximum de f :

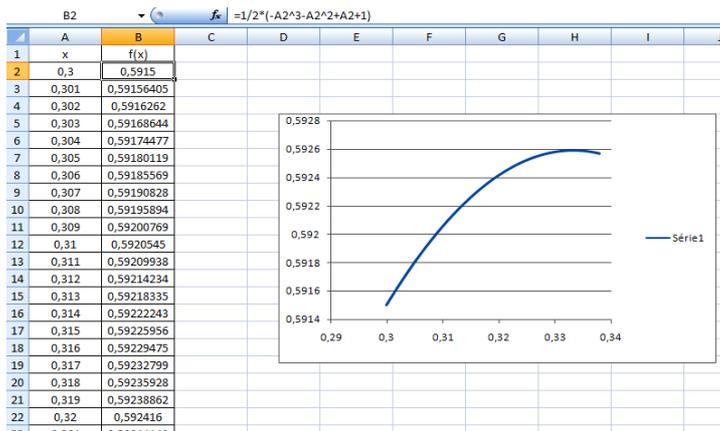
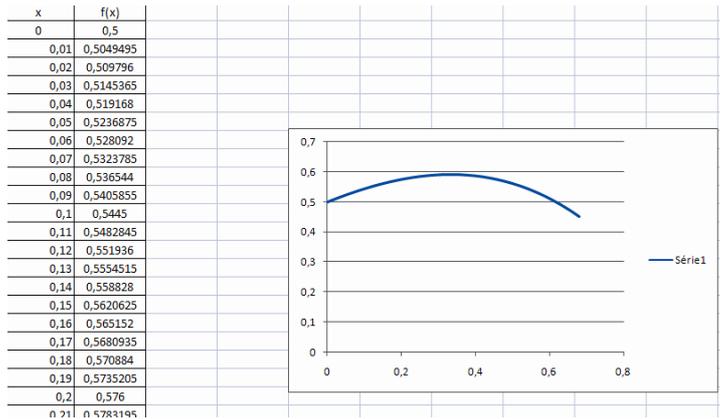
1. Tracer la courbe représentative de f : à l'usage d'une classe de 3^{ème} ou de seconde
2. Etudier les variations de f (tableau de variations) : à l'usage d'une classe de 1^{ère}.

6.1. Courbe :

$$f(x) = \frac{1}{2} (-x^3 - x^2 + x + 1)$$

Courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2} (-x^3 - x^2 + x + 1)$





On « voit » ainsi que la courbe atteint son maximum pour $x = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{3}$,

Comme $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$, et que $f(x) = \frac{P}{P_1}$, alors $\frac{P}{P_1} = \frac{16}{27}$, et : $P = \frac{16}{27} P_1$.

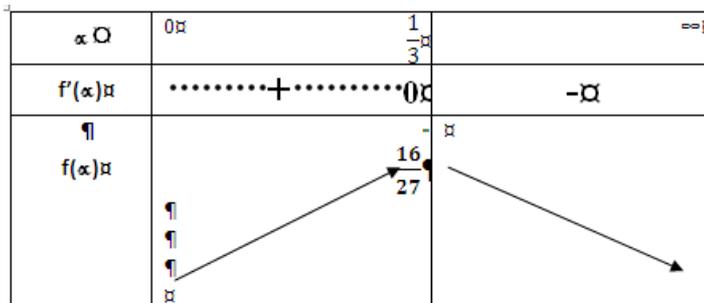
On peut donc dire que la puissance maximale extractible du vent (P) sera d'environ 0,59 ou encore $\frac{16}{27}$ de la puissance totale contenue dans le vent (P_1).

6.2. Variations de f :

On a :

$$f(x) = \frac{1}{2}(-x^3 - x^2 + x + 1)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$$



On trouve là aussi : $P = \frac{16}{27} P_1$.

7. Transposition didactique.

7.1. Généralités

De très nombreux travaux ont déjà été réalisés sur ce sujet

- T.P.E. en lycée
- Sujets d'examens (bacs pro, etc...)
- Sujets de concours (entrée en école d'ingénieur, etc...)

7.2. Nous retiendrons ici

Au collège :

. **Niveau quatrième.** On peut utiliser le tableur (conformément au programme) pour écrire, par exemple la fonction f de la loi de Betz

. **Niveau troisième.** On peut construire la courbe représentative de la fonction f de cette même loi de Betz et comparer son allure à celle des représentations graphiques des fonctions affines. L'utilisation du tableur est préconisée dans les programmes officiels. De plus, dans le cadre du B2i, les élèves pourront « discuter » du contenu des cellules et sur le plan des mathématiques, ils pourront « interpréter » sommairement la courbe tracée par lecture sur le graphique. La démarche permettant d'affiner la précision de l'analyse pourra être l'un des éléments convaincants de l'emploi du tableur (ici, il s'agit d'une feuille de calculs « excel », mais dans le cadre pédagogique en établissement ce pourrait être « OpenOfficeCalc »).

. **Niveaux sixième et cinquième.** La proportionnalité et les pourcentages pourront être travaillés au travers des coûts de production. Une réflexion pourra être menée quant à l'énergie grise. Un travail pluridisciplinaire pourrait aussi être envisagé (avec notamment la technologie).

. **Niveaux quatrième et troisième.** Les élèves pourront être conduits à réfléchir sur la notion de relation de proportionnalité avec notamment la relation

$$E = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Au lycée :

. **Niveau seconde.** On pourrait envisager de faire travailler les élèves sur d'éventuelles constructions de courbes à partir des nuages de points du tableur

. **En première.** Un travail plus approfondi pourrait être mené au travers de l'étude de la même fonction f précitée.

. **Au niveau seconde, étude de la fonction x^3**

. **En statistique :**

Moyenne (espérance mathématiques)

Moyenne(x^3) non égale à (Moyenne(x))³

. **Aires et intégrales :** somme de Riemann
(avec utilisation du tableur)