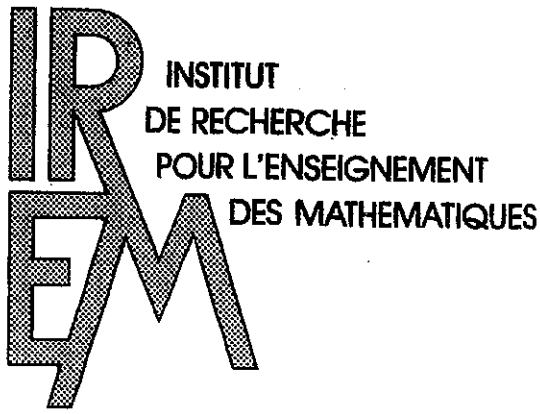


ASSOCIATION
POUR LA
RECHERCHE
EN
DIDACTIQUE
DES
MATHÉMATIQUES



Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2007

Édités par Ghislaine Gueudet et Yves Matheron

CREAD et IUFM de Bretagne,
INRP et UMR-ADEF Marseille

ARDM et IREM de Paris 7

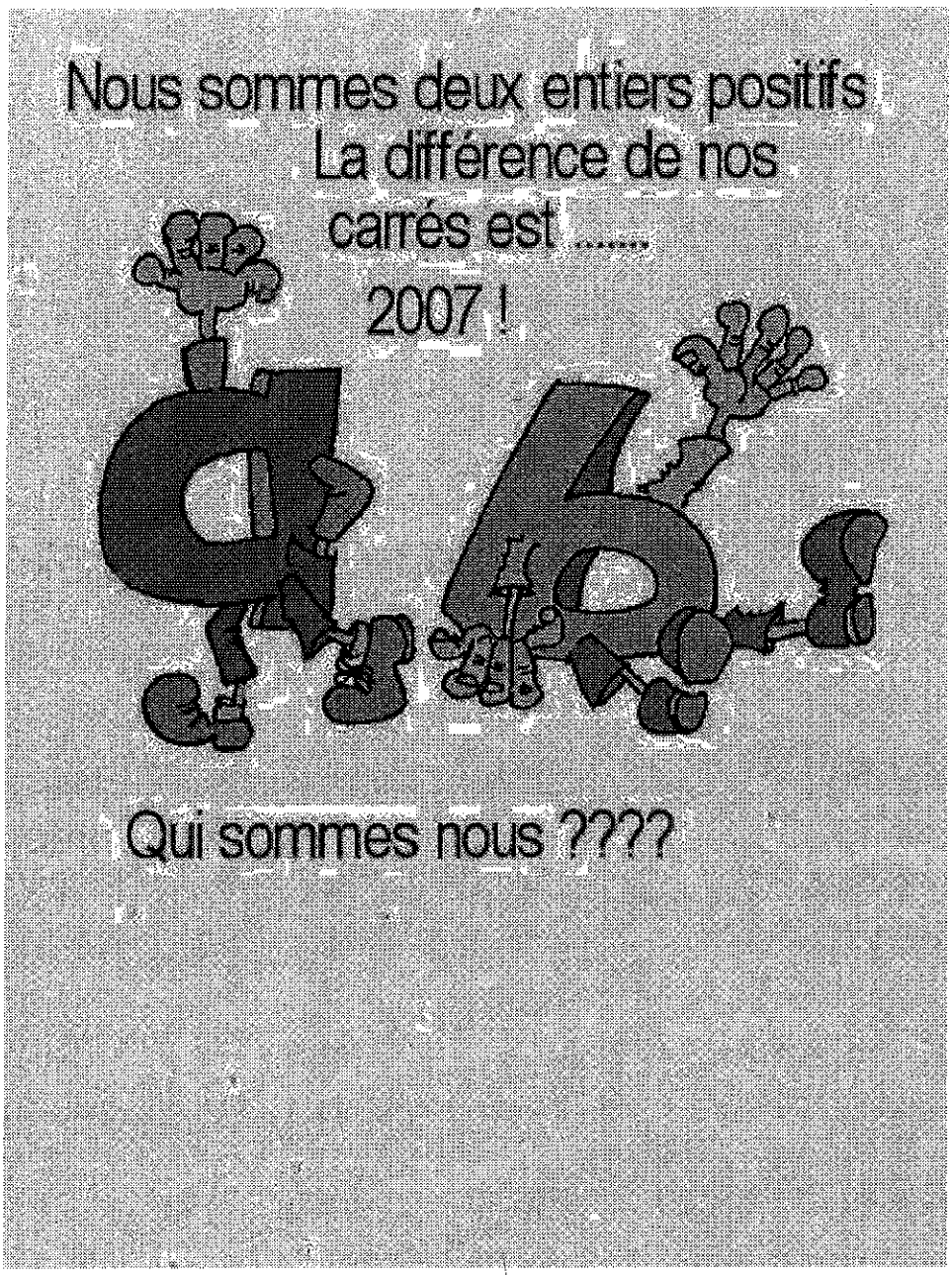
Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2007

Édités par Ghislaine Gueudet et Yves Matheron

CREAD et IUFM de Bretagne,
INRP et UMR-ADEF Marseille

ARDM et IREM de Paris 7



Merci à Serge Cecconi à qui, en 2007 encore, nous empruntons les dessins qui illustrent ces actes.

Ghislaine Gueudet et Yves Matheron

Sommaire

Le séminaire national de didactique des mathématiques de l'année 2007 a organisé en octobre 2007 la troisième séance du colloquium de didactique des mathématiques, consacré cette année à Michèle Artigue, présidente de l'ICMI, qui a présenté une intervention intitulée : « La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques ». C'est également en octobre que le séminaire a inauguré un nouveau lieu, suite au changement de locaux de l'Université Paris 7 : le site Paris Rive Gauche, aux Grands Moulins.

RESUMES 3

TEXTES DES COMMUNICATIONS

Colloquium

Michèle ARTIGUE 14

La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques

Raisonnement, démonstration, logique

Viviane DURAND-GUERRIER 46

Que peut apporter un point de vue modèle-théorique pour les travaux de recherche en didactique des mathématiques ?

Virginie DELOUSTAL-JORRAND 66

Etude épistémologique et didactique de l'implication mathématique sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles.

Richard CABASSUT 104

Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne

Aide à l'étude

Abdulkadir ERDOGAN 134

Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques : Analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde

Julie HOROKS 159

Les triangles semblables en classe de Seconde : des enseignements aux apprentissages

Fabrice VANDEBROUCK 185

Une base d'exercices en ligne dans la classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants

Enseignants : pratiques, formation, ressources

Equipe AMPERES 217

Le projet AMPERES (Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Etudes et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire), vers un autre type de processus d'étude

Gisèle CIRADE 249

Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel...

Teresa ASSUDE, Alain MERCIER, Gérard SENSEVY 279

Enseigner les mathématiques au CP : éléments de réflexion

Approche instrumentale

Alain BIREBENT 308

Le calcul numérique dans l'enseignement mathématique secondaire : reprise des travaux de notre thèse.

Sophie SOURY-LAVERGNE 325

Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures

Concept en émergence

Yves CHEVALLARD 344

Un concept en émergence: la dialectique des médias et des milieux

Résumés des contributions présentes dans ce volume

La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques

Michèle Artigue
artigue@math.jussieu.fr

La didactique des mathématiques a commencé à se constituer comme champ de recherche dans les turbulences créées par la réforme des mathématiques modernes. Progressivement, elle a essayé de construire des outils conceptuels, des méthodes pour appréhender les rapports entre enseignement et apprentissage des mathématiques. Elle les a utilisés pour comprendre le fonctionnement des systèmes didactiques, les effets des décisions curriculaires et, dans certains cas, les prédire. Elle a essayé de montrer l'existence d'autres organisations possibles et essayé de les faire vivre, au moins à titre expérimental. Quarante ans après le début de cette histoire, nous sommes aujourd'hui, à nouveau, dans une période de turbulence. Sommes-nous mieux armés pour comprendre les insatisfactions dont ces turbulences témoignent et penser des réponses appropriées ? C'est ce contexte et cette question qui seront la toile de fond de l'exposé. En portant un regard que j'espère lucide sur le champ didactique et son évolution, en situant les problèmes actuels dans un contexte plus large à la fois temporellement et spatialement, j'essaierai de montrer que la didactique des mathématiques, par les connaissances qu'elle a permis de construire, peut aujourd'hui apporter une contribution essentielle, tant à la compréhension qu'à l'action, mais aussi que, pour ce faire, elle doit répondre en tant que champ scientifique à de nombreux défis, en particulier ceux concernant ses rapports à la contingence et à la pratique.

Que peut apporter un point de vue modèle-théorique pour les travaux de recherche en didactique des mathématiques ?

Viviane Durand-Guerrier
Viviane.Durand-Guerrier@univ-lyon1.fr

Selon Sinaceur (1991), la logique ne sert pas à fonder les mathématiques, mais contribue à les comprendre, jouant ainsi le rôle d'une « épistémologie effective orientée vers l'agir ». Ce point de vue est conforté par un certain nombre de résultats issus de mes propres travaux concernant la place et le rôle de la logique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques.

Dans la première partie de cette communication, j'examinerai dans un certain nombre de travaux de recherches en didactique des mathématiques la place et rôle de la logique en essayant de mettre en perspective les concepts logiques mobilisés avec les concepts fondamentaux de la théorie des modèles de Tarski. Dans une seconde partie, je montrerai sur un exemple ce que peut apporter un point de vue modèle-théorique pour analyser l'activité des sujets en situation de recherche de problème.

Etude épistémologique et didactique de l'implication mathématique sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles.

Virginie Deloustal-Jorrand
virginie.deloustal-jorrand@alsace.iufm.fr

Mon intervention sera basée sur les résultats de ma thèse en didactique des mathématiques soutenue en décembre 2004 au laboratoire Leibniz de Grenoble, sous la direction de Denise Grenier et Charles Payan et intitulée « L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication. ».

L'implication est un concept omniprésent en mathématiques, puisque constitutif des preuves. Pourtant, l'implication, souvent identifiée à l'objet de la logique naturelle, n'est presque pas enseignée en tant qu'objet mathématique. Elle apparaît comme un objet *transparent* et facile à manipuler alors que de nombreux étudiants manifestent des difficultés qui lui sont reliées jusqu'en fin d'université.

Dans notre thèse, nous nous sommes posé les questions suivantes :

- Quel est l'objet mathématique « implication » ?
- Quelle est sa *vie* dans l'enseignement ?
- Comment construire une situation didactique qui problématise l'implication ?

En réponse à la première question, nous présenterons, une analyse épistémologique de l'implication mathématique dans trois cadres : logique formelle, théorie des ensembles et raisonnement déductif.

En réponse à la deuxième question, nous résumerons l'étude que nous avons menée sur la « *vie* » de l'implication, relativement à ces trois cadres, dans quelques manuels du collège à l'université.

Après avoir rappelé nos premiers résultats concernant notamment la *conception causale-temporelle* de l'implication, nous expliciterons notre thèse :

Il est nécessaire de connaître et d'établir un jeu dialectique entre les trois cadres, raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication. Nous soutenons que cette condition sur le jeu de cadre est aussi suffisante.

Pour apporter des éléments de réponse à cette thèse, nous exposerons les résultats de l'ingénierie didactique, destinée à des PLC2, que nous avons construite afin qu'elle permette de problématiser l'implication par un *jeu* sur ces trois cadres. Nous montrerons, en particulier, la pertinence du point de vue ensembliste pour travailler l'implication.

Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne

Richard Cabassut
richard.cabassut@alsace.iufm.fr

Pour étudier la démonstration nous adaptons le cadre théorique de Toulmin, sur les arguments de plausibilité et de nécessité, à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard. Les validations de l'enseignement des mathématiques sont la double transposition des démonstrations de l'institution mathématique (qui produit le savoir) et des validations, argumentations ou preuves, d'autres institutions (comme la « vie quotidienne »). L'étude diachronique des programmes du collège-lycée en France, et du Gymnasium en Bade-Würtemberg, confirmée par l'étude de manuels, montre que la démonstration est devenue explicitement un objet à enseigner, contrairement aux cas des Hauptschule et Realschule. Ces programmes recommandent l'usage de différents types de validation (argumentation, preuve) et d'arguments (pragmatiques, sémantiques, syntaxiques) suivant leurs fonctions et les moments ; on retrouve dans des leçons sur la démonstration l'influence des fonctions de la validation dans les différents genres de tâche (découvrir, contrôler, changer de registres, ...). Malgré les difficultés linguistiques, institutionnelles et culturelles liées à la comparaison, l'examen des validations de théorèmes de cours dans les manuels et de démonstrations produites par des élèves montre des similitudes quant à la cohabitation des différents types d'arguments et différentes fonctions de la validation. On observe des différences sur les types de technologie ou de technique mis en œuvre et sur le poids donné aux types d'arguments et aux registres

utilisés, avec une explication liée aux conditions institutionnelles (moment considéré, contrat, fonction privilégiée, organisation de l'enseignement ...).

Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques : Analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde

Abdulkadir Erdogan
abdulkadirerdogan@anadolu.edu.tr

Cette thèse se focalise sur l'étude autonome, c'est-à-dire sur la part autonome de travail qui revient à la charge des élèves dans la réalisation des apprentissages visés par l'école (maîtrise du cours, exercices d'entraînement, révisions, devoirs à la maison, préparation de contrôle, etc.), et sur les conditions dans lesquelles le système didactique place, *de facto*, ce travail.

Partant de l'hypothèse que l'étude autonome pose des problèmes spécifiquement didactiques et de notre constat préalable que l'aide à l'étude s'avère problématique (Erdogan, 2001 ; Erdogan & Mercier, 2007), nous sommes amené à engager une recherche approfondie sur la nature précise de ce travail, sur ses enjeux et sur les conditions de son fonctionnement, dans le cas spécifié des mathématiques. Nous abordons ces questions sous l'angle du diagnostic, considéré comme étape nécessaire et comme préalable à toute proposition de remédiation et d'amélioration.

La thèse porte sur la classe de Seconde, une classe charnière tant sur le plan des contenus d'enseignement que sur celui des enjeux de la scolarité, et elle se centre sur la partie algébrique et fonctionnelle du programme.

Nous mettons d'abord en œuvre un outil d'analyse et d'interprétation autour de la notion de *site mathématique* qui désigne la structure organisée des objets mathématiques et des relations parmi ces objets, une structure se présentant comme référence indispensable de l'étude autonome (Duchet & Erdogan, 2005). L'analyse croisée de plusieurs types de données relatives à quatre classes (textes officiels, manuels, observations de séances d'enseignement, copies d'élèves, questionnaire, entretiens individuels des élèves et des professeurs) nous permet alors d'identifier des éléments de diagnostic pour repenser l'organisation du curriculum, les situations didactiques d'étude et pour imaginer ce que pourrait être une aide efficace à l'étude.

La thèse met tout d'abord en évidence des problèmes liés au contenu du curriculum et à son organisation qui s'opposent au bon fonctionnement de l'étude autonome. Nous avons en

effet identifié un certain nombre de contraintes de ce type qui déterminent les choix du professeur qui cherche à organiser l'étude comme ceux des élèves qui ont à occuper leur *topos*. Nous montrons que ce *topos* est déterminé dans le site par l'ensemble de ce que le professeur ne prend pas en charge, parfois volontairement parce qu'il leur désigne ainsi l'enjeu officiel de son enseignement, mais très souvent involontairement parce que ces objets n'appartiennent pas au site de la classe bien qu'ils appartiennent au *topos* d'une étude autonome relative aux enjeux officiellement désignés.

Ces problèmes se trouvent renforcés par la position des uns et des autres vis-à-vis de l'étude autonome. Plus précisément, si l'étude autonome est considérée par tous les acteurs du système d'enseignement comme la clé de la réussite des apprentissages visés, la thèse met en évidence des phonèmes d'ignorance relatifs, notamment, à sa profondeur épistémique.

Pour ce séminaire, notre exposé portera plus particulièrement sur la manière dont nous concevons et construisons un site mathématique, en l'occurrence le site algébrique-fonctionnel appelé par la partie algébrique et fonctionnelle de la classe de Seconde, et sur la manière dont nous intégrons ce site à toutes les étapes de notre recherche à des fins de diagnostic.

Les triangles semblables en classe de Seconde :des enseignements aux apprentissages

Julie Horoks

jhoroks@gmail.com

Pour tenter de préciser le lien existant entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves en mathématiques, nous nous sommes intéressés aux propositions de plusieurs enseignants, faites à leurs élèves de classe de seconde sur la notion de triangles semblables. Pour notre étude, nous avons pris en compte les contenus mathématiques enseignés et leur place dans les manuels et programmes scolaires, mais aussi l'intégralité des déroulements des séances portant sur ce chapitre. Nous avons ainsi déterminé, pour chaque classe observée, l'ensemble des activités potentiellement réalisées par les élèves sur les triangles semblables, et nous nous sommes ensuite appuyés sur les résultats des élèves à un contrôle pour analyser leurs apprentissages éventuels sur cette notion. Nous avons essayé de comprendre les raisons pour lesquelles certains élèves échouent au contrôle, et de déterminer des choix de gestion qui semblaient bénéficier à un plus grand nombre d'élèves.

Cette démarche nous a aussi permis, en comparant les différentes classes observées, de tirer des conclusions sur les régularités et les variations des pratiques enseignantes sur ce chapitre. Dans mon exposé, qui s'appuie essentiellement sur mon travail de thèse, je reviendrai sur les méthodes qui nous ont permis de mettre en relation les observations faites dans cinq classes de seconde, et je détaillerai les résultats que nous avons obtenus à propos du lien entre pratiques et apprentissages.

Une base d'exercices en ligne dans la classe de mathématique : activité des élèves et pratiques des enseignants

Fabrice Vandebrouck

Fabrice.Vandebrouck@maths.univ-evry.fr

Y a-t-il une place en didactique des mathématiques pour des recherches donnant toute leur importance, non seulement aux situations scolaires et aux contenus mathématiques en jeu, mais aussi aux sujets singuliers ? Nous essayons de répondre positivement en présentant les résultats de travaux portant sur l'intégration des bases d'exercices en ligne (BEL) dans les classes. Notre enjeu n'est pas théorique même si la spécificité de notre démarche tient à des emprunts aux théories de l'activité et du développement. L'analyse des activités des élèves en classe, telles que les enseignants les organisent, nous fournit les données pour aborder d'une part les pratiques des enseignants, et approcher d'autre part les apprentissages des élèves.

Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Étude et de Recherche pour l'Enseignement Secondaire.

Equipe AMPERES : Groupe recherche collaborative de l'IUFM Midi-Pyrénées, Groupes didactique des IREM d'Aix-Marseille, Bordeaux, Clermont-Ferrand, Poitiers, Commission inter-IREM Didactique, INRP Marseille (UMR-ADEF)

L'équipe AMPERES est engagée pour la 3^{e} année consécutive dans un travail dont l'objectif vise à redonner du sens aux mathématiques que l'on enseigne dans le second degré. Le cours exclusivement magistral semble ne subsister que par traces dans l'enseignement secondaire des mathématiques, et paraît avoir cédé la place à une forme

actuellement majoritaire d'un enseignement fondé sur la reprise ou la modification plus ou moins inspirée " d'activités " trouvées dans des manuels ou, ce qui revient au même, sur l'Internet. En s'appuyant sur les progrès accomplis par la théorie didactique (TSD et TAD) au cours des vingt dernières années, il paraît possible de dessiner une alternative aux formes actuellement non satisfaisantes de l'enseignement des mathématiques au Collège et au Lycée. Elle passe par le développement de l'un des axes fondateurs de la didactique des mathématiques : celui de la conception de séquences d'enseignement favorisant dans la classe une genèse artificielle des savoirs mathématiques à enseigner. Contre des activités non motivées au plan mathématique, il s'agit de concevoir d'authentiques activités qui permettent l'étude par la construction collective du savoir comme recherche de réponse à une question dévolue à la classe. Contre le morcellement du savoir, et en suivant toujours le principe de recherches, collectives et dirigées, de réponses à une ou des questions de plus grande ampleur, il s'agit de développer des parcours d'étude permettant un recouvrement partiel de secteurs ou domaines des programmes d'un ou plusieurs niveaux.

L'objectif est – après conception, analyse *a priori*, observation dans les classes, analyse *a posteriori* – de fournir aux professeurs qui voudront bien faire l'effort de se les approprier, des outils, notamment des fiches de direction de l'étude, permettant de faire vivre un enseignement qui permette à un plus grand nombre d'élèves du Collège et du Lycée de trouver du sens dans les mathématiques enseignées.

Lors de notre intervention, après avoir exposé les attendus théoriques qui fondent notre démarche, nous montrerons quelques exemples des réalisations en cours.

Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la professionet formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel...

Gisèle Cirade
g.cirade@aix-mrs.iufm.fr

Cette recherche a pour objet de préciser de divers points de vue le passage problématique de l'état d'étudiant en mathématiques à celui de professeur de mathématiques. Nous examinons ce passage en nous appuyant sur une étude clinique de la formation dispensée au fil de plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille, depuis l'entrée en première année afin de préparer le CAPES, jusqu'à la prise en main d'une classe de collège ou de lycée en deuxième année. L'univers mathématique auquel les élèves professeurs sont confrontés, tant

en première qu'en deuxième année, se révèle pour eux plein d'embûches à propos de questions souvent inattendues pour l'observateur extérieur, mais que révèlent les dispositifs de la formation observée. Celle-ci constitue un facteur crucial, qui va forcer les élèves professeurs à reconnaître, à assumer et à affronter la problématicité des situations rencontrées dans leur vie professionnelle. Presque toujours, les difficultés que signalent les élèves professeurs, d'une très grande variété, sont des révélateurs des difficultés rencontrées par la profession : elles mettent au jour un univers professionnel chaotique et lacunaire dans lequel le déni de la problématicité est monnaie courante, et où la construction de réponses « idionomes », non questionnées, foisonne. La formation des jeunes professeurs apparaît ainsi indissociable d'une évolution du métier à laquelle elle peut contribuer par la diffusion, dans la profession où ils entrent, des praxéologies professorales co-construites dans la formation.

Enseigner les mathématiques au CP : éléments de réflexion

Teresa Assude, Alain Mercier, Gérard Sensevy
t.assude@aix-mrs.iufm.fr, mercier@inrp.fr, Gerard.Sensevy@bretagne.iufm.fr

Nous nous proposons, dans cette intervention, de rendre compte de certains éléments d'une recherche effectuée en réponse à un appel à projets du PIREF (Programme Incitatif de Recherche en Education et Formation) sur l'enseignement et l'apprentissage de la lecture et des mathématiques au Cours Préparatoire.

Nous décrirons tout d'abord brièvement les grandes lignes de la recherche, qui reposait sur :

- l'étude *in situ*, directement dans les classes, des pratiques d'un certain nombre de professeurs (quinze la première année, sept la seconde année (déjà étudiés la première année), répartis en Bretagne, à Marseille, à Toulouse, et à Vence)
- l'évaluation des progrès des élèves des quinze classes étudiées *in situ* la première année (auxquelles se sont ajoutées deux classes supplémentaires non étudiées *in situ*), et des élèves de cent dix classes la seconde année (les élèves de certaines classes étudiées *in situ* cette seconde année étant inclus dans cette même évaluation)
- la mise en rapport, grâce à un questionnaire de descriptions des pratiques renseigné par les professeurs (aussi bien ceux étudiés *in situ* la première et la deuxième année que ceux dont les élèves ont été évalués la seconde année), des résultats obtenus par les élèves et des pratiques déclarées par l'ensemble des professeurs enquêtés.

Puis nous nous centrerons sur certains résultats de la recherche et sur les questions qu'ils soulèvent, notamment :

- le risque d'évanouissement des savoirs en mathématiques en CP
- l'opposition spécifique/générique, visible par exemple dans le fait que les professeurs peuvent faire progresser leurs élèves en lecture et pas en mathématiques
- l'importance décisive du langage et des outils sémiotiques dans l'activité mathématique au CP
- l'importance méthodologique d'une analyse *a priori* approfondie
- la nature de l'efficacité d'un enseignement en mathématiques et de la mesure de cette efficacité.

Le calcul numérique dans l'enseignement mathématique secondaire : reprise des travaux de notre thèse.

Alain Birebent
Alain.Birebent@imag.fr

Orientés par une problématique de l'intégration de la calculatrice dans l'enseignement des mathématiques, nos travaux de thèse ont porté sur les conditions de vie du calcul numérique en France dans les collèges et lycées d'enseignement général. Nous avons utilisé une partie de ces travaux pour construire – sur plusieurs années – un enseignement à l'intérieur du master 2 EIAHD de Grenoble et pour nourrir un atelier à la treizième école d'été. Les retours sur notre recherche initiale ainsi provoqués nous ont conduits à opérer une réinterprétation de certaines conclusions de l'analyse institutionnelle et de l'ingénierie didactique qui constituaient l'ossature de la thèse. Nous avons en particulier introduit les notions de praxéologies enseignées et de praxéologies de référence pour étudier les effets de la transposition didactique en termes d'écart. Nous avons aussi fait fonctionner la notion de contrat institutionnel relatif au calcul numérique pour éclairer le champ de contraintes et des conditions dans la conception et la réalisation de l'ingénierie didactique.
L'exposé s'emploiera à illustrer sur un exemple significatif la reprise des travaux de notre thèse et à montrer comment cette reprise permet de clarifier et d'enrichir notre analyse du sort du calcul numérique dans l'enseignement secondaire.

Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures

Sophie Soury-Lavergne

Sophie.Soury-Lavergne@imag.fr

Dans le cadre de l'ERTe MAGI, Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique, nous avons conçu un ensemble de situations d'introduction au raisonnement déductif pour des élèves de sixième. Le passage de l'école primaire au collège s'accompagne d'un changement d'attente vis-à-vis des élèves. Les propriétés géométriques de la figure ne doivent plus être seulement perceptivement lues sur un dessin particulier mais également établies comme hypothèses (les données de la figure) ou déduites des hypothèses. Cabri-géomètre est un environnement de géométrie dynamique qui est susceptible de provoquer ce changement chez les élèves. En effet, le déplacement des objets dans Cabri-géomètre permet de distinguer les propriétés géométriques de la figure de celles d'un dessin particulier. Les premières sont conservées au cours du déplacement et pas les secondes. Cependant, l'utilisation du déplacement dans ce but n'est pas immédiate pour les élèves de début de collège. Ainsi, nous avons identifié un processus de genèse instrumentale du déplacement qui le transforme en instrument de validation des propriétés géométriques d'une figure. Nous présenterons les différents aspects de ce processus ainsi que les activités proposées aux élèves en montrant comment l'environnement permet à l'enseignant d'introduire un premier pas de démonstration comme explication à une situation problématique rencontrée par les élèves.

Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux

Yves Chevallard

y.chevallard@aix-mrs.iufm.fr

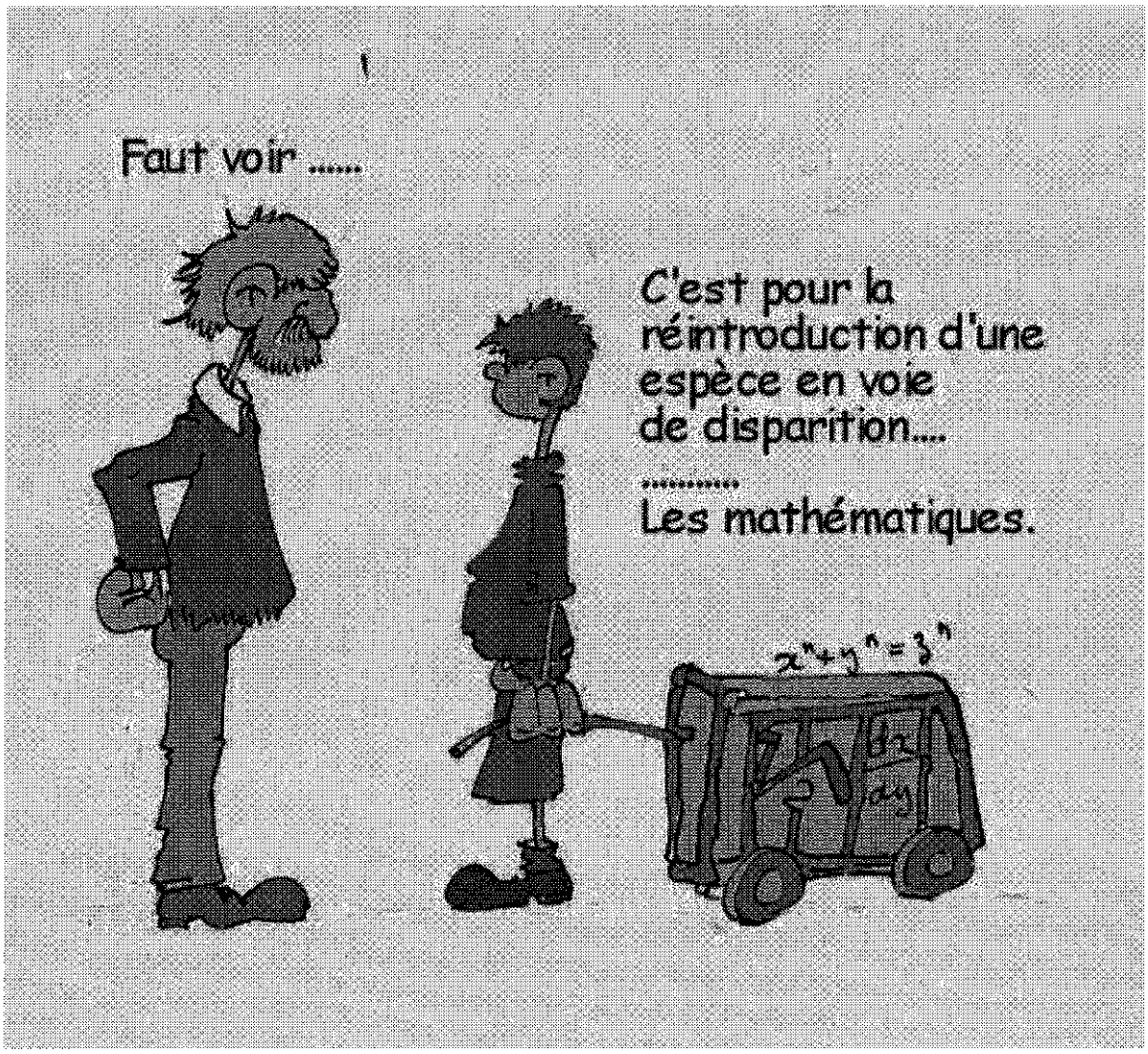
La dialectique des médias et des milieux est l'une des six dialectiques identifiées en théorie des parcours d'étude et de recherche (voir mon exposé du 25 mars 2001 au Séminaire national de didactique des mathématiques, où elle est désignée comme la « dialectique de la conjecture et de preuve » :

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14).

On en trouvera une présentation générale dans l'annonce du II^{e} congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007)

(http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=90).

Nourri des acquis théoriques de la didactique des mathématiques, ce concept permet notamment de relire et de repenser l'activité d'étude et de recherche aussi bien dans la classe de mathématiques que dans d'autres genres de situations institutionnelles : c'est en particulier cela que l'exposé s'efforcera de faire vivre à travers diverses illustrations.



La didactique des mathématiques face aux défis de l'enseignement des mathématiques

Michèle Artigue
Université Paris-Diderot

I. Introduction

Je voudrais tout d'abord dire à quel point je suis honorée d'être invitée à ce Colloquium, après les lauréats des prix Félix Klein et Paul Erdos, Guy Brousseau et André Deledicq. Cette invitation, je la dois à mon statut actuel de Présidente de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (ICMI[1]), et c'est à la fois comme didacticienne et comme présidente d'ICMI que j'ai préparé cette conférence.

Le Colloquium a pour ambition de s'adresser à un public plus large que celui des seuls didacticiens, même si l'on s'attend à un auditoire composé surtout de didacticiens, et j'ai bien sûr respecté cette règle du jeu. Cela m'a paru d'autant plus important que l'ambition d'ICMI est, depuis sa création par le mathématicien Félix Klein en 1908 lors du congrès des mathématiciens à Rome, de faire communiquer et collaborer tous ceux qui ont un intérêt et peuvent contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, et des apprentissages que cet enseignement permet. S'inscrire dans cette histoire, c'est reconnaître la diversité des expertises existantes en matière d'enseignement des mathématiques et vouloir s'enrichir de leur dialogue.

Dans le texte introductif à cette conférence, j'ai rappelé que la didactique des mathématiques avait commencé à se développer comme champ de recherche dans une période de turbulence pour l'enseignement des mathématiques, celle de la réforme des mathématiques modernes, et qu'aujourd'hui nous nous trouvions à nouveau dans une période de turbulence. Mais il y a turbulence et turbulence. Les débats parfois violents qui ont accompagné les années des mathématiques dites modernes se situaient à une époque d'expansion économique et sociale et les mathématiques, les sciences plus généralement, en étaient vues comme des moteurs essentiels. Il fallait certes repenser profondément leur

[1] ICMI: International Commission on Mathematical Instruction. La Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM) est devenue ICMI lorsqu'elle est devenue, en 1954, une sous-commission permanente de l'Union Mathématique Internationale mais la dénomination originale reste utilisée dans la sphère francophone.

enseignement mais tout semblait possible et l'on était prêt à y investir l'énergie et les moyens nécessaires. La lecture des actes du premier congrès ICME[2] qui s'est tenu à Lyon en 1969 est de ce point de vue particulièrement éclairante (EB ESM, 1969). Des points de vue divers s'y expriment sur ce qu'il convient d'enseigner et la manière de le faire mais l'on ne doute pas de pouvoir traduire les valeurs exprimées dans la réalité des classes. Les diverses expériences engagées déjà depuis plusieurs années à l'époque, y compris celles qui nous paraissent avec le recul singulièrement irréalistes, semblent donner des résultats prometteurs. Cela renforce sans aucun doute le sentiment de confiance. Les moyens donnés aux premiers IREM en sont un autre exemple, cette fois national : pour l'IREM[3] de Paris par exemple, six postes d'enseignants-chercheurs, vingt postes d'enseignants du secondaire à mi-temps, six postes d'ATOS[4], pour ne citer que les moyens humains. Il faudrait mentionner aussi ceux donnés au COREM, le Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques créé à l'initiative de Guy Brousseau, à Bordeaux, en 1972.

La situation actuelle n'est porteuse ni de tels espoirs, ni de tels enthousiasmes, et les moyens qui existaient il y a quarante ans semblent avoir en grande partie disparu. La formation continue des enseignants, une raison essentielle de la création des IREM, sans laquelle aucune évolution positive durable ne peut exister, tout le monde en convient, est complètement sinistrée, tout le monde en convient aussi. Les réformes se succèdent sans sembler apporter d'améliorations notables et la confiance dans le système éducatif s'effrite. On cherche à cette situation des responsables et l'on met régulièrement en cause les programmes, trop ou pas assez ambitieux selon leurs détracteurs mais aussi, de plus en plus, les méthodes pédagogiques que ces programmes prônent. Aux Etats-Unis, les débats sont parfois si virulents que l'expression « Math Wars » est devenue commune. Le premier texte de présentation de la conférence intitulée « The future of Mathematics Education in Europe » organisée en décembre à Lisbonne, à l'initiative du Portugal qui assure actuellement la présidence de l'Union Européenne, y faisait explicitement référence[5].

La recherche en didactique des mathématiques, il ne faut pas se le cacher, se trouve elle aussi sur la sellette. En serait-on là si elle avait été sans influence sur les réformes

[2] ICME : International Congress in Mathematics Education. Les congrès ICME sont organisés par ICMI tous les quatre ans. Le prochain, ICME-11, aura lieu en juillet 2008 à Monterrey au Mexique.
[3] IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
[4] ATOS : Agent Technique, Ouvrier et de Service.
[5] Précisons que cette référence a disparu dans le texte de présentation définitif.

curriculaires ? Qu'a-t-elle à dire sur la situation actuelle ? Quelles solutions a-t-elle à proposer ? Quelles évidences peut-elle fournir pour guider les débats ?

En préparant cet exposé, j'avais ces questions à l'esprit. Elles m'ont conduite à me demander en quoi ce que la recherche en didactique des mathématiques avait construit depuis les années 60 nous armait pour affronter les problèmes du présent, en quoi elle avait accru notre compréhension des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, en quoi elle nous rendait mieux capables d'orienter l'action. La recherche en didactique a débuté pour moi en 1974 quand André Revuz, qui était alors le directeur de l'IREM Paris 7 m'a proposé d'organiser avec François Colmez et Jacqueline Robinet l'enseignement des mathématiques dans l'école élémentaire expérimentale dont il avait obtenu la création dans la banlieue de Melun. Cette école s'inspirait de l'école Michelet de Talence, attachée au COREM mentionné plus haut, même si elle ne disposait pas des mêmes moyens. Grâce aux contacts étroits de François Colmez avec l'IREM de Bordeaux, nous y testions certaines des ingénieries didactiques de Guy Brousseau. Le travail sur la numération et l'addition était motivé par le besoin de dénombrer de grandes quantités, la multiplication était introduite via le dénombrement de grilles rectangulaires et la première technique de multiplication introduite était l'algorithme *per gelosia*. Nous initions les élèves à la pensée probabiliste dès le CE2 en utilisant des bouteilles opaques dont il fallait deviner la composition, une situation tombée ensuite dans l'oubli avant de revenir récemment sur le devant de la scène (Brousseau & al., 2002). Je me souviens encore de l'introduction des fractions via la comparaison des épaisseurs de feuilles de papier qui m'avait semblé une si étrange façon d'introduire les fractions mais m'avait fait, un peu tardivement, découvrir le sens de la commensurabilité (Brousseau G. & Brousseau N., 1985).

Petit à petit, nous avons développé nos propres ingénieries. Je me souviens de l'introduction de lettres et de formules en CE2 pour généraliser des régularités numériques observées, ce que l'on qualifierait aujourd'hui d'« early algebra » (Stacey & al., 2004). Je me souviens du travail mené en géométrie au CE2 et au CM1 et de notre émerveillement devant la diversité des conceptions du cercle que les élèves étaient capables de mobiliser dès cet âge (Artigue & Robinet, 1982).

Les souvenirs que je garde de cette époque sont des souvenirs de bonheur. Tout ce que nous essayions, après au besoin quelques ajustements, marchait. Nous voyions les élèves faire de vraies mathématiques, visiblement ils apprenaient, leurs enseignants et leurs parents étaient

contents et il ne serait venu à l'idée de personne d'insinuer qu'ils sortaient de l'école primaire sans savoir calculer. Les expériences menées parallèlement par Régine Douady et Marie- Jeanne Perrin à Montrouge dans la classe de Madame Latour donnaient des résultats tout aussi satisfaisants, au point que l'on peut lire dans un article écrit par Régine à propos de cette expérience (Douady, 1986) : « En fait, la plupart des objectifs, et en particulier l'apprentissage des nombres décimaux (avec les compétences attendues à la fin de l'école primaire au moins) ont été atteints en fin de CE2 ($3^{ème}$ année du cursus) ».

Aux débuts des années 80, je suis passée sans transition des expérimentations à l'école primaire à des expérimentations à l'université, dans le cadre de la mise en place d'une section expérimentale math-physique à l'université Paris 7. L'IREM, une fois de plus, était moteur avec une équipe de physiciens incluant deux didacticiennes de la physique : Edith Saltiel et Laurence Viennot dont les travaux sur les raisonnements des étudiants en mécanique et cinématique étaient déjà reconnus (Saltiel, 1978), (Viennot, 1979). Avec le recul, ce que nous avions monté à l'époque semble presque irréel. Nous avions choisi une douzaine de thèmes qui nous semblaient mériter une prise en charge commune. Pour chacun d'eux, deux volontaires : un mathématicien et un physicien préparaient une séance en amphi qu'ils gèreraient en commun, développant, illustrant par des exemples et articulant leurs points de vue respectifs jusqu'au niveau des notations. Ils testaient leur projet au cours d'une des réunions hebdomadaires de l'équipe et puis le réalisaient. La première année, nous assistions tous à ces amphis communs. A ceci s'ajoutaient des tests maths-physique réguliers corrigés en binôme, des projets maths-physique au deuxième semestre, des TP avec ordinateur en maths pour lesquels les étudiants rédigeaient des comptes rendus substantiels, prolongeant chez eux le travail mené en séance. Chacun essayait aussi de faire les sujets d'examen de l'autre discipline et cela changeait le regard que l'on portait sur les étudiants et leurs erreurs, si proches de celles que nous faisions nous-mêmes sur les sujets de l'autre discipline.

Pendant les années qu'a duré cette expérimentation, nos efforts nous ont semblé là encore récompensés (Artigue, 1981, 1986). Certes, la question des différentielles avait séparé la première année mathématiciens et physiciens et avait donné lieu au seul amphi qui n'ouvrait pas de possibilité à une synthèse cohérente des points de vue, mais nous nous y étions attaqués en tant que chercheurs avec les didacticiens de la physique au sein du

GRECO[6] Didactique qui avait été créé au CNRS et, quelques années après, il nous semblait que non seulement nous avions compris la logique qui gouvernait l'enseignement de chaque discipline et ce qu'elle produisait chez les étudiants (Artigue & al., 1988a), mais nous avions développé des questionnaires pour sensibiliser enseignants et étudiants à ces problèmes, et des séances de TP de modélisation dirions-nous aujourd'hui, qui nous semblaient permettre aux étudiants de donner sens aux procédures différentielles et intégrales au lieu de se borner à repérer les marqueurs linguistiques dans les énoncés et à travailler ensuite le plus mécaniquement possible, sans chercher à comprendre (Artigue & al, 1988b, 1988c).

Mon discours pourrait paraître un discours nostalgique. Il n'en est rien. Ce qu'une équipe motivée avait monté à l'université ne lui a guère survécu et l'école expérimentale où j'avais rencontré la recherche en didactique est sans doute aujourd'hui en ZEP. Nous n'avons pas réussi visiblement à bâtir des constructions didactiques suffisamment robustes pour qu'elles puissent vivre sans l'appui de la recherche ou, tout au moins, nous n'avons pas réussi à permettre à ces constructions de s'adapter de façon satisfaisante à l'évolution des conditions et contraintes qui pèsent sur l'enseignement. Leur réussite évidente n'a pas non plus suffi à assurer la diffusion de ces expériences. Ce qui m'intéresse aujourd'hui dans de telles expériences que je ne suis bien sûr pas la seule à avoir vécues - si c'était le cas, il serait de peu d'intérêt de les évoquer ici - ce sont les questions qu'elles renvoient à la recherche en didactique. Qu'avons-nous appris de leurs succès et de leurs échecs, et plus généralement qu'avons-nous appris au fil des années et de la progression des recherches en didactique ? Sommes-nous mieux armés aujourd'hui que nous ne l'étions hier ? Ma conviction profonde est que c'est bien le cas. C'est cette conviction que je souhaiterais vous faire partager, sans cacher pour autant les limites des connaissances collectivement construites par la recherche en didactique.

Pour cela, je balaierai d'abord ce domaine de recherche, essayant de donner une idée de ses évolutions majeures et des avancées dont chacune de ces évolutions a été porteuse, illustrant au fur et à mesure l'exposé par des recherches qui me sont particulièrement familières et sont sans doute aussi familières à beaucoup de ceux qui m'écoutent. Dans une seconde partie, j'en viendrai à des questions sensibles pour les interactions entre la communauté didactique et les autres communautés directement intéressées à l'enseignement des mathématiques, notamment celle des mathématiciens, et je privilégierai

[6] GRECO : Groupement de Recherche Coopérative.

au niveau des exemples des recherches étrangères. Dans la dernière partie de l'exposé, enfin, j'essaierai de pointer ce que je vois comme des défis majeurs pour la recherche didactique aujourd'hui.

II. Un balayage de la recherche en didactique

Prétendre balayer la recherche en didactique et ses évolutions majeures en un espace aussi réduit est sans aucun doute présomptueux. Cela impose des choix draconiens dans la partialité desquels se révèle la vision personnelle du chercheur. Celle qui s'exprime ici est bien sûr la mienne, elle n'est qu'une vision parmi bien d'autres possibles.

II.1 Une centration sur l'élève : discontinuités et obstacles

La recherche en didactique a d'abord été attentive à l'élève, refusant de le voir comme un simple récepteur de connaissances. Portée par les idées de l'épistémologie piagétienne, elle a cherché à comprendre les constructions et reconstructions qui permettent l'apprentissage des mathématiques, en mettant plus particulièrement l'accent sur les discontinuités incontournables de l'apprentissage (Bednarz & Garnier, 1989). Elle y voyait la source de difficultés particulièrement résistantes et d'échecs qu'il s'agissait d'identifier et comprendre, pour trouver les moyens de les gérer efficacement. Ceci nécessitait d'autres stratégies didactiques que les stratégies usuelles basées, au contraire, sur la continuité. La façon de penser ces discontinuités s'est diversifiée selon les chercheurs, selon les cultures didactiques. Celle portée par la notion d'obstacle épistémologique empruntée à Bachelard, qui a été introduite très tôt dans le champ par Guy Brousseau (Brousseau, 1976, 1983), a été sans aucun doute une des formes les plus radicales. Les connaissances didactiques que ces recherches ont permis d'élaborer, qu'il s'agisse de l'extension du champ des nombres, des entiers aux décimaux et rationnels (Brousseau, 1986), (Douady, 1984), de la transition entre arithmétique et algèbre (Bednarz , Kieran & Lee, 1996), ou de la conceptualisation de la notion de limite (Sierpinska, 1985), (Cornu, 1991) sont aujourd'hui naturalisées, banalisées. Elles n'en sont pas moins importantes et je me bornerai à rappeler l'exemple des décimaux que je trouve particulièrement illustratif.

Les erreurs résistantes qui étaient observées jusqu'en fin de collège dans les questions relevant de l'ordre ou des opérations sur les décimaux (Pluvinage, 1977) comme : 3,15> 3,2 ou 3,6x3,6=9,36, devenaient compréhensibles. Elles résultaient d'une vision des décimaux comme des couples d'entiers et étaient renforcées par un enseignement qui tendait à les présenter comme des entiers à un changement d'unité près et à insister sur les continuités

des techniques opératoires entre entiers et décimaux, la seule chose à apprendre étant de savoir où placer la virgule dans le résultat obtenu. La densité de l'ordre des décimaux y était invisible, les théorèmes en acte que les élèves s'étaient progressivement construits au fil de leur fréquentation des entiers : le résultat d'un produit est plus grand que chacun des facteurs, celui d'une division plus petit, le carré d'un nombre lui est supérieur, tout entier a un successeur… n'étaient pas questionnés, les exercices proposés dans les manuels sur l'ordre des décimaux permettaient 85% de réussite aux élèves appliquant des règles fausses (Leonard & Sackur, 1991). Il n'y avait donc pas lieu de s'étonner que les difficultés perdurent jusqu'à la fin du collège.

Nous, didacticiens, considérons aujourd'hui ceci comme des banalités. Dans une recherche récente portant sur la spécificité des connaissances mathématiques nécessaires aux enseignants menée aux USA (Hill & al., 2007), les chercheurs ont proposé la même tâche à différentes populations : quatre listes de nombres décimaux étaient données qu'il s'agissait d'ordonner. Il était demandé de dire si chacune de ces listes présentait le même intérêt pour travailler l'ordre sur les décimaux avec des élèves de l'école primaire. Parmi les populations concernées, il y avait des enseignants de mathématiques à l'université d'une part, des professeurs d'école élémentaire d'autre part. Les résultats différencient nettement les deux populations et ce n'est pas à l'avantage des universitaires !

Ces premières recherches ont aussi montré la diversité des conceptions qui peuvent être associées à une même notion mathématique et permis de mieux comprendre les dynamiques possibles entre ces conceptions. La recherche que j'avais menée avec Jacqueline Robinet montrait ainsi la diversité des conceptions du cercle mobilisables par des élèves de l'école élémentaire dès le CE2 et le fait que la conception ponctuelle et statique associée à la définition usuelle était plus difficilement opérationalisable par ces élèves que d'autres conceptions, cinématiques, locales ou globales. Elle montrait aussi l'étroite dépendance entre conceptions mobilisées et caractéristiques des tâches proposées, et les apprentissages nécessaires pour développer des relations plus flexibles entre conceptions. Les résultats obtenus par Gérard Vergnaud sur les structures additives et multiplicatives (Vergnaud, 1990) montrent de même la diversité sous-jacente à des tâches qui sont mathématiquement isomorphes quand on les aborde sous l'angle de l'apprentissage, les décalages qui existent entre réussite aux unes et réussite aux autres, et les expliquent. Ces résultats aussi sont aujourd'hui naturalisés et certains didacticiens

s'étonneront sans doute que je prenne du temps dans cet exposé pour rappeler des choses aussi connues.

II.2 D'une centration sur l'élève à une centration sur les situations et les institutions

Ce qui a permis à la recherche en didactique de progresser au-delà de ces premiers acquis, c'est d'élargir son horizon au-delà de l'élève. En France, cet élargissement a été en quelque sorte consubstantiel au développement de la didactique des mathématiques, porté d'abord par la théorie des situations didactiques (cf. (Perrin-Glorian, 1994), (Brousseau, 1998) pour une vision synthétique), assez vite aussi par la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985) qui allait déboucher ensuite sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992). Ce que je vois fondamentalement dans le changement de perspective que ces théories induisent, c'est la reconnaissance et la mise sur le devant de la scène, d'une part du fait que ce que l'élève apprend à l'école, c'est d'abord ce que l'école lui permet d'apprendre, d'autre part que pour comprendre ce que l'école permet à l'élève d'apprendre, on ne peut se contenter d'analyser les textes qui régissent l'enseignement : programmes et instructions, de comptabiliser les heures d'enseignement, d'étudier les sujets d'examens proposés. Ceci, la CIEM l'a fait dès le début du siècle en produisant, en l'espace de quelques années, de 1908 à 1920, 187 volumes contenant 310 rapports et études (Letho, 1998). Pour comprendre, il faut rentrer dans l'intimité du fonctionnement des systèmes didactiques, il faut en comprendre l'économie, il faut comprendre ce qui se joue en classe entre mathématiques, enseignants et élèves, comment se partagent et évoluent les responsabilités mathématiques respectives, comprendre ce qui contraint les dynamiques observées mais aussi ce qui relève du champ des possibles même si nous ne l'avons encore jamais observé.

La théorie des situations didactiques mais aussi d'autres constructions comme celle de Régine Douady (Douady, 1984) ont relativement tôt développé des outils conceptuels pour cette compréhension. Comment aujourd'hui observer une classe et comprendre ce qui s'y joue d'un point de vue mathématique sans prendre en compte les phénomènes de contrat didactique ? Comment analyser des changements de programme et anticiper leurs effets possibles sans s'interroger sur les perturbations que ces changements vont faire subir à l'écologie des savoirs mathématiques directement ou indirectement concernés par la réforme, se demander comment ces perturbations écologiques vont être, peuvent être gérées. Quelles sont les chaînes trophiques qui vont se trouver coupées et quels peuvent en

être les effets ? Quelles sont les nouvelles possibilités offertes et comment peuvent-elles être exploitées ? Pour répondre à toutes ces questions, il ne fait aucun doute que les outils dont nous disposons aujourd'hui sont sans commune mesure avec ceux dont nous disposions au moment de la réforme des mathématiques modernes. Avec le recul, les dérapages de cette dernière apparaissent complètement prévisibles.

La théorie des situations didactiques a déplacé la centration du regard de l'élève vers la situation didactique dont l'élève pris individuellement ou collectivement est un des acteurs. La théorie anthropologique, qui se conjugue aisément à cette dernière, a déplacé à nouveau cette centration des situations vers les institutions dans lesquelles ces situations s'inscrivent. Personnellement, j'ai vraiment pris conscience de l'intérêt de cet élargissement en encadrant la thèse de Brigitte Grugeon au début des années 90 (Grugeon, 1995). La théorie n'était pas alors développée comme elle l'est aujourd'hui mais son état était suffisant pour montrer ce qu'elle pouvait apporter au travail didactique.

A l'origine de cette recherche, se trouvait un constat d'échec : celui des classes d'adaptation créées pour permettre aux meilleurs élèves issus des lycées professionnels (LP) de rejoindre l'enseignement général technologique. Des élèves motivés qui devenaient en l'espace de quelques mois, pour beaucoup d'entre eux, des élèves en échec, perdant progressivement toute confiance en eux. Au centre de cet échec : l'algèbre, et au niveau des explications du dysfonctionnement, des raisonnements très tentants comme le suivant : l'orientation de ces élèves vers l'enseignement professionnel étant majoritairement due à un échec dans l'enseignement général, rien d'étonnant à ce que, quelques années plus tard, on récupère, en dépit de la réussite en LP, des élèves cognitivement incapables de suivre un enseignement général. La recherche en didactique de l'algèbre pouvait même être mise au service de ces argumentations. Elle permettait en effet de proposer aux élèves des tâches bien répertoriées, de rapporter leurs réponses à des catégories bien identifiées, de les interpréter en termes de conceptions et de niveaux de conceptualisation pour constater la faiblesse de ces derniers.

Dans la recherche de Brigitte Grugeon, l'adoption d'une approche anthropologique a permis de dépasser cette vision. Ce que cette approche a en fait changé, c'est la problématique de la recherche elle-même, en projetant le problème rencontré dans une plus grande catégorie de problèmes : les problèmes de transition institutionnelle, car ce qui était d'abord en jeu, c'était la transition entre deux institutions : le lycée professionnel et le lycée d'enseignement général. La théorie anthropologique conduisait à postuler que ces deux

institutions avaient développé, sans aucun doute, des rapports institutionnels différents au domaine de l'algèbre qu'elles reconnaissent toutes deux comme un domaine d'enseignement. Ces différences pouvaient être de nature diverse. Certains objets pouvaient exister dans une institution et non dans l'autre. Par exemple, dans l'institution lycée professionnel concernée vivaient des contenus portant sur des rudiments de mathématiques financières : formules liées à des calculs de taux, de remboursements d'emprunts, qui n'étaient pas au programme de l'enseignement général. Inversement, faisaient partie du programme du lycée général à un niveau similaire, des savoirs sur les fonctions qui ne faisaient pas partie de l'enseignement professionnel. Mais ce n'étaient pas là les différences les plus problématiques car elles étaient aisément repérables. Les différences de rapports institutionnels sur des objets communs, lorsqu'une lecture superficielle des programmes donne l'impression que l'on est passé de l'un à l'autre par une simple opération de "couper-coller" accompagnée de changements de style mineurs, étaient bien plus problématiques. Ce sont ces différences qui sont la source essentielle des malentendus de la transition institutionnelle.

Postuler leur existence avant même d'avoir cherché à les identifier précisément, conduisait à re-problématiser la recherche. Etait-il légitime d'attribuer aux seules difficultés cognitives des élèves leur échec en algèbre dans ce processus de transition institutionnelle ? Ne pouvait-on faire l'hypothèse que cet échec était dû en partie, fortement renforcé, par des différences subtiles de rapports institutionnels ? Génératrices de malentendus, elles empêcheraient les élèves de comprendre les attentes des enseignants et de réinvestir leurs connaissances pour y faire face, elles empêcheraient les enseignants de repérer les connaissances de leurs élèves et de les aider à les mobiliser, alors même qu'élèves et enseignants semblaient parler des mêmes objets, travailler sur les mêmes objets. A ceci se rajouterait une autre difficulté, elle aussi inhérente aux transitions institutionnelles. Les connaissances mathématiques que les élèves développent sont contextualisées. Seule une faible portion de ces connaissances est décontextualisée sous forme de savoirs. Les enseignants le savent bien, même s'ils ne l'explicitent pas, et cette connaissance se manifeste dans les stratégies qu'ils développent pour aider les élèves à mobiliser les connaissances nécessaires, en évoquant un moment, un épisode de l'histoire de la classe (Matheron, 2000). Toute transition institutionnelle met à mal ces stratégies d'évocation car il n'y a plus d'histoire à partager, et l'établissement des connections permettant la

mobilisation des connaissances, passant sous la seule responsabilité de l'élève, devient bien plus aléatoire.

C'est en se situant dans cette approche que Brigitte Grugeon s'est attaquée au problème de la transition en algèbre entre lycée professionnel et lycée général, refusant de se laisser piéger par des premières interprétations trop tentantes. Cela lui a permis un autre regard sur les élèves, beaucoup plus constructif. Cela a aussi mis en évidence que, pour ces élèves issus de l'enseignement professionnel, dont la culture algébrique était organisée principalement autour du monde des formules, et non comme au lycée général autour du monde des équations puis des fonctions, d'autres leviers étaient possibles, passant notamment par l'enrichissement du travail sur les formules, sa complexification technique progressive et sa mise en relation avec le monde fonctionnel. Cette analyse a permis de mettre en place, dans un second temps, une ingénierie didactique mieux adaptée à ces élèves et d'obtenir au bout de deux ans des résultats non pas miraculeux mais pour le moins inespérés.

Pour terminer ce balayage de la recherche en didactique, j'évoquerai maintenant une autre évolution, tout aussi fondamentale : celle concernant le regard porté sur l'enseignant.

II.3 De l'élève vers l'enseignant

L'enseignant n'a pas été considéré d'emblée comme un acteur problématique de la relation didactique au même titre que l'élève. Ce n'est plus le cas aujourd'hui et les recherches concernant l'enseignant, ses conceptions et représentations, ses modes d'action et de décision, ses connaissances et compétences et la façon dont elles se construisent, se sont multipliées comme l'ont montré par exemple deux des synthèses préparés pour le congrès ICME10 en 2004, l'un sur les rapports entre théorie et pratique dans la recherche (Sfard, 2005), l'autre sur les travaux concernant la formation des enseignants (Adler & al., 2006). Comme dans le cas des élèves, c'est l'étude des conceptions, représentations, croyances des enseignants qui a été d'abord au centre des recherches, motivée par les difficultés rencontrées dans l'articulation entre théorie et pratique, notamment les difficultés rencontrées à assurer la diffusion de constructions didactiques élaborées par les chercheurs et ayant fait la preuve de leur efficacité dans des terrains expérimentaux (cf. (Thompson, 1992) pour une première vision synthétique). L'hypothèse alors faite est que les représentations des enseignants sur les mathématiques, leur enseignement, leur apprentissage, en décalage avec celles des chercheurs, font obstacle à cette diffusion. Mais

assez vite cependant, les liens entre représentations et action didactique apparaissent comme des liens complexes et la question des déterminants de l'action didactique, du rôle exact que jouent parmi ces déterminants les représentations des enseignants sur les mathématiques et l'apprentissage se trouve posée. D'autres recherches se développent visant à comprendre le fonctionnement de l'enseignant au sens large, ses prises de décision en classe et hors classe et ce qui les gouvernait, visant à identifier les différents gestes professionnels de l'enseignant et les connaissances qui les sous-tendent, visant plus largement à identifier les connaissances et compétences nécessaires à l'exercice de cette profession et la façon dont elles se développent (Margolinas & Perrin, 1997), (Schoenfeld, 1998), (Ma, 1999), (Ball & Even, à paraître).

Dans les recherches françaises, les principaux cadres théoriques existants sont mis à contribution. Dans la théorie des situations didactiques, on exploite notamment les travaux sur la structuration du milieu, permettant d'identifier différentes positions et rôles pour l'enseignant, et la structuration initiale, aujourd'hui qualifiée d'ascendante, se complète d'une structuration descendante permettant de prendre en compte le travail de l'enseignant hors de la classe dans sa dimension de concepteur de situations d'enseignement (Perrin-Glorian, 1999), (Margolinas, 2002). Dans la théorie anthropologique, un travail systématique est fait pour identifier les gestes professionnels de l'enseignant et trouver les moyens de décrire, caractériser, voire évaluer des praxéologies didactiques définies, de façon parallèle aux praxéologies mathématiques, en termes de tâches didactiques et techniques didactiques permettant de les réaliser, ces techniques étant plus ou moins sous le contrôle de technologies didactiques c'est à dire de discours permettant d'expliquer et justifier les techniques, voire de théories didactiques (Chevallard, 1999).

D'autre part, des constructions plus spécifiques sont développées comme la « double approche » due à Aline Robert et Janine Rogalski (Robert & Rogalski, 2002), (Robert & Rogalski, 2005) qui s'appuie à la fois sur des travaux issus de psychologie ergonomique et de didactique des mathématiques. Dans cette double approche qui s'est révélée ces dernières années très productive (cf. par exemple (Vandebrouck, 2008) pour une sélection de travaux relevant de cette approche), l'enseignant est vu comme un individu exerçant un métier dans un environnement à la fois dynamique et ouvert, ce qui explique le recours aux travaux de psychologie ergonomique. L'objectif est de contribuer à l'analyse et à la compréhension des pratiques des enseignants tant du point de vue de ce qu'elles peuvent engendrer en termes d'apprentissages des élèves que du point de vue des impératifs

professionnels auxquels elles répondent, par rapport à l'enseignant lui-même, et pas seulement par rapport à ses élèves.

Dans cette double approche qui s'appuie sur la théorie de l'activité, les séances en classe sont d'abord analysées selon deux dimensions dites « cognitive » et « médiative » qui relèvent de l'approche didactique : la première concerne les tâches proposées aux élèves et les activités mathématiques des élèves qu'elles permettent potentiellement, a minima et a maxima, les formes de travail des élèves pendant les séances et la répartition des responsabilités entre enseignant et élèves, la seconde concerne les échanges avec l'enseignant, les aides fournies par ce dernier, les questions qu'il pose et leur effet sur l'activité mathématique des élèves. Ces analyses conduisent à une lecture des pratiques de l'enseignant selon deux composantes : la composante « cognitive » qui résulte de l'analyse de ce qui est planifié par le professeur pour agir sur les connaissances mathématiques des élèves et la composante « médiative » qui renseigne sur l'organisation par l'enseignant dans sa classe des médiations entre lui et les élèves ou entre les élèves. Ensuite, afin de saisir les régularités dans les pratiques d'un même professeur ou entre professeurs et de préciser les marges de manœuvre réellement investies par les enseignants, trois autres composantes sont considérées : les composantes « sociale » et « institutionnelle » relatives aux contraintes institutionnelles et sociales qui pèsent sur les pratiques enseignantes et la composante « personnelle » liée aux conceptions du professeur quant au savoir et au métier, sa tolérance en matière de risque, son besoin de confort... Les différentes analyses sont enfin croisées pour reconstruire ce qui apparaît en classe du système complexe et cohérent des pratiques des professeurs étudiés, en le reliant aux contraintes et décisions en jeu.

Il est évident que ces travaux de recherche, qui nous donnent un accès plus réaliste au travail de l'enseignant, influencent notre perception des rapports entre théorie et pratique, et de la formation, élément crucial dans l'établissement de ces rapports. L'enseignant est moins vu comme un mentor ou comme un ingénieur de l'éducation que comme un professionnel travaillant dans des environnements complexes et changeants auxquels il doit sans cesse s'adapter. Les formations qui s'appuient sur ces travaux se veulent plus respectueuses de la réalité des pratiques, de leurs modes d'élaboration et d'évolution, des contraintes diverses du métier d'enseignant. L'évolution des pratiques y est vue comme un processus à long terme qui doit prendre en compte les cohérences propres à chaque enseignant, son style. Et la distance entre l'ancien et le nouveau (Assude & Gelis, 2002) est vue dans la dynamique de cette évolution comme une variable critique.

Je vais arrêter là ce rapide balayage. On s'étonnera peut-être que, travaillant sur les questions d'intégration technologique, je n'ai jusqu'ici pas parlé de technologie. J'y viendrai dans les questions sensibles. On s'étonnera aussi peut-être que j'ai fait une part aussi belle aux travaux français. C'était un choix délibéré et il traduit ma conviction que cet élargissement du regard qui était nécessaire aux avancées didactiques s'est développé particulièrement tôt chez nous, et que, s'il a été porté par les visions de quelques chercheurs, il a aussi été plus largement l'œuvre collective d'une communauté, ce qui a donné à ces constructions une cohérence et une force particulières. Mais, et j'aurai l'occasion de le dire dans la suite de mon exposé, la situation est aujourd'hui au niveau international bien différente de ce qu'elle était il y a une vingtaine d'années. L'élargissement des regards, l'attention portée aux enseignants, sont un fait général, donnant lieu à un foisonnement de travaux et d'approches théoriques par rapport auxquels nos recherches doivent aujourd'hui apprendre à se situer.

III. Des questions sensibles

J'ai évoqué au début de mon exposé la « Math War » et je reprendrai la citation faite dans l'introduction initiale de la conférence de Lisbonne :

> « There is a major controversy in K-12 math education. New curricula are coming into vogue that in large part replace the systematic teaching of algorithms with discovery learning, in which students are asked to find their own methods of solving problems. The new methods also de-emphasize memorization of multiplication tables in favour of reliance on calculators.
>
> These new curricula are bad for several reasons: First the instructional methods used are very time consuming, and much less material can be covered. Also, if you develop your own algorithms, they may well not be as powerful and efficient as the standard ones. As a result, students come away with less mastery of the material they study, and it takes them longer to solve new problems whose solution would be immediate if they had learned comprehensive, efficient algorithms."

Il y a dans cette citation une succession d'affirmations et une argumentation que l'on peut certes critiquer mais elle traduit un malaise que l'on ne peut pas ne pas prendre au sérieux. L'enseignement systématique des algorithmes y est opposé à une pédagogie de la découverte. Dans le premier cas, on couvre un contenu plus large, on met en place rapidement des algorithmes puissants et efficaces et les élèves sont finalement mieux armés

pour résoudre des problèmes nouveaux. Dans le second cas, on perd beaucoup de temps, on en reste à des techniques artisanales, on ne mémorise pas et finalement l'élève est moins efficace pour résoudre de nouveaux problèmes. Il y a là une naïveté évidente quant à la vertu supposée de l'apprentissage des algorithmes et à la facilité de cet apprentissage. On semble oublier que, si les recherches en didactique se sont développées, c'est justement parce que cet enseignement là, tel qu'il était mené, ne donnait pas satisfaction. D'une part, tout en sachant exécuter de façon fiable les dits algorithmes, de nombreux élèves étaient incapables d'en reconnaître les conditions d'emploi dès que cet usage n'était pas induit plus ou moins directement par le contrat didactique, ce qui est le cas dès que l'on sort de la classe de mathématiques ; d'autre part, dès que l'usage n'en était pas régulièrement entretenu, les algorithmes étaient oubliés et leur reconstruction impossible à l'élève.

Le didacticien ne se reconnaîtra pas non plus bien sûr dans la description faite de l'alternative en vogue à ces pédagogies traditionnelles si ce n'est dans l'observation tout à fait juste que, si l'on veut donner plus de responsabilité à l'élève dans la production des connaissances et des techniques, cela consomme du temps. L'ambition des ingénieries didactiques qui ont été développées pour l'école élémentaire n'était pas de se contenter de techniques artisanales, de déléguer l'exécution des opérations aux calculatrices ni de mettre de côté la mémorisation des tables. Et ce n'est pas non plus ce que prônent les programmes, au moins en France, même s'ils mettent l'accent sur l'activité mathématique de l'élève. Mais il serait aussi faux de nier qu'arriver à des équilibres efficaces compte-tenu des contraintes qui pèsent sur l'enseignement n'est pas un problème trivial et qu'il est loin d'être résolu dans le cas général, il suffit d'aller dans des classes pour s'en apercevoir.

En tant que chercheurs, nous avons aussi une certaine responsabilité car il est clair que nous avons mis beaucoup plus d'énergie dans nos recherches à l'élaboration de situations permettant d'optimiser la responsabilité mathématique des élèves dans l'introduction de nouvelles notions que dans le travail des techniques et la consolidation des connaissances. Et ce que l'on retient, ce que l'on montre des ingénieries didactiques, ce sont le plus souvent quelques situations emblématiques : la situation du puzzle de Guy Brousseau, celle des rectangles de Régine Douady, en oubliant les détails de la progression dans laquelle elles s'inscrivaient, et le temps qui y était consacré à mettre en place et consolider les techniques de calcul, à assurer leur flexibilité, tout en les reliant à leurs situations d'emploi.

III.1 Pratiques d'enseignement et réussite des élèves

La recherche en didactique permet-elle aujourd'hui de dépasser cet état de choses, nous fournit-elle des résultats pour analyser les effets de choix didactiques, de pratiques pédagogiques différents, nous permet-elle d'aller au-delà de la mesure d'effets constatés dans des contextes expérimentaux écologiquement protégés ? Il me semble que c'est effectivement le cas et la thèse Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Perrin-Glorian, 1992) a été par exemple en France un travail pionnier dans ce domaine. On cite souvent à l'étranger les travaux de Jo Boaler qui a d'abord travaillé en Angleterre puis à Stanford aux Etats-Unis avant de revenir à Oxford et c'est pourquoi, quittant la scène française, j'ai choisi de les évoquer. Sa thématique de recherche est justement depuis le début celle de l'impact sur l'apprentissage de différentes approches de l'enseignement des mathématiques. Ses études portent chaque fois sur plusieurs établissements contrastés, sur des centaines d'élèves et s'étalent sur plusieurs années. Ses premiers résultats (Boaler, 2002) obtenus via la comparaison en Angleterre de deux lycées, l'un utilisant des méthodes traditionnelles et des classes regroupant les élèves par niveau, l'autre des méthodes plus ouvertes avec des projets et des classes hétérogènes avait clairement montré que, en moyenne, les élèves du second lycée apprenaient plus de mathématiques, développaient une attitude plus positive par rapport à la discipline et que l'enseignement y était plus équitable (moins de différences entre les résultats par classes sociales et par sexe). La seconde étude, menée à Stanford avec 8 étudiants en thèse pendant 5 ans, soutenue par la *National Science Foundation* (the Stanford Mathematics Teaching and Learning Study) est celle que je vais plus particulièrement évoquer (Boaler, à paraître). Trois high schools y sont considérées, dénommées Greendale, Hilltop and Railside, de taille équivalente, avec des enseignants de mathématiques qualifiés de « committed and knowledgeable », mais différant par leur situation et population. Railside est située dans une zone urbaine et offre une grande diversité culturelle et ethnique ; Hilltop est dans une zone plus rurale, avec une moitié d'élèves latino et une moitié de blancs, Greendale est sur la côte et accueille une population blanche homogène. Les comparaisons principales portent sur 300 élèves environ dans chaque école, suivant un cursus « reform oriented » dans la première et traditionnel dans les deux dernières. Des centaines d'heures d'enseignement ont été filmées puis, pour un certain nombre d'entre elles, codées avec une attention particulière portée à l'organisation du temps de l'enseignement et aux questions posées par les enseignants. Les enseignants et 60 élèves ont été aussi interviewés chaque année et des questionnaires soumis à tous les élèves.

A ceci s'ajoutèrent chaque année des tests d'évaluation des connaissances des élèves, élaborés avec les enseignants et comportant de façon équilibrée des items représentatifs de chaque approche. Les chercheurs ont aussi organisé des tests avec des problèmes plus longs et appliqués que les élèves devaient résoudre en groupes. Enfin ils ont collecté les scores des élèves aux tests de l'Etat.

Dans les classes de Hilltop et Greendale, dans une séance de mathématiques typique, les enseignants présentent les éléments nouveaux de façon magistrale (21% du temps) et les élèves résolvent des exercices pendant 48% du temps ; 15% est occupé par des discussions collectives, l'enseignant posant des questions aux élèves. La très grande majorité des questions posées est de nature procédurale (>90%). La répartition du temps est très différente à Railside où les élèves travaillent en groupes sur des problèmes plus longs et pas seulement procéduraux. Les questions posées par les enseignants sont plus variées même si 61% d'entre elles sont aussi d'ordre procédural.

Les résultats du pré-test et des deux post-tests (post test en algèbre à la fin de la première année, en algèbre et géométrie à la fin des deux ans, sont donnés dans le tableau ci-dessous[7].

	Traditionnel		Railside	
	Moyenne	Nombre	Moyenne	Nombre
Y1 pre-test	22.23	311	16.00	347
Y1 post-test	23.90	293	22.06	344
Y2 post-test	18.34	313	26.47	199

Tableau 1. Résultats des tests, high schools traditionnels (Greendale, Hilltop) et Railside

Des différences significatives ont aussi été observées concernant les attitudes vis-à-vis des maths et, à la fin de la 4ème année, 41% des élèves de Railside choisissent des cours avancés de pré-calculus et calculus, contre 30% à Hilltop et 23% à Greendale. Les différences de résultats selon l'origine ethnique des élèves sont aussi significativement inférieures à Railside.

Quelles peuvent être les raisons de ces différences et du succès de Railside ? Jo Boaler et ses collègues les ont recherchées dans l'analyse des données recueillies et dans la

[7] Le nombre plus faible d'élèves de Railside évalués en deuxième année est lié au fait que ces derniers pouvaient choisir de suivre l'enseignement de géométrie en deuxième ou troisième année, mais le fait que ceci ne biaise pas les résultats a été contrôlé.

triangulation de ces analyses. Ils montrent, comme l'on pouvait s'y attendre, qu'il n'y a pas une raison unique mais une combinaison de raisons.

Le département, l'organisation curriculaire, celle de l'emploi du temps

Les enseignants travaillent beaucoup en collaboration, élaborent ensemble leur programme et contenus d'enseignement, discutent de leurs pratiques (650mn dont 450mn reconnues comme travail de préparation). Ils sont associés aux nouveaux recrutements et ont mis en place un dispositif pour assurer l'acculturation des nouveaux recrutés. Tous partagent une sensibilité aux questions d'équité.

Les séances sont de 90 minutes. Les enseignements sont sur le semestre, ce qui donne plus de flexibilité. Les classes sont hétérogènes. Mais le lycée a à gérer une image difficile d'établissement ghetto avec des résultats faibles aux tests d'Etat.

Un travail en groupes soigneusement pensé : « the complex instruction approach »

Tout enseignant sait qu'il ne suffit pas de mettre des élèves en groupes pour qu'ils apprennent mieux. Les enseignants de Railside s'appuient sur une méthode développée par Liz Cohen et Rachel Lotan (Cohen & Lotan, 1997) qui présente en particulier les caractéristiques suivantes :

- *Affectation de rôles :*

Elle vise à contrer les différences de statut social et académique qui naissent des interactions. Dans chaque groupe, des rôles sont attribués aux élèves : facilitateur, capitaine, rapporteur, responsable ressources. Les rôles sont régulièrement rappelés par l'enseignant qui intervient dans les groupes en en tenant compte. Ils changent à la fin de chaque unité de travail.

- *Multidimensionalité de la réussite :*

La réussite est évaluée à travers une diversité de compétences et il est entendu qu'à la fois personne n'est bon sur toutes et chacun peut être bon sur au moins une. En mathématiques, un accent fort est mis sur la capacité à expliquer et pas seulement à trouver, ce qui aide aussi à gérer l'hétérogénéité. Cette diversité se retrouve dans les entretiens avec les élèves et contraste avec les points de vue exprimés dans les deux autres lycées où la vision de la réussite est étroitement liée à ce qui est demandé dans les tests d'Etat.

- *Valorisation de compétences :*

Une grande importance est donnée au rôle joué par l'enseignant pour valoriser publiquement les apports, même modestes, des élèves qui peuvent avoir un statut inférieur dans un groupe, pour diverses raisons.

- *Apprendre à chaque élève à se sentir responsable de l'apprentissage des autres :*

Ceci se fait à travers différentes stratégies : noter la qualité des interactions dans le groupe, évaluer le travail du groupe, interroger un élève d'un groupe et s'il ne répond pas, laisser le groupe travailler sachant que l'on reviendra interroger le même élève…

Disponibilité et exigence des enseignants :

Des enseignants très disponibles mais aussi très exigeants, qui aident sans donner les réponses, demandant systématiquement des explications et des justifications (« Follow-up questions »), se centrent sur ce qu'ils considèrent important mais essaient de le traiter en profondeur. De plus, ils n'hésitent pas à clarifier ce qu'ils attendent comme façons de travailler, et à souligner en les commentant de façon réflexive les moments où les élèves se comportent de façon attendue.

La réussite en maths est vue comme résultat du travail plus que d'habiletés innées. Elle est ainsi jugée accessible à condition de s'accrocher pour 84% des élèves de Railside (52% dans les autres lycées). En particulier les étudiants de Railside apparaissent significativement meilleurs sur les tâches longues de 90mn, mais l'analyse montre que la différence est due en premier lieu au fait qu'ils n'ont pas abandonné. A la question : « Combien de temps en moyenne cherchez-vous un exercice avant d'abandonner ? », la moyenne de leurs réponses est 19.4mn contre 9.9mn pour les autres. Ceci est bien sûr aussi lié aux types de tâches qu'ils rencontrent, en moyenne significativement moins courtes.

Je ne peux m'attarder plus sur cet exemple mais il montre bien je pense que comparer des méthodes d'enseignement requiert des études de fond, et ne peut se satisfaire d'une identification des méthodes à travers des slogans. Comme le fait remarquer par ailleurs Liping Ma dans l'ouvrage qui est issu de son travail de thèse et écrit à destination d'un large public (Ma, 1999), quand elle visitait d'une part des classes élémentaires aux USA et celles assurées par Deborah Ball (Ball, 1996), elle ne pouvait manquer de remarquer que si l'on regardait la surface des choses, il y avait une grande similarité entre beaucoup de classes américaines et celles de Deborah Ball et une grande différence avec les classes chinoises, mais si elle analysait les mathématiques qui s'y faisaient et le contenu réel des interactions entre enseignants et élèves, les similarités basculaient : elles étaient fortes cette fois entre les classes chinoises et la classe de Deborah Ball, tandis que le contraste était saisissant avec beaucoup de classes américaines apparemment proches (p.153).

III.2 Les questions technologiques

Les questions technologiques sont également un point sensible dans les débats concernant l'enseignement des mathématiques. Comme nous le rappelions dans l'introduction au panel sur les controverses dans la « K-12 mathematics education » organisé lors du congrès ICM 2006 à Madrid (Artigue, Ralston & de Shalit, 2006), la première étude ICMI sur la technologie datant de 1985 et dont l'ouvrage avait été réédité par l'UNESCO en 1992 faisait de nombreuses propositions pour faire bénéficier l'enseignement des mathématiques des avancées technologiques et présentait de nombreuses expériences encourageantes, mais il y était aussi souligné que, en dépit de leur intérêt « such suggestions are fundamentally speculative at the level of large scale implementation – by which we mean that converting them into a well-developed and tested curriculum for the typical teacher and the typical student is still a major challenge » (Cornu & Ralston, 1992).

Et nous ajoutions : « Since that time, more and more sophisticated technological tools have continued to be developed for supporting the learning and teaching of mathematics, and their use is today encouraged by the K-12 mathematics curriculum in most countries. Nevertheless, in spite of the existence of an increasing amount of positive small-scale experiments, the real nature of the effect of technology on mathematics education in the large remains under discussion. The problems raised in the first ICMI Study have not been solved, and the discourse of those who think that the impact of technology is globally negative and ask for a strict limitation of the use of calculators and software, and even for their banishment from mathematics education in the early grades, is opposed by those who consider that it does not make sense today to think about mathematics learning and teaching without taking into account the existence of technology and without trying to benefit from the real and increasing potential it offers for mathematics education. »

Encore une fois, il me semble important de prendre au sérieux les malaises que de telles tensions expriment et, personnellement, je pense que le développement de l'approche instrumentale en didactique des mathématiques auquel j'ai contribué a bien aidé à en comprendre les raisons (cf. (Guin & Trouche, 2002) pour une première synthèse). Cette approche a conduit à questionner l'opposition entre technique et conceptuel qui dominait le discours technologique militant et parfois aussi celui des chercheurs, et donnait à croire que l'usage de la technologie, déchargeant l'élève du travail technique, pouvait lui donner directement accès à une activité conceptuelle. Les travaux qui ont été menés, d'abord avec des logiciels de calcul formel, ensuite avec d'autres technologies, ont bien montré à quel

point cette supposition était erronée. Ils ont par là même attiré l'attention sur la double valence, épistémique et pragmatique des techniques : elles aident à produire des résultats (valence pragmatique) mais elles aident aussi à comprendre les objets qu'elles engagent, et c'est cette fonction épistémique qui, tout autant que leur fonction pragmatique, légitime leur présence dans l'enseignement (Artigue, 2002), (Artigue & al., à paraître). Les technologies informatiques perturbent les équilibres entre ces deux valences qui se sont établis dans une culture papier / crayon. Face à ces perturbations non identifiées, non gérées, les enseignants restent démunis.

De nombreux travaux, en France comme à l'étranger, montrent par ailleurs que les usages qui semblent les premiers accessibles aux enseignants ne sont justement pas ceux qui tirent le mieux parti des potentialités pour l'apprentissage des technologies considérées (Laborde, 2001), (Monaghan, 2004). Proposant d'une part à des enseignants débutants, d'autre part à des formateurs des situations utilisant le tableur, volontairement contrastées quant à leur intérêt pour l'apprentissage, Mariam Haspekian dans sa thèse (Haspekian, 2005) a par exemple montré, que systématiquement les choix des premiers, tout en étant argumentés, étaient opposés aux choix des seconds qui, eux, correspondaient à ceux que sa recherche la conduisait elle-même à effectuer. La tendance observée et bien compréhensible consiste à utiliser les outils technologiques juste pour leur valeur pragmatique : produire rapidement et facilement des résultats dans des tâches qui se différencient peu de celles traditionnellement pensées pour l'environnement papier/crayon. Or, comme les recherches concourent aussi à le montrer, ceci ne permet pas que s'exprime dans l'enseignement des mathématiques la puissance épistémique des techniques instrumentées. L'expression de cette dernière passe en effet souvent par la construction de tâches qui n'ont pas d'analogue direct dans l'environnement papier/crayon et, pour les tâches qui sont a priori envisageables dans cet environnement, par une véritable reconstruction des scénarios didactiques associés. La pente naturelle des usages contribue de ce fait fortement aux décalages observés entre attentes et réalisations effectives, et explique les tensions observées.

Arriver à surmonter ces obstacles demande de penser les usages de la technologie dans la durée, la progression coordonnée dans le temps des connaissances instrumentales et mathématiques ainsi que les institutionnalisations associées, les rapports à construire et à faire évoluer entre techniques papier-crayon et techniques instrumentées. Nous mesurons donc mieux aujourd'hui la tâche à accomplir et nous sommes certainement bien mieux armés pour y faire face que nous ne l'étions il y a dix ans, mais le travail à accomplir pour

parvenir à une intégration des technologies informatiques qui serve efficacement la cause de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques reste énorme.

IV. Les défis actuels

Ces défis sont de deux ordres. Certains sont internes au champ didactique, d'autres comme pour les autres champs scientifiques lui viennent de l'extérieur. Ils mériteraient à eux seuls un exposé complet. Je ferai donc une sélection draconienne et j'essaierai d'être synthétique.

IV.1 Les défis internes

J'ai souligné à la fin de la partie consacrée au balayage du champ didactique que l'élargissement des perspectives progressivement observé en France n'était pas un phénomène isolé. Mais cette évolution s'est traduite en l'espace d'une dizaine d'années par un foisonnement d'approches, une explosion théorique qui, tout en exprimant la vitalité de la communauté didactique, ne sont pas sans poser problème. Communiquer entre chercheurs alors même que nous sommes de plus en plus proches en un certain sens, se faire une idée claire des résultats obtenus dans tel ou tel domaine pour soi-même ou pour pouvoir les communiquer à d'autres est aujourd'hui difficile. C'est ce qui a conduit par exemple, dans les deux derniers colloques européens CERME en 2005 et 2007, à créer un groupe de travail sur la comparaison et l'articulation de cadres théoriques dont les travaux vont faire l'objet en 2008 d'un numéro spécial de ZDM. C'est aussi un travail dans lequel je suis personnellement investie avec d'autres dans le cadre de deux projets européens : les travaux de l'équipe de recherche européenne TELMA au sein du réseau d'excellence Kaleidoscope et le projet ReMath (Representing mathematics with digital media) du 6ème plan européen de recherche et développement auquel cette équipe a donné naissance en 2006. Dans ces deux projets, notre intérêt porte sur les potentialités offertes par les technologies numériques pour l'apprentissage des maths et nous sommes plusieurs équipes venant de 4 pays différents : Angleterre, Grèce, Italie et France, à travailler ensemble, chacune développant des environnement interactifs d'apprentissage et travaillant depuis de nombreuses années sur ces questions d'apprentissage et d'intégration technologique dans l'enseignement. Pour travailler efficacement ensemble, il nous a fallu essayer de dépasser l'état de fragmentation théorique du champ. Ceci ne pouvait se faire par l'imposition à tous d'un même cadre théorique. Il nous a donc fallu comprendre quels étaient réellement les besoins de connections que nous avions et, pour cela, identifier ce qui faisait la cohérence de chacune de nos approches et quelles en étaient aussi les limites, les points aveugles,

comprendre le rôle que jouaient exactement ces approches théoriques dans notre travail qu'il s'agisse de conception et de développement d'artefacts informatiques ou de conception et développement d'usages. Nous avons mis au point pour cela une méthodologie spécifique d'expérimentations croisées, des outils méthodologiques spécifiques comme la notion de fonctionnalité didactique et le langage des « concerns ». Aujourd'hui, quatre ans presque après le début de ce travail, nous commençons à y voir plus clair. Mais il s'agit là encore d'une avancée très locale par rapport au défi global que la recherche doit relever[8] (Artigue, 2007).

Le second défi qui me semble crucial est celui des changements d'échelle. La recherche en didactique, pointant à juste titre les limites des études statistiques qui avaient marqué ses débuts au moins dans certains pays et semblaient lui conférer une aura de scientificité, a privilégié les études qualitatives, plongeant de plus en plus profond dans le détail des interactions entre les acteurs du système didactique comme des interactions avec le savoir mathématique. Des expérimentations ont été menées, des ingénieries développées, on a constaté que leur diffusion posait problème, cela a été d'ailleurs l'une des causes du développement de la recherche sur les enseignants et leurs pratiques, mais l'on n'a pas pris, du moins à ma connaissance, la question des changements d'échelle comme une question de recherche en soi. Il est courant en didactique de filer la métaphore, comparant l'évolution de ce champ avec celui de la médecine, et la notion d'ingénierie est elle-même porteuse d'une métaphore, celle de l'enseignant-ingénieur. La métaphore médicale attire notre attention sur le fait que la médecine dispose, elle, de protocoles précis pour gérer les changements d'échelle. Et même s'il ne me semble pas pertinent de poursuivre plus avant cette analogie trop galvaudée, elle devrait attirer notre attention sur les limites inhérentes à une concentration de la recherche sur des objets, certes intéressants et importants, mais dont la petite taille ne nous confronte pas aux problèmes de changement d'échelle, aux phénomènes, changements de contraintes et de dynamiques qui les accompagnent. La recherche ne saurait à mon avis s'en désintéresser en les renvoyant simplement à d'autres instances pour se désoler ensuite que, lorsque certains de ses résultats sont convertis en décisions curriculaires, les résultats ne soient pas ceux attendus. Aujourd'hui de tels travaux, qui nécessitent des moyens humains et financiers lourds, des coopérations institutionnelles diverses, commencent à se développer (cf. (Swan, 2006), (Hill & al.,

[8] Tous les textes associés à ce travail sont accessibles en ligne sur le site de TELMA : http://telma.noe-kaleidoscope.org

2007), (Blum & al., 2007), (Espinoza & al., 2007) par exemple) mais il faut reconnaître que la recherche française n'est en rien pionnière dans ce domaine.

Le troisième défi, à mes yeux, non indépendant de ce qui précède, est de nous rendre en tant que communauté capables d'exprimer ce que nous savons, ce que nous avons appris, avec bien sûr les précautions qui s'imposent, en dehors de la communauté des seuls didacticiens. Nos connaissances didactiques bien sûr nourrissent nos pratiques d'enseignants, de formateurs, nos échanges de chercheurs, mais si cela peut nous apporter une certaine satisfaction, cela reste une satisfaction bien égoïste. Les progrès dans cette direction me semblent bien maigres en l'espace de quarante ans et, pour ne parler que d'elles, il me semble que les études ICMI qui devraient y contribuer jouent trop insuffisamment ce rôle. J'aimerais qu'une évolution sensible s'amorce dans les études ICMI en cours et dans celles que nous allons lancer ces prochaines années. Elles ne doivent pas être des études écrites par des chercheurs pour des chercheurs, elles doivent être beaucoup plus que cela, présenter de façon synthétique et claire l'état des connaissances dans le domaine concerné dans un discours accessible à des non spécialistes ainsi que les enjeux actuels de la recherche, donner à voir des réalisations diverses mais d'ampleur suffisante conduites dans des contextes différents et les analyser, être une source d'inspiration pour tous.

IV.2 Les défis externes

Mes responsabilités au sein d'ICMI me rendent sans aucun doute particulièrement sensible à cette deuxième catégorie de défis : ceux qui nous viennent de l'extérieur et que nous ne pouvons ignorer. Certes, il est sans doute possible de développer une carrière académique en didactique en restant à l'écart de ces contingences mais je connais peu de didacticiens qui se satisferaient d'une telle situation. L'engagement en didactique n'est pas seulement un engagement scientifique, au sens académique du terme, c'est un engagement humain dont la motivation profonde est l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, de la vie mathématique à la fois des professeurs et de leurs élèves. Les défis, à ce niveau, sont nombreux.

Le premier défi que je mentionnerai est celui d'un enseignement des mathématiques équitable pour reprendre les termes de Jo Boaler et de qualité, où l'on sache répondre aux besoins de la formation des futurs scientifiques et mathématiciens sans pour autant écraser la grande masse de ceux dont le rapport aux mathématiques sera tout autre, où les mathématiques servent l'épanouissement intellectuel, social et culturel de chacun au lieu de

renforcer des inégalités. Il est clair que nous ne pouvons prétendre seuls influer substantiellement sur l'enseignement des mathématiques. Notre contribution sera même sans doute modeste mais je suis profondément convaincue qu'elle est nécessaire, pour orienter l'action, pour accompagner, soutenir et même être à l'origine de projets moteurs, mais aussi pour aider à dénoncer les solutions simplistes mais tentantes pour la personne non avertie qui fleurissent avec régularité et sont souvent reprises sans esprit critique par les médias. Relever ce défi nous impose de savoir communiquer et collaborer efficacement avec d'autres communautés, et nous avons aussi sur ce plan sans doute des efforts à faire. Si ceci est important dans tous les pays, ce l'est tout particulièrement dans les pays en voie de développement où les ressources humaines et matérielles sont comptées.

Le second défi sur lequel je voudrais revenir est le défi technologique. La première étude ICMI était dédiée à la technologie, l'étude 17 qui a été lancée il y a trois ans se proposait de la revisiter. La conférence associée s'est tenue en décembre 2006 à Hanoi et ce n'est bien sûr pas un hasard. Il était très important pour nous qu'elle se tienne dans un pays émergeant, et que l'on y prenne pleinement la mesure de ce que la technologie représente pour l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants dans un tel contexte. La recherche en didactique a nourri et accompagné le développement des logiciels de géométrie dynamique, elle s'est longtemps concentrée sur les calculatrices, les micro-mondes et plus généralement des logiciels ouverts. Aujourd'hui on voit bien à quel point l'évolution technologique nous oblige à sortir de ces espaces technologiques devenus familiers, nous oblige à nous intéresser aux nouvelles générations de bases d'exercices comme Mathenpoche développé par l'association Sésamath[9] par exemple et à essayer de comprendre quels usages en font enseignants et élèves, avec quels effets sur les apprentissages. Elle nous oblige aussi à essayer de comprendre pourquoi, alors que la géométrie dynamique a mis si longtemps à pénétrer les pratiques effectives, ce type de logiciel semble diffuser aujourd'hui si facilement. Elle nous oblige aussi à remettre en question nos modèles de diffusion des connaissances et à prendre la mesure de ce que peut apporter la technologie aujourd'hui dans des contextes difficiles, en pensant des usages différents de ceux qui nous étaient les plus familiers, en concevant des ressources numériques appropriées pour les enseignants et les étudiants, en numérisant celles

[9] http://www.sesamath.net

existantes et en les rendant largement accessibles[10], en faisant de la technologie un outil au service du travail collaboratif des enseignants.

Le troisième défi est celui de l'action sur les systèmes éducatifs dont les formes sont aujourd'hui profondément insatisfaisantes. Brutalité des interventions, faiblesse des régulations, faiblesse des accompagnements, permanence de systèmes « top-down » rigides là où il faudrait savoir concilier la mise en place de cadres qui permettent l'action et la guident avec la souplesse qui permet de laisser la responsabilité nécessaire aux acteurs, de bénéficier de leurs initiatives et de leur engagement. De ce point de vue, vu de l'extérieur, notre pays paraît particulièrement rigide et peu confiant dans ce que pourrait apporter ce que l'on appelle traditionnellement la base, peu enclin à mettre en place et soutenir des synergies productives. La recherche en didactique elle-même n'échappe pas toujours à ces pesanteurs culturelles dans les rapports qu'elle développe avec les enseignants et avec les institutions alors qu'elle devrait, là encore, jouer un rôle moteur.

Ce ne sont que quelques défis parmi tous ceux que nous avons à relever en tant que communauté. Nous avons à les relever avec la conscience de ce que nous pouvons apporter mais aussi avec celle de nos limites, certaines consenties parce qu'elles constituent l'identité de notre champ, ce qui fait sa consistance et sa force, d'autres liées à l'état de ce champ même et que nous ne saurions confondre avec les premières sans risque grave. Avec, aussi, pour les didacticiens français, la nécessité de consolider les relations d'ouverture et d'apprendre à mieux voir dans les travaux menés à l'étranger ce qu'ils peuvent nous apporter, même lorsqu'ils n'adoptent pas les mêmes approches, les mêmes cadres théoriques. Sur des sujets cruciaux aujourd'hui presque partout dans le monde comme par exemple l'enseignement des mathématiques dans des contextes multi-culturels et multi-linguistiques (Barwell, Setati, Barton, 2007), ce qui sera le thème de la prochaine étude que lancera ICMI, nous avons beaucoup à apprendre de chercheurs qui ont travaillé sur ces problèmes depuis une vingtaine d'années, en Amérique, en Asie ou en Afrique. Depuis que je suis entrée dans le champ didactique, ces valeurs d'ouverture à d'autres cultures, à d'autres communautés sont pour moi essentielles. Elles m'ont personnellement apporté et m'apportent aujourd'hui plus que je ne saurais l'exprimer. Et je suis profondément convaincue que c'est en les faisant vivre que nous pouvons espérer faire face aux défis de l'enseignement des mathématiques aujourd'hui.

[10] Cf. par exemple le projet européen inter2geo : http://inter2geo.eu

Références

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Fou Lai, L., Novotna, J. (2006). Reflections on an Emerging-Field : Researching Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics,* 60/3, 359-381.

Artigue M. (1981). *DEUG SSM Première année. Section E – Un an de fonctionnement.* Brochure n°29. IREM Paris 7.

Artigue M., Robinet J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3/1, 5-64.

Artigue M. (1986). *Une section de DEUG SSM première année en 1984-85.* Brochure n°63. IREM Paris 7.

Artigue M. et al. (1988a). Le thème « différentielles » : un exemple de coopération math-physique dans la recherche. In G. Vergnaud, G. Brousseau (eds), *Actes du Colloque du GRECO Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques du CNRS.* Sèvres, mai 1987. pp. 5-35. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Artigue M. et al. (1988b). *Différèntielles et procédures différentielles au niveau du premier cycle universitaire.* Brochure n°75. IREM Paris 7.

Artigue M ., Menigaux J., Viennot L. (1988c). *Questionnaires de travail sur les différentielles.* Brochure n°76. IREM Paris 7.

Artigue M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning,* 7, 245-274.

Artigue M., De Shalit E., Ralston A. (2006). Controversial Issues in K-12 Mathematics Education. In, M. Sanz-Solé & al. (Eds), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians,* vol. III, pp. 1645-1662. European Mathematical Society.

Artigue M., Groupe TICE IREM Paris 7 (à paraître). L'utilisation de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques au lycée : du suivi d'une expérimentation régionale à un objet de recherche. In N. Bednarz & al. (Eds.), *Actes du Colloque EMF 2006,* Université de Sherbrooke.

Artigue, M. (2008). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In, D. Pitta-Oantazi & G. Philippou (eds), *Proceedings of CERME 5,* pp. 68-82. Cyprus University Editions.

Assude, T., Gelis, J.M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational studies in Mathematics*, 50/3, 259-287.

Ball, D. (1996). Connecting to mathematics as a part of teaching to learn. In, D. Schiffer (Ed.) *What's happening in math class?: Reconstructing professional identities*. Vol.2, pp. 36-45. New York: Teachers College Press.

Ball, D., Even, R. (Eds) (à paraître). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. ICMI Study 15*. Springer.

Barwell, R., Setati, M., Barton, B. (Eds) (2007). Multilinguical Issues in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics.* 64/2.

Bednarz, N., Garnier, C. (1989). *Construction des savoirs. Obstacles et conflits.* Actes du Colloque du CIRADE; Ottawa : Editions Arcine.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching;* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Blum, W. & al. (2007). The professional knowledge of German mathematics teachers : Investigations in the context of the COACTIV project. *Communication à la Conférence "Professional Development of Mathematics Teachers – Research and Practice from an International Perspective.* Oberwolfach, novembre 2007. voir aussi : http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/

Boaler, J. (2002). *Experiencing School Mathematics : Traditional and Reform Approaches to Teaching & Learning.* Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, New Jersey.

Boaler, J. (in press). Promoting 'relational equity' and high mathematics achievement through an innovative mixedability approach. *British Educational Research Journal* (accessible sur le site personnel de l'auteur).

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117), Louvain-la-Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4/2, 77-111.

Brousseau, G., Brousseau N. (1985). *La construction des nombres rationnels et décimaux.* IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1986, 7/2, 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Brousseau, G., Brousseau, N., Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 363-444.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12-1, 77-111.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-265.

Cohen, E., Lotan, R. (Eds.) (1997). *Working for Equity in Heterogeneous Classrooms: Sociological Theory in Action.* New York Teacher's College Press.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 153-166.

Cornu B., Ralston A. (eds) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.* Science and Technology Education. Document Series 44. Paris: UNESCO.

Douady R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'Etat. Université Paris 7.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-32.

Editorial Board of Educational Studies in Mathematicq (Eds.). (1969). *Actes du Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique.* Lyon, août 1969. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., Rojas, D. (2007). El problema de la ensenanza de la geometria en la Educación General Basica chilena y una propuesta para su ensenanza en aula. *Communication au II^{ème} Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, novembre 2007, Uzès, pp. 443-465. http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/listado_comunicaciones.htm/ .

Grugeon B. (1995). *La transition entre enseignement professionnel et enseignement général : le cas de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Guin, D., Trouche, L. (Eds), (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Haspekian M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs.* Thèse de doctorat. Université Denis Diderot, Paris 7.

Hill, H.C., Sleep, L., Lewis, J.M., Ball, D. (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge Matters. In, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 111-156. NCTM. Charlotte, NC: Information Age Publishing

Laborde C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6/3, 283-317.

Léonard, F., Sackur, C. (1991). Connaissances locales et triple approche, une méthode de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 205-240.

Letho, O. (1998). *Mathematics Without Borders. A History of the International Mathematical Union.* Springer.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du Professeur. In, J.L. Dorier & al. (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* pp. 141-156. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Monaghan, J. (2004). Teachers' Activities in Technology-based Mathematics Lessons. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9/3, 327-357.

Ma, L. (1999). Knowing and Teaching elementary Mathematics. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Margolinas, C., Perrin-Glorian, M.J. (Eds). (1997). Recherches sur la modélisation de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3.

Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée.* Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille 1.

Perrin-Glorian, M.J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions de didactique liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM. 6e.* Thèse d'état de l'Université Paris 7.

Perrin-Glorian, M.J. (1994). Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives. In, M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot (Eds), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M.J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/3. p. 279-321.

Pluvinage, F. (1977). *La difficulté des exercices scolaires en mathématiques.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Robert A., Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology*, 2(4), 505-528.

Robert, A., Rogalski, J. (2005) A cross-analysis of the mathematics' teacher activity. An example in a French 10^{th}-grade class. *Educational Studies in Mathematics*, 59/1-2-3. 259-298.

Saltiel, E. (1978). *Concepts cinématiques et raisonnements naturels : étude de la comprehension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en sciences.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Sfard A. (2005). What Could be More Practical Than Good Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 58/3, 393-413.

Schoenfeld, A. (1998). Towards a theory of teaching in context. *Issues in Education.* Vol. 4. Number 1. 1-94.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6/1, 5-68.

Stacey K., Chick H., Kendal M. (Eds), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, The 12th ICMI Study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2004.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions : A synthesis of the research. In, D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 127-146. New York : Macmillan.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2007). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse : Editions Octarès.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10/2-3, 133-170.

Viennot, L. (1979). *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire.* Paris : Hermann.

Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics : a challenge to our beliefs and practices.* Leicester: National Institute of Adult Continuing Education.

Que peut apporter un point de vue modèle – théorique pour les recherches en didactique des mathématiques

Viviane DURAND-GUERRIER
Université de Lyon, Université Lyon 1,
IUFM de Lyon & LEPS, équipe LIRDHIST[11]

« La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.» (Sinaceur, 1991b)

Introduction

Chevallard (2004) écrit : « Dans une mathématisation complète, on s'assure qu'un fait est vrai sur une base expérimentale, puis on s'assure que dans la théorie qu'on a bâtie par ailleurs, on peut déduire le fait en question. » (p.35). La question que soulève ici Yves Chevallard renvoie à une question essentielle en logique qui est celle de la distinction entre *vérité de facto*, qui exprime la conformité aux faits, et *vérité nécessaire* au sein d'une théorie qui s'obtient comme conclusion d'une preuve valide au sein de cette théorie. Cependant, en conformité avec un point de vue logique qui remonte à Aristote, nous dirons que ce ne sont pas les faits qui sont vrais ou déduits, mais les énoncés à propos des faits, ou des états de choses pour employer le vocabulaire de Wittgenstein : « La proposition *montre* ce qu'il en est des états de choses quand elle est vraie. Et elle *dit* qu'il en est ainsi » (Wittgenstein, 1921, 1993, p.53)

La distinction entre *vérité de facto* et *vérité nécessaire* remonte à Aristote, qui l'explicite dans les Premiers Analytiques : une *vérité nécessaire* est une vérité obtenue comme

[11] Laboratoire d'Etude du Phénomène Scientifique, EA 4148, équipe Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et Techniques

conséquence d'un syllogisme concluant[12] à prémisses vraies. Il faudra cependant attendre Wittgenstein pour que cette distinction soit clarifiée en logique propositionnelle, puis Tarski pour la logique des classes et le calcul des prédicats du premier ordre.

Notre hypothèse, soutenue par l'ensemble des travaux que nous conduisons depuis plus de quinze ans, c'est que se joue dans la classe de mathématiques une dialectique cachée de la vérité et de la validité que le point de vue modèle - théorique permet de rendre visible et de prendre en compte dans les analyses (Durand-Guerrier, 2005).

Notre communication comporte deux parties. Dans la première partie, nous présentons brièvement le point de vue modèle – théorique et nous illustrons sur un exemple simple la méthodologie d'analyse qu'il permet de mettre en œuvre. Dans la seconde partie, nous revisiterons à la lumière de ce point de vue certains aspects des travaux de Gérard Vergnaud d'une part, de Guy Brousseau d'autre part.

Première partie

Qu'est-ce qu'un point de vue Modèle - théorique ?

Le point de vue modèle – théorique en logique s'inscrit dans le courant de la sémantique logique initié par Frege. La théorie des modèles est développée par Tarski dans la suite de ses travaux sur la définition sémantique de la vérité, qui met en relation un langage formalisé avec des structures interprétatives de ce langage. Bien qu'il ne fasse pas référence directement aux travaux de Wittgenstein, on peut reconnaître une filiation entre les deux auteurs (Durand -Guerrier, 2006), que l'on retrouve dans la présentation que fait Quine (1950, 1972) du concept d'implication.

I. Une version sémantique du calcul des propositions (Wittgenstein, 1921)

Dans le Tractatus logico philosophicus, Wittgenstein cherche à résoudre l'ensemble des problèmes posés par la philosophie de la logique et pense à ce moment là avoir réussi. Il

[12] Un syllogisme est concluant si dès lors que ses prémisses sont vraies, on peut affirmer la conclusion. « Si A peut être affirmé de tout B et si B peut être affirmé de tout C, alors A peut être affirmé de tout C » est un syllogisme concluant.. « Si A peut-être affirmé de quelques B et B peut être affirmé de tout C » est un syllogisme non concluant

aborde de nombreuses questions philosophiquement très difficiles dont nous ne parlerons pas ici. Dans la perspective didactique qui est la nôtre, nous retenons qu'une lecture attentive de l'ouvrage permet de faire émerger une version sémantique aboutie du calcul des propositions.

Le système élaboré par Wittgenstein est fondé sur deux principes. Étant donné que la valeur de vérité d'une proposition élémentaire exprime sa conformité ou sa non-conformité avec les faits qu'elle prétend décrire, le premier principe affirme qu'il y a exactement deux valeurs de vérité pour les propositions : c'est le principe de *bivalence*. Le second principe affirme que la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend exclusivement de la valeur de vérité des propositions élémentaires qui le compose : c'est le principe de *vérifonctionnalité* (ou d'*extensionalité*).

Dans le système formel, il y a des lettres de variables propositionnelles *p*, *q*, *r*..., qui représentent des propositions, et des signes propositionnels qui expriment les possibilités des conditions de vérité des propositions complexes. Le point de vue adopté est combinatoire : ainsi pour *n* propositions, il y a *2 exp* 2^n groupes possibles de conditions de vérité, soit pour deux propositions, seize groupes possibles. On retrouve naturellement en interprétant certains de ces groupes les connecteurs propositionnels classiques : conjonction, disjonction, implication, équivalence etc[13]. Par exemple, si on prend comme référence les possibilités (VV, VF, FV, FF) pour deux propositions, alors la distribution (VFVV) correspond à l'implication.

Ceci conduit Wittgenstein à considérer deux notions fondamentales : la *tautologie* et la *contradiction*. La *tautologie* est un énoncé du système formel qui prend la valeur de vérité *vrai* pour toute distribution de valeur de vérité (dans le cas de deux propositions, c'est le signe propositionnel (VVVV)). Une tautologie donne lieu à une proposition vraie pour toute interprétation dans tout fragment de discours. La *contradiction* est un énoncé du système formel qui prend la valeur de vérité *faux* pour toute distribution de valeur de vérité (dans le cas de deux propositions, c'est le signe propositionnel (FFFF)). Une contradiction donne lieu à une proposition fausse pour toute interprétation dans tout fragment de discours. Contrairement aux autres propositions, les interprétations des tautologies et des contradictions ne nous disent rien sur le monde. Pour autant « [elles] ne sont pas dépourvues de sens ; elles appartiennent au symbolisme, tout à fait à la manière dont le « 0 » appartient au symbolisme arithmétique. » (op.cité, p. 68)

[13] Ces seize groupes sont décrits dans Wittgenstein, 1993, p.71

Dans la description des seize signes propositionnels pour deux lettres de variable propositionnelles, Wittgenstein donne comme exemple de tautologie :
« si p, alors p ; si q, alors q et $(p \supset^{14} q \,.\, p \supset q)$ » (op. cite. p.71).
L'apparition de la troisième tautologie n'est pas un hasard. En effet, cette tautologie correspond à la règle d'inférence qui affirme que l'on peut déduire « q » de « $p \supset q \,.\, p$ », appelée *Modus Ponens* ou *Règle du détachement*. Plus généralement, les tautologies de la forme « $S \Rightarrow S'$ » soutiennent les règles d'inférences classiques (Quine, 1950, 1972). Wittgenstein en conclut que « des « lois de la déduction », qui - comme chez Frege et Russel - doivent justifier les déductions sont vides de sens et seraient superflues » (p.73). C'est également le point de vue de Quine.
À la fin de l'ouvrage Wittgenstein revient sur cette question qu'il développe. Il en tire plusieurs conséquences importantes : que les lois logiques ne peuvent pas être confirmée ni réfutées par l'expérience ; que la logique est la théorie des formes et de l'inférence ; que la marque de la logique n'est pas la validité générale (ce qui vaut accidentellement pour toutes choses), mais une validité essentielle ; que la démonstration logique d'une proposition pourvue de sens (en particulier les propositions mathématiques) et la démonstration *en logique* doivent être deux choses totalement différentes (pp.99-102), toutes choses qu'il convient de prendre en compte si l'on s'intéresse à la question de l'articulation entre la logique, le langage et le raisonnement mathématiques dans une perspective didactique.

II. La conception sémantique de la vérité (Tarski, 1936, 1944)

Le projet de Tarski tel qu'il apparaît dans les deux articles de 1936 et 1944 est de résoudre un problème philosophique difficile, celui de la définition de la vérité, dont il dit qu'il est l'un des plus difficile posé à la philosophie. Plus précisément, pour Tarski, « Le problème principal est de donner une définition de la vérité matériellement adéquate et formellement correcte. » (Tarski, 1974, p.269). Il se place pour cela dans une filiation qui remonte à Aristote, et que nous avons rencontré chez Wittgenstein :

> « Dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « *classique* » de la vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle « vraiment » signifie la même chose que « conformément à la réalité »

[14] « $\supset$ » est le symbole d'implication ; « . » est le symbole de la conjonction.

(par opposition à la conception « *utilitariste* », d'après laquelle « vrai » signifie utile sous tel ou tel rapport). » (Tarski, 1972; p. 160)

Dans l'article de 1936, Tarski met en place une définition sémantique de la vérité, ce qui l'amène à préciser ce qu'il faut entendre par cette discipline du point de vue de la philosophie logique dans laquelle il se place :

> « La sémantique est une discipline qui, en termes généraux, traite de certaines relations entre les expressions d'un langage et les objets (ou états de choses) auxquels réfèrent ces expressions.» (Tarski, 1936a, 1972)

Les exemples typiques de concepts sémantiques qu'il mentionne sont les concepts de désignation, de définition et de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément. Cette dernière notion très simple qui renvoie à la notion de vérification d'une équation par un élément s'avère jouer un rôle central dans l'élaboration de la définition sémantique de la vérité. En effet, un obstacle auquel on se heurte lorsque l'on veut définir la vérité de phrases complexes analysées en termes de fonctions propositionnelles[15], et variables et / ou constantes, c'est l'impossibilité de pouvoir construire directement une définition récursive de la vérité, contrairement à ce que l'on peut faire pour les propositions non analysées, grâce aux tables de vérité. Le détour employé par Tarski consiste à introduire la notion d'*interprétation d'une fonction propositionnelle* d'un langage donné dans un « domaine de réalité » par une phrase ouverte, puis la notion de *satisfaction d'une phrase ouverte* par un élément de l'univers du discours. Ceci lui permet ensuite de donner la *définition de la vérité d'une phrase complexe* en s'appuyant sur les connecteurs propositionnels, tels qu'ils sont définis par exemple chez Wittgenstein, et sur les quantificateurs universel (*pour tout*) et existentiel (*il existe au moins un*), qui sont définis de manière objectuelle, en accord avec le sens commun. Il distingue également le langage objet, celui pour lequel on met en place la définition de la vérité, et le métalangage qui permet de parler du langage objet. Il précise que la notion de vérité ainsi définie dépend du langage formalisé objet des investigations. Par cette définition, il réalise son projet d'une définition formellement correcte et matériellement adéquate. D'une part, la construction récursive de la vérité *via* la notion de satisfaction et la distinction entre langage objet et métalangage met à l'abri des paradoxes sémantiques ; d'autre part, la notion de modèle d'une formule d'un langage formalisé dans

[15] Ce terme introduit par Frege et Russel est remplacé aujourd'hui par celui de prédicats ; elles permettent de modéliser les propriétés et les relations.

un domaine de réalité (par exemple une théorie mathématique) permet d'articuler la notion de vérité avec la notion de validité logique, ce qui est en particulier l'objet de la *méthodologie des sciences déductives* qui deviendra *la théorie des modèles* (Tarski, 1960). Étant donnés un langage formalisé $\mathcal{L}$, une syntaxe, des énoncés bien formés (des formules) : *F, G, H...* et une structure interprétative Σ (un domaine de réalité, une théorie mathématique), on dira que Σ est *un modèle* d'une formule *F* de $\mathcal{L}$ *si et seulement si* l'interprétation de *F* dans Σ est un énoncé vrai. Pare exemple, dans le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité, on peut considérer la formule *F* : « $\forall x \forall y$ ($S(x,y) \wedge S(y,x) \Leftrightarrow x=y$) », et la structure interprétative Σ de l'ensemble des nombres réels ordonnés, dans laquelle on interprète *S* par la relation binaire « être inférieur ou égal » ; la formule *F* est alors interprété par la proposition : « la relation *'inférieur ou égal'* est antisymétrique », qui est un théorème de la théorie considérée. Il est facile de voir que d'autres interprétations de cette formule peuvent donner lieu à des propositions fausses. Cette notion de modèle d'une formule permet enfin de définir la notion clé de la théorie modèle ; à savoir *la notion de conséquence logique d'un point de vue sémantique* (Tarski, 1936b)*:* une formule *H* est *conséquence logique* d'une formule *G* si et seulement si tout modèle de *G* est modèle de *H*, où l'on reconnaît une généralisation au calcul des prédicats de la notion de « suivre de » définie par Wittgenstein (1921). Par exemple, la formule *H* : « q(x) » est conséquence logique de la formule *G* « $p(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x))$ » (on reconnaît une extension de la règle du Modus Ponens), ou encore la formule H : « q(x) » est conséquence logique de la formule F : « $\forall y$ q(y) » (liée à la règle d'instantiation universelle : *ce qui vaut pour tous vaut pour chacun*).

III. Deux résultats fondamentaux en théorie des modèles

En appui sur la théorie sémantique de la vérité, Tarski développe la méthodologie des sciences déductives (Tarski, 1960). Étant donné ce qu'il appelle une *mini théorie*[16], il dégage un système axiomatique formel (sans objets) dont la mini théorie de départ est une interprétation, mais pour lequel d'autres interprétations (d'autres modèles) peuvent être considérées Le premier résultat établi par Tarski dans le cadre de la théorie des modèles est le *théorème de la déduction* qui affirme que :

[16] L'exemple choisi est *la congruence des segments.*

« Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre (...). Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (op. cité p.12)

Ce théorème, prouvé également à la même époque par d'autres auteurs, met en évidence le fait que les systèmes formels comme le *calcul des prédicats*, au-delà de la question de savoir s'ils font partie ou non des mathématiques, jouent un rôle à un niveau métamathématique, en fournissant les outils logiques de contrôle de la validité. Ces outils de contrôle logique ne peuvent pas être pris en charge dans les théories mathématiques classiques dans lesquelles les objets jouent un rôle déterminant ; dans ces théories, les contrôles se font par l'expertise mathématique[17].

Une conséquence immédiate du théorème de la déduction est la possibilité de réfuter qu'un énoncé soit conséquence logique d'un système axiomatique donné. C'est ce que Tarski appelle une *preuve par interprétation :* pour prouver qu'un énoncé donné de la théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la formule associée à cet énoncé. Un exemple classique est fourni par le cinquième postulat d'Euclide et les géométries non-euclidiennes.

IV. Un exemple de l'utilisation de la théorie élémentaire des modèles pour résoudre un problème de « certitude »

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'illustrer sur un exemple très simple la méthodologie des sciences déductives ; la situation que nous allons analyser avec cette méthodologie est issue des épreuves du Kangourou des mathématiques 1994 et fait l'objet d'une présentation plus détaillée dans Durand-Guerrier, 2007a. Il s'agit du dernier Item de l'épreuve dont la présentation a été relevée sur Internet.

Les gens malins répondront tous juste à cette question ; ceux qui

[17] Expertise dont ne dispose évidemment pas les novices, qui le plus souvent ne disposent pas non plus des outils de contrôle logique (Durand-Guerrier & Arsac, 2003, 2005).

répondent au hasard ne sont pas malins. Alors il est certain que :

A. Tous ceux qui répondent au hasard répondent faux.
B. Ceux qui sont malins répondent au hasard.
C. Ceux qui répondent juste sont malins
D. Ceux qui s'abstiennent à cette question sont malins
E. Les réponses A, B, C et D sont fausses.

Cet item soulève un certain nombre de questions de nature sémantique. Tout d'abord, de par la formulation de la question « il est certain que », *versus* « je suis certain que », il apparaît clairement que la réponse attendue relève d'une certitude *objective* plutôt que *subjective*, qui pourrait renvoyer à des arguments de nature pragmatique, si bien que cette réponse est attendue à l'intérieur du cadre proposé. D'autre part, celui qui répond contribue à modifier l'univers du discours, ce qui peut être la source de paradoxes. Enfin, la cinquième phrase dit quelque chose sur la vérité des quatre premières phrases, et se situe donc au niveau d'un *métalangage* par rapport au *langage objet* de la situation. Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux propositions A et B, les propositions C et D se traitant plus ou moins de la même manière. Nous allons examiner la question suivante : la proposition A (respectivement B) ou sa négation est-elle conséquence logique des deux propositions assumées dans l'énoncé de l'Item ? Ceci en utilisant la méthodologie des sciences déductives.

Concernant la possibilité d'une modélisation à la manière de Tarski, nous avons tous les ingrédients nécessaires. Nous disposons d'une *mini - théorie déductive* avec : un univers du discours : *la population formée de ceux qui répondent au test ;* deux axiomes : *les gens malins répondront tous juste à cette question* et *ceux qui répondent au hasard ne sont pas malins.* Pour construire le système axiomatique formel associé, nous introduisons cinq lettres de prédicats *m, j, f, s, h* qui seront interprétées respectivement par les propriétés *« être malin », « répondre juste », « répondre faux », « s'abstenir » « répondre au hasard.* Ceci va nous permettre de formaliser les axiomes et les quatre premières phrases proposées[18]. Comme chaque fois que l'on formalise une théorie exprimée en langue naturelle, il nous faut introduire explicitement des axiomes supplémentaires, qui restent

[18] Comme nous l'avons dit plus haut, la cinquième phrase appartient au méta langage et ne peut pas se formaliser dans le langage objet

implicites dans la formulation en langage ordinaire. Il s'agit ici d'indiquer que « tous ceux qui font le test *s'abstiennent* ou *répondent juste* ou *répondent faux* », la disjonction étant exclusive. On obtient ainsi quatre axiomes supplémentaires, auxquels nous avons choisi de rajouter que chacun des cinq prédicats est d'extension non vide, ce qui donne encore cinq axiomes supplémentaires.[19] On obtient ainsi le système axiomatique formel présenté ci-dessous, que nous noterons T.

Fragment de discours	Calcul des prédicats
Les gens malins répondront tous juste à cette question	$A_1 : \forall x\ (\boldsymbol{m}(x) \Rightarrow \boldsymbol{j}(x))$
Ceux qui répondent au hasard ne sont pas malins	$A_2 : \forall x\ (\boldsymbol{h}(x) \Rightarrow \neg \boldsymbol{m}(x))$
Tous ceux qui font le test soit s'abstiennent, soit répondent juste, soit répondent faux.	$A_3 : \forall x\ (\boldsymbol{s}(x) \vee \boldsymbol{j}(x) \vee \boldsymbol{f}(x)$
	$A_4 : \forall x\ \neg(\boldsymbol{j}(x) \wedge \boldsymbol{f}(x))$
Il existe au moins une personne dans chaque catégorie	$A_5 : \forall x \neg(\boldsymbol{j}(x) \wedge \boldsymbol{s}(x))$
	$A_6 : \forall x\ \neg(\boldsymbol{f}(x) \wedge \boldsymbol{s}(x))$
	$A_7 : \exists x\ \boldsymbol{j}(x)$ $A_8 : \exists x\ \boldsymbol{f}(x)$
	$A_9 : \exists x\ \boldsymbol{s}(x)$ $A_{10} : \exists x\ \boldsymbol{m}(x)$
	$A_{11} : \exists x\ \boldsymbol{h}(x)$

Figure 1 : Un système axiomatique formel

Dans le langage choisi, les propositions A et B se formalisent de la manière suivante :

A : « *Tous ceux qui répondent au hasard répondent faux* »

Φ : « $\forall x\ (\boldsymbol{h}(x) \Rightarrow \boldsymbol{f}(x))$ »

B : « *Tous ceux qui sont malins répondent au hasard* »

Ψ : « $\forall x\ (\boldsymbol{m}(x) \Rightarrow \boldsymbol{h}(x))$ »

À l'issue du test du *Kangourou*, nous avons une réalisation du système axiomatique formel T, mais nous ne savons pas laquelle, puisqu'en effet, nous ne connaissons pas l'extension des différents prédicats. La certitude *objective* ne peut donc a priori se fonder que sur une forme de nécessité : pour être certain que « A » (respectivement « non A »), il est nécessaire et suffisant que « Φ » (respectivement « $\neg\Phi$ ») soit conséquence logique des axiomes de T. De même, pour être certain que « B » (respectivement « non B »), il est

[19] Il s'agit bien d'un choix qui permet de simplifier l'analyse

nécessaire et suffisant que « Ψ » (respectivement « ¬Ψ ») soit conséquence logique des axiomes de T.

Nous allons montrer à l'aide d'une preuve par interprétation que ce n'est le eas ni pour « A », ni pour « non A ». Pour cela nous construisons un modèle fini à trois éléments de T dans lequel l'interprétation de Φ est une phrase vrai et un modèle fini à trois éléments de T dans lequel l'interprétation de Φ est une phrase fausse.

Modèle de T et de Φ $\Sigma = < \mathbf{U}, M, J, F, S, H_1 >$	**Modèle de T et de ¬Φ** $\Sigma = < \mathbf{U}, M, J, F, S, H_2 >$
Univers du discours $\mathbf{U} = \{\alpha, \beta, \delta\}$. Extension des prédicats : $J^* = \{\alpha\}$ $F^* = \{\beta\}$ $S^* = \{\delta\}$ $M^* = J^* = \{\alpha\}$ $H_1^* = F^* = \{\beta\}$ Chaque instance de « $h(x) \Rightarrow f(x)$ » est une proposition vraie. Φ est interprétée par un phrase vraie	Univers du discours $\mathbf{U} = \{\alpha, \beta, \delta\}$. Extension des prédicats : $J^* = \{\alpha\}$ $F^* = \{\beta\}$ $S^* = \{\delta\}$ $M^* = J^* = \{\alpha\}$ $H_2^* = S^* = \{\delta\}$ Comme on a $H(\delta)$ et $\neg F(\delta)$, une des instances « $h(x) \Rightarrow f(x)$ » est fausse . Φ est interprétée par un phrase fausse

Figure 2 : une preuve par interprétation

On conclut de ce qui précède que ni « Φ », ni « ¬Φ » ne sont conséquences logiques de T et par conséquent, on ne peut pas affirmer « il est certain que la phrase A est fausse ». L'énoncé est contingent[20] pour l'élève au moment où il doit répondre.

On montre par contre facilement que « ¬Ψ » est conséquence logique de T. Comme **T** est consistante (elle admet au moins un modèle), tout modèle de **T** est modèle de « ¬ψ ». Par conséquent, on peut affirmer « Il est certain que la phrase B est fausse ».

Finalement, il n'est donc pas certain que « les phrases A, B, C et D sont fausses » ; par contre, il est certain que « aucune des réponses A, B, C ou D ne convient ». Ceci nous renvoie à la cinquième phrase proposée aux élèves « les réponses A, B, C et D sont fausses », considérée par les auteurs de l'épreuve comme la réponse correcte. Nos analyses

[20] Un énoncé est contingernt pour un sujet donné à un instant donné si le sujet n'a pas, à cet instant, les moyens de se prononcer sur la valeur de vérité de cet énoncé. La vérité peut-être intrinsèque (l'énoncé n'a pas de valeur de vérité) ou extrinsèque (l'énoncé à une valeur de vérité, mais le sujet ne la connaît pas) Durand-Guerrier, 1995,1996)

montrent que c'est bien le cas si on choisit la deuxième interprétation, mais pas si on choisit la première interprétation, qui pourrait sembler la plus naturelle[21].

Cet exemple montre clairement selon nous que le point de vue modèle - théorique initié par Tarski permet de repenser l'articulation entre *vérité*, *nécessité* et *certitude*. Plus généralement, en se plaçant au plus près de la notion commune de vérité, cela lui permet d'opérer un va-et-vient entre formalisme logique et interprétation dans un modèle et de réduire ainsi la distance supposée entre logique de sens commun et logique mathématique, et de définir

> « (...) un type de rapport original où il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permise par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète » (Sinaceur H. 1991a, p.313).

Deuxième partie

Place et rôle de la logique dans les travaux en didactique des mathématiques :Deux exemples

I. Le rôle des catégories logiques dans les travaux de Gérard Vergnaud[22]

La place des questions de logique apparaît chez Vergnaud à plusieurs reprises et de manière très explicite dans l'article de 1991 paru dans la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques*, dans lequel il insiste sur la distinction entre propositions et fonctions propositionnelles (pp. 142-144) et sur l'intérêt des catégories logico mathématiques pour parler des processus de conceptualisation :

> « Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories

[21] C'est Sylvie Coppé qui avait attiré mon attention sur cet Item du Kangourou, car en raison précisément de l'ambiguïté de cette dernière réponse, il se pourrait qu'il n'y ait aucune réponse correcte, contrairement à la règle pour les épreuves du Kangourou des mathématiques

[22] Ceci est développé plus longuement dans Durand-Guerrier, 2007a

de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets - arguments » (Vergnaud, 1991, p. 145)

On reconnaît dans *les catégories explicites de la connaissances* mentionnées ici les éléments qui sont modélisés dans le calcul des prédicats du premier ordre, éléments qui apparaissent ici dans une relation dialectique entre l'explicite et l'implicite à l'œuvre dans les processus de conceptualisation, qui fait écho à l'articulation entre forme et contenu, entre syntaxe et sémantique, que nous avons rencontré chez Tarski. Comme on le sait, les invariants opératoires jouent un rôle essentiel dans les processus de conceptualisation ; ils fournissent des propositions *tenues pour vraies sur le réel*, lesquelles sont nécessaire pour l'action :

> « Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorèmes-en-acte, y compris pour d'autres domaines que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence ; ils peuvent rester implicites : ils peuvent même être faux ». (Vergnaud, 2001, p.25)

Ainsi un théorème en acte est un invariant opératoire ayant un certain domaine de validité. Il existe donc des domaines d'interprétation (des contextes ou domaines de réalité) dans lesquels un théorème en acte donné conduit à une règle d'action valide, même si ce n'est pas un théorème de la théorie mathématique de référence, ou de la théorie locale considérée, c'est-à-dire même s'il ne découle pas logiquement des axiomes assumés dans cette théorie. Il se peut que pendant un certain temps, le sujet ne rencontre que des interprétations dans lesquelles le théorème en acte conduit à des règles d'actions valide, ce qui renforce la confiance du sujet. C'est lorsqu'un théorème en acte est utilisé en dehors de son domaine de validité qu'il peut conduire à des décisions d'action, ou a des prévisions erronées. Éprouver la limite de validité de l'énoncé se fait en classe par la rencontre provoquée (par le professeur) avec une interprétation (un contexte, un domaine de réalité) dans laquelle l'utilisation de ce théorème en acte est mis en défaut, en particulier parce qu'il fait émerger une contradiction entre les résultats qu'il permet de prévoir et les résultats que l'on peut éprouver expérimentalement. Un exemple très résistant de théorème en acte est fourni par la règle de comparaison des nombres décimaux : « Pour comparer deux nombres décimaux, je compare les parties entières ; si elles sont égales, je compare les parties

décimales ». Le domaine de validité de cette règle est étendu puisqu'elle vaut dès lors que l'on travaille avec des décimaux ayant même format. On peut la mettre en défaut en faisant par exemple comparer des aires de rectangles avec des mesures bien choisies permettant que la comparaison par décomposition - recomposition rendent indiscutable la contradiction entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux. Ceci permet alors d'établir que soit l'on doit s'assurer que l'on travaille toujours avec des décimaux au format, soit il faut utiliser une autre règle de comparaison, valide dans toutes les interprétations puisqu'elle s'appuie sur un théorème de la théorie des Décimaux, à savoir la comparaison chiffre par chiffre de gauche à droite pour la partie décimale. Comme le montrent bien les analyses de Vergnaud, il serait tout à fait illusoire de vouloir éradiquer les théorèmes en actes de portée seulement locale, au motif qu'il vaudrait mieux enseigner directement ce qui est valide ; en effet, leur développement participe pleinement du processus de conceptualisation, et contribue à l'articulation nécessaire entre la partie visible et la partie cachée de l'iceberg, entre la forme et le contenu.

II. Le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques

Pour modéliser les situations de validation, Guy Brousseau se réfère au modèle de la logique dialogique de Lorenzen (1962), en lui empruntant les notions d'opposant et de proposant :

> « Dans le schéma de la validation explicite (ou schéma de la preuve), l'émetteur devient un proposant et le récepteur devient un opposant ; on est en présence d'un enjeu de vérité et il s'agit « de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoir déjà établis. (Brousseau, Conférence de Montréal, p.8) »

Dans la logique dialogique de Lorenzen, la modélisation en termes de dialogue permet de traiter la question de la vérité à l'intérieur du système logique, tandis que l'on voit ici pour Brousseau qu'elle permet de traiter la notion de nécessité et partant de validité logique, qui comme nous l'avons vu avec l'exemple du Kangourou, permet de prendre en compte la notion de certitude objective. C'est ainsi, nous semble-t-il, qu'on peut interpréter l'enjeu de vérité tel qu'il est présenté dans la citation ci-dessus. Cette interprétation est également en accord avec ce qu'écrit Brousseau (1986, 1998) à propos de la validité logique :

> « (...) il est utile de conserver la distinction faite en logique entre l'énoncé considéré comme une expression bien formée ou comme un ensemble de

> réalisation et l'assertion qui enclôt cet énoncé dans une déclaration métathéorique sur sa validité, sur un domaine donné ou sa déductibilité d'un système d'axiomes." (p. 100)

Toutefois, il semble assez clair que le modèle de Lorenzen est insuffisant pour rendre compte de la richesse des situations de validation telles qu'elles sont décrites dans la théorie des situations.

> « Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produit d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part. Les deux joueurs échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple milieu/message » (Brousseau, 1998, p. 109)

Comme le montre la citation ci-dessus, il est nécessaire de prendre en compte et d'articuler les aspects syntaxique et sémantique. En effet, dans la plupart des situations, si les échanges portent sur les énoncés, ils réfèrent le plus souvent à des propriétés d'objets ou des relations qui se dégagent à partir des rétroactions du milieu obtenues comme réponses aux actions des sujets. En outre, dans les situations de validation, on peut être amené à mettre à l'étude la théorie elle-même :

> « Toutes les assertions de la théorie sont susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction » (Brousseau, 1998, p. 111)

Dans le paragraphe suivant, nous présentons une analyse du travail d'un groupe d'enseignants en formation continue en situation de résolution de problème qui permet d'illustrer ce que l'on peut entendre par « la théorie est objet d'étude et de construction ».

III. Un exemple de « travail de la théorie » en géométrie des solides[23]

Le problème qui a été proposé aux participants est un problème classique de géométrie des solides. Il s'agit de déterminer tous les polyèdres réguliers, c'est-à-dire les polyèdres convexes dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables, et ayant le même nombre de faces à chaque sommet. La première partie de l'activité de formation est

[23] Ceci est développé plus longuement dans Durand-Guerrier, 2007b

organisée suivant les modalités du problème ouvert. Le matériel mis à disposition, dont l'utilisation est laissée à la discrétion des participants, est varié : règles, équerres, compas, ciseaux, feuilles de papiers, pièces en plastiques pouvant s'assembler type Clixi ou Polydrons,

Les polyèdres réguliers sont au nombre de cinq, ils sont connus sous le nom de *Solides de Platon.* Il n'y a pas de polyèdre régulier à faces hexagonales ; en effet, lorsque l'on assemble trois hexagones réguliers, on obtient un angle plein (de 360°), autrement dit ceci permet un pavage du plan ; il n'est donc pas possible d'obtenir un angle dièdre. Or, par ailleurs, il faut au moins trois faces pour obtenir le sommet d'un polyèdre. Très régulièrement, lorsque l'on propose cette situation, certains groupes envisagent la possibilité d'obtenir un polyèdre régulier à faces hexagonales, ceci étant conforté éventuellement par la souplesse des pièces en plastique. C'est ce qui se produit dans le groupe de quatre enseignants en poste dans l'AIS[24] en formation continue dont nous allons analyser ci-dessous quelques échanges, à partir d'un corpus transcrit et recueilli en 2004[25]. Notons que ces échanges sont tout à fait représentatifs de ce que l'on peut régulièrement observer en formation avec ce problème[26].

Nous allons nous intéresser à l'évolution de ce que nous appelons la « théorie locale » du groupe. Cette théorie est locale en ce sens qu'elle ne prend en compte que les questions liées directement au problème de recherche. Elle comporte la définition des polyèdres réguliers (et les sous définitions associées comme *hexagones réguliers, faces, sommets, polyèdre convexe*[27]), et deux axiomes explicités par les participants :

A_1 : Il y a exactement un polyèdre régulier par polygone régulier

A_2 : Il y a une infinité de Polygones réguliers convexes.

Notons que le premier axiome (contrairement au second) n'est pas un théorème de la géométrie euclidienne, et que précisément, le problème vise à le reconsidérer.[28]

De ces deux axiomes découlent deux conséquences logiques :

E_1 : il est possible de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales,

E_2: il y a une infinité de polyèdres réguliers.

À ces deux énoncés, va venir s'en ajouter un troisième :

---

[24] Dispositif d'Adaptation et d'Intégration Scolaire pour des élèves en situation de handicap

[25] Une description plus complète se trouve dans Dias & Durand-Guerrier, 2005

[26] Voir par exemple Durand-Guerrier, 2004a

[27] La question des définitions dans ce problème est étudiée dans Durand-Guerrier & Héraud, 2007, à partir d'un autre corpus recueilli dans une classe de CM2 (élèves de 10-11 ans)

[28] On pourrait éventuellement parler ici d'axiomes en actes, cependant, nous n'avons pas fait ce choix, car il ne nous semble pas que ces axiomes soient à proprement parlé associés à des invariants opératoires,

E_3 : il existe des polyèdres réguliers ayant un très grand nombre de faces.

Cet énoncé, qui pourrait sembler découler lui aussi des axiomes de la théorie locale du groupe, est en fait légitimé par une référence externe (diamants) : cet énoncé est vrai car il est en conformité avec les faits. Il vient conforter l'énoncé E_1. En effet, l'énoncé E_1 oriente fortement l'action de certains membres du groupe, qui associent un nombre de plus en plus important de pièces dans l'espoir d'obtenir un volume.

Parallèlement, dans le groupe, un des participants soutient la négation de l'énoncé E_1, soit

E_4 : « On ne peut pas réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales », ou encore

$E_{4'}$ « Aucun polyèdre régulier n'a des faces hexagonales »

Ceci s'appuie pour lui sur un nouvel axiome :

A_3 « On peut paver le plan avec des hexagones »

La référence qui permet de poser ce nouvel axiome est une référence externe (le carrelage). Dès lors qu'il est apparu, il reste présent tout au long des échanges, et sert de référence pour son auteur. À un certain moment, dans le groupe, les deux énoncés contradictoires E_1 et E_4 sont en concurrence. En vertu du principe de contradiction, il faut rejeter l'un des énoncés. Dans une telle situation, on peut soit a)travailler à établir l'énoncé existentiel E_1 ; b) prouver que l'énoncé universel E_4 découle des axiomes ; c) retravailler la théorie (axiomes et/ou définitions) ; d) mettre en cause le dispositif expérimental.

Celui qui soutient l'axiome A_3 commence par mettre en cause le dispositif expérimental en évoquant la possibilité de « prendre des trucs rigides » ; puis il propose un aménagement de la définition en proposant de « jouer sur les petits espaces » pour que le solide, que deux de ses collègues restant sur la position a) cherchent à construire, réponde à la définition

Ceci va durer jusqu'à ce que l'un des deux membres du groupe qui jusque-là était sur la position a) introduise un nouvel axiome :

A_4 : pour réaliser un polyèdre, il faut pouvoir faire un angle (sous-entendu un angle dièdre)

Il y a alors accord sur le fait que ceci permet d'éliminer E_1 (*il est possible de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales),* qui par ricochet détruit l'axiome A_1 (*Il y a exactement un polyèdre régulier par polygone régulier),* en fournissant un contre-exemple à l'énoncé général. Il faut noter toutefois que ceci n'est pas explicité par le groupe et que l'énoncé E_2 (*il existe une infinité de polyèdres réguliers*) n'est pas remis en cause. Cet énoncé ne découle plus à ce moment-là des axiomes assumés ; nous savons qu'il est faux,

mais leur recherche va cependant les conduire à le *tenir pour vrai* en considérant les polyèdres convexes obtenus avec les losanges.

Dans cette analyse rapide, nous avons essayé de mettre en lumière ce travail de la théorie qui nous paraît ici particulièrement révélateur de ce que, en situation de recherche de problème, certains énoncés particulièrement robustes ne sont que difficilement remis en cause par l'expérience. Dans le cas qui nous intéresse, le renoncement à l'existence du polyèdre à faces hexagonales nécessite que les rétroactions du milieu fassent émerger un nouvel axiome qui permette de prendre en compte la contradiction entre deux énoncés qui coexistaient pourtant depuis déjà un certain temps dans les échanges du groupe. Cette étude de cas illustre également le va-et-vient entre théorie et expérience qui caractérise la dimension expérimentale en mathématique, pour lequel le point de vue modèle – théorique fournit des outils d'analyse féconds[29].

Conclusion

Parce qu'elle adopte un point de vue sémantique et se situe sur un plan métamathématique, la théorie des modèles fournit un cadre pour analyser l'activité des sujets en situation de résolution de problème, en particulier en mettant à la disposition du chercheur une méthodologie pour repérer et étudier l'élaboration, l'évolution et le dépassement éventuel des axiomatiques locales. Pour autant, il lui manque la dimension dialogique très présente dans le modèle de Brousseau. Nous explorons actuellement ce que pourrait apporter la sémantique des jeux de Hintikka pour l'étude des interactions langagières en situation d'élaboration de preuves mathématiques (thèse en cours de Thomas Barrier).

Références

ARISTOTE *Organon III Les Premiers Analytiques*, traduction Jean Tricot 1983, Paris : Vrin.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*7(2) 33-115.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, pp.237-241

[29] Voir pour d'autres exemples Durand-Guerrier, 2004a et 2005

BROUSSEAU, G. , Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal , A paraître dans « *Interactions didactiques* » (Genève), consulté en ligne
http://pagesperso-orange.fr/daest/guybrousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

CHEVALLARD Y. (2004) Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *Les cahiers Pédagogiques,* n°427, 34-36.

DIAS T. & DURAND-GUERRIER V. (2005), Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères-IREM*, 60, 61-78.

DURAND-GUERRIER, V. (1995) Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Thibergien, *Différents types de savoirs et leurs articulations*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DURAND-GUERRIER, V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.*Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER (2004a) Deux problèmes pour penser les rapports entre mathématiques et réalité, in *Actes du XXX° Colloque national des professeurs et formateurs de Mathématiques chargés de la formation des maîtres, Avignon 19-21 mai 2003*, IREM de Marseille.

DURAND-GUERRIER, V. (2004b) La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques, in Durand-Guerrier,V. & Tisseron, C. (eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2003*, IREM de Paris 7.

DURAND-GUERRIER, V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.",* Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger les Recherches, Université Lyon 1, IREM de Lyon

DURAND-GUERRIER, V. (2006), "Lire le Tractatus dans une perspective didactique", in M. Ouelbani (dir.), *Thèmes de Philosophie Analytique*, Tunis: Université de Tunis, Faculté des Sciences Humaines et Sociales, 49-66

DURAND-GUERRIER, V. (2007a) Théorie des modèles et certitude. À propos d'une récréation mathématique, in *Activité humaine et conceptualisation- Questions à Gérard Vergnaud*, (Coordonné par M. MERRI), Presses Universitaires de Toulouse –le Mirail

DURAND-GUERRIER, V. (2007b) Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski, in *Actes électroniques du colloque : Quelles references épistémologiques pour les didactiques*, Bordeaux, 25-27 mai 2005.

DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G.: (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, 295-342.

DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G., (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, in *Educational Studies in Mathematics*

DURAND-GUERRIER, V. & HERAUD, J.L. (2006) Définition et règle, le mythe de la transparence en Géométrie, in Guernier, M.C., Durand-Guerrier, V. & Sautot, J.P. (eds) *Interactions verbales, didactiques et apprentissages, recueil, traitement et interprétation didactiques des données langagières en contextes scolaires*, Presses universitaires de Franche-Comté

LORENZEN, P. (1962) *Metamathematique*. Edition Gauthier-Villars,

QUINE, W.V.O. (1950) *Methods of logic,* Holt, Rinehart & Winston; Traduction française Armand Colin, 1972

SINACEUR, H, 1991a *Corps et modèles*, Paris : Vrin,

SINACEUR, H. 1991b, Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ?, in *Hommage à Jean Toussaint Desanti*, TER)

TARSKI, A. (1936a) Le concept de vérité dans les langages formalisés, traduction française in G.G. GRANGER (dir.) *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 157-269. Armand Colin, 1972.

TARSKI, A. (1936b) Sur le concept de conséquence, traduction française in G.G. GRANGER (dir.) in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 141-152. Armand Colin, 1972.

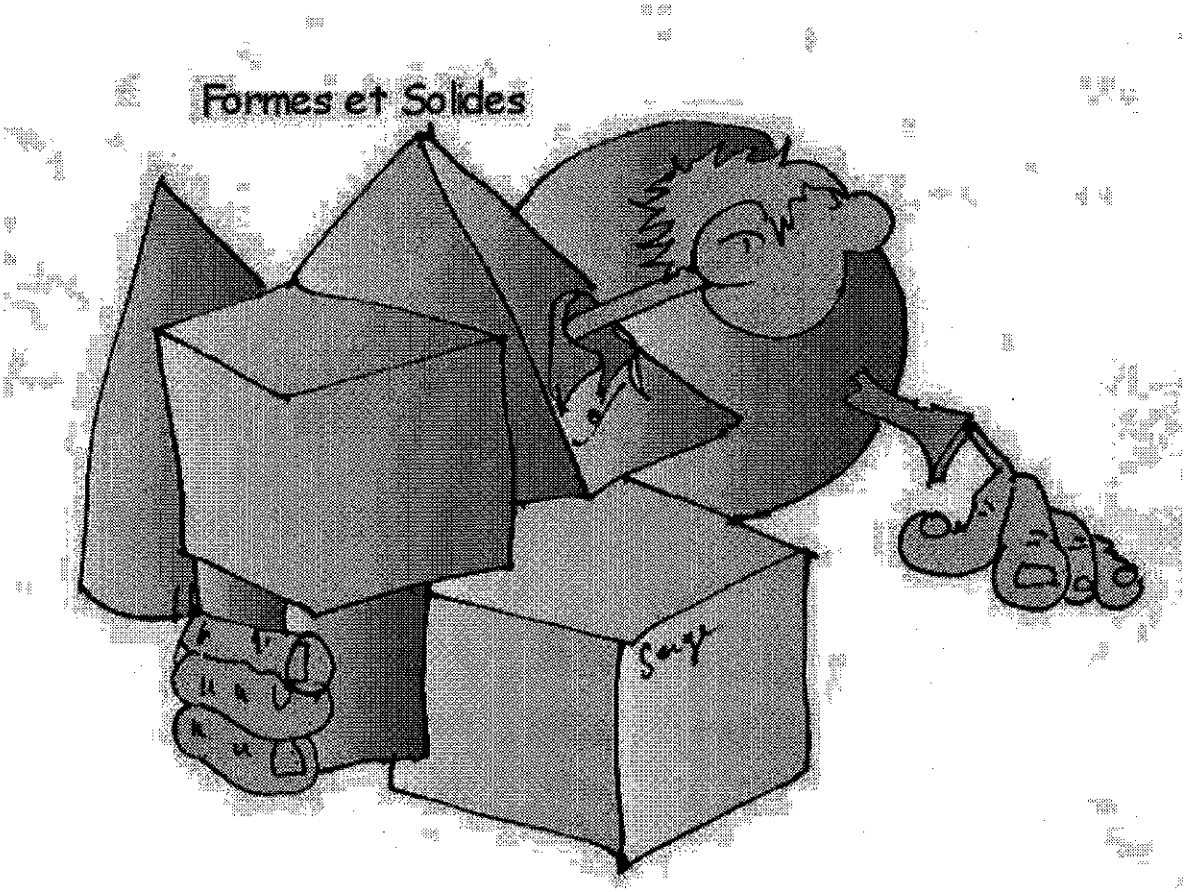
TARSKI, A. (1944) La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique, traduction française Georges KALINOWSKI in G.G. GRANGER (dir.) *Logique, sémantique et métamathématique, volume 2* : 265-306. Armand Colin, 1974..

TARSKI, A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris-Louvain : Gauthier-Villars

VERGNAUD, G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3 pp.133-169

VERGNAUD, G. (2002), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, in *Actes du Colloque GDM-2001 Jean Portugais (Ed) La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation, pp. 6-27.*

WITTGENSTEIN, L. (1921) *Tractatus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française G.G. GRANGER, Gallimard, 1993



L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique

Virginie Deloustal-Jorrand
IUFM de Strasbourg

Introduction

Notre étude est motivée par la place essentielle du concept d'implication à la fois dans la vie de tous les jours et dans l'activité scientifique.

D'une part, l'implication de la logique naturelle est omniprésente dans notre vie quotidienne et nous est nécessaire. Nous l'utilisons, par exemple, dès que nous employons les expressions *Si ... alors...* ou *il suffit que...* ou encore *il est nécessaire que ...* Mais, alors que son utilisation nous paraît naturelle, une définition de l'implication ne va pas de soi. En effet, toute définition est en fait la donnée d'une équivalence, or l'équivalence n'est rien d'autre que la conjonction de deux implications. Définir l'implication apparaît ainsi d'emblée comme un paradoxe.

D'autre part, l'implication est au centre de toute activité mathématique, elle est constitutive des preuves. Il semblerait donc normal que son apprentissage ait une place centrale dans l'enseignement. Pourtant, elle n'est presque pas enseignée en tant qu'objet mathématique, sa place dans l'enseignement est vague et elle apparaît plutôt comme un outil *paramathématique* : devant être connu sans être enseigné [Chevallard Y., 1985, p.50].

Il en résulte que l'implication apparaît comme un objet transparent et facile à manipuler alors que, paradoxalement, de nombreux étudiants manifestent des difficultés relativement à l'implication jusqu'en maîtrise et au-delà, notamment en ce qui concerne les conditions nécessaires et les conditions suffisantes. C'est pourquoi, nous affirmons que cette identification de l'objet mathématique à l'implication de la logique naturelle est insuffisante pour une « bonne » appréhension et une « bonne » manipulation de cet objet.

Cette recherche est issue de notre thèse sur l'implication mathématique [Deloustal-Jorrand V., 2004] soutenue en 2004. Nous avons choisi de respecter dans cet article, le plan suivi lors de notre exposé au séminaire national. Après l'étude de deux situations mettant en jeu l'implication, nous distinguons trois cadres pour l'implication avant de présenter nos premiers constats issus d'une étude de manuels et de premières expérimentations. Nous énonçons alors la thèse que nous avons soutenue, éclairée par le cadre théorique, et les choix que nous avons faits en conséquence pour notre ingénierie. Nous concluons par quelques résultats.

choix que nous avons faits en conséquence pour notre ingénierie. Nous concluons par quelques résultats.

Deux problèmes de mathématiques

Situation Géométrie 1

Voici le premier problème de géométrie proposé aux PLC2[30].

Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur.

À quelles conditions sur les diagonales a-t-on 2 autres côtés parallèles entre eux ?[31]

Dans la suite de l'analyse nous appellerons :

H : La propriété « avoir deux côtés opposés de même longueur »

P1 (H étant vérifiée) : La propriété « avoir les deux autres côtés parallèles entre eux »

A : La condition sur les diagonales cherchée

Nous appellerons *H*, *P1* et *A* les ensembles associés à ces propriétés.

Type de tâches et questionnement

La tâche consiste à répondre, à l'aide des connaissances sur les objets et les propriétés de la géométrie classique à la question :

H et (A ?) $\Rightarrow$ (ou $\Leftarrow$?) H et P1, A étant la condition sur les diagonales cherchée.

On peut soit considérer que les conditions à chercher sont des conditions suffisantes pour P1 (Sous H, A ? $\Rightarrow$ P1) soit considérer que ce sont des conditions nécessaires (Sous H, P1 $\Rightarrow$ A ?) puisque rien ne le précise mathématiquement dans notre énoncé.

Nous présentons ici quatre approches du problème pouvant induire des stratégies différentes.

La première approche pose la question des conditions suffisantes. La première stratégie proposée consiste à lister des conditions classiques sur les diagonales (diagonales de même longueur, diagonales perpendiculaires...) puis à contrôler le fait que ces conditions, additionnées à l'hypothèse H, impliquent la conclusion P1. La deuxième stratégie proposée se rapporte à des objets connus. Certains quadrilatères bien connus vérifient à la fois H et P1, par exemple les carrés, les rectangles, les parallélogrammes. Or les propriétés de leurs

[30] Professeurs des Lycées et Collèges en année de stage à l'IUFM de Grenoble (deuxième année de formation).

[31] La situation comportait deux autres questions :
À quelles conditions sur les diagonales a-t-on 2 angles droits ? 2 autres côtés de même longueur (entre eux) ?

diagonales sont elles aussi bien connues. Cependant, si elles permettent de trouver quelques conditions suffisantes de façon très économique, ces stratégies ne renseignent pas quant à l'exhaustivité des résultats. Enfin, une troisième stratégie liée à cette première approche est basée sur l'utilisation de la contraposée : Sous H, Non P $\Rightarrow$ Non A. Toutefois, la propriété Non P « avoir deux côtés non parallèles » ne représente pas une classe d'objets facilement identifiable, c'est ce que nous avons appelé une propriété *non remarquable*. C'est pourquoi cette stratégie utilisant la contraposée paraît ici inadaptée pour résoudre le problème. En conclusion, cette première approche replace le problème dans le cadre du point de vue déductif et permet de trouver quelques conditions suffisantes à P1.

La deuxième approche pose la question des conditions nécessaires et suffisantes. Quels sont les objets qui vérifient à la fois l'hypothèse H et la conclusion P1 ? Et quelles sont les propriétés de leurs diagonales ? Pour étudier les objets qui vérifient (H et P1), on peut soit parcourir l'ensemble de ces éléments en construisant ce que nous avons appelé une *figure ensembliste*[32] soit essayer de trouver un *élément représentant* de cette classe et utiliser ce que nous avons appelé une *figure scolaire*.

Pour parcourir l'ensemble des éléments, il y a deux stratégies possibles, soit se placer dans H et ajouter la propriété P1 (stratégie 3), soit se placer dans P1 et ajouter la propriété H (stratégie 4). La première stratégie est plus proche du texte du problème mais la seconde est plus facile d'accès, il semble en effet plus facile de représenter deux côtés parallèles que deux côtés opposés égaux. Enfin, pour la cinquième stratégie proposée, il ne s'agit plus de parcourir la classe $H \cap P1$, comme dans les stratégies ensemblistes précédentes, mais de chercher à construire un élément générique de cette classe. Suivant que l'on contrôle, tout au long de la résolution, que l'élément reste générique ou que l'on se contente d'un élément *quelconque* au départ, l'exhaustivité des cas est garantie ou non.

Figure scolaire, figure ensembliste

Il est courant dans les recherches didactiques et dans l'enseignement de faire la différence entre dessin et figure. Soit un objet géométrique donné, défini par des propriétés, Parzysz (1988, p.80) distingue la *figure géométrique*, une idée, une création de l'esprit, du *dessin* qui n'en est qu'une représentation.

[32] Les termes *figures scolaires* et *figures ensemblistes* au sens où nous les utilisons seront définis dans le paragraphe suivant.

Dans l'enseignement, cette différence est en fait écrasée. On s'assure simplement de représenter un élément n'ayant aucune propriété autre que celles de la classe à laquelle il appartient. Si l'on doit représenter un parallélogramme, on ne représentera pas un rectangle, si l'on doit représenter un triangle, on ne représentera ni un triangle isocèle ni un triangle rectangle. Le contrôle effectué pour éviter la particularité du dessin est essentiellement visuel. Cette figure *quelconque* est censée représenter un élément que l'on considèrera *générique* de la classe. Cependant, quelle que soit la non particularité du dessin en jeu, il n'en reste pas moins que ce dessin représente un *objet particulier* de sa classe. Nous soutenons que, même lorsque la figure ne présente aucune particularité visible, elle ne représente pas forcément tous les objets de la classe. Ceci peut évidemment avoir des conséquences dans une démonstration[33]. D'une figure considérée *a priori quelconque*, on découvrira qu'elle était en fait particulière car elle ne permettait pas de rendre compte de tous les éléments de l'ensemble. Il est donc particulièrement difficile de contrôler qu'un élément d'un ensemble est *quelconque* et qu'il est bien un *représentant générique* de cet ensemble.

La distinction entre *dessin* et *figure* proposée par l'enseignement paraît insuffisante, il faut donc revenir à une distinction plus forte. C. Laborde et B. Capponi réinterprètent la distinction *figure-dessin* de B. Parzisz à l'aide du triangle référent-signifiant-signifié.

> *En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente, le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. (...) En tant que signifiant d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un domaine de fonctionnement au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin). Ainsi un dessin ne rend-il pas compte du domaine de variation des éléments de l'objet géométrique. [Laborde C., Capponi B., 1994]*

[33] Pour avoir un exemple, le lecteur pourra se référer à [Deloustal-Jorrand 2004, p.168]

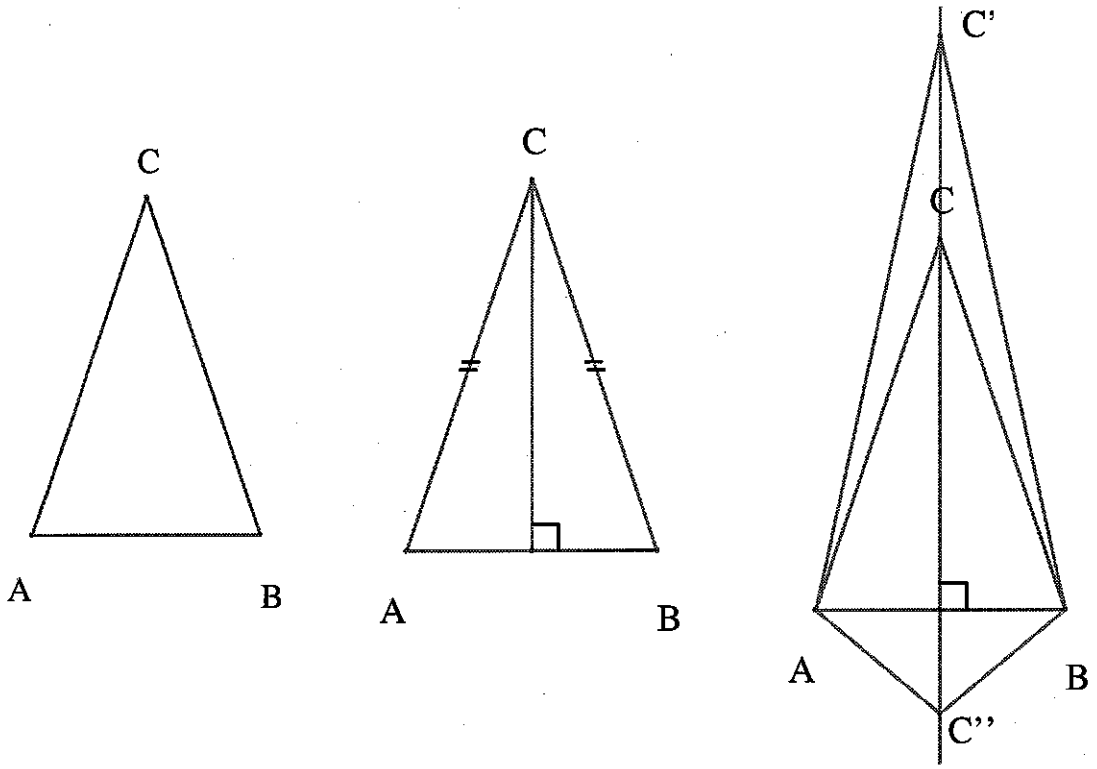
A la suite de cette citation, nous voyons l'importance de la variation des éléments de l'objet géométrique pour dépasser le statut de *dessin* et atteindre le statut de *figure*. Ainsi, c'est en tenant compte de cette variation que l'on peut passer d'un élément *quelconque* d'une classe d'objet à un élément *générique* représentant de cette même classe d'objets.

Nous soutenons l'hypothèse qu'avoir *un point de vue ensembliste* sur les objets permet ce passage du *dessin* à la *figure* et de l'élément *quelconque* à l'élément *générique*. Avoir un *point de vue ensembliste* revient, dans ces cas, à ne travailler ni sur un *dessin* ni sur une *figure au sens scolaire* mais à avoir présente à l'esprit ce que nous appellerons une *figure ensembliste*.

Une *figure ensembliste*, n'est pas la représentation d'un élément de l'ensemble, mais la représentation envisageable de **tous** les éléments de cet ensemble. Une *figure ensembliste* doit être dynamique, les points peuvent se déplacer dans les limites fixées par les propriétés définissant l'appartenance à l'ensemble. Une *figure ensembliste* ne peut donc être réduite à une reproduction physique sur une feuille, l'action de la pensée est nécessaire pour prendre en compte le fait que les points décrivent des ensembles.

Utiliser une *figure ensembliste* dans la résolution d'un problème signifie garder présent à l'esprit le fait que les points varient et en tenir compte dans la construction des différentes configurations. L'utilisation de la figure ensembliste permet alors d'atteindre, de façon certaine, l'exhaustivité des configurations qui sont solutions.

Nous montrons, ci-dessous, sur un exemple, comment nous différencions le *dessin*, la *figure scolaire* et la *figure ensembliste*.



Dessin	*Figure scolaire*	*Figure ensembliste*
Triangle isocèle particulier	Les propriétés du triangle sont comprises dans la figure (qu'elles soient notées explicitement ou non)	Lorsque le point C décrit la médiatrice, on atteint l'ensemble des triangles isocèles.

Pouvoir travailler sur *l'élément générique* d'une classe pour faire une démonstration est une caractéristique des mathématiques. Cependant *l'élément générique* est très difficile à atteindre par une figure et il faut de nombreux contrôles, tout au long de la preuve, pour garantir que celle-ci ne cache pas des propriétés particulières. En réponse à cette difficulté, la *figure ensembliste* remplace *l'élément générique* par *l'ensemble* des éléments en parcourant toute la classe, alors que la *figure scolaire* le réduit à un *élément quelconque*.

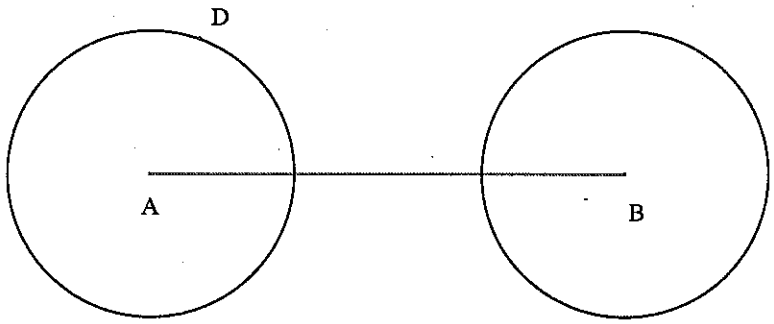
Nous ne prétendons pas que l'utilisation de la *figure ensembliste* soit facile. Au contraire, la prise en compte du dynamique pendant la résolution rend celle-ci plus délicate. Nous soutenons simplement que l'utilisation de la figure ensembliste est un moyen efficace de contrôle de l'exhaustivité des configurations obtenues quand l'utilisation du *dessin* ou de la *figure scolaire* ne permet pas toujours ce contrôle.

Résolution du problème dans le cadre ensembliste (Stratégie 3 : H puis P1)

Nous considérons cette situation en géométrie plane et nous intéressons uniquement aux quadrilatères plans. Nous détaillons ici uniquement la stratégie 3 (figure ensembliste), pour les autres stratégies le lecteur pourra se référer à [Deloustal-Jorrand, 2004].

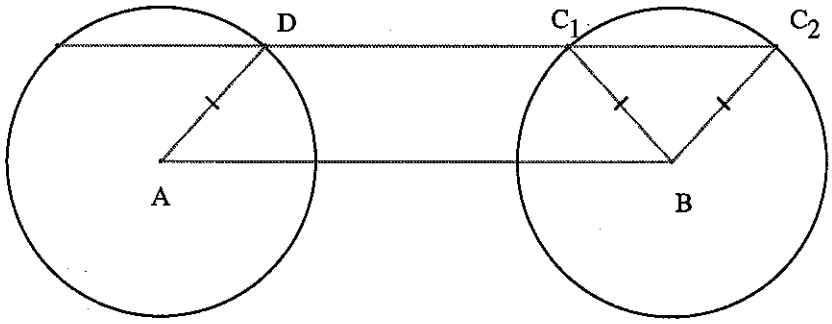
Recherche des configurations vérifiant H et P1

Une fois les points A et B placés dans le plan, l'hypothèse *H deux côtés opposés de même longueur* se traduit par AD = BC. C'est-à-dire que les points C et D appartiennent respectivement à deux cercles de même rayon, l'un centré en B, l'autre centré en A.



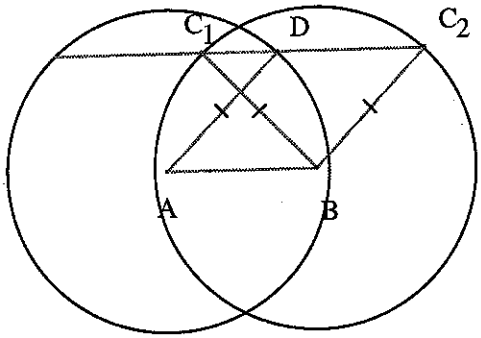
Une fois D fixé, pour traduire la propriété P1 *les deux autres côtés sont parallèles*, il faut tracer la droite parallèle à (AB) passant par D. C est alors point d'intersection de cette droite avec le cercle de centre B. Il y a ici deux points d'intersection C1 et C2.

On obtient les configurations : trapèze isocèle (ABC_1D) et parallélogramme (ABC_2D).



[ABC_1D : trapèze isocèle ; ABC_2D : parallélogramme]

Toutefois, pour décrire l'ensemble des objets qui vérifient H et P1, sans en oublier aucun, il convient de faire varier tous les paramètres utilisés dans cette construction. A fixé, on peut faire varier la distance AB, le rayon des cercles et la position de D (liée à celle de C) sur son cercle. Lorsque D se trouve entre C_1 et C_2, on se trouve en présence d'une autre configuration : un trapèze isocèle croisé (ABC_1D).



[ABC_1D trapèze isocèle croisé ; ABC_2D : parallélogramme]

On a donc l'équivalence :

H et P1 $\Leftrightarrow$ parallélogramme OU trapèze isocèle OU trapèze isocèle croisé

Il reste maintenant à trouver les conditions que vérifient leurs diagonales.

Les conditions sur les diagonales

Être un parallélogramme équivaut, pour un quadrilatère, à avoir *les diagonales qui se coupent en leur milieu.*

Les trapèzes isocèles et les trapèzes isocèles croisés ont des *diagonales de même longueur.*

Nous avons ainsi l'implication :

H et P1 $\Leftrightarrow$ parallélogramme OU trapèze isocèle OU trapèze isocèle croisé

$\Rightarrow$ diagonales se coupant en leur milieu OU diagonales de même longueur

C'est à dire que nous avons trouvé une condition nécessaire pour avoir (H et P1) et que nous avons résolu un sens de l'implication de la question de départ. Il nous faut maintenant examiner si cette condition est aussi une condition suffisante en étudiant l'autre sens.

Interprétation logique

Appelons les propriétés :

A1 : *avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu*

A2 : *avoir des diagonales de même longueur*

Nous venons de démontrer :

Sous l'hypothèse H, P1 $\Rightarrow$ (A1 ou A2) (1)

Nous voulons maintenant essayer de démontrer la réciproque, c'est-à-dire :

Sous l'hypothèse H, (A1 ou A2) $\Rightarrow$ P1 (2)

Ce qui peut se traduire par :

Sous l'hypothèse H, (A1 $\Rightarrow$ P1) **et** (A2 $\Rightarrow$ P1) (2')

Cette condition (A1 ou A2) est-elle suffisante ?

Avoir ses diagonales qui se coupent en leur milieu (A1) est bien une condition suffisante puisqu'il y a équivalence avec la propriété *être un parallélogramme*. En effet, on a :

diagonales se coupent en leur milieu ⇔ être un parallélogramme ⇒ P1

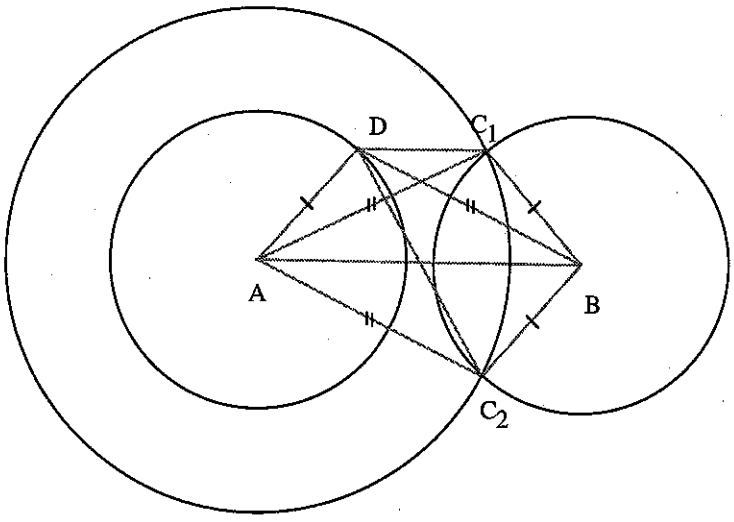
Nous venons donc de démontrer que : A1 ⇒ P1.

et donc a fortiori que : Sous l'hypothèse H, A1 ⇒ P1.

Reste à examiner si la propriété *avoir ses diagonales de même longueur* (A2) est une condition suffisante, c'est-à-dire si l'implication suivante dans les quadrilatères est vraie :

Sous l'hypothèse H, A2 ⇒ P1 Ou encore : (H et A2) ⇒ P1

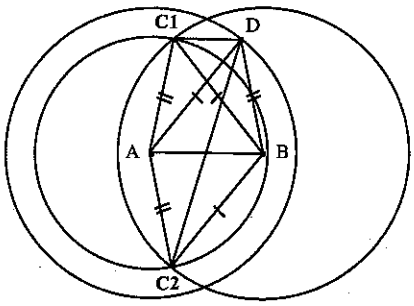
Pour cela, reprenons le point de vue ensembliste et intéressons-nous aux quadrilatères qui vérifient H et A2. Comme dans la précédente construction, pour vérifier H, C et D se trouvent sur deux cercles de même rayon ayant respectivement pour centre B et A. D étant fixé, pour vérifier A2, C doit se trouver sur le cercle de centre A et de rayon BD. Il y a deux positions possibles (éventuellement confondues) pour le point C, les deux intersections C_1 et C_2 des cercles.



[ABC_1D : trapèze isocèle ; ABC_2D parallélogramme croisé]

On obtient deux configurations : *trapèze isocèle* (ABC_1D) et un quadrilatère croisé associé au parallélogramme que nous appellerons *parallélogramme croisé* (ABC_2D).

Lorsqu'on réduit la distance AB, le trapèze isocèle devient croisé.



[ABC_1D : trapèze isocèle croisé ; ABC_2D parallélogramme croisé]

Or, le parallélogramme croisé ne convient pas, il a bien deux côtés égaux mais les deux autres se croisent et ne sont donc pas parallèles. Nous avons là un contre-exemple montrant que la condition A2, *avoir des diagonales égales*, n'est pas suffisante pour P1 sous H.

Recherche d'une condition nécessaire et suffisante

Puisque A2 n'est pas suffisante, nous allons la restreindre à une condition *plus forte*. Nous allons chercher une nouvelle condition A2i qui soit non seulement suffisante mais qui permette en plus d'avoir une équivalence finale. Nous cherchons donc une condition A2i telle que :

Sous H, A2i $\Rightarrow$ P1 et Sous H, P1 $\Rightarrow$ (A1 ou A2i)

Il faut donc renforcer A2 pour éliminer le cas du parallélogramme croisé, mais attention, nous devons être vigilants à ne pas éliminer en même temps le cas particulier du rectangle croisé qui vérifie, lui, P1. Nous ne détaillerons pas ici la suite de la résolution, le lecteur pourra, s'il le souhaite, se référer à [Deloustal-Jorrand, 2004 pp.194-202].

Finalement, nous pouvons énoncer l'équivalence :

Dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux,

Avoir les deux autres côtés parallèles (P1)

$\Leftrightarrow$

Avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu (A1)	OU	Avoir des diagonales égales et les côtés opposés égaux non parallèles (A2d)

Ce résultat découle d'une résolution dans le *cadre ensembliste* : on cherche une solution comme intersection de deux classes d'objets, la classe des objets qui vérifient H et la classe des objets qui vérifient P1. Elle nécessite une visualisation « dynamique » : les points peuvent bouger sous certaines contraintes. Elle permet d'atteindre toutes les configurations, que ce soient des quadrilatères croisés ou non.

Structure de différents types de tâches concernant l'implication

Nous analysons, dans cette partie, différents types de tâche concernant l'implication, afin de montrer les spécificités de la structure du problème *géométrie 1*.

Dans H, A ⇒ B où A et B sont connus

La question de démontrer A ⇒ B où A et B sont connus est habituelle dans l'enseignement des mathématiques. Pour répondre au problème, on met alors en œuvre un raisonnement déductif dans lequel on ne considère que le cas où A est vrai. La plupart du temps, il n'y a même pas d'enjeu de vérité, la question porte sur *l'explication* et non pas sur la *preuve de la vérité*. Le travail consiste à déterminer les bonnes propriétés ou théorèmes qui serviront *d'énoncé tiers* [Duval, 1993, p. 44] pour aller de A à B.

Cette précédente implication prend place d'ordinaire dans une classe d'objets déterminée *H*, par exemple les quadrilatères, les parallélogrammes, les nombres naturels... On regarde en fait l'implication : Dans *H*, A ⇒ B. Mais, dans l'enseignement, *H* est le plus souvent implicite puisque la classe d'objets dans laquelle on se place est en général très institutionnalisée, c'est-à-dire bien connue, ainsi que toutes ses propriétés, par les élèves. En effet, si l'implication se place dans la classe des parallélogrammes, pour résoudre le problème on utilise implicitement des propriétés des parallélogrammes (par exemple, la convexité), sans pour autant rendre cette restriction explicite.

La problématisation de l'implication est mieux réalisée dans le cas où *H* ne représente pas une classe d'objets institutionnalisée, comme par exemple la classe des quadrilatères dont *une des diagonales coupe l'autre en son milieu*. La propriété H qui lui est associée doit alors être présente explicitement au cours de la résolution.

Nous faisons l'hypothèse que l'obligation de rester à l'intérieur d'un ensemble, au cours de la résolution, favorise l'utilisation du cadre ensembliste en rendant celle-ci plus économique.

Dans H, (A ?) ⇒ (B ?)

Lorsque l'on émet des conjectures, on se place, le plus souvent, dans le schéma où l'on connaît H et A mais pas B : Dans *H*, A ⇒ (B ?).

Lorsque l'on cherche d'une condition suffisante A pour B dans *H*, on est alors dans le schéma : Dans *H*, (A ?) ⇒ B. Ce dernier type de tâche entrave l'utilisation du cadre du raisonnement déductif puisque l'on ne connaît pas la propriété de départ.

Dans H, (A1 ou A2) ⇒ B

Dans l'enseignement, la prémisse A est le plus souvent de la forme (A_1 et A_2 et...). Les hypothèses *s'ajoutent*. Dans le cadre ensembliste, cela revient à dire que l'ensemble de départ est une intersection d'ensembles.

Lorsque la prémisse A peut être écrite sous la forme (A_1 ou A_2), les enseignants préfèrent parfois écrire dans le cours deux propriétés distinctes, l'une avec la prémisse A_1, l'autre avec A_2. Cela revient pourtant à affaiblir la portée de chacune des implications données.

Si A est de la forme (A_1 ou A_2), il faut alors contrôler les propriétés vérifiées par l'élément x que l'on considère, suivant que x est dans A_1 ou bien dans A_2, des allers-retours entre les deux ensembles étant nécessaires. Nous faisons l'hypothèse que ce type de tâche favorise l'utilisation du cadre ensembliste. Toutefois, selon les ensembles A_1 et A_2, l'utilisation d'un raisonnement par disjonction des cas peut ramener facilement au cadre déductif.

Dans H, A ? B

Le sens (⇒ ou ⇐) de l'implication n'est pas précisé. Un travail doit être fait à la fois sur les conditions suffisantes et nécessaires. La vérité de l'implication est problématisée, A (respectivement B) est-elle une condition suffisante et si oui pourquoi ?

Passer de l'ensemble A à l'ensemble B sans arrêt, jusqu'à connaître toutes les relations entre ces deux ensembles permet de résoudre le problème en ayant une vue globale sur lui. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que le cadre ensembliste est ici un outil performant.

Structure du problème géométrie 1

Le problème *géométrie 1* regroupe différentes structures décrites ci-dessus.

H est une classe non institutionnalisée, celle des quadrilatères ayant deux côtés égaux.

La condition cherchée A est de la forme (A1 ou A2).

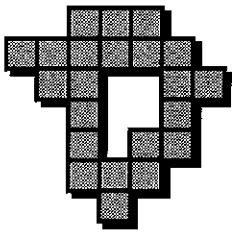
On doit s'intéresser à la fois aux conditions suffisantes et aux conditions nécessaires puisque l'énoncé n'explicite pas ce qui doit être cherché.

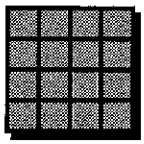
Situation Polymino 1

Nous ne donnerons, dans cette analyse, pas d'autres définitions concernant les polyminos que celles données aux stagiaires PLC2. Voici le texte du problème.

Définitions :

Polymino : assemblage connexe de cases carrées dans le plan.





Domino : polymino à 2 cases. 

Taille d'un polymino : nombre de cases du polymino.

Pair : un polymino est pair si sa taille est paire.

Paver un polymino par des dominos : recouvrir entièrement et sans chevauchement un polymino à l'aide de dominos.

Dans ce cas-là, on dira qu'un polymino est **pavable** par des dominos.

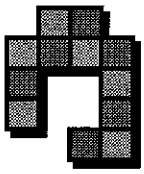


pavable



Non pavable

Équilibré : Si l'on colorie le polymino en damier, il est dit équilibré lorsque le nombre de cases blanches est égal au nombre de cases noires.



Question :

Soit P1, P2 et P3 les propriétés suivantes d'un polymino :

(P1) : pavable (par des dominos)

(P2) : équilibré

(P3) : pair

Quelles sont les relations entre ces propriétés ?

Rédigez une preuve satisfaisant tout le groupe.

Type de tâches et questionnement

La tâche consiste à décider de la validité ou non d'implications entre propriétés concernant le pavage de polyminos. Nous avons proposé cette situation Polymino car nous faisons l'hypothèse que les preuves dans ce contexte sont différentes des preuves dans le contexte de la géométrie. En effet, les objets et les propriétés en jeu dans le pavage de polyminos ne sont pas connus des PLC2. En conséquence, nous faisons l'hypothèse que pour résoudre le

problème, ils vont devoir faire des essais de pavages, émettre des conjectures et les prouver ou les invalider, ainsi le cadre ensembliste est un outil nécessaire.

Nous donnerons, pour chaque question, une démonstration mathématique dans le cadre déductif et nous détaillerons quelques aspects de ce que nous appellerons une stratégie par essais et conjectures. De précédentes expérimentations [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003] ont montré que l'une et l'autres sont présentes et nécessaires pour la résolution. La stratégie par essais et conjectures est le moyen de « rentrer » dans le problème et la démonstration dans le cadre déductif est le moyen satisfaisant de rendre publique la réponse pour la plupart des étudiants.

Par souci de clarté, nous faisons le choix, dans la suite, d'écrire les implications sans quantificateurs bien qu'ils soient évidemment sous-entendus. Par exemple, nous écrirons « pavable ⇒ pair » pour « quel que soit le polymino P, P est pavable ⇒ P est pair ».

Implications entre pavable (P1) et pair (P3)

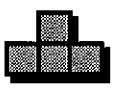
Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples

Les essais de pavages montrent en général assez vite que « Non pair ⇒ Non pavable », il faut alors utiliser l'équivalence de l'implication avec sa contraposée pour en déduire que « pavable ⇒ pair ». La conjecture que les propriétés pavable (P1) et pair (P3) sont équivalentes est très courante au moins au début. Elle est d'ailleurs vraie, par exemple, sur l'ensemble des polyminos rectangles.

Démonstration dans le cadre déductif

L'implication « pavable ⇒ pair » (P1 ⇒ P3) est vraie. En effet, un polymino pavable est, par définition, recouvert sans chevauchement par des dominos. Or un domino recouvre deux cases. En conséquence, le nombre de cases du polymino, c'est-à-dire sa taille, est un nombre pair.

L'implication « pair ⇒ pavable » (P3 ⇒ P1) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est pair et non pavable.



contre-exemple 1

Implications entre pavable (P1) et équilibré (P2)

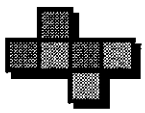
Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples

Dans les essais, lorsqu'on n'arrive pas à paver un polymino équilibré, on remarque qu'il reste toujours 2 cases non contiguës non pavées. Cela ne prouve pas que le polymino ne soit pas pavable, il pourrait exister un autre pavage. Il faut remarquer que les deux cases restantes sont de la même couleur et transformer la coloration en outil, pour formuler la conjecture que « Non équilibré ⇒ Non pavable ». L'outil coloration n'est pas un outil habituel, il est même rarement reconnu comme un outil mathématique. La conjecture de l'équivalence entre les deux propriétés est assez courante, au moins au début.

Démonstration dans le cadre déductif

L'implication « pavable ⇒ équilibré » (P1 ⇒ P2) est vraie. En effet, supposons que le polymino soit colorié comme un échiquier, alors un domino posé sur ce polymino couvre une case blanche et une case noire. Et ceci est vérifié, que le domino soit placé horizontalement ou verticalement. De plus, un polymino pavable, par définition, peut être recouvert sans chevauchement par des dominos. Il s'ensuit qu'un polymino pavable a le même nombre de cases blanches que de cases noires, c'est-à-dire qu'il est équilibré.

L'implication « équilibré ⇒ pavable » (P2 ⇒ P1) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est équilibré mais non pavable.



contre-exemple 2

Implications entre équilibré (P2) et pair (P3)

Stratégie par essais, conjectures et contre-exemples

L'implication « équilibré ⇒ pair » est démontrée, en général, à partir de la définition de équilibré (autant de cases noires que de cases blanches) et ne nécessite pas d'essais.

Le contre-exemple à l'implication réciproque est trouvé, le plus souvent, très rapidement.

Démonstration dans le cadre déductif

L'implication « équilibré ⇒ pair » (P2 ⇒ P3) est vraie. Puisque le polymino est équilibré, il contient le même nombre N de cases noires et de cases blanches. Par suite, la taille du polymino est 2N et le polymino est pair.

L'implication « pair ⇒ équilibré » (P3 ⇒ P2) est fausse, comme le montre le contre-exemple ci-dessous qui est pair mais non équilibré.



contre-exemple 1

Structure de la situation Polyminos 1

Formulation de la question : résultat non évident

L'énoncé ne dit pas quelles sont les implications vraies et, a priori, rien ne permet de le savoir. Il y a donc un enjeu de vérité réel. Pour répondre il faut faire des conjectures et chercher des contre-exemples.

Les implications ne sont pas des équivalences

Toutes les implications vraies, ici, ont des réciproques fausses. Il n'y a pas d'équivalences. Cela oblige à faire la distinction entre les conditions nécessaires et les conditions suffisante, ce qui est essentiel pour problématiser l'implication.

Analogies entre les situations Géométrie et Polyminos

Les objets mathématiques sont facilement manipulables

Notre hypothèse est que, pour qu'un apprentissage puisse se faire sur l'implication, il faut que le travail se fasse sur le raisonnement et la preuve. D'autre part pour qu'on puisse repérer des erreurs dues à l'implication, nous devons nous donner les moyens de contrôler que ces erreurs ne sont pas dues à des concepts mathématiques. Pour cela, il faut que les concepts mathématiques en jeu n'apportent pas, par eux-mêmes, de difficultés. Les objets que nous proposons dans ces situations ont donc été choisis pour satisfaire ce critère. Les polyminos sont des objets nouveaux pour les PLC2 mais facilement et rapidement appréhensibles, comme l'ont montré de précédentes expérimentations [Grenier D., Payan C., 1998 & 2003]. Les objets mathématiques en jeu dans notre problème de géométrie sont, quant à eux, depuis longtemps connus et utilisés par les PLC2. C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que ces objets permettent un travail sur le raisonnement.

Enjeu de découverte, enjeu de vérité : conjectures, exemples, contre-exemples

Dans les deux problèmes, les objets mathématiques étant faciles d'accès, c'est la question, elle-même, qui nécessite une activité mathématique. Ces questions paraissent inhabituelles puisqu'il faut « trouver les conditions telles que… » ou discuter de la véracité (non évidente) d'implications données alors que l'enseignement traditionnel propose le plus souvent des problèmes de la forme « Montrez que …», le résultat proposé étant souvent évident. Dans le problème de géométrie, il y a un enjeu de découverte, on ne connaît pas d'avance le résultat qu'on va obtenir, il faut découvrir les propriétés des diagonales.

Pour les deux problèmes, l'activité mathématique est faite d'essais (configurations géométriques connues, essais sur des petits polyminos), de conjectures, d'exemples et de contre-exemples. C'est la résolution du problème qui nécessite cette activité mathématique et non pas une demande extérieure (professeur ou questions intermédiaires). L'enjeu de vérité est réel dans ces problèmes et nous faisons l'hypothèse que cela facilite le passage au cadre ensembliste puisque le cadre déductif n'est plus alors suffisant.

Les classes d'objets en jeu ne sont pas des classes institutionnalisées

Dans nos deux problèmes, les classes d'objets en jeu ne sont pas des classes d'objets institutionnalisées. Les polyminos ne sont pas des objets connus et les quadrilatères de la classe H du problème de géométrie, les quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux, n'en sont pas non plus. Contrairement aux parallélogrammes dont les propriétés sont bien établies à partir de la quatrième, les propriétés et les théorèmes associés aux objets en jeu dans nos problèmes ne sont pas familiers. Nous faisons l'hypothèse que ceci rend l'utilisation du cadre ensembliste nécessaire ou tout au moins économique. Il n'est plus possible de penser les propriétés comme des qualités d'objets, il faut considérer les ensembles qui leurs sont associés.

Différences entre les situations Géométrie et Polyminos

Propriétés remarquables

Nous dirons qu'une propriété est *remarquable* si elle est associée à un ensemble de mesure petite. Cette définition est évidemment vague mais nous l'utiliserons surtout dans la comparaison de deux propriétés. Par exemple, *être un parallélogramme* est une propriété

très *remarquable* puisque l'ensemble des parallélogrammes est de mesure nulle dans l'ensemble des quadrilatères. En effet, un parallélogramme est déterminé par trois points A, B, C, le quatrième point étant déterminé par les trois autres. À ces trois points, on peut associer une infinité de quadrilatères ABCE, E décrivant le plan. Réciproquement soit un quadrilatère ABCD, on ne peut lui associer que quatre parallélogrammes déterminés par les trois points ABC, ABD, ACD ou BCD.

Au contraire, dans l'ensemble des polyminos, il n'y a pas de propriétés *remarquables*. Par exemple, les deux propriétés *être pavable* ou *être non pavable* ont des mesures de grandeurs comparables.

Les propriétés *remarquables* sont au cœur de la géométrie scolaire, puisqu'on y met en valeur des ensembles d'objets de mesures petites (parallélogrammes, rectangles, carrés...). Au contraire, dans les polyminos, les propriétés que nous demandons d'étudier sont pareillement *remarquables*, c'est pourquoi nous faisons l'hypothèse qu'il y a nécessité de travailler sur les ensembles d'objets et que l'émergence du cadre ensembliste est favorisée.

De plus, le caractère *remarquable* d'une propriété a une incidence sur le caractère *non remarquable* de la négation de cette propriété. Alors qu'en logique la propriété P et la propriété Non P peuvent être utilisées de la même façon, ceci n'est pas vrai en géométrie. En effet, plus une propriété est *remarquable* plus sa négation est *non remarquable*, c'est-à-dire associée à un ensemble de grande mesure. Il est alors difficile de dessiner un représentant générique de cette classe d'objets. Par exemple, alors qu'il est possible de dessiner un représentant générique des parallélogrammes, un représentant générique des « non parallélogrammes » n'est pas représentable.

Dans l'ensemble des polyminos, puisque les propriétés que nous proposons sont également *remarquables*, la propriété Non P et la propriété P sont au « même niveau » et peuvent être également représentées. En revanche, dans notre situation de géométrie, le fait que Non P1 (*avoir des côtés opposés non parallèles*) soit une propriété *non remarquable* et sur laquelle on ne peut pas construire d'exemple freine l'utilisation de la contraposée et du raisonnement par l'absurde comme moyen de résolution.

Cette différence fondamentale entre les propriétés des objets dans les deux situations participe à rendre ces deux situations complémentaires dans notre ingénierie.

Approche perceptive ou non d'un objet en lien avec sa structure

On reconnaît, en général, de manière perceptive, si un quadrilatère est ou n'est pas un parallélogramme. En revanche, il est rarement possible de reconnaître, de la même manière, un polymino pavable, sauf dans certains cas précis, par exemple pour un polymino de très petite taille ou pour un polymino rectangle de deux lignes. La plupart du temps, pour vérifier qu'un polymino est pavable, il faut mettre en œuvre des outils théoriques, comme par exemple vérifier la parité du nombre de cases à recouvrir si l'on pave avec des dominos, et il est souvent nécessaire d'exhiber un pavage. La propriété *être pavable* ne caractérise pas, structurellement, le polymino comme c'est le cas, dans une certaine mesure, avec la propriété *être un parallélogramme* pour les quadrilatères. Les polyminos dessinés sont toujours particuliers, on ne peut pas avoir un représentant *quelconque* des polyminos pavables (respectivement pairs, équilibrés....) comme on peut en avoir un des carrés.

En conséquence, la propriété *être un parallélogramme* sera plus perçue comme la qualité d'un objet que comme la caractéristique d'une classe, contrairement à la propriété *être pavable*. Par suite, les enjeux de découverte et de vérité seront différents suivant les objets. Il est plus facile de trouver des conditions suffisantes pour être un parallélogramme (on les « voit » !) que pour être un polymino pavable que rien ne permet de reconnaître.

C'est pourquoi nous faisons l'hypothèse que la situation Polymino favorise l'utilisation du cadre ensembliste et qu'ainsi l'activité doit nécessairement être centrée sur la recherche d'exemples, contre-exemples et conjectures.

Position institutionnelle des objets de savoir

Les connaissances géométriques sur les quadrilatères mises en jeu dans nos problèmes de géométrie sont enseignées depuis le collège. Ces outils ont donc une forte place institutionnelle même si la classe des objets H n'est pas, elle-même, connue. Cela permet une dévolution facile de notre problème auprès des PLC2 qui se sentent très concernés par l'utilisation du raisonnement en géométrie dans l'enseignement secondaire.

En revanche, les polyminos sont absents de l'enseignement. Ils n'ont pas de place institutionnelle. D'ailleurs, d'après d'autres expérimentations, les élèves placés devant ces problèmes de pavage de polyminos, n'ont pas l'impression de faire des mathématiques et les professeurs ont le sentiment de travailler hors programme. Les stagiaires PLC2 n'ont donc pas d'outils spécifiques pour la résolution de problèmes de polyminos.

Problématique sur l'implication

Le type de questionnement sur l'implication est différent dans ces deux situations. En effet, alors qu'il s'agit, dans le problème de géométrie, de chercher une propriété et pour cela d'établir des implications et de vérifier leur domaine de validité, il s'agit, dans le problème sur les pavages de polyminos de vérifier la validité d'implications données. Le second problème est plus fermé mais la nature même de ces objets, en particulier le fait que les implications données ne paraissent pas vraies ou fausses dès le premier abord, permet un travail de recherche que permettraient difficilement les objets géométriques en jeu dans le premier problème.

Trois cadres pour l'implication mathématique

La notion d'implication existe dans la logique naturelle[34]. Nous l'utilisons tous les jours par exemple lorsque nous disons *le ciel est bleu donc il ne pleuvra pas*, ou *tu auras du dessert si tu manges ta soupe*.... Mais, si tout le monde semble se comprendre, il apparaît toutefois que certaines expressions sont ambiguës. De nombreux abus de langage contribuent à rendre floue *l'implication naturelle*. Une étude de cette *implication naturelle* nous a, par exemple, permis de relever des confusions entre les expressions *si...alors* et *si et seulement si* ou encore *seulement si*, des connotations de causalité et de temporalité, des interprétations dépendant du contexte... Ceci a évidemment des conséquences sur la compréhension et l'utilisation du concept mathématique d'implication.

Objet mathématique : modélisation de l'objet naturel

Le concept mathématique d'implication peut être interprété comme un modèle du concept de la logique naturelle. Comme tout modèle, le concept mathématique est fidèle à l'objet naturel sous certains aspects et moins, voire pas du tout, sous d'autres. C'est-à-dire qu'il vérifie certaines propriétés et d'autres pas, certaines propriétés logiques vont même parfois à l'encontre de la logique naturelle. Ainsi, la vérifonctionnalité de l'implication mathématique n'est pas proche de la logique naturelle. En revanche, l'équivalence de la contraposée avec l'implication directe est conforme au Modus Tollens.

[34] Nous appelons *logique naturelle* toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante.

Trois cadres pour l'implication

Le concept d'implication, omniprésent dans l'activité mathématique, apparaît sous différentes formes selon les cadres mathématiques dans lesquels on le trouve. Pour cette étude épistémologique, nous avons choisi de distinguer trois cadres au sens de Régine Douady. Le cadre théorique qu'elle a défini nous est apparu pertinent pour notre recherche puisqu'elle soutient que les changements de cadres sont nécessaires à l'enseignement d'un concept. C'est aussi la thèse que nous défendons en ce qui concerne l'implication comme nous l'exposerons plus loin. Rappelons la définition introduite par Régine Douady.

> *Le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique..., mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique. Disons qu'un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. [Douady R. 1986, p10]*

Nous avons choisi de mener notre analyse épistémologique à partir de trois cadres qui nous paraissent pertinents pour l'implication :

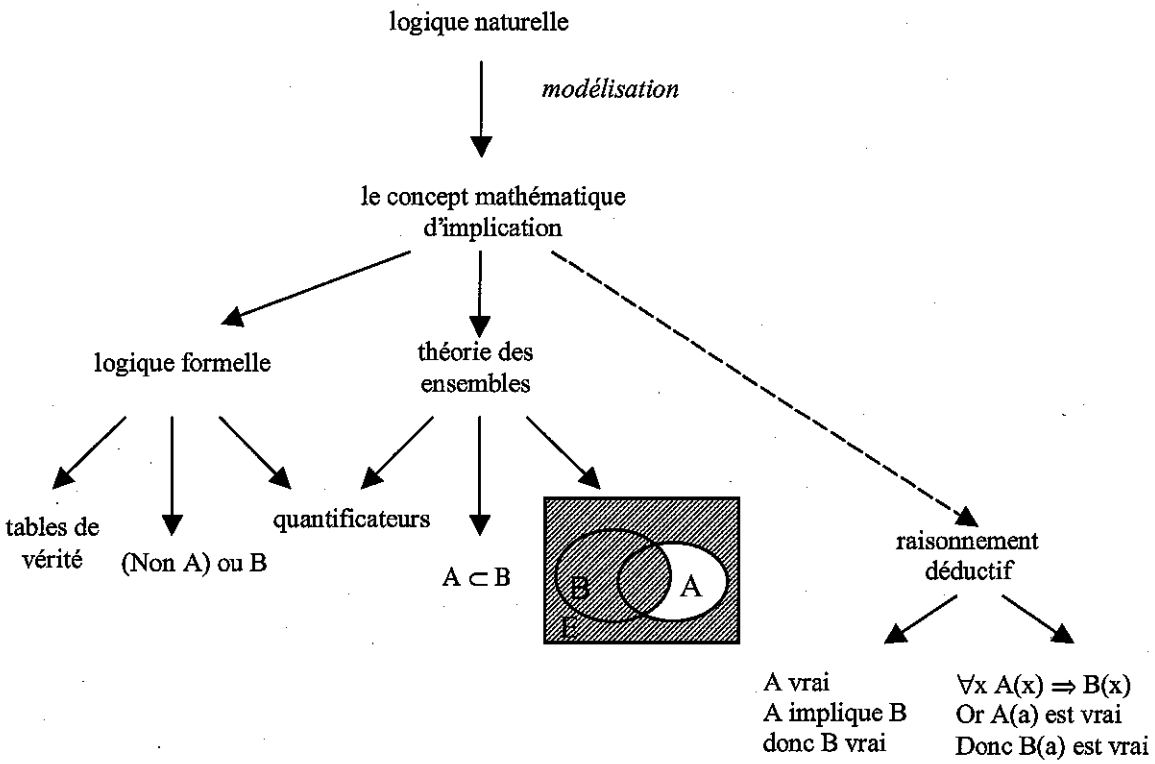
- le cadre ensembliste
- le cadre de la logique formelle
- le cadre du raisonnement déductif

Le troisième cadre n'a pas le même statut que les deux autres. Alors que les deux autres font référence à des théories mathématiques, théorie des ensembles et logique formelle, celui-ci est le cadre de l'utilisation habituelle de l'implication mathématique. En effet, il ne s'agit pas de définir l'objet implication mais d'utiliser l'outil implication dans un raisonnement mathématique. Ce point de vue est couramment utilisé dans la pratique mathématique et, omniprésent dans l'enseignement des mathématiques, il y fait souvent office de seule définition. Nous définirons le cadre du raisonnement déductif comme constitué par les objets liés au raisonnement déductif, les relations entre ces objets, leurs formulations et les images mentales associées à ces objets et ces relations.

Le mot cadre n'est pas à prendre au sens strict. En fait, se placer dans le cadre ensembliste ou adopter le point de vue ensembliste pour résoudre un problème de mathématique, ce

n'est pas seulement utiliser les outils de la théorie des ensembles, c'est aussi « réfléchir de façon ensembliste ».

Le schéma ci-dessous présente l'implication mathématique, modèle de l'implication naturelle, dans les trois cadres.



Nous expliquons succinctement, ci-dessous, ce que nous entendons par cadre ensembliste avant de décrire l'implication dans ce cadre. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [Deloustal-Jorrand V., 2004]

Les propriétés d'objets dans le cadre ensembliste

Se placer dans le cadre ensembliste ne signifie pas, pour nous, qu'il faut nécessairement connaître et maîtriser la théorie des ensembles, même si l'on est amené à en utiliser quelques outils. Cela signifie, avant tout, qu'on considère les propriétés d'objets non comme des qualités des objets mais comme des spécificités d'ensembles d'objets. Une propriété définit un ensemble, l'ensemble des objets qui vérifient cette propriété. Prenons un exemple :

Si A est la propriété « être un quadrilatère avec quatre côtés de même longueur », alors l'ensemble correspondant est l'ensemble A des losanges. Réciproquement, un ensemble A définit la propriété A qui s'énonce « appartenir à l'ensemble A ».

Pour travailler dans le cadre ensembliste, on se place, dans un ensemble de référence ou univers. L'ensemble *A* correspondant à la propriété A dépend, le plus souvent, de cet ensemble de référence.

Dans l'exemple précédent, l'ensemble de référence est l'ensemble des quadrilatères Q, il est englobé dans la propriété A. Dans cet ensemble Q, la propriété A' « avoir 4 côtés de même longueur » correspond à l'ensemble *A* des losanges. Cependant, dans l'ensemble de référence des rectangles, que nous noterons R, l'ensemble correspondant à la même propriété A' est cette fois, l'ensemble des carrés.

Un seul ensemble peut représenter plusieurs propriétés a priori différentes. Par exemple, dans l'ensemble des parallélogrammes, les propriétés « avoir quatre côtés de même longueur » et « avoir les diagonales perpendiculaires » sont équivalentes et représentent toutes les deux l'ensemble des losanges.

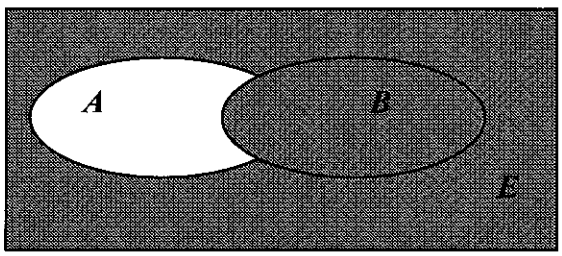
Définition de l'implication dans le cadre ensembliste

Plaçons-nous dans un ensemble de référence E.

Soit *A* le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété A.

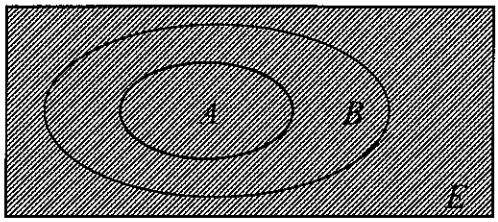
Soit *B* le sous-ensemble de E dont les éléments vérifient la propriété B.

La zone hachurée ci-dessous représente tous les objets x de E pour lesquels l'implication entre énoncés contingents A(x) ⇒ B(x) est vraie. L'implication est fausse uniquement pour les éléments x qui sont dans A sans être dans B, c'est-à-dire tels que la prémisse A(x) est vraie alors que la conclusion B(x) est fausse.



C'est l'ensemble des éléments qui ne vérifient pas la propriété A à moins qu'ils ne vérifient aussi la propriété B. C'est donc l'ensemble correspondant à la propriété (Non A ou B).

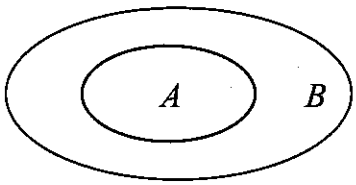
Étudions maintenant le cas particulier où l'ensemble *A* est inclus dans l'ensemble *B*, comme dans le schéma ci-dessous.



Dans ce cas, l'implication A(x) ⇒ B(x) est vraie dans toute la partie hachurée, c'est-à-dire pour tous les éléments x de E. En effet, il n'existe pas d'éléments de *E* appartenant à *A* sans appartenir à *B*. Nous sommes alors dans le cas où l'implication est universellement quantifiée. Le schéma précédent représente l'implication : ∀x ∈ *E*, A(x) ⇒ B(x) est vrai.

L'inclusion d'un ensemble dans un autre peut donc être exprimée par une implication universellement quantifiée concernant les propriétés correspondantes.

La pratique mathématique scolaire ne représente l'implication que par ce dernier schéma d'inclusion. Cela montre que, dans l'enseignement, les implications sont implicitement quantifiées universellement [Durand-Guerrier V., 1999]. En fait, la pratique scolaire cache encore davantage la quantification universelle de l'implication car le schéma proposé aux élèves ne représente pas toujours l'ensemble de référence :



Or, une implication universellement quantifiée dépend bien de l'ensemble de référence. L'implication « Avoir 1 angle droit implique Avoir 4 angles droits » est vraie dans l'ensemble des parallélogrammes et est évidemment fausse dans l'ensemble des quadrilatères. Rendre implicite l'ensemble de référence contribue à cacher la quantification universelle en jeu.

Quelques constats dans l'enseignement

Nous présentons, ici, les conclusions de notre étude de la *vie*, au sens de la théorie anthropologique développée par Y. Chevallard, de l'implication dans quelques manuels de la quatrième à l'université.

Le cadre ensembliste est absent

Aucun manuel n'utilise ce cadre pour l'implication. Seuls quelques manuels, dans des chapitres de théorie des ensembles, font le lien avec l'inclusion : A⊂B si ∀x, x∈A ⇒ x∈B.

Prépondérance du cadre déductif

Le cadre déductif est prépondérant notamment en collège et lycée où il est l'unique cadre présenté. En DEUG, il est présenté pour définir des typologies de raisonnements : par contraposée, par l'absurde, par récurrence...

Cloisonnement des cadres

Les manuels adoptent, en général, un unique cadre pour définir l'implication : raisonnement déductif ou logique formelle dans quelques manuels d'université. Les rares manuels de DEUG présentant les deux ne mettent jamais en relation ces deux cadres.

Identification à la logique naturelle

Les manuels de seconde issus des programmes 2000 ne prennent pas en charge la définition de l'implication, il y a une identification du concept mathématique à celui de la logique naturelle. Les expressions *si...alors*, *entraîne*, *implique*...sont supposées claires, connues et comprises. Certaines définitions sont particulièrement dépourvues de sens mais il faut les remettre dans le contexte des programmes de l'époque. Le concept d'implication, banni des programmes depuis quelques années, retrouve une place dans les manuels de seconde 2000 alors qu'aucun cours de logique formelle n'est autorisé. Les manuels ont donc la difficile tâche de faire *revivre* un concept, mais ceci sans pouvoir le placer dans la niche « logique », ils se rattachent donc à la logique naturelle pour définir ce concept mathématique.
Voici trois exemples :

> *Une implication est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (1) entraîne (ou implique) une conclusion (2).* [Déclic, 2nde, 2000]
>
> *Si...alors : tournure "standard" qui tend à expliquer que si une propriété est satisfaite, on peut en déduire qu'une seconde l'est également.* [Pyramide, 2nde, 2000]
>
> *La phrase "si A alors B" est une implication. On note A $\Rightarrow$ B et on lit "A implique B" ou "A donc B".* [Collection Indice, Bordas, 2nde, 2000]

Causalité et temporalité : définitions dans le cadre du raisonnement déductif

Ce dernier exemple identifie linguistiquement les mots *implique* et *donc*. Or, les rôles de ces deux mots sont différents dans le Modus Ponens, le *donc* permettant l'inférence de la

conclusion. Alors que « A ⇒ B » ne dit rien sur la vérité de A et B, le mot *donc* connote la vérité de A et de B. Il s'ensuit que l'expression *A donc B* ne rend compte que du cas où A et B sont vrais dans l'implication. L'implication est ainsi souvent « écrasée » sur le cas où la prémisse et la conclusion sont toutes les deux vraies, comme le montrent les expressions qui lui sont associées dans certains manuels :

P vrai implique Q vrai ; *Si P est vrai, alors Q est vrai* ; *P donc Q.*

D'autres expressions connotent souvent une notion de causalité voire de temporalité :

On a Q dès qu'on a P ; *Q résulte de P ; Q est conséquence de P.*

Cet *écrasement* induit ce que nous avons appelé une *conception causale* de l'implication.

Conception causale-temporelle de l'implication

Nous appelons « théorème-en-acte de causalité » la *propriété-en-acte* suivante :

> *A implique B n'a de raison d'être, et a fortiori ne peut être vraie, que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles.*

Ce théorème-en-acte est faux en mathématique où la vérifonctionnalité est une convention. Cependant, ce théorème-en-acte est très proche de la logique naturelle et il est renforcé par certaines expressions langagières associées à l'implication : *B résulte de A* ; *B est la conséquence de A*. Ceci induit très souvent un ordre chronologique entre la prémisse et la conclusion, puisque la cause précède la conséquence. Cela conduit à la propriété-en-acte :

> *Lorsque A implique B, A doit être vérifiée avant B*

Mais alors si dans A ⇒ B, A doit précéder B, il est difficile d'admettre, par exemple, que B soit une condition nécessaire pour A. Pour faire référence à ce théorème-en-acte et aux réponses qui lui sont associées nous utiliserons, dans la suite, le terme de *conception causale-temporelle*, le terme *conception* étant employé au sens de G. Brousseau (1986).

Nous faisons l'hypothèse que cette conception est source d'erreurs dans le maniement de l'implication mathématique comme le montrent les exemples suivants.

Sarah a une maîtrise de mathématiques et prépare le CAPES au moment où elle répond à ces questions [Deloustal V., 1999] :

> Question : M est condition nécessaire pour T et T est condition suffisante pour M[35]. Y a-t-il des implications entre ces deux phrases ?

[35] Ces deux phrases sont équivalentes logiquement à T ⇒ M.

Sarah : Pour la première, « M condition nécessaire pour T » donc nécessairement il faut avoir M pour avoir T. Donc M implique T. Pour la deuxième, il suffit d'avoir T pour avoir M, donc T implique M.

Question : Donnez des expressions équivalentes à la phrase *W seulement si S*[36].

Sarah : S entraîne W et seulement S. Aucune possibilité d'avoir W sans passer par S

Question : Donnez la négation de l'implication P ⇒ Q :

Sarah : Q peut se réaliser sans que P se réalise.

Nous pouvons conclure ces premiers constats dans l'enseignements en affirmant qu'il y a des difficultés liées à l'utilisation de l'implication, notamment dans la distinction des conditions nécessaires et conditions suffisantes, et ceci jusqu'en fin d'université. Ces difficultés sont souvent liées à une *conception causale* de l'implication prédominante. Or, notre étude des manuels a montré que cette conception est non seulement présente dans la logique naturelle mais qu'elle est encore renforcée par certaines pratiques de l'enseignement, notamment par l'utilisation de certaines expressions langagières liées au raisonnement déductif. En outre, nos premières expérimentations ont montré qu'un cours de logique formelle ne permettait pas d'éradiquer cette conception causale, cette dernière pouvant cohabiter avec des connaissances sur les tables de vérité par exemple.

Thèse soutenue et cadre théorique

À la suite de ces constats, nous avons recentré notre problématique autour de l'hypothèse suivante :

> Il est nécessaire de connaître et d'établir un jeu dialectique entre les trois cadres, logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif, pour une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication.

En particulier :

> Sans un point de vue ensembliste sur l'implication, il n'est pas possible d'accéder à l'utilisation correcte et à la compréhension « complète » de ce concept mathématique.
>
> La thèse que nous soutenons est que cette condition sur le jeu de cadres est suffisante.

Pour vérifier ces hypothèses et étudier notre thèse, nous essayons de répondre à la question suivante :

> Comment à l'aide de différentes situations relevant de différents cadres problématiser l'implication, dans l'objectif d'une meilleure connaissance de ce concept ?

[36] Cette phrase est logiquement équivalente à W ⇒ S.

Pour répondre à cette dernière question, nous avons construit une ingénierie didactique que nous avons testée dans deux classes de PLC2 en mathématiques de l'IUFM de l'académie de Grenoble. Pour concevoir cette ingénierie, nous nous sommes appuyée sur la *théorie des situations* de G. Brousseau [Brousseau G., 1997], sur la *théorie des champs conceptuels* de G. Vergnaud [Vergnaud G., 1990] qui nous a aidée à modéliser les connaissances des étudiants ainsi que sur les *jeux de cadres* développés par R. Douady [Douady R., 1986].
Notre ingénierie propose des problèmes pour la résolution desquels les différents cadres, déductif, logique et ensembliste, interviennent, soit qu'ils soient nécessaires à la résolution et doivent cohabiter, soit qu'ils donnent des réponses différentes et doivent être confrontés. Notre étude de la *vie* de l'implication dans les manuels basée sur la théorie *écologique* de Y. Chevallard [Chevallard Y., 1992] a montré que le cadre déductif était le plus, sinon le seul, connu, nous cherchons donc surtout à rendre nécessaires les cadres logique et ensembliste.

Choix généraux pour notre ingénierie didactique

Choix du public

Le public des professeurs stagiaires nous a paru très pertinent pour deux raisons. D'abord, les PLC2 sont des étudiants expérimentés en mathématiques qui utilisent très souvent l'implication, ce concept n'ayant, à leur avis, aucun secret pour eux. D'autre part, ces professeurs débutants sont confrontés à des élèves qui ne savent pas comment utiliser l'implication et qui ne reconnaissent pas ses propriétés. D'ailleurs, V. Durand-Guerrier [Durand-Guerrier, 1996] montre comment les pratiques des professeurs contiennent des implicites incompris des élèves. Nous avons donc jugé opportun de leur donner les moyens de revenir sur leurs connaissances de l'implication et d'en construire de nouvelles.

Types de tâches : élaboration de preuves / analyse de preuves

Notre situation propose deux types de tâches pour permettre un travail sur l'implication : la construction d'une preuve (séance 1) et l'analyse d'une preuve écrite (séance 2). Le premier type oblige à la recherche de conjectures, d'exemples ou de contre-exemples, alors que le second type oblige au contrôle du résultat, des outils et des pas d'inférence.

Mise en jeu des trois cadres : logique / ensembliste / raisonnement déductif

Nos premières expérimentations ont privilégié l'étude de l'implication dans les cadres de la logique formelle et de la logique naturelle. Nous nous sommes attachée, ici, à ce que nos problèmes permettent et nécessitent la mise en œuvre du cadre ensembliste et/ou logique pour la résolution, considérant que le cadre déductif sera toujours présent pour peu que les problèmes ne soient pas uniquement posés dans le cadre logique.

Choix pour problématiser l'implication

Les objets mathématiques sont faciles d'accès

Comme nous l'avons déjà expliqué, nous faisons ce choix, d'une part, pour qu'un vrai travail sur l'implication puisse se faire et, d'autre part, pour pouvoir repérer les erreurs liées à l'utilisation de celle-ci.

Les implications en jeu ne sont pas des CNS

Notre hypothèse est que, pour problématiser l'implication, il faut pouvoir distinguer les conditions nécessaires des conditions suffisantes. C'est pourquoi, nous proposons des situations où la plupart des implications en jeu ont des réciproques fausses. Notre situation montre que, contrairement à une idée très répandue, il est possible de construire des problèmes de géométrie où les implications ne sont pas des équivalences.

Choix pour problématiser le cadre ensembliste

Les enjeux de vérité et de découverte sont présents

Comme nous l'avons dit auparavant, nous soutenons que cet enjeu de vérité favorise une résolution dans le cadre ensembliste puisque le cadre déductif s'avère alors insuffisant.

Types d'objets : objets institutionnels / objets non institutionnels

Pour une classe d'objets non institutionnels, les propriétés des objets ne sont pas connues. Comme nous l'avons déjà mis en valeur, nous faisons l'hypothèse que ceci défavorise l'utilisation du cadre déductif et favorise celle du cadre ensembliste puisqu'il faut alors utiliser explicitement les propriétés des objets de l'ensemble donné. En revanche, le choix d'une situation concernant des objets géométriques très institutionnels nous permet de

dévoluer notre tâche plus facilement et d'engager des réflexions avec les PLC2 sur la façon de travailler le raisonnement dans leur propre classe. Cependant, pour favoriser le cadre ensembliste, nous avons choisi une sous-classe d'objets (les quadrilatères ayant deux côtés égaux) dont les propriétés ne sont ni connues ni facilement reconnaissables.

Organisation sociale : Travail individuel / Travail en groupe

Notre hypothèse est que le travail de groupe, parce qu'il favorise les échanges et les débats, est indispensable pour qu'une confrontation puisse avoir lieu entre les différents cadres. Le travail individuel, quant à lui, permet à chacun d'essayer une piste de résolution dans le cadre qui lui convient. Cette phase individuelle est, pour nous, un préalable nécessaire pour nourrir le débat à venir, la richesse des argumentations en découlant directement.

Le choix du support papier-crayon

Dans la situation de géométrie, les raisonnements mathématiques sont basés sur des constructions géométriques qui vérifient certaines propriétés. Une partie de la tâche consiste à faire ensuite varier certains paramètres (longueur des rayons, distance entre A et B, position de D sur le cercle, angle aigu ou obtus...). Un logiciel de géométrie permettant la manipulation d'objets géométriques faciliterait évidemment cette phase de recherche. Cependant, la présence de ce support ne nous permettrait pas de vérifier si le point de vue ensembliste est mobilisable. En effet, il semble que, dans ces conditions, nous n'ayons pas les moyens de distinguer la manipulation d'ensembles de la manipulation d'une figure.
D'autre part, nous faisons l'hypothèse que ce support peut même être un frein à l'apparition du point de vue ensembliste. En effet, il y a des difficultés, pour ceux qui utilisent les logiciels à repérer le rôle de la figure dans leur preuve. Ce rôle n'est, le plus souvent, même pas mis en question et les manipulations de la figure sont plus un effet du contrat lié à ce support qu'un effet de l'utilisation du point de vue ensembliste. Puisque le point de vue ensembliste est, d'une certaine manière, pris en charge par le logiciel, cela dispense l'élève de l'avoir. C'est pourquoi nous avons choisi un environnement papier-crayon pour notre situation de géométrie.

Présentation succincte de notre ingénierie didactique

Une première expérimentation a concerné plus particulièrement la confrontation entre les cadres de la logique formelle et de la logique naturelle. C'était l'objet de notre mémoire de

DEA avec quatre étudiants en fin d'université [Deloustal V., 1999]. Cette expérimentation, enrichie d'un travail sur les tables de vérité, a été reprise avec une classe de maîtrise de mathématiques donnant globalement les mêmes résultats.

Notre nouvelle expérimentation, s'adressant à deux classes de PLC2 de l'IUFM de Grenoble sur deux séances de trois heures, concerne plus spécialement les cadres ensembliste et logique formelle. Elle comporte deux types de tâches, la première séance étant consacrée à l'élaboration de preuves, en géométrie et sur les pavages de polyminos, alors que la seconde porte sur l'analyse de preuves dans ces deux domaines. Cette organisation nous permet de voir fonctionner l'implication lors de la construction de preuves dans les deux contextes, puis de re-problématiser, au cours de la deuxième séance, les difficultés, erreurs et questions apparues lors de la première. Ceci s'est avéré efficace pour amorcer le débat et permettre de confronter les différents cadres pour l'implication.

Quelques résultats

Problématisation de l'implication

Où l'on atteste qu'il y a des difficultés

Notre premier constat est que la situation Géométrie 1 est un réel problème mathématique pour eux, qui amène des questions, des difficultés, des débats. En effet, en une heure et quart aucun groupe n'a apporté de « solution finie », et aucun groupe ne considère en avoir apporté une. La complexité du problème par rapport au raisonnement apparaît au fur et à mesure. Alors qu'au départ, Robert, stagiaire agrégé, n'est pas très intéressé :

R : C'est de la géométrie de collège ça !

Il conclut la séance en disant :

R : Moi c'est un problème que je ne donnerais pas avant la licence.

Ces deux phrases montrent, pour nous, que nous avons satisfait l'une de nos contraintes. Nous sommes arrivée à dissocier les difficultés sur le raisonnement et les difficultés dues aux objets mathématiques. L'implication est problématisée avec des objets faciles d'accès.

Perturbations sur les conditions nécessaires et suffisantes

Dans tous les groupes, il y a, au centre des débats, un questionnement explicite portant sur les conditions suffisantes, nécessaires ou équivalentes. Par exemple, une question récurrente, pour une majorité de groupes, est de savoir si *avoir des diagonales égales* est

une condition suffisante pour P1. D'autre part, on relève plusieurs fois, dans des groupes différents, des confusions entre condition nécessaire et condition suffisante.

D : Une condition suffisante elle est bien toujours nécessaire forcément!

Enfin, une stagiaire cherche des conditions suffisantes qui ne soient pas en lien avec les conditions nécessaires déjà trouvées. Nous interprétons ceci par le fait qu'elle ne reconnaît pas que les objets vérifiant une condition suffisante à une propriété X vérifient aussi les conditions nécessaires à cette propriété X (on est dans le cas où CS $\Rightarrow$ X $\Rightarrow$ CN). Nous faisons l'hypothèse que ceci est dû à une *conception causale-temporelle* de l'implication.

Quantification universelle implicite : deux types de « Faux »

À partir de l'implication *impair* $\Rightarrow$ *pavable*, un étudiant essaie de faire la différence entre les implications qui sont fausses pour tous les objets de l'univers (ici les polyminos) et celles qui sont fausses pour certains et vraies pour d'autres. Il développe ainsi le fait que pour démontrer le deuxième type de faux il suffit d'un contre-exemple alors que le premier type de faux nécessite une démonstration. Le reste du groupe ne le comprend pas car la prégnance des implications universellement quantifiées dans la pratique usuelle des mathématiques empêche les autres PLC2 de faire cette distinction.

D : là c'est pas juste un contre-exemple, c'est même une démonstration...

Di : Ben le contre-exemple ça te sert de démonstration!

D : Ça te, un contre-exemple ça te dit que dans certains cas c'est faux mais que c'est pas tout le temps faux alors que là ma démo c'est tout le temps faux.

A : qu'est-ce qu'il raconte ? Mais un contre-exemple, ça veut dire que c'est faux.

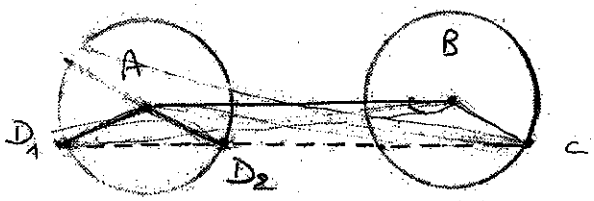
Di : On est en math ou on n'est pas en maths ?

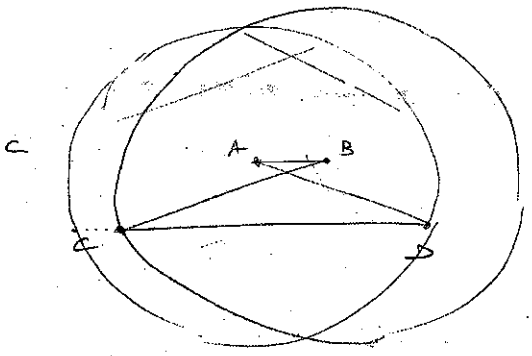
Problématisation du cadre ensembliste

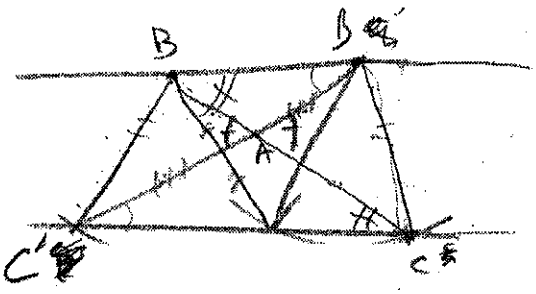
L'analyse des réponses montre que le cadre ensembliste n'est pas un outil disponible pour les PLC2 comme, par exemple, lorsqu'ils éliminent d'emblée les quadrilatères croisés. Cependant, nous voyons aussi apparaître des témoins implicites du cadre ensembliste, comme les contre-exemples et les conjectures. Le cadre ensembliste, qui n'est pas un outil mobilisable, ressort sous forme de questionnement, sur le rôle de la figure par exemple.

Des stratégies se rapprochant des stratégies ensemblistes prévues

Tous les groupes basent leur recherche de condition sur une construction géométrique. Certaines constructions sont très proches des stratégies ensemblistes que nous avons développées.







Cependant, il n'y a pas de contrôle de la variation des paramètres et par suite pas de contrôle du caractère générique de l'élément construit, elles ne sont donc pas ensemblistes à notre sens. Néanmoins, elles montrent que les objets sont construits comme des intersections de lieux de points. Les propriétés sont représentées par des ensembles, c'est pourquoi nous les prenons comme des marques du cadre ensembliste.

Les conjectures, exemples et contre-exemples sont au cœur des débats

Tous les groupes émettent des conjectures sur les conditions à partir d'exemples. Ils essaient ensuite de les prouver ou de les réfuter par des contre-exemples. L'analyse de la séance montre un véritable enjeu de découverte et de vérité. Pour nous, les conjectures et contre-exemples sont témoins de la présence implicite du cadre ensembliste, puisque l'on se place dans des ensembles d'objets.

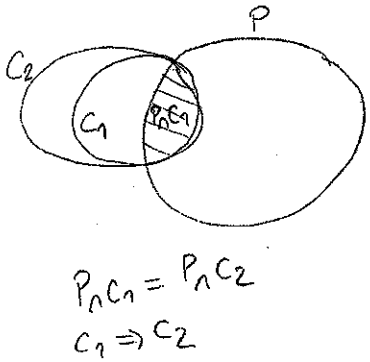
Quel rôle pour le dessin dans la preuve ?

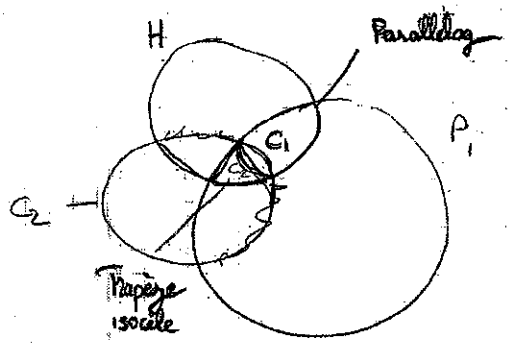
Tous les groupes s'interrogent sur le rôle, dans la preuve, des dessins qu'ils construisent. D'après eux, il peut servir à formuler des conjectures et même à se persuader ou à trouver

des contre-exemples lors de la vérification des conditions suffisantes mais il ne permet, en aucun cas, de démontrer. De nombreux débats portent sur l'exhaustivité des cas trouvés grâce au dessin et sur le contrôle possible de celui-ci pour maîtriser cette exhaustivité. Nous interprétons cela comme la recherche d'un moyen permettant de passer d'un élément quelconque (figure scolaire) à l'ensemble de tous les éléments (figure ensembliste).

Argument ensembliste théorique

Lors de la deuxième séance, quelques stagiaires utilisent des « patates », cependant ce type d'argument n'est pas convaincant pour le reste du groupe.





les PLC2 travaillent explicitement sur des sous-classes d'objets

À plusieurs reprises, les PLC2 se placent dans une classe d'objets et utilisent des stratégies qui garantissent de ne pas en sortir. Par exemple, pour trouver un contre-exemple à l'implication *équilibré* ⇒ *pavable*, ils prennent un polymino équilibré et le rendent non pavable tout en restant à l'intérieur de la classe des équilibrés. Pour cela, lorsqu'ils ajoutent (ou enlèvent) une case blanche, ils ajoutent (ou enlèvent) aussi une case noire.

Problématisation du cadre logique

À plusieurs reprises, l'utilisation du cadre logique apparaît chez certains stagiaires. Il est souvent utilisé comme moyen de contrôle des implications énoncées, garantissant par exemple l'équivalence entre deux implications. Il est aussi utilisé plusieurs fois lors de la deuxième séance pour invalider un argument énoncé dans une preuve. Enfin, on remarque une grande difficulté à utiliser le connecteur « ou » ou tout au moins à accepter l'équivalence : [A1 ⇒ P **et** A2 ⇒ P] ⇔ [(A1 **ou** A2) ⇒ P]. En effet, dans le problème de géométrie, les stagiaires n'arrivent pas à exprimer à l'aide d'une seule propriété les différentes conditions sur les diagonales qu'ils ont trouvées.

Le jeu de cadre

Notre hypothèse sur le cadre du raisonnement déductif, naturellement présent dans les situations, a été vérifiée et nous avons vu ce cadre apparaître de nombreuses fois. L'implication naturelle est apparue aussi par le biais de la *conception causale-temporelle.* D'autre part, le cadre de la logique formelle est apparu plusieurs fois (connecteurs **ou**, **et**, invalidation d'argument…). Comme nous en avions fait l'hypothèse, le cadre ensembliste a réellement été problématisé. En effet, même s'il est loin d'être maîtrisé, il se manifeste de nombreuses fois au moins implicitement ou lors de questionnements. Notre situation a donc permis une véritable confrontation des cadres au sein des différents groupes.

Conclusion

Nous avons formulé la thèse qu'établir un jeu de cadres sur les cadres ensembliste, de la logique formelle et du raisonnement déductif était non seulement nécessaire mais aussi suffisant à une bonne appréhension et une bonne utilisation de l'implication. Au terme de notre recherche, nous n'avons pas les moyens de prouver que ceci est suffisant. En effet, nous n'avons pas fait d'étude diagnostique de l'appréhension et de l'utilisation de l'implication par les PLC2, il ne nous est donc pas possible de « mesurer » l'apprentissage qu'ont permis ces séances. Cependant, nous pouvons, tout au moins, affirmer que cette thèse est confortée par nos résultats. En effet, l'analyse des productions montre un réel questionnement sur l'implication de la part de PLC2, notamment en termes de condition nécessaire, suffisante, équivalente ou encore minimale. Si l'apprentissage permis par ce questionnement n'est pas mesurable, il n'en reste pas moins qu'il existe. D'autre part, le cadre ensembliste, non connu des PLC2 est aussi questionné dans ces situations. Nous avons d'ailleurs montré une évolution au cours de l'ingénierie du rapport implicite des PLC2 avec ce cadre, ne serait-ce que par la prise en compte des quadrilatères croisés ou l'apparition de diagrammes ensemblistes (patates).

Un résultat important est donc la pertinence et l'efficacité de l'outil jeu de cadre, mis en œuvre avec les cadres théorie des ensembles, logique formelle et raisonnement déductif, pour la construction d'une situation d'apprentissage sur le raisonnement.

Nous continuons donc à soutenir cette thèse qui mérite d'autres recherches. Cependant, enseignant-chercheur depuis deux ans à l'IUFM d'Alsace, engagée dans la formation des professeurs d'école, nous avons préféré orienter nos recherches sur l'enseignement du raisonnement en primaire. Pour cela, appartenant à l'Erté « Maths à modeler », nous

sommes impliquée dans le développement et l'utilisation des *situations recherche en classe* [Grenier D., Payan C., 2003]. Ces situations, basées sur des problèmes ouverts, permettent d'aborder des notions transversales telles que le raisonnement, la preuve, les contre-exemples, la modélisation, la récurrence…

Bibliographie

Brousseau G., 1997, La théorie des situations didactiques. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y., 1985, La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y., 1992, Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques 12-1,* La Pensée sauvage, Grenoble, pp. 73-112.

Deloustal V., 1999, Le concept d'implication : l'objet mathématique, quelques aspects dans les manuels, conceptions de futurs enseignants. *mémoire de DEA,* université Joseph Fourier, Grenoble.

Deloustal-Jorrand V., 2000, L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x n°55,* IREM de Grenoble, pp. 35-70.

Deloustal-Jorrand V. (2004) L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication, *thèse*, Grenoble I.

Douady R., 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 5-31.

Durand-Guerrier V., 1996, Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse, Université Lyon I.

Durand-Guerrier V., 1999, L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit X, Vol.50,* IREM de Grenoble, pp. 57-79.

Duval R., 1993, Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?. *Petit X, Vol.31,* IREM de Grenoble, pp. 37-61.

Grenier D., Payan C., 1998, Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/1,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 59-100.

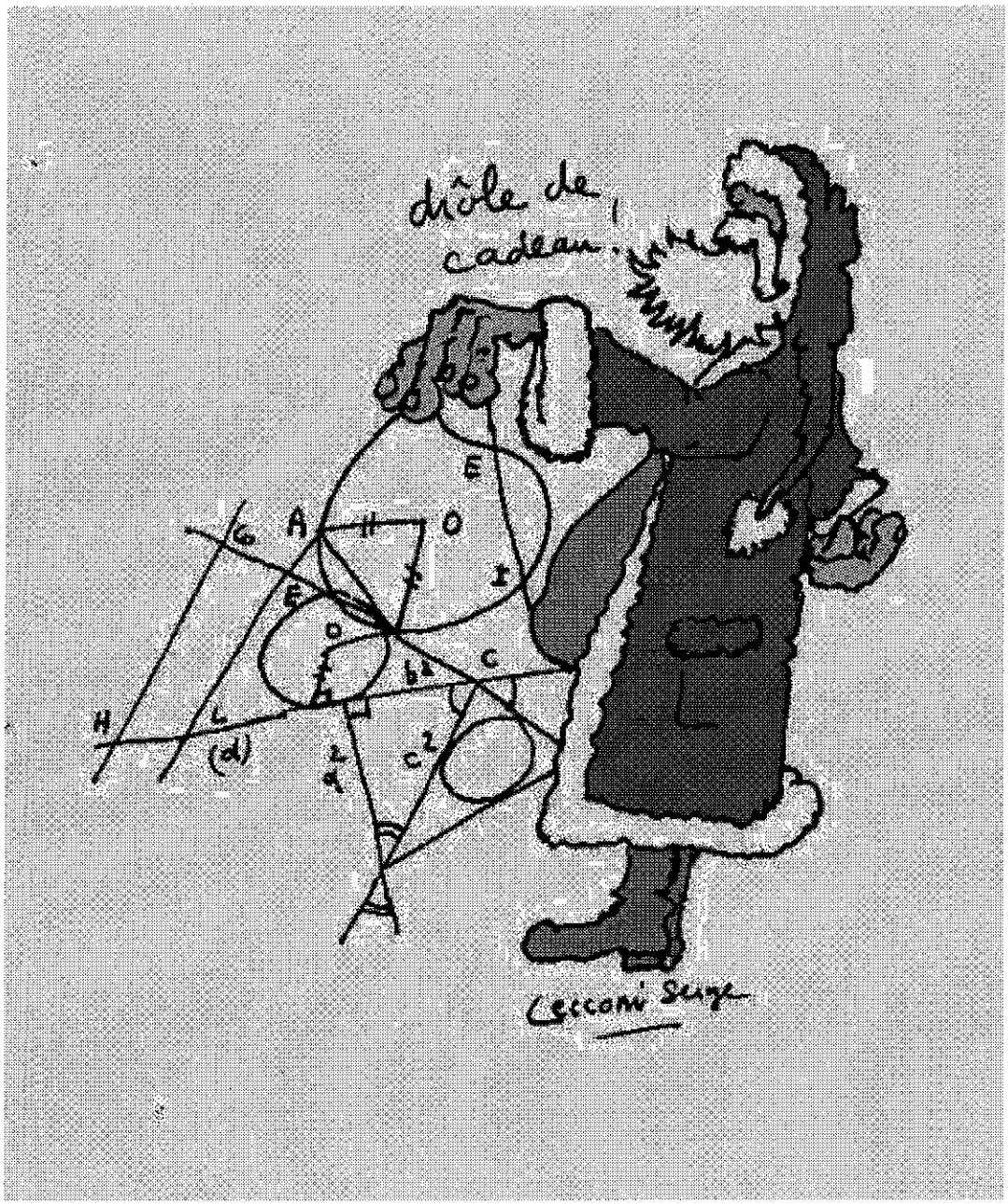
Grenier D., Payan C., 2003, Situations de recherche en « classe ». Essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* Paris VII.

Laborde C., Capponi B., 1994, Cabrigéomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 14 n°1,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 165-210.

Parzisz B., 1988, Knowing vs Seing, problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics Vol. 19-1,* pp. 79-92.

Rogalski J., Rogalski M., 2004, Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 9,* pp. 175-203.

Vergnaud G., 1990, La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 10 n°2,3,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 133-170.


drôle de
cadeau
E
A
O
I
H
(d)
C
Ceccon Serge

Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne

Richard CABASSUT,
richard.cabassut@alsace.iufm.fr,
IUFM d'Alsace, Didirem Paris 7

Nous rendons compte d'une recherche[37] sur la validation des assertions dans l'enseignement secondaire des mathématiques autour des conjectures de recherche suivantes : la validation est un objet à enseigner et un objet d'enseignement; la validation dans l'enseignement est la double transposition de la validation mathématique et de la validation non mathématique; les variations d'institutions, d'organisations mathématiques et d'organisations didactiques permettent d'expliquer des variations dans l'enseignement de la validation.

Au niveau de la méthodologie, d'une part nous adaptons le cadre théorique de Toulmin, sur les arguments de plausibilité et de nécessité, à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard, et d' autre part nous suivons une approche comparative franco-allemande qui permettra de contraster différentes praxéologies.

Quatre études ont permis de répondre aux questions :

- une comparaison de réflexions et de recherches sur la validation ou sur des comparaisons franco-allemandes, qui permettra notamment de dégager une typologie de la validation et de ses fonctions (nous ne rendrons pas compte cette étude faute de place);
- une comparaison de programmes d'enseignement et de textes officiels d'accompagnement, indiquant si la validation est un objet à enseigner et quelles en sont ses caractéristiques;
- une comparaison de la validation dans des manuels scolaires qui confirmera que la validation peut être un objet d'enseignement, lieu de la double transposition de la validation mathématique et de la validation non mathématique;
- une comparaison de productions d'élèves qui permettra d'illustrer des différences de techniques et de contrats, avec pour des tâches, et des technologies disponibles, semblables.

Rappelons tout d'abord quelques éléments du cadre théorique

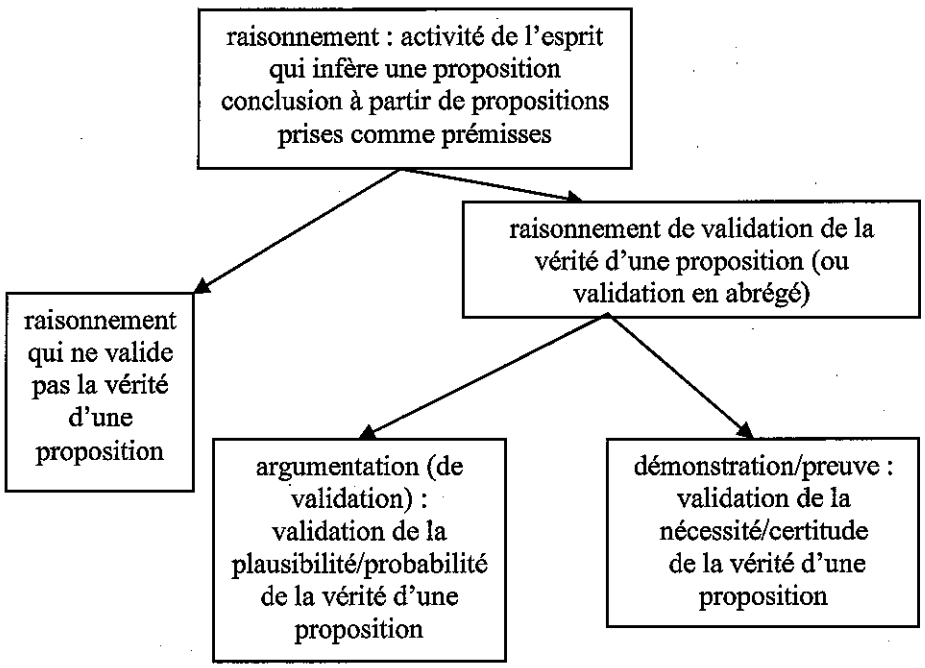
[37] Recherche conduite de 1999 à 2005 au laboratoire Didirem de PARIS 7 sous la direction de Bernard Parzysz.

1 cadre théorique

1.1 théorie de l'argumentation de Toulmin

Nous nous référerons à Toulmin qui propose « la distinction entre arguments nécessaires et probables : c'est-à-dire entre les arguments dont la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion (qui peut donc être accompagnée du qualificatif modal « nécessairement ») et ceux dont la garantie ne nous habilite qu'à tirer une conclusion provisoire (nuancée par le mot « probablement »), sujette à de possibles exceptions (« vraisemblablement ») ou conditionnelle (« pourvu que... ») ». [Toulmin 1993, trad. P.d.B., p.184]. Nous préférerons l'expression « argument de nécessité » ou « raisonnement de nécessité » où la nécessité se réfère à la conclusion (et non pas aux conditions de réalisation de la conclusion, conditions qui sont suffisantes). Nous préférerons au mot « probable » le mot « plausible » qui a une connexion beaucoup moins forte avec la théorie des probabilités. Il est très souvent utilisé dans les programmes de l'enseignement secondaire des mathématiques comme nous l'observerons plus loin.

Lorsque dans une validation, la vérité de la conclusion est nécessaire/certaine, nous appellerons le raisonnement de validation une preuve ou une démonstration ; lorsqu'elle est plus ou moins plausible nous l'appellerons argumentation.



1.2 théorie anthropologique du didactique

« Le point crucial à cet égard, dont on découvrira peu à peu les implications, est que la théorie anthropologique du didactique situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales » [Chevallard 1999 p.223]. « Une institution peut être à peu près n'importe quoi [...]. Une école est une institution de même qu'une classe ; mais il y a aussi l'institution « travaux dirigés », l'institution « cours », l'institution « famille ». La vie quotidienne est une institution ». [Chevallard, 1992, p.88].

Nous distinguons deux variations institutionnelles relatives au savoir autour du raisonnement de validation : d'une part une variation entre les institutions de la vie quotidienne et les institutions mathématiques avec un point de rencontre dans les institutions d'enseignement des mathématiques, d'autre part une variation dans les institutions d'enseignement des mathématique entre la France et l'Allemagne. Les tableaux suivants précisent la descriptions de nos objets d'études dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique.

types d'institutions productrices de savoirs	*institutions mathématiques produisant le savoir mathématique « savant »* : départements de mathématiques des universités, centres de recherches mathématiques,...	*institutions d'enseignement des mathématiques* : classe de mathématiques d'un lycée français ou d'un Gymnasium du Bade-Wurtemberg,...	*autres institutions* : famille, école, clubs, vie quotidienne ; classe de sciences physique, ; classe de philosophie ;...
savoirs produits par les institutions précédentes	savoirs mathématiques « savants » : théories mathématiques et logiques mathématiques	savoirs mathématiques enseignés	savoirs non mathématiques et connaissances sociales ; logiques « naturelles » ; logiques non mathématiques
exemples de critères de	conformité à la théorie mathématique, non	conformité aux méthodes de validation	adéquation avec la réalité, adéquation

vérité d'une proposition	contradiction avec la logique associée	autorisées (perceptives, instrumentées, déductives,...), conformité à l'avis d'une autorité (professeur ou manuel scolaire)	entre les faits et les théories ; succès dans l'action ; convergence des croyances
arguments pour valider	arguments de nécessité	arguments de nécessité ou arguments de plausibilité	
exemples d'éléments des technologies justifiant les raisonnements de validation	définitions, axiomes, théorèmes, règles de logique	définitions, théorèmes et règles d'inférences des mathématiques enseignées, règles des contrats d'enseignement	actions, expériences, définitions, propriétés, principes, lois, règles d'inférences et règles de contrats de la vie sociale
théories organisant des savoirs, des technologies et des règles d'inférence	théories mathématiques et logiques, souvent formalisées et globales, construites de manière systématique	théories peu formalisées, souvent locales (souvent construites autour d'un objet de savoir)	« théories » de la vie sociale ou de la vie quotidienne : en général très peu formalisées, souvent implicites

On analysera une validation dans une institution I au travers des quatre notions proposées par Chevallard : tâche, technique, technologie, théorie.

tâche	technique	technologie	théorie
valider une proposition mathématique dans une institution I dans des conditions institutionnelles données	manière d'utiliser des règles de validation pour valider la proposition précédente	règles de validation, définition des objets utilisés, règles de contrat, justification, explication, production de la technique	justification, explication, production de la technologie

routinière, problématique	registres de la technique : matériel, graphique, langagier	mathématique, non mathématique	

1.3 Fonctions de la validation

Pour répondre à la question « pourquoi valider ? » nous nous appuierons essentiellement sur des travaux qui ont étudié les fonctions de la démonstration : De Villiers [1990] dans l'institution mathématique et Hanna [1995, 2000] dans l'institution didactique, et nous dégageons les cinq fonctions principales de la validation.

Fonction	Description
vérification (preuve ou plausibilité)	valider la nécessité ou la plausibilité de la vérité d'une proposition
explication	fournir un aperçu de pourquoi la proposition est vraie
systématisation (incorporation)	organiser des connaissances en système déductif, incorporer des connaissances nouvelles, utiliser des connaissances anciennes
découverte	découverte, invention, préparation, production de nouveaux résultats
communication	transmission des connaissances

1.4 Typologie des arguments

Nous distinguerons essentiellement les **trois types d'arguments** suivants :

formel (ou syntaxique) : tout argument dont la structure est clairement explicitée (données, règle de validation, conclusion) et dont l'application de la règle de validation repose sur la forme des termes de la règle et des données, et ne nécessite pas une interprétation supplémentaire basée sur la signification ou le contenu de ces termes ou de ces données.

pragmatique : tout argument utilisant le succès d'une action comme règle de validation, par exemple avec le recours à une action du type mesure, reconfiguration de surfaces par déplacement, construction d'une figure, lecture directe d'une figure. L'action peut être effectivement réalisée ou pensée. On comprend que le recours à une action ne correspond pas à une règle formelle.

sémantique : tout argument dont la règle de validation est constituée de règles qui ne sont pas formulées de manière formelle mais qui s'appuie sur la signification ou le contenu des

objets qu'elles mettent en jeu. C'est le cas des règles qui ne sont pas complètement explicitées ou formalisées, par exemple lorsque le registre de représentation des objets n'est pas une langue formelle comme dans le cas d'un calcul automatique non explicité, ou dans la conversion d'un registre de représentation à un autre.

Cabassut	argument pragmatique	argument sémantique	argument formel (ou syntaxique)
Balacheff	preuves pragmatiques	preuves intellectuelles	démonstration calcul sur les énoncés
Duval		inférence sémantique inférence discursive	déduction syllogisme
Holland	argumentation	argumentation déduction sémantique	déduction formelle
Tietze	preuve préformelle preuve par l'action argument de plausibilité	preuve préformelle intuition sémantique argument de plausibilité	démonstration déductive formelle
Knipping	argumentation pragmatique	argumentation sémantique	argumentation (conceptuelle déductive ou abductive)

2 Etude des programmes d'enseignements et des textes officiels

2.1 La démonstration en Bade-Würtemberg

On observe que **la démonstration n'est pas un objet d'enseignement de la Hauptschule et de la Realschule**. Les élèves y rencontrent des validations utilisant principalement des arguments de plausibilité et des arguments pragmatiques. Les arguments formels sont apparemment absents. **La preuve est un objet paramathématique de la Realschule** au sens de Chevallard [1985 p.49-50]: « A côté de ces « notions mathématiques » désignées ci-dessus se rangent des notions qu'on peut dire « *paramathématiques* » : par exemple, la

notion de paramètre, la notion d'équation, la notion de démonstration. Les notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématique ; elles ne sont pas « normalement » des objets d'études pour le mathématicien [...] Seuls les objets de savoir sont pleinement des candidats à être des objets d'enseignement. Les notions paramathématiques, par exemple, ne font pas l'objet d'un enseignement ; ce sont des objets de savoir « auxiliaire » nécessaire à l'enseignement (et à l'apprentissage) des objets mathématiques proprement dits. Ils doivent être « appris » (ou plutôt « connus »), mais ils ne sont pas « enseignés » selon le plan d'enseignement des notions mathématiques ». Il n'y a pas d'indication sur le fait que l'élève doit apprendre à produire des preuves. Il semblerait que seul le professeur produise des preuves en situation de classe, éventuellement dans un travail collectif avec les élèves. Mais aucune indication ne le précise.

Par contre **la démonstration est un objet d'enseignement de Gymnasium** dès les programmes de 1971. La référence à cet enseignement apparaît explicitement en classe 8 sous la forme d'un paragraphe dans le corps du programme et en classe 9 sous la forme d'une unité d'enseignement. De plus, des références ponctuelles apparaissent à l'occasion dans l'exposé des contenus du programmes ou des objectifs, de la classe 5 à la classe 13.
On observe une explicitation et un discours plus expansif[38] accordé à la preuve et à la démonstration. **L'étude diachronique**, des programmes de 1971 aux programmes à venir, montre un déplacement de la preuve dans l'enseignement des mathématiques, transposée de la démonstration mathématique, centrée sur ses fonctions de vérification et de systématisation, à la preuve dans l'enseignement des mathématiques, élément d'une formation sociale qui intègre d'autres formes de validation comme l'argumentation, et d'autres formes de raisonnement comme le raisonnement de plausibilité, centrée sur ses **fonctions d'explication et de communication**. Dans ce déplacement les arguments formels ne sont pas toujours les arguments préférables : **les arguments de plausibilité, les arguments pragmatiques et les arguments sémantiques sont valorisés**, y compris dans le cycle supérieur (Oberstufe).
Un principe didactique semble mis en évidence : **le principe de renoncement au formalisme** qui consiste à renoncer à un argument formel dans les cas suivants. Soit la

[38] Nous songeons à l'expansion, à une même période, dans les programmes de Gymnasium par rapport à ceux de Realschule ou Hauptschule. Pour ce qui est de l'expansion dans le temps, celle-ci ne peut préjuger d'une importance croissante de la preuve. On remarque en effet une expansion générale des programmes dans le temps, avec des considérations générales et des commentaires plus abondants, peut-être liée à l'importance de la communication dans un enseignement de masse.

limitation est cognitive : par exemple la complexité d'une axiomatisation de la géométrie euclidienne ne serait pas accessible à un certain âge. Soit l'argument formel n'est pas mobilisable pour des raisons de constitution du programme qui l'a rejeté à plus tard. Soit pour des raisons didactiques : l'argument formel est mobilisable, mais ne sert pas la fonction d'explication de la validation. Dans ce cas on lui substitue un autre argument estimé remplir la fonction d'explication. La plupart du temps, il s'agit d'arguments de plausibilité, d'arguments pragmatiques ou d'arguments sémantiques, utilisant souvent les registres matériels ou graphiques.

Il n'y a aucune indication de théorèmes à admettre. Quitte à utiliser des arguments de plausibilité ou sémantiques, une validation s'opère pour remplir sa fonction de systématisation, parfois dans une dimension élémentaire ou contemplative.

Les indications sur les activités dans lesquelles l'élève produit des démonstrations sont assez rares : travail autonome de l'élève pour développer l'idée de preuve sur le centre de gravité ou l'orthocentre en classe 8, travail, individuel ou en groupe, pour chercher des arguments et démontrer dans l'unité correspondante de classe 9, exploitation autonome du livre à propos des démonstrations sur les aires et volumes en classe 10, conduite autonome de démonstrations pour les théorèmes de géométrie métrique en classe 12 et 13.

2.2 La démonstration en France

Dans les programmes de 1996 la démonstration apparaît explicitement comme objet d'enseignement au cycle central (cinquième-quatrième) du collège.

Au collège, l'analyse diachronique montre que c'est d'abord la démonstration qui est désignée comme objet d'enseignement, ensuite c'est le raisonnement déductif qui devient l'objet d'enseignement tandis que la démonstration est un objet paramathématique, enfin la démonstration redevient objet d'enseignement. Mais entre les deux moments, elle passe d'objet transposée de la démonstration mathématique savante, basé sur la logique et l'axiomatique, à un objet d'enseignement, basé sur des arguments divers : pragmatiques, intuitifs, sémantiques, formels.

Alors qu'au début ce sont essentiellement les fonctions de vérification de la preuve, de communication discursive et de systématisation locale qui étaient valorisées, maintenant les **fonctions de découverte, d'explication et de vérification de la plausibilité sont également valorisées.**

Les arguments pragmatiques ou intuitifs, au début limités à la phase d'initiation au raisonnement déductif, ou à la fonction de découverte heuristique, aident maintenant à remplir les **fonctions d'explication globale et de vérification de la plausibilité.**

De même, alors qu'au début la fonction de communication discursive était soutenue essentiellement par des arguments formels, maintenant des **arguments sémantiques ou intuitifs et des registres non linguistiques** y participent. On va jusqu'à parler de « démonstration graphique » ou de « démonstration empirique ».

La fonction de systématisation est assurée dans les activités de résolutions de problèmes, par utilisation des théorèmes déjà démontrés ou admis, plus que dans la démonstration des théorèmes de cours, qui est à éviter si elle n'aide pas à la compréhension du théorème ou pour laquelle une démonstration intuitive peut remplacer une démonstration formelle.

Concernant les théorèmes admis, ils peuvent l'être d'après le **principe du théorème admis :** un théorème est admis si sa démonstration apporte peu.

Le contrat précisant les normes de rédaction d'une démonstration est très variable suivant le contexte : classe, domaine, fonction de la démonstration (par exemple explication globale ou vérification de la nécessité).

2.3 Comparaison franco-allemande

Alors que le Bade-Wurtemberg s'oriente vers une filière unique en Gymnasium pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, la France parle de différencier sa filière collège et différencie les programmes de mathématiques en trois séries, à leur tour différenciées en enseignement de base et enseignement optionnel. **On va donc vers un enseignement unique de la preuve en Bade-Wurtemberg et, au contraire, vers un enseignement différencié en France.**

Dans les deux pays **la démonstration commence à être un objet d'enseignement à la même période, en classe 8 allemande et au cycle central français.** Cette apparition est progressive.

Par contre **la première apparition d'une technologie mathématique donnée peut varier considérablement d'un pays à l'autre.**

Thème technologique	Première validation	Première validation en	Domaine et commentaire

	en France	Bade-Wurtemberg	
Somme des angles d'un triangle	Cinquième	7	Géométrie Avant la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles
Périmètre et aire du cercle	Sixième et cinquième	10	Grandeurs Avant en France
Théorème de Pythagore	Quatrième (puis seconde)	9	Géométrie Après la leçon sur la démonstration avant en France
Théorème de Thalès	Troisième (puis seconde)	9 (puis 12-13)	Géométrie Après la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles
Variation des fonctions	Seconde	11	Fonctions Après la leçon sur la démonstration avant en France
Equations du second degré	Première S	9	Equations Après la leçon sur la démonstration Après en France
Triangles isométriques	Seconde	8	Géométrie Après la leçon sur la démonstration après en France
Triangles semblables	Seconde	9	Géométrie Après la leçon sur la démonstration Après en France
Formules de volume	Collège	10	Grandeurs

	(puis terminale)	(puis 12-13)	avant en France
Différentiabilité	Première S	11	Analyse Après la leçon sur la démonstration Dans des classes parallèles

Quelques éléments de contrat apparaissent :
le principe de renoncement au formalisme, appliqué dans chaque pays pour mieux servir la fonction d'explication,
le principe du théorème admis, qui semble énoncé seulement en France.

Pour ce qui concerne les différentes fonctions de la démonstration, concernant le contexte actuel, **la filière unique de Gymnasium permet d'aborder la fonction de systématisation dans sa dimension globale, alors que la fonction de systématisation est évoquée, dans les programmes français dans sa dimension locale (« îlots déductifs, application d'un théorème »)..**
La fonction découverte peut être propédeutique en Bade-Wurtemberg, alors qu'elle est plutôt heuristique en France. On peut remarquer cependant l'apparition de cette fonction propédeutique en France, par exemple à propos de la validation du théorème des gendarmes en première S.
La fonction de **communication** discursive est très importante et motive une part importante des activités en **France**, donnant une **importance à la rédaction écrite.**
Cependant nous avons observé que toutes les fonctions sont évoquées dans les programmes de chaque pays.
Il est vrai que les **arguments pragmatiques ou sémantiques** semblent plus valorisés que les arguments formels **en Bade-Wurtemberg,** notamment compte tenu des nouveaux programmes à partir de 1999. Par contre **en France** on observe une évolution quant à la valorisation des arguments formels. Alors que dans la progression du collège vers le lycée, les arguments pragmatiques très présents en début de collège étaient progressivement abandonnés dans les précédents programmes au profit d'arguments plutôt formels, on voit dans les programmes de lycée de 2000 un **renouveau des arguments sémantiques** (avec recours à différents registres non langagiers : tableau, graphique, arbre, figure).

Nous allons maintenant examiner, au travers de manuels scolaires, si nos analyses de programmes sont mises en œuvre, et si oui, comment.

3 Etude de la validation dans des manuels scolaires

Au point de vue méthodologique nous opérons comme suit :

- nous choisissons la collection de manuels de classe la plus répandue en Gymnasium du Bade-Wurtemberg, d'après les avis convergents des experts consultés : il s'agit de la collection de Lambacher-Schweizer aux éditions Klett, composée des 9 livres des classes 5 à 13, les classes 12 et 13 ayant en commun deux livres, l'un d'analyse et l'autre de géométrie ;
- nous sélectionnons un objet à étudier (par exemple une leçon sur la démonstration ou la validation d'un théorème de cours donné) et nous étudions cet objet dans les livres où il apparaît ;
- puis en application du principe de dialectique différences-similitudes (inspiré de [Clarke 2004]) nous cherchons une étude semblable dans un manuel français de collège ou lycée.
- Si nous trouvons le même objet traité de manière semblable dans un manuel pour chaque pays, nous comparons ces traitements en essayant de dégager et d'expliquer les éléments de similitudes. Mais nous essayons également de les contraster et d'essayer de faire apparaître des différences que nous pourrions expliquer notamment à partir de la composante nationale.
- Si nous ne trouvons pas de traitement semblable du même objet, nous comparons alors les deux traitements en essayant d'expliquer les différences et de relever éventuellement des points communs permanents.

La solution consistant à partir de la collection allemande la plus répandue est une solution de confort, car il nous était plus facile d'accéder à différentes collections en France qu'en Allemagne. On pourrait réaliser la même étude en partant de la collection française la plus répandue, et observer s'il y a des différences par rapport à nos conclusions.

3.1 La démonstration comme thème d'étude

On observe l'existence d'une leçon sur la démonstration dans le manuel de **Klasse 8,** Gymnasium, Baden-Würtemberg, Lambacher Schweizer, Klett, 1999 (première édition

1995) et dans le manuel de la **classe de quatrième**, collection triangle, Hatier, 1998. la démonstration apparaît donc clairement comme un objet d'enseignement dans ces deux manuels analysé dans le tableau comparatif suivant.

<table>
<tr><td></td><td>leçon allemande</td><td>leçon française</td></tr>
<tr><td rowspan="2">genre de tâches</td><td colspan="2">découvrir (conjecturer ou reconnaître), contrôler (reconnaître les statuts, les formes de raisonnement, l'application des énoncés conditionnels), changer de registre (tracer, encoder, décoder), démontrer (avec ses variations calculer, construire, étudier)</td></tr>
<tr><td>découvrir, conjecturer,
contrôler sont peu présents</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">technologie</td><td colspan="2">une technologie logique ou de raisonnement, présentée de manière assez sommaire,
une technologie mathématique avec une emphase particulière pour la géométrie,
une technologie non mathématique, constituée essentiellement par les arguments visuels, pragmatiques (mesure sur des figures) ou inductifs (vérification sur quelques exemples).
les technologies non mathématiques sont sollicitées dans les tâches du genre</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">technique</td><td colspan="2">démontrer la fausseté à l'aide d'un contre-exemple, démontrer la vérité en appliquant un théorème de forme conditionnelle,</td></tr>
<tr><td></td><td>découvrir en reconnaissant une configuration particulière dans une figure,
démontrer par le calcul
découvrir par conditions</td></tr>
<tr><td>fonction</td><td colspan="2">découvrir, systématisation locale, vérifier (preuve ou plausibilité), communication</td></tr>
</table>

3.2 La validation de théorèmes de cours

On choisit différents théorèmes suivant les variables suivantes : positions relatives, selon le pays, du moment de première validation du théorème, position relative de première validation du théorème par rapport à la classe de quatrième ou à la classe 8 où la démonstration est introduite, domaine mathématique du théorème, technologie mathématique mobilisable ou non.

Thème du théorème	Analyse allemand français		Domaine et commentaire
somme des angles d'un triangle	argumentation : plausibilité, explication, preuve avec recours à la figure (géométrie de l'ordre) le recours à la figure est un élément de technologie validations semblables **fonction d'explication**		Géométrie. Avant la leçon sur la démonstration. Dans des classes parallèles. Cinquième/7.
périmètre et aire du cercle	preuve avec recours à la figure et argument d'induction remplaçant une technologie non mobilisable **fonctions d'explication, propédeutique**	preuve avec argument pragmatique, d'induction et d'autorité remplaçant une technologie non mobilisable **fonctions de plausibilité, découverte**	Grandeurs. Avant la leçon sur la démonstration. Sixième et cinquième/10.
	validations distinctes		
théorème de Pythagore	technique visuelle en substitution à technique formelle mais technologie mathématique mobilisable argument visuel pour la décomposition/recomposition dans surfaces **fonction d'explication** preuves semblables		Géométrie Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Quatrième (puis seconde)/9
théorème de Thalès	technique visuelle pour technologie du théorème des milieux argument d'induction technologie mathématique absente (passage à la limite)		Géométrie. Après la leçon sur la démonstration. Dans des classes parallèles :

	une organisation déductive différente déplace le moment d'intervention d'un argument d'induction preuves semblables		Troisième (puis seconde)/9
variation de la fonction carrée	technologie formelle mobilisable mais une autre technologie permet de remplir une fonction de systématisation argument visuel en l'absence de technologie mobilisable **fonctions d'explication et de systématisation**	technologie formelle mobilisable et mobilisée **fonctions de preuve, de sytématisation**	Fonctions. Avant la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Seconde/11
	preuves distinctes		
équations et inéquations du second degré	technique visuelle pour technologie des inégalités contrat de rédaction implicite et concise en langue symbolique pour calcul **fonction d'explication**	technique des tableaux de signes pour technologie des inégalités contrat de rédaction explicite, même pour calcul **fonctions de preuve et de systématisation**	Equations Après la leçon sur la démonstration. Première S/9
	preuves distinctes		
formules de volume des solides usuels	preuve avec recours à la figure et argument d'induction remplaçant une technologie non mobilisable **fonctions propédeutique, d'explication et de systématisation**	preuve avec argument pragmatique, d'induction et d'autorité remplaçant une technologie non mobilisable **fonction de plausibilité et de systématisation**	Grandeurs Avant et après la leçon sur la démonstration en France. Après en Bade-Wurtemberg. Collège (puis Terminale)/ 10 (puis 12-13)
	preuves distinctes		

3.3 Observations

Parmi les **technologies** didactiques mises en évidence on note :

le principe en Bade-Wurtemberg comme en France de recours à la figure (par exemple dans la somme des angles du triangle),

le principe en Bade-Wurtemberg comme en France du renoncement au formalisme (en Bade-Wurtemberg comme en France par exemple dans le théorème de Pythagore)

en Bade-Wurtemberg le principe de rédaction implicite et concise (recours à codage, recours à figure, implicite dans calcul algébrique, ...) (par exemple dans la somme des angles d'un triangle, l'équation du second degré, ...),

en France le principe français de rédaction explicite (marqueurs de statuts, explication de démarche, ...) (par exemple dans les équations et inéquations du second degré),

en France le principe du théorème admis (que nous n'avons pas observé en Bade-Wurtemberg).

Les **technologies** non mathématiques du type arguments visuels, pragmatiques, d'induction, d'autorité, apparaissent :

lorsque la technologie mathématique n'est pas complètement mobilisable (géométrie de l'ordre pour la somme des angles d'un triangle, passage à la limite pour le périmètre et l'aire d'un cercle ou pour le théorème de Thalès, théorème des accroissements finis pour les variations de la fonction carrée) ou lorsque l'on veut réaliser certaines fonctions de la validation (explication pour la somme des angles d'un triangle, propédeutique pour le périmètre et l'aire d'un cercle, explication pour le théorème de Thalès, systématisation pour les formules de volumes ou pour les variations de la fonction élévation au carré)

lorsque des technologies mathématiques mobilisables ne sont pas mobilisées pour des raisons didactiques (principe du renoncement au formalisme (théorème de Pythagore, inéquation du second degré) ou à cause des fonctions assignées à la validation (systématisation pour la variation de la fonction carrée dans le manuel allemand, explication pour le théorème de Pythagore).

Dans les exemples ci-dessus, on voit que les situations relèvent de différents domaines (géométrie, grandeur, fonction, équation, ...), aussi bien avant la classe d'introduction de la démonstration ou après, dans des classes parallèles ou différentes.

Les technologies non mathématiques précédentes cohabitent avec des technologies mathématiques, c'est ce qui illustre le phénomène de **double transposition**.

D'une part on adapte (on transpose) la démonstration mathématiques en remplaçant des arguments mathématiques mobilisables (exemple du théorème de Pythagore) ou non (exemple de la formule de l'aire et du périmètre en Bade-Wurtemberg, exemple de la somme des angles d'un triangle) par des arguments non mathématiques. On transpose une validation mathématique en validation didactique.

D'autre part on ne se contente pas d'arguments non mathématiques (par exemple du seul argument d'autorité, ou encore d'un seul argument pragmatique de mesure, ou encore d'un seul argument visuel). On complète ces arguments non mathématiques par des arguments mathématiques (par exemple dans les formules de l'aire et du périmètre du cercle, dans le théorème de Thalès), qui assurent à l'argumentation une qualité mathématique : on transpose une validation non mathématique en une validation didactique.

C'est le phénomène de double transposition qui constitue **la validation didactique comme lieu de la cohabitation d'arguments mathématiques et d'arguments non mathématiques**.

Concernant les **techniques** mises sen œuvre on observe :

différentes registres (figure, graphique, tableau, ...) pour alléger le formalisme alors que la technologie mathématique est mobilisable (dans le théorème de Pythagore avec la technologie des angles mobilisable ; dans l'inéquation du second degré avec la technologie des inégalités et avec la technique de disjonction des cas par lecture graphique),

différentes techniques mathématiques justifiant une démonstration (méthode des aires pour le théorème de Pythagore, méthode du tableau des signes pour l'inéquation du second degré en France, recours à la figure pour l'inéquation du second degré en Bade-Wurtemberg).

Il peut arriver qu'une même technique puisse être justifiée au choix, par des arguments mathématiques, ou par des arguments non mathématiques (induction, argument visuel, argument pragmatique, argument d'autorité) (exemple du théorème de Pythagore).

Dans les observations faites il est difficile de déterminer le rôle des différentes variables : domaine mathématique concerné, technologies mathématiques mobilisables, techniques mobilisables, rang de la classe, pays concerné, thème étudié, ...

Nous avons cependant montré que les fonctions de la validation pouvaient, en partie, expliquer le type d'arguments, de technologie ou de technique mis en œuvre. Nous avons observé que la **fonction d'explication** était plus fréquente dans les validations observées dans les manuels allemands, ce qui s'accompagnait d'un recours à des registres figuraux,

graphiques ou pragmatiques plus fréquents (exemple de l'inéquation du second degré, des variations de la fonction élévation au carré). Il reste cependant délicat de discerner si les différences observées correspondent à des fluctuations de manuels ou reposent sur des différences entre pays. On peut juste remarquer que ces observations corroborent nos observations des textes officiels : plus de poids à la fonction d'explication dans le Bade-Wurtemberg, et plus de poids à la fonction de communication discursive notamment dans la rédaction écrite en France.

Nous allons maintenant nous intéresser aux validations produites avec une technologie commune aux deux pays, avec une même fonction assignée à la validation dans chaque pays et dans des conditions institutionnelles de production de la validation assez semblables, dans le but de comparer les techniques mises en oeuvre et les contrats les accompagnant.

4 Etude de la validation dans des copies d'élèves

4.1 Choix du dispositif d'étude

Il existe une compétition annuelle « mathématiques sans frontières » qui s'est déroulée le 14 mars 2000 en Alsace et en Bade-Wurtemberg. Dans cette compétition nous avons sélectionné un exercice qui correspondait à une tâche du genre : « démontrer un résultat donné dans le temps limité de la compétition ».

Ce dispositif d'étude a retenu notre attention car il présentait les avantages suivants :

beaucoup de similitudes entre les deux pays :

même contexte institutionnel de compétition pour les deux pays : conditions de passations semblables (même jour, même texte d'épreuve dans la langue maternelle).

mêmes fonctions assignées aux démonstrations : les élèves doivent démontrer le résultat par des arguments mathématiques qui sont donc des arguments de nécessité, ce qui correspond à la fonction de preuve ; les élèves doivent rédiger leur démonstration pour la communiquer au correcteur, ce qui correspond à la fonction de communication ; les autres fonctions (explication, systématisation, découverte) ne sont pas des objectifs du contrat implicite.

pour démontrer le résultat, des technologies disponibles chez les élèves sont communes aux deux pays (même s'il peut exister éventuellement d'autres technologies propres à un pays).

dans les deux pays l'enjeu de la compétition pour la scolarité des élèves n'existe pas puisque les copies ne sont pas individuelles : il n'y a pas de notes pour le bulletin. La compétition donne lieu à l'attribution de prix (pour chaque élève de la classe : T-shirt, sac de sport, entrée à la patinoire, à un parc d'attraction, voyage à Paris ou Berlin, ...). Il y a des prix de participation par tirage au sort, ce qui permet à des classes faibles de pouvoir gagner.

le facteur « professeur » est minimisé car il y a autant de professeurs que de copies. Nous avons vu, par exemple dans les travaux de [Knipping 2003] ou [Rauscher 1993], la grande hétérogénéité des professeurs. En variant les professeurs, ceci permet ne pas introduire un biais trop fort lié au professeur, ce qui est le cas lorsqu'on considère les productions d'élèves d'un même professeur.

l'organisation de la compétition (préparation, déroulement, collecte et correction des copies) est prise en charge par l'équipe d'organisation.

la date de la compétition : l'année 2000 permettait d'avoir des classes françaises où les nouveaux programmes avaient été mis en place (en 1999 pour la troisième et en 2000 pour la seconde) et des classes allemandes non encore affectées par la réforme des programmes mis en place en début de cursus en 1999. Ces niveaux de classe correspondaient aux programmes et aux manuels étudiés dans notre recherche.

Dans les deux pays, on étudie les « **bonnes** » **copies**, produites dans des conditions comparables, c'est-à-dire avec la **même tâche** à résoudre, dans des conditions institutionnelles semblables, avec les mêmes fonctions, avec un **bloc technologico-théorique disponible semblable.** Nous allons essayer de **comparer les techniques et les contrats,** en mettant en évidence éventuellement des différences. On a donc sélectionné les 23 meilleures copies du corpus de copie françaises

4.2 Méthodologie d'analyse

Nous avons choisi un exercice présentant les caractéristiques suivantes :

la résolution de l'exercice consiste en la rédaction d'une démonstration ;

la démonstration n'est pas immédiate et ne consiste pas en la simple application immédiate d'un théorème ;

la méthode de résolution n'est pas indiquée dans le problème (problème ouvert) ;

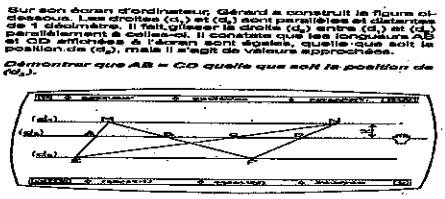
le résultat à démontrer est indiqué dans le sujet (ce n'est pas un problème d'étude ou une situation-problème où le résultat à montrer est d'abord à conjecturer), en effet nous nous

intéressons moins à l'heuristique (qui vise en partie à conjecturer un résultat) qu'aux arguments développés dans une démonstration ;

la démonstration peut être réalisée avec des technologies disponibles et accessibles dans les deux pays : les théorèmes de Thalès et le calcul sur les fractions (pour plus de détail voir l'analyse a priori qui suit) ;

la démonstration comprend une partie géométrique et une partie algébrique, ce qui permet de représenter deux grands domaines mathématiques.

L'exercice choisi est le suivant :



Différentes méthodes d'analyse sont développées pour étudier le corpus. Nous allons à titre d'exemple illustrer l'*analyse par unités démonstratives* qui permet de mesurer l'expansion du discours.

La terminologie suivante s'inspire des travaux de [Houdebine 1998, p.10].

On appelle **unité démonstrative** un ensemble de mots ou symboles ou graphies exprimant :

soit le contexte d'un argument de démonstration : par exemple « dans le triangle MEF » compte pour une unité. Houdebine [Ibid.] précise : « cette indication, que nous appellerons le contexte du pas, peut être très explicite avec des expressions du genre : « dans le triangle ABC ». Mais elle peut être assez implicite : simplement les propriétés P et Q du théorème sont explicitées dans le texte pour l'objet particulier choisi. Par exemple : « comme le triangle ABC est rectangle en A, on a $AB^2+AC^2=BC$ ».

soit une entrée d'argument : « Les points M,A,E et M,B,F sont alignés. De plus (AB)//(EF) » compte pour deux unités, « la droite d_1 parallèle à la droite d_2 » compte pour une unité,

soit une citation explicite de la règle d'argument ; le nom d'un théorème, d'une règle de calcul ou d'une définition : « d'après la propriété de Thalès » ou « j'utilise le théorème de Thalès » compte pour une unité,

soit une sortie d'argument : « on a les rapports MA/ME = MB/MF=AB/EF » compte une unité,

soit un ajout de données « on trace une droite perpendiculaire à d_2 et qui passe par M ».
On compte, pour chaque copie d'élève, le *nombre d'unités démonstratives* de géométrie, respectivement d'algèbre.

Nous allons donc constituer la population des copies françaises, notée **F**, avec les 23 « meilleures » et celle de la population des copies allemandes, notée **A**, constituée des 23 « meilleures » copies. Rappelons que F et A ne sont pas des échantillons représentatifs de copies d'élèves français, respectivement allemands. F et A représentent les « meilleures » démonstrations de l'exercice choisi du point de vue des correcteurs.

4.3 Résultats de l'observation

L'examen des productions d'élèves a permis de mettre en évidence les éléments suivants.

Fonctions semblables :

Les productions de démonstration étudiées semblent remplir les mêmes fonctions : **fonction de preuve** de la conclusion demandée et **fonction de communication** de cette preuve, dans sa dimension d'évaluation. Les copies devaient transmettre au correcteur la preuve qu'elles proposaient. Les autres fonctions nous semblent moins présentes : la fonction de plausibilité n'est pas, dans le contrat habituel d'une situation d'évaluation, prise en compte. D'ailleurs nous n'avons observé aucun argument de plausibilité dans les « bonnes » copies étudiées. La fonction d'explication n'est pas non plus privilégiée dans cette situation d'évaluation : il s'agit moins de produire une démonstration rendant intelligible les raisons de la véracité de la conclusion est vraie, que de montrer au correcteur qu'on sait appliquer correctement des théorèmes ou des règles de calcul pour prouver la conclusion. Nous n'avons pas observé de différence dans les fonctions de cette tâche de démonstration dans les copies françaises et dans les copies allemandes étudiées, alors que nous avions vues dans des manuels scolaires des fonctions différentes suivant le pays, pour une même tâche de démonstration.

Eléments semblables de technologie disponible :

En géométrie, nous avons observé que toutes les copies utilisaient le théorème de Thalès sauf une qui utilisait les homothéties. Les autres éléments de technologies viennent en appoint et nous n'avons pas observé de différences significatives dans leur emploi.

En algèbre, nous avons observé que ce sont les mêmes règles de calculs qui sont utilisées dans le traitement des fractions et des égalités.
Dans l'ensemble nous avons observé une grande similitude dans les éléments de technologie employés.

Eléments semblables dans la structure des démonstrations.
Nous n'avons pas observé de différences significatives quant à la structure des démonstrations. On observe en fait dans chaque population, une grande hétérogénéité des structures de démonstration, tant pour le nombre d'arguments utilisés, que pour le nombre de niveaux ou celui du nombre de feuilles, l' imbrication des parties algèbre et géométrie. Les démonstrations sont exposées des hypothèses vers la conclusion.

Différences de contrats et de techniques
En géométrie, nous avons mis en évidence des différences de contrat dans l'exposition des arguments. **Le discours est plus expansif en F** (nombre d'unités démonstratives plus important, nombre d'unités fonctionnelles plus important, moindre ajout d'une figure au texte de la démonstration). **Le discours est également plus précis en F** : marquage du statut des unités démonstratives par une citation plus fréquente du contexte de la démonstration, de l'entrée de l'argument, vérification plus fréquente de la condition de parallélisme dans l'application du théorème de Thalès.

En algèbre, par contre, **la règle d'argument est plus fréquemment citée en A qu'en F,** alors qu'il n'y a pas de différences significatives pour la citation du contexte, de l'entrée ou de la sortie des arguments. **L'expansion du discours paraît semblable en F et en A** (nombre d'unités démonstratives, nombre d'unités démonstratives symboliques, nombre d'unités fonctionnelles symboliques).

On observe enfin des écarts qui, même s'ils ne sont pas statistiquement significatifs, convergent vers la même direction et mériterait peut-être des investigations plus poussées.
On observe que l'ajout de données se fait davantage dans un texte en F qu'en A, alors qu'il se fait davantage sur la figure en A qu'en F.

On observe une différence entre géométrie et algèbre entre F et A

Alors qu'en F, le nombre d'arguments est légèrement plus important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 1,17), le nombre d'unités démonstratives est nettement plus important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 2,55).

En A on observe le contraire : le nombre d'arguments est légèrement moins important en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 0,91), le nombre d'unités démonstratives est semblable en géométrie qu'en algèbre (rapport des moyennes : 1,09).

La géométrie donne lieu à un discours plus expansif en F qu'en A.

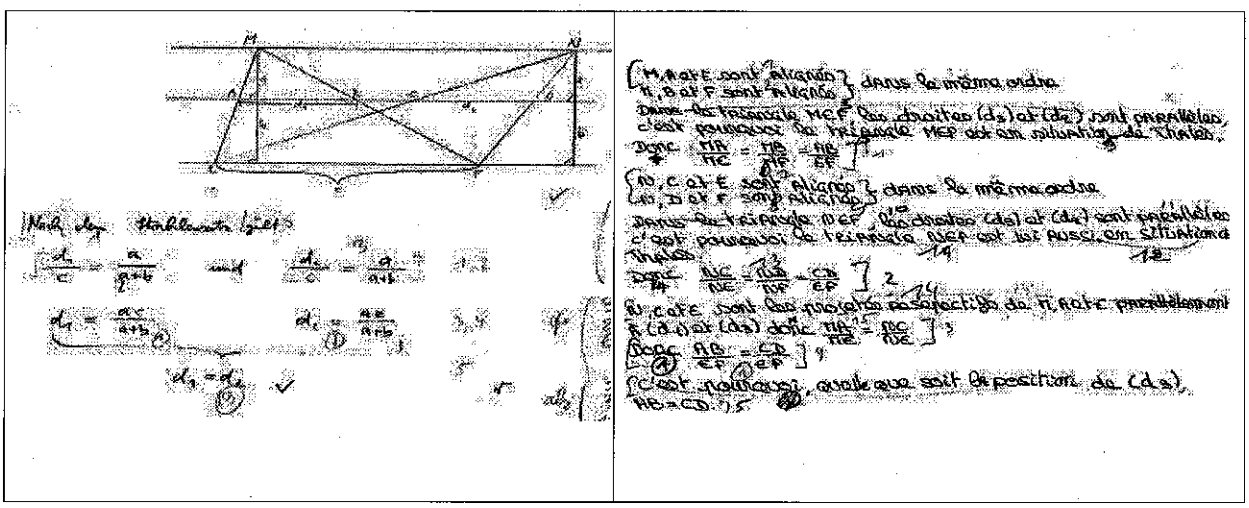
On observe bien une différence de contrat :

en F la langue naturelle est le registre privilégié d'expression pour les démonstrations de géométrie qui sont expansives et précises ; par contre en algèbre les règles de calcul ou opératoires sont plutôt utilisées de manière concise et sans citation explicite de la règle.

en A la langue symbolique, le registre graphique, la non explicitation des contextes ou des entrées d'arguments participe à un discours moins expansif, plus concis et moins précis, aussi bien en algèbre qu'en géométrie. Les règles d'arguments sont très souvent citées en géométrie (19 copies sur 23) et un peu moins citées en algèbre (13 copies sur 23).

Comme chaque copie représente une classe différente, et donc un professeur différent, on peut penser que ces différences de contrat ne sont pas attachées au contrat mis en place chez un professeur particulier mais ont bien une dimension culturelle plus large.

On observe également, dans les techniques utilisées, des différences entre F et A qui peuvent être illustrées à l'aide des copies prototypiques reproduites ci-après.



En géométrie : la présentation rituelle d'un argument dans F, illustrée par la copie prototypique n°6, pourrait être : « Dans le contexte …, comme … est vérifié, d'après le

théorème …, on a la conclusion … ». Dans A la présentation rituelle, illustrée par la copie protypique n°2 serait : « D'après le théorème …, on a la conclusion … ».

En algèbre, la présentation rituelle d'un argument dans F, illustrée par la copie prototypique n°10, pourrait être une suite d'égalités exprimant un calcul. Dans A la présentation rituelle, illustrée par la copie protypique n°13, serait une présentation ligne par ligne d'un calcul, avec une codification de la règle de passage d'une ligne à la suivante (comme indiquée dans les copies n°12 et 13).

Alors qu'en géométrie il est important dans F de marquer les différents statuts des énoncés (contexte, entrée, règle, sortie) et en algèbre d'effectuer les calculs, en A c'est le marquage de la règle qui est essentiel, aussi bien en géométrie qu'en algèbre. Illustrons notre propos pour la technique de marquage de la règle d'inférence en algèbre.

Dans le cadre du groupe Europe de l'IREM de Strasbourg nous avions rendu compte, dans [Cabassut 1998, p.17-26], d'une visite dans une classe 9 allemande où nous avions assisté à la résolution d'une équation. Voici une traduction de l'affichage au tableau de cette résolution.

Extrait de la résolution au tableau :

$$2\times\frac{x-2}{5}+\frac{5}{x-2}=3 \quad \Big) \text{ DP} = 5(x-2) \quad \text{(DP pour Dénominateur Principal)}$$

$$\text{D} = \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad \text{(D pour Ensemble de définition de l'équation)}$$

$$2\times\frac{(x-2)(x-2)}{5(x-2)}+\frac{25}{5(x-2)}=3 \quad \Big) \times \text{DP}$$

$$2\times(x^2-4x+4)+25=15x-30 \quad \Big)-15x \quad \Big)+30$$

$$2x^2-23x+63=0$$

$$x_{1/2}=\frac{23\pm\sqrt{529-504}}{4}=\frac{23\pm5}{4}$$

On retrouve la même technique dans un livre[39] de Klasse 8 :

39 Livre édition Klett, collection Lambacher Schweitzer (LS), (p.47), édition 1995

$$
\begin{array}{rl}
7(2x-5)=3x-2 & \mid \textit{Klammer auflösen} \\
14x-35=3x-2 & \mid -3x \\
11x-35=-2 & \mid +35 \\
11x=33 & \mid :33 \\
x=3 & \\
\end{array}
$$

Lösungszahl: 3

$$
\begin{array}{rl}
2(5-3x)+2x<8 & \mid \textit{Klammer auflösen} \\
10-6x+2x<8 & \mid \textit{zusammenfassen} \\
10-4x<8 & \mid -10 \\
-4x<-2 & \mid :(-4) \\
x>\frac{1}{2} & \\
\end{array}
$$

Lösungsmenge: $L=\{x \mid x>\frac{1}{2}\}$

On retrouve ici des différences de technique que nous avions observés dans les manuels scolaires à propos de l'étude des variations d'une fonction : tableau de signes de la dérivée dans le manuel français, étude de cas dans le manuel allemand.

Nous avons donc bien mis en évidence des différences de contrat et de technique pour ce qui concerne des démonstrations auxquelles les mêmes fonctions sont assignées, utilisant les mêmes éléments technologiques et situées dans un même cadre institutionnel.

Ces différences concernent le domaine étudié (géométrie, algèbre), le registre utilisé (langue naturelle, langage symbolique, registre graphique), les techniques développées (application d'un théorème de géométrie, application de règles de calcul ou opératoires).

Ces différences ont été expliquées par des différences de contrats relatifs à la rédaction d'une démonstration.

Ces différences ne semblent pas affecter la structure des démonstrations, ni la nature des arguments qui les composent.

Nous rappelons cependant que nous nous sommes intéressés uniquement aux démonstration correctes, ou plus exactement aux représentations, chez les enseignants, de ce qu'est une démonstration correcte.

Les observations faites ne concernent pas les démonstrations incorrectes ou les erreurs d'élèves.

5 Conclusions

Les validations de l'enseignement des mathématiques sont la double transposition des démonstrations de l'institution mathématique (qui produit le savoir) et des validations, argumentations ou preuves, d'autres institutions (comme la « vie quotidienne »). L'étude diachronique des programmes du collège-lycée en France, et du Gymnasium en Bade-Würtemberg, confirmée par l'étude de manuels, montre que la démonstration est devenue explicitement un objet à enseigner, contrairement aux cas des Hauptschule et Realschule. Ces programmes recommandent l'usage de différents types de validation (argumentation, preuve) et d'arguments (pragmatiques, sémantiques, syntaxiques) suivant leurs fonctions et les moments ; on retrouve dans des leçons sur la démonstration l'influence des fonctions de la validation dans les différents genres de tâche (découvrir, contrôler, changer de registres...). Malgré les difficultés linguistiques, institutionnelles et culturelles liées à la comparaison, l'examen des validations de théorèmes de cours dans les manuels et de démonstrations produites par des élèves montre des similitudes quant à la cohabitation des différents types d'arguments et différentes fonctions de la validation. On observe des différences sur les types de technologie ou de technique mis en œuvre et sur le poids donné aux types d'arguments et aux registres utilisés, avec une explication liée aux conditions institutionnelles (moment considéré, contrat, fonction privilégiée, organisation de l'enseignement ...)

Différentes **difficultés didactiques** ont été repérées du fait de cette double transposition :

- La première difficulté se situe au **niveau théorique**. Cette double transposition entraîne en général une cohabitation de deux théories différentes, une théorie sociale et une théorie mathématique. Une des grandes difficultés est que ces théories reposent en général sur des conceptions de la vérité différentes, voire incompatibles. La conception pragmatique de la vérité s'accommode mal d'une conception logique. Les objets, les technologies seront également différents. Ici un **contrat implicite** va essayer de négocier la cohabitation de ces deux théories au sein d'une théorie didactique qui essaiera de synthétiser ces deux théories. Dans le domaine de la géométrie, les travaux de Parzysz, Houdement et Kuzniak proposent différents niveaux théoriques intégrant cette double transposition. Nous avons également vu comment les programmes officiels suggèrent cette cohabitation : progressivité,

passage du local au global, distinction entre validations de théorèmes de cours et démonstrations lors de la résolutions d'exercices ou de problèmes.

- Une seconde difficulté se situe au **niveau de la distinction entre technologie et technique**. Nous avons montré que certaines techniques pragmatiques, visuelles voire inductives ne sont qu'une manière moins formelle d'appliquer des éléments de technologie mathématique. Comment savoir si le recours à la figure repose sur une justification visuelle non mathématique, sur une justification mathématique mobilisable mais non formalisée, sur une justification mathématique non mobilisable ? C'est à nouveau le recours au **contrat implicite** qui est sensé régler cette cohabitation. Nous avons vu des recours à la figure aussi bien pour le théorème de Pythagore en $4^{ème}$/Klasse 9, qu'à propos de la démonstration graphique du théorème des gendarmes en première S ou de la démonstration du théorème sur les variations d'une fonction dérivable d'après le signe de sa dérivée en Klasse 11.
- La troisième difficulté concerne **les contrats** implicites. D'une part ces contrats implicites ne sont pas explicités clairement aux enseignants, par exemple les programmes officiels ne précisent pas clairement que le recours à la figure est toléré dans la géométrie de l'ordre ou quel niveau de rigueur est exigible dans une rédaction. Il s'en suit une grande hétérogénéité des conceptions chez les enseignants, relevée par différents auteurs [Houdebine et al 1998 p.69], [Antibi 1996, p.356]. En conséquence la perception du contrat par l'élève sera elle aussi d'une grande variabilité. Faut-il expliciter ces contrats ? Est-ce possible ? Est-ce souhaitable ?

Nous n'avons pas étudié les situations d'enseignement dans les classes.

Il serait intéressant d'observer comment la démonstration est traitée comme objet d'enseignement dans les classes. Comment les validations de théorèmes de cours sont effectuées ? Les travaux de Knipping ont étudié la validation du théorème de Pythagore dans différentes classes. Il serait intéressant d'examiner le cas d'autres théorèmes.

Y a-t-il une distance entre l'enseignement de la démonstration qui est pratiqué et celui qui est prescrit par les programmes et des manuels ?

Est-il intéressant de mettre en place une ingénierie didactique visant à réduire les distances entre le curriculum officiel et le curriculum réel? Si oui, comment ?

Avec le développement dans la formation initiale d'enseignants français de mathématiques avec des stages de pratiques professionnelles en Allemagne, le développement des échanges entre classes entre la France et l'Allemagne, et plus généralement le développement de la mobilité des élèves et des enseignants entre la France et l'Allemagne, décrit dans [Cabassut 1996 a,b], est-il souhaitable de proposer des ingénieries de formation des enseignant, d'échanges des classes, ... qui permettent de mieux appréhender ces évolutions ?

Ces questions mériteraient de poursuivre les recherches pour y répondre. Le fonctionnement actuel de la recherche en France ne me permet pas de poursuivre ce travail ; je livre donc ces réflexions comme un testament didactique à qui voudra s'en emparer.

Bibliographie :

BALACHEFF Nicolas (1999) Apprendre la preuve, *Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Presse Universitaire de France, Paris, pp.197-236

CABASSUT Richard (1998) Mathématiques dans un lycée allemand, journal « *L'ouvert* », numéro 91, juin 1998, IREM de Strasbourg, pp.17-26.

CABASSUT Richard (2005) *Démonstration , raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne,* Thèse, IREM Université de Paris 7.

téléchargeable à: http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/97/16/index_fr.html

CABASSUT Richard (2005) Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks, C in *Proceedings of 4th Cerme (congress of European society for research in mathematics education)* , Sant Feliu de Guixols; parution en ligne sur http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/4/wg4listofpapers.htm

CABASSUT Richard (2006) « Beweisen in Schulbüchern in Frankreich und Baden-Würtemberg », *Communication en allemand au colloque de Gesellschaft für Didaktik der MathematikOsnabrück, mars 2006 téléchargeable le 03/08/06 sur* http://www.ikm.uos.de/gdm2006/gdm2006_osnabrueck_beitraege_kf06.pdf

CABASSUT Richard (2007) Examples of comparative methodologies in the teaching of mathematics in France and in Germany, in *Proceedings of 5th Cerme (congress of European society for research in mathematics education)*, Larnaca, Cyprus, parution en ligne sur http://www.cyprusisland.com/cerme/group15.htm

CHEVALLARD Yves (1985) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Editions la pensée sauvage , vol.19 n°2, pp.221-266.

CHEVALLARD Yves (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12 n°1, pp.73-112.

CLARKE David (2004) Issues of Voice and Variations : The Problematics of International Comparative Research in Mathematics Education, paper submitted to discussion group 11: International comparaisons in mathematics education (ICME 10), Copenhagen, Denmark, July 4-11, 2004

DE VILLIERS Michael (1990) The role and the function of proof in mathematics, *Pythagoras* n°24, pp.17-24.

DUVAL Raymond (1995) *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.

HANNA Gila (1995) The role of proof in mathematics education, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, pp. 14-21

HOLLAND Gerhard (2001) *Geometrie in der Sekundarstufe,* Spektrum Akademisher Verlag, Heidelberg.

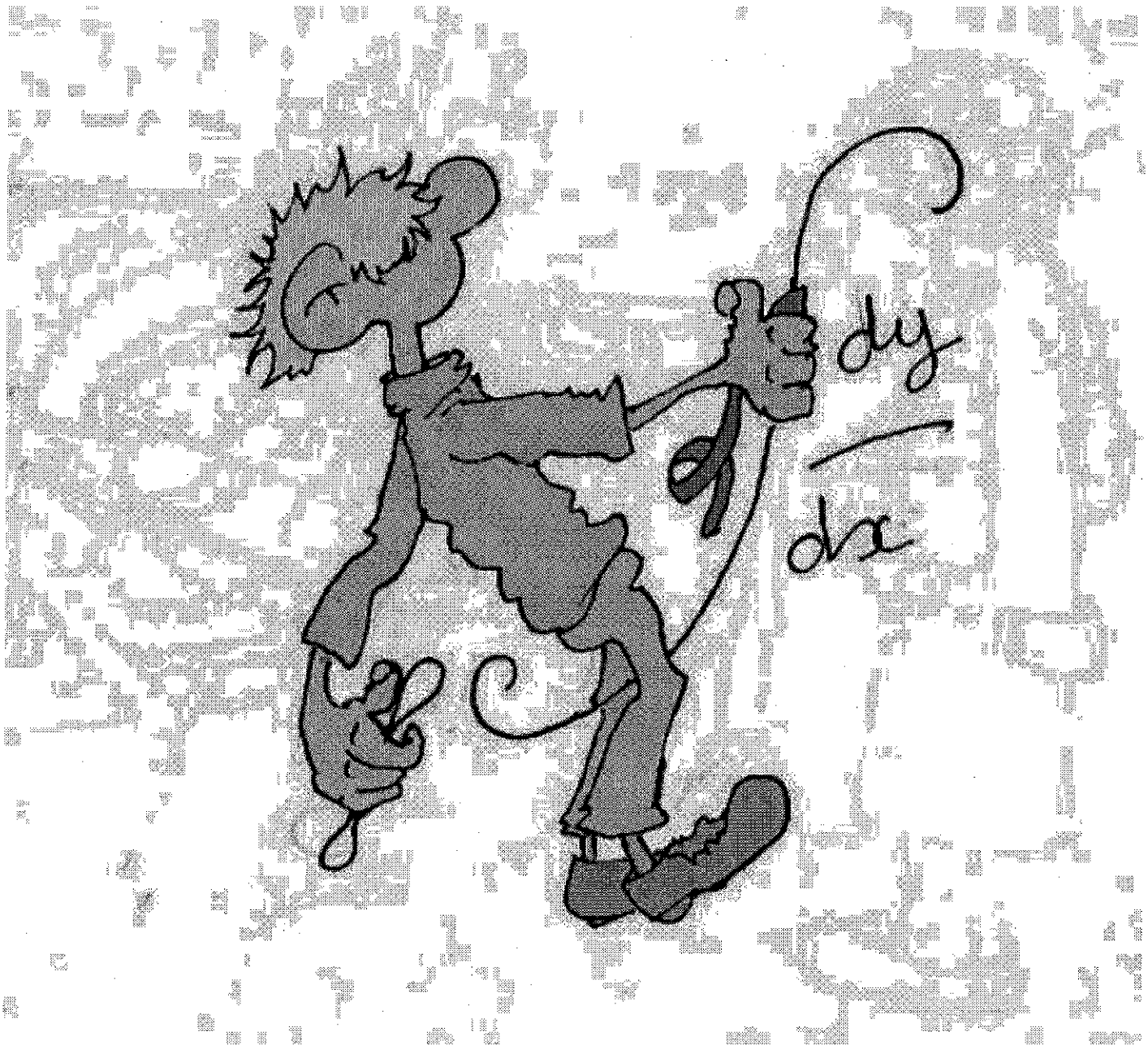
HOUDEBINE Jean et al.(1998) *La démonstration: écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette éducation.

KNIPPING Christine (2003a) *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*, Verlag Franzbecker

RAUSCHER Jean-Claude (1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes* Thèse de doctorat, Université des Sciences Humaines de Strasbourg.

TIETZE Uwe-Peter , KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F. (2000) *Mathematiksunterrichts in der Sekundarstufe II, Band I,* Vieweg.

TOULMIN Stephen .E. (1993) *Les usages de l'argumentation,*(traducteur : Philippe de Brabanter), Presses universitaires de France, Paris


dy
dx

Le diagnostic de l'aide à l'étude, en mathématiques : analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde

Abdulkadir ERDOGAN
Université Anadolu-Turquie

Introduction

Dans ce séminaire je vais vous présenter mon travail de thèse que j'ai soutenu l'année dernière à l'Université Paris 7 (Erdogan, 2006). Sous l'angle de diagnostic, cette thèse avait l'ambition de contribuer à l'avancement de la problématique d'étude et d'aide à l'étude en mathématiques. Elle portait sur la classe de Seconde et sur la partie algébrique et fonctionnelle du programme de cette classe.

L'objet de ma recherche était donc la notion d'étude, plus précisément la notion d'étude autonome, plus précisément encore la notion d'étude autonome de l'élève, c'est-à-dire cette part du travail scolaire où l'élève doit agir seul (maîtrise du cours, exercices d'entraînement, révisions, devoirs à la maison, préparation de contrôle, etc.), de sa propre initiative, à partir d'apports magistraux et du travail collectif de la classe.

L'étude autonome se trouve à l'origine des phénomènes didactiques qui prennent aujourd'hui une importance particulière : malgré l'insistance des textes officiels sur son importance pour la réalisation des apprentissages visés par l'école et malgré la mise en place de nouveaux dispositifs d'enseignement (Travaux personnels encadrés, enseignement modulaire, aide individualisée…), la force est de constater que l'étude autonome des élèves leur pose de vrais problèmes. Cela engendre pour de nombreux élèves un besoin d'aide et d'accompagnement, besoin dont témoignent aujourd'hui les questions massivement posées par les élèves sur Internet et l'expansion extraordinaire du système de cours particulier. De tels systèmes proposent alors une aide à la réalisation mais semblent totalement ignorer les enjeux de l'étude autonome pour les apprentissages et les conditions nécessaires à une aide efficace.

Identifier les enjeux de l'étude autonome pour les apprentissages, en l'occurrence pour les apprentissages mathématiques, et déterminer les conditions appropriées de sa réalisation

c'est là que réside en effet toute la question. Comme c'est une question jusque là très peu étudiée en didactique, elle faisait pour moi appel à une approche "diagnostic".

J'ai donc formulé ma problématique en termes de construction d'un diagnostic, en considérant cela comme étape nécessaire et comme préalable à toute proposition de remédiation et d'amélioration des conditions de l'étude. L'objectif était alors de dégager des éléments constitutifs d'un diagnostic, ce qui demandait la mise en œuvre d'un système d'interprétation et d'un outil d'analyse.

Il existe sans doute une multitude d'approches possibles pour un diagnostic, chacune pouvant fournir des interprétations dans le cadre choisi. En adoptant un point de vue strictement didactique et en m'appuyant sur un certain nombre de situations d'aide qui s'avèrent problématiques, j'ai considéré que l'étude autonome est essentiellement déterminée par et dans le travail à réaliser, c'est-à-dire que ce sont les enjeux et les objets des situations d'étude qu'il convient d'étudier pour un diagnostic. Ainsi, quels sont les enjeux et les objets des situations d'étude proposées aux élèves ? Comment nous pouvons les décrire ? Comment ces enjeux et ces objets se présentent aux élèves et interviennent dans leurs activités ?... telles sont les premières questions auxquelles j'ai été amené à chercher une réponse. Pour mieux fonder l'étude théorique que je vais vous présenter, je commencerai ici par une petite analyse de deux situations d'étude apparemment simples qui font pourtant problème.

Etude préliminaire

Première situation

La première situation est issue des observations dans le cadre de ma thèse, c'est-à-dire qu'elle est relative aux travaux algébriques et fonctionnels de la classe de Seconde. L'énoncé du problème est le suivant :

"*Soit f la fonction définie sur R par* $f(x) = 4-(2x-8)^2$. *Etudier le sens de variation de f sur* $[4;+\infty[$ "

C'est une réelle situation d'étude autonome pour les élèves. Je préciserai plus tard les circonstances de son observation. Ici analysons la question d'un point de vue mathématique seulement :

Il s'agit donc d'étudier le sens de variation d'une fonction du second degré, un objet explicite du programme de la classe de Seconde. L'expression est donnée sous une forme

appelée, dans le cours et dans les manuels, "la forme canonique". On aurait pu très bien avoir cette expression sous d'autres formes, soient $-4(x^2-8x+15)$ et $-4(x-3)(x-5)$ deux autres formes de cette expression. On peut tout de suite voir qu'on n'a pas dans ces deux derniers cas les mêmes outils "sémiotiques" pour attaquer le problème, notamment au niveau de la classe de Seconde où le problème est posé. Par contre l'expression donnée dans l'énoncé nous permet facilement de déterminer les variations de cette fonction, soit le raisonnement suivant : on peut transformer l'expression de $4-(2x-8)^2$ en $4-Y^2$ sachant qu'ici on opère le changement de variable $Y=2x-8$. L'expression $4-Y^2$ indique une parabole. Le coefficient de Y est négatif, alors la parabole est vers le bas. Donc la fonction a un maximum et ce maximum est 4. On peut facilement voir avec calcul que ce maximum est atteint en 4. Alors la fonction est croissante sur $]-\infty;4]$, ensuite décroissante sur $[4;+\infty[$.

Quels sont donc les objets qui interviennent dans cette procédure et en général, quels sont les objets mathématiques qui interviennent, qui ont une pertinence dans une question qui demande d'étudier les variations d'une fonction du second degré? D'abord le concept d'expression algébrique du second degré, ensuite le concept de fonction et le concept de parabole, enfin le concept de changement de variable qui est important. Bien entendu tous ces concepts ne sont pas de même importance et n'interviennent pas de la même façon dans la résolution. Ici, le concept de fonction permet le calcul algébrique et le calcul numérique, le calcul algébrique et le concept de parabole permettent de s'assurer de l'existence de deux racines réelles et le concept de changement de variable permet de mettre en œuvre une technique.

Quelle autre technique pouvons-nous mettre en œuvre pour cette question? On peut se servir de la définition de monotonie et étudier le signe de la différence des images par f de deux réels pris dans l'intervalle donné. Cette fois-ci, on aura plus à faire à des expressions algébriques, à leurs transformations et au concept de comparaison ou plus généralement au concept d'ordre. On peut se servir encore d'autres fonctions dont les variations sont connues pour en déduire les variations de la fonction composée (la fonction carré et la fonction affine par exemple). Cette fois-ci on sera plus dans le travail fonctionnel et l'un des concepts qui aura une importance particulière sera le concept, encore une fois, de changement de variable. Nous verrons ainsi qu'un réseau d'objets et de concepts s'organise rapidement autour d'une question qui demande d'étudier le sens de variation d'une fonction du second degré :

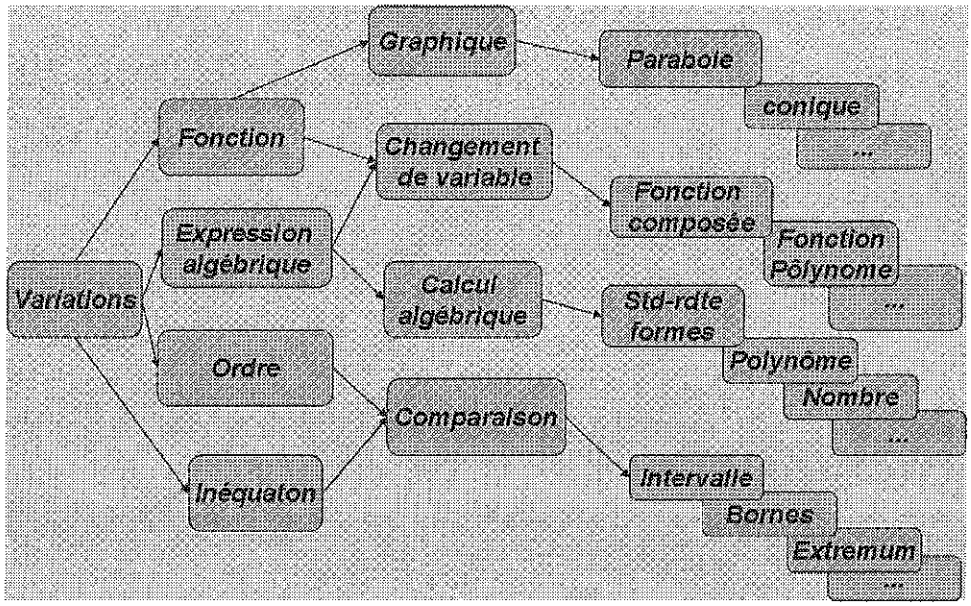


Schéma 1 : Les objets mathématiques de la tâche "étudier les variation d'une fonction du 2 degré"

Par conséquent, nous pouvons dire que l'étude d'un objet mathématique met en place un certain nombre d'objets et des relations parmi ces objets, chacun jouant un rôle particulier dans l'activité. Je qualifierai ceci en disant que c'est la dimension épistémique de l'activité mathématique, c'est-à-dire que c'est un tel agencement des objets mathématiques qui donne sens à la situation et lui assure une dimension autonome.

Mais le contrat didactique peut altérer la structure épistémique de l'activité mathématique, voire complètement la changer. La technique ci-dessous illustre bien ce phénomène :

> Soient a et b deux réels tels que $4 \le a < b$ alors $8 \le 2a < 2b \Rightarrow 0 \le 2a-8 < 2b-8$. Donc $2a-8$ et $2b-8$ sont deux nombres positifs rangés dans l'ordre croissant, et comme la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$, on peut écrire $(2a-8)^2 < (2b-8)^2$. Ensuite
>
> $-(2a-8)^2 > -(2b-8)^2$
>
> $4-(2a-8)^2 > 4-(2b-8)^2$
>
> $donc\ f(a) > f(b)$
>
> Conclusion : pour tout a et b de $[4;+\infty[$ tels que $4 \le a < b$, $f(a) > f(b)$. Donc la fonction $f(x) = 4-(2x-8)^2$ est décroissante sur $[4;+\infty[$.

Il s'agit de la technique de résolution proposée par les manuels et mise en œuvre par les professeurs en classe. C'est une technique purement algébrique. Mais dans cette technique, on demande de se référer à moment donné aux variations de la fonction carré, pour la simple raison que la fonction carré est un objet explicite du cours comme fonction de référence et que le professeur est obligé de créer les conditions de son usage. À cet effet, il

propose une combinaison artificielle et non réussie des techniques algébrique et fonctionnelle. Je montrerai plus tard combien ce jeu du contrat didactique a eu des conséquences fâcheuses sur le travail des élèves. Prenons maintenant une seconde situation où nous avons encore à faire à la fonction carré et à ses variations.

Deuxième situation

Il s'agit cette fois-ci d'une question venue sur un de ces forums mathématiques sur Internet. Elle est également relative aux travaux algébriques et fonctionnels de la de la classe de Seconde. Analysons rapidement l'énoncé de la question ainsi que la réponse fournie sur le forum[40]:

II- Encadrement de $\sqrt{1+x}$

Soit x un réel strictement positif. On pose: $A=\sqrt{1+x}$, $B=1+\frac{x}{2}$, $C=\frac{x^2}{8}+\sqrt{1+x}$

1- Montrer que A, B et C sont strictement plus grand que 1

Réponse : *A : Utilise la croissance de la fonction carrée sur R+*

B : Pas dur

C : Tu as $C \geq A > 1$

2- Comparer A^2 et B^2. En déduire que $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$

Réponse : *Développe et mets tout du même côté (pour comparer A^2 et B^2)*

Croissance de la fonction carré (pour en déduire que $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$)

3- Prouver que $C^2 - B^2 = \frac{x^2}{4}(\frac{x^2}{16}+\sqrt{1+x}-1)$

Réponse : *Développe et mets tout du même côté*

Comparer B^2 et C^2. En déduire que $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$

Réponse : *Croissance de la fonction carré*

Note: Nous venons donc d'établir l'encadrement suivant de $\sqrt{1+x}$:

Pour $x > 0$, $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$

4- Donner sans calculatrice un encadrement de $\sqrt{1,0002}$ et une valeur approchée de $\sqrt{1,0000001}$ à 10^{-14} près.

Réponse : *Même méthode que précédemment*

Voilà.

[40] Pour une analyse plus détaillée de cette question, voir (Erdogan & Mercier, 2007).

A chaque fois, on demande de comparer deux de trois nombres donnés pour en déduire un encadrement et à la fin cet encadrement va devenir une technique pour comparer et donner les valeurs approchées d'un certain type de nombres. Même en regardant la réponse donnée sur le forum *(utilise la croissance de la fonction carré...)*, on s'aperçoit tout de suite qu'on a à faire à la fonction carré, mais pas seulement :

Ce sont d'abord des expressions algébriques qui sont convoquées et amenées à être comparées. La comparaison en question s'appuie sur le concept de relation d'ordre comme un objet du second plan qui s'appuie lui-même sur le concept de relation binaire. Mais ce passage fait intervenir le concept de fonction (approximation, croissance, développement limité) et les problématiques d'analyse (infinitésimal, continuité, limite). C'est ainsi qu'une technique s'organise autour des fonctions particulières faisant ainsi référence : fonction 1/x, fonction x^2 (fonctions de référence explicite du programme de la classe se Seconde) et fonctions polynômes (référence implicite pour les procédures d'approximation : 1/1+x comparé à 1+x). Soit le schéma suivant :

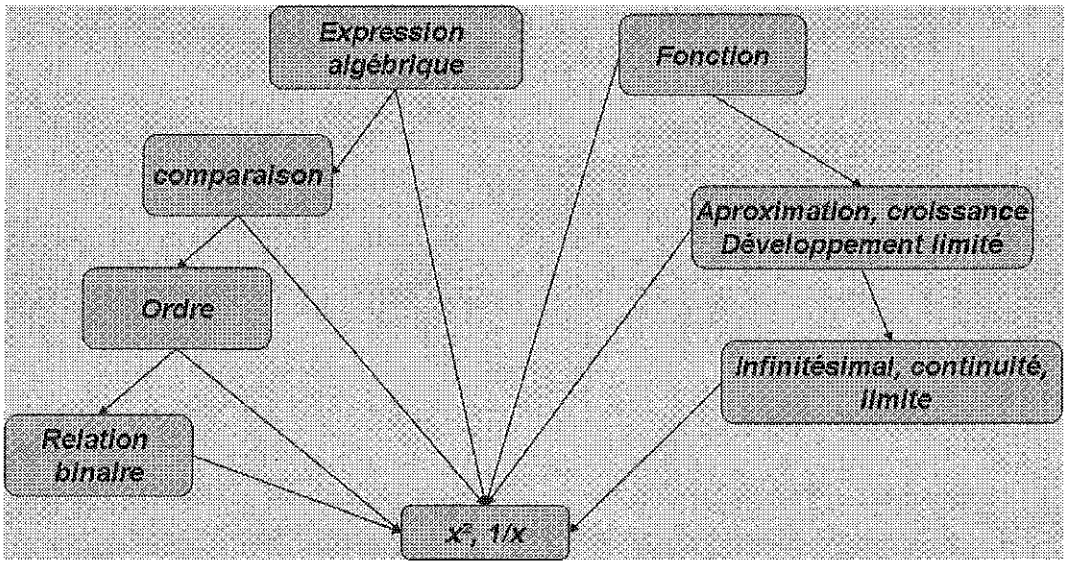


Schéma 2 : les objets mathématiques de la situation convoquée par la question d'encadrement ci-dessus.

Là encore, le contrat didactique alterne le jeu parce qu'il ne désigne pas l'usage des variations de la fonction carré comme une nécessité interne à la technique à mettre en œuvre mais indique simplement un usage possible de cet objet.

Sans développer davantage ici ces arguments, je vais reprendre ma remarque précédente et dire que l'étude autonome a deux dimensions : une dimension épistémique et une dimension contractuelle. Je vais faire l'hypothèse que si l'étude autonome est

essentiellement gérée par le contrat didactique, ne serait-ce que pour parler d'autonomie, la dimension épistémique doit être formulée comme une dimension régulatrice. Dans la suite, je tenterai d'expliquer la formulation adoptée dans le cadre de cette thèse.

L'Approche théorique

En références aux situations précédentes, nous pouvons dire que l'activité mathématique fait intervenir, ne serait-ce que par le besoin d'identification des tâches et par la nécessité de création de techniques, un vaste champ d'objets mathématiques et de relations parmi ces objets, un champ que nous avons convenu d'appeler *un site mathématique*, en référence au site archéologique où on effectue des fouilles :

> Le champ des objets mathématiques dont l'étude se révèle pertinente ou est supposée telle pour la connaissance d'un objet scientifique donné, *O*, peut être considéré comme un réseau d'objets et de relations, *le site mathématique de O*. Certains de ces objets et relations sont visibles, d'autres sont cachés. Pour chaque sujet en position d'étudiant, le site mathématique se présente sous forme d'un champ de signification, d'investigation et d'expérience suffisamment stable, à son échelle, pour conférer à son étude un référentiel fiable [Duchet & Erdogan, 2005].

Cela nous permet de considérer que l'étude autonome est essentiellement déterminée non par la production de réponses à une question posée - ou à une tâche problématique - mais par la construction d'un rapport aux objets du site relatif à cette question.

Suivant ce point de vue, j'ai fait l'hypothèse que l'écologie des objets de savoir en situation d'étude est marquée par un fort déséquilibre entre les dimensions contractuelle et épistémique. L'étude se régule pour l'élève par des interprétations du contrat, la conformité au contrat devenant le mode de contrôle dominant.

Pour étudier cette hypothèse de diagnostic, j'ai conçu une analyse en termes de site. J'ai considéré qu'il faut d'abord mettre en évidence la partie émergeante du site mathématique supportant l'étude des objets du programme ou d'une partie du programme d'une classe donnée, ensuite analyser l'écologie scolaire de ce site. J'ai supposé que le degré d'adéquation entre ce que révèlent ces deux niveaux d'analyse, éclairé avec les résultats de l'examen complémentaire de la dimension institutionnelle de l'étude autonome, permettrait de comprendre les difficultés rencontrées par les élèves dans les situations d'étude autonome réelles, les contraintes et les conditions de l'étude qui déterminent les choix du professeur et les actions des élèves et ainsi d'établir un diagnostic.

La démarche expérimentale

L'étude autonome étant de cette manière située sur un plan théorique précis et une hypothèse testable étant proposée, ma démarche expérimentale a d'abord fait intervenir deux choix essentiels : le premier est celui d'une institution d'observation, le second est celui d'un corpus d'étude.

J'ai choisi de mener ma recherche au niveau de la classe de Seconde, parce qu'elle apparaît avec les enjeux du contenu du programme et les modalités de l'enseignement dispensé à ce niveau comme une institution spécifique de l'étude. J'ai choisi de centrer mes analyses sur la partie algébrique et fonctionnelle du programme parce que cette partie constitue l'objet d'un véritable enjeu pour l'enseignement et appelle à un site important.

Plus précisément, le programme de la classe de Seconde est composé de trois chapitres : *"statistique", "calcul et fonctions", "géométrie"*. Les objectifs du chapitre "calcul et fonction" qui nous intéresse sont présentés comme :

- Approfondir la connaissance des différents types de nombres
- Expliciter sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction
- Etudier quelques fonctions de références, préparant à l'analyse
- Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration
- Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques

Ces objectifs sont aussitôt suivis d'une explication :

> La plupart de ces activités concernent les trois années de lycée. Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions [...]

C'est ainsi qu'un site algébrique-fonctionnel d'une grande importance se trouve impliqué derrière l'étude demandée à ce niveau relativement à l'algèbre et aux fonctions.

Même si les sujets de l'étude autonome sont les élèves, ma démarche devait également prendre en compte le travail du professeur comme directeur et organisateur de l'étude et le savoir dans ses dimensions à la fois épistémique et institutionnelle. En fonction de ces trois axes, j'ai retenu trois catégories de variables : les variable institutionnelles qui sont relatives à des moments et à des lieux d'étude institutionnellement reconnus (apprentissage du cours,

révisions, résolution d'exercices... en classe, à la maison ou dans d'autres dispositifs)[41]; les variables épistémiques qui sont relatives au domaine mathématique considéré (absence et ou pertinence des objets et des relations); les variable éducatives et socioculturelles qui sont relatives aux facteurs discriminants de l'étude (établissements, parcours scolaires, expériences des professeurs, etc.), et j'ai fait un recueil de données allant des observations aux productions écrites des élèves.

Les étapes de la construction d'un diagnostic

Il me fallait désormais concevoir un plan d'exploitation de ces données comme diverses étapes de la construction d'un diagnostic. Conformément au modèle d'analyse proposé, j'ai d'abord choisi d'explorer les *topos* mathématico-épistémiques des élèves et du professeur relativement à la partie algébrique et fonctionnelle que j'appellerai désormais le site algébrique-fonctionnel. J'ai ensuite choisi d'examiner leurs *topos* institutionnels à travers une construction des classes comme institution, et tout ceci avant d'aller voir comment ses *topos* trouvent leurs places respectives en classe, comment le *topos* des uns et des autres se définissent, évoluent et se délimitent.

En consacrant d'abord mes analyses au site algébrique-fonctionnel, je l'ai conçu comme un repère avec les questions suivantes:

- En quoi consiste le site algébrique-fonctionnel ?
- Comment ce site devient un domaine d'étude tout au long du cycle secondaire (dès la classe de Sixième jusqu'en classe de Terminale en passant par la classe de Seconde) ?
- Comment les transitions arithmétique - algèbre - analyse ont-elles lieu ?
- Quels sont les phénomènes de rupture ou de continuité qui s'y observent ?
- Comment ces phénomènes peuvent intervenir dans les actions du professeur et dans l'étude autonome des élèves ?

J'ai ensuite centré mes analyses sur la dimension institutionnelle de l'étude autonome, de manière à pouvoir identifier le rapport à l'étude de ses sujets (élèves-professeur), les moyens que les élèves semblent avoir à leur disposition pour étudier et les moyens dont disposent les professeurs pour organiser l'étude et pour aider à l'étude.

[41] Notons que cette catégorie de variable est celle qui fait souvent l'objet des travaux sociologiques lorsqu'ils se proposent d'étudier ce qu'ils appellent « *le travail scolaire* » des élèves. (Barrère, 1997 ; Félix, 2002 ; Perrenoud, 1994).

L'angle d'attaque principalement choisi ici est celui de la notion de *contrat d'étude*, c'est-à-dire la composante spécifique du contrat didactique relatif à l'étude. Quelles sont les caractéristiques de l'institution - classe de Seconde vis-à-vis de l'étude autonome ? Quel est le contrat d'étude que les professeurs essayent d'installer dans leurs classes ? Comment ce contrat est compris par les élèves ?... mais aussi, comment le site, en l'occurrence le site algébrique-fonctionnel, est perçu par l'institution, par les élèves et par les professeurs ?... telles sont les questions qui ont guidé cette partie.

Les résultats des analyses précédentes ont alors permis de pénétrer au cœur de l'activité des classes pour y étudier plus finement les conditions et les contraintes pesant sur le *topos* des élèves. À propos du contrôle - moment d'étude crucial et enjeu didactique important aussi bien pour les élèves que pour le professeur – j'ai d'abord mis en œuvre une analyse *a priori* du sujet du contrôle grâce au repère fiable que fournissait l'étude du site algébrique-fonctionnel. Il s'agissait de regarder quelle est la partie du site algébrique-fonctionnel qui est enjeu dans ce contrôle, en y identifiant également les types de tâches et les organisations mathématiques correspondantes. L'analyse des erreurs des élèves et celle des séances d'enseignement précédant le contrôle viennent alors confirmer ce que cette analyse *a priori* et l'examen de la dimension institutionnelle de l'étude autonome avaient permis d'anticiper :

En l'absence de ressources épistémiques appropriées, faute de prise en charge par l'enseignant l'indication des objets d'étude et l'organisation des conditions de leur viabilité, l'étude autonome est délaissée au jeu subtil du contrat didactique. Dans ces conditions, l'enseignement ne saurait être efficace et l'étude autonome de l'élève ne peut combler le manque.

Si ce résultat est l'élément essentiel de cette approche du diagnostic, il existe d'autres résultats qui contribuent à l'établissement d'un diagnostic solide. Je vais les présenter après avoir précisé ce que les étapes successives de mes analyses ont permis d'établir. À cet effet, je reviendrai d'abord sur le site algébrique fonctionnel et je commencerai par sa construction.

Le site algébrique-fonctionnel et son écologie scolaire

Quelques points clés de la construction du site algébrique- fonctionnel

Essayons d'abord identifier les principaux objets d'étude de ce site, c'est-à-dire des objets que l'on étudie au sens mathématique :

Les deux principaux objets de ce site sont sans doute les **équations algébriques et les fonctions**. Si l'on suit le mode d'émergence et de développement des objets mathématiques en se centrant sur les relations épistémologiquement pertinentes qui les relient, nous pouvons d'abord voir que le traitement algébrique des équations apparaît comme étant consubstantiellement lié à deux autres concepts, ceux **de nombre et de polynôme** qui sont eux-mêmes des objets d'étude du site algébrique-fonctionnel.

Mais le lien entre le cadre algébrique et le cadre des fonctions n'est pas si évident. Un tel lien s'établit à travers des objets communs à ces deux modes de pensée. Les premiers objets qui relient les équations algébriques au concept de fonction sont les courbes géométriques. Elles se présentent sous forme de **graphique** comme objet d'étude. Dans l'histoire, les courbes géométriques trouvent toute leur place dans la résolution des équations au moyen de leur intersection, comme elles ont joué un rôle dans l'émergence de la relation fonctionnelle dans la géométrie de Descartes (Muhammed, 1998), mais surtout dans l'apparition du concept de variation en unifiant les pensées qualitative et quantitative (René de Cotret, 1998). De ce fait, la représentation graphique a surtout du sens dans le cadre fonctionnel lorsqu'elle est considérée ensemble avec le concept de **variation**.

À ces 6 objets principaux (équations, fonctions, polynômes, nombres, graphiques, variations), il faut ajouter le concept d'**ordre**, d'une importance particulière dans le cadre de l'analyse et le concept d'**inéquation** qui l'accompagne.

Mais identifier les objets principaux du site algébrique-fonctionnel n'en fait pas pour autant un ensemble structuré et cohérent. Il convient également d'identifier les concepts qui interviennent lors qu'on étudie ces objets. Par exemple, l'étude des fonctions fait intervenir le concept de fonction polynôme, qui fait intervenir lui-même les concepts de fonction composé, fonction numérique ou le concept d'approximation dans le cadre de l'analyse. L'étude graphique s'appuie sur des concepts tels que droite, parabole ou encore sur le concept plus général de conique. L'étude des équations met en jeu le concept de polynôme qui renvoie lui-même aux concepts de solution, fonction réciproque ou encore aux concept plus généraux de corps, anneau, etc. il s'agit bien entendu des concepts qui font tous partie d'un ou plusieurs domaine d'étude mathématique au sens strict.

Mais si l'on considère qu'un concept devient un outil lorsqu'il est mobilisé pour résoudre un problème (Douady, 1986), on se trouve inévitablement devant la problématique de la création technique au sens de l'approche anthropologique (Chevallard, 1999). Il s'agit alors

de créer ou d'élaborer des techniques, les concepts en question devant être pensés par rapport aux techniques qu'ils permettent de mettre en place et dont ils assurent le sens.

Il s'agirait alors des techniques liées au calcul numérique et au calcul algébrique pour l'étude des nombres et des polynômes, des techniques liées aux transformations des expressions pour les équations, et ces techniques vont convoquer d'autres concepts et ainsi de suite.

De cette manière, nous pouvons concevoir la structure d'un site mathématique autour des objets principaux, des concepts, des techniques qui s'y rapportent et des relations parmi eux. Le schéma suivant présenté pour la première fois dans (Duchet & Erdogan, 2005) donne une construction relativement complète du site algébrique-fonctionnel :

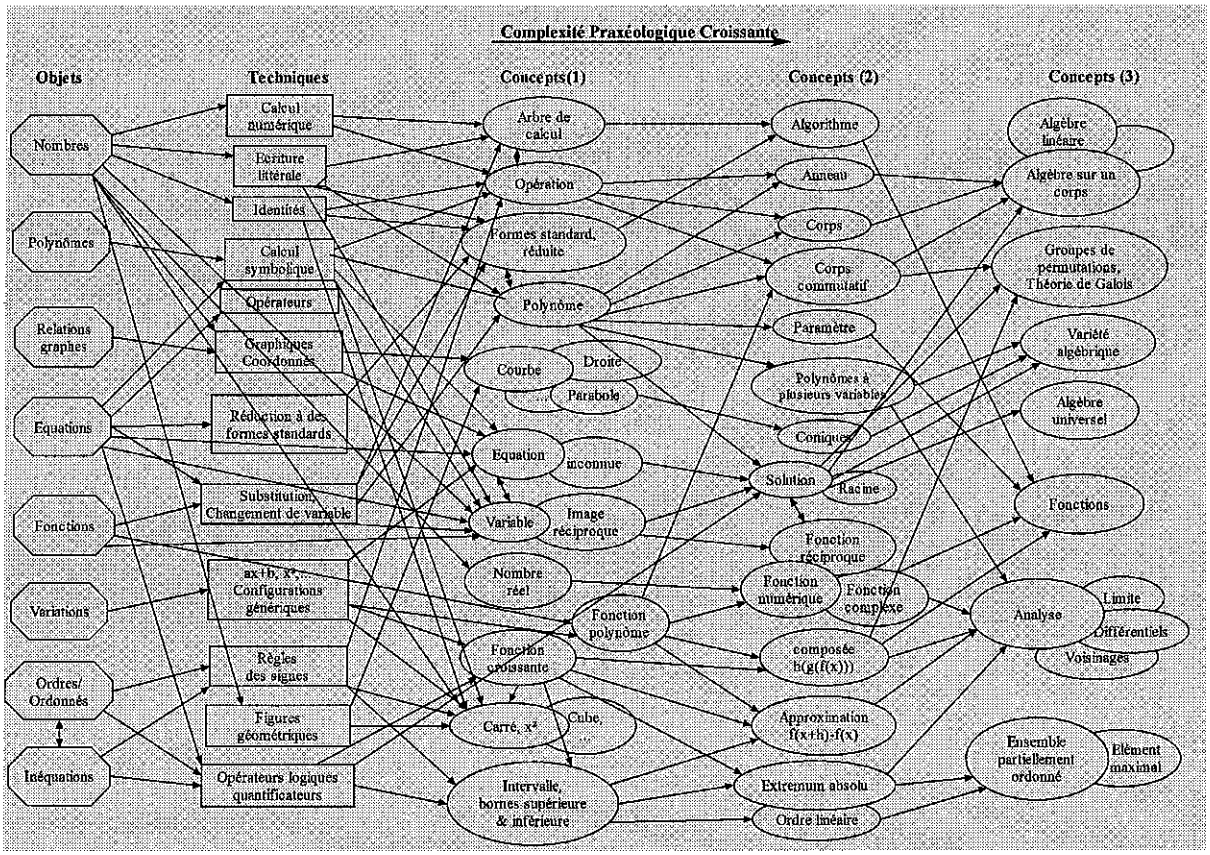


Schéma 3 : le site algébrique-fonctionnel (Duchet & Erdogan, 2005).

Ce schéma est une représentation en deux dimensions d'une profondeur. Les concepts sont présentés avec l'idée d'une complexité croissante, c'est-à-dire de plus en plus généraux, une généralité allant des objets sensibles de la classe de Seconde jusqu'à un niveau théorique comme horizon de cette généralité. La généralité de ces concepts est en lien avec les différents niveaux et différents moments d'une activité où ils peuvent intervenir.

Certains peuvent se rapprocher du côté de l'action, de la technique tandis que d'autre du côté de la validation et de justification.

Pour une analyse écologique, nous pouvons voir sur ce schéma des objets et des relations qui doivent exister parce qu'ils ont une pertinence épistémique, identifier des objets et des relations qui sont absents dans l'écologie considérée, mais aussi des objets et des relations qui sont uniquement soutenus par le contrat didactique.

Ecologie scolaire du site algébrique-fonctionnel

Au collège

En ce qui concerne l'écologie de ce site au niveau du Collège, nous constatons d'abord que la rencontre des élèves avec le concept de nombre réel est reportée en Seconde. Il s'agit d'un *vide didactique* suivant la terminologie utilisée par Bronner (1997), un vide à remplir inévitablement en classe de Seconde pour qu'une combinaison quelconque des études algébriques et fonctionnelles devienne possible.

Le calcul algébrique ne se développe que très lentement, la résolution algébrique des équations repose totalement sur des problèmes d'arithmétique et sur le contexte numérique sans que le travail algébrique apparaisse comme un mode de pensée efficace et économique.

Nous observons par ailleurs une introduction naturelle de la notion d'inéquation et de la résolution d'inéquations comme une extension de celle des équations

Quant à la notion de fonction, elle tarde à venir et seuls quelques aspects élémentaires de cette notion sont au programme. L'étude est limitée aux fonctions affines et linéaires dont l'introduction est exclusivement appuyée sur les situations de proportionnalité, notamment sur des situations présentant un tableau de quelques nombres proportionnel, qui ne sont pas susceptibles de faire émerger le concept de variation.

Les contextes du travail algébrique et du travail fonctionnel étant tout à fait différents, il n'existe par ailleurs aucun lien explicite entre le cadre algébrique et le cadre fonctionnel.

En Seconde

En classe de Seconde, avec le contenu pré-analytique que propose le programme, la rupture avec le Collège est donc remarquable, mais cette rupture est condamné à être bâtie sur du sable parce que d'une part l'écart avec le Collège est trop important, d'autre part le programme n'est pas pensé comme un tout structuré et cohérent. Car, des objets et des

relations manquent pour que ce contenu d'enseignement puisse représenter une partie émergente du site fournissant aux élèves et au professeur les outils de travail dont ils ont besoin dans leurs *topos* :

Toute connaissance relative au concept de polynôme est absente à tel point que l'on ne puisse parler du degré d'une équation.

L'étude qualitative des fonctions et des fonctions de référence est au programme mais toute relation entre les concepts de variation et d'extremum est absente, et les problèmes d'optimisation qui leur donneraient sens ne sont pas construits dans cette perspective.

L'étude du sens de variation des fonctions de référence est un enjeu explicite du programme, la technique d'étude proposée à cet effet fait appel à la notion de fonction composée, notion qui est totalement absente, y compris sous la forme de changement de variable.

La résolution des équations - inéquations s'appuie sur des techniques purement algébriques, des techniques rigides (usage explicite d'un tableau de signes, par exemple), et en aucun cas suffisamment exhaustives pour englober les problèmes qui relèvent du site algébrique-fonctionnel.

En effet, les objectifs ainsi définis semblent conduire, aussi bien les rédacteurs de programme que les auteurs de manuels, à un jeu d'équilibre improbable entre la volonté de concevoir une organisation préparant l'entrée dans l'analyse et une nécessité de modérer, à chaque moment, cette entrée en raison du fait qu'il s'agit d'une classe d'orientation. Cela débouche sur une organisation incomplète, d'une part avec des techniques pour un certain nombre de types de tâches dont la justification n'appartient pas aux contenus d'enseignement concerné (par exemple, étude du sens de variations), parce que ces tâches sont censées seulement assurer une ouverture pour la suite des études et un lien entre le travail algébrique et le travail fonctionnel. Nous observons d'autre part des technologies sans techniques (ainsi pour les variations et les extrema) parce qu'elles servent seulement à la justification des objets ainsi introduits (comme les fonctions de référence) sans que des techniques d'étude efficaces ne soient visées.

Mais il y'en a plus dans ces analyses : au vu de la manière dont l'étude de ces objets est proposée dans le programme et dans le manuel, il est possible d'affirmer qu'il manque aux rédacteurs de programme une vision de ce que suppose un tel objectif comme organisation et il manque aux auteurs de manuels une vision de ce qui est visé par un tel contenu,

comme une vision de ce qui nécessite le travail des élèves et du professeur comme moyens d'étude

Etude des classes comme institution

Arrivé à l'étude de la dimension institutionnelle de l'étude autonome, une question se pose: Quelles sont les positions des uns et des autres vis-à-vis de l'étude autonome, en particulier, vis à vis de la complexité des relations auxquelles il faut faire face en classe de Seconde?

Les analyses menées à partir des textes officiels, du questionnaire et des entretiens ont permis d'établir les résultats suivants :

Les élèves déclarent n'avoir rencontré aucun problème particulier en arrivant en classe de Seconde, notamment au niveau du travail algébrique, tandis que les résultats scolaires les démentent.

Un nombre important d'élèves déclarant refaire seulement les exercices faits en classe, par exemple, pour préparer un contrôle, en les considérant des exercices types, tandis qu'ils semblent confondre la typicité qu'il faut construire avec la ressemblance des exercices.

Quant aux professeurs, ils déclarent très peu contrôler la réalisation par les élèves du travail donné à la maison et ils semblent ne pas prendre en charge en classe les difficultés rencontrées. Ils mettent en avant les acquis du calcul algébrique du Collège tandis qu'ils ignorent totalement l'importance du site algébrique-fonctionnel pour la suite des étude et la difficile combinaison que nécessitent les études relevant de ce site. Ils semblent par ailleurs ignorer comment construire la typicité ou même qu'il faut permette aux élèves de la construire. Ils semblent réduire les enjeux d'apprentissage à des compétences facilement évaluables.

Quant au pouvoir éducatif, nous assistons à une insistance permanente sur l'étude autonome. La tendance est alors d'aider les élèves, tandis que la question du contenu de l'aide dont ils ont besoin n'est jamais posée. Les actions du professeur étant par ailleurs considérées comme allant de soi, aucune piste sérieuse ne leur est proposée pour une telle aide.

Activités effectives des classes

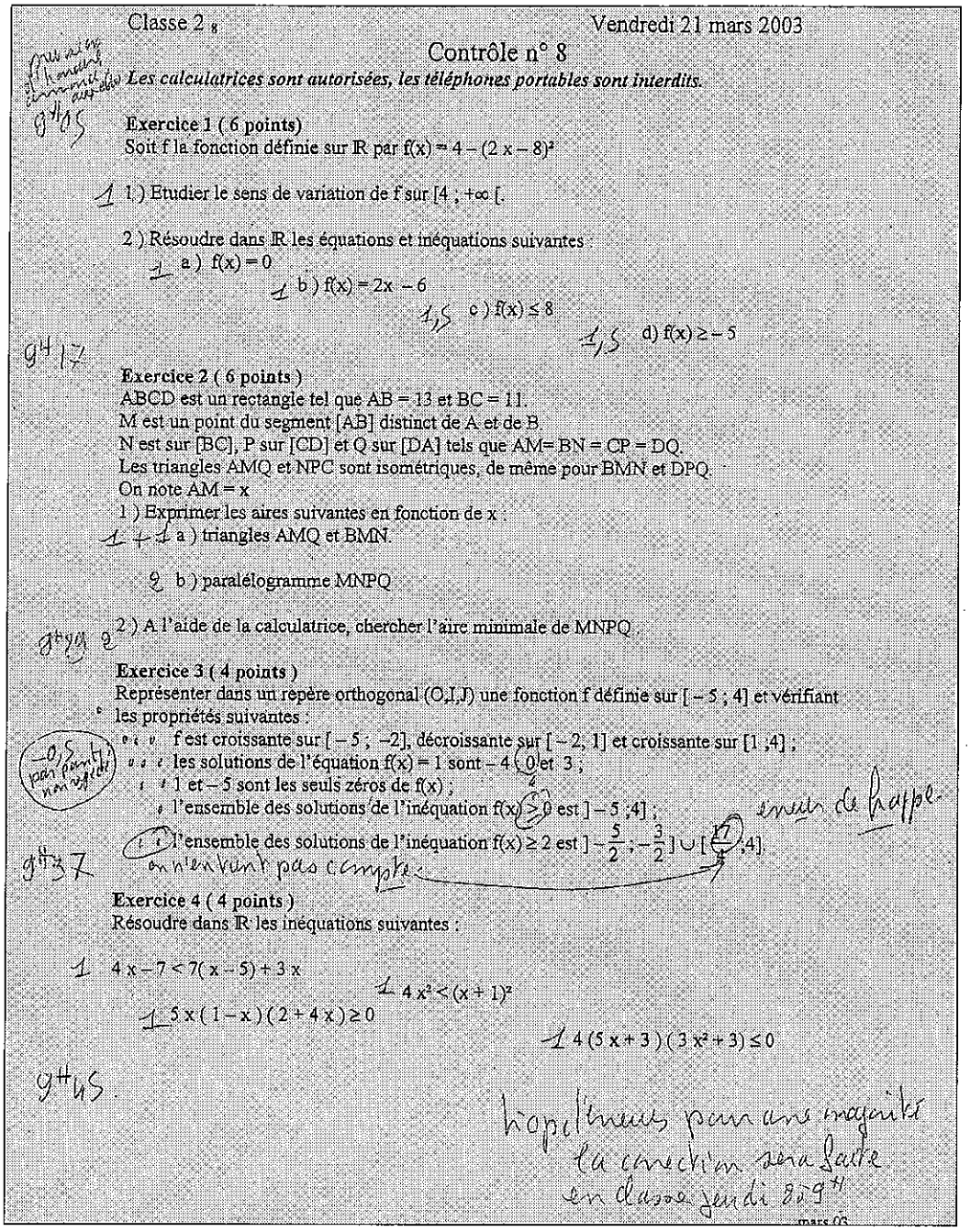
Arrivé à l'analyse de l'activité effective des classes, une autre question se pose : frappés par les ignorances relatives à la complexité des relations auxquelles ils doivent faire face,

comment les professeurs peuvent organiser leur enseignement et comment les élèves peuvent s'emparer des objets du cours et les investir lors de l'étude autonome ?

Il existe sans doute plusieurs approches possibles pour étudier cette question. Nous avons choisi de centrer nos analyses, du point de vu de ses enjeux institutionnels, sur le contrôle venant clore l'enseignement de la partie algébrique et fonctionnelle du programme et sur le travail des élèves et du professeur autour de ce contrôle.

Prenons ici un de ces contrôles et regardons rapidement ce qui est en jeu concernant le site algébrique fonctionnel, ce qui est attendu des élèves et ce qu'ils ont pu effectivement réaliser.

Analyse d'un moment d'étude autonome particulier : le contrôle



Classe 2 8 — Vendredi 21 mars 2003

Contrôle n° 8

Les calculatrices sont autorisées, les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 4 - (2x - 8)^2$

1.) Etudier le sens de variation de f sur $[4 ; +\infty[$.

2.) Résoudre dans ℝ les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 2x - 6$

c) $f(x) \leq 8$

d) $f(x) \geq -5$

Exercice 2 (6 points)

ABCD est un rectangle tel que AB = 13 et BC = 11.

M est un point du segment [AB] distinct de A et de B.

N est sur [BC], P sur [CD] et Q sur [DA] tels que AM= BN = CP = DQ.

Les triangles AMQ et NPC sont isométriques, de même pour BMN et DPQ.

On note AM = x

1) Exprimer les aires suivantes en fonction de x :

a) triangles AMQ et BMN.

b) paralélogramme MNPQ

2) A l'aide de la calculatrice, chercher l'aire minimale de MNPQ.

Exercice 3 (4 points)

Représenter dans un repère orthogonal (O,I,J) une fonction f définie sur $[-5 ; 4]$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- f est croissante sur $[-5 ; -2]$, décroissante sur $[-2, 1]$ et croissante sur $[1 ; 4]$;
- les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont -4 et 3 ;
- 1 et -5 sont les seuls zéros de f(x) ;
- l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est $]-5 ; 4]$;
- l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ est $]-\frac{5}{2} ; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2} ; 4]$

on n'en tient pas compte

suite de l'appel

Exercice 4 (4 points)

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

$4x - 7 < 7(x - 5) + 3x$

$4x^2 < (x + 1)^2$

$5x(1 - x)(2 + 4x) \geq 0$

$4(5x + 3)(3x^2 + 3) \leq 0$

Nopel'heure pour une majorité la correction sera faite en classe jeudi 20 9h

mars 03

Ce sujet du contrôle est celui d'une classe dont le rapport à l'étude de ses sujets (élèves-professeur) diffère considérablement de celui des autres classes. Il existe de la part du professeur une volonté explicite d'organiser l'étude autonome de ses élèves et une volonté de la part de la majorité des élèves de réussir et faire une classe de première scientifique. Il s'agit du premier contrôle du troisième trimestre. L'enjeu est donc important pour plusieurs élèves qui veulent s'assurer de l'orientation qu'ils souhaitent et certains déclarent avoir passé plus d'une semaine pour préparer le contrôle.

La technique se compose des étapes suivantes:

- Choisir deux nombres réels dans l'intervalle donné
- Composer la première fonction à élever au carré, ce qui demande d'abord de reconnaître la forme de cette fonction et les étapes de montage à faire. Le reste doit être confié au calcul algébrique
- S'assurer que la fonction obtenue est supérieure ou égale à 0
- Appliquer la croissance de la fonction carré
- Confier le reste de la résolution au calcul algébrique
- S'assurer que la fonction obtenue est bien la fonction demandée et conclure si cette fonction est croissante ou décroissante sur l'intervalle donné

Donc, on voit bien que la technique est essentiellement basée sur le calcul algébrique qui assure le montage de la fonction. Cependant cette technique fait intervenir à un moment donné la référence aux variations de la fonction carré puisqu'elle est objet explicite du cours comme fonction de référence.

L'analyse de leurs copies montre que cet usage de la fonction carré n'a pas été compris par les élèves et les insistances du professeur à ce propos pendant trois séances précédant le contrôle ne semblent rien arrangé, si ce n'est le contraire.

Les élèves semblent tous savoir qu'ils ont à faire à la fonction carré mais ignorent complètement où et comment. Car, il existe d'abord un jeu subtil du contrat didactique qui change tout : les exercices résolus en classe portaient tous sur un intervalle qui faisait intervenir la décroissance de la fonction carré alors qu'ils devaient mener l'étude à la maison sur l'autre intervalle, ce qui change de façon critique le travail à effectuer.

Mais une analyse plus fine montre que les élèves n'ont pas compris cet usage de la fonction carré parce que le fait d'utiliser ici la fonction carré comme référence ne va pas de soi. Car, pour en faire une propriété technique, il faut mobiliser le non ostensif fonction à propos d'un objet ordinairement associé au calcul littéral, prendre en compte la croissance de la fonction "x au carré", un objet qui ne se voit que pour qui pense la fonction initiale en termes de fonction composée.

Il y a donc une difficulté particulière dans le fait que la technique demandée est une sorte de mélange entre une technique fonctionnelle et une technique algébrique. On demande aux élèves qui sont en train de travailler dans le cadre algébrique, de passer au cadre fonctionnel pour aller chercher une justification qui ne peut pas exister sans les connaissances sur le concept de fonction composée ou au moins sans les connaissances sur

le concept de changement de variable. Deux objets qui sont absent à ce niveau sous quelque forme que ce soit.

Bref, pour une combinaison du cadre algébrique et du cadre fonctionnel, la référence à la fonction carré est ici introduite par le contrat didactique dans ce sens que le professeur demande aux élèves – en fonction des injonctions officielles – de justifier par les variations de la fonction carré qui n'interviennent que d'une manière non indispensable à la mise en œuvre de la technique.

En nous appuyant sur le schéma du site ci-dessus nous pouvons interpréter tout ceci en en termes de relation dans le site.

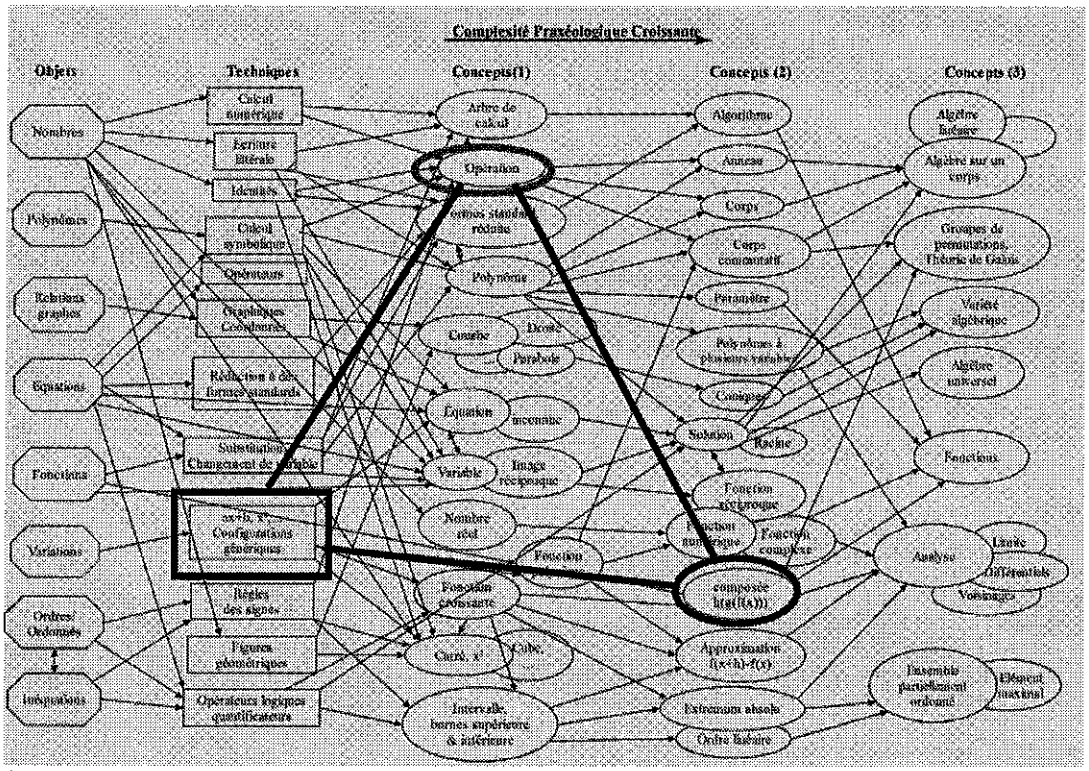


Schéma 4 : les relations dans le site relativement à la technique proposée pour étudier les variations d'une fonction du second degré

La relation visée par le contrat didactique à propos de l'objet de l'étude du sens de variations est celle qui se trouve entre des opérations algébriques et la technique algébrique de l'étude du sens de variations, mais qui tend à faire exister un autre concept, celui de la fonction composée. Autrement dit, les relations étudiées en classe se trouvent sur ces trois axes dont la viabilité ne semble assurée que par le contrat didactique. L'écart est donc révélateur de l'adéquation de ce qui est officiellement visé par rapport à ce que les élèves peuvent effectivement comprendre et contrôler lors de leur étude autonome.

N'étant pas ici en mesure de développer davantage ces analyses, donnons les résultats principaux de notre thèse, des résultats que l'on pourra formuler comme éléments de diagnostic.

Résultats saillants de la thèse: éléments de diagnostic

Etude et la matière d'étude

Nous avons supposé que le professeur a besoin d'une structure dans le site pour organiser et diriger l'étude et les élèves ont besoin d'une structure dans le site pour mener à bien les tâches mathématiques qui relèvent de leurs *topos*. Cette structure dans le site avec ses objets et ses relations est la matière d'étude sur laquelle l'effort didactique doit ce centrer.
Or, nous avons montré que cette *matière d'étude apparaît fortement fragmentée en classe de Seconde,* voire mutilée, à tel point qu'il n'est pas possible de baser, ni l'enseignement, ni l'étude autonome sur un ensemble porteur de sens. *L'enseignant ne peut donc fournir à l'élève les moyens dont il a besoin et l'étude autonome de l'élève ne peut combler le manque. Pour ainsi dire, le rapport des élèves à ces objets ne peut pas devenir ultérieurement conforme.*

Etude et les ignorances

Nous avons ensuite souligné les ignorances relatives à la complexité des relations auxquelles il faut faire face en classe de Seconde. En effet, de telles ignorances vont de pair avec les mouvements pédagogiques actuels, avec le déni de la nécessité d'une rupture et avec la négation de l'objet d'étude : les idées selon lesquelles "l'enseignement doit s'appuyer sur les connaissances anciennes et doit être progressif" et "il faut privilégier la compréhension, la méthode s'en suit" sont plus que jamais prégnantes. Sous prétexte qu'il s'agit d'une classe d'orientation (mais aussi d'élèves en difficulté, d'établissement en difficulté… nous allons revenir sur ce dernier), l'enseignement est majoritairement appuyé sur les exercices et le savoir est plus que jamais réduit à son expression évaluable.
Ainsi se dégage le deuxième résultat de notre thèse : *l'étude autonome est profondément marquée par les ignorances, les indigences et les dénis, quitte à ne devenir qu'un moyen pour renvoyer dans le camp des élèves tout ce que l'enseignement n'est pas capable de gérer.*

Seuls face à leur étude autonome que le travail en classe engendre, que peuvent faire les élèves pour combler le manque et pour affronter la rupture à laquelle ils ne peuvent pas échapper ? Hélas, pas grand-chose, puisque nos analyses montrent qu'il leur manque des gestes d'étude efficaces, l'autonomie de la plupart d'entre eux apparaît fortement dépendant de la position du professeur et leur culture d'étude s'avère fragile, faible en ressources adéquates.

Etude et les institutions-classes

Cependant, nos analyses montrent que là où il y a une volonté du professeur à organiser explicitement l'étude autonome des élèves, les élèves entretiennent un rapport favorable aux activités mathématiques en classe et à la maison qui sont la marque d'une grande autonomie. Réciproquement, là où le mot étude autonome est réduit à des exigences sans substrat épistémique et didactique, le rapport à l'activité mathématique se réduit pour les élèves à "comprendre ce que le professeur a fait et a corrigé en classe".

Nous pouvons alors dire comme troisième résultat que le rapport des élèves à l'étude dépend fortement des institutions-classes et le rôle du professeur est loin d'être négligeable dans le rapport que les élèves entretiennent à l'étude et dans la qualité du travail autonome qu'ils sont appelés à fournir.

Ce résultat est d'autant plus important dans la mesure où la première situation est observée dans un établissement de milieu socioculturel élevé où les élèves sont, *a priori,* aptes à donner un travail autonome, tandis que la seconde situation est relative aux établissements moins favorisés par le contexte socioculturel, notamment à l'établissement situé en ZEP, où les élèves ont pourtant plus besoin de l'organisation de l'étude et d'une direction d'étude efficace.

Nous pouvons alors affirmer que l'exigence d'autonomie est sélective, par conséquent *l'école est sélective en fonction des difficultés qu'elle crée et en fonction de ce qu'elle ne prend pas en charge.* D'une part, le parcours de sélection est marqué par la fragmentation de la matière d'étude, d'autre part il manque une organisation effective de l'étude et une aide appropriée, notamment pour les élèves qui en ont le plus besoin.

Avant de conclure cet exposé, il convient aussi de dire quelques mots sur l'apport de notre travail au niveau théorique, sur les perspectives pour une aide à l'étude qui s'en dégagent et des perspectives de recherche qui s'imposent à nous.

L'apport de la thèse sur le plan théorique

Avec la notion de site comme outil d'analyse, les objets d'étude sont insérés dans un contexte beaucoup plus large que le curriculum, ce qui permet une vision évolutive, souple et relativement indépendante de l'institution.

Autrement dit, avec la notion de site, nous rattachons les organisations mathématiques ponctuelles ou locales à une structure plus globale - le site d'un domaine d'étude - et pouvons ainsi mettre en évidence des phénomènes de rupture ou de transition permettant d'évaluer la viabilité des projets didactiques. En cela, la notion de site nous semble constituer un moyen de diagnostic efficace pour repenser les questions didactiques d'étude et l'organisation du curriculum.

Par ailleurs, si l'on considère le site algébrique-fonctionnel comme un parcours obligé d'élèves, du moins pour ceux qui suivent une section scientifique, et si l'enseignement est considéré comme organisateur de parcours d'élèves, le site se noue inévitablement avec le texte du savoir et s'intègre au temps d'enseignement/apprentissage : rappelons-nous tous ces objets et ces relations dans le site, ainsi que les nécessaires transitions/transgressions arithmétique-algébrique-fonctionnelle-analytique-topologique. Quelle organisation pour le texte du savoir, quelle gestion du temps de l'enseignement et de l'apprentissage convient-il de prendre en compte ? Ce sont des questions importantes qu'il convient alors d'étudier comme de sérieuses pistes de réflexion et de recherche.

Au niveau d'une articulation avec la théorie des situations didactiques, au-delà du fait que les situations d'étude sont, par nature, des situations où il n'y pas de professeur, il apparaît que toute situation d'étude ne relève pas d'une situation a-didactique dans la mesure où le rapport d'un élève à un objet culturel qu'il cherche à refaire vivre apparaît bien plus vaste que le rapport au milieu d'une situation a-didactique. Le rapport que nous imaginons aujourd'hui en termes du site des objets mathématiques à étudier. En retour, nous pensons que la notion de site est un moyen efficace pour décrire les milieux a-didactiques des situations didactiques.

Des pistes pour une aide efficace à l'étude

En ce qui concerne les pistes que notre travail ouvre pour une aide efficace à l'étude, au vu de tout ce qui précède, il convient d'entendre par ce mot une aide sur un plan macro didactique et une aide sur un plan micro didactique. Autrement dit, notre conception d'aide à l'étude se décline comme la problématique d'amélioration et d'organisation des

conditions de l'étude et la problématique d'une aide ponctuelle devant une situation problématique pour l'élève.

Notre première perspective s'appuie sur une analyse de la pertinence épistémique de l'organisation d'un programme, via la notion de site mathématique, et s'inscrit dans une problématique d'amélioration et d'organisation des conditions de l'étude. Nous supposons qu'une organisation du curriculum doit tenir compte des objets d'étude dans leur évolution d'une année sur l'autre, chaque organisation mathématique devant pouvoir s'insérer dans la partie émergente du site considéré.

Une forme d'aide à l'étude au niveau micro didactique se dégage de cette perspective : une fois l'étude est considérée comme entrer en rapport avec les objets du site, il est en effet difficile d'imaginer qu'une aide ponctuelle va pouvoir efficacement aider l'élève. Cependant, nous pouvons dire que l'aide apportée doit rencontrer le besoin de l'élève, qui est une structure dans le site, et nous pouvons faire l'hypothèse que l'on aide un élève à étudier si l'on oriente son étude dans une direction précise qui lui permettre de rencontrer le site des objets mathématiques à étudier.

Des perspectives de recherche

Avant de terminer, évoquons les perspectives de recherche qui s'imposent à nous dans l'immédiat. Il nous paraît important de mener quelques recherches complémentaires pour développer notre outil de diagnostic et notre modèle didactique. Pour ce faire, il convient sans doute de regarder ce qui se passe autour d'autres sites mathématiques.

Il conviendrait ensuite de développer une ingénierie didactique qui s'appuierait d'abord non sur la théorie des situations didactiques mais sur le modèle de site ici présenté, afin de voir comment il sera possible d'orienter les efforts didactiques des élèves et du professeur sur un terrain pertinent afin qu'ils puissent mener à bien les tâches qui relèvent de leurs *topos* respectifs.

Bibliographie

[1] BARRÈRE A. (1997), *Les lycéens au travail*, Paris : PUF.

[2] BRONNER A. (1997a), *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de troisième cycle, Université Joseph Fourier.

[3] CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 19 (2), pp. 221-266.

[4] DOUADY R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, n° 7/2, pp. 5-31.

[5] DUCHET P. & ERDOGAN A. (2005), Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis. In Bosch M. (eds), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4),* pp. 663-674, FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull, 17 - 21 Şubat 2005, Sant Feliu de Guíxols, İspanya

[6] ERDOGAN A. (2006), *Le diagnostic de l'aide à l'étude, en mathématiques : analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en Seconde.* Thèse du troisième cycle, Univeristé Denis Diderot-Paris 7.

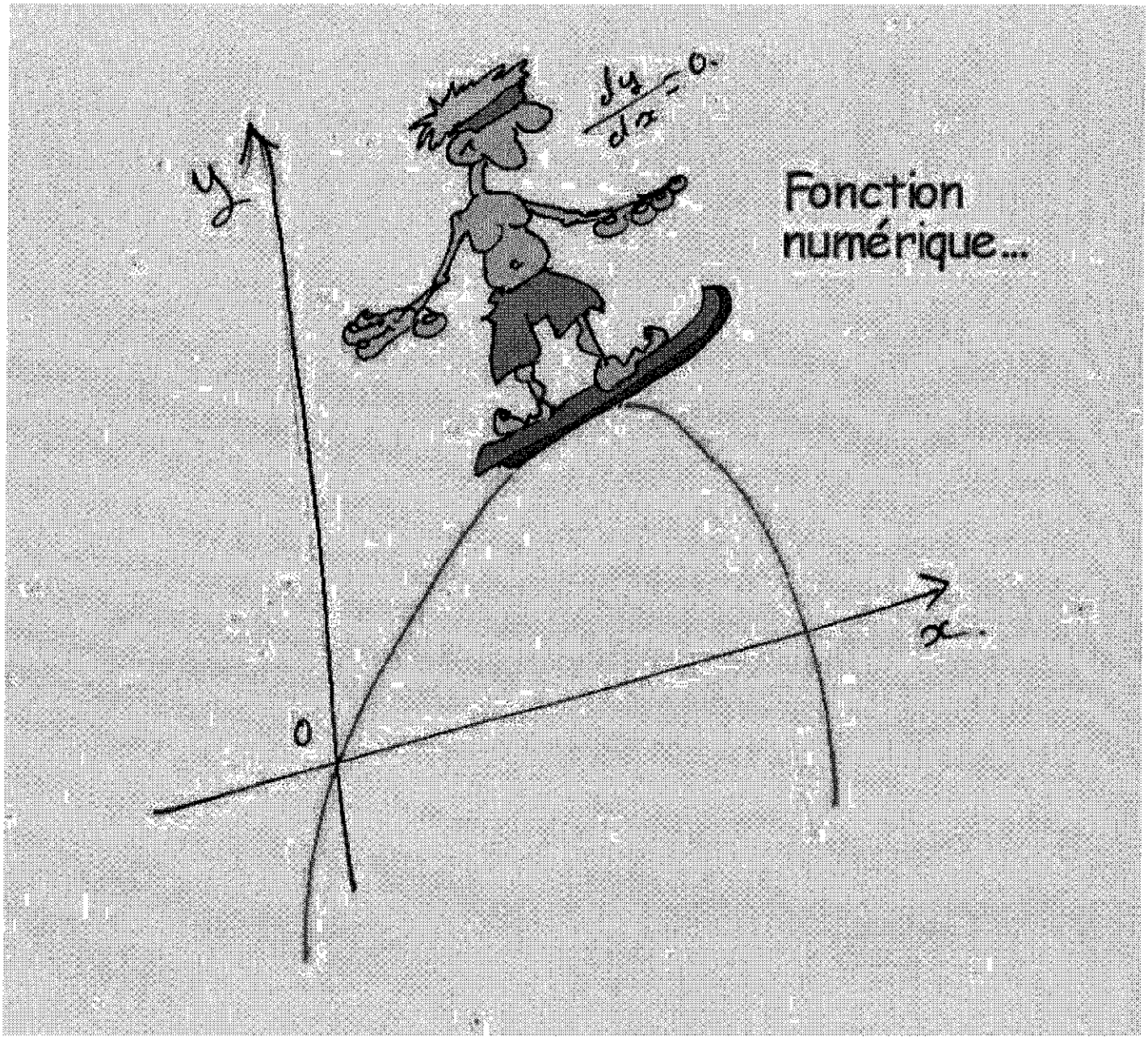
[7] ERDOGAN A. & MERCIER A. (2007), Les forums de questions mathématiques sur Internet et les attentes sur le travail des élèves, *Annales de didactique et des sciences cognitives*, volume 12, pp.147-163.

[8] FÉLIX C. (2002), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire.* Thèse du troisième cycle, Univ. d'Aix-Marseille I.

[9] MAHAMMED N. (1998), *Histoire des équations algébriques*, Paris : Diderot.

[10] PERRENOUD P. (1994), *Métier d'élève et sens du travail scolaire*, Paris : ESF.

[11] RENÉ-DE-COTRET S. (1988), Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante, *Petit x*, n° 17, pp. 5-27.


$\frac{dy}{dx} = 0$
Fonction numérique...
y
x
0

Les triangles semblables en classe de seconde, des enseignements aux apprentissages

Julie Horoks,
IUFM de Créteil et équipe DIDIREM.

Cette étude est issue de notre travail de thèse (Horoks, 2006). Une longue pratique des cours particuliers en mathématiques nous a amenée à nous poser des questions sur les apprentissages des élèves dans cette matière[42]. Dans la mesure du possible, en dispensant ces cours, nous avons toujours essayé de nous appuyer sur ce qui avait été fait en classe au préalable (à travers le cahier de l'élève en grande partie), pour essayer de repérer ce qui n'avait pas été compris par l'élève, et alors tenter de "compléter" ou de reprendre en conséquence. En lien avec cette pratique et au fur et à mesure des élèves rencontrés, nous nous sommes alors demandé ce qui avait pu se passer en classe lorsque l'apprentissage visé n'avait visiblement pas eu lieu. Nous avons donc voulu chercher comment mettre en relation ce qui avait été proposé par l'enseignant et les apprentissages (ou les difficultés) de l'élève.

La question que nous nous posons ici est en réalité un "vieux rêve de didacticien", puisque nous nous sommes demandé quel lien il pouvait y avoir entre ce qui a été fait en classe sur une notion, et les apprentissages des élèves qui pourraient en découler. Nous avons essayé cependant de nous en emparer en choisissant de faire de nouvelles approximations pour approcher les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves, et en prenant en compte de nouveaux paramètres. Pour tenter de répondre à nos questions, nous avons choisi de comparer les enseignements dispensés dans plusieurs classes, sur un même chapitre[43].

Nous allons détailler dans une première partie la problématique et la méthodologie adoptées, puis exposer les résultats obtenus à travers trois axes de recherche : tout d'abord la prise en compte par les programmes scolaires de la notion mathématique considérée, l'influence de ces programmes sur les pratiques enseignantes et enfin l'influence des pratiques sur les apprentissages des élèves.

---

[42] Cela nous avait permis de réaliser un premier travail de recherche, pour mon mémoire de DEA, sur ce sujet. (Nous avons analysé des séances de cours particuliers à travers les activités proposées aux élèves en fonctions de leurs difficultés).

[43] Nous nous sommes intéressées ici aux triangles semblables, pour des raisons que nous allons justifier plus loin.

I. Problématique et choix méthodologiques.

Nous nous intéressons à ce qui se passe en classe au cours de l'enseignement d'une notion mathématique donnée, pour tenter de définir et de mesurer l'influence des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves sur cette notion. Pour ce faire, nous allons préciser les variables du travail en classe que nous choisissons de relever, comme pouvant selon nous avoir une influence sur les apprentissages des élèves.

1. Analyse de ce qui se passe en classe.

Pour approcher les apprentissages des élèves et les mettre en relation avec les pratiques enseignantes, nous nous plaçons à l'articulation de théories générales de l'apprentissage[44] (Rogalski 2005). Nous considérons en particulier que les apprentissages des élèves en mathématiques se font, au moins en partie, par les activités qui leur sont proposées en classe, c'est à dire tout ce qu'ils font (disent, pensent, écrivent, etc.). Or ces activités dépendent largement des choix d'énoncés et de gestion que l'enseignant fait pour sa classe. Nous distinguons les "activités" des "tâches", correspondant à la description du travail mathématique demandé dans l'énoncé, et que nous détaillons en énumérant les connaissances mathématiques qui interviennent et la manière dont elles doivent être utilisées. Les activités sont ainsi provoquées à la fois par les tâches prescrites mais aussi par la façon dont se déroule le travail des élèves sur ces tâches.

Pour décrire les pratiques et les mettre en regard des progrès observés des élèves, nous analysons systématiquement ce qui est proposé par le professeur (contenus et gestion réelle de la classe), et tentons d'évaluer les connaissances qui peuvent en découler chez les élèves. Ainsi pouvons-nous comprendre comment les acquisitions (même provisoires ou partielles) dépendent de ce qui a été fait au préalable en classe.

Nous avons donc choisi de retenir non pas les situations didactiques mais plutôt l'unité constituée du couple *(énoncés, déroulements)* qui constitue un segment important de ce que nous considérons ici comme pratiques enseignantes. Par rapport à la théorie des situations, nous perdons certainement en précision en ce qui concerne l'analyse des enchaînements de ces énoncés, mais nous gagnons en finesse sur l'analyse de chacun des déroulements[45]. Nous ne faisons pas non plus de prévision fine de ce qui va se passer en classe, mais réalisons des analyses a priori dirigées par une vision du programme scolaire sur la notion enseignée.

---

[44] En particulier celles de PIAGET et VYGOTSKI.

[45] Et finalement, nous récupérons des précisions sur l'enchaînement de ces unités sur l'ensemble d'un chapitre.

Pour pouvoir décrire le travail des élèves en classe, nous n'avons cependant pas accès aux activités réelles de chaque élève, et encore moins pour tous les élèves de la classe. En revanche, nous avons accès aux activités possibles des élèves, c'est à dire – a maxima et a minima[46] – les activités qu'ils peuvent réaliser à partir des énoncés proposés par l'enseignant, et compte tenu de l'organisation du travail qui en découle.

Il nous faut mettre par la suite ces activités possibles en relation avec les apprentissages des élèves qui auraient pu en découler. Pour évaluer ces apprentissages, nous avons choisi de relever les copies des élèves lors d'un contrôle portant sur une notion mathématique donnée, en relation avec les activités proposées au préalable. C'est, nous le savons, une grosse approximation ! Mais elle nous permet, en rapprochant un échec au contrôle d'un défaut d'apprentissage chez l'élève, de comprendre quelles sont les difficultés rencontrées par certains élèves au terme du chapitre, compte tenu de l'ensemble du travail qui leur a été proposé sur la notion. En d'autres termes, nous associons un échec aux questions du contrôle à des manques éventuels pour certains élèves lors du traitement de la notion en classe - en ce qui concerne les tâches proposées et leur déroulement.

2. Des influences extérieures à la classe.

Nous cherchons par ailleurs tout ce qui peut influencer ce qui va se passer en classe, et donc en particulier ce qui va influencer les activités des élèves, à l'origine de leurs apprentissages.

Du côté des enseignants, nous avons choisi de prendre en compte en particulier certaines dimensions du métier, pour analyser les contraintes qui peuvent influencer les pratiques. Nous avons pour cela utilisé le cadre de la Double Approche (Robert & Rogalski, 2002) et réalisé une analyse en cinq composantes. Nous avons essayé, dans la mesure du possible, de tenir compte de la composante sociale du métier (en considérant par exemple le niveau de l'établissement), et de la composante personnelle (à travers l'expérience de l'enseignant par exemple). La prise en compte de ces deux composantes nous a surtout aidée à interpréter parfois certains choix des enseignants. Nous avons tenu compte bien évidemment des composantes cognitives et médiatives, relatives aux choix d'énoncés et de déroulements en classe, dont nous considérons, comme nous l'avons déjà dit, qu'ils ont une

[46] Bien entendu, cela dépend beaucoup de chaque élève, selon par exemple qu'ils cherchent la solution d'un exercice pendant le temps laissé par l'enseignant ou bien attendent la correction, ou encore s'ils tiennent compte ou pas des indications apportées pendant la recherche.

influence potentielle sur les activités des élèves. Nous avons pris en compte enfin la composante institutionnelle du métier (programmes, manuels scolaires, horaires).

C'est principalement l'étude des trois dernières composantes qui nous intéresse pour en mesurer l'influence sur les pratiques enseignantes, et donc sur ce qui va se passer en classe. C'est une décomposition artificielle, surtout si on considère la complexité des pratiques, mais c'est ici encore une approximation.

Du côté des apprentissages des élèves, il nous faudrait tenir compte des influences extérieures à la classe, qui relèvent du domaine du social ou de l'affectif. La représentation que l'élève se fait de son travail en classe par exemple, s'il travaille pour obtenir des bonnes notes ou pour résoudre un exercice, ou encore pour apprendre. Ce sont des variables que nous n'avons pas prises en compte ici, faute de pouvoir le faire. Il faudrait aussi pouvoir prendre en compte le travail de l'élève en dehors de la classe : quelles aides reçoit-il éventuellement (familiale, cours particulier). Sur ce dernier point nous avons obtenu quelques informations, avec l'aide de l'enseignant, mais cela reste encore un sujet un peu tabou[47].

3. Choix d'une notion mathématique.

Il nous faudrait aussi, pour pouvoir appréhender plus finement les apprentissages réalisés ou non dans la classe observée, prendre en compte l'influence sur les nouveaux apprentissages des élèves de leurs connaissances antérieures (acquises ou non dans les classes précédentes). Nous avons essayé de minimiser autant que possible l'impact d'éventuelles lacunes des élèves sur les apprentissages étudiés, en choisissant avec soin la notion dont nous souhaitions observer l'apprentissage.

Le choix d'une seule et même notion enseignée, pour toutes les classes observées, devrait aussi nous autoriser à faire des comparaisons entre les résultats des élèves dans les différentes classes. D'un point de vue méthodologique, ce choix doit donc nous permettre d'observer l'intégralité des séances (pour connaître le contenu exhaustif de ce qui s'est passé en classe sur ce sujet). Il doit aussi faire en sorte que les apprentissages sur cette notion se fassent essentiellement dans la classe observée. C'est pourquoi nous avons choisi de nous

[47] Certains enseignants interrogés pendant ce travail de recherche ont admis qu'ils n'appréciaient pas le fait que leurs élèves aient recours à des cours particuliers, de peur, par exemple, que le professeur particulier ne fasse le travail de l'élève à sa place. Ce qui explique probablement que beaucoup d'élèves préfèrent ne pas le mentionner.

intéresser à la notion de triangles semblables en classe de seconde, circonscrite à un chapitre relativement court et isolé du programme[48].

Il nous faudra bien évidemment nous poser la question d'une généralisation de nos résultats à d'autres types de notions.

4. Données recueillies et traitement

Nous avons recueilli pour notre étude des vidéos réalisées dans trois classes de seconde, sur le chapitre entier des triangles semblables, en 2002 et 2003. Deux autres vidéos ont été recueillies en 2005, dans le cadre d'un mémoire de Master (Cisse & Corlay) qui a repris la problématique, le cadre et la méthodologie adoptés dans la thèse. Pour chacune de ces vidéos, nous avons réalisé une analyse de chaque tâche proposée et du déroulement associé à cette tâche. Pour cela nous empruntons, en l'adaptant, la méthodologie des travaux de Robert (2003).

Pour analyser les activités provoquées par un énoncé, nous tenons compte de la complexité de la tâche prescrite et nous regardons en particulier si elle est *simple* et *isolée*, c'est à dire si elle nécessite ou non des adaptations des propriétés du cours utilisées, ou des mélanges de plusieurs propriétés. En général, des adaptations sont nécessaires avant de pouvoir appliquer les théorèmes vus dans le cours.

Nous avons retenu quatre grands types d'adaptations possibles, qui constituent différents *niveaux de mise en fonctionnement* des propriétés (notés NMF par la suite dans les grilles d'analyse), classés par ordre de complexité selon nous :

- la simple reconnaissance des modalités d'application d'un théorème ;
- la nécessité de faire des calculs intermédiaires (par exemple nommer un point, donner la valeur d'un angle) ;
- la nécessité d'introduire des étapes (dans le calcul ou la démonstration) non indiquées par l'énoncé ;
- la nécessité de faire des choix (méthode, point de vue, etc.).

Nous avons pris en compte d'autres variables liées à la notion étudiée, en particulier :

- les connaissances anciennes pouvant intervenir (géométriques ou algébriques) ;
- la configuration géométrique dans laquelle se situe l'exercice.

[48] Il faut bien admettre que ce choix est dû aussi à une part de hasard :il n'a pas été si facile de trouver des professeurs acceptant de nous laisser filmer leurs cours. Nous avons pu tout d'abord obtenir l'accord d'un professeur, filmé sur le chapitre des triangles semblables, et il nous a paru judicieux de conserver ce chapitre pour la suite de nos observations.

Pour justifier ces choix, il nous faut préciser que nous avons pris en compte tout ce qui nous paraissait avoir une influence en termes d'activités pour les élèves, parmi les textes des exercices proposés[49].

Les activités des élèves dépendant aussi des choix de gestion, nous nous sommes aussi intéressées aux déroulements associés à chacune de ces tâches. Pour affiner notre analyse des activités des élèves, nous avons donc essayé de regarder précisément, pour une certaine tâche proposée par le professeur, comment ses interventions redéfinissaient la tâche initiale – en la simplifiant ou bien en la modifiant à l'aide de l'introduction d'éléments nouveaux. Nous en déduisons ce qui a pu constituer – toujours a minima et a maxima – les activités des élèves sur cet ensemble de sous - tâches, redéfinies à partir de la tâche initiale par les aides de l'enseignant. Cela nous permet de repérer en particulier ce qui a été pris en charge par le professeur, ainsi que ce qui a pu faire l'objet d'un travail autonome des élèves. Nous prenons en compte pour chaque tâche analysée :

- le temps passé sur la tâche, et sur les différentes étapes de l'activité ;
- les formes de travail adoptées (magistral, en groupe ou individuel) ;
- les aides dispensées par le professeur, et la façon dont elles viennent modifier la tâche prescrite (à quel moment de l'activité elles interviennent, et si elles en changent ou non la nature).

Finalement, ce sont les adaptations, autonomies et initiatives laissées aux élèves qui nous intéressent, et nous permettent de déterminer au plus près leurs activités potentielles en classe. Par exemple, la prise en compte des temps de silence du professeur nous indique une recherche individuelle potentielle pour les élèves[50].

Afin d'évaluer les apprentissages des élèves, nous avons relevé les copies du contrôle sanctionnant la fin du chapitre sur les triangles semblables, dont l'énoncé a été composé par l'enseignant. Nous analysons les tâches proposées avec les mêmes variables que précédemment. Pour affiner notre interprétation des résultats au contrôle, en relation avec ce qui s'est passé en classe, nous avons choisi de classer les élèves en deux catégories, "bons" et "mauvais", à partir de leurs réponses au contrôle analysé, mais aussi à l'aide de leurs résultats sur l'année, des appréciations de leur professeur, et de leur orientation pour la

[49] Nous avons choisi de retenir la variable "configuration géométrique" suite à l'analyse des manuels scolaires exposée plus loin, car nous avons constaté qu'à différentes configurations étaient associés généralement différents types de tâches, connaissances anciennes, et niveaux de mise en fonctionnement.

[50] Mais cela peut se discuter : les élèves peuvent être actifs pendant que le professeur parle (tout dépend de ce qu'il dit) et ne pas l'être quand il se tait (et attendre).

classe de première. Nous avons voulu par ce classement nous donner les moyens de mesurer un éventuel effet différentiateur des pratiques sur ce chapitre.

Ici il faut prendre quelques précautions. Évidemment, si cette classification nous a paru nécessaire pour établir des résultats dans notre recherche, elle ne nous sert pas à porter un jugement sur les élèves, mais plutôt à comprendre pour lesquels d'entre eux certains types de gestion semblent bénéfiques. Nous voulons voir si les meilleurs élèves de la classe tirent différemment parti de ce que propose le professeur, mais nous ne savons pas si ce sont des bons élèves parce qu'ils ont tiré parti de ce qui s'est fait en classe, ou bien s'ils ont tiré parti de ce qui s'est passé en classe parce qu'ils sont de bons élèves !

Nous avons ensuite comparé les résultats obtenus dans les trois classes pour affiner nos interprétations.

5. Nos questions de recherche reformulées.

Pour reformuler nos questions de départ, et compte tenu de la méthodologie choisie, nous nous demandons si différentes organisations du travail en classe engagent différemment les apprentissages des élèves. Qu'est-ce qui a pu éventuellement manquer à certains élèves en classe, lorsque l'apprentissage visé n'a pas eu lieu ? Peut-on distinguer des types de manques ?

Nous pouvons déjà distinguer d'éventuels manques liés aux programmes scolaires de ceux qui seraient en rapport aux énoncés proposés et déroulements en classe. Nous savons déjà par exemple que les discours métamathématiques des enseignants sont divers (Pariès, 2004), ainsi que les validations dans les phases de conclusion (Margolinas, 1992) et nous soupçonnons qu'ils ont des rôles différents dans les apprentissages. S'il y a un manque du côté des programmes, on peut penser par exemple qu'un manque de technologie associé à une technique peut engendrer une accentuation de phénomènes de contrat (les élèves n'ayant pas d'autre méthode) et que plus généralement un vide didactique peut engendrer une grande diversité des pratiques. Y a-t-il d'autres types de manques et comment les révéler ?

Pour répondre à ces questions, nous déclinons cette recherche suivant trois axes, qui vont faire l'objet des analyses présentées ici : l'influence des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes, l'influence des pratiques sur les activités possibles des élèves, et enfin l'influence de ces activités sur les apprentissages en mathématiques.

II. L'influence des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes.

Pour pouvoir vérifier l'hypothèse, issue de la double approche, selon laquelle la composante institutionnelle du métier a une réelle influence sur les pratiques, nous avons dans un premier temps analysé les programmes scolaires, ainsi que les accompagnements et manuels pour la classe de seconde.

1. Analyse des programmes scolaires.

Avant d'analyser le programme de 2000, en vigueur au moment de nos observations, nous avons étudié l'évolution des programmes scolaires en France, en mathématiques, depuis le début du XXème siècle. On trouve les triangles semblables dès 1902, avec des démonstrations "à la Euclide", puis, à l'aide des transformations, introduites en 1945. Les triangles semblables disparaissent ensuite pendant une trentaine d'années avec la réforme des Mathématiques Modernes, pour réapparaître en 2000, en classe de seconde, peu avant nos premières observations. Le chapitre est enseigné en classe de seconde, mais nous nous sommes aussi intéressées à ce qui était fait en géométrie auparavant au collège, puis après la seconde, pour pouvoir replacer l'enseignement de cette notion dans une progression.

Au collège, les élèves étudient les figures élémentaires et leur propriétés caractéristiques, les isométries, les théorèmes de Pythagore et de Thalès (et les phénomènes d'agrandissement réduction). Ils abordent aussi la trigonométrie, à travers des calculs d'angles et de longueurs. Après la seconde, les triangles semblables ne sont plus au programme[51], mais on trouve l'étude des similitudes en terminale dans le chapitre sur les nombres complexes.

Dans le programme de seconde de 2000 pour la classe de seconde, les triangles isométriques sont associés aux triangles semblables, et ces deux chapitres sont présentés comme une opportunité de réviser la géométrie apprise au collège. Les triangles isométriques peuvent être introduits par les cas d'égalité d'Euclide ou par les transformations, avant l'introduction des triangles semblables. Pour ces derniers, la définition donnée par les programmes est : *deux triangles sont semblables si leurs trois angles sont égaux*[52]. Ce n'est pas la définition donnée par Euclide, qui définissait les

[51] Ce qui incite certains enseignants de seconde à ne pas la traiter !

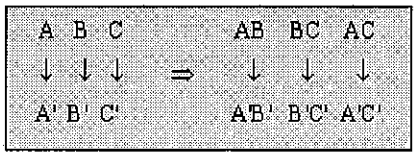
[52] On utilisera généralement la première condition nécessaire et suffisante de similitude (C1) en remarquant que deux angles égaux seulement suffisent.

triangles semblables à la fois par l'égalité des angles et la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles[53]. On démontre la proportionnalité des côtés en appliquant le théorème de Thalès, dans une configuration obtenue à l'aide d'isométries bien choisies.

Deux autres caractérisations des triangles semblables sont aussi proposées, à l'aide des côtés et / ou des angles des triangles : *deux triangles qui ont un angle identique, compris entre deux côtés respectivement proportionnels sont semblables(C2)* et *deux triangles qui ont leurs côtés respectivement proportionnels sont semblables (C3).* On trouve aussi la réciproque de C3 (proportionnalité des côtés des triangles semblables) dans les exercices de ce chapitre. Enfin, la propriété sur le rapport des aires des triangles semblables est à connaître. Il est précisé qu'aucune nouvelle transformation ne doit être introduite à l'occasion de ce chapitre, ce qui, compte tenu du travail préalable des élèves au collège, uniquement sur les isométries, ne leur donnera pas les moyens de trouver la transformation qui permet de passer d'un triangle à un autre semblable (les homothéties, par exemple, ne sont pas connues des élèves de seconde).

Les accompagnements des programmes scolaires de 2000 pour la classe de seconde suggèrent plusieurs orientations pour l'apprentissage de la géométrie, en particulier en veillant à établir le statut des énoncés, à suivre une démarche logique, à respecter la continuité avec le collège et à s'appuyer sur la perception.

Comment, à partir de ces recommandations, choisir d'introduire les triangles semblables ? Si on essaie de faire le lien entre le chapitre des triangles isométriques et celui des triangles semblables, comme le font les programmes, on peut envisager d'introduire le second chapitre à travers la démarche d'Euclide, comme une extension de la notion de triangles isométriques. Cependant, comme nous l'avons dit, la transformation entre deux triangles semblables ne peut être exhibée, même si elle reste sous-jacente à cette notion, ne serait-ce que dans l'exigence d'écriture que l'on trouve dans les classes observées, les sommets homologues les uns en dessous des autres :



[53] Il y a peut-être là un choix de définition lié à la nature des problèmes traités en seconde dans ce chapitre, comme on le verra : un travail des angles vers les longueurs le plus souvent.

Ce repérage, bien qu'incontournable dans la plupart des exercices du chapitre, n'est pas une tâche évidente, surtout dans certaines configurations géométriques où les deux triangles sont emboîtés l'un dans l'autre et ont des sommets communs (cf. exercice du contrôle exposé plus loin). L'écriture proposée permet assez facilement de passer des sommets homologues aux côtés homologues, lorsque l'on connaît les égalités d'angles, mais elle est fondée sur un implicite, qui est le caractère affine des similitudes. Comment fait-on dans l'autre sens, pour passer des rapports de longueurs aux sommets homologues ? Le théorème précisant que dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle n'est présenté ni dans les manuels, ni dans les classes, alors qu'il était donné avant la réforme des mathématiques modernes. Or il paraît plus simple de classer les côtés suivant leur longueur, plutôt que les angles suivant leur mesure, et ensuite d'en déduire les sommets homologues[54] :

AB	< BC	< AC		A	B	C
↓	↓	↓	⇒	↓	↓	↓
A'B'	< B'C'	< A'C'		A'	B'	C'

Derrière cette écriture, les transformations sont à l'œuvre, mais ne peuvent être utilisées. Cette propriété ne contient pas la technique et encore moins la technologie qui permettrait une automatisation de l'écriture. La technique pourra reposer sur un contrat (ou plusieurs) mais pas la technologie. Voici un exemple de contrat trouvé dans les classes : les sommets homologues sont toujours donnés dans le "bon ordre" par l'enseignant, ce qui permet de contourner la difficulté du repérage.

Dans les programmes et instructions, rien n'est précisé, aucune technique n'est donnée pour ce repérage. Qu'en est-il dans les manuels ? Comment les difficultés ou manques repérés dans les programmes y sont-ils pris en charge ?

2. Analyse des manuels scolaires.

Les manuels scolaires sont eux aussi influencés par les programmes, et les enseignants en utilisent souvent un ou plusieurs pour leur classe. Il nous a donc paru judicieux de regarder comment les manuels conformes au programme de 2000 traitaient la notion de triangles semblables, et plus précisément comment ils s'emparaient du problème de repérage des

[54] On sait ici, en considérant le plus petit côté, que le point A est homologue au point A' ou au point B', car au segment $[AB]$ correspond le segment $[A'B']$; et en utilisant le plus grand côté, on déduit que A est l'homologue de A' ou de C', donc finalement du point A'.

sommets homologues. Nous avons analysé 10 ouvrages, soit quelques 400 exercices, pour les comparer. Nous avons pris en compte la partie cours, dans laquelle nous n'avons pas trouvé de justification ou de technique de repérage - si ce n'est la consigne d'écriture déjà mentionnée - et l'ensemble des exercices proposés, dont nous avons analysé les tâches avec les mêmes variables que celles utilisées pour analyser les exercices proposés par les enseignants en classe.

En ce qui concerne le repérage des homologues dans les exercices (Fig. 1), on peut remarquer que sur les 426 exercices analysés, les sommets sont donnés 216 fois dans l'ordre, et 210 fois dans le désordre (ou non donnés). Il n'y a donc manifestement pas de prise en charge par l'énoncé de la difficulté du repérage, mais il serait intéressant de regarder comment cette donnée évolue, si les programmes restent inchangés. Ici, nos résultats sont peut-être liés à la relative nouveauté de la notion étudiée dans les programmes (et donc dans les manuels).

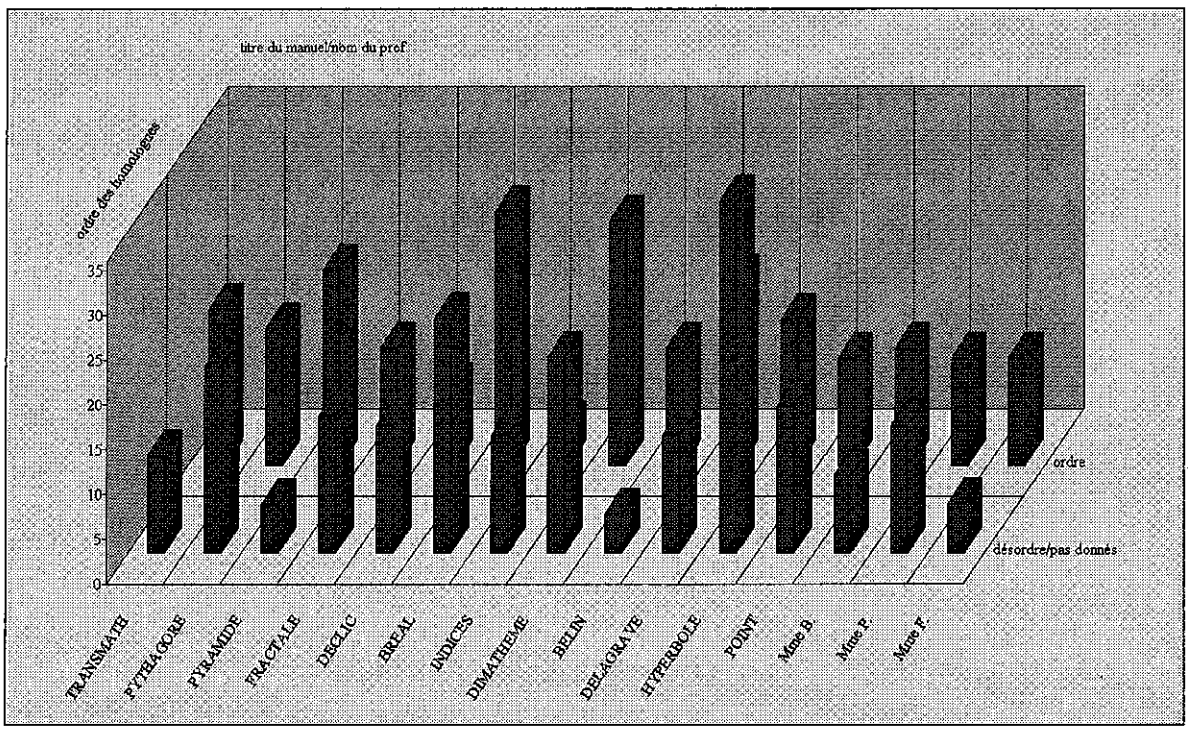


Figure 1 : traitement des sommets homologues dans les exercices des manuels et par les enseignants.

Plus généralement, nous avons regardé pour chaque manuel la complexité et la variété des tâches proposées (Fig. 2). Nous avons dressé, à l'aide du logiciel SPAD d'analyse de données, les tableaux suivants, dans lesquels nous avons comparé les niveaux de mise en fonctionnement à mobiliser dans les tâches des différents manuels et celles proposées par

les trois enseignants observés. Nous pouvons remarquer que les niveaux les plus simples sont généralement les plus travaillés.

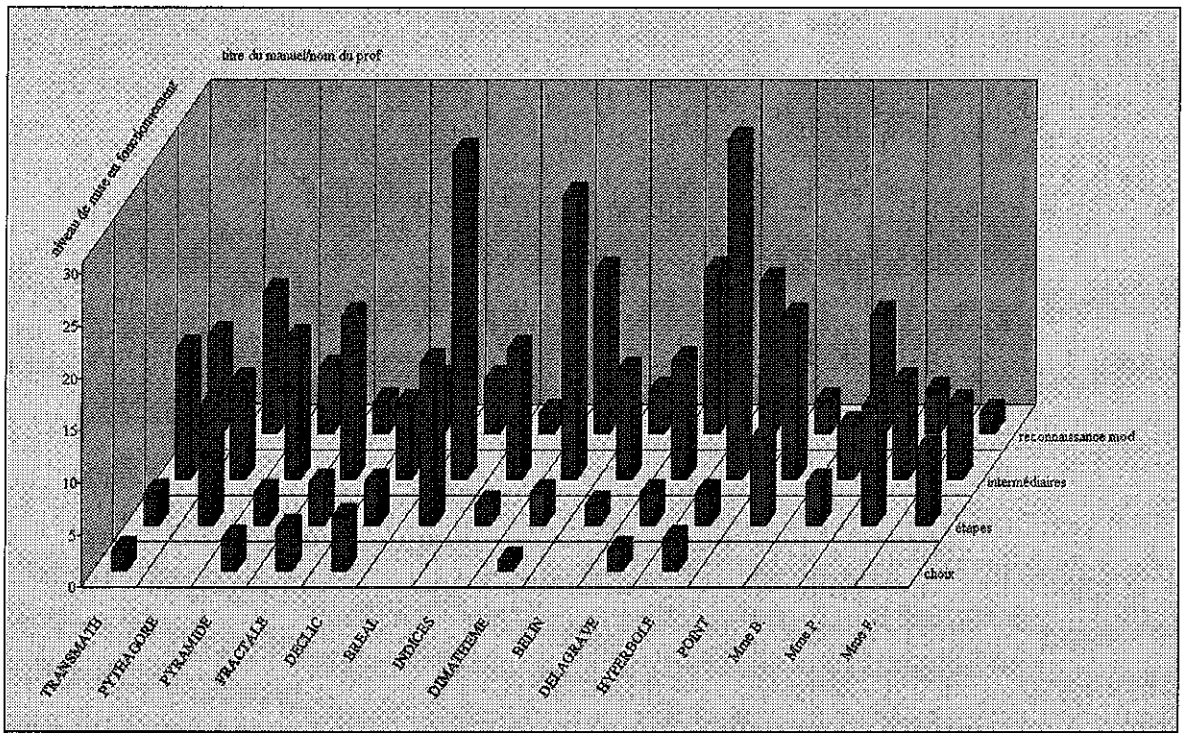


Figure 2 : niveau de mise en fonctionnement des propriétés nouvelles dans les manuels et dans les exercices proposés par les enseignants.

Enfin, nous avons cherché quelles propriétés, parmi les nouvelles, étaient utilisées dans les exercices de manuels (Fig. 3), en regardant si les problèmes posés permettaient de travailler le passage de l'égalité des angles aux rapports de longueurs, ou réciproquement. Nous avons ainsi constaté que certaines propriétés des triangles semblables étaient très peu travaillées. En particulier les tâches permettant de passer des longueurs aux angles sont moins représentées dans les manuels et dans les classes, et rarement avec un niveau de mise en fonctionnement très élevé.

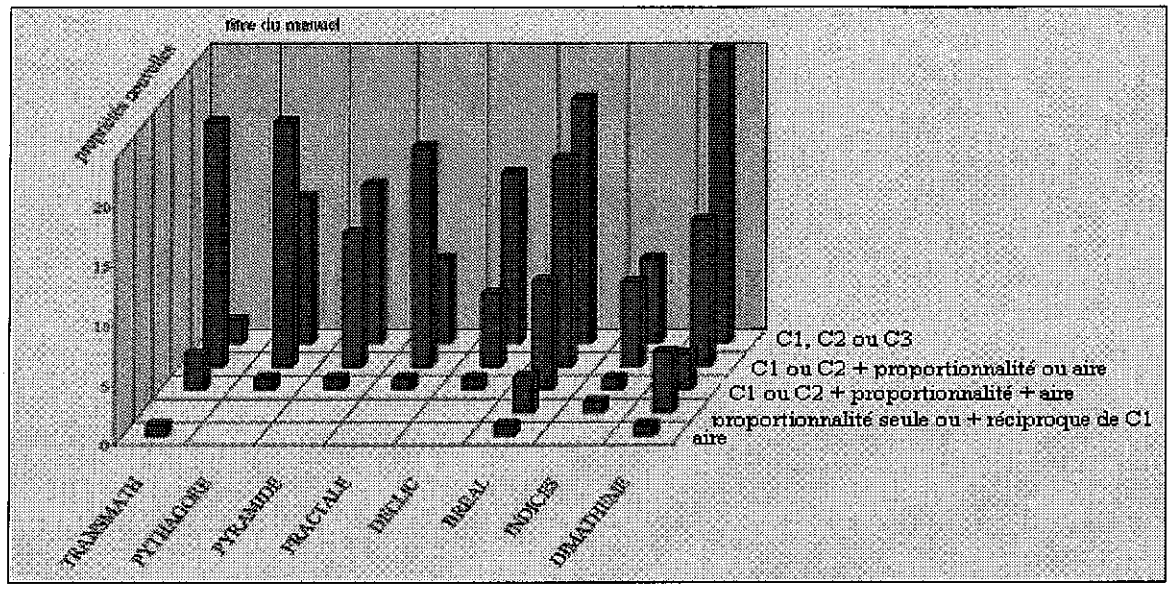


Figure 3 : travail des propriétés nouvelles dans les manuels.

En conclusion de ces analyses, nous retiendrons particulièrement que le lien entre triangles isométriques et triangles semblables est fait dans les programmes (et donc dans une certaine mesure dans les manuels), mais que la continuité entre triangles isométriques et semblables n'est pas évidente, étant donné qu'on dispose des transformations pour traiter l'un et pas pour l'autre. Les transformations sous-jacentes aux triangles semblables ne peuvent pas être évoquées, mais les notations y correspondent tout de même.

D'autre part, d'après l'analyse des manuels, certaines propriétés et difficultés sont peu travaillées, en particulier, on y trouve peu d'exercices sur l'association des côtés homologues. De plus, si on regarde l'utilisation faite des triangles semblables dans les exercices, on constate que bien souvent le recours au triangles semblables n'est pas un outil indispensable (on peut avoir recours à la trigonométrie par exemple). Il serait intéressant pour nous de regarder l'évolution éventuelle des manuels de 2004, où il est possible par exemple, que la proportion d'exercices où les sommets sont donnés dans le bon ordre soit plus importante[55].

Notre analyse des programmes et des manuels nous a permis de constater qu'il n'y avait pas de méthode ou de justification proposée pour associer les éléments homologues des triangles semblables. Et pour cause : il "manque" des mathématiques pour pouvoir justifier et expliquer ce repérage. Or c'est une tâche que l'on retrouve dans de nombreux exercices de ce chapitre. Cette absence a certainement des conséquences sur la notion introduite dans

[55] Cela reste à vérifier !

l'enseignement de seconde, ce qui sera confirmé par les résultats obtenus dans les classes. Là encore, un lien éventuel avec la nouveauté du chapitre est à faire, et il nous faudrait vérifier - si les programmes ne changent pas - si les pratiques enseignantes ont évolué sur ce point.

Quelles difficultés cela va-t-il engendrer pour les élèves ?

III. Ce qui se passe en classe.

Les trois enseignants observés, Mme B., Mme P. et Mme F. ont pour premier point commun d'avoir eu la gentillesse d'accepter de laisser entrer une caméra dans leur classe !

1. Influence de la composante institutionnelle sur les pratiques.

Nous avons tenu compte, pour interpréter les choix des enseignants, du niveau de leur établissement et de leur expérience. Mmes F. et P. ont une longue expérience dans l'enseignement, et enseignent dans des établissements de bon, voire très bon, niveau. Mme B. a moins d'expérience et enseigne dans un lycée assez faible.

Nous avons regardé aussi comment les trois enseignants avaient choisi d'introduire les triangles semblables, ce qui nous a permis de constater la variété des introductions possibles. Le lien avec les triangles isométriques n'est pas fait de la même façon : Mme P. par exemple a laissé passer plusieurs mois entre les deux chapitres. Nous n'avons pas pu cependant mesurer l'influence de ces choix d'introduction sur les apprentissages des élèves.

En ce qui concerne le repérage des sommets homologues, nous n'avons pas trouvé de discours ni de méthode chez les trois enseignants. Peut-être aurait-il fallu observer aussi le chapitre sur les triangles isométriques, mais nous ne l'avons fait que dans l'une des trois classes, sans y trouver plus d'éléments sur le sujet.

Lors des observations des deux derniers enseignants en 2005, dans le cadre du DEA, nous avons remarqué que les sommets étaient toujours donnés dans l'ordre en classe, or, lors du contrôle, ce n'était pas toujours le cas, et cela a visiblement posé de gros problèmes aux élèves, étant donnés leurs résultats médiocres à ces questions du contrôle.

Nous avons repéré des régularités dans les pratiques enseignantes sur ce chapitre, liées aux horaires (le temps passé sur le chapitre est sensiblement le même dans les trois classes), aux manuels (certains des exercices proposés, tirés de manuels, sont communs aux trois classes) et aux programmes (en rapprochant les difficultés de traitement du repérage des

homologues à un manque dans les programmes sur ce sujet). Cela confirme pour nous l'importance de l'influence de la contrainte institutionnelle sur les pratiques enseignantes.
Mais les choix des enseignants diffèrent parfois, par exemple en ce qui concerne la façon d'introduire la notion nouvelle, et probablement, comme nous allons le vérifier dans les classes, en terme de contenus et de déroulements. On pourrait mettre en relation ces variabilités entre professeurs avec le niveau des élèves.
Les activités des élèves sur cette notion sont-elles alors analogues ?

2. Influence des composantes cognitives et médiatives sur les activités des élèves en classe.

Comme nous l'avons annoncé dans notre méthodologie, nous faisons pour chacun des trois enseignants un bilan a priori de toutes les tâches qui ont été données en classe, (en classe entière, en module à la maison ou en contrôle) en terme de complexité (Tab. 1). Nous pouvons ainsi voir que le niveau des exercices proposés n'est pas le même suivant les professeurs, mais aussi pour un même professeur, suivant le type de travail. On pourrait rapprocher cela du niveau et des habitudes de l'établissement, par exemple.

type de tâches	Mme B.	Mme P.	Mme F.
en classe (complexité a priori)	simples	complexes	complexes
en demi classe (complexité a priori)	complexes	complexes	complexes
à la charge des élèves en classe (compte tenu du déroulement)	simples	complexes	simples
à la maison	simples	simples ou complexes	complexes
en contrôle	complexes	complexes	simples

Tableau 1 : bilan des tâches proposées dans les trois classes.

Mais une analyse des tâches seules ne nous permet pas de tirer des conclusions sur ce qu'on pu faire les élèves en classe, et il nous faut savoir à quel type de déroulement en classe les tâches sont associées. Nous regardons donc les aides fournies par les professeurs aux élèves pendant le travail en classe. Ces aides vont modifier plus ou moins la tâche prescrite, et, suivant le moment où elles interviennent, elles peuvent changer la nature des activités

possibles des élèves. Cela nous permet de savoir ce qui reste potentiellement à la charge des élèves, et, par conséquent, de mieux comprendre ce qui a pu être fait en classe. Ici par exemple les tâches a priori complexes de Mme F. se sont transformées en tâches simples compte tenu du déroulement.

Si nous comparons la complexité des tâches à la charge des élèves, avec celle des tâches du contrôle, nous remarquons ici encore un certain écart, dans certaines classes, entre ce qui a été fait en classe, et ce qui est demandé lors du contrôle. Il y a là une limite – très frustrante !- de la méthodologie : l'évaluation construite par l'enseignant ne permet pas toujours de répondre à certaines de nos questions. Ici par exemple, nous ne pouvons pas déterminer à partir des résultats au contrôle, si les élèves de Mme F savent résoudre seuls des tâches complexes. Pour savoir quelle influence les pratiques peuvent avoir sur les apprentissages il faudrait que le chercheur puisse poser un contrôle à partir de ce qui a été fait en classe, pour pouvoir comparer systématiquement ce qui a été fait et ce qui est évalué, mais nous n'avons pas pu le faire, faute de temps[56].

Nous constatons dans les trois classes des différences en terme de variété et de complexité des tâches proposées aux élèves sur les triangles semblables, et nous nous demandons évidemment quels sont les effets de ces choix sur les apprentissages des élèves.

Pour chaque tâche proposée en classe, nous renseignons les variables retenues, pour l'analyse de la tâche elle-même, mais aussi l'analyse du déroulement associé, par exemple ici pour l'un des exercices proposés dans la classe de Mme B. :

analyse de la tâche a priori				analyse du déroulement associé			
configuration	notions		NMF[57]	tps de silence	aides dispensées par l'enseignant		
	anciennes	nouvelle			sur quoi	quand	comment
triangles non emboîtés	somme des angles d'un triangle	C1	Calcul intermédiaire	2'55 au début	entrée dans la tâche, puis méthode	après un temps de recherche individuelle	questions ouvertes, rappels de cours, rappel de la consigne

Tableau 2 : analyse des tâches d'un exercice posé en classe (Mme B.).

[56] Le contrôle devant avoir lieu suffisamment rapidement après la fin du chapitre, pour ne pas perturber les habitudes de l'enseignant pour sa classe. En revanche, lors des deux observations du DEA de Cisse et Corlay, l'énoncé du contrôle a été donné par les chercheurs, et cela a permis de mettre mieux en évidence à travers les erreurs des élèves, l'influence de certaines pratiques.

[57] Niveau de Mise en Fonctionnement.

Pour préciser l'influence des choix de gestion sur les activités possibles des élèves, nous avons détaillé le déroulement de la résolution d'un exercice donné dans la classe de Mme F. (Tab. 3), en utilisant un grisé de plus en plus clair au fur et à mesure que la tâche initiale est simplifiée par les interventions de l'enseignant (cf. légende des niveaux de gris).

Intervention du professeur redéfinissant la tâche
Travail potentiel des élèves : choix et étapes
Travail potentiel des élèves : calcul d'intermédiaires
Travail potentiel des élèves : reconnaissance
Travail potentiel des élèves : correction, copie

Légende des niveaux de gris utilisés.

0 min 30	Ecriture de l'énoncé au tableau par l'enseignant Calcul d'intermédiaires (comparaison des angles), mélange de C1 avec l'ancien (angle inscrit)
0 min30	Indication: il faut repérer les homologues
0 min30	Reconnaissance des modalités (repérage) et mélange avec l'ancien (angle inscrit)
0 min30	Indication : chercher un théorème plus ancien
0 min30	Un élève donne un paire d'homologues
1 min	Indication : le professeur donne l'autre paire d'homologues
0 min 30	Un élève donne l'ancien (angle inscrit)
1 min 30	Le professeur fait un rappel de cours sur l'ancien
4 min	Correction, les élèves copient

Tableau 3 : déroulement et influence sur les activités possibles des élèves (Mme F.).

Ici, l'énoncé seul ne nous aurait pas forcément renseigné sur ce sur quoi l'élève a potentiellement travaillé pendant les 9 min 30 qu'a duré cet exercice : en effet, la tâche qui nécessitait a priori un calcul intermédiaire et un mélange avec l'ancien, a rapidement été transformée en adaptation plus simple par l'enseignant.

C'est cette prise en compte du déroulement précis de la résolution de la tâche qui nous permet de mettre en relation les activités possibles des élèves en classe à leur résultats à un contrôle.

IV. Influence des activités possibles des élèves sur la réussite à un contrôle.

Pour illustrer maintenant l'influence de ces activités sur les apprentissages, nous présentons un exercice de contrôle donné dans l'une des trois classes, que nous analysons et mettons en parallèle avec les activités préalables des élèves sur les triangles semblables.

Cela va nous permettre d'interpréter les échecs et réussites des élèves à ce contrôle, et de dégager peut-être, des organisations du travail en classe qui sont plus ou moins bénéfiques pour l'ensemble des élèves.

1. Exemple de mise en parallèle des tâches du contrôle avec les tâches proposées en classe.

Enoncé d'un exercice de contrôle (Mme B.) :

On considère un cercle (C) et MNP un triangle inscrit dans ce cercle.

La bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$ coupe [NP] en D et (C) en E.

1)Démontrer que le triangle MNE et le triangle END sont semblables

2)En déduire que $EN^2 = EM \times ED$[58]

A partir de l'analyse des tâches de cet exercice de contrôle, nous cherchons les exercices faits en classe au cours du chapitre qui ont pu préparer directement les élèves, c'est à dire des tâches similaires : en particulier portant sur une même notion nouvelle, associée aux mêmes connaissances anciennes et à la même configuration géométrique (Tab. 4 et 5). Bien sûr, les habitudes de travail des élèves en classe pour les autres exercices sont à prendre en compte, et l'ensemble des exercices a pu les préparer à chacune des deux questions de cet exercice de contrôle.

[58] Pour résoudre cet exercice, on démontre tout d'abord que les deux triangles sont semblables car ils ont deux angles respectivement égaux (C1), d'une part parce qu'ils ont un angle commun $\widehat{NEM}$, et d'autre part par transitivité, car ils ont tous deux un angle égal à l'angle $\widehat{DMP}$. On utilise l'écriture préconisée et les résultats de la première question pour repérer les sommets homologues (à l'aide des angles égaux) :
E N D
et E M N et on en déduit EN / EM = ED / EN en utilisant la proportionnalité des côtés, puis on obtient l'égalité cherchée en effectuant les produits en croix.

	analyse de la tâche a priori				analyse du déroulement associé			
ex	configuration	notions		NMF	tps de silence	aides dispensées par l'enseignant		
		anciennes	nouvelle			sur quoi	quand	comment
q° 1	**cercle, triangles emboîtés**	**angle inscrit**	**C1**	**calcul intermédiaire**				
A	triangles non emboîtés	égalités d'angles	C1	Reconnaissance des modalités d'application	pas de tps de recherche	méthode, ancien	début	questions fermées
B	cercle, triangles non emboîtés	angle inscrit	C1	Reconnaissance des modalités d'application	module, long tps de recherche	individuelles		
C	cercle, triangles non emboîtés	triangle rectangle et cercle	C1	introduction d'étapes	module, long tps de recherche	individuelles		

Tableau 4 : comparaison des tâches de la question 1 du contrôle avec les tâches en classe.

	analyse de la tâche a priori				analyse du déroulement associé			
ex	configuration	notions		NMF	tps de silence	aides dispensées par l'enseignant		
		anciennes	nouvelle			sur quoi	quand	comment
q° 2	**cercle, triangles emboîtés**	**algèbre sans x**	**Réciproque de C3**	**Reconnaissance des modalités d'application**				
A	triangles non emboîtés	algèbre sans x	Réciproque de C3	Reconnaissance des modalités d'application	pas de tps de recherche	méthode, ancien	début	questions fermées
B	cercle, triangles non emboîtés	algèbre sans x	Réciproque de C3	Reconnaissance des modalités d'application	module, long tps de recherche	individuelles		
C	cercle, triangles non emboîtés	algèbre sans x	Réciproque de C3	Reconnaissance des modalités d'application	module, long tps de recherche	individuelles		

Tableau 5 : comparaison des tâches de la question 2 du contrôle avec les tâches en classe.

Pour la question 1 c'est l'exercice B qui semble être le plus proche de ce qui est demandé au contrôle, parmi tous les exercices qui ont permis un travail préalable de la caractérisation C1. En effet, la configuration est similaire, celle qui a été travaillée en classe étant un peu plus simple cependant, car au contrôle les triangles sont "emboîtés", ce qui ne facilite pas le repérage des sommets homologues. La connaissance ancienne associée est aussi la même dans les deux cas. C'est de plus un exercice pour lequel les élèves ont bénéficié d'un long temps de recherche.

Comment l'organisation du travail en classe pour l'exercice B va-t-elle influencer les résultats des élèves à un exercice similaire en contrôle ? Nous allons voir quels ont été les résultats des élèves à cet exercice de contrôle, et comment les interpréter.

2. Interprétation des résultats du contrôle.

Voilà les résultats des élèves aux deux questions de l'exercice de contrôle exposé ci-dessus (Tab. 6). Nous avons précisé dans les deux dernières lignes du tableau, les résultats des élèves par rapport au nombre d'élèves ayant abordé l'exercice, et en fonction du niveau de l'élève.

contrôle	question 1	question 2
exercices similaires en classe	3 exercices	3 exercices
configuration	la même qu'en classe	la même qu'en classe
notions anciennes	les mêmes qu'en classe	les mêmes qu'en classe
notion nouvelle	Identique	identique
NMF contrôle / classe	**plus difficile**	**plus facile**
type de travail	long temps de recherche	long temps de recherche
bonne réponse / abordé	**10 / 25**	**23 / 25**
bon / mauvais élève	**10 / 0**	**16 / 7**

Tableau 6 : résultats des élèves aux deux questions du contrôle (Mme B.).

La différence de préparation du point de vue des niveaux de mise en fonctionnement des propriétés nouvelles est la principale différence entre ces deux questions du contrôle. De plus dans les deux cas, les élèves avaient bénéficié d'un long temps de recherche, dont on peut supposer qu'il avait pu provoquer des activités réelles sur les propriétés nouvelles en question.

Nous remarquons ici que l'activité la plus réussie a été travaillée en classe avec un niveau de mise en fonctionnement plus simple que celui demandé au contrôle, ce qui n'est pas le

cas de la question qui a été moins bien réussie. Il semblerait donc que les élèves n'aient pas surmonté la difficulté d'un niveau de mise en fonctionnement plus élevé en contrôle, lorsque celui-ci n'avait pas été travaillé lors d'une tâche similaire. En fait, seuls les bons élèves ont réussi cette tâche, et on pourrait penser que la forme de travail adoptée, a pu ne pas être bénéfique pour tous les élèves, bons ou mauvais.

Une autre constatation importante que nous pouvons faire, et qui ne peut pas se lire directement dans ces deux tableaux, est la difficulté de l'enchaînement entre ces deux questions. En effet, cela suppose de réaliser le repérage des sommets homologues dans les triangles, afin d'associer correctement les longueurs des côtés homologues. Cette étape nous donne l'occasion de voir si les élèves ont assimilé cette tâche incontournable. Or ici nombreux sont les élèves qui n'ont pas réussi à démontrer la similitude des deux triangles (question 1), mais qui ont pourtant abordé avec succès la question suivante, qui en découlait. Nous remarquons alors en observant les techniques adoptées dans les copies, que beaucoup reposent sur une sorte de "triche"[59] : certains élèves déduisent les côtés homologues à partir de la réponse finale attendue sur les longueurs, et non de la reconnaissance des sommets. Cela peut être rapproché du fait que le professeur a souvent pris en charge cette étape de la résolution dans la classe. Ce qui s'explique aussi par l'absence d'éléments à ce sujet dans les programmes scolaires de mathématiques.

D'après cet exemple, il semblerait que le découpage en niveaux de mise en fonctionnement soit bien une variable pertinente de l'analyse des tâches pour évaluer les apprentissages des élèves. L'organisation du travail en classe, ici un long temps de recherche individuelle, avec peu ou pas d'interventions du professeur, sans mise en commun, semble n'avoir été bénéfique qu'aux "bons" élèves : il leur a permis de surmonter, lors du contrôle, la difficulté d'un niveau de mise en fonctionnement supérieur à celui qui a été travaillé en classe. Enfin, la difficulté liée au repérage des homologues, qui émergeait de notre analyse de la notion, semble être avérée pour les élèves.

V. Nos résultats et leurs limites.

En réalisant l'analyse précédente pour chacun des trois contrôles, nous avons pu, par comparaison, tirer des conclusions sur les rapports entre le couple *(tâches, déroulement)* en classe et les apprentissages des élèves. De plus, nous avons pu établir des résultats sur la

[59] Même s'il n'est jamais inutile de tenir compte du résultat attendu ! Ici cela semble surtout permettre aux élèves de contourner la difficulté du repérage des homologues.

variété et la stabilité des pratiques sur ce chapitre, que nous ne détaillerons pas ici (Horoks 2006).

Pour comparer nos analyses pour les trois enseignants, nous nous sommes cependant retrouvée confrontée à un problème, lié aux grandes différences de niveau entre les trois classes. Pour contourner ce problème, nous avons choisi de comparer les trois contrôles en essayant de repérer dans chaque cas les exercices de contrôle le mieux et le moins bien réussis, ainsi que celui où les résultats des élèves sont les plus hétérogènes.

1. Les apprentissages en lien avec les activités possibles des élèves.

En ce qui concerne ce qui caractérise l'exercice de contrôle le mieux réussi, nous pouvons voir dans chacune des trois classes qu'il est associé à une préparation préalable en classe, à travers des applications plus difficiles ou de même difficulté que celle du contrôle, et parfois même à travers une répétition d'applications similaires. Dans les trois cas, il s'agissait d'un exercice nécessitant l'application de la caractérisation C1 (dans sa version simplifiée) qui est la propriété qui a été travaillée le plus souvent dans les classes. C'est aussi celle que l'on retrouve le plus fréquemment dans les exercices des manuels. Enfin, dans les trois cas, l'exercice en classe qui se rapproche le plus de celui du contrôle a été réalisé dans des conditions où l'élève peut bénéficier d'un certain temps de travail individuel (travail en module ou à la maison).

Il semble donc que les élèves sont capables de réaliser seuls certaines tâches lorsqu'ils y ont été réellement confrontés au préalable, et qu'ils ont eu à les travailler par eux-mêmes, alors qu'elles étaient associées aux mêmes connaissances et dans des configurations similaires à celles du contrôle. Nous remarquons par ailleurs que lorsque le travail préalable en classe n'est pas aussi difficile que celui qui est attendu au contrôle, les élèves échouent au contrôle de manière significative, et ce quelle que soit la forme de travail adoptée en classe. Cela semblerait indiquer que les connaissances des élèves ne sont pas transférables à des niveaux de mise en fonctionnement plus élevés.

Pour ce qui caractérise l'exercice de contrôle le moins bien réussi, la comparaison des trois classes ne donne pas de critères immédiats. Les exercices qui ont posé plus de difficultés aux élèves portent sur des applications de propriétés différentes. Mais en cherchant plus avant, nous pouvons constater qu'il s'agissait dans les trois cas de questions qui nécessitaient un repérage non trivial des homologues de la figure. Cette difficulté avérée

pour les élèves n'est pas liée uniquement à l'organisation du travail en classe par le professeur, mais il s'agit tout de même d'un élément important des choix des professeurs, qui n'ont pas proposé de travail spécifique sur ce repérage. Il nous faut regarder alors plus précisément comment, dans les exercices où ce repérage est indispensable, est prise en charge cette tâche. Est-ce que ce sont les élèves qui en ont l'initiative ? Ou bien est-ce toujours indiqué par le professeur, voire par l'ordre des lettres dans les énoncés ? Dans les trois classes observées, c'est en effet l'enseignant qui prend le plus souvent à sa charge le repérage des homologues.

Nous avons regardé, enfin, ce qui caractérisait l'exercice du contrôle pour lequel les élèves avaient obtenu les résultats les moins homogènes dans chaque classe, c'est à dire ceux pour lesquels il y avait une différence notable entre les réponses des "bons" et des "mauvais" élèves, tels que nous les avions classés. Dans chaque cas, il s'agit d'un exercice qui a été préparé uniquement à travers des activités laissant une plus grande autonomie aux élèves : lors d'un travail à la maison, ou en classe, mais surtout sans intervention du professeur pendant, ou après l'activité[60]. Cela semblerait indiquer que le travail autonome des élèves n'est pas bénéfique de la même façon pour tous les élèves, et cela rejoint les résultats obtenus par Félix (2004).

2. Conclusion et limites.

Nos approximations nous ont permis de répondre aux questions que nous nous posions au départ : nous avons pu en effet souligner l'influence de la contrainte institutionnelle sur les pratiques enseignantes, mais aussi mettre en évidence des liens entre ces pratiques et les apprentissages des élèves. Cela nous a permis de montrer l'influence différenciée des organisations du travail en classe sur la réussite des élèves à un contrôle, et de dégager en particulier différents types de manques pour les élèves (liés à la fois aux programmes et aux activités en classe).

Un premier manque, que nous avions annoncé dès l'analyse de la notion, est celui lié aux programmes et manuels scolaires, et ce quels que soient les choix du professeur en ce qui

[60] Dans l'une des trois classes (celle de Mme B.), l'exercice de contrôle où la différenciation entre les élèves est la plus nette, a été préparé plus spécifiquement à travers une séance de travail en petits groupes, et il nous a été impossible d'observer finement pour chaque élève, voire pour chaque groupe, comment les interventions occasionnelles et personnalisées du professeur pouvaient modifier la nature des activités. Mais nous avons tout de même pu constater lors de cette séance l'absence d'intervention collective pendant et après le travail des élèves - donc d'institutionnalisation - et la mettre vraisemblablement en relation avec les résultats hétérogènes des élèves.

concerne la gestion de sa classe. Ici en effet, le problème du repérage des homologues est avant tout lié à un vide dans le programme (relayé par les manuels) qui n'a visiblement pas permis aux professeurs d'offrir aux élèves une méthode systématique de repérage, et encore moins une justification mathématique de la technique éventuellement indiquée.

Les limitations suivantes concernent davantage des déroulements singuliers. Une limitation éventuelle est le peu de variété des tâches proposées aux élèves par rapport au possible. Dans les classes, certaines applications sont peu travaillées, voire pas du tout, et cela peut être mis en relation avec l'incapacité des élèves à les réaliser seuls par la suite, lors du contrôle. Cela peut être encore une fois rapproché de contraintes institutionnelles : à la fois la nécessité de respecter les horaires, mais aussi l'impossibilité de trouver des exercices adéquats dans les manuels, où l'on retrouve, à une plus ou moins grande échelle suivant les ouvrages, ce même manque de diversité.

En regardant ce qui est réellement dévolu à l'élève, en termes d'entrée dans la tâche, mais aussi en terme d'adaptation des théorèmes, nous constatons que les activités possibles des élèves ne reflètent pas toujours les tâches proposées, compte tenu des interventions du professeur. Ici en effet deux des trois professeurs réduisent, pour des raisons certainement différentes, les activités des élèves à un travail sur des tâches simples et / ou isolées.

Enfin, nous avons pu repérer certains manques liés aux discours tenus dans chaque classe, par exemple dans les discours de validation : le manque d'institutionnalisation chez Mme B., à la suite d'une séance de travail en petits groupes, pourrait être un frein à l'apprentissage des moins bons élèves.

Une question se pose cependant, celle de l'influence du choix de la notion sur nos résultats, et en particulier les effets de son retour récent dans les programmes. D'où la nécessité de regarder comment les pratiques ont évolué depuis cette étude. Les deux dernières observations ont eu lieu quelques années plus tard, et le fait que ces deux enseignants aient donné systématiquement en classe les sommets homologues dans l'ordre n'est peut-être pas une coïncidence !

Bibliographie

Felix C. (2004), Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale.* 33, 89-100

Horoks J. (2006), Les triangles semblables en classe de seconde: des enseignements aux apprentissages – Etude de cas. *Thèse de doctorat, Université Paris 7*.

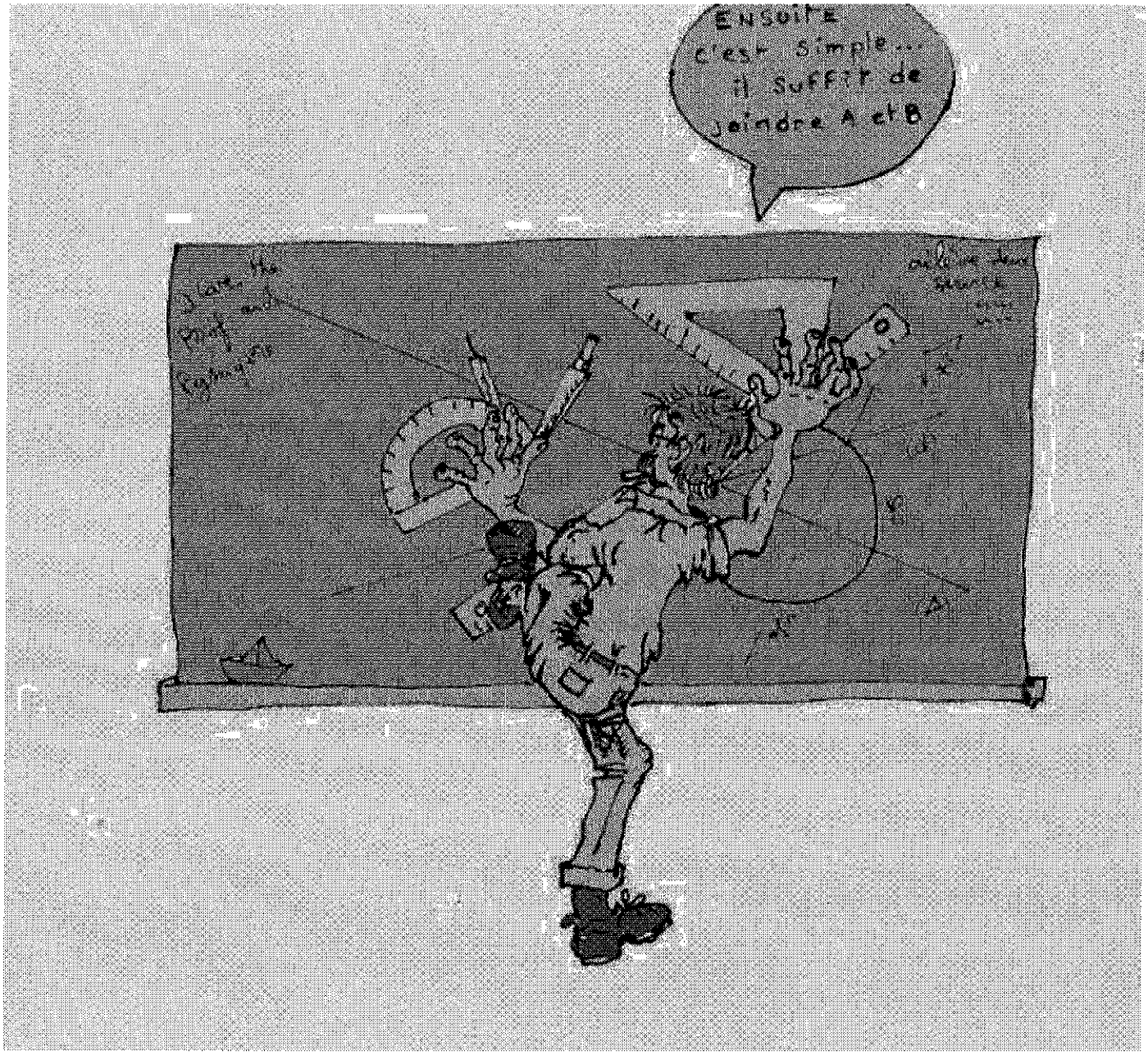
Margolinas C. (1992), Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 12.1,113-158

Pariès M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en didactique des mathématiques.* 24.3, 251-284

Robert A. (2003), Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe. *Petit x.* 62, 61-71.

Robert A. & Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies.* 2.4, 505-528.

Rogalski J. (2005), Piaget et Vygotski : apports croisés pour une approche développementale, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 237-262.


Ensuite c'est simple... il suffit de joindre A et B

Recherches sur l'utilisation et l'intégration des bases d'exercices en ligne dans les classes de mathématiques

Fabrice Vandebrouck
Université Paris 7, équipe Didirem

Y a-t-il une place en didactique des mathématiques pour des recherches donnant toute leur importance, non seulement aux situations scolaires et aux contenus mathématiques en jeu, mais aussi aux sujets singuliers ? Nous essayons de répondre positivement en présentant les résultats de travaux portant sur l'intégration des bases d'exercices en ligne (BEL) dans les classes. Notre enjeu n'est pas théorique même si la spécificité de notre démarche tient à des emprunts aux théories de l'activité et du développement. L'analyse des activités des élèves en classe, telles que les enseignants les organisent, nous fournit les données pour aborder d'une part les pratiques des enseignants, et approcher d'autre part les apprentissages des élèves.

Les théories de l'activité et du développement s'articulent avec tous les outils déjà développés en didactique des mathématiques pour faire des analyses a priori de situations mathématiques proposées à des élèves. Cependant les analyses a priori ne permettent que d'inférer une activité possible des élèves, même lorsque les situations sont analysées compte tenu de déroulement en classe. Les théories purement didactiques prennent peu en compte les sujets particuliers mais traitent des élèves et des enseignants génériques. Elles permettent peu de rendre compte des dynamiques entre les sujets, des situations qui évoluent différemment pour chacun des sujets individuels et l'activité de ces sujets. Du côté des élèves, elles ne permettent pas de rendre compte de l'activité réelle proprement dite et d'avancer en terme d'effets sur les apprentissages. Du côté des professeurs, elles ne prennent pas suffisamment en compte la spécificité des situations professionnelles dans lesquelles évoluent les enseignants, notamment toutes les contraintes liées à l'exercice du métier d'enseignant.

Après une présentation rapide du cadre de notre recherche (paragraphe 1), nous établissons un panorama sur les BEL et sur les résultats de recherche déjà établis (paragraphe 2). Puis nous détaillons les éléments théoriques issus et complétant la théorie de l'activité (paragraphe 3). Ils nous permettent d'une part d'avancer par rapport à ces vieux résultats en terme d'apprentissage des élèves singuliers (paragraphe 4) et d'autre part de mieux

comprendre les pratiques d'enseignants intégrant ces outils dans leurs classes (paragraphe 5). Les travaux de recherches ne sont pas présentés ici dans leur exhaustivité. Seules quelques situations emblématiques sont analysées afin d'illustrer les résultats, tant du point de vue de l'apprentissage des élèves que des pratiques enseignantes. Les détails sont publiés dans l'ouvrage Vandebrouck (2007).

I. Panorama sur les bases d'exercices en ligne et sur les résultats de recherche

Nous appelons base d'exercices en ligne (BEL) pour les mathématiques une ressource Internet qui a les caractéristiques suivantes :

- il s'agit d'une ressource élaborée à des fins d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ;
- elle est disponible en ligne et seul un navigateur Internet est nécessaire ;
- elle est constituée d'exercices de mathématiques organisés selon un certain classement ;
- à chaque exercice est associé un environnement qui peut comporter des aides de différents types, des outils (graphiques, calculatrices...), du cours, mais aussi des analyses de réponses ou la solution complète de l'exercice.

De tels produits, libres ou non, existent pour tous les niveaux scolaires, du CM1 à la maîtrise de mathématiques au moins. Ils peuvent différer grandement suivant leur structure didactique, le type de réponse acceptée ou le type d'interactivité élaborée. Pour plus de détails sur les différences entre BEL, on pourra revenir à notre précédente intervention au séminaire national (Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck, 2004).

Rappelons que les BEL sont de plus en plus nombreuses. Pourtant, alors que l'étude de l'usage des technologies dans l'apprentissage des mathématiques constitue un champ de recherche extrêmement fécond, il existe très peu de travaux spécifiés à l'usage des ressources en ligne. La plupart des articles consacrés aux mathématiques et aux TICE[61] concernent les micromondes ou les CAS (Computer Algebra Systems). Souvent, il s'agit en outre de concevoir et d'expérimenter une situation didactique. Dans de telles situations, le milieu, au sens de Brousseau, inclut l'outil TICE et est en général résistant, produisant des contradictions, des difficultés qui vont permettre l'apprentissage de l'élève. Au contraire, les BEL constituent des milieux alliés qui cherchent à accompagner l'apprenant. Ainsi les ressources en ligne diffèrent des produits le plus souvent étudiés et l'activité mathématique

[61] Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement.

développée par les élèves utilisateurs n'est pas la même. Si bien que les résultats de recherche ne sont pas transférables d'une technologie à l'autre. Enfin, la problématique du chercheur est également différente. Dans le premier cas, il s'agit souvent de proposer une situation didactique et d'étudier son fonctionnement avec l'outil, tandis que dans notre cas, il s'agit d'analyser qualitativement l'utilisation des BEL en classes ordinaires et d'en tirer des informations sur l'activité des élèves et des enseignants avec ces outils.

Des conséquences positives de l'emploi des ressources en ligne ont déjà été observées dans certaines recherches. Ruthven et Henessy (2002) ont par exemple effectué une vaste étude sur l'emploi des TICE dans l'enseignement des mathématiques en Angleterre. Ils notent que les produits de type « drill and practice » (exerciseurs), qui sont des bases d'exercices particulières, permettent un travail adapté au rythme de chaque élève, ainsi qu'un accroissement de la motivation de ces élèves. Dans nos recherches propres (Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck, 2005), nous avons pu confirmer, en partie grâce à l'utilisation de fichiers de trace d'activité des élèves sur les BEL[62], un travail fourni par les élèves, a priori plus important que pendant les séances de classe traditionnelle. Les règles d'action[63] ne sont pas les mêmes. Les élèves, en autonomie sur leur machine, savent que s'ils ne font rien, rien ne se passera et en particulier il n'y aura pas nécessairement de moment de correction collective de leurs exercices. En outre, les élèves ont une plus grande responsabilité vis-à-vis de leurs apprentissages, ce qui peut aussi contribuer à cet enrôlement. Ils peuvent choisir leurs parcours parmi les exercices qu'ils doivent exécuter, décider quand changer d'exercice, décider d'utiliser ou non les aides disponibles, savoir où, quand consulter et que faire des éléments de solutions ou de la correction détaillée. Les données individuelles fournies par les fichiers de traces illustrent d'ailleurs de nombreuses disparités entre étudiants dans la rapidité, la gestion et l'organisation de leur travail. Cependant, nul doute que cette surcharge d'activité par rapport à l'environnement traditionnel peut nuire aux apprentissages de certains élèves faibles, qui ne sauraient se prendre en charge face à une machine qui leur réclame finalement beaucoup d'autonomie.

II. Contexte de la recherche, questions premières

En 2003, la région Ile-de-France a pris l'initiative d'un projet visant à proposer aux trois académies de l'Ile-de-France une expérimentation de l'usage de BEL afin d'en évaluer

[62] Par exemple, Wims, dont l'adresse internet est donnée plus loin, fournit de tels fichiers de traces et nous faisons l'hypothèse que les résultats quantitatifs ainsi obtenus sont transférables d'une BEL à l'autre.
[63] On peut aussi parler de contrats didactiques différents entre les séances ordinaires et les séances machines.

l'impact et l'efficacité en tant que soutien à l'action pédagogique en mathématiques. Le niveau visé était la classe de seconde et les établissements concernés devaient se situer dans des zones socialement défavorisées dont les élèves disposent a priori de moindres ressources que ceux de milieux plus aisés. Elle a souhaité que ce projet fasse l'objet d'un suivi et d'une évaluation universitaires, complémentaires de celle menée par les inspections régionales de mathématiques des trois académies. C'est le groupe TICE de l'IREM Paris 7[64] qui a été chargé de ce suivi. La recherche présentée ici s'appuie sur ce suivi, en particulier sur les observations menées lors des visites de classes.

Les ressources utilisées pour ce projet sont les suivantes : Wims http://wims.auto.u-psud.fr/wims, MathEnPoche http://mathenpoche.sesamath.net/ (MEP), Euler http://euler.ac-versailles.fr/default.jsp et, Paraschool http://www.paraschool.com/portail.

Pour cette recherche, nous analysons l'activité effective (réelle) de certains élèves quand ils travaillent sur des BEL. Nous cherchons à terme à savoir s'ils apprennent vraiment et à comprendre ce qu'ils apprennent vraiment. Nous nous basons sur des observations effectuées aux cours des années scolaires 2004-2005 et 2005-2006 dans des lycées généraux et professionnels. Dans chaque cas, un observateur est placé derrière un élève et note toutes ses actions visibles. Sept observations d'élèves ont été retenue dans notre recherche mais nous n'en avons repris que deux dans ces actes : celles de Fanny et d'Alice sur MathEnPoche. Les observations sont toujours issues de séances de demi groupe ou d'aide individualisée encadrées par un enseignant responsable de la classe. Les élèves y travaillent chacun sur un poste informatique, sur une suite d'exercices choisis par leur professeur (feuille de travail). Les connaissances travaillées sont toujours des connaissances anciennes, voire en cours d'acquisition. L'objectif des enseignants est que les élèves consolident leurs connaissances et donc la question première qui se pose est celle de savoir si cet objectif peut être atteint avec ces outils BEL.

Nous analysons également l'activité des enseignants pendant certaines des séances observées. Les données utilisées proviennent de deux échantillons. Le premier, l'échantillon large, est constitué d'une trentaine de professeurs impliqués dans le projet Région Ile De France. Ils ont été observés soit directement soit indirectement à travers l'activité d'un de leurs élèves. La question première du côté des enseignants est de savoir comment ces derniers intègrent les BEL dans les classes et notamment comment ils

[64] En particulier en 2005-2006 Maha Abboud Blanchard, Michèle Artigue, Pablo Carranza, Claire Cazes, Mariam Haspekian, Françoise Hérault, Daniela Lucas, Fabrice Vandebrouck et Odile Viegas.

articulent le travail machine des élèves avec le travail en papier-crayon. Ces professeurs ont en outre répondu à des questionnaires sur leur utilisation des bases d'exercices en ligne, ce qui nous a permis d'obtenir des informations personnelles, au-delà des observations en classe. Le second échantillon, l'échantillon fin, regroupe six enseignants pour lesquels les données sont plus nombreuses. A ce niveau aussi, pour ces actes, nous n'avons détaillé nos analyses que pour deux d'entres eux : Maurice et Flore et nous étendrons en conclusion nos résultats compte tenu de l'ensemble des observations.

III. Cadre théorique : problématiques liées de l'analyse de l'activité des élèves et de celle des pratiques enseignantes

La théorie de l'activité a été développée par une lignée de chercheurs engagés à la suite de Léontiev et Vygotsky. Elle s'appuie sur deux notions clés : celle de sujet (ici un sujet élève ou un sujet enseignant) et celle de situation. Elle s'intéresse à un sujet individualisé et permet de rechercher, de manière dialectique et compte tenu des situations, des invariants et des spécificités dans les relations entre le sujet et son activité.

La théorie différencie par ailleurs tâche et activité, qui sont respectivement « du côté de la situation » et « du côté du sujet ». La tâche est ce qui est à faire, le but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions (Léontiev, 1984). L'activité est ce que développe le sujet lors de la réalisation de la tâche. Elle est finalisée et motivée : le sujet vise l'atteinte de buts d'action et les mobiles de son activité sont le moteur de ses actions.

L'activité est enfin à la fois productive et constructive (Samurcay et Rabardel, 2004). Par ses actions, le sujet modifie la situation (de façon matérielle ou symbolique) mais se transforme aussi lui-même, en ce sens qu'il se construit des connaissances. Bien que distinctes, activité productive et activité constructive sont indissociables ; selon cette théorie, il n'y a en particulier pas d'activité constructive sans activité productive.

La théorie de l'activité vise ainsi l'analyse des processus en jeu chez le sujet agissant, processus par lesquels son activité évolue et par lesquels le sujet se développe.

1. Le schéma de double régulation de l'activité

Nous rappelons maintenant le schéma de double régulation de l'activité qui recouvre et reprend plusieurs idées générales. Tout d'abord, la notion de régulation renvoie à la dynamique de l'activité et au fait que l'action modifie aussi bien l'état de la situation (résultats de l'activité productive, boucles externes) que l'état du sujet qui agit (effets de

l'activité constructive, boucles internes). L'action qui suivra portera donc sur des états différents. Il y a donc une double régulation de l'activité dans la mesure où l'activité est liée à un double système de déterminants, relevants d'une part de la situation (la tâche et son contexte) et d'autre part du sujet lui-même (ses compétences, son état physique et psychique...).

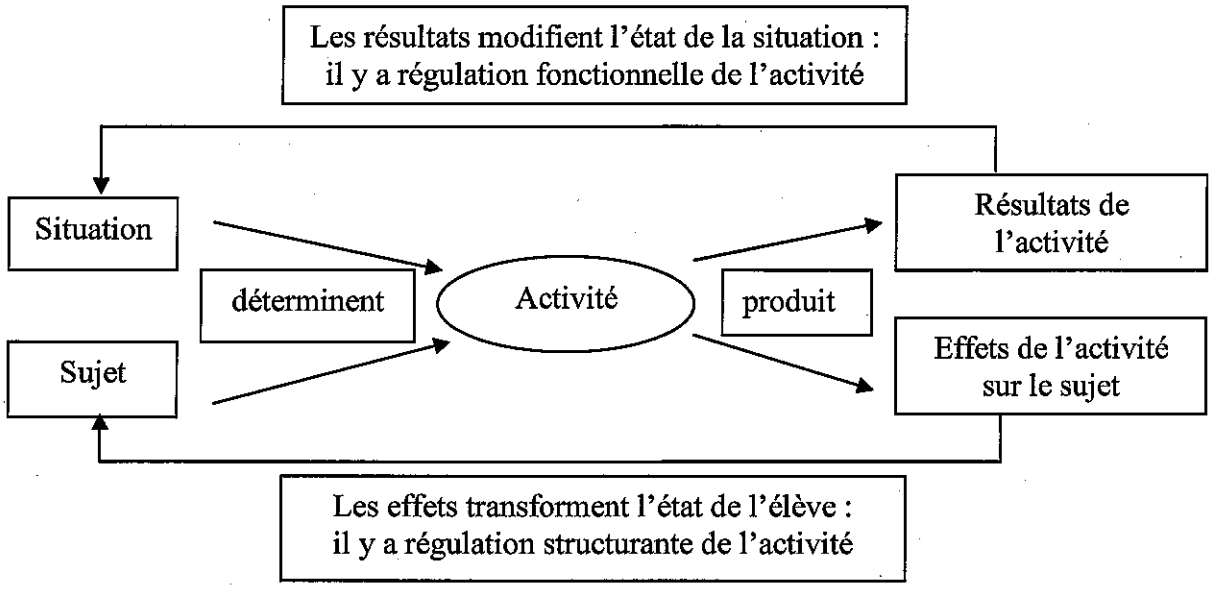


Figure 1 : schéma de la codétermination de l'activité et de la double régulation de l'activité (d'après Leplat, 1997)

2. La situation de l'élève et la situation du professeur

Dans le cas d'un élève travaillant en autonomie sur une BEL, la situation[65] est liée à un exercice proposé par le logiciel et en particulier à une tâche prescrite, avec son environnement logiciel (contexte). Le schéma de double régulation de l'activité nous parait spécifiquement pertinent dans ce cas. En effet, les scénarios d'usage de ces ressources prévoient que les élèves refassent plusieurs fois les mêmes exercices avec des variantes numériques ou fassent parfois des séries d'exercices similaires. L'évolution des résultats de l'activité productive au fil des boucles peut ainsi s'observer et s'interpréter en terme d'activité constructive.

Pour analyser les tâches mathématiques et l'activité potentielle des élèves qu'elles sous tendent, les outils d'analyse développés par Robert (1998) sont importés. Nous retenons

[65] Le mot situation est à entendre au sens du schéma de double régulation et n'a pas la connotation de la théorie des situations didactiques. Cependant, les situations a didactiques au sens de Brousseau peuvent être vues comme des situations construites afin que l'élève développe de l'activité constructive.

essentiellement la nature des mises en fonctionnement de connaissances (Robert, 1998, Robert et Rogalski M., 2002) : les connaissances mathématiques à appliquer doivent-elles être disponibles ou bien sont-elles explicitement appelées par l'énoncé[66] ? Les tâches appellent-elles des applications immédiates de ces connaissances ou bien y a-t-il au contraire des adaptations à effectuer (reconnaissances des modalités d'application, introduction d'intermédiaires, d'étapes, mélanges, mises en relations…) ? Les recherches précédentes ont amené l'idée que les exercices d'applications immédiates des connaissances explicites, bien qu'insuffisants, apparaissent nécessaires à l'apprentissage et que de plus, celui-ci est visible sur un temps court. Les bases d'exercices peuvent ainsi contribuer à favoriser chez les étudiants les moments de routinisation[67] liée à l'apprentissage de nouvelles connaissances et pour lesquels une quantité critique d'exercices doit être exécutée. Idéalement, chaque étudiant peut ainsi atteindre sa quantité critique personnelle, à son propre rythme, par le travail sur des bases d'exercices. Il faut cependant enquêter davantage sur les étudiants qui, dans une logique d'action[68] uniquement, s'attardent trop sur ces exercices.

Nous prenons également en compte dans nos analyses des situations élèves l'environnement logiciel des tâches, c'est-à-dire tous les indices externes ou facteurs instrumentaux qui peuvent constituer des aides ou non à la réalisation des tâches. Les résultats de l'activité « productive »[69] des élèves sont observés à travers les réponses implémentées par les élèves sur les machines. En particulier, les rétroactions du logiciel, aussi bien que les aides du professeur quand il y en a, nous fournissent les données concernant les modifications des situations dans les boucles de régulations.

Dans le cas du professeur, nous étudions l'activité d'enseignants dans des situations spécifiques d'introduction de ressources en ligne dans leurs classes. L'activité du professeur est déterminée par la situation, dont fait partie l'outil informatique mais dans laquelle figure aussi l'institution, le contexte social, la communauté des enseignants et encore les élèves. L'activité du professeur est également déterminée par le sujet lui-même, par ses conceptions et ses représentations. Robert et Rogalski (2002) ont spécifiquement développé et étudié ce système de déterminants dans leur double approche didactique et

[66] On parle alors de niveau de mise en fonctionnement mobilisable (Robert, 1998).

[67] Ce moment rejoint certainement celui dit « du travail de la technique » en Théorie Anthropologique du Didactique.

[68] Nous revenons sur cette terminologie en fin du paragraphe consacré à l'activité des élèves.

[69] La terminologie d'activité productive provient du champ de la didactique professionnelle mais peut s'entendre pour l'élève de façon plus naïve, au sens où l'activité de l'élève produit des résultats : réponses numériques, implémentation…

ergonomique des pratiques enseignantes, en introduisant les composantes institutionnelles, sociales et personnelles des pratiques.

Conformément à cette double approche, l'analyse de l'activité de l'enseignant en séance BEL permet d'alimenter notre connaissance des composantes cognitive et méditative de sa pratique, sans pour autant permettre de les décrire entièrement. Il s'agit ici de situations d'innovation qui se différencient des situations de classe ordinaires où sont généralement mises en évidence la cohérence et la stabilité des pratiques enseignantes (Robert et Rogalski, 2002). Cohérence et stabilité de la pratique d'un enseignant se conjuguent à l'évolution de son activité au fil des situations de classe. Elles ne signifient pas invariance de l'activité enseignante. L'activité évolue avec le temps mais c'est toujours le même sujet qui enseigne, indépendamment des situations (type de séance, niveau d'enseignement...). C'est en cela que les pratiques enseignantes sont stables et qu'une nouvelle question de recherche émerge, qui est d'interroger la robustesse de cette stabilité dans une perspective de formation à des pratiques.

3. Les temporalités de la régulation

Activité productive et activité constructive n'ont pas le même empan temporel. L'activité productive s'arrête à la fin de la réalisation de la tâche alors que l'activité constructive peut continuer bien au-delà. Il existe ainsi des boucles de régulation à différentes échelles de temps.

- à court terme : c'est le temps d'un épisode dans une séance. Dans le cas de l'étude de l'activité d'un élève, un épisode est défini par une tâche prescrite à cet élève et correspond au temps de sa réalisation. Dans le cas du professeur, un épisode dans la séance est défini par une situation d'échange, de dialogue avec un élève, un groupe d'élèves ou la classe entière. Ce temps court de l'action ne sera pas analysé en profondeur pour notre problématique. D'une part, les effets de l'activité enseignante sur les élèves sont trop limités à cette échelle pour pouvoir être interprétés en terme d'apprentissage ou non[70]. D'autre part, les régulations de l'activité enseignante se font en temps réel. Les effets de son activité constructive sur l'enseignant lui-même semblent trop réduits pour qu'il puisse en être conscient et les réinvestir (Rogalski, 2000).

[70] Les résultats significatifs sur le temps court de l'action concernent essentiellement les exercices d'applications immédiates de connaissances, dont nous savons que même s'ils semblent nécessaires, leur potentiel est limité en terme d'apprentissage mathématique sur le long terme.

- à moyen terme, le temps d'une séance ou d'une séquence (succession de plusieurs séances portant sur une même notion) : à ce niveau, les boucles de régulation commencent à intégrer des effets sur le sujet enseignant. Par exemple, l'enseignant peut se rendre compte au fil de la classe de difficultés récurrentes d'élèves dont il n'avait pas conscience et modifier le cours de sa séance en faisant des rappels ou des mises en relations non prévues initialement. Du point de vue des élèves, les régularités observées dans l'activité enseignante peuvent a priori permettre d'inférer aussi quelques effets sur leurs apprentissages.

- à long terme : c'est le niveau des projets, des préparations... Cette échelle est la plus pertinente du point de vue des effets sur les élèves et des effets de son activité constructive sur l'enseignant lui-même. En particulier des genèses d'usage des BEL peuvent être observées. A cette échelle, on peut aussi parler de genèses instrumentales (Rabardel, 1999).

La question émergente évoquée plus haut, difficile, est alors de comprendre comment l'évolution à long terme de l'activité enseignante, liée aux effets de son activité constructive, peut entrer en cohérence avec la pratique globale, en terme des 5 composantes de la double approche notamment.

4. La question de l'apprentissage des élèves et du développement des pratiques enseignantes

Dans notre cadre, les tâches appelant à des adaptations de connaissances sont entendues comme favorisant l'activité constructive des élèves. En effet, si la situation ne nécessite pas d'adaptations des connaissances de l'élève, l'activité « productive » occupe presque tout le paysage, sans générer beaucoup d'activité constructive. Mais quand le sujet ne dispose pas d'une procédure directement accessible pour maîtriser la situation et qu'elle pose véritablement problème à l'élève, celui-ci doit développer une activité constructive, et en particulier se créer ou conceptualiser de nouvelles connaissances (Vergnaud, 2002). La question de l'apprentissage et des régulations structurantes sur le long terme est cependant encore plus complexe. Elle met en œuvre la répétition de l'action (l'exercice au sens premier du terme) dans des situations d'une même classe mais aussi des variables aux mains des enseignants telles que les dynamiques entre phases d'exercices et expositions de connaissances ou l'ordre et le types de situations proposées (scénario global).

Toutefois, outre le fait que l'apprentissage de l'élève soit lié à son activité constructive, on peut dire qu'il a deux sens selon qu'il s'agit d'un apprentissage incident, non voulu, ou d'un apprentissage intentionnel. Dans l'apprentissage incident, l'élève apprend du simple

fait qu'il agit. Le motif de son activité est le versant productif. L'apprentissage n'est qu'un effet, non voulu par l'élève, de son activité « productive ». Si l'élève, sur le temps moyen de l'action, développe toujours la même activité « productive » face aux mêmes situations, on peut penser qu'il y a au mieux un apprentissage incident. Le rôle du professeur est de favoriser l'activité constructive en enrôlant l'élève. Alors le motif de l'activité de l'élève devient son apprentissage.

L'activité constructive de l'enseignant est, quant à elle, celle qui modifie l'enseignant dans ses représentations personnelles et en particulier dans sa pratique d'enseignant. Dans le cas d'un professionnel en activité, on peut parler de développement, c'est-à-dire quand il n'y a pas « simplement accumulation de connaissances mais quand il y a une réorganisation des manières d'agir, de penser, de sentir » (Pastré, 2005, p34). Au-delà des résultats de l'activité des enseignants en termes d'activité-élèves (leur activité productive), nous cherchons dans notre recherche à rendre compte des effets sur les enseignants de leur propre activité (leur activité constructive).

5. Dissymétrie des problématiques et des types de résultats

Il y a une dissymétrie des problématiques puisque si l'activité des élèves ne nous intéresse *in fine* que dans son versant constructif, l'activité des enseignants est analysée sur les deux versants (effets sur les élèves et effets sur l'enseignant lui-même). Dans les deux cas (élèves et enseignants), on cherche cependant des niveaux de régularités et de variabilités dans l'organisation de l'activité des sujets, compte tenu (ou non) des situations et de la singularité.

Du côté des élèves, la question de la consolidation des connaissances se décline d'une part en une question de disponibilité des connaissances (comment certaines connaissances peuvent-elles devenir disponibles par un travail sur une BEL ?) et d'autre part en termes d'adaptations : quelles adaptations de connaissances les élèves peuvent-ils franchir, au-delà des applications immédiates de ces connaissances ? On interroge les propriétés des situations en tant que permettant l'activité constructive, les effets de cette activité constructive étant appréciés en terme de disponibilité ou d'adaptabilité de connaissances mathématiques. On étudie l'activité possible des élèves compte tenu des situations d'enseignement proposées (sur des épisodes, on étudie les tâches et leur environnement). On confronte cette activité possible avec les résultats de l'activité « productive » (traces de l'activité effective) d'un élève à la fois (sur lesquels on recueille des informations). On intègre le déroulement des séances par l'étude des boucles externes (résultats de l'activité

de l'élève observé, modification de la situation par les rétroactions logicielles, les aides éventuelles du professeur, des autres élèves...). Enfin, en fonction des modifications de situation, on étudie les régulations de l'activité et on les interprète en terme d'effets ou non sur le sujet lui-même (régulations fonctionnelles ou structurantes ? Quelle activité constructive ? Apprentissage incident / apprentissage intentionnel). Les limites sont dues à la temporalité puisqu'on ne met en évidence essentiellement que des phénomènes négatifs ou des phénomènes limités. Il faudrait intégrer le temps long (analyse de scénarios sur une séquence, en particulier l'articulation P/C car il y a plusieurs niveaux d'analyse). Les résultats positifs sur des épisodes ou des successions d'épisodes (séances) sont les mises en évidences, chez certains sujets élèves, de connaissances qui semblent devenir disponibles ou d'adaptations qui semblent devenir possibles, avec des régularités afférentes dans l'activité de ces sujets.

Du côté des enseignants, les questions se déclinent de la sorte : comment les professeurs choisissent-ils les exercices et construisent-ils les parcours pour les élèves ? Nous étudions pour répondre à cette question les feuilles de travail préparées pour les élèves, en recomposant les choix a priori de contenus, de tâches et de scénarios globaux. Cela alimente la composante cognitive de la pratique des professeurs étudiés. Comment les professeurs aident-ils les élèves en séances ? Nous recomposons ici les choix pendant les déroulements observés et cela alimente la composante médiative (toutes les aides pendant les déroulements). Y a-t-il des évolutions, notamment chez ces enseignants utilisant nouvellement les BEL, quelles sont les régularités et les variabilités compte tenu des contraintes et des marges de manœuvres permises par l'exercice du métier et compte tenu des personnalités (entretiens, réponses aux questionnaires) ? Enfin, comment s'articule l'activité d'enseignement en classe sur une BEL avec la pratique habituelle, y a-t-il inscription dans une cohérence ou bien recomposition ? On interroge donc d'une part l'activité productive en cherchant par exemple des « logiques d'interventions » (transversales aux composantes cognitives et médiatives dans la pratique) avec les questions afférentes des effets sur l'activité des élèves. On étudie les évolutions de l'activité productive sur les temps courts, moyens ou dans la mesure du possible long de l'action (épisodes, séances, séquences...) et on les interprète si possible en terme d'activité constructive liées au fait que l'enseignant fait face à une situation nouvelle pour lui : celle de l'intégration d'une BEL dans sa pratique. Les résultats sont la mise en évidence sur des

temps moyens et longs de régularités communes aux enseignants et de variabilités individuelles dans l'activité des professeurs et dans les évolutions.

IV. Activité des élèves sur les bases d'exercices en ligne

Les résultats globaux sur l'ensemble des élèves observés tout au long du projet région ont déjà donné lieu à des documents écrits et seront regroupées dans Vandebrouck (2007). Dans ces actes, nous souhaitons rendre compte, à partir de l'observation de deux élèves, Alice et Fanny, de la façon dont situation et élève peuvent co-déterminer l'activité. Chacune des deux élèves ne développe en effet pas la même activité dans la même situation mais, à contrario, la situation, telle qu'elle est, fait que l'activité des deux élèves est sur un certain plan la même. Nous montrons également, à partir de l'exemple de ces deux élèves, combien les phases de régulation de l'activité autonome des élèves peuvent être difficiles sur la machine. Enfin, nous rendons compte, toujours à partir de ces deux exemples, d'effets de leur activité[71] en terme d'apprentissage incident et intentionnels des deux élèves.

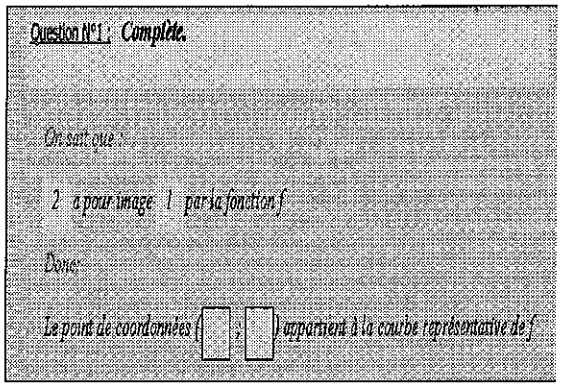
1. Eléments sur les deux élèves observées

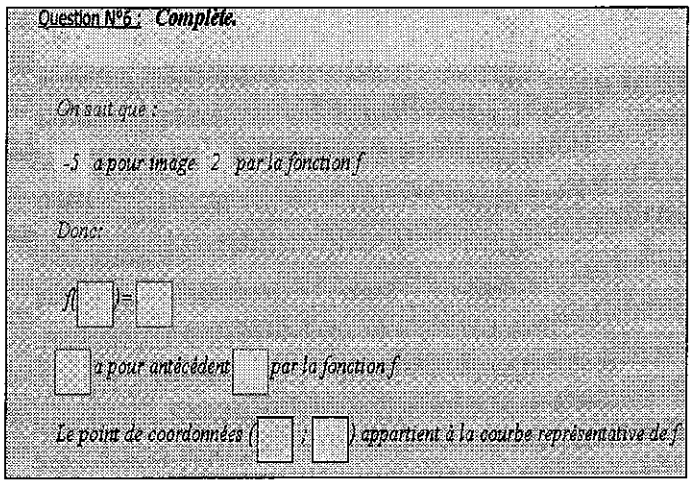
Fanny et Alice sont deux élèves de seconde générale observées successivement pendant deux séances consécutives en demi groupe. D'après les informations données par le professeur, ce sont des élèves appliquées. Alice comprend en général assez bien mais oublie parfois d'une séance sur l'autre tandis que Fanny est une bonne élève qui n'apprécie pas le travail en séance machine. Le cours sur les fonctions a déjà été fait dans l'année et les connaissances travaillées ici sont encore en cours d'acquisition, de sorte que toutes les mises en fonctionnement se font au niveau mobilisable. Les deux élèves travaillent sur le logiciel MathEnPoche (« généralité sur les fonctions » → « valeurs (lecture) » → exercices 3, 8, 9…).

2. Analyse des situations et déroulements observés

L'exercice 3 commence par 5 QCM successifs qui sont des applications immédiates des connaissances algébriques sur les images et les antécédents. L'environnement facilite en outre le travail puisque il n'y a que deux choix possibles (figure 1).

[71] Par « opposition » aux seuls « résultats » de l'activité, qui sont de vrais observables.



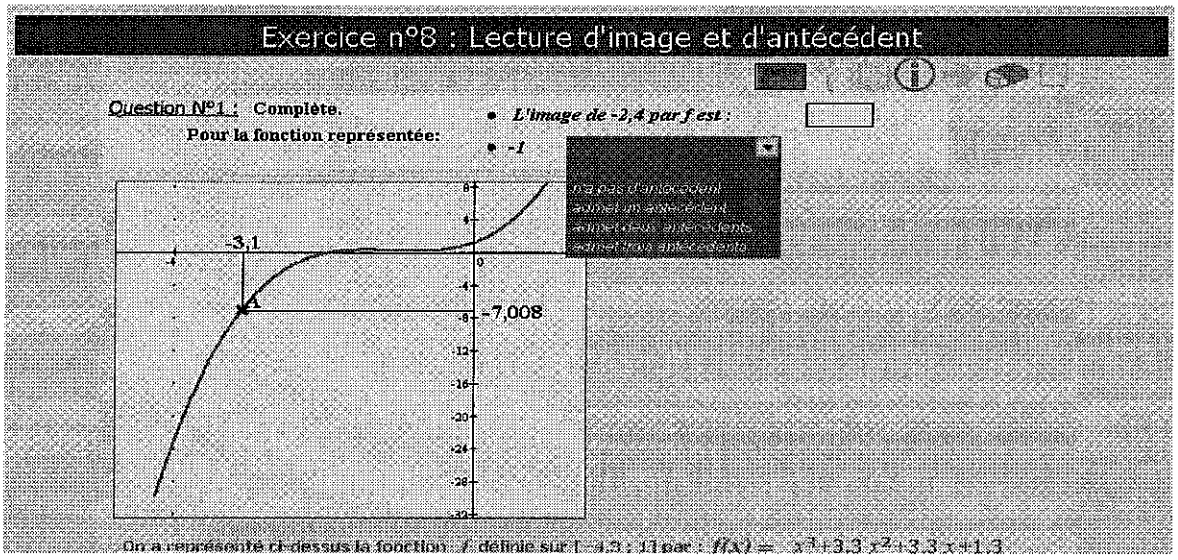


Alice répond correctement 3 fois. Les deux autres fois, elle confond « image » et « antécédent », reçoit un simple message d'erreur et rectifie au second essai : mais il suffit seulement d'inverser les réponses ! Le même exercice 3 se poursuit par 5 autres questions analogues à celle-ci (figure 2).

Ce sont les mêmes questions que précédemment mais il y a cette fois-ci six champs à renseigner. L'activité attendue n'est pas la même qu'à la question précédente puisqu'il y a un mélange de plus de deux registres d'écriture, ce qui constitue une adaptation supplémentaire. La stratégie qui consiste à répondre un peu au hasard et à rectifier éventuellement au second essai ne fonctionne plus car le logiciel ne signale pas l'emplacement des erreurs.

Alice comprend qu'elle ne peut pas se contenter de rectifier au deuxième essai si besoin est. Elle consulte donc son cahier de cours avant toute réponse et lit à mi-voix l'explication relative à « antécédent » et « image ». Elle répond alors correctement à la question. Elle refait cependant sa confusion à la septième et à la huitième question, consulte à nouveau son cahier et corrige. Elle refait encore l'erreur à la neuvième question et décide à ce moment d'appeler le professeur. Il lui explique immédiatement. Elle refait alors la dernière question sans erreur. Fanny, quant à elle, traite l'exercice 3 beaucoup plus vite ; il ne présente pas de difficultés pour elle et elle l'effectue sans erreur.

Les élèves poursuivent leur activité par l'exercice 8.



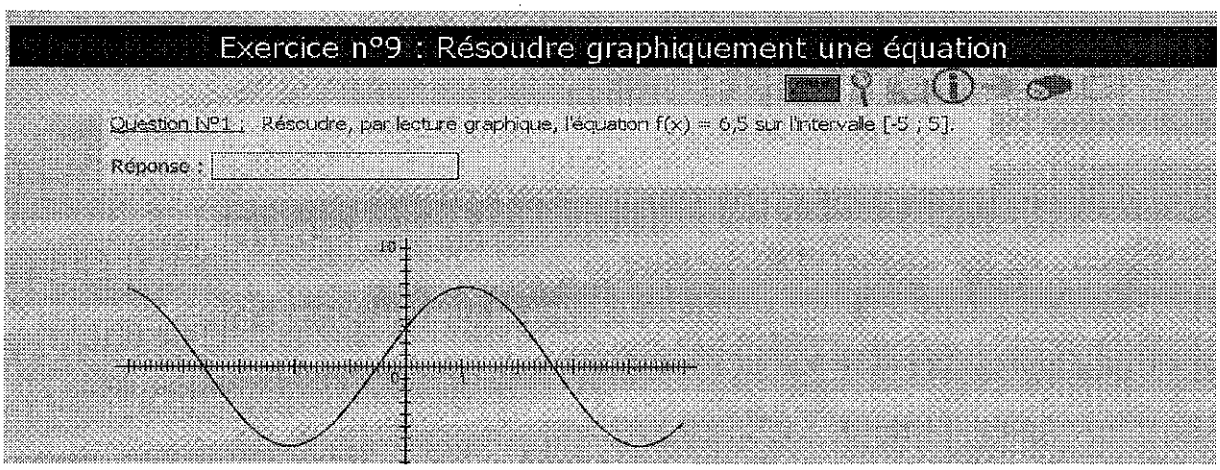
Dans cette nouvelle situation, une fonction étant donnée par son expression algébrique et une courbe représentative. Il s'agit pour les élèves de déterminer l'image d'un nombre et le ou les antécédents s'ils existent d'un autre nombre. Il y a une série de 5 questions successives du même type. Les fonctions considérées sont des fonctions aléatoires polynomiales du premier, second ou troisième degré, à coefficients décimaux avec au plus un chiffre après la virgule, définies sur un intervalle. La valeur de l'image est à taper dans un cadre. Pour le ou les antécédents, un menu déroulant (cadre bleu) permet de choisir la réponse. Suivant le choix effectué, un ou plusieurs cadres s'affichent pour rentrer la ou les valeurs. Un point A mobile sur la courbe permet de lire les valeurs demandées. On notera que lorsqu'il y a plusieurs antécédents, l'outil ne permet pas de les visualiser simultanément. Il faut donc penser à ne pas s'arrêter à la première valeur trouvée. L'activité attendue est de déplacer le curseur afin de lire graphiquement des images et des antécédents. Il s'agit donc de travailler uniquement dans le cadre graphique et d'appliquer de façon immédiate les connaissances du cours. Le choix du cadre de travail est donc forcé et ce cadre n'est pas dans le contrat didactique habituel de l'élève. En outre, l'environnement qui oblige à manipuler le curseur complexifie la tâche proposée.

La première courbe proposée à Alice est la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 - 4$. Il faut déterminer l'image de 1,2 et le ou les antécédents de - 7 s'ils existent. En accord avec le contrat habituel de travail, Alice calcule algébriquement l'image de 1,2. Cette démarche est renforcée par le fait que le polynôme de degré 2 est un polynôme qu'elle peut traiter algébriquement facilement. Pour la recherche de l'antécédent, Alice observe tout de suite sur le graphique qu'il n'y en a pas car la valeur -7 est relativement loin du minimum

de *f*. Alice valide sa réponse, reçoit un message de félicitation. Elle ne trouve pas l'exercice très intéressant et passe à l'exercice 9.

La première courbe proposée à Fanny est celle de la fonction $f(x) = x^2 - 5{,}19$. On lui demande l'image de 0,2 et le ou les antécédents de -4,7 s'ils existent. Fanny calcule également algébriquement l'image de 0,2 mais éprouve des difficultés à mener son calcul pour trouver les antécédents de -4,7. Il y a des adaptations liées à la présence du nombre décimal. L'enseignante passe à proximité de Fanny qui l'interpelle (« c'est pas clair pour trouver l'antécédent ! »). L'enseignante lui montre comment bouger le point *A* pour obtenir l'affichage des coordonnées de points sur la courbe. Fanny se saisit immédiatement de cette méthode instrumentée, répond correctement et enchaîne ensuite avec succès les 5 exercices de la série en procédant par la méthode graphique pour la recherche des antécédents comme pour celle des images.

Dans l'exercice 9, enfin, une représentation graphique de fonction est donnée sur un intervalle et il s'agit de résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = \alpha$, α étant un nombre décimal avec au plus un chiffre après la virgule. Il y a suivant les cas 0, 1, 2 ou 3 solutions. Il s'agit donc toujours de mettre en fonctionnement de façon immédiate des connaissances de la classe de seconde mais cette tâche est à nouveau complexifiée par l'environnement. En effet, il faut dans chaque épisode déplacer le curseur rouge sur la courbe, ce curseur étant initialement placé au dessus de l'origine. Cependant, contrairement à l'exercice précédent, le curseur ne peut pas se piloter avec la souris, les coordonnées du curseur ne s'affichent pas et c'est à l'élève de faire les lectures de coordonnées. C'est à nouveau une série de 5 questions du même type de tâche puis 5 autres du type $f(x) = g(x)$.



Alice ne pense toujours pas à utiliser le curseur mobile car elle n'a pas eu l'occasion de le faire dans l'exercice 8. Mais cette fois ci, il n'est pas possible de travailler algébriquement. Elle essaie donc d'estimer la réponse et donne successivement deux valeurs insuffisamment

précises mais cohérentes. Fanny, qui avait été aidée par l'enseignant pour l'exercice 8, hésite un petit moment puis repère le curseur rouge et comment le faire bouger. Puis, elle trouve en général les bonnes réponses avec le curseur.

L'exercice 9 comporte une aide en ligne proposée après deux erreurs et sur laquelle est aiguillée Alice. Deux types d'aides sont disponibles. Elles sont toutes les deux sur le plan mathématique : sur la résolution d'équations du type « $f(x)=k$ » et sur la résolution d'équations du type « $f(x)=g(x)$ ». L'élève doit choisir l'aide qu'il veut recevoir. Alice hésite entre les deux propositions d'aides qui lui sont faites et finalement les lit toutes les deux. En fermant l'aide, elle revient sur l'écran qui lui propose les deux types d'aides et relance à partir de là l'exercice 9. Elle ne voit donc pas la correction à laquelle elle aurait eu accès en fermant l'écran aux deux propositions. Pas plus avancée pour cette deuxième question, elle appelle l'enseignante qui lui montre l'utilisation du curseur ainsi que le bouton « i » permettant d'obtenir des informations sur l'exercice. Alice s'engage alors correctement dans l'activité attendue. Cependant elle n'atteint jamais la fin de l'exercice car, comme la première fois, après deux erreurs successives sur certaines des questions, elle relance l'exercice au début à cause d'une erreur de manipulation du logiciel.

Fanny, quant à elle, s'est vue expliquer le maniement du curseur par l'enseignant à l'occasion de l'exercice 8. Elle n'a a priori pas de problèmes pour l'exercice 9. Pour sa question 3, elle tombe cependant sur une sinusoïde et l'équation « $f(x)=4,5$ » qui a trois solutions. Fanny oublie ici l'une des solutions et fournit successivement deux réponses fausses : -1,5 et 4,8 puis -0,5 et 4,8. Elle est orientée vers l'aide et se voit proposer, les deux aides associées à l'exercice. Elle dit : « *j'en veux pas de ces aides !* ». Comme l'enseignante passe, elle lui demande « *comment je fais pour supprimer ça ?* ». L'enseignante lui montre alors le bouton rouge de fermeture de l'aide. Fanny clique et se retrouve alors avec la correction (ce que n'avait pas réussi à faire Alice). Cependant, Fanny voit les valeurs affichées comme solutions à l'équation avec deux décimales et c'est ce qui attire son attention. Elle attribue de ce fait son erreur, non pas au fait qu'il lui manque une solution, mais au fait qu'elle n'a pas pu trouver toutes les décimales puisqu'elle n'a pas réussi à se servir de la « loupe » du logiciel.

3. Analyse des cycles d'activité (boucles de régulations)

Cette succession de situations à laquelle sont confrontées Alice et Fanny nous montre un certain nombre de phénomènes qui peuvent être analysés à partir du schéma de double régulation.

Il y a tout d'abord des décalages manifestes entre l'activité attendue des élèves compte tenu des situations et leur activité réelle. C'est particulièrement vrai dans l'exercice 8, où la tâche proposée est la même que dans l'environnement papier-crayon mais pas l'activité attendue. Les élèves ne développent pas l'activité attendue parce qu'elles ne comprennent pas qu'on attend d'elles la manipulation du curseur. En outre, les expressions algébriques sont données par le logiciel et cette donnée ne favorise pas le travail graphique. Enfin, les expressions aléatoires sur lesquelles tombent Alice et Fanny sont de degré 2, ce qui ne les décourage pas de chercher algébriquement. Ce ne serait sans doute pas le cas si les expressions étaient systématiquement plus compliquées ou du troisième degré.

Alice entre une réponse correcte et obtient une rétroaction validant sa réponse mais n'expliquant pas la procédure attendue. Elle n'a donc aucun indice lui permettant de déceler le décalage entre le travail qu'elle a fourni et celui qui était attendu. On peut se demander ce qui lui fait abandonner l'exercice. Elle a sans doute inconsciemment l'impression de « passer à côté » mais pas au point de demander de l'aide. Son activité à l'exercice 8 n'est ainsi pas régulée. Du coup, Alice ne peut pas entrer correctement en activité dans l'exercice 9 car elle ne sait pas qu'on peut manipuler le curseur. Fanny, en difficulté dès l'exercice 8 et peut-être aidée par son regard critique vis-à-vis du travail avec un logiciel, appelle quant à elle le professeur qui régule rapidement. D'elle-même Fanny sait ainsi s'adapter à la situation de l'exercice 9.

La difficulté des régulations de l'activité lorsqu'un élève se trouve en autonomie sur une BEL est également mise en avant avec ces deux exemples. Par exemple, Alice dans l'exercice 8, n'a aucun indice lui permettant de déceler le décalage entre le travail qu'elle a fourni et celui qui était attendu. De la même façon dans l'exercice 9, les aides lui rappellent la méthode mathématique de résolution alors que son problème est le maniement du curseur. On peut encore l'observer chez Fanny qui a très bien compris aussi la tâche mathématique de l'exercice 9 mais qui s'énerve contre l'aide (« *j'en veux pas de ces aides* ! ») car il lui manque simplement l'une des solutions. Ceci étant, quand bien même les feedbacks de la machine sont bien adaptés à l'activité, la prise d'information peut ne pas être suffisante pour permettre de réguler correctement l'activité. Le travail qui consiste à interpréter les informations est en général difficile à faire. Il a été observé de manière visible dans le travail d'Alice sur l'exercice à trous (elle a besoin d'un dialogue avec le professeur pour pouvoir réussir les 5 dernières questions). Il a été observé aussi dans le cas de Fanny qui croit lire que sa solution est imprécise alors qu'elle est en fait incomplète.

Cette erreur d'interprétation de Fanny est peut-être du aussi à sa position critique vis-à-vis du logiciel, elle préfère avoir confirmation que la loupe est difficile à utiliser plutôt que de remettre en cause son travail.

4. A la recherche de traces d'apprentissages

Au-delà de cette analyse des cycles d'activités, ce qui nous intéresse aussi est de savoir si ces séances ont permis aux deux élèves d'apprendre quelque chose. C'est-à-dire, pour reprendre les termes du cadre théorique s'il y a eu de l'activité constructive et des régulations structurantes dans l'activité des élèves. Afin d'avancer sur ce point, en tenant compte des sujets singuliers dans les phénomènes d'apprentissage, nous introduisons deux types de « logiques élèves » : lorsque le but de l'élève semble être uniquement d'obtenir le bon résultat, nous parlons de *logique d'action* (ou logique de production). Lorsque au contraire l'élève semble chercher « un peu plus » que l'obtention du résultat, nous parlons de *logique d'apprentissage*[72] (ou logique de construction).

Logique d'action et logique d'apprentissage sont bien des postures a priori des sujets mais ce sur quoi nous souhaitons insister est le fait que ces postures peuvent changer compte tenu des situations. En particulier, le cas d'Alice en activité sur les 5 premières questions de l'exercice 3, et la rupture dans son comportement à partir de la question 6, amène à penser que la situation peut renforcer la logique d'action, et donc l'activité à dominante productive. Au contraire, la situation peut faire que l'élève passe dans une logique d'apprentissage. Ainsi, nous avons vu comment Alice est passée d'une logique d'action à une logique d'apprentissage dès que l'exercice 3 n'était plus un questionnaire à deux champs mais à six champs, c'est-à-dire dès que sa technique à deux coups ne fonctionnait plus et que la tâche mélangeait plus de deux registres d'écriture. L'importance des adaptations de connaissances dans les tâches proposées aux élèves réapparaît donc ici comme pourvoyeur non seulement d'activité constructive mais d'activité constructive intentionnelle. On peut en outre penser que ce changement de logique porte ses fruits. En effet, si au début de l'exercice 3, les connaissances d'Alice à propos des images et des antécédents semblent fragiles (2 erreurs sur 5 QCM proposés), on la voit adapter correctement ces mêmes connaissances dans les différentes tâches qui lui sont proposées dans les exercices 8 et 9. Dans l'exercice 8, elle est capable de chercher des images et des antécédents algébriquement (ce n'est pas l'activité attendue mais ses calculs sont corrects)

[72] Ces terminologies sont appuyées sur le schéma de double régulation de l'activité.

et dans l'exercice 9, elle est capable de résoudre graphiquement les équations proposées « $f(x)=k$ » et « $f(x)=g(x)$ » (elle ne sait pas se servir du curseur mais ses tentatives sont cohérentes). Il ne faut cependant pas négliger le rôle du professeur dans cet apprentissage puisqu'il s'est montré tout de suite disponible au moment où dans l'exercice 3, Alice a éprouvé le besoin de l'appeler pour qu'il lui explique.

Le cas de Fanny est différent car c'est en fait une très bonne élève. Elle n'est pas dans une logique d'apprentissage tout simplement parce qu'elle connaît les notions à utiliser et que les situations ne sont pas problématiques pour elle. La séance lui est cependant profitable[73] non pas parce qu'elle a appris mais parce qu'elle a entretenu ses connaissance et eut confirmation qu'elle savait faire les exercices. On constate, cependant, qu'elle a appris des connaissances liées au logiciel. Et pourtant Fanny n'est pas entrée dans cette séance avec le désir d'apprendre à manoeuvrer le logiciel, au contraire son motif était plutôt de démontrer les limites du logiciel. Il s'agit là d'apprentissage incident, du à son activité productive. Il est fort probable que lors d'une prochaine séance sur ce logiciel, Fanny sera plus à l'aise dans le maniement du logiciel, ce qui lui donnera sûrement plus de possibilités pour travailler efficacement du côté des mathématiques.

V. Activité des enseignants[74]

Pour cette partie comme pour la précédente, l'ensemble des résultats sera regroupé dans Vandebrouck (2007). Nous ne pouvons ici qu'en esquisser une partie à partir des observations de Maurice et Flore. Nous articulons ces analyses avec l'ensemble des résultats en conclusion.

1. L'exemple de Maurice

A l'occasion des observations élèves, nous avons observé le travail de Maurice à deux reprises en avril 2006. Il s'agissait de deux séances consécutives avec deux demi classes de Seconde BEP. Nous avons également obtenu des données sur son activité à travers le compte rendu d'une observation d'élève qui a eu lieu en avril 2005 ainsi qu'une vidéo réalisée en mai 2006. Cela nous a permis de repérer des caractéristiques de l'activité de Maurice dans ses séances d'utilisation des BEL.

L'enseignant Maurice est un enseignant qui connaît bien les TICE et qui utilise déjà des logiciels type géométrie dynamique, tableur...dans ses classes de Seconde BEP. Il choisit

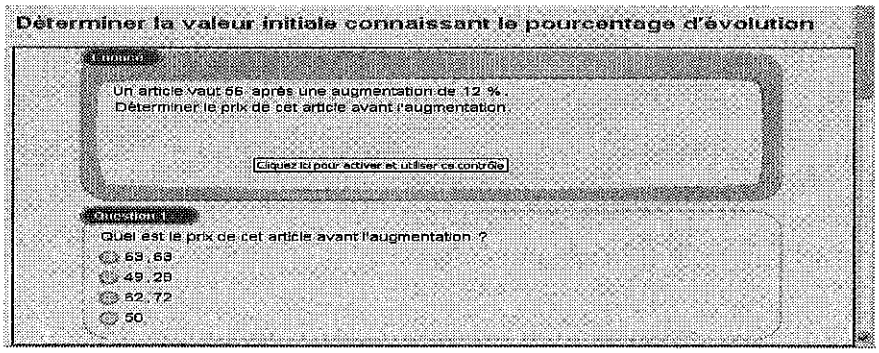
[73] Modulo le bémol sur les trois solutions données avec deux décimales.

[74] M. Abboud-Blanchard et C. Cazes ont participé plus ou moins directement à l'écriture de cette partie.

de travailler avec le logiciel Paraschool. Durant sa première année d'utilisation, Maurice propose à ses élèves des exercices provenant uniquement de la partie enseignement professionnel. Tandis que, la seconde année, il « pioche » parmi les exercices du niveau troisième, dans la partie « enseignement général ». Les connaissances mises en fonctionnement dans les séances observées sont à chaque fois des connaissances en cours d'acquisition. Maurice insère aussi chaque année des éléments de cours, possibilité que lui offre le logiciel Paraschool. Enfin, Maurice, dès l'année 2005, prévoit une feuille d'exercices papier pour les élèves, en lien avec leur travail sur Paraschool et qu'ils doivent rendre à la séance suivante.

Du côté des déroulements des séances observées, Maurice circule dans la classe, suivant l'avancée de chacun des élèves en répondant à leurs sollicitations. Il n'y a pas un balayage systématique mais un déplacement au gré des questions et des circonstances. L'enseignant est en fait sans cesse mobilisé. Ses interventions sont majoritairement individuelles. Maurice a développé une façon de prendre de l'information sur l'activité des élèves : il les fait systématiquement revenir en arrière sur le logiciel pour comprendre où ils en sont et quel est leur véritable problème. En outre, il accepte la dispersion mathématique des élèves dans les plans de travail et c'est le seul des enseignants observés qui passe au tableau en séance faire une longue explication mathématique pour quelques élèves particuliers. Il accepte donc de ne parler publiquement qu'à quelques élèves pendant que les autres continuent à travailler à leurs tâches respectives.

Donnons l'exemple de l'exercice suivant qui est le septième des exercices proposés par Maurice à ses élèves. Même s'il ne s'agit dans la catégorisation Paraschool que d'un « savoir faire », c'est un exercice relativement difficile pour ces élèves[75].



[75] L'analyse de tâche n'est pas effectuée ici, faute de place.

Dans la séance observée, l'enseignant intervient au tableau pour aider trois élèves simultanément bloqués sur cet exercice un élève. L'observateur a relevé l'état final du tableau à l'issue de cette explication.

+5% *20 €* *20x5 / 100 = 1* *20+1* *PFinal = 21 €*	*Initial + aug* *100% + 5 %* *105 %* *105/100 = 1,05*	*20 x 1,05 = 21*

On comprend que Maurice prend soin de faire une explication propre, compréhensible pour les élèves qui seront en difficulté plus tard dans la séance. On peut penser qu'il espère ainsi ne pas avoir à expliquer à nouveau ce point et être plus disponible pour d'autres interventions. Il est aussi à noter que les pourcentages et la quantité finale dans l'exercice Paraschool sont 12% et 56 Euros. Et bien que Maurice fournisse des explications à propos de cet exercice particulier, il traite au tableau un autre exemple avec 5% et 20 Euros comme somme de départ. Maurice accepte donc qu'au moment de son explication, tous les élèves n'écoutent pas mais son aide écrite a une portée générique. Il espère que d'autres élèves vont se l'approprier et pouvoir substituer les pourcentages de 5% et la quantité 20 Euros à leurs données propres. En outre, dans l'aide qu'il apporte aux trois élèves en fournissant ses explications au tableau, il n'élude que le problème de conversion des 12% en 1,12. C'est-à-dire qu'il semble soucieux de ne pas tout dire à l'élève en difficulté pour qu'il reste à celui-ci une part d'activité autonome. L'aide se veut ainsi « constructive » car elle est propre, elle ne fournit pas intégralement la réponse aux problèmes des élèves et elle porte un caractère générique, c'est-à-dire qu'il est possible de la réinvestir au fil des exercices.

Dans d'autres cas plus particuliers, les aides de l'enseignant sont uniquement « procédurales »[76] et se veulent plus directement efficaces. Elles n'appellent pas de passage au tableau car elles ne concernent certainement que des élèves spécifiques. De nombreux exemples montrent que l'aide du professeur est souvent indispensable pour permettre aux élèves de commencer les exercices. Ainsi l'enseignant peut-il parfois repérer des erreurs ou des difficultés qu'il n'aurait peut-être pas soupçonnées.

[76] En référence au schéma de double régulation, les aides « procédurales » de l'enseignant aux élèves sont des aides qui permettent à l'élève de développer son activité « productive » tandis que les aides « constructives » se veulent plus tournées en direction de l'activité « constructive » des élèves.

D'autres interventions portent sur la gestion du travail et le travail autonome des élèves sur la BEL est l'occasion pour Maurice de pouvoir les féliciter souvent, leur parler de leur confiance en eux, ce qui est peut-être un facteur important pour motiver des élèves faibles.

2. L'exemple de Flore

Flore est une enseignante qui s'est associée au projet en 2005. Elle travaille dans un lycée classique et nous avons observé deux de ses séances de module (groupe de 15 élèves) en classe de seconde, l'une en décembre 2005 et l'autre en mai 2006. Dans cette classe, les élèves sont en relatives difficultés. Les deux séances sont des séances d'exercices avec le logiciel Euler. La première séance concerne des activités numériques (résolution d'inéquations et tableau de signes) et la seconde séance concerne des activités géométriques (équations de droite). Flore a choisi de travailler avec Euler. Elle explique qu'elle a été intéressée par la quantité et la qualité des exercices proposés ainsi que par leur génération aléatoire. Nous avons accès à la fois au déroulement des séances par les observations et aux évolutions éventuelles de Flore, par un entretien réflexif dans lequel elle décrit ses adaptations au cours de l'année et ses projets pour l'année suivante.

Flore a sélectionné des fiches Euler pour, à chaque fois, faire réviser ses élèves. Par exemple, dans la première séance, la feuille de travail commence par des fiches de niveau 6ème du type « *déterminer le nombre a par lequel il faut multiplier 53 pour obtenir 2332* ». Lorsque la réponse est fausse, la rétroaction est la suivante « *vous avez commis une erreur 45x53= 2385* ». L'élève peut éventuellement utiliser la rétroaction pour corriger sa réponse et trouver la réponse correcte par approximations successives. Après une réponse fausse, le logiciel attend une autre réponse jusqu'à obtenir la réponse correcte.

Pendant le début de la première séance, les interventions de Flore ont essentiellement deux buts : expliquer l'organisation du travail et faire accélérer les élèves. En effet, cette séance est l'une des premières avec ce logiciel et Flore insiste auprès des élèves sur les trois points suivants :

- avoir son cahier d'informatique sur lequel il faut noter un exercice de chaque type ;
- prendre l'habitude de se référer au plan de travail sur lequel toutes les consignes sont écrites, c'est-à-dire non seulement la liste des fiches à travailler mais aussi le nombre d'exercices de chaque type à faire ;
- comprendre que les exercices sont paramétrés et qu'en conséquence ils sont différents d'un poste à l'autre et que leur difficulté peut être variable.

Les élèves ont bien réussi ces premiers exercices. Cependant, Flore dit dans l'interview qui a suivi la séance qu'ils ont mis beaucoup plus de temps qu'elle n'avait estimé d'où dit-elle, la nécessité de les faire accélérer. Elle ne déclare pas de modifications envisagées sur ce point dans une éventuelle autre séance. La suite de la séance concerne des fiches sur des activités numériques du niveau fin de collège. Ce travail de révision permet à Flore de se rendre compte de difficultés insoupçonnées chez les élèves. Par exemple, il n'est pas clair pour plusieurs de ses élèves que diviser par 3 c'est pareil que de multiplier par 1/3. Pendant la séance elle explique plusieurs fois puis écrit au tableau : *« diviser par un nombre a, c'est multiplier par son inverse 1/a »*. Dans l'interview, Flore précise qu'elle n'a pas anticipé cette difficulté car en séance d'exercices classique elle ne l'a jamais rencontrée. Elle affirme donc qu'elle sera davantage vigilante à cette difficulté lors des séances classiques.

La seconde séance concerne les fonctions linéaires et affines. Flore y rencontre encore des difficultés dont la suivante : les élèves sont surpris par le fait que parfois, des fonctions linéaires apparaissent dans des fiches d'exercices titrées « *fonctions affines* ». Pendant la séance, Flore doit leur expliquer que les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines. Elle pense avoir présenté en cours ces notions de manière trop cloisonnée et envisage de modifier en conséquence le cours de l'année d'après pour ne plus être confronté à ce problème.

Du côté des aides aux élèves, Flore semble adapter son aide à l'élève aidé, renforçant une méthode dans le cas d'un élève en difficulté, enrichissant son « capital » de méthodes dans le cas d'un élève plus à l'aise. Mais dans l'entretien Flore n'a pas fait allusion à cette particularité dans sa gestion.

Aussi, comme dans le cas de Maurice, Flore utilise le tableau comme « pense-bête collectif », mais, à la différence de celui-ci, elle essaie d'obtenir l'attention générale. En effet, elle envisage, pour l'année suivante d'inclure ses remarques en haut du plan de travail et non pas d'utiliser le tableau à la manière de Maurice. En revanche, le cas de Flore semble caractérisé par le souci d'intégration de la BEL dans le dispositif général, ce qui se traduit par une forte connexion entre séance classique et séance BEL. Par exemple, les deux séances observées ont fourni à Flore des éléments pour ajuster les séances classiques (plus grande vigilance sur « diviser par 3 c'est comme multiplier par 1/3 » ; présentation des fonctions affines comme un cas plus général que les fonctions linéaires). Enfin, dans ses projets, Flore intègre l'outil BEL dans son arsenal d'outils d'enseignement. Pour l'année

suivante, elle envisage une utilisation harmonieuse de cet outil pour que ces séances ne soient pas marginalisées.

On peut faire l'hypothèse qu'il y a dans le cas de Flore des boucles de régulations structurantes à une échelle de temps long, celle de l'année scolaire. Ces régulations sont conscientes, recherchées par Flore et en accord avec son parcours personnel : participation au groupe IREM et à une formation professionnelle[77]. Elles résultent certainement d'un élément fort de sa composante personnelle : la volonté d'enrichir sa pratique enseignante par un apprentissage intentionnel, éventuellement hors de son lieu de travail. Cependant cet enrichissement semble n'affecter principalement que l'organisation a priori de ses séances : modification du plan de travail par un rappel, modification de l'ordre de présentation des notions dans son cours. En outre, certains points relevés au niveau des déroulements ne sont pas encore pris en compte dans la réflexion de Flore. Ainsi, elle ne semble pas s'interroger sur le fait que les élèves, pendant la première séance ont mis beaucoup plus de temps qu'elle ne le pensait à résoudre les exercices de 6ème. Bien au contraire, tout se passe comme si elle voulait le nier puisque sa seule réaction est de faire accélérer les élèves. De même, elle ne semble pas avoir conscience de la manière différenciée dont elle apporte de l'aide à ses élèves. On peut se demander ici s'il s'agit d'un apprentissage incident, facilité par l'usage des BEL, ou au contraire s'il s'agit d'une caractéristique de Flore visible dans toute séance d'exercices d'entraînement.

3. Régularités et variabilités

L'étude des choix des deux enseignants Maurice et Flore, renforcée par les observations des autres enseignants impliqués dans le projet Région nous permet d'avancer un certain nombre d'hypothèses en termes de régularités et de variabilités dans l'activité des professeurs avec des bases d'exercices.

Le choix de la ressource tout d'abord, bien que relevant exclusivement des professeurs, se révèle le même pour tous les enseignants de lycée professionnels. Ils ont tous choisi le logiciel Paraschool qui est le seul à contenir des exercices fléchés pour l'enseignement professionnel. Il semble donc y avoir une contrainte forte liée à l'appartenance de ces enseignants à des lycées professionnels. Dans les lycées d'enseignement général, les choix ont par contre été différents. Cependant, les enseignants de l'académie de Versailles, comme Flore, ont souvent choisi de travailler avec le logiciel Euler, logiciel institutionnel

[77] Master de didactique des mathématiques.

développé par le rectorat de l'académie et ses inspecteurs. Il y a donc sûrement là une contrainte d'un autre type qui agit également. Dans les autres académies, les choix sont plus divers.

Les séances retenues pour faire travailler les élèves sur machine sont toujours des séances en demi-classe avec les élèves en autonomie sur leurs machines. Cela semble dû à la contrainte de place quand les classes sont trop chargées et à la limitation du nombre des postes informatiques dans les salles (une quinzaine en général). Cependant les choix pourraient être différents. Les enseignants pourraient choisir de faire travailler leurs élèves en binômes, ce qui n'a jamais été observé. Notons que, de fait, les élèves travaillant sur bases d'exercices s'aident mutuellement, même s'ils ne sont pas sur le même poste et l'émulation liée au travail en binôme est supplantée par un travail à deux, trois, voire plus, des élèves qui s'aident entre eux mais doivent cependant toujours revenir traiter leur exercice particulier sur leur propre poste à un moment donné au moins.

Les connaissances travaillées dans les exercices des plans de travail sont toujours des connaissances en cours d'acquisitions ou des connaissances anciennes. Par exemple, il s'agit de travailler le chapitre en cours « fonctions affines » dans la classe de Maurice. Il ne semble pas que l'on puisse faire aborder aux élèves des connaissances totalement nouvelles avec ces outils bases d'exercices car elles sont actuellement prévues pour un usage d'entraînement uniquement. En outre, les objectifs des enseignants pour les séances sont toujours limités : il s'agit de travailler un thème précis ou de réviser des notions précises. Il ne semble pas y avoir de mélanges, sauf parfois sur quelques exercices à la fin des plans de travail pour de bons élèves. Ces plans de travail sont d'ailleurs assez précis, afin que les élèves soit bien cadrés, comme le dit Maurice dans son entretien, et ils sont généralement trop longs pour un travail des élèves sur une seule séance.

Enfin, les enseignants articulent différemment le travail sur la machine et le travail de l'écrit. Par exemple Maurice distribue aux élèves une feuille à compléter tandis que Flore a instauré dans sa classe un « cahier d'informatique ».

Du côté des déroulements, les régularités les plus marquées concernent les interventions de l'enseignant pendant la séance. Tout d'abord, ces interventions sont rarement collectives et lorsqu'elles le sont, leur but est :

- dans une phase de démarrage, d'expliquer aux élèves les « gestes » minimaux pour démarrer les machines et se connecter à la ressource ainsi que le plan de travail à suivre (la succession d'exercices à effectuer) ;

- au cours de la séance, de réguler l'avancée dans le temps ou gérer une difficulté liée au maniement de la BEL.

Nous notons l'absence de phase de bilan collectif au cours ou à la fin de la séance et a fortiori l'absence de phases d'institutionnalisations. Nous pouvons interpréter ce phénomène par le fait que les enseignants voient d'abord le travail sur des bases d'exercices en ligne comme permettant la différentiation entre élèves. Dans ce cas de rythmes variés d'avancement du travail, un bilan même partiel est difficile mais il semble aussi inopportun.

Les interventions individuelles sont donc majoritaires. Elles sont soit des aides mathématiques soit des aides instrumentales, et on note très peu d'interventions liées à l'enrôlement des élèves. La proportion d'aides instrumentales semble liée directement au logiciel lui-même[78] et au niveau de la familiarisation des élèves mais aussi des enseignants avec son utilisation.

L'importance des aides mathématiques et individuelles, est donc une régularité évidente dans les séances avec une BEL. Elles sont le plus souvent procédurales et couvrent une large palette d'effets souhaités par l'enseignant. Cependant, il semble ici que le travail sur machine, où l'élève est plus en activité autonome et où l'enseignant apporte plus souvent qu'en séance traditionnelle des aides adaptées à cette activité autonome, favorise, dans certains cas et selon les enseignants, l'émergence plus ou moins forte d'aides « constructives » pour l'apprentissage mathématique des élèves.

Quant aux autres disparités, elles se situent essentiellement au niveau de la gestion. Nous avons montré que les modes de déplacement dans la classe diffèrent d'un enseignant à l'autre (entre zapping et balayage systématique). Certains enseignants semblent se consacrer plus aux élèves faibles, profitant du fait que chaque élève travaille à son rythme pour apporter des aides adaptées au moment approprié. D'autres enseignants passent régulièrement voir tous les élèves, mais ce balayage systématique n'apporte pas toujours une aide efficace à l'élève. C'est le cas par exemple quand l'enseignant apporte des réponses à des questions que l'élève ne se pose pas encore, même si cet élève traite le même exercice que l'élève vu juste avant par l'enseignant.

Nous avons enfin repéré d'une part, l'importance qu'accordent les enseignants à l'utilisation du papier-crayon et d'autre part l'utilisation marginale du tableau. Ces deux constats paraissent liés à une activité constructive des enseignants et nous y reviendrons plus loin.

[78] Par exemple dans une séance Wims observée, la proportion d'aides liées au maniement du logiciel était sensiblement égale à la proportion d'aides liées aux contenus mathématiques.

Régularités et disparités dans le déroulement peuvent être interprétées à la lumière de la composante personnelle de l'enseignant. Elles permettent de questionner le développement professionnel chez l'enseignant, ce que nous traitons dans le paragraphe qui suit.

4. Evolutions et développement professionnel

Se référant au schéma de la double régulation de l'activité[79], notre but est maintenant de rechercher des effets de l'activité constructive des enseignants, autrement dit des traces de régulations structurantes. Ces traces sont très difficiles à repérer, en particulier parce qu'elles concernent directement la composante personnelle, parce qu'elles s'observent sur un temps long et que les observations dont nous disposons sont au mieux sur deux séances espacées de quelques mois. Cependant, nous avons pu repérer des indices de régulations structurantes et pu émettre quelques hypothèses sur le développement professionnel des enseignants.

Les régularités qui sont apparues très tôt, telles que la nécessité de préparer un plan de travail assez contraignant pour les élèves, le fait de faire travailler les élèves en demi groupe sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition, le quasi abandon de la parole collective ou encore l'absence d'institutionnalisation pendant ces séances, nous semblent relever de la situation de travail avec une BEL et résulter plutôt de régulations fonctionnelles à court ou moyen terme, liées aux contraintes fortes de l'enseignement avec une BEL. Nous avons vu également que le choix de la BEL était le résultat d'une négociation entre éléments provenant de la composante personnelle et de la composante institutionnelle. Peut-être cela pourrait-il également s'interpréter en terme de régulation de l'activité ?

En revanche, on a pu constater des disparités, bien que la préoccupation soit commune, dans l'utilisation du papier/crayon ou encore dans le lien avec les séances classiques, par exemple dans les sujets de contrôles. Il est possible que ces disparités, observées à un moment précis, ne soient que l'expression d'un avancement différent sur une même trajectoire. En effet, et cela est confirmé par plusieurs autres observations, les enseignants nouvellement utilisateurs de BEL insistent pour que les élèves prennent un papier de brouillon ou distribuent eux même une feuille de brouillon puis plus tard une feuille « pour garder une trace ». Certains enseignants utilisent finalement un cahier d'informatique ou un

[79] Schéma de double régulation de l'activité : partie 0, chapitre 2.

cahier d'exercices. De même, la plupart des enseignants intègre des exercices de type BEL dans les contrôles comme le révèle l'étude des questionnaires.

Est-ce à dire que tôt ou tard les enseignants enseignent tous de la même manière avec une BEL et que leurs développements sont semblables ? Certainement non. Mais dans ce cas où se situent les disparités ? Si l'on revient aux deux cas particuliers étudiés, on constate que Maurice a développé de l'activité constructive sur sa façon d'aider les élèves pendant les séances avec BEL. Il faudrait savoir si cette modification affecte la composante médiative de sa pratique, si son comportement est également modifié pendant les séances classiques ou s'il ne s'agit pas simplement d'une actualisation de sa pratique ordinaire aux séances BEL, initiée à travers sa grande expérience d'utilisation des TICE en classe. De sont côté, Flore enrichit sa pratique du côté cognitif mais parce que, d'une certaine manière, c'est son objectif personnel. Cela dépasse largement l'utilisation des BEL mais guide son parcours professionnel. La composante médiative semble beaucoup plus stable. Nous y revenons dans la conclusion.

VI. Conclusion de la partie élèves

Nous pensons avoir montré comment le schéma proposé et issu de la didactique professionnelle peut être un outil efficace pour comprendre ce qui peut se jouer du côté des élèves et du côté des enseignants lors des séances sur BEL.

Du côté des élèves, cette approche conduit à un découpage en deux phases consécutives : la compréhension de la tâche prescrite avec entrée de l'élève dans l'activité puis la réalisation effective de la tâche par l'élève avec l'interprétation des rétroactions. Nous avons en particulier vu des décalages entre l'activité attendue et l'activité réellement développée par les élèves et donc la nécessité d'interventions de l'enseignant. Dans le cas général, ces décalages peuvent être dus aux tâches trop complexes, que ce soit du côté des mathématiques ou à cause de leur environnement informatique. Ils peuvent aussi être causés, comme nous l'avons observé ici chez Alice et Fanny, au fait que l'activité attendue ne corresponde pas à celle attendue en environnement papier crayon dans une situation similaire. Enfin, et c'est tout de même assez rare, cela peut être lié à un détournement intentionnel du logiciel de la part de l'élève. Les rétroactions peuvent aussi être inadaptées ou bien adaptées mais mal interprétées ou bien encore insuffisantes. Elles ne permettent souvent pas aux élèves de réguler leur activité à bon escient et là encore une aide extérieure est nécessaire même si l'enseignant n'en a pas toujours connaissance.

La question générale de la modification de « l'état de l'élève », en particulier par un apprentissage mathématique, reste difficile à observer à l'échelle des cycles courts que nous avons étudiés, ni même à l'échelle des cycles plus longs d'une série d'exercices ou d'une séance. Cependant nos deux exemples ont permis d'illustrer plusieurs phénomènes :

- l'état de l'élève et la situation influent de façon complémentaire l'activité des élèves et il est en particulier nécessaire de prendre en compte les élèves dans leur singularité. Par exemple, Alice et Fanny développent une activité bien différente à partir des mêmes exercices ;
- la logique d'apprentissage ne se décrète pas (posture a priori du sujet) mais elle peut être défavorisée par le travail sur la base d'exercices dans certaines situations : une élève motivée comme Alice peut rester dans une logique d'action tant que la suite de situations n'est pas problématique pour elle et qu'elle peut obtenir le résultat sans effort (QCM à deux champs). Tout se passe comme si dans certaines situations, l'activité constructive était occultée par l'activité productive, qui occupe alors tout l'espace. L'apprentissage existe mais il est seulement incident et limité par rapport aux objectifs des exercices.
- si l'apprentissage intentionnel ne se décrète pas, on peut penser qu'il peut être favorisé, même pour des élèves qui ne sont pas dans une logique d'apprentissage, à partir du moment où il y a toujours une activité productive. C'est ce qui à nos yeux accrédite le travail sur les ressources en ligne car les élèves y sont toujours actifs comme l'ont encore montré ces observations. Cependant cet apprentissage intentionnel semble lié à une activité sur une situation « riche », la richesse de cette situation en terme d'adaptations de connaissances à mettre en fonctionnement étant elle-même dépendante de l'élève singulier qui travaille sur la base d'exercices. Par exemple, on peut penser qu'avec ces exercices 3, 8 et 9, Alice travaille dans sa zone proximale de développement. Trois fois sur cinq, elle sait traduire avec deux champs à remplir une information donnée dans un registre algébrique. Mais lorsque la situation comporte une adaptation supplémentaire liée au mélange de plus de deux registres d'écritures, Alice fournit un effort supplémentaire qui semble permettre un réinvestissement ultérieur. Cependant, nos analyses montrent aussi que la richesse de la situation doit être mesurée, en cohérence avec le fait que la zone proximale de développement est propre à l'élève singulier. Fanny ne fait par exemple qu'entretenir des connaissances qu'elle a déjà organisées. C'est là toute la difficulté du travail autonome sur ces ressources.

Du côté des enseignants, de leur activité pendant les séances BEL et de l'articulation entre cette activité et les différentes composantes de leur pratique, les résultats que nous avons obtenus et dont seule une partie est illustrée par les exemples développés de Maurice et de Flore sont les suivants :

Lorsqu'un enseignant choisi d'utiliser les BEL en classe, nous avons vu qu'un certain nombre de caractéristiques dans l'organisation de cette classe vont se mettre en place assez vite, comme le plan de travail assez long et rigide, le fait de faire travailler en demi groupe sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition, le peu d'utilisation du tableau (en général), la parole essentiellement individuelle, l'absence de phase de bilan collectif. Ces caractéristiques, aussi bien cognitives que médiatives, nous semblent liées à des régulations plutôt fonctionnelles, à court ou moyen terme, de l'activité de l'enseignant avec des BEL et en particulier aux contraintes fortes liées à leur usage en classe.

D'autres spécificités vont aussi inéluctablement se mettre en place mais plus lentement comme l'importance accordée à la trace écrite, le lien avec les contrôles et l'articulation avec les séances classiques. Ces évolutions semblent affecter essentiellement la composante cognitive des pratiques des enseignants. Elles sont le résultat d'apprentissages incidents liés à des régulations fonctionnelles de l'activité mais peuvent se conjuguer, comme dans le cas de Flore, à une volonté de développement professionnel. Toutefois ces évolutions ont des limites communes puisque l'absence au niveau des plans de travail de mélanges entre plusieurs domaines de connaissances mathématiques persiste. De même, nous n'avons pas trouvé d'exercices permettant des activités spécifiques aux environnements logiciels. Seules des tâches papier/crayon semblent proposées à ce niveau d'enseignement mais cela est certainement à relier aux méthodes de contrôles de connaissances qui sont uniquement traditionnelles.

Enfin, les disparités entre enseignants et les évolutions variées de leurs activités semblent concerner plus directement la composante médiative des pratiques. En outre, il ne s'agit probablement pas d'un développement professionnel mais plutôt d'un ajustement de l'activité d'intégration de la BEL à la composante médiative. Dans le cas de Flore, le fait d'aider les élèves de façon différentiée ne semble pas conscientisé et le fait de les faire accélérer semble venir de la pratique ordinaire. Dans les autres cas étudiés (échantillon fin comme échantillon large), on peut aussi penser que leurs façons d'aider les élèves en séance BEL (ratio d'aides à l'initiative de l'enseignant, ratio entre aides procédurales et aides «

constructives », utilisation spécifique du tableau, déplacements dans la classe...) n'évoluent pas ou peu et qu'elles ne sont que le reflet de la composante médiative de leurs pratiques.

S'agissant d'un domaine en plein essor, les BEL étant de plus en plus nombreuses, ces premières investigations sont donc à poursuivre. Il faudrait renforcer l'approche qualitative en essayant de mettre davantage en relation, chez un ou plusieurs enseignants choisis, les séances BEL et les séances classiques. Il serait sans doute intéressant également de regarder de manière quantitative comment évolue l'utilisation des BEL : effet de mode ou tendance lente qui va peu à peu s'imposer dans la pratique enseignante ?

Bibliographie

Cazes C., et al. (2006), Using E Exercises bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computer in Mathematics Learning*. Vol 11 (3) pp 327-350.

Cazes C., et al. (2005), Utilisation de bases d'exercices en ligne: quelles conséquences pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques? Dans C. Castela et C. Houdement (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2005*. pp 177-212. Leontiev A. (1984), *Activité Conscience Personnalité*, Moscou : Editions du Progrès (1ère édition, 1975, en russe).

Leplat J. (1997), *Regards sur l'activité en situation de travail*, Paris : PUF.

Pastré P. (2005), La deuxième vie de la didactique professionnelle. *Education permanente*. Vol 165 pp 29-46.

Rabardel P. (1999), Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Dans *Actes de l'Université d'été de Didactique des Mathématiques*. Houlgate. pp 203-213. IUFM de Caen

Robert A. (1998), Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 18 (2) pp 139-190.

Robert A., Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*. Vol 2 (4) pp 505-528.

Robert A., Rogalski M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x*. Vol 60 pp 6-25.

Rogalski J. (2000), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Apports des concepts et méthodes de la psychologie ergonomique pour l'analyse de l'activité de l'enseignant. Dans T. Assude et

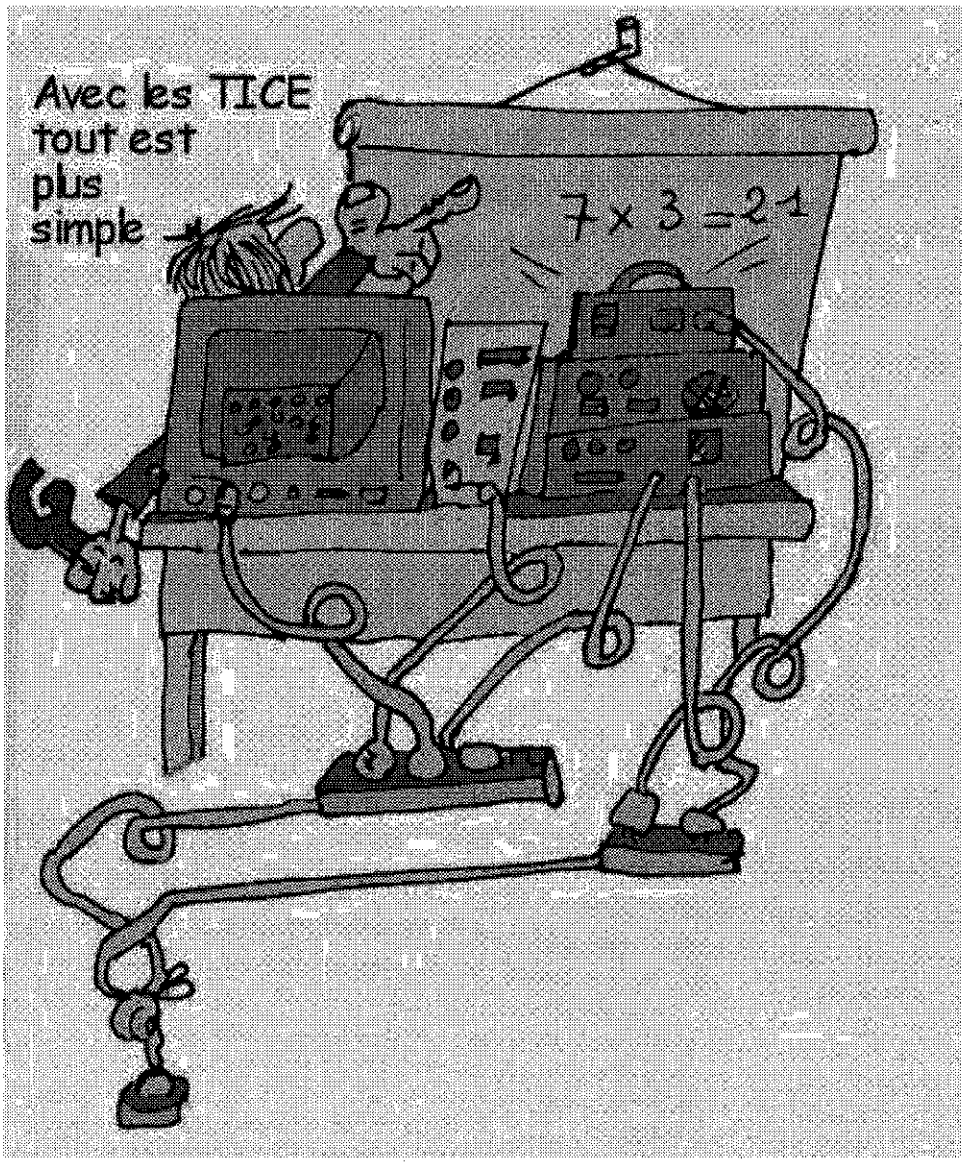
B. Grugeon (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. pp 143-164. ARDM et IREM de Paris 7

Ruthven K., Hennessy S. (2002), A practitionner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 49 (2/3) pp 47-86.

Samurcay R., Rabardel P. (2004), Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences: propositions. Dans *Recherches en Didactique Professionnelle,* R. Samurcay et P. Pastré (Eds) (pp. Chapitre 7). Toulouse : Octarès

Vandebrouck F. (2007), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants,* Toulouse : Octarès

Vygotski L. (1934/1997), *Pensée et langage*, Paris : La dispute.



Le projet AMPERES (Apprentissages Mathématiques et Parcours d'Etudes et de Recherche dans l'Enseignement Secondaire), vers un autre type de processus d'étude

Ce que nous donne à voir l'enseignement actuel des mathématiques est le plus souvent une étude non motivée d'objets mathématiques. Comme le dit Y. Chevallard, l'enseignement « tend à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs qu'on visite à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessées d'être comprises »[80]. C'est seulement lorsque l'étude d'un objet a été réalisée que, dans les meilleurs des cas, des applications en sont proposées dans des travaux dirigés ou dans des exercices. La majorité des « activités introductives » des manuels, massivement reprises par les professeurs dans les classes, suivant en cela la forme dominante d'un enseignement sous forme d'ostension déguisée, « oublient » les questions fondatrices motivant les mathématiques et leur étude. Cet état de fait est conséquence de problèmes profonds qui trouvent leurs fondements dans la société pensant son école, la pédagogie qu'elle entend y voir pratiquée et la formation des professeurs. Il n'en demeure pas moins que les mathématiques enseignées ne faisant, dans la plupart des cas, vivre dans les classes aucune motivation fondatrice de ce savoir, on comprend qu'en retour, elles ne puissent guère rencontrer la motivation des élèves envers leur étude[81].

Le travail engagé par le projet AMPERES, regroupant à ce jour cinq équipes (quatre d'IREM et une d'IUFM) soutenues par l'INRP et constituées d'enseignants-chercheurs et de professeurs du second degré, vise à développer des pratiques enseignantes permettant d'engager le « collectif-classe » dans « une genèse artificielle du savoir », en le faisant vivre comme réponse à des questions fondatrices de l'étude. Le projet reprend donc l'idée initiale au fondement des ingénieries didactiques, mais avec l'ambition de les faire vivre au

---

[80] Chevallard Y. (2005) :"la place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire" in Actes de l'université d'été d'Animath "*La place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire*" Ed APMEP, brochure n°168

[81] Voir l'étude menée par Establet et al., (2005) *Radiographie du peuple lycéen.* Préface de P.Meirieu, Paris, ESF, qui montre que pour les lycéens, les sciences dures sont « inutiles ou ennuyeuses aux yeux des littéraires, pourvues de grandes valeurs de professionnalisation aux yeux des élèves scientifiques, elles semblent pour tous dénuées de toute valeur culturelle. Voilà qui devrait alerter, mais qui résulte sans doute de la position hiérarchique forte de ces disciplines. Elles sont des instruments stratégiques, sans pour autant être porteuses de sens ». Dans l'enquête dont Establet rend compte, les mathématiques arrivent en dernière position dans le classement des lycéens, avec une différence entre opinions favorables et défavorables de 56 % environ en faveur des négatives…

sein du système éducatif « ordinaire ». Dans ce sens, AMPERES étudie la viabilité de l'implantation de ses propositions en tenant compte des déterminants contraignant l'action enseignante. Par exemple, contre la pratique en vigueur de nos jours, il a parfois été choisi de soumettre à l'étude une question problématique sans pour autant que la réponse soit donnée dans l'heure. Ou encore, en suivant une démarche inverse de celle sous laquelle se déroule ordinairement l'enseignement des mathématiques, partir de questions problématiques et ne lancer l'étude que parce que celle-ci peut contribuer à l'élaboration de réponses, éventuellement partielles, aux questions posées. À titre de seul exemple sur la disparition de questions motivant les mathématiques, est particulièrement significative la place accordée à l'étude de cette figure emblématique qu'est le triangle, au Collège et au Lycée. De multiples propriétés en sont démontrées de diverses manières. Mais qui parmi les professeurs de mathématiques peut encore donner les raisons justifiant d'accorder une telle importance à la géométrie du triangle dans le secondaire ? En quoi cela informe-t-il l'élève sur le monde actuel, à venir ou passé ? Où se trouve le sens d'une telle étude mathématique pour les élèves ? Ainsi certains contenus de programme semblent perdurer parce que dans la tradition, l'héritage scolaire, que les enseigner apparaît « bel et bon » sans plus d'interrogations sur la pertinence de cet enseignement : il n'apparaît guère que purement gratuit et formel à une majorité d'élèves, et on peut s'interroger sur l'avenir d'un tel enseignement. Sur ce seul cas, et il y en a bien d'autres, on a perdu de vue les questions fondamentales que les propriétés de l'objet permettent de résoudre. Dans cette courte contribution, nous montrons trois brefs extraits de propositions d'enseignement que des équipes AMPERES ont faites sur ce thème, et qui peuvent s'articuler en un parcours d'étude et de recherche courant sur plusieurs niveaux.

Partie I. Construction de triangles et inégalité triangulaire en 5e[82]

L'extrait du travail de l'équipe clermontoise porte sur un petit point du programme de 5e :

Construction de triangles et inégalité triangulaire	Construire un triangle connaissant : - la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents, - les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés, - les longueurs des trois côtés.

[82] Geneviève Le Quang et Robert Noirfalise, Equipe Ampères, groupe de l'IREM de Clermont-Ferrand

Cette partie de programme apparaît, de prime abord, comme le vestige d'une époque révolue où l'on étudiait les cas d'égalité des triangles, ce qui permettait alors de déterminer des longueurs et des angles, de démontrer des propriétés de configurations. Le programme ajoute d'ailleurs « ces constructions permettent un premier contact (implicite) avec les trois cas d'isométrie des triangles (théorèmes rencontrés en classe de seconde) ».

En observant la structure du programme et en utilisant l'échelle des niveaux de co-détermination didactique proposée par Yves Chevallard, « Constructions de triangles et inégalité triangulaire » apparaît comme un thème d'étude. C'est un déterminant pour le professeur car, inscrit dans le programme, il se doit de le traiter. ***Comment en rendre l'étude dynamique? Comment répondre à une telle question de façon quelque peu générique ?*** Il ne s'agit pas en effet de fournir « clés en main » quelques pratiques satisfaisantes, mais bien de construire des praxéologies professorales qui permettent, à ceux qui en ont la charge, de piloter un enseignement dynamique.

Une première réponse est de rechercher des questions à fort pouvoir générateur d'étude et de recherche et qui aient un rapport avec le thème ! Pour ce faire, ne pas aller vers une spécification du thème en sujets, comme cela semble se faire ordinairement et correspond à une descente dans l'échelle des niveaux de co-détermination didactique, mais au contraire remonter vers les secteurs, le domaine, la discipline. À la lecture du programme, le thème est inscrit dans le secteur « figures planes » du domaine « Géométrie ». Le secteur « figures planes » ne nous convient guère ici, car il nous paraît difficile de répondre à la question « Pourquoi étudier des figures planes ? » Il nous faudrait trouver des raisons d'être de l'étude des figures planes. En revanche, en nous plaçant au niveau de la géométrie, nous pouvons trouver deux grandes questions génératrices d'études et de recherches :

- Comment déterminer des grandeurs géométriques : longueurs, aires, volumes, angles ? Cette grande question générique peut, elle-même, se décomposer en d'autres telles que « Comment déterminer la distance entre deux points dont l'un au moins est inaccessible ? Comment déterminer l'aire d'une surface? »
- Comment construire une figure géométrique satisfaisant à des spécifications données ? Nous pouvons citer ici des exemples plus spécifiques pouvant faire l'objet d'AER (Activités d'Etude et de Recherche) : Peut-on construire un cercle passant par deux points, par trois points? Peut-on carrer un rectangle?

Chacun de ces deux grands types de questions peut se décliner en « Parcours d'Etudes et de Recherches (PER) », tant les questions problématiques pouvant le jalonner sont diverses et

multiples selon les conditions du problème posé. Dans cette façon de concevoir une dynamique d'étude de la géométrie, celle des figures géométriques n'est pas première mais est motivée dans un tel parcours pour répondre à une question portant sur la détermination d'une grandeur géométrique, ou encore pour résoudre un problème de construction géométrique.

La lecture du programme peut nous conduire à penser que le thème est à classer dans le secteur des constructions géométriques « Construire un triangle connaissant... » Certes, il conviendra que les élèves sachent techniquement réaliser de telles constructions et à quelles conditions, à partir de la donnée de trois longueurs pour les côtés, la construction est possible (inégalité triangulaire) ; mais ce sont là des tâches bien insignifiantes si on ne sait pas pourquoi on peut être amené à réaliser de telles constructions. On est donc conduit à se poser la question du pourquoi de ces constructions et donc à se demander « ***quelles en sont les raisons d'être?*** » L'une d'elles, relative aux triangles[83], apparaissait dans d'anciens programmes traitant des cas d'égalité : ces derniers permettaient de déterminer la longueur d'un segment en montrant que celui-ci avait même longueur qu'un autre. Le principe consiste à utiliser des triangles « égaux », c'est-à-dire superposables. On est amené à construire un triangle qui soit superposable à un autre ! Cette technique d'usage de triangles superposables conduit alors à se demander à quelles conditions des triangles le sont.

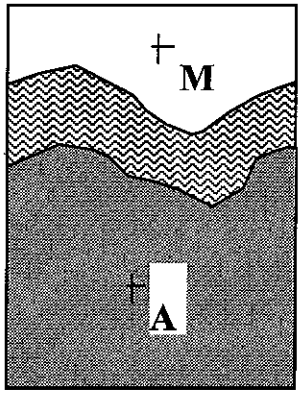
On obtient ainsi une première esquisse d'une dynamique d'étude. D'abord une première question à résoudre « comment déterminer une longueur que l'on ne peut mesurer directement, autrement dit une distance inaccessible ? » Puis, répondre à cette question à l'aide de triangles superposables. Se demander alors, et ce sera la deuxième question motivée par la réponse à la première, « Quelles données suffisent à caractériser un triangle ? » Cette deuxième question, formulée classiquement, étant ici comprise dans le sens « Quelles données sur un triangle suffisent pour pouvoir en construire un autre qui lui soit superposable ? » L'étude engagée, cette dernière question conduit elle-même à des questions qualifiées de « cruciales ». Car d'une part, aux yeux des élèves, leur abord apparaît nécessité par la dynamique de l'étude, s'imposant quasiment à partir d'elle, et

[83] Il y en a d'autres : les triangles servent aussi à la détermination des aires d'une surface plane : on découpe, de façon éventuellement approchée, la surface en triangles. Sachant calculer l'aire d'un triangle, on sait calculer, de façon approchée, l'aire de la surface. Avec une telle raison d'être, il conviendrait de se demander quelles sont les données utiles pour déterminer l'aire d'un triangle ou encore se demander si avec de telles données on peut en calculer l'aire et si oui, comment ? Connaissant les longueurs des trois côtés d'un triangle, peut-on en calculer l'aire ? La formule de Héron est une réponse à cette dernière question.

d'autre part, du point de vue enseignant, surgissent ainsi les questions permettant de traiter des cas d'isométries… et aussi de cas où il n'y a pas isométrie.

Une activité d'étude et de recherche (AER) a été expérimentée dans une classe de 5e par une enseignante participant à la recherche. Nous la décrivons telle qu'elle a été réalisée. Quelques remarques au fil du texte évoquent d'autres voies qui peuvent être envisageables.

1° Tout d'abord une question portant sur une détermination de distance inaccessible :



Déterminer la longueur du segment $[AM]$.
On n'a pas le droit de dépasser la berge du fleuve qui est du côté du point A.

Le dessin de gauche se trouvait sur une feuille 21 × 29,7 fournie par le professeur en tant que micro-espace modélisant un macro-espace évoqué. La partie de la feuille sur laquelle les élèves étaient autorisés à travailler était recouverte d'une feuille rose. Les élèves disposaient de leurs instruments de géométrie et « d'appareils de visée » sommaires. Cette situation a pour fonction de simuler sur feuille de papier un problème effectif de détermination d'une distance inaccessible, problème qu'un géomètre topographe peut avoir à résoudre. Un commentaire du professeur évoque cette situation du monde, précisant que les topographes peuvent mesurer des distances entre points accessibles – l'accessibilité dépendant des outils dont dispose l'opérateur –, effectuer des visées d'un point à un autre et mesurer des angles. Au passage, s'il existe bien d'autres outils, comme les laser mètres, pour déterminer des distances entre points, la triangulation et le recours aux propriétés du triangle et à la trigonométrie restent encore une pratique contemporaine des topographes.

Les élèves de 5e ne pensent généralement pas à placer un point B et à faire les « relevés » nécessaires pour tracer un triangle $A'B'M'$ « isométrique » du triangle ABM. Aussi le professeur leur montre-t-il comment faire, et justifie ainsi que l'on s'intéresse aux triangles et à leur détermination. Notons, c'est d'importance, que nous nous émancipons ainsi du principe voulant que dans une activité problématique, les élèves puissent avoir, grâce à leur seul répertoire de connaissances, la possibilité d'élaborer eux-mêmes une stratégie de

résolution[84]. Leur répertoire de connaissances leur permet néanmoins de comprendre le problème posé.

2° La technique de résolution avec construction d'un triangle superposable étant proposée par le professeur, selon le principe de questionnement dynamique évoqué ci-dessus, une deuxième question est posée : « Comment déterminer un triangle ? » Pour étudier cette question, le professeur propose alors aux élèves la succession de tâches suivantes[85] :

1 – Sur une feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm, 8 cm et 6,5 cm. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les angles de ce triangle ?

Cette question est traitée rapidement : les élèves comprennent le problème posé, tracent avec la règle et le compas (nous sommes au mois de décembre) le triangle demandé, et sont convaincus de la superposabilité de toutes les figures de la classe. Ils effectuent les mesures des angles et ils peuvent vérifier leur construction grâce au calque du professeur.

2 – Sur une deuxième feuille posée sur le bureau, j'ai dessiné un triangle dont les angles mesurent 59°, 74° et 47°. Sans te déplacer, peux-tu trouver combien mesurent les côtés de ce triangle ?

Pour cette deuxième question, les élèves poursuivent le travail commencé dans la question 1 et construisent un triangle connaissant ses trois angles. Très rapidement, certains se rendent compte qu'il n'y aura pas superposabilité des figures – la longueur du premier segment tracé étant indéterminée –, d'autres poursuivent méticuleusement leurs tracés. En comparant les figures obtenues par des voisins, il est facile de répondre que le triangle obtenu n'est pas unique ; par conséquent, il n'est pas possible de donner les longueurs des côtés du triangle dessiné par le professeur. Les élèves dessinent alors un deuxième triangle

[84] Nous n'ignorons pas pour autant le problème du paradoxe du professeur mis en évidence par G. Brousseau. Le fait de s'autoriser à donner des réponses existant dans la culture nous conduit à nous interroger sur les conditions pouvant faire que les élèves acceptent ces réponses sans pour autant se soumettre à l'autorité professorale, mais à l'autorité du contenu. Cette question didactique est d'importance et est abordée, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), à partir de la dialectique des médias et des milieux. Sur cet exemple, on aurait pu imaginer que les élèves soient invités à rechercher dans divers médias (ouvrages ou Internet) des informations qui leur manquent sur les « relevés » topographiques.

[85] Notons que ce qui est proposé revient à « transposer » par la nécessité de « ne pas se déplacer » dans le méso-espace de la classe, l'impossibilité évoquée de mesures directes due à « l'inaccessibilité » des distances réelles dans le macro-espace.

ayant les mêmes angles que le précédent, mais « beaucoup plus grand ou beaucoup plus petit » que le premier tracé.

3 – Est-ce que 2 données suffisent pour déterminer un triangle ?
Est-ce que 3 données suffisent pour déterminer un triangle ?
Est-ce que 4 données suffisent pour déterminer un triangle ?

Avant de donner ces questions, le professeur avait conduit les élèves à remarquer qu'on peut effectuer six mesures dans un triangle et que « déterminer un triangle » signifie obtenir des triangles tous superposables. Cette remarque pourrait donner lieu à une question cruciale que l'on pourra tenter de faire vivre ultérieurement, dans une autre classe confrontée pour la première fois à ce même travail ; ce qui poussera peut-être les élèves à se poser eux-mêmes les questions de la troisième consigne.

Les élèves sont invités à faire des essais avec des valeurs de leur choix, et il n'est plus fait référence au triangle de la première question, sauf pour éventuellement déboucher sur des impossibilités, des cas particuliers…

2 données : les élèves essaient 2 côtés, 2 angles, 1 côté et un angle et dessinent plusieurs triangles.

3 données :

3 côtés : les élèves font référence à la première question et proposent des valeurs qui ne posent pas de problème pour les longueurs des côtés. Si besoin, il conviendra ultérieurement, après l'étude des trois « cas », que le professeur relance l'étude en disant « si vous choisissez trois nombres au hasard, êtes-vous sûrs que vous pouvez construire un triangle dont les mesures des côtés sont ces trois nombres ? » C'est une nouvelle question cruciale qui surgira peut-être d'elle-même devant des tentatives d'élèves qui auraient échouées ; elle permet d'engager l'étude de l'inégalité triangulaire.

2 côtés, 1 angle : Plusieurs élèves obtiennent une figure comme celle de l'exemple ci-contre qui est le cas attendu :

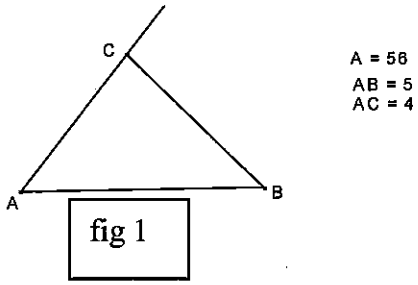


fig 1

D'autres élèves obtiennent la figure 2 : l'angle $\hat{A}$ n'est pas l'angle compris entre les deux côtés donnés qui sont ici $[AB]$ et $[BC]$.

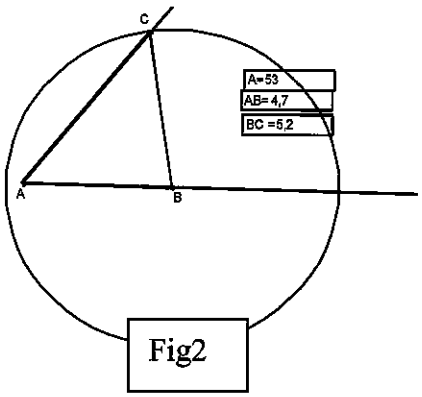


Fig2

Dans ce cas, le professeur invite les élèves à faire d'autres essais, ou propose lui-même des données afin de faire apparaître les figures 3 et 4.

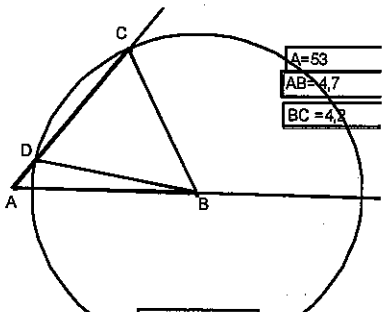


fig3

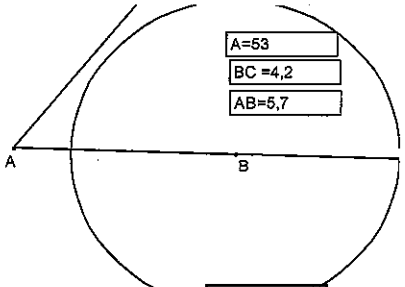


fig4

Une discussion et une institutionnalisation locale sont nécessaires pour ne pas retenir ce « cas ».

1 côté, deux angles : pas de difficultés particulières mais, cette fois encore, c'est le professeur qui doit intervenir et demander si l'on peut choisir au hasard les deux nombres qui sont les mesures des angles. La troisième partie de la question 3 se règle oralement avec la classe entière. L'étude se poursuit par l'inégalité triangulaire et, en conformité avec le programme de la classe de 5^{e}, par des exercices classiques de construction.

Notons, en guise de transition avec ce que présentent les équipes de Marseille et Bordeaux, qu'on peut regretter – contrainte relative au programme obligeant - de ne pas pouvoir utiliser la dynamique ainsi produite en poursuivant par l'étude de triangles semblables. En effet, réduire pour déterminer une longueur comme *AB* dès lors que *AB* est grande est une idée à la portée des élèves. De plus, certains élèves ont remarqué, au cours du travail précédent, que des triangles ayant trois angles égaux ne sont certes pas nécessairement superposables, mais qu'ils ne sont cependant pas sans lien entre eux…

Partie II : Un PER sur la similitude qui débute avec le théorème de Thalès en 4e[86]

La forme traditionnelle d'enseignement du théorème de Thalès en 4e

Dans le premier alinéa du programme de 4e concernant la géométrie, on trouve sous l'intitulé « triangles », et dans cet ordre, les paragraphes « milieux et parallèles », puis « triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes ». C'est l'ordre que suivent les manuels et, par conséquent, un usage très fréquent chez les professeurs. Le choix d'une telle progression ne trouve sans doute son origine que dans une transposition didactique s'appuyant sur l'idée qu'il est plus facile d'étudier d'abord le particulier pour aller vers le général. Après que les propriétés directe et réciproque de « la droite des milieux » ont été démontrées, la propriété dite de Thalès arrive comme une généralisation ; on peut en démontrer quelques cas particuliers pour des valeurs rationnelles du rapport ; certains manuels en proposent une démonstration proche de celle des *Eléments d'Euclide*, par les aires. Enfin, des applications de la propriété de Thalès sur quelques exercices de calculs de distances inaccessibles sont proposées.

On voit assez bien comment, en conséquence, les raisons qui motivent l'étude de ces propriétés ne sont pas transparentes pour les élèves puisqu'il n'ont l'occasion de les rencontrer que lors des derniers exercices d'application du chapitre, s'ils y arrivent ; par exemple dans des problèmes de distances inaccessibles dont les manuels fournissent des exemplaires. Certains élèves saisiront peut-être là l'occasion d'une première rencontre avec un problème motivant l'étude du théorème de Thalès, et feront pour eux-mêmes le parcours d'étude à l'envers... Beaucoup d'autres, nous en sommes convaincus, considèreront une fois de plus que « les maths, on les fait parce qu'on nous dit de les faire », ou on y renonce..., mais « il n'y a pas grand-chose à comprendre ! »

Une brève analyse

Nous sommes d'abord partis à la recherche de raisons qui pourraient motiver que l'on s'intéresse, tant de l'intérieur des mathématiques que du point de vue d'élèves de 4e, à l'étude du théorème de Thalès « dans les triangles ». On peut voir ce théorème comme se rapportant, dans des cas particuliers, à de problèmes « d'agrandissements et réductions » comme l'écrivent les programmes de 4e et 3e, quoique la rencontre avec de tels problèmes

[86] Yves Matheron, Alain Mercier, Marie-Christine de Redon, IREM d'Aix-Marseille et INRP, UMR-ADEF.

ait eu lieu bien avant ; sans doute dès l'école primaire, en tout cas dès l'étude du thème des échelles en 6e. Au-delà de ce que le programme appelle « agrandissements et réductions », se trouve la notion de similitude ; à ce propos, D. Hilbert note, dans *Les fondements de la géométrie*, que le théorème de Thalès est le « théorème fondamental de la similitude ». Le problème didactique posé peut donc devenir celui de la rencontre des élèves avec le concept de similitude, de telle manière que l'étude du théorème de Thalès soit vécu dans le travail de la classe comme une nécessité pour répondre à une ou des questions relevant de la similitude ; notamment de celle des triangles. Partir ainsi d'une question générant davantage de mathématiques que celles issues du seul théorème induit deux conséquences didactiques :

- L'ordre de la progression traditionnelle – d'abord la droite des milieux, ensuite le théorème de Thalès – est inversé. On rencontre d'abord la notion de triangles semblables, au cours de laquelle on étudie expérimentalement les relations entre longueurs des côtés. On réduit la propriété observée à l'énoncé de la propriété de Thalès en conformité avec le programme. À la suite de cette étude, la rencontre avec la propriété « parallèles et milieu » est vue comme preuve très partielle du théorème, dans le cas du rapport $\frac{1}{2}$. Ce cas établi, on peut alors le démontrer dans d'autres cas particuliers (rapports $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, etc.), et nous nous en contenterons ; c'est une manière courante en mathématiques dont une illustration tient par exemple dans l'histoire de la démonstration du théorème de Fermat. Dans une institution didactique, le professeur peut attester de la validité du savoir garantie par une autre institution mathématique que celle de la classe ; on dira donc que l'on admet le théorème lorsque le rapport est quelconque. Enfin on énoncera et démontrera la réciproque, dont un cas particulier est appelé « propriété de la droite des milieux ».
- La question étant relative à une notion mathématique de plus grande ampleur – la similitude –, elle a un fort pouvoir générateur d'étude. Elle pourra ainsi se décliner sous forme de reprises du travail de la question, dans un parcours d'étude et de recherche courant sur plusieurs années : les « agrandissements-réductions » en 4e et 3e, les « triangles de même forme », comme les désigne le programme de 2de, l'homothétie en 1re S et enfin les similitudes, directe et inverse, en Terminale.

Nos propositions

La question initiale, posée aux élèves, porte sur l'étude des triangles en fonction de leurs angles : que peut-on dire d'un triangle dont on connaît un angle ? deux angles ? les trois angles ? Des triangles de ce type ayant été construits par les élèves, il s'agit ensuite de les observer et les « comparer » ; autrement dit d'évaluer leur degré de… similitude. Pour cela, et afin de les « transporter », l'utilisation du papier calque est nécessaire.

Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de l'organisation didactique que nous avons conçue et qui a servi de support aux séances passées dans plusieurs classes de 4e. Cette présentation intègre les éléments d'analyse *a posteriori* qui nous ont conduit à modifier quelques-unes des parties.

Afin que les élèves puissent voir « émerger » la propriété saisissante que constitue le théorème de Thalès, il est nécessaire d'organiser un milieu pour cela. Le terme de milieu est à entendre dans un sens élargi par rapport à celui qui lui est primitivement donné en TSD. Il s'agit en fait de ce que l'on pourrait nommer un « milieu pour l'enseignement » (Matheron, 2000) ou de la « construction d'une référence commune » (Sensevy et Mercier, 2007) propre à l'institution-classe à un moment donné de son histoire didactique. On part de la définition qu'en donne Y. Chevallard, (1992[87]); le milieu apparaît ainsi dans une dimension qui le fait voir sous un jour nouveau, comme ensemble des rapports personnels qui se sont stabilisés en conformité aux rapports institutionnels, rapports socialement partagés, non questionnables car ils vont de soi au moment considéré de l'histoire de la classe. Les deux premières étapes, présentées ci-dessous, constituent un temps nécessaire à la construction du milieu au sens où nous l'entendons, afin que puisse avoir lieu la première rencontre des élèves avec la propriété qui est l'objet d'étude, et l'étude elle-même : la proportionnalité des côtés de triangles « en situation » de Thalès.

---

[87] « À chaque institution I est associé un ensemble d'objets, O_I, dit ensemble des objets *institutionnels* (pour I), qui est l'ensemble des objets O que connaît I, c'est-à-dire pour lesquels existe un rapport institutionnel $R_I(O)$. […]. Pour toute institution I, il existe ce que j'appellerai un *temps institutionnel* t_I. L'ensemble O_I dépend de $t=t_I$, et il serait donc plus exact de la noter $O_I(t)$. […]… à chaque "instant" t, de nouveaux objets institutionnels apparaissent, tandis que d'autres disparaissent (pour n'être plus, par exemple, qu'institutionnellement visibles depuis I). Il en va de même des rapports institutionnels $R_I(O, t)$.[…]
On désigne par $C_I(t)$, et on nomme contrat institutionnel relatif à I au temps t, l'ensemble des couples $(O,R_I(O, t))$, où O est un élément de $O_I(t)$. On nomme alors milieu institutionnel relatif à I au temps t, et on note $M_I(t)$, le sous-ensemble de $C_I(t)$ formé des couples $(O, R_I(O, t))$ "stables" au temps t. […] les éléments $(O, R_I(O, t))$ qui constituent le milieu – les éléments "stables" – sont ceux qui, subjectivement, c'est-à-dire pour les sujets de l'institution I, […] apparaissent comme *allant de soi*, *transparents*, *non problématiques*. »

Première étape

Ayant étudié en 5e les situations où des triangles avaient des côtés de longueurs égales, la classe est engagée par le professeur dans la recherche de la question : *qu'obtient-on quand on construit des triangles vérifiant des conditions sur leurs angles, par exemple quand on fixe la valeur d'un angle ?*

Une feuille de papier calque a été distribuée à chaque élève, et le professeur demande de tracer un triangle dont un angle mesure 43°, par exemple ; puis de comparer le triangle obtenu avec ceux des voisins de groupe. Que peut-on en dire ? Les élèves ne trouvent rien de particulier à dire et ils ont raison : les triangles qui ont un même angle ne montrent pas de particularité intéressante.

On s'interroge alors sur ce qu'il se passe lorsqu'on fixe deux angles. Sur la même feuille de papier calque, le professeur demande que chacun construise un triangle ABC tel que $\hat{A} = 43°$ et $\hat{B} = 115°$ et compare son triangle avec ceux des voisins de groupe.

Très vite apparaît l'idée que deux angles donnés c'est comme trois, car le troisième était fixé par la propriété de la somme des angles d'un triangle, propriété bien connue des élèves. Cela permet même à certains d'entre eux de trouver que leur angle « de 115° » est faux, puisque le troisième angle qui devrait mesurer 22° d'après le calcul est autre. Il y a là une dialectique de la géométrie expérimentale (construction) et de la géométrie théorique (un théorème dans ce cas) ; l'une et l'autre fournissant à tour de rôle des informations et des moyens de contrôle « sur l'autre et l'une ».

Pour pouvoir « comparer deux triangles », les élèves essaient de faire coïncider deux à deux des côtés ou des sommets. La configuration de Thalès apparaît ainsi dans l'expérience de comparaison des triangles par superposition des calques. L'utilisation du papier calque règle le problème des similitudes directes ou inverses ; les élèves manipulent le papier calque et le retournent lorsque nécessaire. La question du déplacement ou du retournement est « transparente » ; elle n'est pas vue en tant que problème, donc en tant que question qui mériterait une étude à ce niveau. Dès que la configuration apparaît dans quelques groupes, c'est au professeur d'interrompre le travail et de proposer une mise en commun, en donnant la parole à ceux qui l'ont trouvée ; ce sont d'ailleurs ces élèves qui veulent parler, car la découverte est saisissante. Ceux qui ne l'avaient pas obtenue la recherchent alors, la trouvent facilement et l'explorent à partir des sommets en tentant de superposer successivement les trois angles, un à un. La démarche de travail est collective dans la classe, au sein des élèves, mais le professeur a un rôle essentiel à jouer dans la direction de

ce travail ; il ne laisse pas la situation avancer toute seule, il intervient en fonction des informations qu'il prend.

Ainsi, si les constructions ne sont pas faites avec suffisamment de soin, les parallèles n'apparaissent pas dans certains groupes ; ce qui n'est pas grave si un groupe au moins les a mises en évidence. Après la mise en commun, les élèves qui n'y sont pas parvenus vérifient alors de nouveau leurs angles car ils aimeraient bien avoir les parallèles ; s'ils ne le font pas, c'est au professeur à les y inciter à le faire.

Si la configuration n'apparaît pas, on passe au « défi » présenté plus loin dans ce texte, après l'institutionnalisation suivante, et sans la conjecture**.

Institutionnalisation :

Propriété : la somme des angles d'un triangle est 180°.

Nous en déduisons la mesure du troisième angle : 180° - (43° + 115°) = 22°.

Cela nous permet par exemple de vérifier qu'on a bien construit les deux angles donnés

Propriété : Si on connaît deux angles dans un triangle le troisième est déterminé.

Définition : Deux triangles qui ont les mêmes angles sont appelés triangles semblables.

Conjecture : Lorsque des triangles sont semblables, il semble que si on les superpose en faisant coïncider un angle (sommet et support des côtés, quitte à retourner le calque), les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.

P relève les calques sur lesquels chacun écrit son nom et les re-distribue lors de la prochaine séance car ils sont nécessaires pour la suite. Il corrige les angles de mesures erronées.

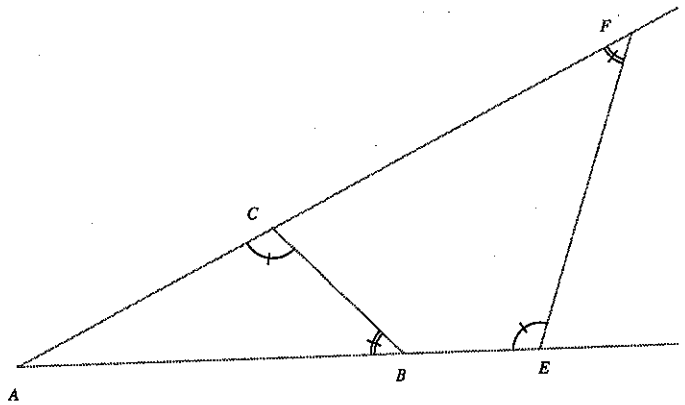
Le caractère relatif *à l'étude* est essentiel dans une activité ou un parcours (d'étude et de recherche). G. Sensevy (1994) a pu montrer que la dévolution aux élèves d'un espace (un *topos*) à partir duquel le savoir puisse apparaître comme le résultat d'une étude collective, menée par les élèves sous la direction du professeur, suppose que le dispositif rende les élèves « chronogènes » ; c'est-à-dire « constructeur du temps de l'étude ». En partant du point où en sont arrivés les élèves après constructions et comparaisons des triangles sur les calques et en poursuivant l'engagement dans une dialectique de l'expérimental et du théorique, l'étude nécessite contractuellement que la conjecture soit mise à l'épreuve d'une démonstration mathématique. Il apparaît naturel que cette recherche fasse l'objet d'un

travail mené dans un temps et un lieu extérieurs à ceux de la classe ; ceci afin de faire, dans un deuxième temps, avancer la reprise de l'étude en classe.

C'est donc l'objet d'un travail à la maison dont l'énoncé peut être construit en classe par les élèves, sous la direction du professeur qui articule ainsi chacune des étapes du travail d'étude : « Trace un triangle *ABC* de ton choix et construis un triangle *AEF*, semblable au triangle *ABC*, tel que les côtés [*AE*] et [*AB*] aient pour support la même demi-droite, ainsi que les côtés [*AF*] et [*AC*]. Démontre que les droites (*BC*) et (*EF*) sont parallèles. »

Deuxième étape

Le travail donné à la maison est corrigé. Avoir engagé les élèves dans cette recherche permet de faire vivre un certain nombre de questions qui font partie d'une culture mathématique à transmettre, et qui se vit plus facilement qu'elle s'énonce. Ce « résultat » avait été établi dans le cadre d'une géométrie expérimentale : était-il prévisible, explicable, déductible du point de vue de la géométrie théorique dont on dispose ? Les droites sont-elles parallèles dans le cadre de cette géométrie ? De fait, certains élèves se sont peut-être aperçus que l'énoncé du problème méritait une sérieuse retouche si l'on souhaitait en faire un résultat valide dans le cadre de la géométrie théorique : il est nécessaire de préciser auquel des deux angles $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ est égal chacun des angles $\hat{E}$ et $\hat{F}$ car, sinon, le parallélisme de (*CB*) et (*EF*) n'est pas garanti. C'est l'expérience « qui a parlé », en construisant au moins une figure qui vérifiait l'énoncé du problème, mais pas sa conclusion. De fait, pour une telle configuration, il est impossible d'utiliser le résultat théorique qui énonce que si les angles correspondants sont égaux alors les droites sont parallèles.

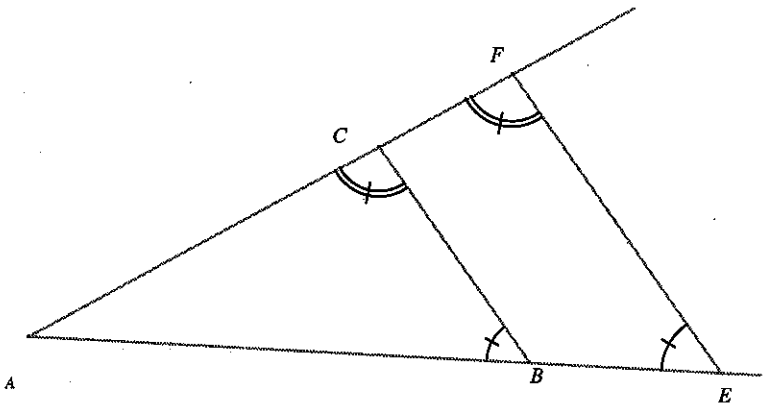


Si ce constat n'apparaît pas, du fait de la « transparence » entre similitudes directe et inverse évoquée plus haut et de l'adidacticité trop faible du milieu associé au problème posé, c'est alors au professeur de faire rencontrer à la classe l'insuffisance des hypothèses

du problème donné. Le nouveau travail qui vient d'être mené aboutit à l'institutionnalisation du résultat suivant :

Propriété :

ABC et AEF étant deux triangles semblables avec $E \in [AB]$ et $\hat{E} = \hat{B}$, $F \in [AC]$ et $\hat{F} = \hat{C}$, alors les droites (BC) et (EF) sont parallèles.



Une nouvelle question émerge alors, qui peut être amenée par des élèves car une certaine culture mathématique a commencé de s'installer en 4e, ou bien encore qui est posée par le professeur si ce n'est le cas : celle de la réciproque de la propriété qui vient d'être énoncée. En poursuivant le même objectif d'une continuité de l'étude entre les divers lieux et temps qui la voient se dérouler, le travail de recherche de la validité de la réciproque peut être mené à la maison, et guidé par un énoncé élaboré collectivement en classe.

« Soient un triangle *EFG* et une droite parallèle à (*FG*) qui coupe [*EF*] en *P*, et [*EG*] en *R*. Peut-on affirmer que les triangles *EFG* et *EPR* sont semblables ? Prouvez votre réponse. »

Revenant au cours de la séance, le professeur annonce : « Vous avez trouvé beaucoup de triangles semblables. Je vous mets au ***défi*** de construire sur chacun de vos calques, tous de même dimension, un triangle semblable aux autres, mais très grand ; celui qui aura construit le plus grand en respectant la condition de similitude aura gagné. C'est un travail individuel et le professeur distribue du papier transparent. Au bout des 10 minutes, dans chaque groupe, les élèves sélectionnent le plus grand des trois ou quatre triangles ; en même temps ils vérifient évidemment leur similitude. Puis collectivement la classe sélectionne le plus grand triangle parmi ceux proposés, en utilisant pour cela un rétroprojecteur.

La configuration devrait facilement s'imposer pour la comparaison et apparaître à ceux qui ne l'auraient pas encore rencontrée au cours de la première étape. Il est essentiel que la comparaison collective soit effectuée par des élèves (plusieurs), et que ce ne soit pas le professeur qui la fasse, en sortant de sa poche la configuration : les élèves font « coulisser » une parallèle à un côté, le plus loin possible sur leur calque, sachant par avance qu'ils obtiendront ainsi un triangle semblable au premier. Le professeur demande au vainqueur de présenter sa méthode et fait remarquer que les trois côtés « grandissent ensemble » ; lorsque cela semble ne pas être le cas, c'est que les triangles ne sont en fait pas semblables. Les élèves vérifient avec leurs triangles et tombent d'accord sur l'idée des trois côtés qui « grandissent ensemble ».

Le professeur propose alors que l'on fasse le point sur la question initiale qui portait sur les angles. Il apparaît qu'on y a répondu dans les divers cas qui se présentaient à la recherche – un, deux et trois angles – ,dans la mesure où l'on vient de trouver des propriétés relatives aux côtés – certains sont parallèles – et à leurs longueurs – ils grandissent ensemble !

Troisième étape

La correction du deuxième travail à rechercher à la maison permet de consigner un résultat :

Propriété :

Si dans un triangle EFG, une droite parallèle à (FG) coupe les côtés [EF] et [EG] respectivement en P et R, alors les triangles EFG et EPR sont semblables.

Il s'agit maintenant d'utiliser le modèle « triangles semblables » pour prédire les résultats par le calcul. Pour cela, le professeur annonce qu'il a lui-même fabriqué un triangle qui suit les mêmes contraintes que celles des triangles de la séance précédente (question 2) : un triangle ABC avec $\hat{A} = 43°$ et $\hat{B} = 115°$. Joignant le geste à la parole, le professeur présente le triangle découpé : « C'est bien un triangle semblable aux vôtres ? Vous pouvez vérifier si vous voulez ». Le triangle peut passer dans les groupes, mais le professeur le récupère avant de poser la question suivante. « J'ai choisi un côté $[AC]$ de longueur 60 cm : pouvez-vous trouver la longueur des deux autres côtés ? ». Le choix de la longueur 60 cm implique pour les élèves de ne pas pouvoir dessiner le triangle en vraie grandeur, même sur une copie double qui correspond au format A3 ; l'activité a aussi été testée avec 63 cm et 66 cm, sans changement significatif dans le travail des élèves. En présentant un « grand » triangle, on plonge les élèves dans un milieu où la notion d'agrandissement – réduction devrait apparaître : l'espace de la feuille A 4 habituelle et celui du grand triangle n'ont pas la même

échelle. Il s'agit ici de passer du méso-espace au micro-espace (Berthelot & Salin, 1992). Un tel changement d'échelle contraint à recourir à l'utilisation de la proportionnalité en tant que pré-construit (Chevallard, 1985) adhérent à l'expérience empirique de la similitude. Cela n'empêche pas que pour une minorité parfois significative d'élèves, agrandir ou réduire renvoient encore à un raisonnement de type additif, comme nous avons pu l'observer pour des élèves de 3e. Certains élèves peuvent demander s'ils peuvent mesurer les longueurs des côtés du grand triangle pour les trouver. Le professeur répond que « non, on ne peut pas mesurer, et qu'il faut les trouver depuis sa place, en pouvant toujours vérifier sa méthode avec les triangles semblables déjà obtenus sur les calques ». On retrouve en ce point la problématique du calcul des « longueurs inaccessibles ». Certains élèves peuvent vouloir vérifier la similitude des triangles. Certains se restreignent à n'utiliser que les triangles qu'ils ont déjà construits, d'autres en construisent de nouveaux dont les longueurs sont adaptées à la technique qu'ils explorent.

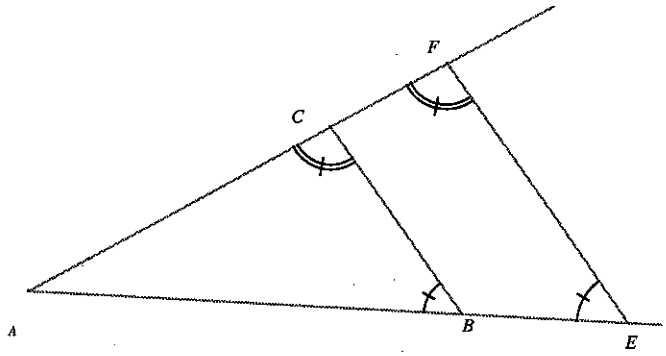
Quelques élèves ajoutent la même longueur à tous les côtés : cette méthode n'a souvent qu'une brève existence dans leur groupe, l'idée de la proportionnalité gagnant rapidement du terrain. Ceux qui se servent des triangles déjà construits trouvent en général un coefficient rationnel. Dès lors que l'un d'entre eux a « la chance » d'avoir un coefficient décimal, ou mieux entier, ou bien qu'un autre pense à construire un triangle *ad hoc*, l'idée diffuse très rapidement dans la classe. Les rationnels ne sont pas encore suffisamment familiers et les élèves les évitent dès qu'ils le peuvent... Ils passent alors de la mesure des côtés de leur triangle au calcul des côtés du grand triangle.

Une mise en commun des résultats a lieu : les propositions sont relevées dans ***un tableau***. Dans ce cas, c'est le professeur qui décide du type d'ostensifs à utiliser : les élèves ont déjà, en acte, utilisé la proportionnalité des longueurs, il s'agit maintenant de l'identifier en... la donnant à voir. Ce qui est évidemment l'une des fonctions d'un ostensif (Bosch & Chevallard, 1999) !

AC	AB	BC
60cm		
6cm		
10cm		

Lors de la mise en commun, plusieurs groupes trouvent les mêmes résultats, alors qu'ils ont des coefficients de proportionnalité différents. La méthode est alors acceptée, y compris par ceux qui ont fait des erreurs de calcul ou de choix de côtés, et qui corrigent. La conjecture de proportionnalité des longueurs des côtés des triangles semblables est forte, car elle devient l'élément technologique justifiant la technique que l'on a précédemment mise en œuvre. Elle s'impose comme une nécessité éprouvée expérimentalement, même si elle n'est pas validée « en raison » : c'est-à-dire depuis la théorie géométrique. On peut donc noter :

Conjecture : Si deux triangles sont semblables, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. En particulier, pour des triangles ABC et AEF dans la configuration suivante, les longueurs AB, AC et BC d'une part et AE, AF et EF d'autre part, sont proportionnelles.



Une fois encore, le travail donné à la maison constitue un prolongement d'étude : à défaut de le démontrer, on peut vérifier que deux triangles semblables déjà dessinés ont leurs côtés proportionnels, les élèves disposant pour cela des divers triangles qu'ils ont dû dessiner en classe.

Quatrième étape

La séance débute par la correction de ce travail. On appelle $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ les deux triangles de chacun des élèves, et on dispose les longueurs dans un tableau, dont on recherche le coefficient de proportionnalité pour arriver à l'égalité des rapports. On écrit ensuite le théorème de Thalès dans les triangles en tant que synthèse du travail mené :

Nous venons de vérifier sur plusieurs cas que :

Dans un triangle ABC :

Si E appartient à [AB] et F appartient à [AC), et si les droites (EF) et (BC) sont parallèles, alors on peut écrire : $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{EF}$ ***ou*** $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$.

C'est ce que nous appelons le « théorème de Thalès dans les triangles » et cette configuration géométrique est appelée « configuration de Thalès »

En conclusion

Si l'on demande à quoi sert le théorème de Thalès, il est fort probable que la réponse donnée par les élèves ayant vécu cette situation évoque la détermination de longueurs de segments, ceux des côtés d'un triangle, qui étaient hors de portée d'une mesure, et que cela correspond à un cas particulier de triangles semblables. Une autre des dimensions que cette proposition de début de PER tente d'atteindre est la conduite des élèves vers une rencontre avec la puissance du modèle mathématique dans sa confrontation à l'expérience : le modèle prédit les longueurs des côtés d'un « grand » triangle, c'est alors le modèle qui prédit comment doit être la réalité ! Des exercices à la maison relatifs aux distances inaccessibles trouvent alors leur sens, de même qu'a alors plus de chances d'en prendre l'enseignement des mathématiques... Comme indiqué dans les lignes qui ont précédé, l'étude se poursuit au Collège par la rencontre avec le théorème dans d'autres configurations, sa réciproque et les agrandissements / réductions, puis au Lycée par les cas de similitude, l'homothétie et les similitudes directe et inverse en tant que transformations. On dispose ainsi d'une esquisse de PER concernant les mathématiques de programmes s'étalant sur cinq à six années, et dont l'étude peut être relancée par des questions génératrices amenées par le professeur, en liaison avec les questions précédemment étudiées.

III. Enseigner le cosinus en 4e [88]

Nous utilisons depuis une quinzaine d'années les recherches en didactique pour mieux comprendre les difficultés des élèves et aussi pour analyser et construire des situations d'enseignement. Nous sommes impliqués dans la recherche AMPERES mais le travail que nous allons vous présenter avait débuté avant cela, avec les mêmes objectifs. Nous avons publié un article sur le sujet dans la revue *Petit x* dès 2004 dont l'aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique était le titre.

[88] A. Berté - J. Chagneau - L.Conquer - C. Desnavres - J. Lafourcade - M.C. Mauratille - D.Roumilhac - C. Sageaux, équipe AMPERES, Groupe didactique de l'IREM de Bordeaux

1) Pourquoi le cosinus est-il enseigné comme première ligne trigonométrique en 4e ?

Dans les actuels programmes de Collège, le cosinus doit être enseigné en 4e tandis que la tangente et le sinus ne sont abordés qu'en 3e. Ce primat donné au cosinus est un vestige des réformes successives de programmes. L'introduction du rapport de projection orthogonale – sans prononcer le mot de cosinus – d'un axe sur un autre a été faite pour la première fois en 3e lors de la réforme dite « des mathématiques modernes » de 1969. Il s'agissait d'admettre que le rapport de projection orthogonale d'un axe (*D*) sur un axe (*D'*) est le même que le rapport de projection orthogonale de (*D'*) sur (*D*). Dans cette construction théorique de la géométrie, le théorème de Thalès admis en 4e permettait de transporter la structure affine d'un axe à l'autre par projection d'une graduation. Cet axiome permettait en 3e de transporter la structure métrique, en l'utilisant pour définir la même unité sur tous les axes. L'axiome d'égalité du rapport de projection orthogonale servait à démontrer le théorème de Pythagore en 3e. Au cours des réformes successives la notion de rapport de projection, puis de projection même, a disparu des programmes. Le programme introduit maintenant le cosinus en partant des angles aigus d'un triangle rectangle. Le cosinus et le théorème de Pythagore sont appris actuellement en 4e mais sans lien nécessaire entre eux.

Des questions se posent : puisque tout lien a été rompu entre le cosinus et l'axiomatique de la géométrie métrique, pourquoi enseigner le seul cosinus en 4e ? Si on veut enseigner une seule ligne trigonométrique en 4e pourquoi le cosinus plutôt que la tangente ou le sinus ? En l'état actuel du programme, la tangente ne serait-elle pas plus utile pour organiser l'enseignement à partir de questions dévolues aux élèves : la tangente est en effet liée à la pente d'une droite, c'est-à-dire à l'alignement de points ?

Rien, dans les programmes actuels ou les commentaires, ne soulève une quelconque interrogation sur cette priorité donnée au cosinus. C'est l'un des acquis de la didactique que d'avoir rendu compte de ce phénomène : au fil les réformes successives, certaines notions continuent d'être enseignées alors que sont coupés les liens qui les rattachaient mathématiquement aux autres notions du programme. Or, en géométrie particulièrement, cette structuration théorique était souvent la seule source de sens conférée à l'ensemble de l'étude.

2) Enchaîner les questions pour aborder l'étude d'une ligne trigonométrique en 4e

2. 1. Questions concernant les triangles

Les élèves ont étudié en 5e la détermination des triangles par trois mesures : un côté compris entre deux angles, un angle compris entre deux côtés, ou trois côtés (cf. I). La conviction de la vérité de ces déterminations provient du fait que ces données permettent de les construire géométriquement. Une question se pose en 4e : « Combien d'éléments sont nécessaires pour déterminer un triangle rectangle ? »

La construction géométrique prouve que deux côtés suffisent, particulièrement l'hypoténuse et un côté de l'angle droit ; ce qui étonne car l'angle droit donné n'est pas compris entre eux. « Cela veut-il dire qu'avec la mesure de deux côtés quels qu'ils soient, on pourrait trouver par un calcul la mesure de tous les autres éléments du triangle rectangle ? Et si oui, comment ? » Plus généralement, puisqu'un triangle rectangle est déterminé par deux éléments seulement, un angle aigu et un côté ou deux côtés, « peut-on trouver la mesure de tous les autres avec ces deux éléments seulement ? » Les élèves savent déjà répondre en partie : la donnée d'un angle aigu permet de calculer l'autre car la somme des angles est égale à 180°. Il reste à répondre à trois questions :

- quand on connaît deux côtés, peut-on calculer le troisième ?
- quand on connaît deux côtés, peut-on calculer les angles aigus ?
- quand on connaît un angle aigu et un côté, peut-on calculer les autres côtés ?

Le premier problème est résolu grâce au théorème de Pythagore, l'étude d'une ligne trigonométrique permet de résoudre les deux autres. La question se prolonge pour les triangles quelconques : si on connaît les mesures de trois des éléments qui permettent de les construire, pourra-t-on calculer les autres ? Certains élèves de Collège peuvent poser la question. La réponse viendra plus tard, après le Collège.

2. 2. Questions concernant la similitude

Les élèves de 4e savent que des triangles ayant deux côtés communs et les deux autres côtés parallèles ont leurs côtés proportionnels et ont les mêmes angles, d'après la propriété de Thalès (cf. II) étudiée avant le cosinus. Cela est également vrai pour les triangles rectangles : les côtés sont nécessairement parallèles s'ils ont un angle aigu commun. Dans ce cas, tous ces triangles rectangles ont donc leurs côtés proportionnels.

Inversement si on constitue une famille de triangles rectangles tels que les rapports entre deux de leurs côtés soient le mêmes, ont-ils les mêmes angles ? La connaissance d'une quelconque des trois lignes trigonométriques donne la réponse. Ceci amène les élèves à considérer la ligne trigonométrique comme étant caractéristique non pas d'un triangle rectangle précis, mais de toute une famille de triangles rectangles ayant un même angle ; cela les conduit finalement à l'idée que le rapport ainsi défini caractérise un angle aigu. Naturellement la question va se poser pour des triangles quelconques qui auraient un angle commun compris entre deux côtés proportionnels. La réponse viendra en 3^e avec la réciproque du théorème de Thalès, puis s'élargira en 2^{de} avec les cas de similitude des triangles.

2. 3. Questions concernant les angles

Depuis la 6^e, nous répondons aux questions suivantes avec des outils différents selon les niveaux :

- Quand dit-on que c'est le même angle ? En 6^e nous abordons cette question en utilisant une situation basée sur un puzzle, inspirée de la thèse de M-H. Salin et R. Berthelot. Un des premiers objectifs en 6^e est d'arriver à la conclusion que la « grandeur » angle ne dépend pas de la longueur des côtés adjacents. Nous amenons ainsi, sans formalisation aucune, les classes d'équivalence de secteurs. Au Lycée, avec les angles orientés, le « même angle » signifiera « la même rotation ».
- Ces angles sont-ils mesurables ? Pouvoir reporter facilement une unité est nécessaire. Les élèves de 6^e sont amenés à construire un appareil de mesure se rapprochant progressivement du rapporteur usuel.
- Comment obtenir le dessin d'un même angle sans avoir de rapporteur ? En 5^e, conformément au programme, nous traitons les angles déterminés par deux parallèles et une sécante, la somme des angles d'un triangle, la détermination des triangles par la mesure des angles et des côtés. Ce dernier point conduit les élèves à trouver qu'un angle peut se reproduire par une prise d'information sur les longueurs des côtés d'un triangle arbitraire dans lequel on peut l'inclure. Cela nécessite donc la donnée de trois informations si le triangle est quelconque, et deux informations s'il est isocèle. De plus, les théorèmes appris permettent de prouver des égalités d'angles de façon théorique dans des figures particulières, et de calculer certaines mesures d'angle à partir d'autres, données sur la figure.

- Peut-on reproduire sans rapporteur, puis déterminer la mesure en degré d'un angle à partir d'un seul nombre qui serait un rapport entre deux côtés d'un triangle rectangle ? La réponse est donnée en 4e. Pour ne pas nous éloigner du programme, nous traitons le cosinus d'un angle comme fonction bijective de l'angle dans l'intervalle étudié. En 3e, le professeur complète cette étude en introduisant sinus et tangente d'un angle aigu. Le choix des côtés dans le triangle rectangle n'a pas d'importance, notre cheminement proposé pour la 4e avec le cosinus peut se transposer à l'identique, quels que soient les deux côtés choisis dans le triangle rectangle, au cas où les programmes changeraient.

Au Lycée, cette étude se poursuivra par l'étude des angles orientés et des fonctions trigonométriques comme applications de R dans R. Le cosinus se situe donc en 4e à la croisée de ces trois types de questions. Il reste à voir l'essentiel, et le plus difficile pour l'enseignant : comment amener les élèves à se poser ces questions, dans quel ordre et à partir de quelles situations ?

3) Analyse mathématique du contenu dans le cadre des programmes

Voici ce que dit le programme de 4e : « Utiliser pour un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents » *(phrase 1)*, « Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné et de l'angle aigu dont on connaît le cosinus » *(phrase 2)*. Un commentaire rajoute : « La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueur . » *(phrase 3)*.

Il y a implicitement dans cette leçon deux théorèmes.

***Enoncé 1*: Si des triangles rectangles ont un même angle aigu, leur hypoténuse et le côté adjacent à cet angle sont proportionnels. En d'autres termes : il existe un rapport de proportionnalité, donc une fonction linéaire permettant de passer des hypoténuses aux côtés, et une deuxième fonction qui, à un angle associe un rapport.**

***Enoncé 2* : Lorsqu'un côté de l'angle droit et l'hypoténuse sont proportionnels dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle aigu compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même. En d'autres termes : cette deuxième fonction est bijective pour les angles aigus, elle permet d'associer un rapport à chaque angle et réciproquement, et elle n'a rien de linéaire.**

L'énoncé 2 ne figure sous aucune forme dans les leçons des manuels usuels, bien qu'il soit nécessaire de l'appliquer ensuite dans des exercices. Par conséquent, ce qui se fait d'habitude dans les classes se réduit à amener l'énoncé 1. En effet, le libellé du programme n'incite pas le professeur à construire sa leçon autrement puisque les phrases 1 et 3 mettent plutôt en avant l'énoncé 1. C'est seulement dans la phrase 2, concernant la calculatrice, qu'on utilise le fait que le cosinus caractérise l'angle aigu ; comme s'il s'agissait d'une application technique de ce qu'on vient d'apprendre, alors que sans l'énoncé 2 on ne peut pas comprendre comment on peut trouver l'angle à partir du cosinus. Doit-on laisser à la présence d'une touche sur la calculatrice le soin de convaincre les élèves de l'existence d'une fonction cosinus intéressante ? Sans mise en scène du savoir, organisée par le professeur, la calculatrice ne sert guère qu'à résoudre des exercices d'école dénués de sens.

Passage des triangles aux angles

Faire travailler les élèves dans plusieurs triangles rectangles amène une double difficulté : un triangle rectangle a deux angles aigus, le cosinus de l'un étant le sinus de l'autre. Il faudra surtout « oublier » les triangles si l'on souhaite parvenir à la définition du cosinus d'un angle, comme le demande le programme dans la phrase 2, et implicitement dès la phrase 1. Les énoncés 1 et 2 précédents doivent être formulés à nouveau sans référence aux triangles rectangles : à un angle correspond un cosinus et réciproquement. Il est donc nécessaire de ménager une troisième étape de reformulation des résultats en termes d'angles et non de triangles.

C'est donc ***l'analyse mathématique*** qui nous a permis dans un premier temps de distinguer deux étapes dans la progression et une nécessité de reformulation.

4) Enchaînement de problèmes et analyse didactique des situations au sens de la Théorie des Situations

Situation 0 : Première situation en deux temps

Consigne 1 : Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure la moitié de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Trois conjectures sont prévisibles, qui ont effectivement été observées : ce sont les mêmes triangles mais à une échelle différente, ou bien c'est le même triangle qu'on agrandit et qu'on rétrécit ; un des angles mesure la moitié de l'autre ; il y a un angle de 60° et un autre de 30°. Une question surgit. La mesure des angles avec le rapporteur se fait au degré près :

peut-on être sûr de ce que nous apprendra l'usage de cet instrument ? Les élèves possèdent à ce moment-là un savoir suffisant sur le triangle équilatéral pour se convaincre, à partir de la théorie géométrique et en complétant la figure, qu'il s'agit bien exactement d'angles de 30° et 60°.

On passe ensuite à une deuxième consigne :

Consigne 2 : Tracer trois triangles rectangles différents, chacun d'eux ayant un côté de l'angle droit qui mesure les $\frac{3}{4}$ de l'hypoténuse. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Les élèves réalisent une vérification empirique de la conjecture sur les angles en découpant les trois triangles et en les « empilant » pour superposer les angles de même mesure. Contrairement au cas précédent, ils ne peuvent pas la prouver théoriquement. Ceci donne l'occasion au professeur de faire la distinction entre une conjecture prouvée théoriquement pour les angles de 60° et une conjecture admise quand le rapport est $\frac{3}{4}$. Le professeur peut demander à chaque élève d'écrire les mesures des côtés pour les trois triangles, de façon à préciser un rapport de proportionnalité faisant passer d'un triangle à l'autre.

Le bilan des échanges sur le tableau conduit à conclure qu'on passe d'un triangle à l'autre à l'aide d'un rapport variable sur les longueurs, mais que, par contre, il y a un rapport fixe qui est $\frac{3}{4}$ entre hypoténuse et côté et à noter :

Il semble que lorsque des triangles rectangles ont un côté de l'angle droit et l'hypoténuse dans le même rapport de proportionnalité, alors ils ont les mêmes angles.

Remarquons que ce bilan permet d'expliciter le fait que si les rapports sont les mêmes les angles sont les mêmes, mais garde dans l'implicite que si les rapports sont différents ($\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$) les angles le sont. C'est la contraposée de la réciproque qui arrive en même temps que le théorème. Ceci est un phénomène très général. Quand le savoir visé est un théorème, et sa réciproque, l'organisation d'une situation en classe, même réduite à l'énoncé de simples conjectures comme c'est le cas ici, amène de façon amalgamée le théorème et sa réciproque sous forme de la contraposée de cette réciproque. Ce qu'on peut traduire par : si telle relation est vérifiée, on obtient la propriété attendue, si elle n'est pas vérifiée, la propriété n'est pas vraie. L'objectif de cette étape a été double :

- donner un sens à l'expression « rapport entre les longueurs des côtés du triangle rectangle », en faisant construire effectivement des côtés dans un rapport particulier.
- amener les élèves, à partir de deux cas particuliers, à l'idée du rapport de proportionnalité pour résoudre le problème qui va suivre pour lequel ils devront faire fonctionner, dans l'action, la réciproque : si les angles sont les mêmes alors les rapports sont égaux. C'est difficile car il y a plusieurs rapports de proportionnalité, et un seul doit être reconnu comme pertinent. Si cette étape manque, les élèves ne peuvent attaquer seuls le problème de l'étape suivante.

Situation 1 : problème de détermination d'une longueur dans un triangle rectangle

Dévolution du problème:

Les élèves doivent tracer trois triangles rectangles ayant tous un angle donné de 20° ou de 35° : par exemple, une rangée trace trois triangles ayant un angle de 20° et la voisine trois triangles ayant un angle de 35°. Le professeur demande de mesurer les hypoténuses et les côtés adjacents à l'angle de 20° ou 35°. À ce moment, le vocabulaire « côté adjacent à un angle » est rencontré. Le professeur donne alors le problème suivant : « il annonce qu'il possède plusieurs autres triangles rectangles ayant aussi un angle de 20°, mais hors d'atteinte des élèves. L'un de ces triangles est tracé au tableau et son hypoténuse mesure 98 cm. Il s'agit de prévoir, pour ce triangle, la mesure du côté de l'angle droit adjacent à l'angle de 20°. Le professeur annonce qu'il posera ensuite le même problème pour les autres triangles qu'il détient, en donnant aussi la mesure des hypoténuses. Les élèves ne peuvent plus rien tracer ni mesurer, mais ils ont le droit de faire tous les calculs qu'ils veulent à partir des mesures déjà faites dans leurs triangles. »

Les élèves n'ont aucune connaissance théorique leur permettant de résoudre le problème de façon économique en utilisant le cosinus. Pour y parvenir, ils vont devoir s'appuyer sur un modèle implicite. Une fonction de l'étape précédente, dite situation 0, en était la construction. Les élèves disposent de deux méthodes pour résoudre ce problème dans une problématique de modélisation[89].

[89] Nous utilisons pour l'enseignement de la géométrie la dialectique entre « problématique de modélisation » et « problématique géométrique ou théorique » au sens de ces mots introduits par R. Berthelot et M-H. Salin dans leur thèse. Nous avons explicité l'usage que nous en faisons avec des exemples au Collège dans notre article : « Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique » *Petit x*- n°65 -2004

- soit conjecturer que le rapport de deux hypoténuses entre elles est le même que le rapport de deux côtés de l'angle droit entre eux, éventuellement le vérifier avec les trois triangles tracés, et se servir des mesures sur l'un des triangles tracés pour résoudre le problème
- soit conjecturer que l'angle de 20° étant le même pour tous les triangles, il y a un rapport constant entre côté de l'angle droit et hypoténuse, puis tenter de vérifier cela empiriquement sur les trois triangles tracés, enfin, ayant déterminé un rapport « constant » aux erreurs de mesures près, s'en servir pour le calcul demandé.

Remarques sur les variables de la situation

- Parmi les triangles dont il faut déterminer le côté, le professeur donne d'abord un grand triangle. En effet si la longueur de l'hypoténuse est voisine d'un mètre, l'erreur absolue sur la mesure du côté risque d'être grande en raison de l'utilisation d'un rapport approché, ce qui conduit à douter du modèle ; d'où la nécessité de la démonstration qui suivra.
- La consigne indique aux élèves qu'ils ne doivent plus rien dessiner dès que la question est posée. Pourquoi cette contrainte ? Si les élèves pouvaient tracer un autre triangle, ils pourraient avoir l'idée de tracer un triangle ayant un angle de 20° et dont l'hypoténuse mesurerait 9,8 cm par exemple (pour eux, le « même » en réduction). En multipliant la mesure du côté de l'angle droit par 10 ils obtiendraient le côté du triangle cherché. Mais comme aucun tracé supplémentaire n'est possible, ils ne peuvent utiliser que les triangles tracés avant d'avoir cette donnée ; ils sont donc contraints d'utiliser un rapport entre des hypoténuses qu'ils ne peuvent choisir, mais qu'ils doivent calculer. De ce fait, on tente de faire en sorte qu'ils privilégient les calculs des rapports entre côté et hypoténuse qu'ils viennent de voir dans l'étape précédente. Mais rien n'est exclu.
- Le professeur demande le même calcul pour plusieurs triangles (deux ou trois, pas plus). En effet, pour éprouver la fonctionnalité du cosinus il faut que le problème se répète plusieurs fois pour le même angle de 20°. Les élèves s'aperçoivent alors qu'un seul rapport donne tous les résultats, tandis qu'une proportionnalité d'un triangle à l'autre oblige chaque fois à refaire les calculs puisque le rapport change.

Passage à une problématique géométrique

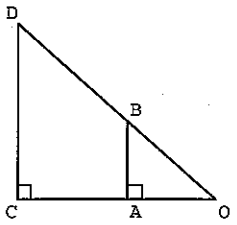
Les élèves doivent d'abord conjecturer le modèle de la proportionnalité, calculer les rapports des côtés aux hypoténuses, trouver des nombres sensiblement différents pour enfin douter de la proportionnalité. S'ils jugent le modèle proportionnel assez fortement adapté à la situation, ils passent outre et choisissent un rapport moyen pour faire le calcul. La

vérification avec le grand triangle montre une erreur absolue assez grande : une preuve théorique de cette proportionnalité est la bienvenue.

Certains élèves ont l'idée de découper leurs triangles ou de les dessiner à nouveau de façon à obtenir des triangles « empilés » comme cela a été fait dans l'étape précédente à titre de vérification empirique. Dans ce cas, l'égalité des angles n'est plus une conclusion mais une hypothèse.

Le théorème de Thalès réduit au triangle est au programme de la classe de 4e ; à savoir que le parallélisme entraîne l'égalité des rapports.

Dans la figure ci-contre, on sait que,



les droites(*AB*) et (*CD*) étant parallèles : $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$.

Mais les élèves ne savent pas que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$; c'est la conjecture à démontrer.

Il s'agit d'une simple inversion des moyens dans la proportion, mais un tel théorème sur les proportions n'est plus disponible, car plus enseigné. Il faut donc le retrouver dans ce cas particulier en passant par l'égalité : $OA \times OD = OC \times OB$. Pour cette raison, il est probable que le professeur soit obligé d'aider les élèves. La capacité des élèves à prendre une preuve en charge dépend, entre autres, de la disponibilité de théorèmes antérieurs ; c'est-à-dire de la cohérence d'une progression qui n'est pas toujours bien assurée dans les programmes. Au moins a-t-on fait éprouver, par les élèves, la nécessité de cette preuve.

Le bilan de la situation 1 est le suivant :

Enoncé 1 (démontré) : Si des triangles rectangles ont le même angle aigu, le rapport entre côté adjacent et hypoténuse est le même.

Conjecture : Pour des angles différents les rapports sont différents. (C'est la contraposée de l'énoncé déjà envisagé sous sa forme directe dans la situation 0).

Situation 2 : problème de détermination d'un angle dans un triangle rectangle

Le professeur annonce qu'il possède un triangle rectangle inaccessible aux élèves dans lequel le rapport entre un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse est $\frac{3}{10}$. Les élèves doivent trouver la mesure des angles de ce triangle, les instruments de dessin étant à leur disposition. Une erreur d'un demi-degré est permise.

Les élèves utilisent la proportionnalité des côtés des triangles rectangles, conjecturée dans la situation 0. Dans la situation 1, avant de poser la question relative au côté du triangle inconnu, le professeur demandait aux élèves de construire des triangles rectangles de leur

choix avec un angle donné. Désormais, ils ont à leur charge la construction d'un triangle rectangle semblable à celui du professeur, la mesure attendue étant celle de l'angle.

Bilan de la situation 2 : Quand l'hypoténuse et un côté de l'angle droit sont dans le rapport $\frac{3}{10}$, l'angle qu'ils font est le même pour tous les triangles ainsi tracés ; il mesure environ 72,5°. On peut trouver la mesure de l'autre angle en en prenant le complémentaire. Ceci ne permet pas d'être certain du résultat mais, au minimum, de ne pas donner des mesures en désaccord avec le théorème sur la somme des angles du triangle connu depuis la 5e : on sait qu'il faut trouver 17,5° à un demi-degré près. Les élèves peuvent alors vérifier que le rapport entre le côté adjacent au deuxième angle aigu et l'hypoténuse est lui aussi constant dans tous les triangles, en accord avec l'énoncé 1.

Enoncé 2 admis :

Lorsque le rapport entre un côté de l'angle droit et l'hypoténuse est le même dans plusieurs triangles rectangles, alors l'angle compris entre ce côté et l'hypoténuse est le même dans tous les triangles. L'autre angle aigu est aussi le même.

Situation 3 : définition du cosinus et exercice

Définition : Le professeur donne la définition du cosinus de l'angle aigu d'un triangle rectangle comme rapport entre côté adjacent et hypoténuse et fait reformuler l'énoncé 1 en utilisant le mot « cosinus :

Si des triangles rectangles ont un même angle aigu, le cosinus de cet angle est le même. À un angle donné est donc associé un nombre, son cosinus, qui est compris entre 0 et 1.

Ceci permet d'utiliser l'expression « cosinus d'un angle » sans référence à un triangle rectangle particulier.

Exercice : Parmi différents triangles rectangles dessinés sur une feuille, avec indications des mesures de leurs côtés, trouver ceux qui ont les mêmes angles.

Situation 4 : reproduction d'un angle non inclus dans un triangle rectangle

La consigne : Le professeur dit qu'il détient un angle et le montre rapidement de loin (plusieurs feuilles pourront circuler dans la classe au moment de la validation). Le professeur fait remarquer que sur son dessin il n'y a pas de triangle rectangle, seulement un angle. Le professeur annonce un cosinus de 0,25 pour cet angle. Les élèves doivent dessiner l'angle du professeur et la validation se fera par superposition. Une erreur d'un demi-degré est permise. Les élèves n'ont pas de calculatrice.

Remarque sur la variable : au lieu de le présenter sous forme de fraction dont numérateur et dénominateur permettaient de trouver les deux mesures nécessaires à la construire de l'angle – en les multipliant si nécessaire par un même facteur –, on choisit un rapport décimal. Si l'angle dessiné par l'élève ne coïncide pas à un demi-degré près avec celui du professeur, l'élève devra être certain qu'il s'agit de sa part d'une erreur de tracé qui ne remet pas en cause son modèle ; et donc trouver cette erreur de tracé. Dès que l'existence de cette fonction cosinus bijective sera établie de manière certaine, l'élève utilise une machine qui lui donne avec toute la précision désirée la valeur de l'angle ou la valeur du cosinus. Une nouvelle formulation de l'énoncé 2 est institutionnalisée :

A tout nombre entre 0 et 1 est associé un seul angle si ce nombre est donné comme le cosinus de l'angle.

C'est une formulation difficile. Elle arrive à la fin de cette progression.

Perspectives, développements macro-didactiques

L'objet du travail mené au sein du projet AMPERES n'est pas de fournir aux professeurs des ingénieries « clé en mains ». Certaines contraintes portant sur l'usage d'ingénieries ont été volontairement levées. Ainsi, l'ambition du projet n'est pas de produire une série de situations dont les dialectiques permettraient de faire construire le savoir par la classe ; ce type d'enseignement nécessite des professeurs disposant de la théorie didactique et sachant l'utiliser. L'état actuel des connaissances professionnelles enseignantes ne permet pas de remplir cette condition. De même, plutôt que de ne recourir qu'au seul registre des connaissances disponibles des élèves, il a été décidé la mise en œuvre, lorsque nécessaire, d'une dialectique des médias et des milieux ; certaines informations ou connaissances nécessaires au bon déroulement de l'étude des tâches problématiques peuvent être recherchées par les élèves eux-mêmes dans divers médias (manuels, Internet, discussions avec d'autres personnes plus avancées telles que des élèves plus âgés ou des parents), ou encore fournies par le professeur.

Avec l'ensemble des matériaux didactiques permettant la construction *a priori* des propositions d'enseignement, et les analyses *a posteriori* conduites après les avoir expérimentées dans des classes « ordinaires », l'ambition de ce travail est plutôt de fournir aux professeurs des fiches de direction de l'étude organisées autour de « balises » constituées des questions cruciales ***fondées en raison*** et ***nécessitées par l'étude***. C'est une démarche inverse de celle des activités des manuels qui ne constituent souvent que les seules aides professionnelles auxquelles recourent les professeurs. Il s'agit de leur donner

des outils leur permettant de dépasser des jugements d'évaluation de cours souvent réduits à des énoncés du type « ça a marché » ou au contraire « ils n'ont pas accroché », de comprendre un certain nombre de phénomènes didactiques afin de les anticiper et les contrôler, et de leur fournir des dispositifs viables car bâtis à partir de la théorie didactique et observés dans les classes. Un certain « jeu » est laissé au travail du professeur dès lors qu'il dispose de la connaissance des matériaux sur lesquels s'appuie la construction des propositions d'enseignement. D'une part, il lui est signifié que la modification des propositions est possible, mais qu'elle engage vers des conséquences didactiques dont on peut anticiper les effets si l'on dispose des outils théoriques ; ceci l'incite à davantage assumer en conscience sa responsabilité professionnelle. Dans ce sens, à travers la lecture exigeante des matériaux fournis, il s'agit aussi d'un dispositif de formation des professeurs en leur donnant des outils pour une autonomie professionnelle. D'autre part, l'existence d'un « jeu » pour le professeur est garantie du fait qu'une partie de la relation didactique est toujours non déterminée par avance ; les propositions faites visent à réduire cette indétermination, mais une part des phénomènes contingents ne peut être anticipée. Retrouvant la problématique de laquelle nous sommes partis, et dont l'objet était la perte de sens de l'étude des mathématiques éprouvée par les élèves, une autre des dimensions visées par le projet AMPERES tient enfin dans la volonté d'apporter la preuve d'un enseignement possible à partir d'AER et PER au sein des classes du système éducatif secondaire. Il s'agit ainsi de faire vivre dans les classes les idées suivantes :

- le rapport à l'autorité vient du savoir et cela crée de l'autonomie pour l'étude
- l'erreur est normale : elle est inhérente à la construction et engage à son dépassement
- l'élève peut être « chronogène » et accepte alors le temps long de la recherche
- les mathématiques prennent du sens quand elles sont vécues comme réponses à des questions que l'on a collectivement instruites


qu'est-ce qu'on dit à part
A
B
C
méfiez-vous de l'amalgame.
Tous les barbus ne sont pas dangereux....

Devenir professeur de mathématiques : les mathématiques comme problème professionnel

Gisèle Cirade

IUFM d'Aix-Marseille (Université Aix-Marseille I) & UMR ADEF

Résumé. Une étude clinique de la formation dispensée au fil de plusieurs années à l'IUFM d'Aix-Marseille nous a permis de préciser de divers points de vue le passage problématique de l'état d'*étudiant* en mathématiques à celui de *professeur* de mathématiques. Cette étude montre que, tant en première qu'en deuxième année, l'*univers mathématique* auquel les élèves professeurs sont confrontés se révèle pour eux plein d'embûches à propos de questions souvent inattendues pour l'observateur extérieur, mais que révèlent les dispositifs de la formation observée. Celle-ci constitue un facteur crucial, qui va forcer les élèves professeurs à reconnaître, à assumer et à affronter la problématicité des situations rencontrées dans leur vie professionnelle. Les difficultés qu'ils signalent apparaissent à l'analyse comme les symptômes de difficultés qui affectent en réalité *la profession elle-même*, et pas seulement ceux qui y débutent. La formation des jeunes professeurs apparaît ainsi indissociable d'une évolution du métier à laquelle elle peut contribuer par la diffusion, dans la profession où ils entrent, des praxéologies professorales co-construites dans la formation.

Mots clés. Théorie anthropologique du didactique (TAD). Clinique des systèmes de formation. Formation initiale des professeurs de mathématiques. Praxéologies professorales. Problèmes de la profession. Mathématiques pour l'enseignant. Mathématiques pour l'enseignement.

Le travail que nous présentons ici (Cirade 2006) s'inscrit dans le champ des travaux de recherche relatifs aux métiers de l'enseignement et à la formation à ces métiers. Plus précisément, il porte sur la formation initiale des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire et s'articule à l'effort systématique développé depuis de nombreuses années pour construire à l'IUFM d'Aix-Marseille une formation des professeurs de mathématiques [90] répondant à certaines exigences que nous serons amenée à évoquer dans cet article.

90. Sur cette formation, nous renvoyons à une présentation effectuée en juin 2006 (Chevallard & Cirade, à paraître).

Nous sommes partie d'une question qu'on peut formuler naïvement ainsi : « Quelles difficultés rencontre-t-on quand, étudiant en mathématiques, on décide d'aller vers le professorat de mathématiques ? » Du vaste programme qu'ouvre cette question, nous n'avons bien sûr réalisé qu'une petite partie, mais en étudiant des aspects qui nous ont paru essentiels car situés au fondement du métier et donc déterminants pour ses évolutions possibles. Pour accomplir ce travail, nous nous sommes placée dans le cadre de la *théorie anthropologique du didactique*, sur laquelle Yves Chevallard a récemment présenté une synthèse (Chevallard, à paraître). Cet outillage théorique nous a conduite à reformuler la question précédente dans les termes que voici : « Quelles sont *les conditions et les contraintes* sous lesquelles s'effectue le passage de l'état d'étudiant en mathématiques à l'état de professeur de mathématiques exerçant en collège ou en lycée ? » Nous nous sommes arrêtée sur deux grands systèmes de conditions et de contraintes qui pèsent sur la dynamique de professionnalisation étudiée : d'une part, les conditions et contraintes dues à la *profession* de professeur de mathématiques, d'autre part, les conditions et contraintes exercées par la *formation initiale* – en IUFM – des professeurs. Ce sont ces conditions et contraintes qui sont au cœur de notre recherche, conçue comme relevant d'un *clinique des formations* – qu'il s'agisse de formations professionnelles, de formations scolaires ou de formations universitaires par exemple.

Précisons ici quelques repères par rapport auxquels nous situerons ensuite la mise en œuvre des techniques cliniques employées. La formation professionnelle que nous avons observée au long de plusieurs années est celle des élèves professeurs de mathématiques de l'IUFM d'Aix-Marseille, sur les deux années dont elle se compose. En 1re année, ces élèves sont donc des étudiants préparant le CAPES [91] de mathématiques, tandis qu'en 2e année ce sont des professeurs stagiaires qui ont en responsabilité une classe de collège ou de lycée. Depuis plusieurs années, nous avons pu être associée en tant que chercheuse à la vie de cette formation, avec un accès exceptionnel, quasiment libre, à l'ensemble de ses composantes et de ses archives. Ce travail a été facilité par la pratique du responsable de la formation, ainsi que de son équipe, de mettre par écrit l'essentiel du travail accompli avec les élèves professeurs, tant en première qu'en deuxième année. Soulignons en particulier l'importance de cette mise en texte du savoir élaboré dans le cadre de ce qui est le cœur de la formation des professeurs stagiaires (c'est-à-dire des élèves professeurs de deuxième année), le séminaire dit *du mardi matin*, qui s'est déroulé chaque année, sauf exception, au

91. Le CAPES est le *certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré.*

long de vingt-quatre séances de trois heures : ce séminaire est l'un des « personnages » clés de la formation, et donc de nos propres analyses.

L'étude clinique que nous avons conduite s'est donné pour objet la *parole* qui circule au sein de la formation étudiée : parole de *formés*, parole de *formateurs*, parole de ces *professionnels de terrain* que sont les professeurs conseillers pédagogiques, maîtres de stage des élèves professeurs de 2e année. Pour saisir la parole des formés et de leurs formateurs, nous avons en particulier exploité un dispositif interne à la formation, celui des « *questions de la semaine* », auquel fait écho le « *forum des questions* », où formés et formateurs ont tour à tour la parole, sous une forme écrite ou rapidement mise par écrit. Quant à la parole des professionnels de terrain, c'est à travers les rapports rédigés par les maîtres de stage en vue de la formation et de la validation des professeurs stagiaires que nous y avons eu accès.

Les traces écrites sur lesquelles nous avons travaillé ont ainsi dans notre étude, en tant que matériel clinique, un double mérite : d'une part, elles n'ont pas été sollicitées par le chercheur, d'autre part elles n'ont pas davantage été rédigées en vue de contribuer à répondre à la question que le chercheur étudie. Par ailleurs, pour des raisons tout à la fois de problématique et de méthode, c'est sur la parole des formés que nous avons mis essentiellement l'accent du point de vue de l'analyse. Cependant, il convient de souligner que la dynamique de la formation tresse la parole des formés avec celle des formateurs et que, sans la formation, sans le dispositif des « questions de la semaine », sans le « forum des questions » qui lui fait écho, cette parole des formés n'existerait pas.

Pour exploiter le matériel recueilli, nous avons mis en œuvre une technique qui combine l'examen de la parole d'acteurs du système (les maîtres de stage, les stagiaires), la parole de collectifs suivis sur une brève période – notamment le collectif des professeurs stagiaires –, la parole de collectifs suivis sur une plus longue période – mais à propos d'un objet particulier. Dans notre travail, nous avons successivement étudié les élèves professeurs face aux normes et à la normativité de la profession, face à l'univers mathématique du CAPES, face aux mathématiques à enseigner dans leur classe en responsabilité et, enfin, au chevet de leur classe en responsabilité. Ce sont ces différents volets de l'étude que nous allons maintenant présenter succinctement, en mettant l'accent sur les conditions et contraintes auxquelles les élèves professeurs sont soumis, tant de la part de la profession que du fait de formation initiale reçue à l'IUFM.

1. Face aux normes et à la normativité de la profession

L'exercice du rôle d'enseignant est un véritable métier. Il a ses normes que, au moment d'entrer dans la profession enseignante, les élèves professeurs doivent identifier et tenter de faire leur, en les modifiant éventuellement. Le cœur du problème est la question de la *normativité* [92] professionnelle, et de la normativité *professorale* en particulier. Pour cette raison notamment, l'exploration du système de normes prévalant, d'une part, et l'exploration des conduites adaptatives des jeunes professeurs à l'endroit de ces normes établies, d'autre part, apparaissent *a priori* fortement solidaires. Que sont les normes qui règlent et régulent l'action et la pensée des professeurs de mathématiques aujourd'hui ? Sans doute faut-il être à cet égard très prudent : même s'il existe des invariants « lourds », à forte inertie, il existe aussi des évolutions normatives variées, qui parfois se côtoient au sein d'un même établissement en s'ignorant les unes les autres. Il apparaît en conséquence non déraisonnable de parler d'un « maquis normatif », avec lequel le jeune professeur va devoir se familiariser en ne sachant pas toujours ce que recèlent ses entrelacs. C'est ce maquis normatif que nous avons exploré, de manière toujours partielle et parcellaire, afin d'identifier la suite quelque peu sous-déterminée des situations problématiques que le nouveau venu dans la profession devra affronter.

Pour ce faire, nous avons choisi comme matériels les rapports rédigés par les maîtres de stage sur l'activité des élèves professeurs de deuxième année [93], en exploitant plus particulièrement les rapports rédigés durant l'année 2003-2004, où la promotion comportait 64 stagiaires. Dans ces rapports, rédigés tout à la fois à l'adresse du stagiaire et de l'institution de formation, on voit se dessiner en creux des normes de la profession, telles que les maîtres de stage les évoquent, soit pour dire que le jeune professeur aura su les reconnaître et les mettre en œuvre de manière pertinente, soit pour signifier que, au contraire, il n'aura pas su s'y conformer, au moins provisoirement. Nous avancerons donc à pas comptés en examinant les exigences de la profession telles qu'elles s'expriment à travers les rapports des maîtres de stage, sans jamais oublier, cependant, que, en tant qu'élèves de l'IUFM, les professeurs stagiaires sont confrontés aussi à la normativité de cette institution de formation qui, en droit comme en fait, constitue l'« école normale » d'aujourd'hui.

---

92. La *normativité* d'une personne ou d'un collectif désigne ici sa capacité à participer à la critique des normes existantes et à l'élaboration de normes alternatives.

93. Chaque professeur stagiaire fait l'objet de deux rapports de la part de son maître de stage, le premier vers la fin du premier trimestre, le second vers la fin du deuxième trimestre.

1.1. Vignettes monographiques

Pour donner une idée du « maquis normatif » que nous avons mentionné, nous commencerons par présenter succinctement certains résultats de l'examen de quelques rapports composant le corpus étudié. Considérons tout d'abord le cas de Ruddy, jeune professeur ayant en responsabilité une classe de 4e. Voici un extrait du premier rapport rédigé par son maître de stage.

> J'ai pu constater que Ruddy respecte le programme, rédige ses préparations. Les devoirs de maison sont nombreux, bien calibrés et bien diversifiés. Ces devoirs ainsi que les contrôles sont annotés de façon constructive.

On saisit, à travers l'éloge de Ruddy, le défilé des exigences normatives : un professeur doit *respecter le programme*, *rédiger ses préparations*, prévoir des devoirs à la maison *« nombreux, bien calibrés et bien diversifiés »*, il doit *annoter les devoirs et contrôles de façon constructive.* Comme presque toujours, cependant, on constate ici l'existence de normes sans pour autant que leur contenu opérationnel soit clairement précisé. Que signifie ainsi par exemple l'exigence de proposer aux élèves des devoirs à la maison nombreux, bien calibrés et bien diversifiés ? Là-dessus, les rapports des maîtres de stage ne fournissent pas de renseignements plus précis, alors que, ainsi que nous le verrons ultérieurement, ce sont là des questions qui vont se révéler durement problématiques pour les élèves professeurs.

Bien d'autres points sont mentionnés dans ce premier rapport : ils forment un inventaire hétéroclite qui va des aspects les mieux maîtrisés par Ruddy aux aspects sur lesquels des progrès sensibles sont attendus de lui. Voici le dernier alinéa de ce rapport d'étape.

> Ruddy a le souci de bien faire et je suis persuadée qu'il résoudra très vite ses points faibles et deviendra, l'expérience aidant, rapidement autonome.

La maître de stage conclut ce premier rapport en se disant persuadée que Ruddy deviendra rapidement autonome. En réalité, les relations entre Ruddy et sa maître de stage ne sont pas au mieux : concluant son rapport final, cette dernière avouera sans détour regretter que Ruddy n'ait pas su prendre en compte ses remarques et ne lui ait pas communiqué ses préparations – ne serait-ce que « pour éviter certaines erreurs et [pour] avoir une réflexion plus approfondie face à ses élèves ». Ruddy, donc, se croit capable d'autonomie alors même qu'il aurait le plus grand besoin de conseils avisés. On voit là apparaître une analyse qui, semble-t-il, ne peut à l'heure actuelle que rester confinée au cas de stagiaires : on voit mal un professeur en exercice reconnaître que, par delà son autonomie obligée, il aurait besoin

de conseils précis sur le quotidien de son travail ! La norme, profondément intériorisée par beaucoup de professeurs, est que chacun doit trouver *en lui-même* les ressources qui lui permettront d'affronter les difficultés surgissant jour après jour ; et c'est de cette norme même que la maître de stage paraît s'autoriser, subrepticement, pour dire que, dès lors qu'il « a le souci de bien faire », Ruddy saura devenir très vite autonome.

Continuons avec un autre exemple, celui de Sabrina, jeune professeure ayant en responsabilité une classe de seconde. Dans son premier rapport, le maître de stage écrit.

> Sabrina dans ses préparations bien dosées et rédigées paraît exigeante avec elle-même ; les documents personnels qu'elle utilise ne sont pas lus, on sent une réorganisation permanente en fonction de la réaction des élèves, et au fur et à mesure que s'étend son autorité sur la classe (il n'est pas commode d'être une « stagiaire » !) elle prend un peu plus de distance par rapport à ses belles préparations écrites mais statiques par nature.

On retrouve là une des exigences déjà rencontrées : la rédaction des préparations. Mais la suite de l'extrait complète le sens à donner à une telle exigence. Sabrina « prend un peu plus de distance par rapport à ses belles préparations écrites mais statiques par nature ». La rédaction des préparations ne suffit donc pas : le professeur doit savoir ensuite prendre par rapport à elle une distance indispensable. Mais ce que dit surtout le rapport, c'est que le professeur doit effectuer une *réorganisation permanente de son enseignement en fonction des réactions des élèves*. On voit ainsi se dégager une norme que l'ensemble des rapports examinés confirme, et qui semble bien être au cœur de la culture enseignante d'aujourd'hui : les élèves sont l'alpha et l'oméga du travail du professeur, le critère ultime, la pierre de touche essentielle, par rapport à quoi tout prend son sens. Sans doute faut-il voir ici un effet de l'état historique du métier dans lequel, faute de critères *théoriques* reconnus et largement acceptés, le seul repère bien partagé est celui de l'*engagement* des élèves dans le travail proposé – sans qu'il soit besoin même de parler de leur réussite.

1.2. Un exemple : la question des programmes

Abandonnant les vignettes monographiques, nous présenterons maintenant, sur la question des *programmes*, quelques aspects des normativités qui s'expriment, émergent ou affleurent dans les rapports des maîtres de stage. Cette question semble, *a priori*, toute simple. Il n'en est rien. La norme, sur ce point, est composite, et en évolution. Dans la culture professorale telle qu'elle se donne à entendre, le *« respect »* des programmes s'affiche comme une exigence essentielle, liée à l'angoisse de ne pas *« finir »* le programme et au désagrément de se rendre compte, après quelques mois de classe, que, décidément, on ne le « finira » pas !

Ce qu'est ce « programme » qu'il faudrait respecter et qu'il faudrait finir n'est cependant pas tout à fait clair. Son évocation souffre d'ailleurs d'une anomalie étrange : il ne s'agit pas tant, entend-on, de respecter *le* programme que de respecter *les programmes* – et cela même quand le locuteur « natif » se réfère à un programme bien déterminé, celui qui vaut pour sa classe de seconde ou de troisième par exemple [94]. Le programme auquel on se réfère, que l'on mentionne, que l'on vitupère, ressemble parfois à une entité semi-légendaire que l'on ne connaît que par ouï-dire. Le stagiaire à qui s'impose l'exigence – présentée comme allant de soi dans sa formation à l'IUFM – de se reporter à chaque instant au texte précis du programme et du document d'accompagnement qui lui est associé pourra découvrir avec un peu d'étonnement que, derrière l'évocation « des programmes », se cache quelquefois, peut-être plus fréquemment qu'il n'est porté à le croire, une méconnaissance du texte du programme que, d'ailleurs, dans la profession telle qu'elle s'offre à son regard, on n'a pas toujours à portée de la main et qu'on regarde souvent comme une simple *check-list*, contraignante, certes, mais inutile pour concevoir et réaliser l'enseignement attendu. Par contraste avec cette norme ancienne, qui semble être aujourd'hui encore largement dominante – le programme comme carcan dont il faut supporter la tyrannie, et non comme outil didactique au service des professeurs et des classes –, le professeur stagiaire rencontre une norme encore minoritaire qu'illustrent quelques rares maîtres de stage et dont la présence résulte sans doute en partie de la percolation normative impulsée par la formation donnée à l'IUFM. Selon cette norme, il ne faut pas seulement « respecter » le programme [95], mais *se référer systématiquement à lui*, le connaître par une fréquentation prolongée, répétée, et par un questionnement permanent portant en particulier, au collège, sur les « compétences exigibles » (ou, en seconde, sur les « capacités attendues ») ainsi que sur les notions et résultats qui les sous-tendent, le tout étant situé par rapport aux tenants et aboutissants de l'enseignement à prodiguer – acquis antérieurs, résultats à démontrer ou à admettre, emplois principaux de ces résultats, etc. On conçoit que, au confluent de ces deux orientations normatives, le stagiaire ressente un certain trouble devant des messages subtilement divergents, et fondamentalement incompatibles, que les institutions qui assurent son entrée dans le métier lui envoient de façon tantôt explicite, tantôt subliminale.

---

94. Dans le corpus examiné, sur les 56 maîtres de stage qui évoquent le programme de la classe dont leur stagiaire a la responsabilité, seuls 23 d'entre eux le font correctement – en utilisant le singulier. Les autres font référence aux *programmes*, aux *programmes officiels* ou encore au *BO*.

95. Le mot de « respect » est ici ambigu : il désigne certes une attention à l'endroit de ce que l'on respecte, mais aussi une réserve caractéristique. Respecter, c'est demeurer extérieur, en quelque façon, à ce que l'on respecte.

1.3. Bruissements mathématiques

L'exploration à laquelle nous avons procédé permet ainsi de repérer un vaste ensemble de conditions et de contraintes relatives à l'organisation de l'étude et au métier de professeur – et en particulier l'exigence de la profession quant à la force de l'engagement du professeur au service de l'engagement didactique des élèves. Mais on constate aussi que, si la référence aux mathématiques n'est pas complètement absente des rapports des maîtres de stage, elle n'en constitue pas de façon manifeste l'axe principal. Si l'examen attentif du corpus recueilli révèle en effet un *bruissement constant du souci mathématique*, ce souci demeure exprimé à travers des principes didactiques plutôt qu'illustré sur un matériel mathématique déterminé, comme en témoigne parmi d'autres l'extrait suivant.

> À ma dernière visite, [la professeure stagiaire] fit des exercices sur les pourcentages, la mise en équation et la résolution de ces dernières. Les exercices étaient très bien choisis, permettant un débat sur la résolution par des choix différents d'inconnue. Des élèves, d'habitude inactifs et un peu rebelles aux mathématiques participaient à mon grand étonnement à la résolution et à la rédaction des exercices. Dans la classe les élèves travaillaient seuls ou par deux, cela faisait un peu de bruit, mais tous parlaient de maths.

Quelquefois, les rapports se bornent à décrire le contenu mathématique, sans un seul mot de commentaire.

> On commence par une activité sur les valeurs exactes et les valeurs approchées où l'on remplit un tableau pour les nombres $\frac{2000}{7}$, $\frac{\pi}{58}$, $2-5\sqrt{6}$, ensuite on compare $A = 5\sqrt{2}+7$ et $B = \frac{1}{5\sqrt{2}-7}$, enfin un travail est proposé pour montrer les limites de la calculatrice en cherchant à comparer $\sqrt{2}$ et $\frac{911664}{665857}$. La séance s'est bien déroulée.

Rien, ici, ne semble problématique. La description est celle d'un univers évident, transparent, qui va de soi. On verra plus loin que rien n'est plus faux.

1.4. Refoulement de la problématicité mathématico-didactique

Entrer dans le métier, ce serait donc, pour les élèves professeurs tels que les regardent leurs maîtres de stage, se soumettre à certaines règles, à certaines normes consubstantielles au métier. Mais ce que vont découvrir les professeurs stagiaires lors de leur formation, c'est que ces règles ne sont pas elles-mêmes définies de façon univoque, au point qu'elles semblent parfois insaisissables et, quand on les découvre, inattendues. Pour ce qui est des contenus mathématiques, ainsi, ce que révèlent les corpus étudiés, c'est un *refoulement de*

la mise en débat des mathématiques : on n'en parle guère entre gens de métier, pour cette raison définitoire que chacun est censé les bien connaître. Or les élèves professeurs vont découvrir plus ou moins vite que, dans des contextes et des modalités renouvelés, les mathématiques seront indéfiniment un problème, sinon *le* problème, du métier qu'ils embrassent. Mais avant cela nous allons revenir un instant en arrière, au moment où le futur professeur est encore un étudiant, élève de 1re année de l'IUFM préparant le CAPES de mathématiques.

2. Face à l'univers mathématique du CAPES

D'une façon générale, les problèmes évoqués à travers les rapports des maîtres de stage sont, en première année, presque complètement passés sous silence. Les seuls problèmes véritablement soulevés sont les problèmes mathématiques que peut rencontrer un candidat au CAPES. Notons tout d'abord une conséquence de cet état de choses : du fait que le travail sur les questions professionnelles autres que strictement mathématiques n'existe guère, les préparationnaires se trouvent confortés dans leurs idées préalables sur l'enseignement et dans l'idée, surtout, que ces idées échappent par nature à un travail systématique, rationnel et scientifiquement informé.

Ici, l'étude clinique va s'appuyer sur deux types de matériels. Tout d'abord les *questions* posées par les élèves professeurs dans le cadre du dispositif des « questions de la semaine ». Le corpus ainsi recueilli sur un peu plus de six années comporte près de 2000 questions. Chaque semaine, les préparationnaires sont invités à répondre par écrit, individuellement, à la sollicitation suivante : « Formulez brièvement une difficulté à laquelle vous vous êtes heurté, ou une question que vous vous êtes posée (dans le cadre de la préparation…) » Les questions posées sont regardées, non comme des difficultés personnelles singulières, mais comme des difficultés *liées à la profession*, et plus précisément *à l'entrée dans la profession*, préparation au concours de recrutement incluse. Les autres matériels à valeur clinique sont les *éléments de réponse* apportés dans le cadre du forum des questions et mis par écrit. Ces éléments de réponse ne constituent pas tant une réponse à l'*auteur* de la question – lequel a d'abord le mérite d'avoir rencontré la difficulté qu'il rapporte – qu'une ébauche de réponse à la *question* posée. Les matériaux de réponse ainsi apportés permettront à chacun de s'engager dans la construction d'une réponse personnelle. Voici d'abord un tout petit florilège de questions recueillies, qui, comme on le verra, peuvent être très diverses :

1. Peut-on mettre l'oral de côté jusqu'à ce qu'on ait passé l'écrit ?

2. Quelle est la définition exacte d'un polygone régulier *convexe* ?

3. Comment montre-t-on que toute fonction continue admet une primitive (sans utiliser la théorie de Riemann). (Lors de la leçon 88 d'oral 1, on donne ce résultat en théorème, au début de la leçon.)

4. Axiome du choix ? Quel en est l'énoncé exact et quelles sont ses applications ?

5. Dans la leçon « Construction de **C** », n'est-il pas indispensable de faire une introduction historique ? (des avis divergent à ce propos).

6. Comment montrer de « manière élémentaire » que la dérivée de sinus est cosinus ?

7. Comment définir de manière intuitive un angle orienté ?

8. Quelles sont les « diverses » géométries et leurs axiomes fondamentaux, leurs différences (géométrie euclidienne, de Hilbert, ...) Quand utiliser quoi ?

2.1. Une position un peu excentrée par rapport aux mathématiques

En parcourant les questions, on note bien souvent, de la part des préparationnaires, une *position un peu excentrée* par rapport aux « mystères » mathématiques auxquels ils se heurtent. Ces mystères semblent en effet n'exister pour eux que parce qu'une information adéquate leur manquerait. Les mathématiques ne seraient pas en elles-mêmes problématiques ; c'est une diffusion inappropriée des bonnes solutions aux problèmes rencontrés – solutions censées exister quelque part – qui serait la cause principale du mal. Ainsi d'assez nombreuses questions soulèvent-elles le problème des *médias* [96] – « cours », « rappels de cours », sources imprimées ou, désormais, électroniques, etc. – censés permettre de disposer d'une information juste, pertinente, adéquate. Nous prendrons ici pour exemple la question suivante.

> Ceci n'est pas vraiment une question mais plutôt un souhait. Pour les probabilités et les statistiques, je voudrais savoir si l'on va avoir de vrais cours (ou tout au moins de sérieux rappels de cours) car

96. En théorie anthropologique du didactique, on nomme *média* tout système de mise en représentation du monde à l'adresse d'un certain public (le cours du professeur de mathématiques, le prêche d'un clerc, le journal d'un présentateur de télévision relèvent en ce sens du système des médias au sens large). La notion de média fait couple avec la notion de milieu : un *milieu* (« adidactique ») est un système qu'on peut regarder comme dénué d'intention (« didactique ») dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite (il faut alors interpréter son comportement de « réponse »), à telle question déterminée. Il se comporte à cet égard comme un fragment de nature. Par contraste, pour nombre de questions que l'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une intention (par exemple « d'informer ») à l'endroit du questionneur. Bien entendu, un média peut fort bien, à propos de telle question, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel. Le caractère de milieu ou de média n'est nullement intrinsèque : il dépend de la question que l'on pose au système et de la manière de la lui poser. C'est ainsi que les rapports des maîtres de stage évoqués plus haut constituent dans une large mesure un milieu par rapport à la question « Que sont les normes de la profession de professeur de mathématiques ? ».

c'est un domaine assez complexe, relativement nouveau dans les programmes, qui nécessite des définitions précises et des explications claires.

Les préparationnaires apparaissent par contre peu enclins à demander des interactions de travail sur les documents écrits mis à leur disposition. Sans doute assimilent-ils les types usuels d'interactions avec les préparateurs – cours en amphithéâtre, séances de travaux dirigés, etc. – à de simples moyens de se faire communiquer une matière sur laquelle ils envisagent alors de travailler seuls. L'apprentissage est ainsi vécu comme une affaire personnelle, même si le matériau à œuvrer s'obtient préférentiellement par le truchement des séances de cours ou de travaux dirigés.

Au fil des questions on voit aussi que, devant toute interrogation qui peut surgir, la tendance des préparationnaires est de se référer à un *point de vue supposé*, celui du jury du CAPES, qui apparaît comme l'instance suprême et unique de véridiction, même s'il n'est ni simple ni facile d'accéder à ses « verdicts », comme en témoigne la question suivante, où le jury semble regardé comme l'unique *milieu* auquel on puisse confronter ses interrogations et ses incertitudes.

L'année dernière lors de la deuxième épreuve orale, le jury m'a demandé si l'on pouvait définir une fonction à partir de sa représentation graphique (plus précisément, j'avais donné des allures de courbes représentatives de fonctions assez quelconques dans un exercice et je proposais des résultats sur les fonctions en question). J'ai répondu que oui ; une application de E dans F est un sous-ensemble de $E \times F$. Apparemment, ce n'était pas la bonne réponse mais je ne sais toujours pas pourquoi…

On trouve ici le prolongement d'une situation anciennement rencontrée, longuement fréquentée, où l'étudiant a eu pour milieu essentiel le point de vue de ses professeurs, avec pour contrepartie négative une éducation au bon usage des milieux souvent indigente, y compris, en mathématiques, s'agissant du recours à la déduction dans un système hypothético-déductif, c'est-à-dire à la démonstration. Le professeur en formation ne maîtrisera donc pas le système des milieux qui lui serait nécessaire pour accéder à une certaine autonomie en matière de décision mathématique. La chose ne sera que plus vraie encore s'agissant de décision didactique.

2.2. Vers l'idionomie

Il apparait que la croyance première en l'existence d'une loi indiscutable fait que, dans un premier temps logique, sinon chronologique, les préparationnaires vont rechercher à toute force le *nomos* caché, la règle, la loi à laquelle il « suffirait » de se conformer, et qui doit

bien se trouver quelque part. Cette croyance première conduit ainsi les préparationnaires à soumettre – de façon mi-imaginaire, mi-réelle – leur propre rapport aux mathématiques au rapport supposé d'une instance tutélaire – l'institution du CAPES – et donc à avoir, tendanciellement, non un rapport « direct » aux mathématiques, mais un *rapport au rapport* aux mathématiques de cette instance tutélaire, c'est-à-dire, en fin de compte, un rapport soumis à des contraintes elles-mêmes extra-mathématiques, ce qu'on pourrait appeler un rapport « aliéné », jamais complètement assumé à titre personnel. Quand les préparationnaires découvrent enfin qu'il n'existe pas d'instance régulatrice permettant de dégager des points de vue très largement majoritaires et bien acceptés, devant la défaillance constatée de ce *nomos* d'abord supposé, ils sont tentés d'inventer leur propre loi, de fuir dans ce qu'on nomme en théorie anthropologique du didactique l'*idionomie*, celle-ci étant définie comme la propension, plus ou moins réelle ou fantasmée, à fabriquer ses propres lois et à les appliquer. Cette tentation prépare clandestinement à l'idionomie qui imprègne encore aujourd'hui fortement le métier de professeur.

3. Face aux mathématiques à enseigner

Lorsqu'il prend sa classe en main en début d'année, le professeur stagiaire est confronté à un monde de difficultés : celui des *mathématiques à enseigner*, telles que les programmes officiels les lui désignent. Comme en première année, l'abord clinique s'est appuyé en ce cas sur le dispositif des « questions de la semaine » et du « forum des questions ». Soulignons que, par rapport à la première année, la formation de deuxième année repose *très fortement* sur la dynamique des questions formulées par les élèves professeurs et du travail collectif pour élaborer des réponses à ces questions. Le corpus des questions sur lequel nous avons travaillé contient près de 7000 questions, recueillies sur plus de 5 années.

3.1. Face à la problématicité des mathématiques

Ce que montre ce corpus, c'est que les mathématiques à enseigner regorgent de difficultés pour les élèves professeurs. Le contraste est à cet égard très net avec les rapports des maîtres de stage dont nous avons parlé plus haut. Ce « refoulement » de la problématicité mathématique s'inscrit bien évidemment dans les questions formulées par les stagiaires. Elle y est versée tantôt du côté des *programmes*, tantôt du côté des *élèves*. Nous commencerons par une première question attribuant cette problématicité aux *programmes*.

Doit-on parler de la « fraction » $\frac{2}{3}$ ou de « l'écriture fractionnaire » $\frac{2}{3}$ en classe de 4e ? Il me semble que l'on parle de fraction lorsque numérateur et dénominateur sont des entiers (non nul pour le dénominateur), et le terme « écriture fractionnaire » est réservé aux quotients de décimaux (non nuls). Cette distinction ne semble pas aussi nette dans les programmes ni chez les collègues. Qu'en est-il exactement ?

Le point de vue exprimé par ce stagiaire semble en vérité prégnant chez nombre de professeurs, qui tentent ainsi de combler *par eux-mêmes* un silence de la culture de la profession, en dépit du caractère relativement clair des indications du programme, qui sont pourtant ici mises en cause. Mais la problématicité est aussi versée du côté des *élèves*, comme nous allons le vérifier en examinant une question régulièrement soulevée par les élèves professeurs ayant en responsabilité une classe de seconde, à savoir la question de « l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique ». À cet égard, le programme indique ceci.

La définition de $\sin x$ et $\cos x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant **R** » sur le cercle trigonométrique.

Le document d'accompagnement précise.

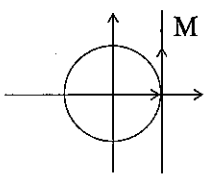
La notion de cercle trigonométrique sera introduite ici. Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels *s'enroule* sur le cercle et comment varient les projections de l'extrémité d'un arc AM en fonction de la longueur de cet arc.

Il s'avère que ces passages ne peuvent guère être lus par un élève professeur d'aujourd'hui, qui, sauf exception, ne dispose pas des connaissances mathématiques nécessaires pour voir clairement ce dont il s'agit, ainsi qu'en témoigne la question suivante.

Le fait d'enrouler la droite réelle sur le cercle unité est une expérience. Il n'existe pas de transformation correspondant à cette expérience. Comment donc légitimer les résultats obtenus ?

Il en est de même des deux questions suivantes qui, de plus, rabattent le problème sur les élèves et, en quelque sorte, le « didactisent ».

1. Que doit-on attendre des élèves [à propos des fonctions sinus et cosinus] ? Seulement ceci : placer le point m du cercle trigonométrique qui correspond au point M d'abscisse x et en déduire cos m et sin m ?



2. Le programme officiel de 2de préconise l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour expliquer l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Mais comment expliquer cela au tableau, quand on ne peut pas faire autrement ?

Dans la première question, il s'agirait seulement de savoir « ce que l'on peut attendre des élèves », alors que la confusion même commise par l'auteur de la question est révélatrice du dénuement « mathématique » dans lequel il se trouve. Dans la seconde, l'alibi est la non-disponibilité d'un logiciel de géométrie dynamique dont l'usage est officiellement requis et dont l'indisponibilité empêcherait de fournir les « explications » idoines.

Le rôle de la formation sera alors de faire apparaître qu'il y a là autant de faux-fuyants qui organisent l'évitement de la problématicité mathématique face à laquelle le jeune professeur ne peut guère attendre de secours de ses collègues ou, plus généralement, de la profession. Celle-ci, comme toute profession, devrait pourvoir aux besoins de connaissances professionnelles de ses membres ; or il apparaît que, sur ces questions comme sur bien d'autres, elle reste désespérément muette (ou, du moins, inaudible).

3.2. Les angles alternes-internes : un problème de la profession

Nous allons maintenant nous arrêter sur un problème mathématique apparemment très élémentaire, qui surgit à propos de la question, étudiée en classe de 5e, des angles alternes-internes. Voici d'abord l'extrait du programme de 5e où cette notion apparaît (il s'agit du programme en vigueur jusqu'à l'année scolaire 2005-2006).

Contenus. Caractérisation angulaire du parallélisme

Compétences exigibles. Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante. Connaître et utiliser les expressions : angles adjacents, angles complémentaires, angles supplémentaires.

Commentaires. On pourra utiliser également le vocabulaire suivant : angles opposés par le sommet, alternes-internes, correspondants.

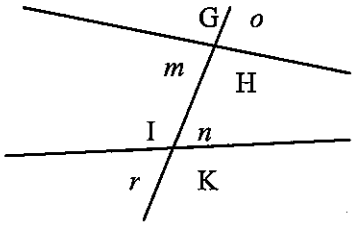
On se trouve ici typiquement devant des mathématiques à enseigner sur lesquelles, sauf exception, le jeune professionnel n'aura pas eu l'occasion de conduire une réflexion appropriée. Or ce que le dispositif des questions de la semaine va permettre de révéler, c'est qu'il faut tout d'abord clarifier ce qu'on appellera, dans la classe, des angles alternes-internes. Voici à cet égard deux questions.

1. Peut-on parler d'angles alternes-internes et d'angles correspondants lorsque les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles ?

2. Quelle définition donner des angles alternes internes ? (Il y a deux possibilités : le cas où les droites sont parallèles et le cas plus général.)

Ces questions, qui se répètent au fil des années, sont prises en charge dans le forum des questions. C'est ainsi que le formateur est amené à présenter une définition donnée dans un manuel de géométrie du niveau collège conforme au programme de l'enseignement court du 18 avril 1947, où la tradition d'enseignement n'a pas encore été sur ce point déstabilisée (elle ne le sera qu'après 1970).

Lorsque deux droites sont coupées par une sécante, elles forment huit angles ; les quatre angles compris entre les droites se nomment **internes** ou **intérieurs** ; les quatre autres se nomment **externes** ou **extérieurs**.



On appelle angles alternes-internes deux angles situés de part et d'autre de la sécante, à l'intérieur des droites et non adjacents. Exemple : les angles *m* et *n*, ainsi que H et I.

La réponse est claire. Mais si l'on examine les manuels depuis une vingtaine d'années, on s'aperçoit qu'il y a là le germe d'un *problème mathématique durable de la profession.* En effet, jusqu'à une période très récente, nombre de manuels ne « définissent » les angles alternes-internes que dans le cas où l'on a *deux droites parallèles* coupées par une sécante. Or la caractérisation angulaire du parallélisme appelée par le programme se traduit par deux propriétés que l'on peut schématiquement formuler ainsi.

Soit deux droites coupées par une sécante commune.

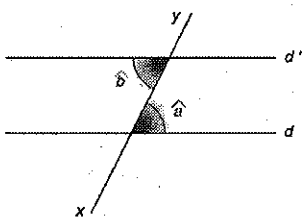
1. Si les droites sont parallèles, alors les angles alternes-internes sont égaux.
2. Si les angles alternes-internes sont égaux, alors les droites sont parallèles.

Mais si l'on définit les angles alternes-internes uniquement quand les droites sont parallèles, on ne peut plus ni formuler, ni même *penser* correctement la deuxième propriété. On voit alors certains manuels se tirer de la difficulté par une subtilité de langage, en parlant d'« angles *en position* d'alternes-internes » lorsqu'il s'agit d'énoncer cette propriété (Malaval 1995, p. 170).

UTILISER DES ANGLES POUR RECONNAÎTRE DES PARALLÈLES

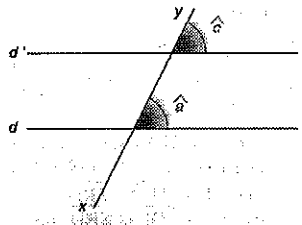
(xy) est une sécante aux droites d et d'.

Lorsque l'on sait que $\widehat{a} = \widehat{b}$
(angles en position d'alternes-internes)



alors on peut affirmer que les droites d et d' sont parallèles.

Lorsque l'on sait que $\widehat{a} = \widehat{c}$
(angles en position de correspondants)

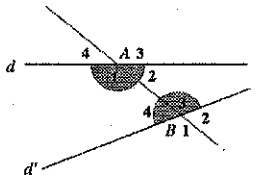


alors on peut affirmer que les droites d et d' sont parallèles.

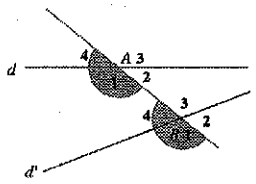
Cette pathologie curriculaire qui a affecté l'enseignement français pendant d'assez longues années tend aujourd'hui à disparaître, les manuels actuels osant de plus en plus présenter la situation « générale » de deux droites non nécessairement parallèles coupées par une sécante (Bordas 2001, p. 186).

c) Angles définis par deux droites d et d' et une sécante (AB)

Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_4$ sont alternes-internes par rapport aux droites d et d' et à la sécante (AB).

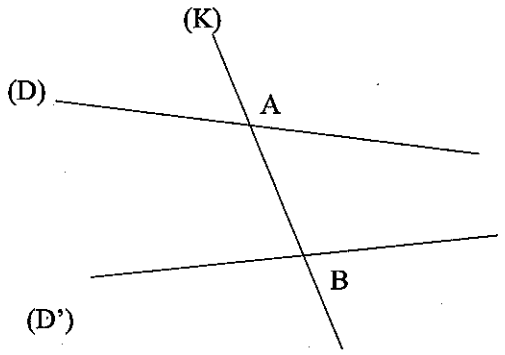


Les angles $\widehat{A}_1$ et $\widehat{B}_1$, $\widehat{A}_2$ et $\widehat{B}_2$, $\widehat{A}_3$ et $\widehat{B}_3$, $\widehat{A}_4$ et $\widehat{B}_4$, sont correspondants par rapport aux droites d et d' et à la sécante (AB).



En fait, on trouve très tôt, dans le curriculum français, la gêne qui portera certains à parler d'angles *en position* d'alternes-internes. Par exemple, le manuel de 4e de la collection Brédif publié en 1968 (Wattiaux *et al.* p. 224-227) ne donne guère à voir que le schéma de deux *parallèles* coupées par une sécante, hormis dans un cas, celui de l'étude de la réciproque du théorème selon lequel « deux angles alternes-internes (ou alternes-externes) sont égaux », où, considérant des angles supposés *a priori* égaux sans pour autant que les droites soient supposées parallèles – c'est ce qu'il s'agit précisément de démontrer –, les auteurs écrivent : « On suppose que les angles $x'\hat{A}z'$ et $y\hat{B}z$, dits alternes-internes, sont égaux. » À la même époque pourtant, certains auteurs prennent le parti, non d'éviter la difficulté, mais au contraire de l'affronter sans détour. Ainsi en va-t-il du manuel de 4e de la collection Cossart et Théron (Théron *et al.* 1969, p. 297). Le texte distingue les droites (D)

et (D'), supposées « quelconques », et la sécante (K). Ensuite, la sécante étant choisie (ou donnée), ce qu'il est facile de définir (parmi les 8 angles déterminés par cette sécante), c'est la relation d'*alternance* : deux angles (parmi ces 8) sont *alternes* si les secteurs angulaires correspondants sont situés de part et d'autre de la sécante (K). Par contraste, la définition du caractère *interne* d'un angle (il ne s'agit plus ici d'une relation binaire entre angles mais d'une propriété de l'angle lui-même) apparaît plus délicate. Les auteurs donnent à ce problème une solution habile, voire élégante, mais qui, pour le débutant, peut apparaître d'abord quelque peu artificielle : un angle (parmi les 8 considérés) est interne si l'une des deux demi-droites qui lui servent de côtés contient le segment [AB], où A et B sont les points d'intersection de la sécante (K) avec les droites (D) et (D').



Tel est le prix à payer, en termes de sophistication mathématique, pour obtenir une définition claire et simple de la notion d'angle interne (et, par négation, d'angle externe). On peut penser que, à la faveur d'une évolution démathématisante qui tend à promouvoir une vision naturaliste des phénomènes géométriques, ce prix à payer est apparu trop élevé, en sorte que l'innocence primitive qui prévalait encore avant la réforme des mathématiques modernes ayant été perdue, il est apparu impossible tout à la fois de ne pas donner de définition et de donner une définition convenable. Faute d'un *definiens* acceptable, le *definiendum* lui-même a donc été occulté, contre la logique même du travail mathématique. Sans s'arrêter plus longtemps sur cette question, on voit que dans ce cas, comme dans bien d'autres, les difficultés rencontrées par les élèves professeurs ne sont pas des difficultés personnelles, mais des difficultés qu'il reviendrait *à la profession*, et non pas à chacun de ses membres, de traiter [97].

97. Par profession, on désigne un vaste ensemble social comportant, outre les professeurs, les militants associatifs du métier, les formateurs de professeurs, les responsables officiels en matière de formation et d'enseignement et les chercheurs en matière de formation et d'enseignement. Sur la notion de *problème de la profession*, on pourra consulter le journal du séminaire DSMF (didactique des savoirs mathématiques pour formateurs), animé par Yves Chevallard. Ce journal est disponible en ligne à l'adresse suivante : http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/2006-2007/excursus07.html.

3.2. Les systèmes de nombres : un immense travail transpositif à prendre en charge

Nous examinerons maintenant une part essentielle de l'univers mathématique, dont l'analyse des questions des élèves professeurs montre qu'elle est une source de difficultés professionnelles toujours recommencées : les systèmes de nombres. Nous présentons une petite partie de ce que nous avons montré à cet égard dans notre travail de thèse, à savoir l'immensité du *travail transpositif* qu'appellerait la prise en charge de ces difficultés par la profession. Plusieurs obstacles importants s'élèvent notamment devant les professeurs en formation. Leur rencontre avec les problèmes liés au système des nombres utilisé concerne tout d'abord les « fractions » et, d'une façon difficilement dissociable, « l'écriture fractionnaire » des nombres, ainsi qu'en témoigne à nouveau la question suivante.

> Quelle est la différence entre fractions et écritures fractionnaires ? On m'a dit que les fractions désignaient exclusivement les quotients de nombres entiers, tandis que l'écriture fractionnaire correspond au quotient de deux nombres quelconques. Certains dictionnaires confirment cette distinction mais les fractions rationnelles ne se limitent pas aux entiers et on définit également le corps des fractions d'un anneau intègre quelconque. Qu'en est-il précisément ?

Cette interrogation, qui montre une confusion entre le nombre et son écriture (ou plutôt *ses* écritures possibles), masque le fait que le recours à l'écriture fractionnaire est engendré par certains *besoins numériques* qui ne peuvent pas être satisfaits par les nombres décimaux. Alors que la construction « moderne » des systèmes de nombres, à son apogée vers 1970 dans l'enseignement secondaire, n'est plus aujourd'hui qu'un souvenir, la construction poussée en avant par les programmes actuels du collège, qui suppose une problématique « réaliste », n'a jamais été véritablement entendue et mise en œuvre par la profession. Le choc avec ce « réalisme numérique » est violent pour les jeunes professeurs, ainsi qu'en témoigne la question suivante.

> Pour définir la fraction $\frac{b}{a}$ ($b \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{N}^*$), on dit que c'est l'unique solution de l'équation $a \times x = b$. Donc, sous-entendu, la multiplication est bien définie ! Mais quelle est cette multiplication ? On définit un objet $\frac{b}{a}$ sur lequel on sait déjà opérer ! En principe, on définit des objets, *puis* des opérations sur ces objets.

Cette question illustre bien l'erreur de compréhension qu'il s'agit pour le formateur d'éradiquer : l'élève professeur raisonne dans le paradigme « moderniste » au lieu de se placer d'un point de vue « réaliste », où les nombres sont supposés exister comme tels dès

lors qu'ils apparaissent comme la mesure de *grandeurs* à l'existence indubitable. C'est parce qu'on peut couper un segment en trois morceaux de même longueur et qu'on peut considérer le segment formé par deux de ces morceaux qu'on a besoin du nombre $\frac{2}{3}$ pour mesurer la *longueur* du segment ainsi obtenu. Ici, le chantier est immense. La formation dispensée, en faisant apparaître les besoins numériques comme imposés par la nécessité de pouvoir mesurer les différentes espèces de grandeurs va mettre au jour un certain nombre de difficultés qui ne trouvent pas à se résoudre simplement dans la culture professionnelle où ces élèves professeurs font leur entrée. La question des unités de mesure, et notamment de leur rôle dans les calculs à conduire dans les classes de collège, sert en quelque sorte de révélateur de ces besoins, ainsi qu'en témoignent les questions que voici.

1. Une longueur (par exemple la longueur AB) doit-elle forcément avoir une unité ? Peut-on écrire AB = 3 sans préciser d'unité ? Dans le cas où l'unité est précisée, les unités doivent-elles figurer dans toutes les étapes de calcul ? Exemples : $AB^2 + BC^2 = 13\text{ cm} \times 13\text{ cm} + 20\text{ cm} \times 20\text{ cm} = \ldots$; $AB^2 = 25\text{ cm}^2$ donc $AB = \sqrt{25\text{ cm}^2} = 5\text{ cm}$…

2. Lorsqu'on effectue des calculs de distance, de temps ou de vitesse moyenne, doit-on préciser les unités dans les calculs ? Doit-on écrire : $d = 70\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \times 3\text{ h} = 210\text{ km}$? Ou bien peut-on écrire : $70 \times 3 = 210$, donc $d = 210$ km ?

3. Est-il correct d'écrire des unités dans un calcul tel que : $A\hat{O}B = 80° + 12° = 92°$?

D'autres questions font apparaître clairement que de telles pratiques rencontrent des réticences, suscitent des scrupules, se heurtent à des résistances.

1. Faire apparaître les unités dans les calculs semble n'avoir que des avantages (homogénéité, nécessité des conversions). Mais est-ce légal ?

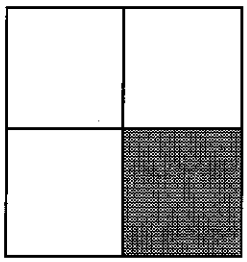
2. Je me range désormais derrière la possibilité (et même à la nécessité) d'inclure les unités dans les calculs ; mais on ne peut l'exiger encore : en effet, nos élèves doivent savoir que certains professeurs de mathématiques n'en veulent pas…

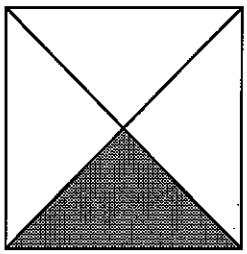
D'autres questions encore mettent en évidence certains problèmes sensibles que rencontrent les professeurs stagiaires, problèmes qui ont, en partie au moins, motivé historiquement la construction de la théorie des grandeurs.

En 6e, lorsqu'on introduit les fractions, on « sépare » les fractions en deux groupes. Tout d'abord les fractions inférieures à 1 (et positives) : on parle de $\frac{3}{4}$ d'un gâteau, on coupe le gâteau en quatre parts égales et on en prend 3 parts. Ensuite les fractions supérieures à 1. Pour faire comprendre aux élèves ce à quoi cela correspond, cela me semble plus dur. Avec les deux professeures avec lesquelles je

travaille pour les 6es, on n'arrivait pas à trouver d'exemples d'emplois de fractions supérieures à 1, si ce n'est la reproduction d'une figure à l'échelle $\frac{6}{5}$ par exemple. Quels emplois peut-on proposer ?

Cette question suscitera dans le forum des questions une assez longue réponse qui insiste d'emblée, avec la plus grande fermeté, sur l'erreur consistant à confondre un certain *objet* – tel un *gâteau* – et telle *grandeur* qui peut lui être associée – tel le *poids* du gâteau. Ce que l'on serait tenté d'appeler « le » quart de gâteau (supposé ici carré) n'est pas défini de manière univoque, comme le montrent les figures ci-après.





Dès lors que cette distinction est faite, c'est-à-dire dès lors qu'on renonce à parler des « trois quarts d'un gâteau » pour parler des « trois quarts du *poids* d'un gâteau », la difficulté évoquée dans la question s'évanouit. En fait, le refoulement de la théorie des grandeurs fait que, dans la culture *mathématique scolaire*, la notion même de grandeur est passée sous silence : le contraste est fort, pour les professeurs en formation, entre les notions regardées par eux comme « strictement mathématiques », et auxquelles ils accordent la vertu d'être précisément définissables, et cette notion qu'ils découvrent comme un problème au moment de l'intégrer dans leur enseignement.

3.4. Mathématiques pour l'enseignant, mathématiques pour l'enseignement

À travers ces exemples présentés à grands traits, on peut voir qu'il y a tout un travail à faire à propos des *mathématiques à enseigner*. Il convient pour cela d'ouvrir largement l'espace de ce qu'on nomme les *mathématiques pour l'enseignant*, c'est-à-dire ces mathématiques que la profession doit connaître pour permettre à ses membres de s'engager de façon adéquate dans l'acte d'enseignement, vaste domaine dont rien de ce qui est mathématique n'est *a priori* exclu. En même temps, on est amené à constater l'inadéquation des matériaux mathématiques « bruts », tels par exemple que l'étudiant les rencontre à l'université, vis-à-vis des problèmes d'interprétation, de compréhension et d'enseignement des contenus à enseigner. La résolution de ces problèmes appelle, au plan mathématique, des *élaborations*

transpositives intermédiaires dont la nature et l'ampleur ne peuvent être fixées à l'avance, et qui constituent un monde mathématique toujours en chantier, le monde des *mathématiques pour l'enseignement*, dont la gestion revient pour l'essentiel *à la profession elle-même.*

En nombre de cas, en effet, les élèves professeurs se trouvent affrontés à des difficultés qu'il reviendrait en principe *à la profession* de régler, et devant lesquelles, en attendant, ils se retrouvent tout à fait démunis. L'expérience vécue lors la préparation du concours se répète : ni la profession, ni les institutions tutélaires ne répondent de façon audible et univoque. Dans ces conditions, et dans la mesure de ses moyens, la formation prodiguée tente tout à la fois de former ces jeunes professionnels et de contribuer à restructurer la culture de la profession. Mais l'étude clinique que nous avons réalisée montre de façon presque violente un aspect refoulé du métier que, précisément, l'observation des entrants dans le métier permet de faire accéder à la conscience : les mathématiques sont une source essentielle, permanente, de problématicité pour la profession elle-même, et l'écart est souvent immense entre les mathématiques à enseigner et le repérage nécessaire d'un corpus de *mathématiques pour l'enseignant* permettant à la profession et à ses membres d'élaborer des *mathématiques pour l'enseignement* à la fois épistémologiquement authentiques, formellement cohérentes et didactiquement adéquates.

4. Au chevet de la classe

Les problèmes rencontrés par les professeurs stagiaires au chevet de leur classe sont légion. Pour illustrer la diversité des gestes cliniques permettant d'identifier les conditions et les contraintes sous lesquelles les élèves professeurs entrent dans le métier, nous évoquerons ici trois études portant chaque fois sur du matériel clinique de nature différente.

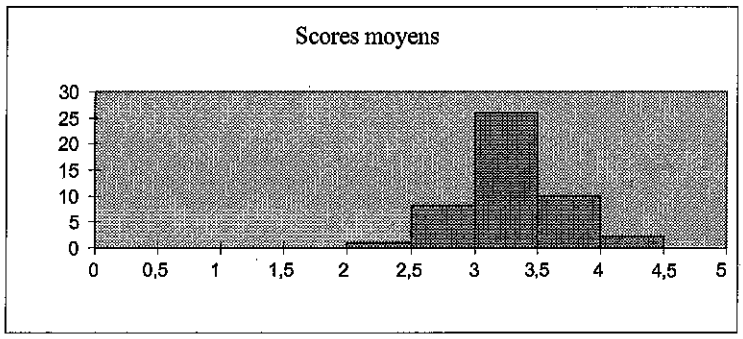
4.1. Les stagiaires et les attentes de la profession

La première étude prend pour objet les résultats d'une enquête interne à la formation conduite en 2000-2001. Les élèves professeurs avaient à apprécier par eux-mêmes, sur une échelle allant de 0 à 5, leur adéquation personnelle supposée à un ensemble d'exigences du métier présenté sous la forme de 29 critères. Ces critères avaient été dégagés dans le cadre d'une recherche, récemment conduite à l'époque, menée sur un corpus de rapports de maîtres de stage. On présente ici trois de ces critères.

« Tenir le rythme dans le traitement du programme »

« Donner un enseignement structuré, diversifié, équilibré, adapté »

L'histogramme des moyennes des scores que s'attribuent les professeurs stagiaires montre clairement que ces scores moyens se situent dans la partie supérieure de l'échelle des scores.



Ainsi l'estimation déclarée par ces professeurs stagiaires traduit-elle un sentiment de bonne adéquation aux exigences du métier. On peut cependant se demander s'il ne s'agit pas là d'une autosatisfaction en quelque sorte *obligatoire* : traditionnellement, dans l'imaginaire professionnel, on devient professeur *d'un coup et complètement*, et il n'est ainsi guère permis d'avouer qu'on l'on ne satisferait pas aux critères définissant le « bon professionnel ». Dans l'imaginaire de la profession, le métier de professeur fait partie de ces métiers qui ne laissent guère à leurs praticiens le temps de se construire comme praticiens.

4.2. La sédimentation historique des contraintes

La deuxième étude que nous présenterons nous a amenée à une plongée dans l'histoire du système éducatif afin d'analyser les conditions et contraintes que cette histoire a sédimentées. Dans les lycées du XIX^e^ siècle, le travail scolaire est structuré par l'opposition entre *la classe* et *l'étude*. La classe est alors un point de rendez-vous entre deux périodes passées en étude : le professeur y corrige les devoirs faits en étude et fournit aux élèves de nouveaux devoirs à faire. Pour des raisons multiples, dont l'élévation du niveau de connaissance disciplinaire des professeurs, souvent agrégés ou au moins licenciés, à la fin du XIX^e^ siècle un autre paradigme émerge, celui dont l'emblème et le dispositif essentiel est le *cours magistral*, par lequel le professeur présente le savoir à étudier en même temps qu'il exhibe la maîtrise qu'il en a. À la Libération, à travers l'expression de « *méthode active* », surgit une nouvelle figure du professeur, qui va désormais devoir conduire en classe certains des travaux jusque-là accomplis en étude ou à la maison. Les textes parlent

d'ailleurs d'*exercices improvisés*, c'est-à-dire que les élèves n'ont pas préparés (contrairement au professeur, bien entendu). Le professeur devient ainsi un directeur d'étude et un aide à l'étude *dans l'espace même de la salle de classe*. Plus près de nous, sous diverses influences, dont celle des recherches en didactique des mathématiques, les programmes de collège parus en 1985 demandent que les séances en classe soient centrées sur l'étude de *situations* sollicitant l'emploi des outils dont l'apprentissage est visé. Dans la perspective ainsi ouverte, le programme de seconde introduit la notion de *synthèse* – synthèse des résultats de l'activité mathématique conduite en classe qui constitue, peut-on y lire, « le cours proprement dit ».

Ces contraintes historiques pèsent sur l'organisation scolaire de l'étude, tout particulièrement à propos des *devoirs à la maison*. Depuis les années 1980, les textes officiels préconisent l'abandon d'une structure didactique où le professeur proposait à ses élèves, selon l'usage ancien, de « *gros devoirs* », et cela au profit d'une structure didactique où les DM sont à la fois *courts* et *fréquents*. Sur un tel changement, les questions foisonnent.

1. J'ai donné à mes élèves quatre DM dans le premier trimestre. Mon PCP m'a dit qu'il craignait que ce ne soit pas suffisant. A-t-il raison ou dois-je dissiper mes angoisses ?
2. De quelle longueur doivent être les DM ? J'ai eu plusieurs versions différentes ; donc j'aimerais savoir ce que je dois faire.
3. Quel doit être le rythme au niveau des interrogations ? Un DM par semaine ? Une interrogation de cours chaque semaine ? Un gros devoir après chaque chapitre ?…

Vestiges d'un temps enfui, certains voudraient encore utiliser ces DM pour avancer dans le traitement du programme, au risque d'un désengagement didactique corrélatif du professeur.

1. Peut-on donner, pendant les vacances, un DM qui va permettre d'avancer dans le chapitre ?
2. Peut-on traiter certaines parties du cours sous forme de DM ?
3. Peut-on proposer la démonstration d'un théorème en DM (à la condition évidemment de guider suffisamment les élèves) ?

La polyvalence didactique des DM paraît ainsi indéfiniment extensible, en conformité avec l'ancien rôle dévolu aux « devoirs », qui en faisait un lieu essentiel des apprentissages scolaires.

On peut voir ici l'un des obstacles contre lesquels les élèves professeurs vont buter quand ils seront amenés à mettre au point une organisation du travail dans leur classe. Il est

vraisemblable que l'on rencontre ici les effets de ce qu'on peut appeler une *formation professionnelle anticipée* des élèves professeurs, qui se seraient imprégnés, notamment durant leurs années de lycée, de *praxéologies professorales d'autrefois*. Comme pour les mathématiques à enseigner, les problèmes soulevés à propos des DM, exposés ici partiellement, sont des problèmes qu'il reviendrait *à la profession* de prendre en charge.

4.3. Les activités d'étude et de recherche (AER)

La troisième étude a pour objet un type de contraintes qu'apporte la modernité didactique et dont la formation donnée à l'IUFM se fait le relais. Dès la rentrée pédagogique, la formation proposée met l'accent sur le changement de paradigme. Ce qu'il y a de neuf est symbolisé par le mot d'*activité* qui, dans la culture professorale encore dominante, ne semble désigner souvent qu'une simple phase *préparatoire*, voire un pur échauffement. Par contraste, la formation va mettre en avant la notion d'*activité d'étude et de recherche* (AER), qui, en laissant une large place à l'action et à la réflexion des élèves, est *le cœur de la vie mathématique de la classe*. Bien entendu, ce dispositif didactique fondateur qu'est l'AER ne saurait vivre à l'état isolé : il ne peut exister durablement qu'en association organique avec deux autres dispositifs, celui des *synthèses*, qui mettent en forme le *produit* des activités d'étude et de recherche, et celui des *exercices & problèmes* – le mot d'exercice retrouvant ici son sens vrai –, qui font « travailler » l'organisation mathématique construite et la maîtrise qu'on en a. À l'ancienne structure binaire Cours / Exercices, la formation oppose ainsi la structuration ternaire suivante : AER / Synthèses / Exercices & problèmes. D'emblée le choc est violent pour les élèves professeurs. Par sa confusion extrême, la question suivante en témoigne de façon significative :

Faut-il faire en module des activités préparatoires au cours ?

Deux grands problèmes de la profession se dressent ici devant les élèves professeurs. Il leur faut tout d'abord *problématiser* les savoirs mathématiques à enseigner. Dans un autre langage, davantage utilisé dans la formation, on dira que, étant donné un savoir proposé à titre de thème d'études par le programme de la classe considérée, il convient d'en découvrir – ou d'en retrouver – les *raisons d'être*, ou, plus exactement, les raisons d'être en adéquation avec le programme et la tradition d'enseignement de ce programme. Sur ce point, les questions foisonnent. Nous en citerons trois.

1. J'envisage de faire avec ma classe l'étude du thème « Développement décimal illimité périodique ». Quelles sont les raisons d'être ?

2. Je ne trouve pas de raisons d'être aux fonctions linéaires (en 3e) ; elles modélisent certes des situations de proportionnalité mais je ne vois pas ce que l'*outil* fonction apporte à ce niveau.

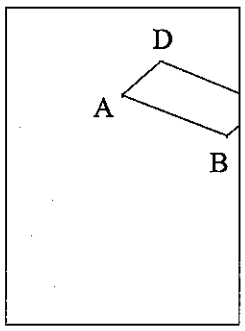
3. J'aimerais savoir quelles sont exactement les raisons d'être de l'indépendance (stochastique, causale), car je n'ai pas encore réussi à répondre à cette question.

Connaître *exactement* les raisons d'être ! La formulation de la dernière question trahit le manque d'expérience et de vécu en la matière. Car déterminer les raisons d'être d'une notion ou d'une théorie n'est pas chose simple : un tel effort participe d'un travail – individuel et collectif – de reconstruction de toute une culture peu présente ou laissée très implicite dans la formation reçue jusqu'alors. C'est un immense chantier que la profession doit faire progresser, dans le cadre de l'élaboration des mathématiques pour l'enseignement.

Le deuxième grand problème est celui de la *conception et de la réalisation* d'une telle AER. Pour illustrer notre propos, nous nous appuierons sur le compte rendu d'observation d'une séance rédigé à l'occasion de la validation des professeurs stagiaires. On y verra que le travail de formation accompli en la matière ne reste pas sans effet dans la pratique et la pensée des élèves professeurs. Il s'agit du cas de Julia qui, dans la classe de 5e qu'elle a en responsabilité, propose l'activité suivante.

Le sommet C du parallélogramme ABCD est sorti des limites de la feuille.

Tracer la partie visible de la droite (AC).



Soulignons que la classe de 5e à laquelle ce problème est proposé *ne connaît pas* la propriété clé, à savoir le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu : c'est précisément pour tenter de résoudre le problème proposé que l'idée va émerger qu'il pourrait bien en être ainsi. Le travail de la classe met en jeu alors un certain nombre de dispositifs étudiés en formation : emploi de *questions cruciales*, formulation de *résultats partiels*, etc. Nous allons tout d'abord examiner un extrait mettant en évidence l'emploi de questions cruciales.

Julia : « Qu'est-ce qu'il faut pour tracer une droite ? » Une élève : « Une droite ? Un compas, un crayon, une gomme. » Julia : « Laissez de côté les instruments de géométrie. » Un élève intervient, sans succès ; puis une élève trouve : « Des points ! », s'écrit-elle. Julia : « Combien ? » L'élève : « Deux ! » « Tout le monde est d'accord ? » « Oui… » « Par quels points passe la droite ? » « A et C » « C, on ne peut pas s'en servir. Comment faire ? » Julia relance : « Qu'est-ce qu'il faudrait faire ? »

Comme l'indique l'extrait suivant du compte rendu, le résultat partiel auquel la classe est parvenue est alors noté au tableau.

Après quelques essais infructueux, la classe dégage la réponse attendue : il faudrait avoir un autre point. Julia écrit :

Pour tracer (AC), il faut 2 points
Ici, on n'en a qu'un : le point A
Il faudrait trouver un autre point

[…]

… qui est sur (AC), et sur la feuille.

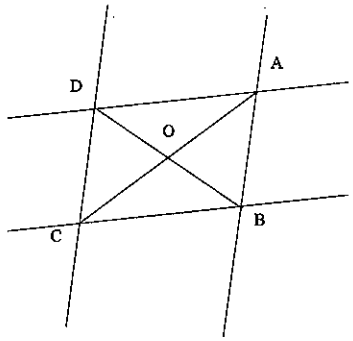
Un peu plus tard dans la séance, un résultat technologique émerge.

Une élève, interrogée, va droit au but : « On trace le segment [DB], on prend le milieu, on le nomme, et après on trace (AI), si I est le milieu… » Plusieurs ont trouvé cette solution. […] Julia écrit :

Les diagonales [AC] et [DB] se coupent,
en un point O

Julia : « Il se balade sur le segment ? Il est où ? » « Au milieu », répond une voix.

La classe est alors prête pour une nouvelle étape, que Julia enchaîne aussitôt. Car la solution trouvée est conditionnelle, elle suppose que ce qui est apparu comme une propriété « bienvenue » du parallélogramme soit *vraie*. Julia propose alors une vérification expérimentale de ce résultat à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique,



Cette vérification est alors présentée comme distincte d'une « démonstration », c'est-à-dire d'une déduction à l'intérieur de la théorie géométrique disponible, et, le cas échéant, comme préalable à cette dernière.

L'élève au tableau a écrit :

On a bougé les diagonales AC et BD

On mesure BO et OD pour savoir si O est le milieu puis on fait pareil avec AO et OC

On a bougé les droites et on remarque que O est bien le milieu des segments DB et AC

[...] Puis [Julia] demande à un élève de formuler la propriété étudiée, ce qu'il fait : « Les diagonales se coupent en leur milieu. » Elle ajoute : « On pourrait le démontrer, mais c'est un peu long. Donc on va l'admettre. »

On perçoit ici pleinement des conduites adaptives et transformatrices de jeunes professeurs en formation qui, comme dans le cas de Julia, s'efforcent de faire vivre dans la classe les praxéologies professorales co-construites dans la formation.

5. Les résultats dégagés et les perspectives ouvertes

5.1. L'école et la société

Dans les sociétés démocratiques, le choix de la matière à enseigner donne lieu à débat, voire à polémiques. Ainsi en va-t-il notamment en ces périodes de crise où le savoir enseigné a, aux yeux d'une partie au moins de la société, perdu une part essentielle de son crédit. Mais tout se passe ensuite comme si, une fois un choix effectué, le savoir à enseigner ne faisait problème que pour ceux qui doivent l'apprendre – les élèves. Or l'étude que nous achevons de présenter ici établit l'évidence contraire : la matière mathématique est presque toujours mal définie, insuffisamment travaillée et indéfiniment problématique, au double plan mathématique et didactique.

L'afflux de connaissances savantes autour de l'école, dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques, permet un renouvellement de fait des *mathématiques pour l'enseignant*. Mais il n'engendre pas pour autant les *mathématiques pour l'enseignement* sans lesquelles il n'est pas d'écologie mathématico-didactique fonctionnelle et durable.

5.2. Les conditions et contraintes

L'effort d'élaboration des mathématiques pour l'enseignement qui apparaît nécessaire doit être conduit sous une foule de contraintes, que notre recherche s'est efforcée d'identifier de façon forcément partielle. D'une part, rappelons-le, il y a les usages établis, qui font norme, d'une profession à forte inertie : certaines des normes correspondantes s'imposent presque

brutalement aux professeurs stagiaires, même si d'autres paraissent fuyantes, voire insaisissables, ou encore en quelque sorte subsidiaires. D'autre part, en dialogue parfois engagé avec cette normativité, il y a la normativité de fait et de droit de cette « école normale » – au sens originel du terme – qu'est la formation proposée à l'IUFM.

Signalons en ce point un système de conditions et de contraintes – que nous avons aperçu sans en approfondir l'examen – lié à la diffusion parfois *sauvage* de savoirs savants au sein de la noosphère de l'enseignement secondaire : aujourd'hui encore, nous semble-t-il, les mathématiques pour l'enseignant ne sont pas tant choisies pour leur pertinence vis-à-vis de l'effort d'élaboration des mathématiques pour l'enseignement qui apparaissent nécessaires ou utiles, que pour leur pure et simple disponibilité savante et, parfois, leur attractivité culturelle.

5.3. La formation et les problèmes de la profession

La tribune offerte aux élèves professeurs par la formation à travers le dispositif des questions de la semaine (et le forum des questions qui lui répond) permet de voir ce que, ordinairement, les professionnels du métier sont portés à dissimuler en le refoulant : la formidable pression de la problématicité mathématico-didactique éprouvée par les professeurs. Ce que la pratique du métier fait apparaître comme difficultés, la formation prodiguée a pour objet de le problématiser, c'est-à-dire d'en faire autant de problèmes, défis lancés à la profession elle-même, entendue ici au sens large, qui inclut notamment les formateurs et les chercheurs en didactique des mathématiques.

Mais ce qui apparaît aussi, une fois ces difficultés transmuées en *problèmes de la profession*, c'est l'état de relatif dénuement de la profession et son impuissance chronique à trouver des solutions, laquelle va de pair, au moins dans le cadre français, avec une incapacité apparente à assumer la nécessité indépassable d'une recherche organiquement articulée à ses problèmes de développement.

Le dépassement de cette situation suppose l'abandon du point de vue individualiste, où chacun est une île qui vit en autarcie intellectuelle et professionnelle, pour adopter le point de vue de la *profession*, regardée comme *intellectuel collectif*, étalon du savoir professionnel de ses membres – un professionnel sachant *grosso modo* ce que sait la profession, et ignorant de même ce qu'elle ignore, selon le principe au fondement de toute profession véritable.

5.4. Les perspectives et le rôle crucial de l'institution de formation

À travers le cas de Julia, nous avons illustré rapidement la manière dont les professeurs stagiaires s'emparent des apports de la formation pour les intégrer dans leurs praxéologies professionnelles et les faire vivre ainsi dans le système éducatif. Pour étudier plus avant cette question, on dispose d'une masse énorme d'archives réunies par l'équipe de formation de l'IUFM d'Aix-Marseille, à l'instar des questions de la semaine et des matériaux du forum des questions, et ce sur une période de semblable durée. La poursuite de l'étude que nous avons menée à bien nous paraît capitale. Car c'est par le truchement des jeunes professeurs que vont se diffuser, dans l'École et dans la profession, les solutions que les collectifs de chercheurs et de formateurs s'emploient à élaborer et à faire reconnaître. Mais il s'agirait là d'une autre recherche, prolongement naturel du travail présenté ici.

Références

CHEVALLARD Y. (2007), Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García, (eds), *Actes du 1er congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (Baeza, 27-30 octobre 2005)*. Universidad de Jaèn. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD.pdf

CHEVALLARD Y., CIRADE G., Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques, *Actes du 13e colloque des professeurs et formateurs chargés de la formation des enseignants de mathématiques du second degré organisé par la CORFEM (Toulouse, 22-23 juin 2006)*. À paraître.

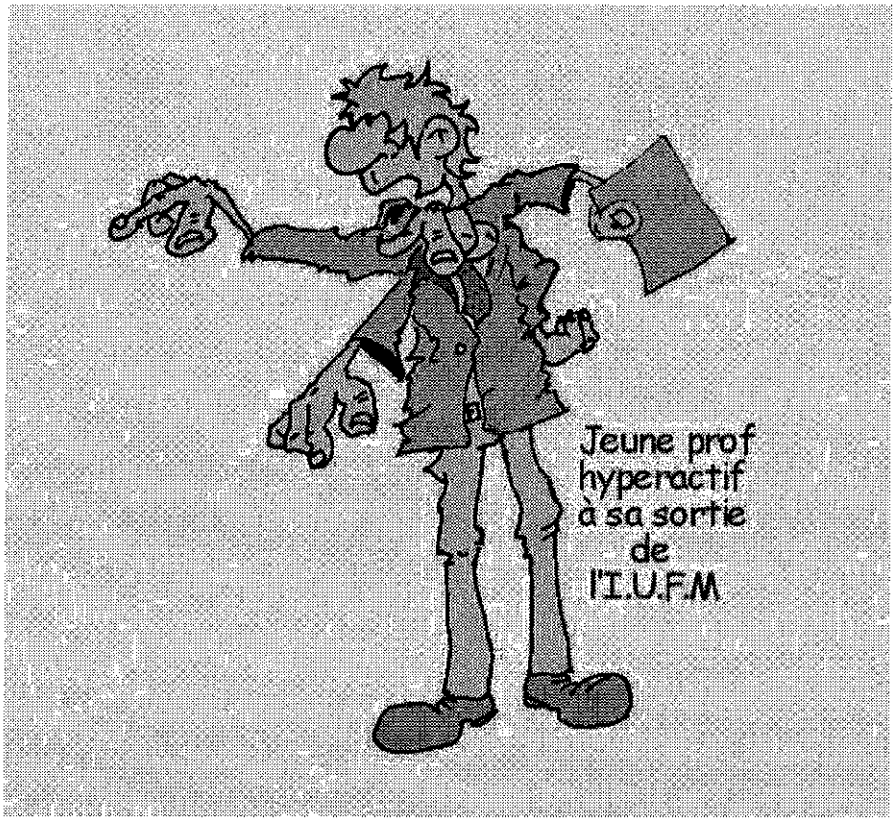
CIRADE G. (2006), *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel.* Thèse de doctorat. Marseille : Université Aix-Marseille I. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709

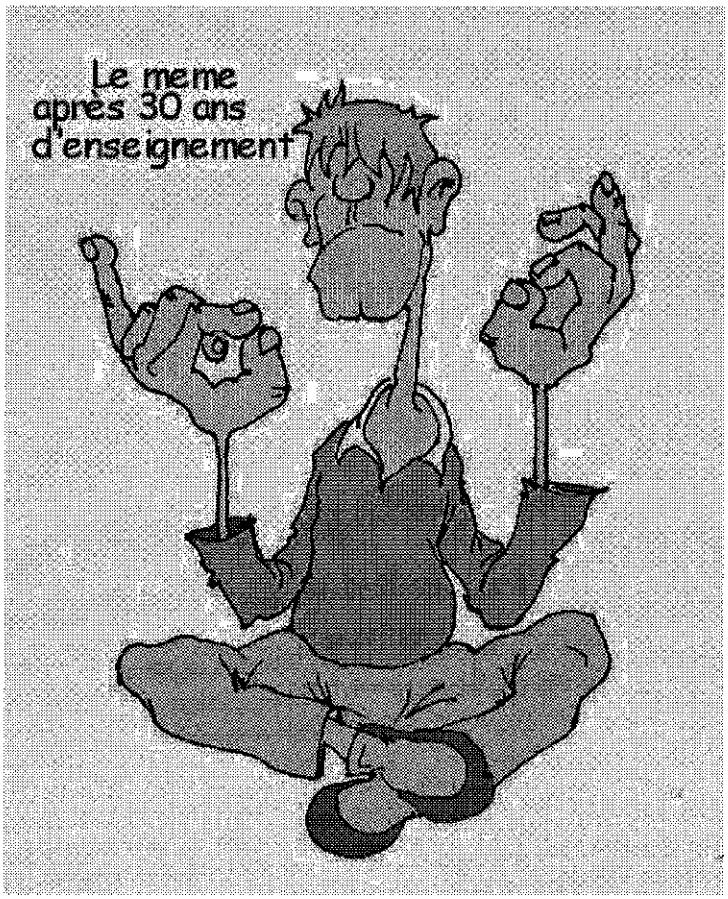
MALAVAL J. *et al.* (1995), *Maths 5e* (Collection Transmath). Paris : Nathan.

SERRA É. (dir.) (2001), *Math 5e. Mathématiques*. Paris : Bordas.

THERON P. *et al.* (1969), *Mathématiques. Classe de 4e (Collection Cossart et Théron)*. Paris : Bordas.

WATTIAUX L. *et al.* (1968). *Mathématiques 4e (Cours Brédif)*. Paris : Hachette.


Jeune prof
hyperactif
à sa sortie
de
l'I.U.F.M


Le meme
après 30 ans
d'enseignement

Présentation des conclusions du travail PIREF : L'efficacité différentielle de l'action conjointe des professeurs et des élèves

Alain Mercier, Gérard Sensevy, Teresa Assude

Partie 1 : Résultats de la recherche

Nous nous sommes plus particulièrement engagés sur l'interprétation de certaines séances d'enseignement qui ouvraient pour nous une question. Nous étudions donc les professeurs experts engagés dans un travail proche de ce qui leur est en principe demandé, ceux qui sont allés le plus loin dans ce que Guy Brousseau décrivait ce matin... La mise en place d'un enseignement que l'on pourrait dire "par problèmes"[98]. Nous n'oublions pas qu'ils s'engagent dans cette voie pour nous montrer leur savoir faire plus que pour nous montrer leurs usages ordinaires.

SITUATION pour enseigner N'EST PAS PROBLÈME à résoudre

Pour commencer de répondre en didacticien à propos de l'efficacité d'un enseignement, une première question est utile : « Sur quoi une activité proposée ouvre-t-elle ? Sur quoi devrait-elle ouvrir ? » Nous avons quelques éléments permettant d'avancer, ils tiennent à l'analyse des thèmes et des valeurs portés par un projet de leçon.

Deux questions nous ont semblé permettre de décider:

« Quel est l'enjeu actuel de l'*activité*, est-elle *robuste, fidèle, juste* ? »

A plus long terme, « Quels sont les avenirs possibles de l'activité ? »

Plus précisément, l'activité proposée à des élèves

Ouvre-t-elle sur une question *cruciale* ?

Ouvre-t-elle sur un thème d'étude dont elle est *génératrice* ?

Ouvre-t-elle sur une théorie dont elle est *fondamentale* ?

Permet-elle un ou plusieurs *parcours* dans une organisation de savoirs ?

[98] On remarquera rapidement que certains professeurs enseignant en Zones de Discrimation Positive ont refusé d'entrer dans la démarche expérimentale, parce que leurs élèves ne supporteraient pas l'incertitude que créerait le problème et que leur organisation de classe n'y résisterait pas.

Nous avons engagé des travaux qui permettent de répondre positivement à ces questions, comme par exemple ceux de l'équipe de Bordeaux, qui prend l'idée de Lebesgue au sérieux et développe le *calcul de l'aire du rectangle* comme situation fondamentale des calculs de produits, de nombres entiers dans l'enseignement élémentaire, de fractions et de décimaux ensuite. Ce travail conduit chaque fois à des éléments théoriques, puis à la construction d'un algorithme et, enfin, à la mise en place d'un dispositif permettant d'asseoir des routines de calcul sur un répertoire connu.

Notre travail de didacticiens consiste à identifier, avec les professeurs et à leur intention, des *outils* techniques, qui ne sont pas toujours décrits dans les travaux mathématiques théoriques mais qui permettent de gérer le curriculum que les professeurs mettent en place au quotidien et de même, à leur fournir des *résultats*, des *dispositifs*, des *faits*, pouvant donner des objets d'enseignement conformes aux programmes. LA didactique est AUSSI une théorie de la pratique[99].

Les contraintes sont multiples et l'enseignement est déterminé à plusieurs niveaux relatifs aux mathématiques d'un côté, aux professeurs et aux élèves de l'autre, ce qui interdit une intervention directe ; des points d'appui d'une évolution possible peuvent pourtant être identifiés, par exemple autour de l'observation des *erreurs persistantes des élèves ordinaires* et des *élèves en difficulté, comme des besoins exprimés des professeurs.*

Nous savons d'expérience qu'il n'y a pas de mutualisation sans théorie commune, pas de ressources produites par les professeurs eux-mêmes en position de professeur, sinon pour eux-mêmes. Nous savons aussi que le système d'enseignement n'a pas produit les personnes dont ce serait le métier.

Car ce qu'il y a à concevoir ce sont des situations au sens plein, c'est-à-dire à la fois des contenus d'enseignement et les conditions de leur enseignement. Mais le travail des professeurs pour conduire les enseignements décrits ainsi n'est pas simple et ne va pas de

[99] C'est ainsi par exemple que nous proposons de réaliser le travail de développement que demande l'INRP. Les outils sont peut-être les éléments les moins visibles. Ils sont identifiés par des systèmes sémiotiques, des *notations* « calculables » et les *notions* associées (tableau de nombres, colonne des différences ; programmes de calcul écrits comme formules d'un tableur ; etc.) dont la vie appartient parfois seulement à la culture d'un niveau d'études. Les résultats sont énoncés et lorsqu'ils sont de quelque ampleur on les nomme théorèmes, les dispositifs s'appuient sur leur usage et certains comme l'algorithme de multiplication sont suffisamment connus pour figurer au programme des études. Ces systèmes de notations et de notions *à usage didactique* sont indispensables au professeur comme aux élèves parce qu'ils correspondent à leur niveau de travail théorique. Mais si ces systèmes langagiers et symboliques, étroitement associés, ne sont pas stables et identifiés comme *les enjeux officiels du travail de la classe*, les activités des élèves et du professeur ne produisent pas de savoir mathématique visible et bientôt, ces activités ne sont plus légitimes.
C'est en ce sens que notre travail de développement participe à la production d'un curriculum effectif : nous nous sommes donné pour enjeu de produire, systématiquement et en coopération, les supports de situations d'enseignement robustes.

soi. L'étude des difficultés que les professeurs rencontrent est aussi l'une de nos questions de travail et c'est aussi sur cette question, un peu en aval de ce qui fait le coeur de notre ligne d'attaque, que nous travaillons en didacticiens des mathématiques.

Mais pour conduire ce travail nous disposons de peu de moyens humains et nous avançons dans un environnement instable où les injonctions venues du système de pilotage de l'enseignement sont parfois contradictoires, parce que la question : " Quels sont les savoirs à enseigner pour qu'ils forment le cadre de pensée de la génération à suivre ? " est toujours un enjeu politique fort, dans toute société.
Or, les choix ne sont jamais complètement explicites et leur réalisation nécessite aujourd'hui une professionnalisation du métier de professeur dont la société ne semble pas avoir idée. Ce qui laisse la place à tous les mouvements de mode idéologique, qu'ils viennent des tenants du savoir (les mathématiciens, dans notre cas) ou de la société civile (les utilisateurs de mathématiques, les employeurs, les idéologues, les porteurs de bonnes intentions qui conduisent tout droit à l'enfer et enfin, tous ceux qui ont intérêt à ce que la connaissance ne soit pas largement disponible, parce qu'ils transmettraient volontiers à leurs en héritiers le pouvoir qu'elle donne).

Souvent, les professeurs, même expérimentés, que nous avons observés ne sont pas professionnels au sens par exemple de leur connaissance des mathématiques qu'ils enseignent (Liping MA). Peut-être pour montrer leur expertise au chercheur qui vient les visiter, ils font fonds sur une "situation" produite par un groupe de travail ou ils font fonds sur une question venue d'eux-mêmes et dont ils connaissent une solution, et se lancent dans un *enseignement par problèmes* sans se demander dans aucun des deux cas ce qu'un élève peut en apprendre et ce qu'il est possible d'enseigner.
Ils ne sont pas responsables seuls de cette situation. En particulier, *la construction de progressions est actuellement un problème didactique des professeurs que, je crois, nous les didacticiens avons sous-estimé.* Comme si nous didacticiens n'avions pas encore bien compris que les situations proposées par nos théories n'existent que comme longues théories de jeux, engendrées par une ou plusieurs situations fondamentales dont ils déclinent les cas, sous le prétexte que nous n'avons pas les moyens, comme Brousseau l'a fait à Michelet, d'observer plus de deux ou trois séances. Des phénomènes didactiques ont été identifiés, dans notre recherche.

Analyse a priori

C'est un geste essentiel de l'analyse et nous avons appris à la conduire plus sûrement après coup, mais toujours a priori c'est à dire avant toute interprétation de ce que nous avons observé. Car c'est cette analyse qui nous donne des clés d'interprétation de ce qui se voit lorsque l'on suit une classe ordinaire. Elle confronte le projet déclaré du professeur et son impression après coup à ce que notre construction imagine, en termes d'apprentissage, pour un élève qui se trouverait dans la classe. Teresa en a parlé longuement.

Dévolution et régulation didactiques

L'analyse a priori montre un premier phénomène didactique qui s'applique aux cas particuliers étudiés ici, mais aussi à d'autres classes et autres professeurs. Ce phénomène est celui de la *réduction de la complexité conceptuelle* : *il y a une réduction de la complexité conceptuelle des problèmes proposés d'autant plus importante que le modèle mathématique standard qui les définit demeure porté par les systèmes sémiotiques ordinairement associés à des organisations praxéologiques hautement techniques*. En clair, plus les questions posées relèvent de mathématiques identifiées comme des savoirs de haut niveau, plus il devient impossible au professeur de proposer un système sémiotique adapté et plus il doit laisser les élèves inventer à partir du peu de mathématiques qu'ils savent, en appuyant leur travail sur une manipulation matérielle qui ne permet pas de montrer ou de nommer les mathématiques qu'ils sont censés étudier.

Cela contraint fortement les éléments d'efficacité du professeur, qui dépendent des connaissances mathématiques dont chaque professeur dispose. Celui-ci doit savoir quelles sont les stratégies d'élève possibles pour l'activité qu'il propose et comment ces stratégies peuvent évoluer vers des savoirs de plus haute technicité.

Il nous semble avoir montré par exemple que la contrainte de la double inégalité qui caractérise les problèmes des étoiles et des œufs doit être signifiée par un système sémiotique peu mathématique que les élèves puissent inventer ou dont ils puissent s'emparer, par exemple le discours « juste ce qu'il faut, ni trop ni pas assez ». Mais si nous imaginons un professeur qui pense la double inégalité en termes de "test d'arrêt d'un algorithme", alors la stratégie à partir de laquelle il interprètera les actions des élèves sera différente, le système de notation qu'il pourra proposer sera tout autre. L'analyse a priori dans la construction du jeu est un élément essentiel, comme nous avons pu le montrer, pour

pouvoir définir, dévoluer et réguler le jeu de l'élève avec le savoir, mais le professeur n'en dispose en général pas. Sinon, l'un laisse les élèves patauger dans l'activité tandis que l'autre leur démontre une technique qui lui est personnelle, mais les deux échouent à assurer, pour la majorité de leurs élèves, la double rencontre du problème et du savoir qui permet de le résoudre.

Puisque certaines potentialités du milieu sont investies par les élèves sous le contrôle du contrat didactique qu'ils connaissent et supposent pérenne, la dévolution apparaît comme un processus complexe qui ne se réduit pas à l'engagement d'un sujet dans une tâche prescrite. Cette dévolution suppose, entre autres, un engagement du professeur dans le travail du savoir, notamment dans une analyse qui lui permet de préciser les enjeux de la situation et en particulier les objets symboliques nécessaires et le discours qui leur est associé. Cet engagement du professeur à étudier pour lui-même les mathématiques qu'il enseigne peut lui permettre d'éviter des définitions incertaines et des rebondissements de la dévolution. Il y a donc là une catégorie de questions à poser dans un questionnaire d'enquête sur les pratiques d'enseignement efficaces : je fais référence ici au travail remarquable de Liping Ma (1997).

Chronogenèse et topogenèse

Nous avons donc pu identifier plusieurs stratégies non proprement mathématiques des professeurs, relatives à la définition et de la dévolution du problème : par exemple le professeur contextualise le problème en le présentant sous la forme d'une situation familiale ou sociale. Mais les stratégies qui nous semblent importantes tiennent compte des règles constitutives du jeu (dont l'enjeu est un savoir), et qui construisent une référence commune par explicitation progressive des règles du jeu. Certaines semblent ne satisfaire qu'à une seule des contraintes qui déterminent ensemble l'espace de liberté du professeur.

Ainsi un de nos professeurs observés semble chercher d'abord à ne pas passer trop longtemps dans la définition et dans la dévolution du problème et plus généralement, sur les mathématiques. D'ailleurs, il le dit explicitement : *« j'évite de proposer des situations + ou de mettre en place des situations + euh...style celle d'Ermel où euh...où y a beaucoup de temps de mise en place »*. Comment s'y prend-t-il ? Il cherche d'abord à impliquer personnellement les élèves, par des situations placées dans leur contexte personnel ou familier. Il parle de « simplifier les situations » et pour lui les mathématiques au CP consistent à « jouer avec les nombres » : *« on simplifie au maximum pour avoir une*

situation de...de classe... la maman d'untel + le papa d'untel + les crêpes qui ont été amenées euh...euh + untel qui a des bonbons euh...euh...<... ?> qu'a des couettes sur la tête + on fait des calculs avec tout ça et on joue avec euh...avec les nombres ». Le rythme des séances mathématiques de cette classe est particulièrement rapide : les élèves travaillent individuellement sur l'ardoise et très vite on passe à une correction collective. Le temps des activités collectives est donc plus important que le temps de travail individuel, le professeur veut qu'ils travaillent sur le calcul mental et sur ce qu'il appelle le « raisonner dans la tête » : *« maintenant c'qui est...dur pour les enfants c'est que...je travaille beaucoup sur le...calcul mental + sur euh...euh les stratégies d'calcul euh...pas forcément un raisonnement euh...les forcer à s- raisonner dans la tête et...y vont d'moins en moins s'appuyer sur de l'écrit ».* Le rythme des séances est accéléré par le renvoi des moments de la construction du temps personnel des élèves à l'extérieur de la classe.

En revanche, le rythme de la séance de l'autre professeur, observé en parallèle, est plus lent. Il propose aux élèves de manipuler les bandes d'étoiles et les boîtes d'œufs : cette phase de manipulation ralentit le rythme de la séance car le capital-temps dépensé est assez important par rapport à l'avancement du temps didactique. Renée, lors de l'entretien, dit explicitement l'importance qu'elle accorde aux manipulations dans ce contexte : « *quand j'ai préparé ça, je me suis beaucoup basée sur Ermel mais je me suis beaucoup basée sur l'idée qu'il fallait les faire absolument vérifier leurs anticipations par manipulation concrète donc c'est pour ça que tu as vu, tous, toutes les manips au tableau plus les collages sur feuille, etc., je voulais absolument les imprégner, on va dire, de différentes manipulations.* » Renée dit dans l'entretien post- que, si elle avait fait des changements, *« Je n'aurais pas refait de manipulation sur les boîtes d'œufs et je leur aurais peut-être proposé les exercices boîtes d'œufs directement avec une valeur d'évaluation. ».* Le rythme plus lent de cette classe est effectivement fondé sur une alternance de travail individuel et collectif avec une importance donnée au travail individuel de manipulation.

Un phénomène didactique important est donc celui de *l'économie temporelle* de la classe, qui peut être formulé de la manière suivante : *la gestion temporelle dans la classe est faite en partie en estimant la valeur temporelle des situations de manière à économiser le maximum de capital-temps tout en faisant avancer le temps didactique.* En d'autres termes, le rythme d'une séance doit être ni trop lent ni trop rapide. Si le rythme est trop lent, le professeur va mettre en œuvre des stratégies pour économiser le capital-temps (en

supprimant des manipulations) si le rythme est trop rapide les élèves ne suivent plus (et le professeur est obligé de revenir en arrière pour expliquer).

Mais on ne sait pas évaluer vraiment le fait que le professeur avance *au bon rythme,* sans doute parce que ce rythme dépend beaucoup de la capacité des élèves à produire une avancée personnelle adéquate, mais aussi parce qu'il semble que l'observation des phénomènes d'apprentissage produits par un rythme apparemment très rapide ou très lent suppose une durée qui dépasse de beaucoup la séance.
Dans les deux cas, on observe que ces tempos extrêmes laissent beaucoup de l'étude à la charge des élèves, soit qu'ils doivent produire hors classe le savoir institutionnel attendu soit qu'ils doivent se former par eux-mêmes une expérience personnelle des phénomènes étudiés. La variable principale serait donc relative non pas au tempo public des séances de classe, mais à l'organisation d'une production partagée du temps didactique.
C'est ce qu'un questionnaire devrait pouvoir chercher à identifier.

La production d'un milieu ou mésogenèse

Un troisième phénomène didactique est celui du *rôle des techniques dans la production des milieux* de la situation et dans l'organisation des rapports des sujets à ces milieux. Ainsi, le type de tâches proposé aux élèves est le même dans trois classes observées, mais les situations créées ne sont pas les mêmes. Elles varient selon la présence ou l'absence des outils sémiotiques que les interactions avec les objets du milieu conduirait à mobiliser (par exemple, une bande numérique individuelle sur laquelle cocher 9 et surligner des groupes de 5 ou, la suite écrite des multiples de 5 qui permet immédiatement d'encadrer, dans le problème des étoiles). La présence possible de telle technique tient en effet au fait que ces outils aident ou non à l'inventer, par productivité du système sémiotique, ou à l'appeler en mémoire, et à la travailler dans un nouveau contexte.
L'analyse des outils sémiotiques disponibles est ainsi un moyen pour imaginer les diverses manières dont les élèves peuvent s'attaquer à un type de tâche ; c'est donc un moyen pour décrire différents types de milieux, et d'accéder in fine aux situations didactiques.
Les milieux sont en effet un moyen de régulation, notamment par les processus *d'expansion ou de réduction du milieu, qui sont une des techniques de régulation à disposition du professeur par la gestion de l'incertitude des élèves qui leur est ainsi permise.* Dans l'une des séances analysées, cette expansion du milieu est double : soit le maître apporte des informations ou des énoncés contradictoires (par exemple en proposant un contre-exemple

et en se plaçant comme contradicteur) soit le maître apporte des éléments problématiques qui auraient pu placer l'élève dans une dialectique de formulation et validation. Le professeur contrôle ainsi les moments où la nécessité de savoir vient du fait que quelque chose de connu dans d'autres conditions devient problématique.

Mais une expansion n'implique pas forcément que les élèves puissent rentrer dans des dialectiques nouvelles : cela dépend de la rétroaction que fournit le milieu, comme nous avons pu l'observer dans la séance analysée. Par opposition, certains milieux sont tellement étendus que le professeur va procéder à des réductions drastiques, par élimination des propositions ou des interprétations apportées par les élèves. Dans ce cas, le professeur dispose et oriente peu à peu les élèves en fonction des réponses qui l'intéressent. Ce type de réduction ne correspond pas au contrôle d'un certain nombre de variables didactiques comme nous le montrent certaines des situations adidactiques, bien au contraire il pilote le comportement des élèves par les effets du contrat didactique. Nous retrouvons ici des éléments qui rappellent certains résultats de l'équipe toulousaine, bien que nous puissions en donner une description à proprement parler didactique.

En effet, il est possible que le phénomène de variabilité des formes pédagogiques, repéré comme un des éléments d'efficacité d'un enseignant, corresponde à la variation nécessaire des rapports aux objets du milieu des situations didactiques selon le type de travail épistémologique qui est attendu des élèves. Ainsi par exemple, les débats ne sont pas utiles en soi mais au moment où il est nécessaire de démontrer, dans le cadre d'un discours théorique, des propositions venues d'un autre temps de l'étude, qui peut être un temps de pratique ou même, un temps de travail expérimental qui est un retour à la pratique pour une vérification. Ces temps différents de l'étude correspondent, dans l'analyse didactique, au rapport à des milieux ayant des propriétés différentes comme formes de vie de rapports épistémologiquement différents aux savoirs étudiés. On peut évaluer de même le travail de groupe, la prise de notes de cours ou la réalisation d'exercices d'entraînement.

Sur ce sujet, une enquête par questionnaire auprès des professeurs devrait pouvoir être construite.

Le contrat didactique différencié

Un autre phénomène didactique est celui du contrat didactique *différencié* qui pourrait alors être formulé de la manière suivante : *le type, la présence, ou l'absence d'un discours qui*

accompagne la production d'une réponse est un élément différentiant des milieux auxquelles les élèves sont confrontés.

L'analyse a priori montre en effet que les différents niveaux de l'étude ne sont pas de la seule responsabilité de l'élève ni de celle du seul professeur. Dans les classes observées, les élèves peuvent avoir un rôle important pour proposer des embryons de techniques (qui ne sont pas forcément repris par le professeur), et le professeur prend parfois la responsabilité de la technique soit en indiquant aux élèves des systèmes sémiotiques constitutifs d'une technique à partager, soit en laissant ses élèves développer des embryons techniques qu'ils n'institueront jamais. Alors, la présence ou non de techniques de validation de la réponse produite est un élément qui peut faire varier la direction de développement d'une situation dans les conditions de sa vie ordinaire. C'est là un phénomène didactique important car le renvoi systématique des élèves à des procédures de vérification interdit l'évolution d'un jeu d'action en jeu de formulation et le passage au développement d'une technique. Or, il semblerait que ce soit ce que font les professeurs quand ils considèrent avoir affaire à un élève faible.

Une autre dynamique tient aux différentes manières dont le partage topogénétique influence le jeu avec le milieu. *Les postures d'accompagnement et d'analyse adoptées par le maître tantôt placent le maître et l'élève dans le même jeu, tantôt placent le maître en tant que professionnel qui analyse et évalue les actions des élèves. Ainsi le maître peut à certains moments faire partie intégrante du milieu (en jouant avec et contre l'élève) et à d'autres moments le maître peut être à l'extérieur du milieu en créant une distance qui lui permettra de réguler la suite du travail de l'élève. Ces dynamiques peuvent créer des conditions pour que certains élèves plus que d'autres assument un rapport au milieu, à l'ignorance et à l'incertitude, et tout simplement au savoir. Mais leur observation doit être conduite classe par classe, et dans une classe, presque élève par élève. Sur ce point donc, nous n'avons pas l'espoir de pouvoir obtenir des renseignements par le moyen de questionnaires.*

Pour conclure la partie I

Nous conclurions d'abord le rapport sur les résultats obtenus dans les techniques de description de l'enseignement que la recherche entreprise nous a conduits à mettre au point. D'une certaine manière, le projet de base de données vidéo VISA est une conséquence de ce progrès, qui rend ces projets réalistes.

Nous le conclurions ensuite bien sûr avec les éléments de réponse à la question posée : nous savons plus sûrement observer un enseignement pour en voir l'efficacité potentielle comme l'efficacité probable. Notre travail conduit en parallèle en mathématiques et en français, nous a montré comment *des déterminations apparemment génériques se spécifiaient très concrètement dans une discipline donnée et comment ce sont les propriétés mêmes de cette spécification qui sont déterminantes*. J'en ai retenu trois grandes catégories.

Le jeu didactique se joue à deux niveaux au moins : entre, d'une part, le jeu avec les systèmes d'objets et de notations sur lesquelles s'appuie l'activité demandée aux élèves et, d'autre part, le jeu avec les systèmes langagiers et les notions par lesquelles l'activité se parle et se contrôle. L'articulation de ces deux niveaux fait le principal du problème didactique que le professeur doit résoudre pour aider les élèves, et cette articulation suppose de sa part un travail préalable qui n'appartient pas à la panoplie des « gestes professionnels » de professeur.

Un des acquis importants de notre travail tient sans doute dans le fait que nous pensons pouvoir produire un questionnaire qui mettrait en évidence ce travail, pour tel chapitre, ce qui nous permettra de tester le poids relatif de cette variable dans l'efficacité d'un professeur. De plus, nous savons comment la gestion temporelle pèse sur le processus d'enseignement et nous pouvons là aussi enquêter de manière large, par questionnaires auprès des professeurs et de leurs élèves.

Un autre de nos acquis est le fait que nous devrions pouvoir observer des élèves dont l'activité était jusque là hors de notre portée parce qu'ils n'avaient pas de comportement public observable : leur rapport aux notations et aux systèmes langagiers associés peut être observé dans leurs notes de cours et lors d'entretiens hors classe.

Mais il y a une autre leçon, qui nous concerne de plus près encore, comme didacticiens, parce qu'elle correspond à un travail que nous n'avons pas conduit à son terme et qui manque.

Partie 2: Problèmes, activités, situations

La question est générale et vous me permettrez de la construire en partant de loin, mais il m'a fallu prendre cette distance pour comprendre ce que nous avons observé. Nous avons observé :

- comment des professeurs proposaient à leurs élèves des activités, et
- comment ils accompagnaient leurs élèves dans ces activités (pour qu'ils produisent des savoirs)

Nous avons tenté d'évaluer *a priori* l'efficacité des professeurs que nous observions. Cela nous a conduit *a posteriori* à centrer notre regard sur deux types de jeux de langage :
- la manipulation des systèmes de notations,
- la mobilisation des notions associées,
sans oublier la mise en place, l'accompagnement, les suites des activités.
Il semblerait que la manière dont les professeurs pensent leur travail ne les aide pas à s'améliorer, parce qu'ils ne sont pas centrés sur *la production de savoir (les notations, et les notions éventuelles que ces notations appellent).*

Que veut-on enseigner?
Lorsque l'on consulte le texte du programme 2002 relatif au Cycle 2, on peut lire dès les premières lignes que : « Élaborées comme *réponses efficaces à des problèmes*, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables *pour résoudre de nouveaux problèmes*. »

Ce qui correspond très précisément à la philosophie générale des textes de tous les enseignements de l'école obligatoire. *Les problèmes sont le moteur de l'activité mathématique* et donnent le sens ou la signification des apprentissages, qu'ils demandent. Mais ces problèmes, dans le curriculum actuel en France, visent à *enseigner des notions mathématiques*. L'enseignement peut donc être pensé comme une genèse artificielle des savoirs, réalisée sous la direction d'un professeur par un groupe d'élèves organisé en communauté scientifique autour de problèmes dont ils fournissent une réponse efficace. La chose s'argumente aisément, plus nettement encore au Collège : les modèles des situations problématiques sont bien des représentations et ces représentations permettent de résoudre efficacement les problèmes ; le calcul algébrique est par exemple un système de représentation socialement stabilisé parce que ses manipulations sont particulièrement efficaces, tout comme les figures géométriques qui donnent une représentation universelle des configurations spatiales ; la démonstration est une forme argumentative venue de l'usage réglé de ces représentations. *Il y a des mathématiques à enseigner à tous, parce*

qu'elles fondent toutes les pratiques mobilisant des mathématiques, C'est non seulement vrai pour le secondaire, mais dès le cycle 2 du primaire. Que ce soit dans le travail scientifique ou dans la société, ce sont bien des mathématiques et chacun peut en être d'accord.

On peut remarquer la progression d'un cycle à l'autre et pour le Collège, qui mérite d'être étudiée et commentée puisque les mathématiques proposent en fin de compte non seulement le développement d'une pensée rationnelle mais, comme le disent fort bien les textes, l'expérience pratique d'une démarche scientifique.

On peut enfin rapporter à ces déclarations les termes du rapport de l'Inspection Générale, qui a observé la grande difficulté des professeurs d'école avec la tâche qui leur est ainsi demandée : enseigner des mathématiques en faisant faire des mathématiques aux élèves. C'est l'enjeu de mon intervention.

On peut demander alors, ce sera la dimension polémique de mon intervention, si le mot d'ordre n'appellerait pas trop souvent une utopie, *parce que les conditions techniques de sa mise en oeuvre efficace ne sont pas réalisées*. Les phénomènes que l'Inspection Générale observe comme nous seraient alors tout à fait normalement, hélas, l'effet d'une demande qui ne peut pas aboutir à l'invention d'une technique efficace, une demande appelant un état que l'autorité peut toujours opposer aux réalisations maladroites des professeurs et qui fonctionne donc comme un discours moral inquisitoire.

Je tenterai de montrer les conditions qui risquent d'avoir pavé de bonnes intentions un chemin qui se retrouve, trop souvent, conduire tout droit les professeurs et leurs élèves à l'enfer de l'activisme.

Quelques éléments de réflexion pour construire une réponse

On remarquera d'abord que très souvent, le mot d'ordre ne parle pas d'apprendre les mathématiques mais d'en faire, et que, dans le cas du CE2 où il s'agit bien de faire des mathématiques pour en apprendre, le texte ne pose pas la question de savoir si « en faire » suffit pour « en apprendre », comme si tous les professeurs savaient se débrouiller de cette injonction. Prenons le texte le plus explicite, celui pour le Collège. Les élèves en effet sont supposés avoir un rapport mieux qualifié et plus scolaire aux autres objets de la liste qu'ils "rencontrent" (les modèles des situations), comprennent (le sens du calcul algébrique), découvrent (les propriétés universelles des figures)" ou dont ils "font l'apprentissage (la

démonstration)", tandis que les problèmes, ils ont simplement à "les résoudre". Au point que l'on pourrait se demander s'il faut apprendre quelque chose des problèmes que l'on résout ou s'il faut seulement *en avoir fait* (résolu) et s'en souvenir pour en faire, à la demande, "résoudre des problèmes" devenant ainsi chez certains auteurs... *une compétence, sans plus aucun contenu mathématique déclaré.* Ainsi, apprendre des mathématiques ne serait plus l'enjeu de l'enseignement des mathématiques : après tout, on n'enseigne plus le latin pour que les élèves sachent écrire ou parler cette langue, les mathématiques pourraient devenir elles aussi *une pratique culturelle morte.*

Cette position est défendue par certains courants cognitivistes, au Québec en Suisse et en Belgique et elle sera bientôt, peut-être, vivace en France. Actuellement sans doute, la lecture des programmes montre que, si certains mathématiciens rejoignent ce courant de pensée et affirment que, pour faire des mathématiques il n'y a rien à savoir, sauf à être mathématicien professionnel ce qui est fort rare, ce n'est pas la position officielle de l'enseignement. Pourtant, la dernière description du socle commun parle bien de... compétences, utilisant très précisément le terme qui est porteur potentiel de cette position.

Revenons donc au texte pour le cycle 2, le texte de 2002 qui définit les contenus de l'enseignement semble décrire très fermement le processus attendu. Un processus qui s'engage par "la recherche de réponses efficaces à des problèmes" et "débouche sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure)" quoique... *« Les divers champs disciplinaires n'émergent que progressivement tout au long de l'école primaire.../...*
Dès le cycle 2, les élèves doivent prendre conscience du fait que résoudre un problème ne revient pas à trouver, tout de suite, les calculs à effectuer pour répondre à la question posée. Une élaboration est, en général, nécessaire, faite d'étapes ou d'essais plus ou moins organisés. Un même problème, suivant le moment où on le propose, suivant les connaissances des élèves à qui on le destine et suivant la gestion qui en est faite, peut être résolu par élaboration de procédures personnelles ou, plus tard, par reconnaissance et utilisation d'une procédure experte appropriée. Dans certains cas, la résolution des problèmes est organisée par l'enseignant pour, à partir des solutions personnelles élaborées par les élèves, déboucher sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure).
L'entraînement, nécessaire pour fixer certains savoir-faire essentiels et les rendre plus facilement disponibles, ne doit pas occulter la phase, parfois longue, au cours de laquelle

les connaissances sont élaborées par les élèves, puis progressivement précisées et structurées. »

En ce point du débat, il est essentiel de noter que les premiers à avoir traité de la question n'ont pas porté le mot d'ordre lui-même. Ainsi, rejoignant sur ce point Régine Douady à qui il réfère, Yves Chevallard écrit (1981), dans *Pour la didactique.* Marseille: IREM. p 28. :
« ...les mathématiques sont moins un ensemble de connaissances (à acquérir) ou un corpus d'énoncés (à apprendre) qu'une activité spécifique dont les éléments essentiels sont *des problèmes* que l'on s'essaie à résoudre et qui sont en quelque sorte le moteur de l'activité mathématique, et *des outils* (concepts, méthodes, techniques) dont la construction elle-même est un problème mathématique et qui seront mis en fonctionnement pour résoudre des problèmes. »

Faire des mathématiques, c'est *utiliser* des outils pour résoudre des problèmes et donc aussi, *construire* des outils permettant de résoudre des problèmes ou encore, *étudier* des outils et les problèmes qu'ils permettraient de résoudre. Résoudre des problèmes est *le moteur* et *le motif* de l'activité mathématique, ce n'est pas rien mais ce n'en est pas le tout[100], le texte des programmes dit aussi cela.
Les inventeurs de la didactique des mathématiques ne sont pas les premiers à insister sur ces questions. Ainsi Lebesgue commençait-il, en 1935, son cours à l'ENS de Sèvres sur "la mesure des grandeurs", dont il a renouvelé les techniques, par cette déclaration :

« Un tout jeune enfant, invité à prendre un bonbon et à en donner à ses deux soeurs, s'assurera d'abord de sa part, puis portera un bonbon à l'une de ses souers et reviendra en chercher un autre pour le porter à son tour. Plus âgé, il évitera ses allées et venues ; il prendra les trois bonbons en disant "pour moi, pour Louise, pour Renée. On imagine volontiers .../... que par un mécanisme analogue les hommes en sont arrivés, quand ils veulent comparer deux collections, à compter ; c'est-à-dire à comparer les deux collections à une même collection type, la collection des mots d'une certaine phrase. Ces mots sont appelés des nombres. Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres ; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection. Ce nombre est

[100] Comme dirait Bobby Lapointe.

considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet. Un résultat expérimental sert à dispenser d'autres expériences. Les règles des quatre opérations nous dispensent des opérations de dénombrement pour certaines collections... »

Lebesgue signifie ainsi à la fois le caractère *d'activité scientifique expérimentale* des mathématiques, le fait que les représentations obtenues sont des modèles de certaines situations expérimentales et que ces modèles permettent de résoudre certaines classes de problèmes qui en font le sens. Lebesgue insiste sur les conséquences de cette déclaration et on peut inviter tout professeur de mathématiques à s'y reporter car le texte a été réédité (LEBESGUE (1975) La mesure des grandeurs. Paris: Blanchard), il se trouve dans toutes les bibliothèques de mathématiques et il est lisible par toute personne cultivée.

L'équipe premier degré de l'INRP (ERMEL (1993), CE1, Apprentissages numériques. Paris: Hatier, p. 39-51) retrace aussi, et parallèlement, l'histoire d'un tout autre objet, les "problèmes pour apprendre à chercher" dans l'enseignement, et montre qu'en 1945 les problèmes sont classés par le nombre d'opérations que leur résolution mobilise. En 1970, ils doivent permettre aux élèves d'apprendre à "analyser une situation ou une chaîne de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent", la notion de "situation-problème, beaucoup plus ouverte, élaborés par l'enseignant ou par les élèves, à propos desquelles la recherche peut s'exercer dans de multiples directions... " n'intervenant qu'en 1978-80, sous l'impulsion d'équipes IREM que je ne nommerai pas...
ERMEL pour sa part fait explicitement référence à l'approche de la psychologie cognitive et cite BRUN (1990, La résolution de problèmes arithmétiques : bilan et perspectives. Math-Ecole 141) pour différencier un exercice, un problème pour apprendre et un "véritable" problème, "pour lequel l'élève ne dispose pas d'un modèle de résolution qui lui ait été enseigné" : c'est-à-dire, un problème pour apprendre à chercher et non pas un problème permettant d'apprendre les mathématiques avec lesquelles on résout les problèmes du même type. Car la "résolution de problème" est une épreuve connue de psychologie cognitive, au point que le "problème des Tours de Hanoï" a dû être posé à tous les petits genevois, dans les années 70 : Brousseau lui-même a travaillé dessus. Elle est alors considérée comme l'activité cognitive par excellence et finalement, Brun a critiqué ces

expériences de laboratoire sur "les seuls problèmes que les psychologues connaissent et qui ont pour limite les connaissances collectives de cette communauté".

On remarquera ensuite que les tenants du mot d'ordre peuvent facilement être reconnus à cela : le mot d'ordre suppose que là seulement, dans la recherche à laquelle engagent les situations faisant problème, est l'activité "vraie", qui permet de faire *vraiment* des mathématiques bien sûr, et d'en éprouver *la vraie nature*. Le mot d'ordre l'affirme, la vraie nature de l'activité mathématique c'est... de chercher à résoudre des problèmes. Le débat n'a pas plus de fin que les débats métaphysiques. D'ailleurs, la dernière livraison de l'INRP s'intitulait « Faire des maths en classe ? » avec un point d'interrogation rendant compte du fait que certains se demandent si c'est possible et que deux au moins des IREM impliqués ont interprété la question sous cette forme : « Qu'est-ce que faire véritablement des mathématiques (en classe ou, en situation scolaire) ? »

Le paradoxe est que, alors qu'ils affirment tenir pour la discipline plus que quiconque, toutes ces déclarations et les travaux correspondants laissent de la place aux tenants de l'enseignement par "véritables situations-problèmes" proposant "de véritables problèmes pour de véritables recherches" sans considération pour l'organisation des contenus d'apprentissage en organisations disciplinaires de savoirs (DE VECCHI et CARMONA-MAGNALDI, 2002) puisque l'enjeu est que les élèves SE construisent LEURS propres savoirs, relatifs à un obstacle issu de leurs conceptions initiales personnelles. *Ce qui, n'en déplaise aux bonnes intentions des auteurs, conduit à oublier que les savoirs sont des objets sociaux, des connaissances publiques et partagées construites par les hommes comme des outils pour penser et agir de manière normalisée afin d'obtenir des résultats socialement garantis. Démontrés en principe et dont il est possible de rendre compte.*

Etude exemplaire d'un problème typique : "Combien y a-t-il de patrons du cube ?"

Souvent, le problème est posé sous une forme voisine : "Voici un patron du cube, trouve tous ceux que tu peux !" Les deux formes méritent analyse. D'abord, parce que ce problème a bien une réponse et une seule, mais que personne ne sait comment garantir qu'il la possède parce qu'il a formé tous les patrons de cube possible : il faudrait pour cela que l'on sache comment on fabrique un patron de cube... Alors, ce problème ne serait-il dit "ouvert" que parce que la réponse est garantie par l'autorité mathématique ? Ce serait dommage pour les tenants des problèmes ouverts ! Nous ne pouvons donc échapper à la question : "Est-il

vraiment hors de portée des élèves de CM et de leurs professeurs ?" Et pour répondre, nous devons faire quelque chose qui appartient au programme du Collège, produire une description permettant de contrôler la fabrication des patrons de cube, soit pour les produire systématiquement soit pour en contrôler la production, et ainsi les compter. Quelques éléments de réponse apparaissent en effet si l'on prend au sérieux la demande de dénombrer les éléments constitutifs d'un cube ou plus généralement d'un parallélépipède : faces, sommets, arêtes, tous éléments impliqués dans la fabrication des *patrons de polyèdres*.
Pour les dénombrer il en faut une description qui ait les propriétés attribuées aux nombres par Lebesgue, une description qui permette de nommer les arêtes connaissant les sommets ou inversement. Je ne vous ferai pas chercher ici ; la meilleure description commence par les faces, comme chacun le sait dans la vie courante. Une face avant AV, une face arrière AR, une face droite ID et une gauche IG, un dessus OH et un dessous OB. Trois paires, donc, que l'on peut colorier de trois couleurs Noir (AV et AR) Rouge (ID et IR) et Bleu (OH et OB). Alors, deux faces parallèles étant de même couleur, une arête est l'intersection de deux faces de deux couleurs différentes et un sommet, l'intersection de trois faces de trois couleurs différentes : on peut donc former la liste des faces et des sommets sans disposer d'une représentation autre du cube, notre description est suffisante pour ce travail. Permet-elle de fabriquer des patrons ? Oui, parce que l'on peut rapidement donner les règles de leur construction, qui sont la traduction de la description du cube que la coloration des faces permet : le cube est composé de trois paires de faces parallèles, coloriées de la même couleur. Ce qui se traduit par la description suivante :

1) Les patrons (les cubes) comprennent six faces liées en un ensemble d'un seul tenant.

2) Ils comprennent deux faces de chacune des trois couleurs (les cubes sont des parallélépipèdes, les faces de même couleur sont parallèles).

3) Deux faces adjacentes par une arête ou un sommet sont de couleur différente (les faces parallèles n'ont aucun point commun, elles sont opposées).

4) Trois faces de trois couleurs différentes ne sont pas alignées sur le patron (elles sont sécantes et définissent un sommet).

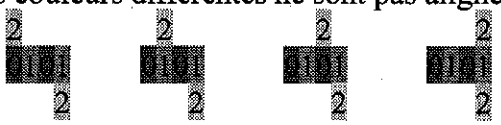
Nous avons trouvé de nombreux sites de classes et plusieurs sites mathématiques personnels qui traitent de ce classique. Même, une classe de CE2 a trouvé onze patrons, pour un travail de recherche d'un an... sans réussir ni à montrer qu'ils les avaient tous produits ni à installer une recherche systématique commode. Il semble que les deux techniques de travail d'une telle question soient inconnues des professeurs qui y Engagent

leurs élèves. Pourtant, le codage des arêtes sur chaque face d'un cube permet de fabriquer des patrons validés par la correspondance des numéros, ce qui est déjà une réponse à la situation qui utilise les nombres comme système de codage, un usage trop rare à l'école alors qu'il est devenu omniprésent dans la société. Et si on considère que la coloration des faces donne un autre codage on obtient la description d'un patron comme arbre composé de six chiffres 1, 2, 3, disposés selon les quatre règles ci-dessus. Ce qui donne une systématique et donc, une énumération permettant le dénombrement :

1e face 2e face 3e face deux choix 4e face trois choix 5e face quatre choix 6e face (patrons du cube)

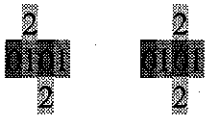


On choisit ici d'explorer d'abord les configurations réalisant le plus grand alignement de faces, sachant la règle 3 (deux faces ayant une arête ou un sommet communs ne sont pas de même couleur) et la règle 4 (trois faces de trois couleurs différentes ne sont pas alignées)



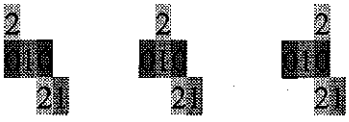
Les quatre premiers patrons ont été obtenus par déplacement de la sixième face sur ses quatre positions possibles





Ces deux patrons ont été obtenus de même, à partir d'un choix alternatif de la quatrième face et du choix de la cinquième (pour ne pas retrouver une configuration déjà obtenue on élimine les deux positions de la sixième face en bout de ligne)

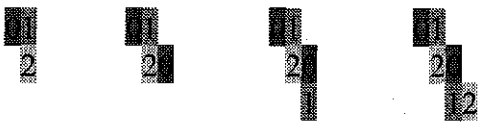




Ces trois patrons là ont été obtenus à partir du choix alternatif de la cinquième face, sur la deuxième ligne



Ce patron là a été obtenu à partir d'un autre type de position de la sixième face



Ce dernier patron est obtenu par développement d'une alternative construite dès la troisième face (recherche d'une configuration sans alignement)

Si l'énumération a été systématique, elle fait la preuve de ce que tous les patrons du cube ont été produits. On peut donc les compter sûrement.

On peut alors se demander pourquoi limite-t-on la question au cube, alors que la poser à propos d'un parallélépipède rectangle permet de repérer les faces par leur forme (chaque paire de faces parallèles a une forme repérable), ce qui correspond au même codage que la couleur, ou de repérer la conformité des configurations par les arêtes (chaque quadruplet d'arêtes a une longueur caractéristique), ce qui correspond au premier codage évoqué. Mais je n'ai pas trouvé, même en Sixième, de demande de compte de tous les patrons des parallélépipèdes conduisant à s'apercevoir qu'il y en a 11, comme pour le cube, parce que la forme des faces n'importe pas : ce savoir est sans doute celui du premier mathématicien qui a posé la question et qui pour cela n'a pas demandé d'autre compte, mais aujourd'hui, il n'appartient pas aux professeurs.

La propriété qui permet de compter les patrons du cube tient dans un savoir mathématique peu connu, parce qu'il a été nommé par un didacticien et non par un mathématicien. Ce savoir est pourtant la clé de tous les problèmes de *dénombrement d'une collection*, c'est que *pour compter des objets il faut les organiser en collection* c'est-à-dire, les individualiser par une procédure de désignation qui les ordonne et que l'on nomme "une énumération". Organiser, comme je viens de la faire, la manière de produire les patrons de cube pour les lister, c'est le seul moyen de les compter. Cela dit, il existe sans doute de meilleures manières d'organiser cette collection, c'est l'objet du travail des chercheurs en mathématiques que l'on nomme combinatoriciens. Mais les professeurs qui ne connaissent même pas une de ces manières sont incapables de diriger l'étude du problème c'est-à-dire, de leur indiquer une direction à suivre, d'évaluer les idées qu'ils proposent, de les enseigner. Je ne dis pas là quelque chose d'étonnant puisque depuis maintenant plusieurs années, des chercheurs de tous pays et cultures ont montré que l'efficacité d'un corps d'enseignement tient à la maîtrise à la fois pratique et théorique des questions précises que les enseignants posent aux élèves (LIPING MA, 1999, Knowing and teaching elementary mathematics. London: Lawrence Erlbaum Publishers).

La recherche des patrons du cube peut être *instructive*, si les professeurs connaissent au moins une manière de la réaliser et s'ils savent à quel corps de mathématiques elle appartient, au moins, et peut-être la classe des questions auxquelles le problème appartient,

ce que d'autres appelleraient *le type de cette tâche*. Sinon, ce qu'un élève apprendra en s'y engageant tiendra de ses contingences personnelles : il n'y a peut-être pas de pratique enseignante plus discriminatoire.

Mais l'exemple que j'ai développé ici met en cause tout le système d'enseignement qui demande que la question des patrons du cube soit posée comme "problème ouvert" ou "problème pour chercher", alors qu'il n'y a, en le cherchant, rien à trouver que le système d'enseignement ait identifié. Pire, il semble bien que ce soit, pour beaucoup, le critère du fait que l'on tient là un véritable problème pour chercher. Je ne donnerai pas les exemples venus d'une classe, il est trop désolant de voir des enseignants ne pas savoir quoi faire des instructions qui leur sont données et des élèves perdre leur temps. D'autant que, dès le début, les didacticiens qui posaient "le problème (didactique) des problèmes (pour enseigner)" mettaient en garde contre le fait que rendre ainsi à l'élève, sa place est le fait d'une ambition sans moyens. Je citerai le même texte de CHEVALLARD, page 29 suivante :

"En pratique, je ne vois pas qu'on ait fait autre chose, à ce jour, que de mettre à la disposition des enseignants, pour tout viatique, des "activités" ou des séquences d'activités (c'est le cas aussi bien dans les IREM qu'à l'APM) .../... c'est une attitude cohérente avec le principe de compétence de l'enseignant ! Qu'on lui dise ce qu'il doit faire .../... et lui saura agir, sa compétence fera le reste - puisqu'il est enseignant. Pourvu qu'il veuille bien se conformer à ce qu'il lui est demandé de faire ! .../... Malheureusement, nous savons tous ce qui va arriver .../... c'est à peu près ceci : dans une majorité de cas, même s'il a entendu, et reçu parfois avec enthousiasme, l'appel à donner plus de place aux activités dans la classe, à plus ou moins brève échéance .../... elles deviendra un extra ; mais surtout la signification qu'on leur attribue sera dénaturée.../... paradoxalement, le respect de la signification et de la place donnée à l'activité des élèves sera d'autant mieux sauvegardé qu'on travaillera avec des classes plus "faibles" ; .../... parce que là on demande d'occuper les élèves, tout en leur apprenant un peu si c'est possible.../... Le problème qu'il nous faut examiner nous est posé par ce clivage entre notre volonté, tendue vers un but clairement désigné, et notre connaissance pratique des choses.../... Nous nous faisons les hérauts de ce qui doit être en oubliant ce qui peut être.../... Le problème tel que nous le posions concernait l'élève, c'est sur l'enseignant qu'on bute maintenant..../... C'est l'illusion volontariste dont la forme

collective est le juridisme.../... qui nous conduit à verser dans le moralisme : nous construisons des machines que nous appelons volantes et nous voudrions que par cela seul elles volent."

Nous avons besoin d'une technologie du possible. Nous avons besoin d'apprendre à poser des problèmes qui permettent d'enseigner, et d'apprendre à enseigner à partir des connaissances produites par des élèves qui ont cherché à résoudre des problèmes, ce qui suppose des problèmes d'un type particulier que l'on nomme "des situations didactiques". Il nous faudra renoncer à enseigner en fondant notre enseignement sur l'étude de problèmes si nous ne nous occupons pas à ce que le temps des activités proposées à l'élève soit un élément constitutif et nécessaire de la progression du cours de mathématiques. L'activité de l'élève ne peut pas être un enjeu en soi ; elle doit être un enjeu pour l'enseignement, ou elle constitue un temps perdu. Cela, nous le savons en didactique depuis 1981 et c'est toujours dans le texte de Chevallard que je cite depuis le début de mon exposé, page 118-119 cette fois. Seulement, c'est une rupture profonde avec le fonctionnement ancien et on ne peut l'obtenir par une évolution progressive. Prenons le cas des exercices, qui sont dans la forme d'enseignement classique le lieu de l'activité des élèves. Le professeur ne fait pas dépendre son cours de la progression des élèves dans la résolution des exercices et même, il serait tout à fait inconvenant qu'il fasse démontrer aux élèves, en exercice, les théorèmes d'un cours qui consisterait à entériner et organiser les résultats obtenus par les élèves. C'est pourtant ce à quoi des activités efficaces devraient conduire : la progression devrait être le résultat du travail des élèves, l'enseignant authentifiant culturellement le savoir produit, dont il a par ailleurs organisé la production.
C'est mieux *en théorie*, mais le passage pratique d'un fonctionnement à l'autre, dans lequel nous nous sommes engagés voici bientôt une génération, est problématique et suppose des inventions techniques qui ne viennent que si nous décidons collectivement qu'il y a un problème posé au système d'enseignement entier et non pas la mauvaise volonté des professeurs ou de leurs élèves.

PARTIE 3 : Faire des mathématiques pour en apprendre ?

C'est le travail des mathématiciens. Pour cela il leur faut :
produire les moyens de résoudre des types de problèmes les plus vastes possible,

organiser les problèmes en types que l'on sait résoudre
pour identifier ce que l'on sait,
reconnaître ce que l'on sait faire,
et poser les problèmes qui demeurent.

Pour imaginer ce que cela suppose, avec un problème tel qu'on en rencontre dans les classes et en considérant qu'une classe soit organisée en organisme de production mathématique, prenons un premier exemple (le faire avec une feuille) :

« On plie une feuille de papier une fois, le pli la partage en deux morceaux. On plie de nouveau, on obtient trois plis qui partagent la feuille en quatre morceaux. Combien de morceaux obtient-on si on plie la feuille une troisième fois? »

Cela ne semble pas encore un problème quoique, si vous n'avez pas de feuille à votre disposition pour faire l'épreuve l'argument qui prouve le résultat n'est pas si simple. C'est que le problème n'advient que si la question posée devient plus générale. « On plie dix fois de suite sur elle-même, combien de morceaux obtient-on? » est donc peut-être déjà une manière de « faire problème ». Mais ce n'est le cas que si l'on renonce à chercher cette réponse pour chercher comment répondre pour tout autre nombre de plis. Ce problème se rencontre, dans les ouvrages d'enseignement. Comment se résout-il? A quoi cela sert-il de le résoudre? Le poser permet de répondre à quel enjeu d'enseignement? Le résoudre, est-ce faire des mathématiques?

La réponse, on le comprend, ne dépend pas du problème lui-même, mais des conditions dans lesquelles il est posé, que l'on décrit comme une situation : c'est sans doute pour cela que le problème figure même deux fois dans les moyens d'enseignement suisses, en troisième année et en sixième année. Confondre les deux interdit de poser les questions essentielles ci-dessus. Voici donc un problème proche:

« On trace, sur une feuille de papier rectangulaire, un trait parallèle à un bord, qui la partage en deux puis, un trait perpendiculaire (parallèle au bord suivant) qui partage en deux, chacun des morceaux obtenus. On obtient quatre morceaux. »

A quelle classe de problèmes appartient-il? Cela dépend du choix qui va venir. Soit par exemple :

« Combien de morceaux obtient-on si on partage en trois dans un sens et en deux dans l'autre? »

Cela est encore un problème de dénombrement à traiter directement, mais si la question devient plus difficile...

« On partage un rectangle en dix-huit dans un sens et en trente quatre dans l'autre, combien de morceaux élémentaires obtient-on ? »

Le problème peut commencer à advenir comme type de question de dénombrement, si vous savez par exemple les réponses pour des rectangles plus petits de huit sur vingt, dix sur quatorze, etc. : vous chercherez en effet à former une réponse à partir des problèmes précédents que vous avez résolus, reconnaissant par là que le problème appartient à la même catégorie. A quoi la catégorie se connaît-elle? A la procédure d'énumération, qui relève d'un art tant qu'elle n'est pas identifiée parce qu'aucune technique de production de la collection d'individus organisable en une liste n'a été nommée, comme nous l'avons fait pour les patrons du cube. Mais le dernier problème ouvre sur une technique de désignation des rectangles qui ressemble à celle que nécessite le dénombrement des patrons du cube : il ne faut pas décrire ces types d'objets spatiaux par leurs sommets mais par leurs bords (plans/faces dans l'espace ou arêtes/droites dans le plan). La différence entre le dernier problème et le précédent montre que les questions de dénombrement dépendent de l'opération élémentaire matérielle qui produit les objets à dénombrer. Les cas où ces objets ne sont pas précisément matériels sont bien plus difficiles (comme celui des rectangles tracés), parce que nous n'en avons pas l'expérience.

Et puis, pour mieux comprendre comment les conditions ordinaires d'une institution scolaire limitent l'envergure des questions mises à l'étude, posons le problème suivant :

" Multiplier, par le procédé de votre choix, le nombre de 23 chiffres suivant 39587100985672987193375 par le nombre de 33 chiffres que voici 765584937728347927911205474638992, en vous donnant les moyens de garantir votre résultat"

Il appartient à la même classe (mais si!), et sa résolution est grandement aidée par cette indication : dans ce cas, non seulement le savoir "multiplier deux nombres" est le résultat

de l'étude du problème du rectangle, mais les connaissances venues de l'expérience de la recherche que ce problème provoque sont utiles dans le cas où l'algorithme socialement connu s'avère insuffisant.

Et pour bien me faire comprendre, voici deux problèmes proposés comme « problèmes ouverts » par des membres de l'IREM de Lyon de retour du congrès de la CIEM à Berkeley, en 1980 (source : Bulletin inter-IREM 1984). Ces problèmes permettraient de « Chercher, Essayer, Conjecturer, Découvrir, Prouver » et on trouve toujours, à Lyon, une équipe travaillant sur les « problèmes ouverts » qui font, nous l'avons vu hier, d'excellents moyens d'observation du travail d'étude mais qui sont en général des moyens d'enseignement parfaitement détestables :

Problème 1) « On donne un rectangle de dimensions n et p tracé sur un quadrillage unité. Combien de carrés unité traverse la diagonale du rectangle? (exemple dessiné, rectangle 10×4) »

Problème 2) « Etant donnés trois nombres positifs a, b, et c, est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres? Si ce n'est pas toujours possible, quelles conditions doivent vérifier ces nombres pour que ce soit possible? »

Comment se résolvent-ils? À quoi cela sert-il de les résoudre? Les poser permet de répondre à quels enjeux d'enseignement? Les résoudre, est-ce faire des mathématiques? Cela n'est pas dit, dans le texte qui les présente aux professeurs. Alors, pourquoi les leur proposer?

Dans le cas du rectangle découpé en rectangles élémentaires, vous saviez les réponses possibles : c'est *un problème de multiplication*, le résoudre sert à apprendre à faire toutes les multiplications usuelles, en apprenant comment le décomposer en produits partiels dont on fait la somme, mais aussi à identifier les questions de dénombrement de collections disposées en rectangles comme des *questions de multiplication* et à répondre par une multiplication au problème « Paul a trente quatre chemises et dix-huit cravates, de combien de manières différentes peut-il les coordonner? » dès que vous aurez eu l'idée d'organiser chemises et cravates en un tableau rectangulaire de trente quatre sur dix-huit dit « tableau cartésien ».

Mais le problème ne répond pas tel quel à ces enjeux: il faut encore que le professeur enseigne c'est-à-dire, qu'il désigne aux élèves le type de problèmes associés, en le préparant par les problèmes élémentaires relatifs par exemple ici à huit sur vingt et dix sur quatorze qui eux-mêmes... et qu'il poursuive l'enseignement en le faisant suivre d'autres problèmes permettant aux élèves d'explorer et d'étudier l'algorithme de la multiplication. Cela suppose que la catégorie « problèmes de multiplication » soit identifiée et que son exploration systématique ait été explicitement mise au programme de travail des élèves (enfin, on peut leur demander de produire eux-mêmes et d'apporter des problèmes de multiplication des types les plus divers). Les travaux sur ce point sont nombreux, publics, et connus.

Les problèmes dits ouverts ne sont pas du même niveau. L'un conduit à éprouver dans le monde physique une propriété de géométrie plane qui énonce l'impossibilité de la construction d'un triangle, dans certains cas (le problème change, sur une sphère) : "Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite". Mais ce problème ne fait sens que si une technique de construction validée par une théorie est déjà connue appartient au milieu de la situation que le problème ouvre. Le premier conduit sur des voies inconnues même s'il mériterait l'exploration qu'il ouvre, en raison de son esthétique.

En classe, il faut faire faire des mathématiques *pour les enseigner.* Je reprends ici l'idée de François Conne. Mais cela ne suffit pas tout à fait. Car pour apprendre, il faut le plus souvent être enseigné : seuls les mathématiciens professionnels ont pour métier d'apprendre les mathématiques par eux-mêmes. *Pour que les élèves résolvent une question et pour cela, produisent des mathématiques, il faut comme toujours que le professeur enseigne*, c'est-à-dire par exemple, qu'il organise le passage du problème initial à un problème numérique en proposant un modèle pour son traitement. Il va donc devoir organiser la mise en commun des résultats obtenus par différentes équipes, jusque-là concurrentes dans la première exploration. Il ne fait pas cette mise en commun parce que c'est "la synthèse du travail de groupe" ou "l'institutionnalisation de la séance". Il le fait pour engager les élèves dans l'usage d'une forme mathématique permettant de progresser dans la résolution du problème particulier posé et si possible, de quelques problèmes de la même classe de problèmes.

Ce changement de registre, comme on dit paraît-il dans le Nord, induit un changement de cadre, comme on dit à Paris, qui se décrit tout aussi bien comme *passage du système étudié à son modèle*, ou encore comme *passage de l'expérience à son compte-rendu*, dirait

Lebesgue (si on veut faire de la didactique dans le cadre des mathématiques, autant utiliser le lexique des mathématiciens et être compris d'eux). C'est en tout cas ce que l'on appelle *un geste d'enseignement*. Sa nécessité a été identifiée depuis plus de trente ans par les didacticiens, c'est même le passage de l'action à la formulation, comme on dit du côté de Bordeaux. Mais pour en imaginer la nécessité il faut comprendre comment et pourquoi les mathématiciens inventent des mathématiques, il ne suffit pas de savoir résoudre soi-même le problème. D'autant que le travail du professeur ne s'arrête pas là, puisqu'il doit assurer les liaisons entre ce que ce travail permet d'apprendre, en rapport à ce que l'activité d'hier a permis de savoir et ce que l'activité de demain enseignera à la classe.

C'est pourquoi le professeur devrait être en droit de demander quel est l'intérêt de poser ce problème aux élèves si, comme dans le cas où il est posé en CE2, on ne cherche pas le TYPE DE QUESTIONS DE DENOMBREMENT auquel le problème appartient, pour voir par exemple qu'il relève d'une multiplication répétée ou exponentiation. Imaginons en effet qu'on ne le cherche ni pour apprendre que c'est un problème d'exponentiation ni pour apprendre à calculer les exponentielles comme multiplication répétées et par exemple, s'apercevoir que l'opération n'est pas commutative, mais qu'on le prenne comme un "problème ouvert", les élèves vont perdre leur temps et la société gaspiller le salaire du professeur.

Car si le professeur ne peut répondre à ces questions, les élèves devront donc apprendre seuls, de leur expérience personnelle de ce problème, que « *pour résoudre certains problèmes, il faut changer de cadre et passer de l'expérimentation dans le monde au travail sur un système symbolique qui modélise les opérations matérielles* (c'est-à-dire, qu'il faut se comporter en mathématicien)? » Si c'est le cas, il faut le déclarer ! Comme dans le cas précédent de la multiplication il faut enseigner l'usage des tableaux de nombres comme moyen de traiter de questions autrement inaccessibles.

Pour aller au terme des réflexions auxquelles nos observations nous conduisent, il nous faut donc introduire cette idée : les savoirs ne sont pas tous de même nature et on peut les distinguer selon le travail de leur production. Ce qui fait qu'on ne peut pas imaginer enseigner de la même manière deux savoirs de natures différentes et qu'il devient nécessaire d'inventer des manières d'enseigner pouvant garantir certaines propriétés des savoirs dont

on vise la transmission. C'est pourquoi le professeur professionnel est capable de varier son "organisation pédagogique" : nos collègues pédagogues de Toulouse l'ont montré. Nous savons pourquoi : le professeur doit agir en fonction des impératifs didactiques qu'il a identifiés.

POUR CONCLURE

A la suite des travaux de Brousseau (1998), nous pouvons dire que les savoirs s'organisent en plusieurs types, et qu'ils sont constitués :

de *théories* ou discours sur le monde de l'expérience,
d' *algorithmes* ou règles d'action dans le monde de l'expérience,
de *routines* ou manières d'agir dans le monde de l'expérience,
d' *expérience* ou connaissances dans le monde de l'expérience.

Chaque type est produit à partir d'un type précédent : la problématisation des *faits* d'expérience produit, par mathématisation, des *résultats* qui se décrivent dans des organisations théoriques. Les résultats sont *démontrés* en théorie (sous la condition de vérité des axiomes et des théorèmes précédemment connus). L'usage systématique des *résultats* théoriques produit, par démathématisation, des *outils* qui se décrivent comme algorithmes. Les outils sont *vérifiés* par ce qu'ils réalisent en pratique (sous les conditions données par la théorie) ; l'emploi usuel des *outils* algorithmiques produit, par désinstitutionnalisation, des *dispositifs* qui appellent des routines ou pratiques. Les dispositifs sont *validés* par ce qu'ils permettent de faire (dans des conditions pratiques diverses, sous le contrôle de la contingence). La mise en oeuvre des *dispositifs* produit, par réinstitutionnalisation, des *faits* qui sont issus de l'expérience, et des connaissances. Les faits sont *prouvés* expérimentalement (dans le domaine de réalité dont une institution donnée traite).

Tout enseignement réalise un équilibre dans cet espace. Mais enseigner des problèmes, des théories, des algorithmes, ou des routines ne se fait pas de la même manière. C'est sans doute cette nécessaire variabilité de l'enseignement attendu qui fait le principal problème *professionnel des professeurs de mathématiques*.

On peut bien sûr essayer d'enseigner des théories sans les problèmes qui les motivent, des algorithmes qui ne sont pas les résultats de l'usage de théories, etc., mais...

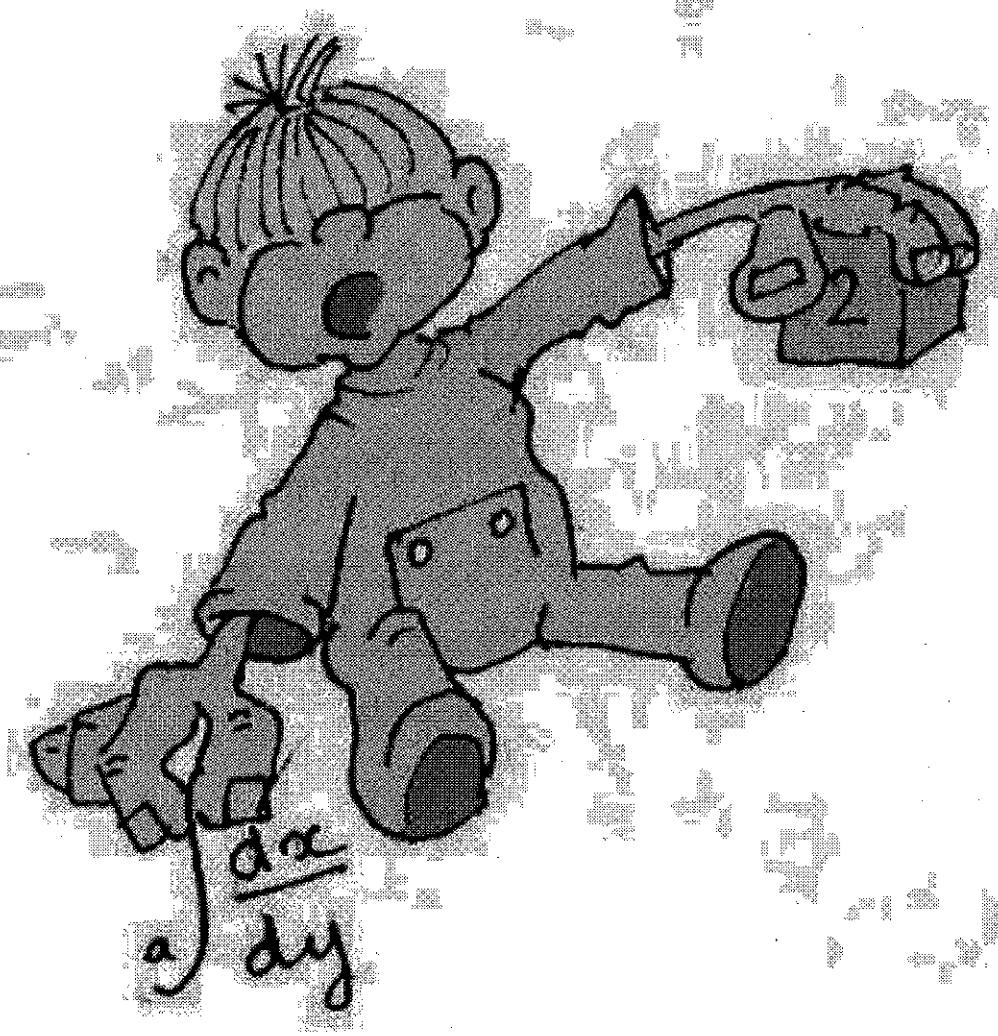
• ce n'est pas très motivant, pour le professeur comme pour les élèves, puisque le savoir enseigné n'a pas de motif ;

• c'est coûteux en efforts parce que la composition des gestes élémentaires (dont l'exécution n'est pas sous le contrôle d'une évaluation (théorique, démonstration des résultats, algorithmique, vérification des outils, routinière, validation des dispositifs, ou d'expérience, preuve des faits) appartenant à l'agent, augmente rapidement la complexité de l'action ;

• c'est donc long et pénible pour les élèves, qui ne peuvent pas contrôler leur action et corriger leurs erreurs (Brousseau l'avait déjà dit en, 1973, à propos de la multiplication).

Il faudrait donc enseigner des savoirs qui tiennent solidairement à ces quatre dimensions (routines, expérience, théories, algorithmes) ; et on peut montrer en effet que tout enseignement stable propose un parcours organisé d'une telle organisation mathématique, l'enjeu de l'enseignement et la culture des élèves déterminant les points de départ et d'arrivée du parcours.

Mais nous savons que la difficulté d'un enseignement organisant l'ensemble du parcours n'est pas seulement épistémologique, elle tient aussi à la nécessité de *changer d'activité de référence* chaque fois que l'on change de niveau dans le parcours. C'est ce que déclare par exemple la Théorie des Situations Didactiques (TSD), qui propose trois étapes, pour passer du niveau de l'*action dans un milieu* à la *production de représentations* puis, à la *validation des résultats* obtenus, pour produire des éléments de théorie relatifs à l'action. Mais bien d'autres mouvements sont nécessaires, qui nécessitent peut-être des étapes que la TSD ne nomme pas. Le travail épistémologique à l'usage de l'enseignement manque cruellement aux professeurs qui ont suivi les bonnes idées des didacticiens et de leurs épigones. Certains mathématiciens ont alors beau jeu, en nous dénonçant comme les responsables de certaines difficultés récurrentes des professeurs.On comprend même qu'il se trouve des professeurs pour leur donner raison.


a day

Le calcul numérique dans l'enseignement mathématique secondaire : reprise des travaux de notre thèse

Alain Birebent
Equipe Didactique et Informatique pour l'Apprentissage des Mathématiques
Laboratoire LIG

A la question « sur quoi travailles-tu en ce moment ? » il m'arrive le plus souvent de répondre « je travaille sur ma thèse ». Evidemment je suis obligé de m'expliquer puisque j'ai soutenu la dite thèse en mai 2001 (Birebent 2001). En fait dès l'année universitaire suivante, nous avons décidé avec Annie Bessot, qui fut directrice de la thèse, d'utiliser les matériaux théoriques et expérimentaux de la thèse dans des séances de travaux dirigés en didactique des mathématiques dispensées dans deux masters, l'un à Grenoble[101] (France) et l'autre à Hô Chi Minh Ville[102] (Viêt Nam).

Tout à la fois porté par des objectifs d'enseignement de la didactique et orienté par notre activité de chercheurs, ce travail avec la thèse nous a obligés à travailler sur la thèse. Il s'agissait de rendre enseignables au niveau master des matériaux produits dans le contexte d'une recherche et d'intégrer certaines évolutions de la théorie anthropologique du didactique.

Pour rendre compte ici de l'évolution du travail sur la thèse, nous commençons par présenter la thèse, sa méthodologie et ses principaux résultats. Nous expliquons ensuite comment nous importons dans la thèse deux concepts qui en étaient absents : celui de praxéologie de référence et celui d'incomplétude et de rigidité des praxéologies mathématiques. Nous concluons en revisitant l'ingénierie didactique qui est un élément clef de la thèse.

I. Le travail de thèse

1. La question naïve de départ

Pourquoi faut-il qu'un sujet d'examen de mathématiques comporte la mention « calculatrice autorisée » ou la mention « calculatrice interdite » ?

[101] Master EIAHD de l'Université Joseph Fourier
[102] Thac Sy spécialité didactique des mathématiques de l'Université Pédagogique

Une première étude sur le(s) contrat(s) didactique(s) en collège et lycée nous avait permis de produire une première réponse : dans l'enseignement mathématique secondaire, le couple calcul exact/approché est associé au couple sans/avec calculatrice. Pour dépasser ce constat de territorialisation de la calculatrice dans le calcul numérique enseigné, nous avons engagé une problématisation de la question en termes de vie institutionnelle du calcul numérique et de la calculatrice.

2. L'hypothèse de travail sur la vie institutionnelle du calcul numérique

Le calcul numérique tel qu'il est institutionnalisé dans l'enseignement mathématique secondaire (EMS) réduit le calcul approché à un sous-produit du calcul exact piloté par la calculatrice et conséquemment assujettit l'effectivité décimale au résultat de la calculatrice :

- au collège, le calcul sur les nombres sacralise le calcul exact en délaissant de nombreux savoirs mathématiques utiles à la conduite d'un calcul approché ;
- au lycée, la venue de savoirs mathématiques nouveaux attachés à l'Analyse ne semble pas déstabiliser cette vie institutionnelle.

3. Les questions de recherche

Question 1 : dans quelle mesure cette hypothèse doit-elle être corrélée à l'arrivée de la calculatrice dans EMS et à l'éviction des tables numériques ?

Nous nous interrogeons sur la signification et la portée des modifications de l'écologie du calcul numérique enseigné dès que l'on change d'instrument de calcul. Nous décidons un détour épistémologico-historique par les calculs trigonométriques qui constituent un lieu sensible aux problèmes mathématiques de l'approximation décimale et au basculement instrumental table/calculatrice.

Question 2 : de quelle façon l'institution didactique EMS, depuis que s'est imposée la présence de la calculatrice, parvient-elle à organiser, en son sein, la vie d'objets et de problèmes mathématiques attachés à l'approximation numérique décimale ?

Nous voulons analyser les aspects écologiques et économiques de la vie mathématique actuelle des calculs sur nombres et de leur instrumentation dans EMS pour dégager une image praxéologique du calcul numérique dans EMS actuel.

Question 3 : peut-on construire dans l'EMS un processus d'enseignement dont l'enjeu serait une modification du contrat institutionnel relatif au Calcul numérique ?

L'existence et la viabilité d'un tel processus dans l'EMS actuel ne sont pas transparentes. Il s'agit de trouver, dans le champ des contraintes institutionnelles, un ensemble de conditions capables d'opérer des modifications institutionnelles, ensemble à la fois idoine et robuste.

4. D'emblée le travail s'installe dans la TAD

Nous postulons que tout savoir mathématique, pratique ou théorique présent dans l'institution EMS peut être regardé comme la construction organisée d'un rapport institutionnel à un objet permettant une activité des sujets de l'institution sur cet objet.

L'objet visé par notre étude étant un « gros » objet (le Calcul Numérique[103]), nous décidons d'utiliser le concept de contrat institutionnel[104] relatif à un objet O en l'articulant à celui de contrat didactique.

Le contrat institutionnel relatif à O peut être défini comme le système des rapports institutionnels à O et à o_i, o_i institutionnellement pertinents pour O. Un tel système que nous appelons ici contrat institutionnel relatif au calcul numérique s'entend comme la mise en jeu didactique, de façon stable et prégnante dans l'institution, d'objets mathématiques qui appartiennent au calcul numérique, ou qui entretiennent des liens étroits avec lui. Il énonce la manière dont élèves et enseignants doivent se comporter avec ces objets pour être de bons sujets-acteurs de l'institution.

Dans cette modélisation de l'activité mathématique et didactique de EMS, le contrat didactique est l'instanciation spatiale et temporelle du contrat institutionnel ; c'est la forme que prend le contrat institutionnel dans la classe. Cette vision fait écho à la présentation formulée par Chevallard (1989) : « le contrat didactique est l'état de la chronogenèse et de la topogenèse à un instant donné ».

5. Mais la méthodologie ne s'enferme pas dans la TAD

Elle articule la TAD :

- à l'ergonomie cognitive, autour de la notion de genèse instrumentale

Pour analyser la vie institutionnelle d'un instrument de calcul [ici la calculatrice] il nous paraît opportun de projeter sur l'institution d'enseignement elle-même les concepts

[103] Nous mettons les majuscules à « calcul numérique » quand nous faisons référence à un certain domaine des mathématiques. Nous les retirons quand nous parlons du calcul sur les nombres dans l'enseignement.
[104] Chevallard (1989)

d'instrumentation et d'instrumentalisation issus des travaux d'ergonomie cognitive en plaçant les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation dans les organisations mathématiques et didactiques actuelles ou passées.

Nous désignons par genèse instrumentale institutionnelle la conjugaison dans l'institution des deux processus d'instrumentation et d'instrumentalisation.

- à la TSD, pour la conception, l'expérimentation et l'exploitation d'une ingénierie didactique.

Pour avancer dans la question 3, nous fabriquons une ingénierie didactique en la concevant comme l'expérimentation d'une première rencontre avec une praxéologie à construire dans l'enseignement (ici une praxéologie de décimalisation).

> Si, à l'évidence, la première rencontre ne détermine pas entièrement le rapport à l'objet – lequel se construit et se remanie tout au long du processus d'étude – , elle joue un rôle important dans l'économie de l'apprentissage, parce que, étant donné l'investissement institutionnel et personnel qu'elle impose (au double plan cognitif et libidinal), elle oriente en général fortement le développement ultérieur des rapports institutionnel et personnel à l'objet rencontré (Chevallard, 1999).

6. Le corps de la thèse

A propos de la question 1 : les choix épistémologiques noosphériens relatifs à la construction des systèmes numériques et à la numérisation décimale (ou sexagésimale) des grandeurs géométriques ou physiques déterminent l'EMS qui répond :

- en produisant et faisant produire des résultats numériques effectifs sous forme décimale (ou sexagésimale) ce qui place l'approximation décimale (ou sexagésimale) au cœur du contrat institutionnel ;
- en choisissant des instruments de calcul et en organisant une genèse instrumentale de ces instruments.

La prise en charge de l'approximation décimale dans le contrat oscille entre deux niveaux :

- Un niveau faible : se protéger empiriquement de la propagation des erreurs dues aux arrondis décimaux

Une protection complète est illusoire et elle s'affaiblit au fur et à mesure que les calculs se complexifient. L'enfermement algébrique (mener les calculs exacts le plus loin possible) ou le recours à des tables comme à des calculatrices de grande précision décimale peuvent devenir très coûteux.

- Un niveau fort : construire une problématique de l'approximation décimale.

Une telle construction a existé dans EMS, d'abord attachée à l'Arithmétique décimale (et sexagésimale) « supérieure » (avec les logarithmes décimaux par exemple) puis attachée à la construction de I, R. La première a quasiment disparu des savoirs « savants » de référence et la seconde a été repoussée au-delà de EMS. L'entrée dans l'ère des calculatrices s'est faite sur l'espoir d'un abaissement du coût des techniques de calcul et de l'évitement de leurs justifications théoriques en ignorant les effets inéluctables de la complexification instrumentale et les répercussions sur les organisations mathématiques et didactiques.

A propos de la question 2 : l'étude menée dans la thèse (120 pages que nous ne cherchons pas à présenter ici) examine à partir des programmes, des manuels, des sujets d'examen et des devoirs de classe sur la période 1980-2000 et pour les niveaux 3^{e} à Terminale S de l'enseignement français :

- l'évolution (dans le temps et par niveau) des problèmes liés à l'approximation numérique décimale ;
- la présence ou l'absence d'objets mathématiques pertinents pour l'approximation décimale, leur statut topogénétique ;
- les types de tâche de décimalisation.

Elle débouche sur une description, au collège et au lycée, des praxéologies de décimalisation et une caractérisation des contrats institutionnels. En voici un résumé qui met en évidence l'écart entre les ambitions des réformateurs de 1981 et l'état actuel de la transposition didactique :

Au collège : une opposition entre calcul exact et calcul approché,

- fortement hiérarchisée de l'exact sans la calculatrice vers l'approché avec la calculatrice
- très marquée dans les contextes de modélisation où elle s'appuie sur une séparation théorie-pratique : les théorèmes se recommandent de valeurs exactes tandis que les applications dites pratiques utilisent des valeurs approchées décimales (cas de la Géométrie métrique où la mesure effective crée de l'approché)
- les degrés de précision dans l'approximation décimale sont imposés par l'enseignant sans négociation mathématique

Au collège et au début du lycée : un évitement des problèmes de l'approximation numérique

- où l'exact reste la seule source fiable de connaissance de l'approché et le passage de l'approché à l'approché n'est pas problématisé,

- où l'évaluation de la dépendance de la précision décimale à l'égard de facteurs comme la propagation des erreurs, l'organisation des calculs ou les performances intrinsèques des instruments de calcul n'a pas de visibilité institutionnelle (partage privé/public) ;

Au Lycée : une approximation numérique très présente mais toujours pas problématisée,

- avec un énorme potentiel d'objets et de techniques apportés par l'Analyse ;
- sans lisibilité des problèmes fondamentaux de l'approximation numérique ; leur insertion dans les champs de l'Analyse et de l'Algorithmique n'est pas transparente, ce qui retarde et même compromet la mise en place de techniques instrumentées nouvelles dans les calculs approchés ;
- où l'arrêt de la transposition didactique de la notion de fonction[105] obère la négociation du passage de l'encadrement à l'intervalle ;
- l'absence de construction des nombres réels[106] ; les praxéologies de décimalisation enseignées sont privées d'appuis technologico-théoriques (notamment topologiques).

Question 3 : pour permettre la mise en place d'un autre contrat lycée il y a nécessité d'organiser une rupture avec le contrat collège ; cette rupture doit s'opérer contre l'enfermement algébrique de l'approximation décimale qu'institutionnalise le collège à travers le couple « formule-calculatrice »

Nous concevons donc une première rencontre avec une praxéologie de décimalisation « potentielle » dans l'institution lycée sous la forme d'une ingénierie didactique découpée en trois situations didactiques. La troisième partie de cet article présente et (re)analyse cette ingénierie.

II. Le travail sur la thèse

1. Le concept de praxéologie de référence

> Etant donné un processus didactique sur un thème mathématique déterminé, la première étape de notre technique d'analyse suppose l'adoption de ce que nous appelons un modèle épistémologique de référence sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'organisations ou praxéologies mathématiques (Bolea et al. 2000).

[105] C'est à Assude (1992) que nous empruntons cette caractérisation de la transposition didactique de la notion de fonction dans EMS.

[106] Bronner (1997), qui parle de vide didactique institutionnel relativement à l'objet nombre réel.

Vers un modèle épistémologique de référence du calcul numérique

La méthodologie décrite suggère donc de construire un ensemble, épistémologiquement structuré et pérenne dans l'institution I étudiée, de praxéologies mathématiques de calcul numérique. Cet ensemble de praxéologies, ou plutôt ce système – le caractère systémique d'un tel ensemble surgit de l'enchevêtrement des différentes praxéologies et de leur évolution temporelle pour répondre aux contraintes internes et externes de l'institution – doit permettre de rendre idéalement compte de tous les types de tâches de calcul numérique qui sont présents dans I. Pour confectionner ce modèle de praxéologies de référence le niveau le plus approprié pourrait être le niveau régional où chacune des praxéologies s'appuie sur une théorie mathématique consistante avec des énoncés théoriques (des théorèmes, par exemple) explicitables – à défaut d'être explicités dans I – et en mesure de produire les éléments technologiques (des règles de calcul par exemple) nécessaires à l'accomplissement des tâches via les techniques institutionnalisées dans I.

Fabriqué empiriquement à partir des praxéologies à enseigner, celles qu'affichent programmes et instructions et que reconstituent d'une certaine manière manuels et sujets d'examen, ce modèle devrait rendre compte des rapports institutionnels aux objets de savoir impliqués dans les praxéologies et de leur contractualisation dans l'institution. Nous reprenons l'étude de la question 2 de la thèse avec la nouvelle méthodologie :

Six praxéologies régionales de référence pour EMS

- celle de simplification
- celle de décimalisation
- celle de comparaison
- celle de résolution d'une équation ou d'une inéquation numérique
- celle de calcul de la mesure d'une grandeur géométrique
- celle d'optimisation

Le modèle Collège :

Soit E le sous-ensemble des nombres réels de ce modèle,

- la simplification agrège tous les types de tâche relatifs aux écritures canoniques dans des sous-ensembles "remarquables" de E tels que I, N, D, I,Q et A (nombres algébriques de degré 2). Le postulat théorique est que l'appartenance d'un nombre de E à l'un de ces

sous-ensembles se reconnaît à une écriture canonique (unique) effectivement atteignable par des transformations sur l'écriture proposée de ce nombre.

- la décimalisation déploie les types de tâche « calculer une valeur approchée décimale du nombre ». Elle s'appuie sur la densité de D dans E qui autorise toute approximation à une précision décimale arbitraire.
- la comparaison entre deux ou plusieurs nombres se développe sur le postulat que la relation d'ordre "naturel" entre deux nombres produit un ordre total dans E.
- la résolution d'une (in)équation numérique s'appuie sur la stabilité de E pour les opérations arithmétiques (+, –, x, /) et postule que E contient ses propres intervalles.
- le calcul de la mesure d'une grandeur géométrique (longueur d'un segment ou d'un arc de cercle, écart d'un angle, aire d'une surface plane, volume d'un solide) rassemble tous les types de tâche dont les techniques ont recours aux théorèmes de géométrie métrique (dont ceux de Thalès, Pythagore et ceux de la Trigonométrie) et suppose l'appartenance à E de tous les nombres constructibles à la règle, au compas et au rapporteur.

Le modèle Lycée se différencie du modèle Collège :

- par l'apparition de nouveaux objets : fonctions et suites numériques, algorithmes numériques, limites, distances, voisinages, erreur, négligeabilité, etc. ;
- par la reprise d'anciens objets : intervalles, équations et inéquations, précision décimale, ordres de grandeur ;
- par la construction de nouveaux types de tâche : calculer une limite, tabuler une fonction sur un intervalle, minorer, majorer une fonction sur un intervalle, calculer l'extremum d'une fonction sur un intervalle.

Ainsi les cinq praxéologies « collège » sont remodelées et une nouvelle praxéologie (l'optimisation) se développe. Prenons l'exemple de la décimalisation :

La praxéologie de décimalisation de référence

- initiée au Collège : ensemble numérique E → valeur exacte → algorithmes numériques décimaux → densité de D dans E → encadrements décimaux → valeur approchée décimale ;

- poursuivie au lycée : E = I, R → propriété de complétude de I, R → variations de fonctions continues sur des intervalles fermés bornés de I, R + algorithmes numériques convergents dans I, R → valeur approchée décimale.

Que permet ce modèle ?

Il structure l'analyse écologique institutionnelle et lui permet de :

- décrire le contrat institutionnel (comment se forme-t-il, quels sont ses états successifs ?)
- guider l'étude des règles implicites du contrat didactique (quelles sont les limitations du savoir ? quelles en sont les manifestations dans la relation didactique ?)
- analyser des productions d'enseignants et d'élèves (quelles sont les praxéologies apprêtées et celles qui sont effectivement enseignées ?)
- soutenir la conception d'une ingénierie didactique (en quoi élargit-elle et approfondit-elle la problématique didactique de notre étude ?)

Le concept de contrat institutionnel est enrichi : le contrat institutionnel émerge de la distance entre ce système des praxéologies de référence et celui des praxéologies à enseigner qu'affichent programmes et instructions et que reconstituent d'une certaine manière manuels et sujets d'examen ; il pilote dans l'institution le processus didactique de reconstitution des praxéologies de référence dans les praxéologies à enseigner et conditionne les praxéologies effectivement enseignées. A la fois processus et état, le contrat institutionnel :

- énonce la manière de se comporter par rapport à O, dans I, pour les élèves et pour l'enseignant (les attentes de I relativement à O) ;
- fabrique un clivage topogénétique entre l'élève et l'enseignant relativement à O dans I ;
- assure, au moyen de ruptures / transitions ou de reprises / oublis, l'avancée du temps didactique pour O (chronogenèse) → changements d'états du contrat ;
- détermine un champ de contraintes et de conditions pour les praxéologies enseignées ;
- constitue une matrice des contrats didactiques pour les objets o_i institutionnellement associés au calcul numérique.

Pour soutenir l'idée de « continuités et ruptures dans le contrat institutionnel » qui est à l'origine de la question 3 de la thèse, nous cherchons à compléter le modèle du contrat institutionnel en dégageant des états et des changements d'état.

Trois des différents états du contrat institutionnel « calcul numérique »

- une configuration arithmétique : l'approximation décimale n'est présente qu'à travers quelques troncatures "limitées", pour des calculs ne comportant que l'une des quatre opérations arithmétiques (l'addition, la soustraction, la multiplication et la division) sur des entiers ou des décimaux de peu de décimales ; le contrôle se fait isolément sur chaque opération ;
- une configuration algébrique : l'approximation décimale vit dans des calculs approchés qui sont tous précédés par des calculs dans un mode exact bâti sur des structures algébriques pré-construites[107]. Dans cette configuration, seule la valeur exacte explicite d'un nombre fonde l'existence du nombre visé et rend possible sa décimalisation finie via sa reproduction dans l'éditeur de la calculatrice. Approcher un nombre et donc contrôler la production des chiffres de son écriture décimale n'a d'autre sens que de le décimaliser à partir de sa valeur exacte. Le contrôle porte sur la formule, sa fabrication et son écriture sur papier puis dans l'éditeur de la machine.
- une configuration analytique[108] du contrat institutionnel : l'approximation décimale vit consubstantiellement avec la définition du nombre comme élément de l'ensemble I, R, structure topologique tout autant qu'algébrique. Dans cette configuration, ce sont des propriétés topologiques, celle de complétude en plus de celle de la densité de D dans I, R, qui permettent la décimalisation du nombre visé par le calcul numérique. Même si la décimalisation passe par la fabrication et l'usage d'un ensemble (par exemple une table) de valeurs décimales d'une fonction ou d'une suite numérique, généralement obtenues avec l'aide de la calculatrice (commandes table ou trace, par exemple) [filiation Collège] ... le contrôle porte sur la fonction (ou la suite) numérique, les intervalles de valeurs de la variable et de leurs images par la fonction grâce aux théorèmes de l'Analyse [rupture Collège].

[107] Ces structures ne sont pas des objets d'enseignement en tant que structures. Seuls apparaissent les ensembles numériques dans lesquels elles opèrent, tels que D (anneau des décimaux) , Q (corps des rationnels) et C (le corps des nombres constructibles à la règle et au compas), R (corps des réels) et les quatre opérations arithmétiques sur ces nombres. Par l'intermédiaire d'une écriture plus ou moins canonique, c'est la structure qui parle de **la** valeur exacte du nombre mais ce sont les opérations arithmétiques qui parlent de la décimalité de ce nombre.

[108] Ce qualificatif est préférable à celui de topologique ou de fonctionnel car il fait référence aux éléments théoriques qui permettent les contrôles des calculs dans l'institution

L'exemple de la notion d'intervalle

- d'abord ensemble des solutions d'une inéquation du premier degré et segment de la droite "réelle" ← pratiques de résolution d'inéquation (algébriques ou graphiques) essentiellement au collège
- également lieu borné des valeurs approchées d'un nombre ← pratiques d'encadrements au collège et au début du lycée (approximation = processus fini déterminé par la valeur exacte, valeur approchée = milieu ou l'une des bornes de l'intervalle)
- ensuite voisinage (au sens topologique) d'un nombre ← pratiques des intervalles emboîtés en lycée (approximation = processus infini, valeur approchée = arrêt dans le processus)

Les changements d'état du contrat expliquent les transformations institutionnelles (caractérisables en termes de filiations ou en termes de ruptures) des praxéologies par apparition de nouvelles tâches ponctuelles ou locales et l'enrichissement subséquent de leur typologie. Par exemple, la simplification s'enrichit des expressions trigonométriques, logarithmiques ou exponentielles, la comparaison intègre les majorations, minorations de fonctions sur des intervalles (l'égalité analytique prend place à côté de l'égalité algébrique). Et dans l'exemple de la notion d'intervalle, on peut repérer une double rupture :

- un encadrement réduit à ses deux bornes devient un intervalle continu des valeurs d'une fonction ;
- le calcul d'une valeur approchée abandonne la décimalisation d'une valeur exacte connue pour se constituer en tant que processus d'encadrement d'une valeur exacte inconnue.

2. Incomplétude et rigidité des praxéologies enseignées

Nous nous appuyons sur la conjecture générale formulée par Bosch et al. (2004) : incomplétude des praxéologies locales ou régionales enseignées dans EMS et rigidité des praxéologies ponctuelles enseignées.

> Las OML que aparecem explicitemente en las instituciones escolares se han constituido a partir de una integracion incompleta et una coordinaacion demasiado debil de ciertas OMP, y, como consecuencia, las OML que viven en las instituciones escolares presentan multiples incompletitudes (p. 215).
>
> En resumen, la actividad matemática que se lleva a cabo en [EM]S es esencialmente práctico-ténica y raremente alcanza el nivel tecnonológico. Como consecuencia, las OM que se estudian en [EM]S son generalmente OM puntuales, muy rígidas y aisladas (o poco coordinadas entre sí), lo que dificulta, e

> incluso impide, que en dicha institución se reconstruyan efectivamente OML relativamente completas (p. 221).

La conjecture générale est déclinée en sous-conjectures qui décrivent différents aspects de l'incomplétude et de la rigidité des organisations mathématiques dans EMS :

- dépendance de la technique à l'égard des ostensifs qui en constituent le support matériel
- l'application de la technique n'inclut pas l'interprétation du résultat
- unicité de la technique pour un type de tâches
- le travail de la technique (modification de la technique pour réussir une tâche légèrement différente) n'est pas de la responsabilité de l'élève (ni du professeur)
- absence de situations ouvertes de modélisation (où il faut choisir les données pour formuler le problème mathématique) et donc de techniques de modélisation (les relations entre la réalité et le modèle ne sont pas problématisées).

Ces caractéristiques d'incomplétude et de rigidité peuvent être mises en évidence dans une analyse conjointe du processus de construction (dans l'institution) de la praxéologie et de sa structure (types de tâches, techniques, technologies, théories)

> Hay que subrayar que la nocion de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todos los casos, de una cuestion de grado : existen OML mâs o menos "completas" que otras en funcion de grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicatores [del grado de completitud]. Dualmente, si nos fijamos en el proceso de construccion y no solo en el producto, entonces el grado de completitud de uma OML dependera tambien de la manera como se cumplan las condiciones didacticas (Bosch et al. 2004).

La méthodologie décrite suggère donc, entre autre, d'examiner aux différentes étapes de la construction des praxéologies dans l'institution, le degré de complétude de chacune d'elles et la qualité des liens entre elles. Avec les matériaux rassemblés dans les études menées sur la question 2, nous réexaminons les six praxéologies du modèle en portant particulièrement notre attention sur trois d'entre elles, celles de comparaison, de décimalisation et de simplification.

Il apparaît que la construction au collège de la praxéologie de comparaison se fait par juxtaposition de praxéologies ponctuelles au fur et à mesure que s'enrichit l'ensemble des nombres E et systématiquement en aval des praxéologies de décimalisation et de simplification. En effet toute tâche de comparaison de type nouveau et sa technique sont déduites de la nouvelle structure algébrique, comme application de l'écriture canonique dans cette structure. A la comparaison des entiers, on accole celle des décimaux puis celle

des fractions puis celle des nombres algébriques de degré 2. Lors du passage collège-lycée, au moment de l'intronisation de I,R comme le nouvel ensemble numérique E, cette soumission de l'ordre et du topologique à l'algébrique conditionne les rapports institutionnels à la comparaison entre nombres alors même que la seule écriture canonique disponible pour tous les nombres réels est celle[109] du développement décimal illimité.

Pour reprendre les termes mêmes de Bosch, Fonseca et Gascon, la praxéologie de comparaison est, au début du lycée, une praxéologie à fort degré d'incomplétude et dont les rigidités sont imputables à sa subordination aux praxéologies de simplification et de décimalisation. Cette nouvelle description du contrat institutionnel « Calcul numérique » – nouvelle au sens qu'elle était absente de notre thèse – nous offre un nouveau regard sur l'expérimentation de l'ingénierie didactique.

III. Regards différents sur l'ingénierie didactique

En effet l'ingénierie conçue dans la thèse faisait appel à des tâches de comparaison de nombres et associait de fait la praxéologie de décimalisation aux deux autres praxéologies : la comparaison et la simplification.

Le problème mathématique de l'ingénierie

Un fabricant de tables numériques reçoit commande d'une table décimale donnant cos(x°) pour x entier dans l'intervalle [0 ; 90] avec indication de la précision. Pour aider le fabricant, en plus des instruments « anciens » tels que règle, compas, rapporteur, papier quadrillé on dispose de calculatrices électroniques scientifiques « modernes » dépourvues des touches trigonométriques. On dispose également des trois formules suivantes :

complémentaire : $\cos x \rightarrow \cos(90 - x)^\circ$; $\cos(90 - x)^\circ = \sqrt{1 - (\cos x^\circ)^2}$

double : $\cos x^\circ \rightarrow \cos(2x)^\circ$; $\cos(2x)^\circ = 2.(\cos x^\circ)^2 - 1$

moitié : $\cos x^\circ \rightarrow \cos(\frac{x}{2})^\circ$; $\cos(\frac{x}{2})^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos x^\circ}{2}}$

sans aucune autre formule.

[109] Unicité seulement si on écarte le double développement décimal illimité des nombres décimaux.

Les trois situations didactiques :

- S1 : *comparer cos75° et 0,25* ; cette situation se caractérise par un jeu algébrique, au sens où ce sont les règles opératoires attachées à la structure algébrique de R qui devraient conduire la comparaison entre les deux nombres ;
- S2 : *le fabricant possède déjà trois valeurs approchées de cos18°: 29/30, 8/9 et 27/29. Il veut retenir la plus proche de cos18°. Que lui conseiller ?* ; cette situation se caractérise par un jeu topologique, au sens où la décision de retenir la meilleure valeur approchée devrait passer par des évaluations de distances entre nombres et des opérations sur ces distances ;
- S3 : *est-il possible d'obtenir l'arrondi à 4 décimales de cos72°, ou celui de cos9°, lorsque l'on ne dispose que d'un arrondi décimal d'ordre 4 de cos18° ?* ; cette situation se caractérise par un jeu fonctionnel, au sens où ce sont les propriétés fonctionnelles des formules de base qui permettront de produire et de contrôler les valeurs approchées souhaitées.

La conception de l'ingénierie répondait à la nécessité, selon nous, d'organiser la rupture Algèbrique / Analytique dans le numérique à travers une première rencontre avec une praxéologie de décimalisation potentielle au lycée. C'est ainsi que nous l'avons présentée lors d'un atelier de la treizième école d'été[110] en explicitant l'hypothèse de recherche fondatrice de l'ingénierie : dans une tâche de comparaison, l'inaccessibilité d'une expression algébrique de la valeur exacte du nombre favorise des stratégies qui, en s'appuyant sur les notions d'encadrement et de distance, sont susceptibles de faire évoluer le statut institutionnel de l'intervalle. L'intervalle, comme nous l'avons dit plus haut, est un objet pertinent de l'approximation décimale au cœur du changement d'état du contrat institutionnel algébrique-analytique.

A présent, l'ingénierie nous apparaît aussi comme une complétion expérimentale de la praxéologie de comparaison dans l'institution EMS du lycée et certains épisodes de l'expérimentation, relatés et analysés dans la thèse, révèlent les rigidités des trois praxéologies qui piègent les sujets-acteurs de l'institution. Par exemple :

[110] Sous le titre « la rupture algébrique/analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales », Birebent 2005.

- « la dépendance de la technique à l'égard des ostensifs » se lit dans l'obstination des élèves et de leurs enseignants à mener la comparaison de cos(75°) avec 0,25 en utilisant la forme algébrique de cos(75°)[111] sans envisager la valeur prise par la fonction cos ;
- « l'application de la technique n'inclut pas l'interprétation du résultat » se manifeste dans cette même tâche de comparaison par le peu d'attrait chez les élèves et leurs enseignants pour le cercle trigonométrique ou la sinusoïde.

IV. Conclusion

La volonté d'actualiser en continu nos interventions d'enseignants dans les séances de DEA tout en conservant le même corpus extrait de la thèse a nourri pendant des années le questionnement d'une recherche sans la clore. Cette expérience d'enseignement de la didactique conduite en obligeant les enseignants-chercheurs à se (ré)engager dans leur propre recherche nous semblait bénéfique pour les étudiants ; elle l'a été aussi pour les enseignants-chercheurs eux-mêmes. Dans cette expérience d'enseignement il faut souligner le rôle de l'ingénierie ; irremplaçable dans la méthodologie de recherche, l'ingénierie est un outil puissant dans l'enseignement de la didactique. Disposer de plusieurs lectures de la conception et des faits expérimentaux d'une même ingénierie, reprendre chaque année des analyses a priori de ses situations didactiques illustrait toujours mieux la pertinence de la méthodologie employée et aidait à l'exposition des concepts fondamentaux de la didactique. J'ajoute, pour en remercier Annie Bessot, que le choix de faire (re)vivre le corpus de sa propre thèse dans des travaux dirigés d'enseignement représente une expérience forte, rare et donc précieuse.

[111] Beaucoup écrivent $\cos(75°) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{0,75}}{2}}$

Références bibliographiques

Assude T. (1992), Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet "Racine carrée" et analyse du curriculum, Thèse de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Birebent A. (2001), Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Birebent A. (2005), La rupture algébrique/analytique dans le numérique : questions écologiques et instrumentales, Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

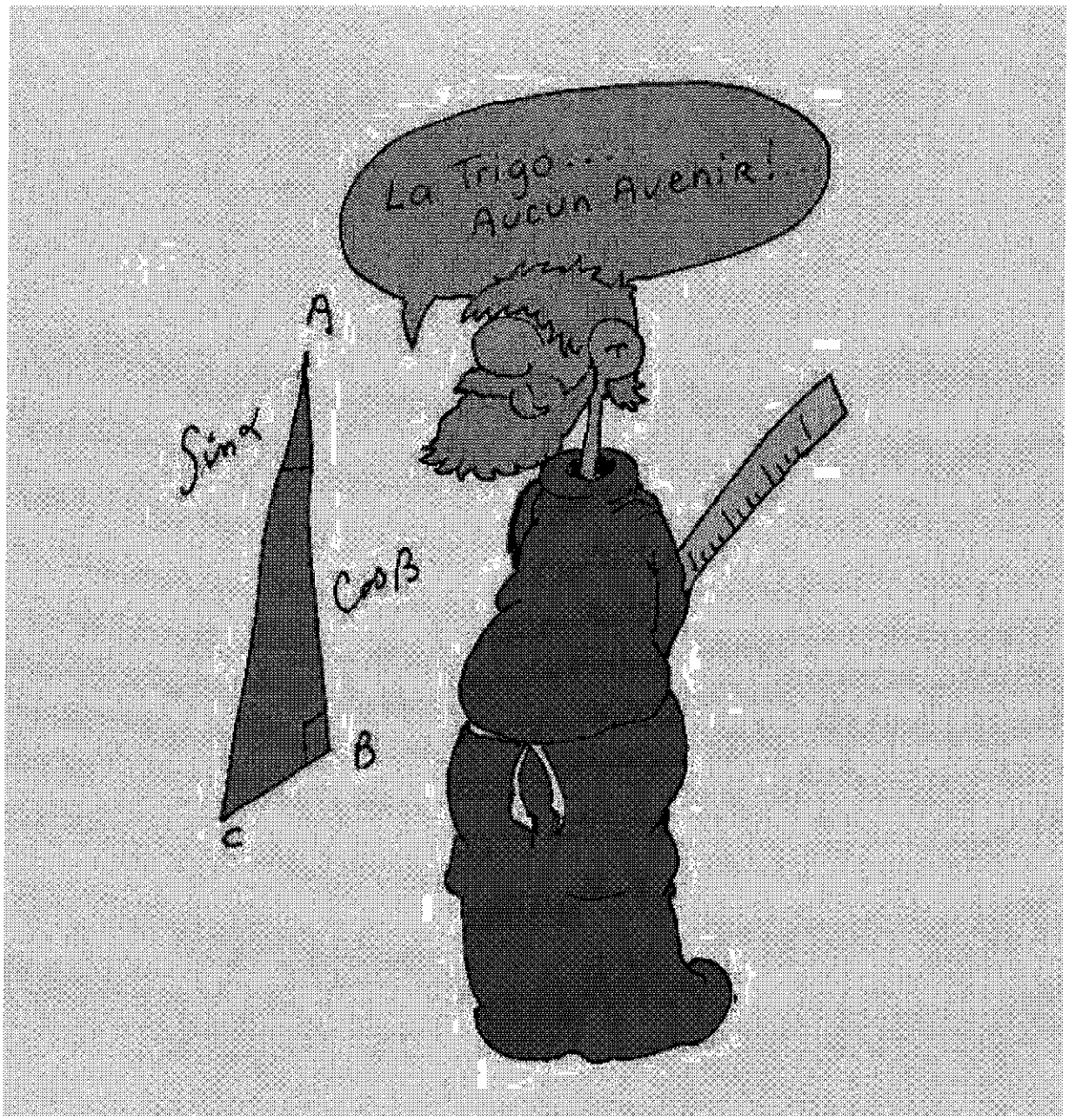
Bolea P., Bosch M., Garcia J., Gascon J., Ruiz L. et Sierra T. (2000), Analyse de "La mesure en CM1" d'après la Théorie anthropologique du didactique. In P. Clanché, M.-H. Salin, B. Sarrazy (Eds) Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures... Hommage à Guy Brousseau. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bosch M., Fonseca C., Gascón J. (2004), Incompletud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 24/2.3, pp. 205–250, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bronner A. (1997), Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1989), Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, pp. 211–235. LSD-IMAG Grenoble.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, in R. Noirfalise (ed.), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques de La Rochelle, pp. 89-118, IREM de Clermont-Ferrand.


La Trigo... Aucun Avenir!
A
Sin α
Cos β
B
C

Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures

Sophie Soury-Lavergne
Equipe IAM, Laboratoire d'Informatique de Grenoble
Université Joseph Fourier, Grenoble, France

Dans le projet MAGI "Mieux apprendre la géométrie avec l'Informatique", nous nous sommes posés la question des usages possibles de la géométrie dynamique à l'école primaire et au début du collège. Pour ma part, j'ai travaillé sur l'articulation école primaire collège, et sur l'utilisation de la géométrie dynamique pour initier les élèves de sixième au raisonnement déductif, en m'appuyant sur les recommandations du programme. Lorsqu'ils entrent au collège, les élèves doivent passer d'une "géométrie naturelle" à une "géométrie axiomatique" pour reprendre les termes de Houdement et Kuzniak (1999). Plus précisément, l'école primaire, le travail demandé aux élèves est un travail sur le dessin. Il leur est demandé d'identifier perceptivement des propriétés géométriques présentées par un dessin ou bien de le faire à l'aide d'instruments, de construire des figures au sens de réaliser un tracé particulier, de décrire des figures et de justifier leur travail par l'utilisation d'instruments tels que règle et équerre. Les élèves doivent ainsi apprendre, à propos d'un dessin, à différencier les propriétés géométriques d'autres propriétés non pertinentes comme certaines propriétés spatiales liées à l'orientation du dessin sur une feuille. Le passage au collège s'accompagne d'un changement d'attente vis-à-vis des élèves. Les propriétés géométriques de la figure ne doivent plus être seulement perceptivement lues ou vérifiées expérimentalement sur un dessin particulier mais elles doivent être également établies soit comme hypothèses, soit comme données de la figure ou encore comme conclusions. Cela permet la mise en place progressive du raisonnement déductif qui est traité explicitement à travers la démonstration en quatrième. Houdement et Kuzniak ont souligné à propos du passage d'un paradigme à l'autre que *« ce passage [...] n'est ni automatique ni facile. La construction de situations didactiques de 'passage' constitue un sujet de recherche »* (Houdement et Kuzniak, *op. cit.*, p. 296).

Je me suis donc posée la question de savoir comment Cabri-géomètre pouvait être utilisé pour amener les élèves à faire ce changement de lecture et d'utilisation du dessin géométrique. Un premier élément incontournable pour accéder ensuite au raisonnement

déductif est la capacité à analyser un dessin particulier en termes de propriétés géométriques. J'entends ici par propriété géométrique les énoncés caractérisant un objet géométrique ou une relation entre objet tel que ABCD rectangle ou (AB) parallèle à (CD). Il ne s'agit pas des théorèmes permettant la déduction.

Apports potentiels de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif

Pour les élèves, le déplacement dans Cabri-géomètre doit permettre de visualiser de façon différente les propriétés géométriques qui sont celles de la figure (les données et les propriétés qui s'en déduisent) de celles qui sont propres à un dessin particulier : « les cas particuliers ». Les premières sont conservées au cours du déplacement et pas les secondes. Cabri-géomètre semble donc être un outil tout à fait pertinent pour être utilisé par les élèves dès le début de l'apprentissage du raisonnement déductif dans la mesure où il donne accès aux propriétés géométriques de la figure (Laborde et Capponi 1994).

Un autre apport possible de la géométrie dynamique à l'apprentissage du raisonnement déductif vient de l'articulation entre énoncé et figure dynamique. Arsac *et al.* la présentent comme une caractéristique fondamentale de la pratique géométrique : *"Cette caractéristique fondamentale de la pratique géométrique est qu'elle comporte un aller-retour constant entre le dessin et un texte..."* (Arsac *et al.*, 1992, p. 170). Justement, la mise en relation entre une figure dynamique (précisément ses propriétés géométriques) et l'énoncé textuel de cette figure fait apparaître des différences. Certaines propriétés de la figure n'apparaissent pas dans l'énoncé : ce sont celles qui s'en déduisent. Cela peut permettre de susciter chez les élèves une question : pourquoi certaines propriétés de la figure sont-elles préservées au cours du déplacement et pourtant n'apparaissent pas dans l'énoncé ? Une telle constatation motive l'introduction d'un premier pas de déduction de la part de l'enseignant.

En résumé, l'apport de la géométrie dynamique à l'introduction au raisonnement déductif serait double : (i) identification des propriétés géométriques de la figure, (ii) problématisation de l'introduction d'un pas de déduction.

Cependant, ces apports potentiels reposent sur l'utilisation par les élèves d'une fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique qui est le déplacement des objets de la figure.

L'instrument « déplacement »

Les logiciels de géométrie dynamique sont présentés classiquement comme des environnements de construction de figures géométriques dans lesquels les objets de bases (points essentiellement) peuvent être déplacés et pour lesquels, au cours des déplacements, les propriétés géométriques de la figure sont conservées.

Tous les travaux sur l'utilisation didactique de ce type de logiciels mettent en avant le rôle et l'intérêt du déplacement pour l'apprentissage. Le déplacement permet d'une part l'exploration des figures et d'autre part l'obtention de rétroactions, deux fonctions qui en font des environnements pour l'expérimentation mathématique. Mais pour bénéficier des potentialités de ces logiciels, il faut « faire bouger » les figures.

Le déplacement, fonctionnalité triviale de la géométrie dynamique ?

J'ai pu constater sur le terrain, de façon cohérente avec d'autres observations (Restrepo 2005) que le déplacement n'est pas mobilisé d'emblée par les élèves et que son utilisation mathématique n'est pas spontanée. Ce constat est fait dès les premiers travaux sur l'utilisation de Cabri-géomètre avec des élèves. Capponi en 1994 mentionne la nécessité d'un contrat Cabri qui consiste à faire bouger les figures quand on travaille avec le logiciel. Il souligne que, bien que cette rège du jeu soit rendue explicite, elle n'était pas systématiquement mise en œuvre par les élèves : *« Seulement certains aspects qui peuvent sembler immédiats pour un professeur, comme le rôle du déplacement dans la validation, ne sont pris en compte que très progressivement par les élèves. »* (Capponi *et al.* 1994, p. 12). Ainsi, cette règle du jeu s'instaure plus ou moins vite et l'enseignant doit rappeler régulièrement aux élèves « qu'il faut bouger ».

Ensuite, même lorsque les élèves déplacent, de nombreuses difficultés subsistent encore. Premièrement, les déplacements sont fortement limités à la fois spatialement et en nombre. Les élèves bougent les points en les maintenant à proximité de leur position initiale et les

replacent immédiatement dans cette position. Par ailleurs, ils ne déplacent pas tous les points possibles. Ils peuvent ainsi "bouger" la figure sans produire d'effet significatif.

Deuxièmement, lorsque le déplacement produit un effet, les élèves n'analysent pas forcément les phénomènes observés d'un point de vue géométrique. Ils peuvent en rester à la simple constatation du fait que "ça bouge" ou alors avoir une interprétation spatio-graphique des phénomènes : "ça monte", "la figure s'agrandit, s'aplatit"... J'ai pu montrer les différences d'interprétation d'un même observable entre l'élève et l'enseignant interagissant à propos d'une figure Cabri : l'élève perçoit des relations spatiales et mécaniques alors que l'enseignant, de par ses connaissances mathématiques, lit directement les relations géométriques entre les objets construits (Soury-Lavergne 2001).

Enfin, même lorsque les élèves analysent le déplacement et la figure d'un point de vue géométrique, ils peuvent avoir du mal à identifier correctement la conservation ou la perte d'une propriété géométrique. En effet, sur la figure 1 ci-dessous, un élève peut avoir des difficultés à décider si les segments (GF) et (BC) sont parallèles à cause de la position spatiale des deux segments en question (ils sont décalés horizontalement, ils n'appartiennent pas à la même bande verticale) :

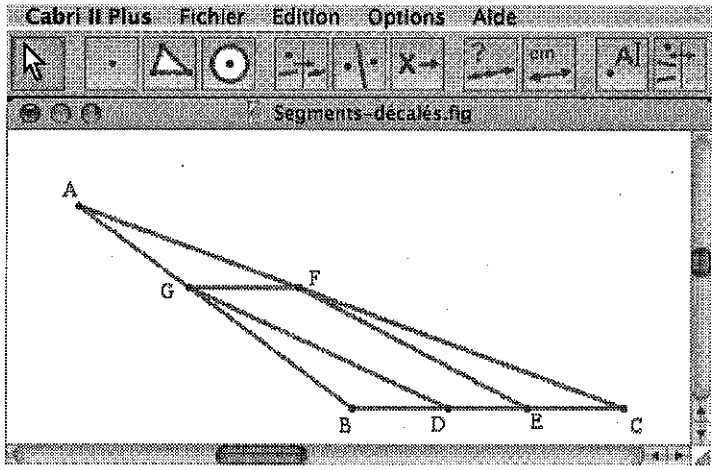


Figure 1

Finalement, lorsque les élèves constatent qu'une propriété géométrique n'est pas conservée, leur analyse les conduit à vouloir fixer les points plutôt qu'à chercher quelle propriété il aurait fallu utiliser lors de la construction pour obtenir la propriété voulue au cours du déplacement.

Cette analyse des nombreuses difficultés de l'utilisation du déplacement, renforcée par des constatations empiriques, m'a amenée à concevoir le déplacement non pas comme une fonctionnalité évidente de la géométrie dynamique, mais comme un instrument pour faire des mathématiques qui doit être construit par les élèves au cours de leur interaction avec le

logiciel. Il faut alors prendre plus finement en compte le rôle du déplacement dans les situations proposées, l'utilisation effective qu'en font les élèves et questionner le processus de genèse instrumentale qui accompagne l'utilisation de Cabri-géomètre chez les élèves de sixième. Ce processus de genèse instrumentale est complètement lié aux connaissances géométriques de l'élève : le déplacement ne peut être un instrument pour décider de la validité des propriétés géométriques que dans la mesure des connaissances géométriques de l'utilisateur. L'enjeu des situations Cabri proposées en sixième devient alors la co-construction de l'idée de propriété géométrique et du déplacement pour les identifier.

Le déplacement, un instrument complexe

Pour considérer le déplacement dans un environnement de géométrie dynamique comme un instrument en référence à la théorie de l'activité instrumentée (Rabardel 1995, Trouche 2000), il faut distinguer le déplacement en tant que partie d'artefact du déplacement comme instrument construit et mobilisé par un utilisateur dans le cadre d'activités finalisées. Le déplacement en tant que partie d'artefact correspond à la fonctionnalité de l'environnement Cabri-géomètre : il s'agit d'une propriété qu'ont certains objets de se déplacer à l'écran et du calcul par le logiciel des conséquences de ce déplacement. L'instrument est construit par l'élève quand ce dernier est capable d'utiliser cette possibilité de l'environnement pour résoudre un problème particulier.

Une analyse a priori permet de préciser les différentes composantes de l'instrument déplacement pour l'identification des propriétés géométriques d'une figure. Nous la résumons dans le tableau ci-dessous :

artefact considéré :	2 catégories de schèmes d'utilisation :
➢ une fonctionnalité de Cabri ➢ applicable à certains objets d'une figure ➢ qui produit de façon continue et réversible plusieurs états de la figure	**Schèmes d'usage : centrés sur l'artefact** ➢ cliquer sur la flèche ➢ distinguer les points qui peuvent être attrapés des autres
	Schèmes d'action instrumentée : centrés sur l'objectif de la tâche ➢ choisir les objets à déplacer

➢ identifier visuellement la propriété géométrique à vérifier ➢ décider si elle est conservée ou pas ➢ conclure si la propriété en question est une propriété de la figure ou pas

Tableau 1 : l'instrument "déplacement pour identifier les propriétés géométriques d'une figure dynamique"

Du côté de l'artefact, nous avons une fonctionnalité de Cabri symbolisée par l'icône flèche applicable à certains objets de la figure (points, cercles, segments…) et produisant des effets graphiques continus et réversibles. Du côté des schèmes d'utilisation du déplacement, il faut que l'utilisateur mette en œuvre différentes actions et décisions afin d'arriver à une conclusion au sujet des propriétés géométriques d'une figure. Chacune de ces actions et décisions peut être reliée à un schème.

Pour illustrer notre propos, nous allons utiliser la figure Cabri ci-dessous (figure 2). Cette figure est constituée d'un triangle ABC, d'un point D sur [BC] et d'un point E, symétrique de D par rapport au milieu de [BC], de deux points G et F, intersections des perpendiculaires à [BC] passant par D, respectivement E, et des côtés [BA] respectivement [AC].

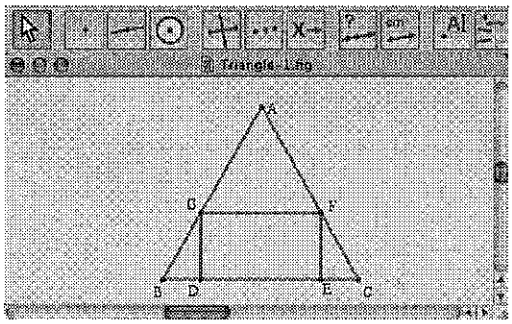


Figure 2

Le dessin imprimé, représentant de la figure, présente des propriétés géométriques particulières, en plus de celle de la figure, comme le fait que ABC semble isocèle en A. On peut justement utiliser le déplacement comme moyen de constater que certaines propriétés sont conservées et d'autres sont « perdues ». Par exemple, à propos de cette figure, la tâche peut être de savoir si (GF) est parallèle à (DE).

Un élève peut décider, au vu de l'état particulier de la figure, qu'il y parallélisme et justifier éventuellement sa réponse par l'argument des écarts constants : « il y a toujours le même

écart entre la droite (GF) et la droite (DE) ». Dans ce cas, il n'a pas mobilisé l'instrument déplacement.

Schèmes "cliquer", "choisir les points à déplacer", "distinguer les points attrapables des autres"

Il peut en revanche décider de déplacer la figure et choisir d'attraper le point G. Pour cela il cliquera sur la flèche (schème d'usage) et tentera d'attraper G, en vain car G est un point d'intersection. En effet, il y a des points qui peuvent être déplacés en les attrapant directement (point de base et point sur objet) et d'autres qui peuvent se mouvoir dans la fenêtre mais uniquement par l'intermédiaire d'un autre objet (point d'intersection). Ainsi le point G bougera si on attrape et déplace le point D par exemple mais ne pourra pas être saisi directement. Plus précisément, dans cette figure, les points A et D sont attrapables et déplaçables, et les points G, F et E ne sont pas attrapables mais pourront bouger par l'intermédiaire d'autres points. Quant aux points B et C, ce sont des points de base, donc normalement attrapables mais ils ont été punaisés donc ils ne sont ni attrapables ni déplaçables. Finalement les déplacements possibles d'une telle figure sont très riches et permettent une véritable exploration de la situation par les élèves. Le choix des points à déplacer est guidé par la tâche (décider s'il y a parallélisme entre (GF) et (DE)) mais il s'appuie sur le statut des points (attrapable ou pas, déplaçable ou pas). Après avoir tenté de déplacer le point G, l'élève peut alors choisir un autre point, le point D par exemple, et obtenir éventuellement la figure suivante (figure3) :

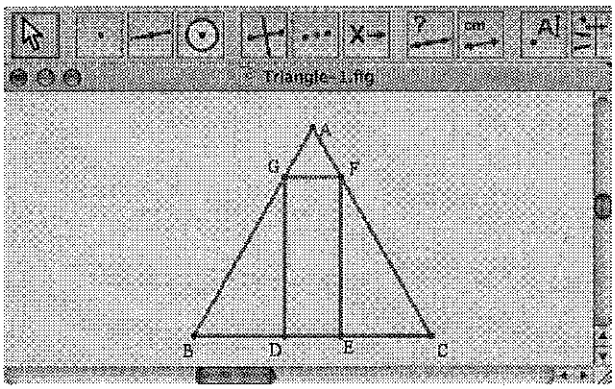


Figure 3 : Le point D a été déplacé sur [BC] en direction du point C.

Schème "identifier visuellement la propriété géométrique à vérifier"

A partir de la figure 3, le professeur de mathématiques en tirera la conclusion que le parallélisme est conservé au cours du déplacement de D et anticipera, grâce à ses connaissances géométriques que ce n'est peut-être pas le cas si on déplace d'autres points.

La conclusion de l'élève peut être toute autre et ne pas concerner le parallélisme. Celui-ci peut s'arrêter au fait que (GF) bouge aussi. Il peut également analyser le phénomène d'un point de vue perceptif en remarquant par exemple que (GD) et (FE) se rapprochent ou s'écartent ensemble et ne pas considérer la propriété géométrique en jeu. Dans ce cas, c'est le schème d'identification visuelle de la propriété qui n'est pas mis en œuvre par l'élève. L'élève ne finalise pas le déplacement d'un point par l'observation d'une propriété géométrique au cours du mouvement et dans la position finale de la figure.

Schème "décider si une propriété géométrique est conservée"

S'il considère la propriété géométrique, l'élève peut alors conclure à la conservation du parallélisme au cours du mouvement et donc au parallélisme de (GF) et (DE) pour cette figure, ce qui est faux. En effet, une telle conclusion n'est envisageable que lorsque tous les points attrapables ont été déplacés. Il peut aussi prendre en compte la propriété de parallélisme mais avoir du mal à décider si, dans tous les cas de figure qu'il a obtenus au cours du déplacement, il y a parallélisme ou non. C'est le cas quand les segments sont dans une position telle que montrée dans la figure 1, où la propriété est éventuellement perceptivement difficile à identifier. C'est aussi ce qui arrive avec les cas limites, ici quand D et E sont confondus ou quand le point G ou le point F n'existent plus. C'est alors le schème de décision de la conservation de la propriété qui est mis en défaut.

Schème "conclusion sur la propriété pour la figure"

Si l'élève attrape et déplace le point A, suivant le mouvement effectué, il peut obtenir une des deux figures suivantes :

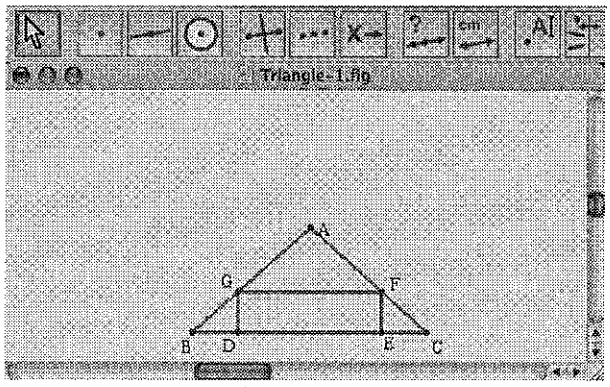


Figure 4 : si on déplace A sur la médiatrice de [BC]

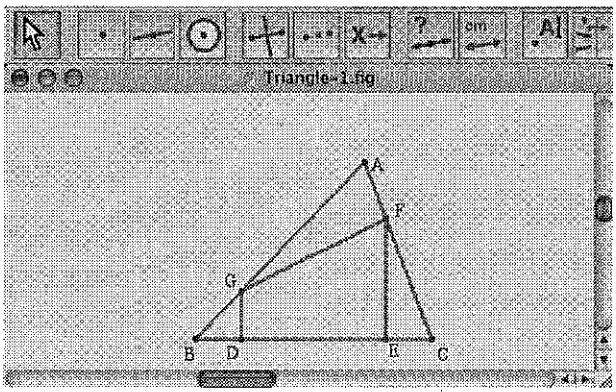


Figure 5 : si on déplace A vers la droite

Devant la figure 5, un élève peut reconnaître qu'il n'y a plus parallélisme mais ne pas en déduire que, pour la figure, les droites ne sont pas parallèles. En effet, la conclusion découle du principe du contre-exemple. Or il n'est pas encore forcément acquis. Donc à partir d'une constatation qu'une propriété n'est pas toujours conservée, l'élève doit encore faire un pas supplémentaire pour conclure à propos des propriétés de la figure.

On voit donc que, à travers le déplacement, derrière l'injonction « bouge la figure », il y a un ensemble important d'actions et de décisions possibles pour l'élève qui l'amène à identifier les propriétés d'une figure. Le fonctionnement qui consiste à choisir un point particulier de la figure, le déplacer, observer au cours du déplacement si une propriété géométrique particulière est conservée pour tirer finalement une conclusion sur les propriétés géométriques de la figure est complexe. Il résulte d'un apprentissage et mobilise chez l'élève des connaissances géométriques et des connaissances sur Cabri. Cet apprentissage doit être accompagné par l'enseignant.
La question soulevée est devenue celle de l'instrumentation du déplacement dans Cabri-géomètre. Comment Cabri-géomètre et plus particulièrement le déplacement des points de base d'une figure peut-il devenir un instrument de l'élève lui permettant d'identifier les propriétés géométriques d'une figure ?

Des situations pour le collège favorisant la mise en place du déplacement

L'enseignant peut soutenir la genèse instrumentale du déplacement en : (i) provoquant l'explicitation du déplacement par les élèves, (ii) mettant en évidence les différents types de points, (iii) organisant les interactions sociales relatives au déplacement durant les discussions collectives. Mais pour cela, l'enseignant a besoin de situations qui favorisent la genèse instrumentale du déplacement.

Une première solution : la contextualisation du déplacement

Une solution explorée dans le cadre du projet MAGI pour aider les jeunes élèves à s'approprier le déplacement est de lui donner du sens en le contextualisant. Dans les deux situations suivantes (figure 6), que l'on doit à Claude Fini et Henri-Claude Argaud de

l'IUFM de Grenoble, le déplacement correspond à une voiture roulant sur une route ou à une tempête qui agite un bateau voguant sur la mer.

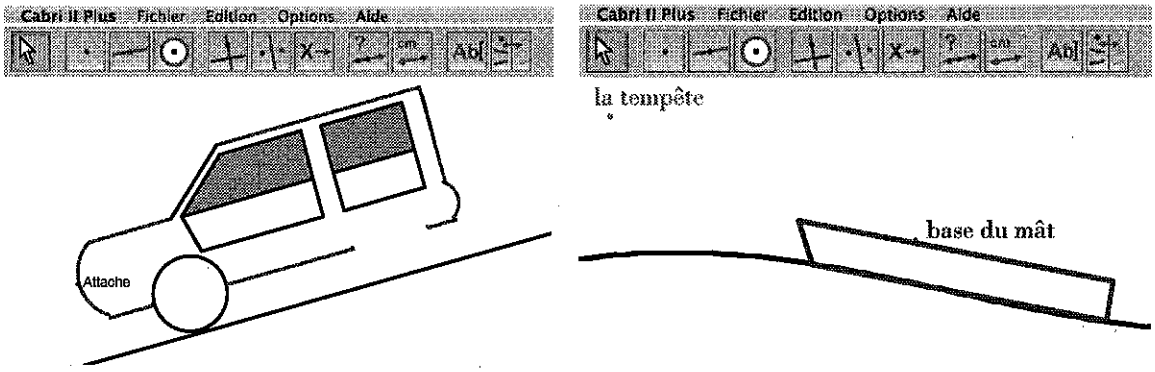


Figure 6 : deux exemples de situations où le recours au déplacement est contextualisé

Dans ces situations, le déplacement est motivé car il renvoie à un déplacement "réel" (problématique de modélisation (Berthelot et Salin 1992). De plus, les objets à déplacer sont indiqués. Enfin, l'élève a des attentes fortes sur le comportement des objets qui lui permettent de décider si la construction est valide ou pas. Il y a donc dans ces situations une prise en charge partielle de certains schèmes impliqués dans l'utilisation du déplacement. Cependant, la finalité des situations n'est pas l'identification des propriétés géométriques de la figure, donc s'il y a des schèmes communs, les instruments déplacement ne sont pas les mêmes. Enfin, ces situations ont été principalement utilisées à l'école primaire. Lorsque les situations sont purement mathématiques, la question n'est pas résolue.

Un scénario pour l'initiation au raisonnement déductif en sixième

Pour le début du collège, nous nous intéressons au déplacement qui permet de décider si une propriété est vraie ou pas dans une figure en s'appuyant sur sa conservation au cours du déplacement. Or il y a une différence entre les propriétés de la figure géométrique elle-même et celles qui résultent de l'observation du déplacement de la figure dynamique. En effet, si toutes les propriétés perdues au cours du déplacement ne sont pas des propriétés de la figure puisqu'un contre-exemple suffit, lorsqu'une propriété est conservée, on ne peut que conjecturer qu'il s'agit d'une propriété de la figure géométrique. Cependant, au niveau sixième, nous avons jugé qu'il était acceptable de ne pas faire la nuance et de considérer que les propriétés géométriques qui sont "*toujours*" conservées au cours du déplacement sont celles de la figure. Il y a là un nouveau type de validation, qui correspond à une

première étape vers le raisonnement déductif, et nous a semblé utile de mettre en place pour les élèves.

Dans le cadre du projet MAGI, la demande de l'enseignante impliquée était un travail sur les notions de parallélisme et de perpendicularité, permettant une initiation au raisonnement déductif et conduisant à l'introduction de la propriété « deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles ».

La figure de départ, que nous avons retenue afin de produire les tâches proposées aux élèves, permet de poser la question de la validité du parallélisme deux fois : dans un cas elle est vraie car déductible des hypothèses et dans l'autre cas non car elle ne l'est que pour certains dessins particuliers. Il s'agit de la figure ci-contre (figure 7) déjà décrite précédemment, à la différence près que les points D et E ne sont pas symétriques l'un de l'autre.

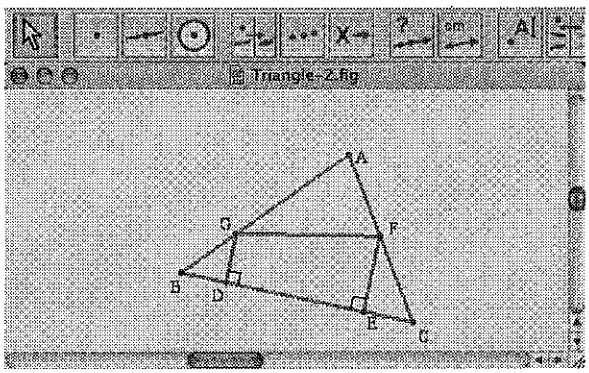


Figure 7

Dans certaines positions de la figure, la question du parallélisme peut être posée à propos de (DG) et (EF) ou (DE) et (GF). Le parallélisme de (DG) et (EF) se constate perceptivement sur tous les dessins, se déduit des hypothèses et est toujours vrai. Le parallélisme de (DE) et (GF) est faux en général, ce qui peut se confirmer perceptivement sur divers dessins (figure 7).

Le scénario, qui consiste en trois situations ainsi que leur mise en œuvre et gestion par l'enseignant (Laborde 2001), utilise Cabri-géomètre, mais aussi des représentations papier-crayon de la figure, des descriptions textuelles et demande à l'élève de mettre en relation ces différentes représentations. Le critère implicite pour décider qu'une description textuelle correspond à une figure Cabri dynamique est que toutes les propriétés

géométriques de la description sont *"toujours"* vérifiées par la figure Cabri, au sens où nous l'avons défini précédemment.

Les deux grandes étapes du scénario d'initiation au raisonnement déductif sont :

(i) Distinction entre propriété du dessin et propriété de la figure

Dans une première situation, les élèves vont utiliser en acte les propriétés géométriques d'une figure dans le but de la reproduire. Seules les propriétés géométriques de la figure permettent une reproduction qui se comporte de la même façon que la figure modèle. Les élèves vont devoir faire "en acte" la différence entre les propriétés géométriques de la figure et celles d'un dessin particulier.

Dans une deuxième situation, les élèves doivent décider si une figure vérifie une propriété ou pas. Ils sont ainsi confrontés aux cas où la propriété est "toujours" vérifiée et à ceux où la propriété est "parfois" vérifiée par la figure, "parfois non". La situation vise à confronter les élèves à la difficulté de décider, ce qui permet à l'enseignant d'introduire la notion de contre-exemple.

(ii) Distinction entre propriété "donnée" et propriété "déduite"

Une fois que les élèves ont les outils pour décider quelles sont les propriétés géométriques de la figure, ils peuvent accéder à une nouvelle nuance : différencier les propriétés qui sont des données de la figure de celles qui s'en déduisent. La troisième situation du scénario consiste à les confronter à un énoncé textuel de figure, une figure à main levée codée et une figure dynamique qui vérifient toutes les propriétés de l'énoncé. Ils peuvent alors constater qu'au moins une propriété "toujours" vérifiée par la figure dynamique n'est pas dans l'énoncé : pourquoi le parallélisme de ces deux droites est-il toujours vérifié alors qu'il n'est pas dans l'énoncé ? A la question suscitée par la situation chez les élèves, l'enseignant répond par l'introduction d'un pas de démonstration.

Je présente maintenant l'articulation des situations et la mise en place du déplacement qui l'accompagne.

Etape 1 du scénario : Distinction entre propriété du dessin et propriété de la figure

Cette étape regroupe deux des trois situations du scénario.

La première situation, intitulée "le même triangle", consiste en l'exploration d'une figure de Cabri-géomètre (voir figure 8) dans le but de la reproduire : le déplacement est un outil d'exploration pour permettre la construction ainsi qu'un moyen de validation.

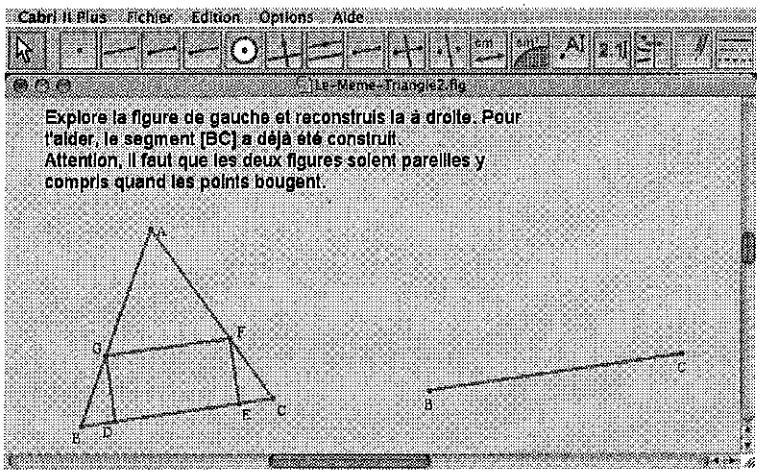


Figure 8

La seconde situation, intitulée "toujours-parfois-vrai" est une comparaison dans Cabri-géomètre de trois figures (voir figure 9) qui ont l'air identiques et qui se comportent différemment au cours du déplacement. Le déplacement permet de distinguer les figures les unes des autres et de décider quelles sont leurs propriétés géométriques. Au cours du travail sur ces figures, les élèves sont confrontés à la difficulté de décider collectivement dans certains cas s'il y a parallélisme ou perpendicularité. En effet, sur certaines figures, selon le point qui est déplacé, le parallélisme est ou n'est pas conservé. Lorsque l'enseignant met en commun les réponses des élèves, aucune réponse claire ne se dégage. La notion de contre-exemple est alors introduite pour permettre aux élèves de clore le débat. La conclusion de la situation est que pour pouvoir dire que les droites sont parallèles, il faut s'être assuré qu'elles le sont *"toujours"*, en ayant déplacé tous les points possibles.

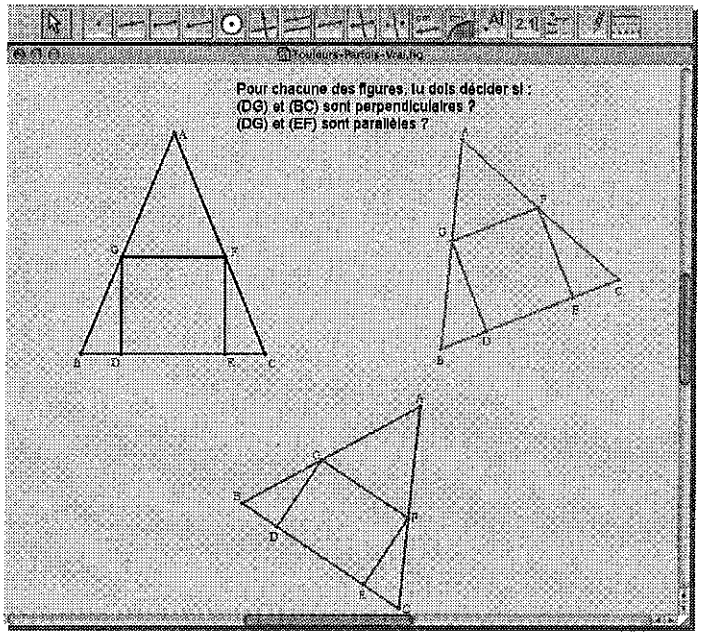


Figure 9

Etape 2 du scénario : distinction propriété donnée et propriété déduite

Cette situation, intitulée "lire ou déduire", part de la présentation d'un dessin à main levée, codé, et d'un énoncé textuel. Les questions posées sont relatives au parallélisme de (DG) et (EF) puis de (DE) et (GF).

➢ Voici un dessin □ main lev˜ eŹ

ABC est un triangle.
Les points D et E appartiennent au c™t[BC].
BD = EC
Le point G est □ lÕintersection du c™t˜ [AB] et de la droite perpendiculaire □[BC] passant par D.
Le point F est □ lÕintersection du c™t˜ [AC] et de la droite perpendiculaire □[BC] passant par E.

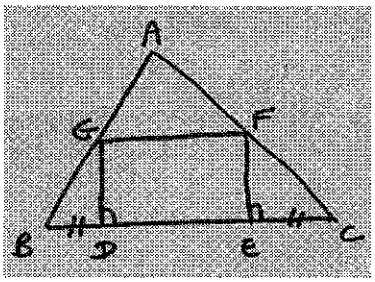


Figure 10 : deux représentations de la figure géométrique

Trois représentations dynamiques possibles de la figure en question sont alors proposées aux élèves (figure 11). Ils doivent déterminer quelle est la bonne figure, c'est-à-dire celle qui respecte toujours toutes les propriétés énoncées dans le texte.

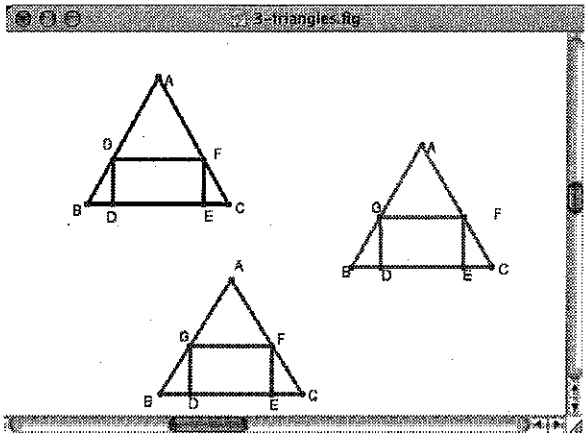


Figure 11

Les questions sont alors reposées lorsque l'élève dispose en plus de la figure de Cabri-géomètre. A ce moment là, l'impossibilité de trouver un contre-exemple au parallélisme de (GD) et (EF), alors que cette propriété n'apparaît pas dans l'énoncé, motive le passage à la déduction et l'introduction par l'enseignant de la propriété « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles ».

Instrumentation du déplacement au cours du scénario retenu

Ce scénario a été expérimenté trois années par la même enseignante, en subissant des modifications. Il a été testé dans une classe en 2003-2004 dans une première version assez différente de celle présentée ici. Au cours de l'année scolaire 2004-2005, une deuxième version à été utilisée dans deux classes de deux collèges de l'agglomération de Grenoble. Il a été actualisé plus légèrement pour être remis en œuvre en 2006-2007 dans trois classes de sixième.

Il nécessite une dizaine de séances de cinquante minutes. Il prévoit du travail sur Cabri-géomètre en salle informatique (élèves en binômes ou seuls), du travail en classe normale avec un ordinateur portable et un vidéo-projecteur notamment pour des mises en commun, du travail papier-crayon, parfois à la maison, et une évaluation finale avec travail individuel des élèves sur Cabri.

Le déplacement pour explorer et valider/invalider une construction

Dans la première situation "le même triangle" où il s'agit pour l'élève de reconstruire une figure, le déplacement est un moyen d'explorer le modèle et aussi un moyen de valider la figure reconstruite. Ce recours au déplacement est sollicité par la consigne et rappelé par l'enseignant. L'élève rencontre le cas des points qui ne sont pas attrapables mais que l'on peut déplacer par l'intermédiaire d'autres points. Enfin, les objets déplacés et les observations faites de la figure au cours du déplacement doivent être consignés dans un tableau, moyen de provoquer une explicitation de ces observations.

Le déplacement pour identifier les propriétés d'une figure

Dans la situation "toujours parfois vrai", le déplacement est le moyen d'identifier les propriétés d'une figure au-delà de la configuration spatiale. Dans la situation suivante, "lire ou déduire", le déplacement est à nouveau utilisé pour identifier les propriétés géométriques d'une figure, mais cette fois ci en relation avec un énoncé textuel définissant la figure. Le déplacement permet de relier des informations relatives au dessin de la figure avec celles de son énoncé.

Du point de vue de la genèse instrumentale du déplacement, les deux situations amènent les élèves à tenter de déplacer différents points, le déplacement d'un seul point ne permettant pas d'invalider certaines propriétés apparentes, à mettre en relation le déplacement d'un point et l'effet de ce déplacement sur les propriétés de la figure et enfin, pour la seconde situation à lier les registres graphiques et textuels.

L'enseignant accompagne cette genèse instrumentale en gérant les interactions dans la classe de la façon suivante. Un élève manipule la figure Cabri en suivant les instructions orales d'un autre élève. Celui qui donne les instructions doit expliciter l'objet à déplacer (point, segment) et également la propriété à vérifier au cours du déplacement.

Plusieurs instruments déplacement liés à différentes finalités

Ce travail a révélé l'existence de différents instruments déplacement liés à différentes finalités : déplacer pour identifier une propriété qui se conserve dans la figure ou au contraire constater sa disparition, déplacer pour conjecturer, déplacer pour valider ou invalider une construction.

D'ailleurs, avec Cabri 3D, il existe même deux artefacts distincts relatifs au déplacement : le changement de point de vue sur la figure, qui n'en modifie pas les propriétés géométriques, et le déplacement des éléments de la figure, susceptible de modifier ses propriétés.

Le processus de genèse instrumental du déplacement pour les élèves est long et est lié au développement de leurs connaissances géométriques. Si le problème de l'instrumentation de la géométrie dynamique, et en particulier du déplacement, se pose pour les élèves, elle se pose de manière encore plus complexe pour l'enseignant. Celui-ci doit gérer deux processus d'instrumentation :

- connaître la technologie, ce qui est finalement facile pour les enseignants du secondaire car très lié à leurs connaissances mathématiques, mais qui se révèle moins évident pour les professeurs des écoles ;
- savoir organiser les conditions pour l'apprentissage, en particulier comment choisir les situations à proposer aux élèves, comment articuler les tâches Cabri avec les autres tâches, comment intervenir auprès des élèves…

Ce deuxième processus d'instrumentation est nouveau pour les enseignants, il n'est pas évident comme l'a montré Tapan. En classe, les enseignants privilégient les situations où les élèves doivent constater la conservation d'une propriété au cours du déplacement, dans une figure fournie par l'enseignant ou bien construite de façon très guidée par les élèves. Et pourtant, en formation, ce sont les situations où la géométrie dynamique permet aux élèves de valider ou invalider leurs procédures qui ont été présentées majoritairement (Tapan 2006).

Dans le scénario utilisé, quelques éléments relatifs à la gestion de la genèse instrumentale par l'enseignant ont été identifiés :

1. La nécessité de séances de prise en main de Cabri-géomètre mettant en place les différents types de points et les conséquences sur le déplacement.
2. L'élaboration de consignes précises et d'outils proposés aux élèves pour rendre opérationnel le déplacement (par exemple un tableau à remplir lors de l'exploration d'une figure qui mentionne les objets déplacés et les observations effectuées) ;
3. La gestion des débats et l'instauration de règles pour la manipulation de Cabri lors des débats : lors des mises en commun, un seul élève manipulait Cabri-géomètre sous la dictée des autres élèves qui devaient préciser l'objet à déplacer et les objets ou la propriété à observer au cours du déplacement.

Ces difficultés d'utilisation de la géométrie dynamique à des fins d'apprentissage relatives notamment à l'instrumentation explique certainement son utilisation encore trop rare par les enseignants en classe.

Références bibliographiques

Capponi, B. & Laborde C. (1994). *Cabri-Classe, apprendre la géométrie avec un logiciel.* Argenteuil : Editions Archimède.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999), Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*. 40, 283-312.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14(1.2), 165-210.

Laborde, C. (2001), Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-geometry, *International Journal of Computer for Mathematical Learning*. 6, 283-317.

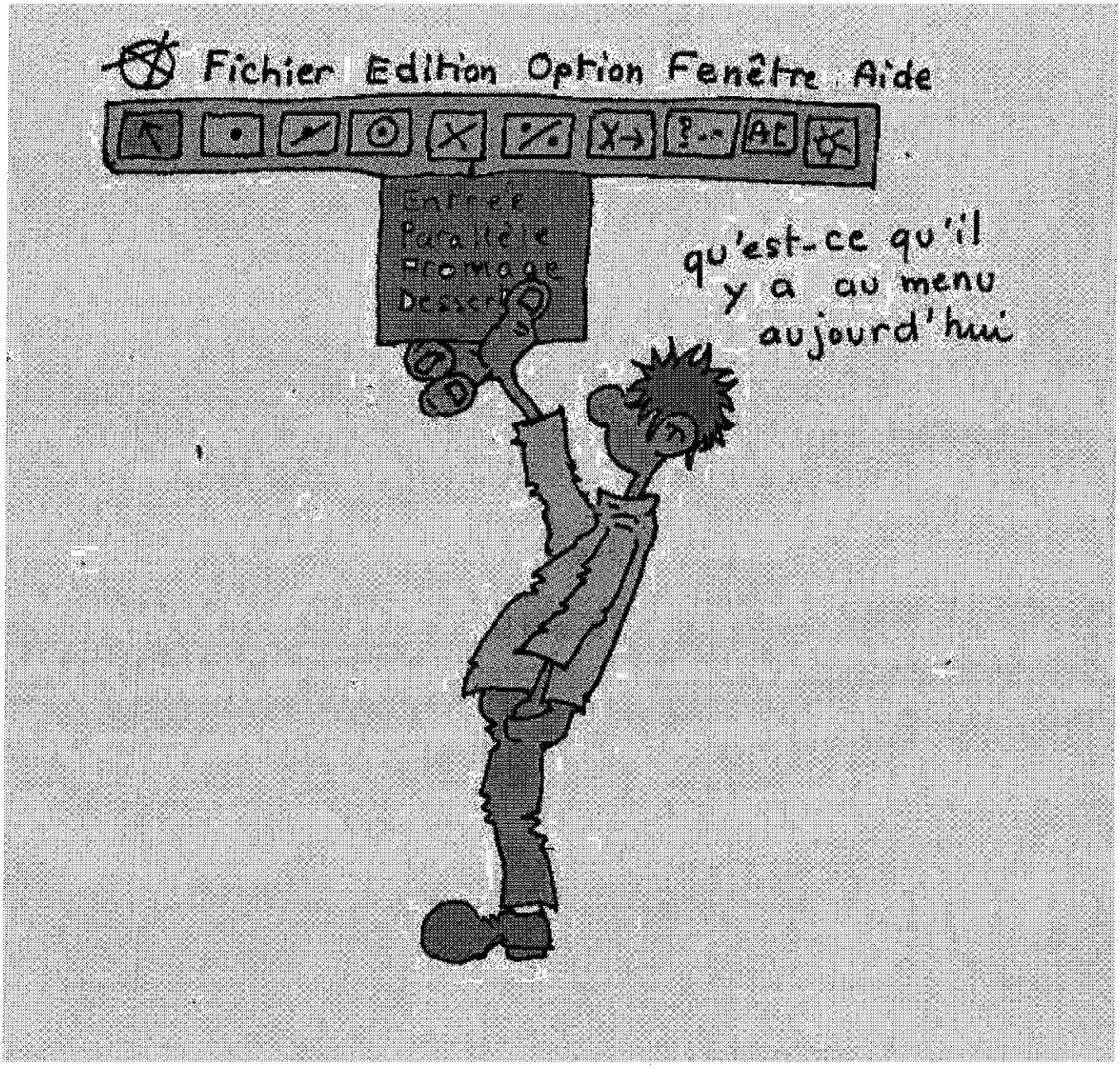
Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Restrepo, A. (2005). *Instrumentation du déplacement dans Cabri-géomètre par des élèves de 6ème*. Mémoire de Master 2 Université Joseph Fourier.

Soury-Lavergne, S. (2001). Connaissances et mise en œuvre d'un micromonde dans les interactions de préceptorat distant, le cas de la géométrie dynamique. *Sciences et Techniques Educatives*. 8(2.3), 321-345.

Tapan, S. (2006) *Etude de la formation initiale des enseignants à l'intégration des nouvelles technologies*, thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier Grenoble.

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissages dans un environnement de calculatrices symboliques mathématiques, *Educational Studies in Mathematics*. 41(3), 239-264.


Fichier Edition Option Fenêtre Aide
Entrée
Parallèle
Fromage
Dessert
qu'est-ce qu'il y a au menu aujourd'hui

Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux

Yves Chevallard
UMR ADEF, Université de Provence

Le texte ci-après a été voulu proche de l'exposé fait le 23 mars 2007 dans le cadre du séminaire national de didactique des mathématiques : en même temps qu'il tente d'en restituer la logique et l'essentiel de la matière, il en conserve volontairement le dépouillement et la concision. YC.

1. Médias et milieux

1.1. La notion de média

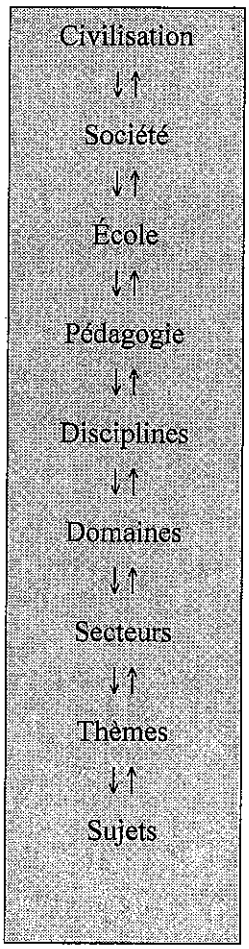
Le mot de *média* désignera ici tout système de mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public : le « cours » du professeur de mathématiques, un traité de chimie, le journal d'un présentateur de télévision, un quotidien régional ou national, un site Internet, etc., relèvent en ce sens du système des médias.

1.2. La notion de milieu

Un *milieu* est entendu ici dans un sens voisin de celui de milieu *adidactique* en théorie des situations didactiques. On désignera en effet comme étant un milieu tout système qu'on peut regarder comme *dénué d'intention* dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite, à telle question déterminée. Le système considéré se comporte alors *à cet égard* comme un *fragment de « nature »*. Par contraste, à propos de nombre de questions qu'on entend leur poser, les médias sont en général mus par une certaine intention, par exemple l'intention « d'informer ». Bien entendu, un média peut, à propos de telle question particulière, être regardé comme un milieu, et être utilisé comme tel.

1.3. La dialectique médias/milieux

L'existence d'une dialectique vigoureuse (et rigoureuse) entre médias et milieux est une condition cruciale pour qu'un processus d'étude et de recherche ne se réduise pas au recopiage acritique d'éléments de réponse épars dans les institutions de la société. Une telle exigence est en vérité consubstantielle à l'*esprit galiléen* caractéristique des sciences modernes de la nature et de la société, dans lequel la soumission à l'autorité cède la place à une culture partagée du questionnement, de la mise à l'épreuve par la construction de milieux idoines, déterministes ou statistiques, combinant dispositifs matériels et immatériels (enquête, expérimentation, raisonnement, déduction). En conséquence, l'un des grands problèmes éducatifs (et « citoyens ») de notre temps est celui de la généralisation de la capacité (de l'élève, du professeur, du formateur, du chercheur, du citoyen, etc.) à situer sa pensée et son action dans une dialectique des médias et des milieux adéquate à l'évaluation de ses assertions et de ses décisions. Deux grandes questions doivent être gardées à l'esprit à cet égard. La première est d'ordre *économique* et peut s'énoncer ainsi : *Quel est l'état actuel de développement de la dialectique médias/milieux dans nos sociétés et en particulier à l'École ?* La seconde est de nature *écologique* et peut se formuler comme suit : *Quelles sont les conditions et les contraintes qui commandent l'état de développement de la dialectique médias/milieux dans nos sociétés et en particulier à l'École ?* La question écologique suppose une brève explicitation : « les conditions et les contraintes » qu'on y évoque sont celles que permettent de repérer les différents *niveaux* de l'*échelle de co-détermination du didactique*, que l'on reproduit ci-après : chaque niveau est le siège de conditions et de contraintes qui exercent leurs effets tant sur les niveaux inférieurs que sur les niveaux supérieurs – d'où les flèches de sens opposé figurant dans le schéma ci-contre.



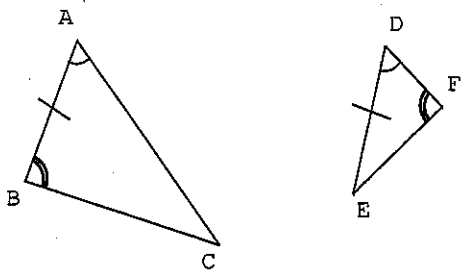
1.4. Deux exemples simples

Dans la classe de mathématiques même, et pas seulement dans la société en général, s'entend le bruissement d'un média ubiquitaire, celui des « légendes urbaines », que l'on peut appeler ici *légendes scolaires*. En voici deux exemples (sur lesquels on va revenir), sous la forme de deux assertions, θ_1 et θ_2, qu'il conviendrait de soumettre à la juridiction de milieux appropriés.

> **θ_1.** « La calculatrice donne le même affichage quand on lui demande ce que valent, d'une part $3\sqrt{5}$, d'autre part $\sqrt{45}$. Cela signifie simplement que les premières décimales de ces deux nombres réels sont bien identiques, mais l'on ne sait pas s'il en sera de même par exemple avec la 30e ou la 40e décimale. On ne peut donc pas en conclure que $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$. »

> **θ_2.** « Dans l'un des trois cas d'isométrie, on parle de deux angles et un côté *compris entre les deux angles*. On retrouve la précision "compris entre les deux angles" dans l'ensemble des manuels. Mais cette précision est inutile, car si on connaît deux angles quelconques, on peut calculer la mesure du troisième angle du triangle. »

Arrêtons-nous d'abord sur le cas de l'assertion θ_1 ci-dessus. Soit $a, b, c \in \mathbf{N}^*$. On a les égalités suivantes : $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| = |a^2b - c| = \dfrac{|a^2b - c|}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$. Il en résulte que, si $a\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$, alors on $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq \dfrac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$. En d'autres termes, ou bien les nombres $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ sont égaux, ou bien la valeur absolue de leur différence est minorée par un nombre non nul, $\dfrac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}}$. Il se trouve que, pour les valeurs de a, b, c usuellement retenues en classe de troisième (où l'on étudie « l'algèbre des radicaux ») font que ce minorant est suffisamment « grand » pour paraître non nul – et même « assez grand » – aux calculatrices actuelles. Lorsque $a = 3$, $b = 5$, $c = 45$, ainsi, on a $\dfrac{1}{a\sqrt{b} + \sqrt{c}} > \dfrac{1}{3 \times 3 + 7} = \dfrac{1}{16} > 0{,}6$; par suite, si l'on avait $3\sqrt{5} \neq \sqrt{45}$, *cela se verrait* sur les affichages de la calculatrice *avant la 3e décimale*. On en conclut que, inversement, si ces affichages sont *identiques jusqu'à la 2e décimale incluse*, alors $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$. D'une façon plus générale, l'assertion θ_1 doit être rejetée. S'agissant de l'assertion θ_2, les figures ci-après, qui satisfont aux réquisits énoncés, mais qui ne sont visiblement pas isométriques, règlent son sort : θ_2 doit être tenue pour erronée



1.5. Le simple et le complexe : les affres de la preuve

Bien entendu, les choses ne sont pas toujours aussi simples que dans les exemples précédents. À la page 1 du numéro 353 de mars 2007 du magazine *Pour la science*, Françoise Pétry, directrice de la rédaction et rédactrice en chef, propose ainsi sous le titre « Les affres de la démonstration » une réflexion sur les difficultés spécifiques de la preuve en divers champs scientifiques. « Les médecins, note-t-elle ainsi, ont l'intime conviction que les mesures qu'ils préconisent, fondées sur des études épidémiologiques, sont les meilleures. Encore faudrait-il préciser que les recommandations sont les meilleures au moment où elles sont faites, mais les données évoluent. » Alors que, en physique ou en chimie, les expériences sont réalisées « toutes conditions égales par ailleurs », « les paramètres sont étudiés les uns après les autres », la chose est « impossible en médecine où de nombreux facteurs influent sur la santé ». Il en va ainsi, notamment, en matière de nutrition. « Le rôle de l'alimentation sur la santé humaine, écrit Françoise Pétry, est difficile à évaluer, car les éventuelles conséquences d'une décision peuvent se manifester des années plus tard. » C'est ainsi que, « en retardant la diversification de l'alimentation des tout-petits, les médecins n'ont pas obtenu les résultats escomptés, c'est-à-dire que, loin de régresser, le nombre des cas d'allergies alimentaires ne cesse d'augmenter ». À cela il faudrait ajouter les difficultés intrinsèques auxquelles se heurtent les neuroscientifiques, les cosmologistes ou les paléontologues – lesquels par exemple « doivent se contenter de vestiges parsemés dans le temps et dans l'espace ». En particulier, la théorie de l'évolution, « étayée par un faisceau de preuves incontestables, subit pourtant régulièrement les coups de boutoir de ses détracteurs ». La dialectique des médias et des milieux est un combat. C'est à cette culture de « l'acharnement à prouver » que les élèves et les citoyens doivent être gagnés : le problème est immense.

2. Une histoire glorieuse mais difficile

2.1. Le schéma « herbartien »

Dans un cours donné à la VIII[e] école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995), intitulé *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, j'avais glissé cette citation de Johann Friedrich Herbart (1776-1841) : « Le professeur d'Université n'est plus un enseignant *(Lehrender)*, l'étudiant n'est plus un enseigné *(Lernender)* ; mais ce dernier poursuit des recherches personnelles, le professeur ayant pour tâche de le guider et de le conseiller dans ces recherches. » La configuration didactique évoquée ici peut être mise en forme comme suit, selon un schéma qu'on appellera le schéma *herbartien* :

$$(S(X, Y ; Q) \rightharpoonup R^{\Diamond}_{,1}, R^{\Diamond}_{,2}, \ldots, R^{\Diamond}_{,n}, O_{n+1}, \ldots, O_m) \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

Une équipe d'étudiants, X, qui peut être réduite à une personne, étudie, avec l'aide et/ou sous la direction de divers « aides à l'étude » ou « directeurs d'étude » composant l'équipe Y, une certaine question Q. Le système didactique ainsi constitué, $S(X, Y ; Q)$, se rend disponibles (la chose est marquée par la flèche $\rightharpoonup$) diverses réponses $R^{\Diamond}_{,1}$, $R^{\Diamond}_{,2}$, …, $R^{\Diamond}_{,n}$ institutionnellement « estampillées » (le signe $\Diamond$, lu ici « poinçon », rappelle cet estampillage) ainsi que des *œuvres* d'autres natures (théories, corpus de données, etc.), notées ici O_{n+1}, …, O_m. Dans la dynamique didactique – dont le schéma herbartien ne donne à voir qu'un *bilan* –, cette « production » d'un système de ressources va de pair avec la production d'éléments qui s'agenceront, à la fin du *parcours d'étude et de recherche* (PER), pour constituer la réponse $R^{\heartsuit}$ (à Q) propre au système didactique $S(X, Y ; Q)$, ce que note la flèche $\hookrightarrow$ du schéma $(S(X, Y ; Q) \rightharpoonup \ldots) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

2.2. Les vicissitudes du schéma herbartien

Valable en grande partie dans le monde savant (d'où il procède), le schéma herbartien peut être observée sous des formes diversement dégénérées dans les autres institutions de la

société. C'est ainsi que, dans le monde scolaire (mais pas seulement là), s'observe la pratique systématique ou erratique du *recopiage culturel*, que l'on peut schématiser ainsi :

$$(S(X, Y ; Q) \rightharpoonup R^{\Diamond}_{,1}, R^{\Diamond}_{,2}, \ldots, R^{\Diamond}_{,n}) \hookrightarrow \oplus_i R^{\Diamond}_{,i}.$$

La réponse $R^{\blacktriangledown} = \oplus_i R^{\Diamond}_{,i}$ n'est plus ici que le fruit de l'amalgamation, au reste variable dans son contenu comme dans ses formes, de réponses « toutes faites » trouvées ça et là dans la culture, sans que nulle dialectique médias/milieux n'ait fait entendre ses exigences propres. À côté de ce recopiage pur et simple, une autre voie – royale – a été dès longtemps ouverte : au lieu d'emprunter à la culture, c'est-à-dire à autrui, on produit par soi-même, au moyen du *raisonnement*, ressource consubstantielle à l'humain, média qui serait à lui-même son propre milieu rendant inutile tout autre milieu.

2.3. « Raisonner » ou l'obsession déductive

Il n'est guère besoin de rappeler la puissance de l'empire du raisonnement, notamment en mathématiques. En voici un exemple entre mille, dû à Thomas Jan Stieltjes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 4, 1890, 14) : si, pour un certain entier n, les entiers premiers étaient $p_1, p_2, \ldots, p_n$, alors, si $A \times B$ est une factorisation non triviale de l'entier $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$, l'entier $A + B$ n'est divisible par aucun des entiers premiers, etc. L'infinitude des nombres premiers est ainsi prouvée « par le raisonnement ». La découverte de la puissance du raisonnement est fort ancienne : elle devient évidente chez les Grecs, où raisonner apparaît à certains égards comme une obsession de la sphère savante. Dans son livre *Origines et développement de la science grecque* (Flammarion, Paris, 1990), Geoffrey E. R. Lloyd le souligne en un passage que nous reproduisons ci-après un peu longuement : on y retrouvera un habitus propre à la culture mathématique jusqu'à nos jours.

> On vise souvent à l'incontestable, à la rigueur et à l'exactitude, mais parfois on n'y atteint qu'au prix d'un certain arbitraire, d'un certain dogmatisme et, dans plusieurs domaines, d'un appauvrissement du contenu empirique de la recherche. Il y a chez les savants grecs une tendance récurrente à transformer leur discipline en une branche des mathématiques pures… Il en est ainsi par exemple [au III^e^ s. av. J.-C.] de l'ouvrage d'Aristarque, *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune* : pour le diamètre angulaire de la lune, Aristarque choisit

> comme hypothèse une valeur notoirement inexacte ; or, selon toute probabilité, cette erreur s'explique, non par une incapacité à effectuer les observations sommaires que nécessitait une approximation grossièrement exacte, mais simplement par le fait qu'il s'intéressait moins aux résultats concrets, aux dimensions et aux distances (qu'il exprime d'ailleurs en proportions, non en valeurs) qu'aux aspects purement géométriques du problème.

La découverte de la force créatrice de la raison se paie sur d'autres chapitres. Dans l'article « Mythe et savoir » qu'il écrit dans l'ouvrage monumental dirigé par Geoffrey Lloyd et Jacques Brunchwig, *Le savoir grec* (Flammarion, Paris, 1996), Luc Brisson écrit par exemple ceci (p. 86).

> La recherche de la certitude à l'intérieur d'un système axiomatique utilisant un langage mathématique entraîna parfois comme contrepartie une absence de contenu empirique. De plus, on invoquait des "témoignages" et des "expériences" plus souvent pour corroborer une théorie que pour la mettre à l'épreuve. Bref, il semble bien que ce soit le débat compétitif, l'*agon*, qui finalement a fourni un cadre dans lequel se développèrent les sciences de la nature en Grèce ancienne.

La dialectique des médias et des milieux tend ainsi à voir se réduire le système des milieux sollicités : le véritable laboratoire du savant grec, c'est l'*agon*. L'expérience semble écartée, comme le note encore, dans le même ouvrage, Geoffrey Lloyd lui-même dans l'article qu'il consacre à « Observation et recherche » (p. 254).

> Dans l'ensemble, les philosophes présocratiques ne cherchèrent guère à *accroître* les données que leur fournissait la recherche empirique ; et en règle générale, ils n'essayèrent pas de recourir à l'expérience pour *trancher entre* les interprétations concurrentes de ces mêmes données, connues ou supposées.

Une conséquence un peu inattendue – et en tout cas « décalée » (pour nous) – de la domination de la voie axiomatique sur la voie expérimentale est alors soulignée par Luc Brisson dans l'article déjà cité (p. 88).

> La raison est un merveilleux instrument qui permet de déduire un grand nombre de propositions d'un nombre restreint d'axiomes. Mais comme ces axiomes sont arbitraires et ne peuvent être fondés en raison, la raison reste toujours dépendante de prémisses et de valeurs

qui lui sont étrangères. D'où cette tendance constante, dans le monde grec, à rapporter aux dieux l'origine de tous les savoirs humains, aussi bien théoriques que pratiques.

2.4. Idéalité ou expérience ?

Malgré ses limitations, la science grecque met en place de façon apparemment définitive le *paradigme déductif*, qui fera longtemps figure de parangon dans la culture occidentale. C'est là un fait majeur, que Jean-Pierre Vernant s'applique à souligner dans une contribution intitulée « Écriture et religion civique en Grèce » à l'ouvrage dirigé par Jean Bottéro, Clarisse Herrenschmidt et lui-même, *L'Orient ancien et nous* (Hachette, 1998, p. 206).

> On voit alors apparaître, dès le VI^e^ siècle, et se développer, au V^e^ siècle, cette grande idée philosophique de l'opposition entre les apparences et l'Être, un et absolu. [...] La vérité d'un discours va tenir uniquement à sa cohérence interne : ce qui fait qu'un discours est vrai, ce n'est pas le fait que ce qu'on voit semble le confirmer, mais que le discours, tel qu'il s'articule à l'intérieur de lui-même, est irréfutable. [...] Combiné à d'autres facteurs, cela va conduire à définir une science mathématique qui a entièrement marqué la civilisation occidentale, parce que c'est une science qui enchaîne une série de démonstrations à partir de principes et de définitions qu'elle pose, de telle sorte que la vérité de la proposition finale est totalement indépendante de toute confirmation extérieure dans le monde.

Il faudra du temps pour que l'expérience – au sens galiléen, c'est-à-dire au sens moderne du terme – vienne prendre sa place dans la panoplie du « philosophe naturel ». Longtemps, le recours à l'expérience marque d'abord simplement la défiance méthodique à l'endroit des « autorités », et non l'articulation du modèle déductif et du modèle expérimental. C'est ce qu'explicite Steven Shapin dans son livre *La révolution scientifique* (Flammarion, Paris, 1998, p. 104 et suiv.).

> ... les préceptes étaient clairs : constituez vous-même votre expérience, ne vous fiez ni aux mots ni à l'autorité traditionnelle mais aux choses. L'expérience devait être intégrée aux fondations de la véritable connaissance scientifique [...]. Mais quel *type* d'expérience convenait-il de rechercher ? Comment la constituer de manière fiable ? Et comment en *inférer* des généralités concernant l'ordre naturel, quelle que soit l'échelle ? Sur ces

> questions, les pratiques modernes de philosophie naturelle présentaient des différences importantes. [...] L'un des courants de la pratique philosophique, qui reprenait manifestement l'héritage d'Aristote, attirait au XVII^e^ siècle à la fois des modernes et des anciens. On y cherchait à produire une *démonstration* typiquement scientifique, l'exercice consistant à montrer que les conclusions obtenues découlaient nécessairement d'une connaissance indubitable et rationnellement établie des causes des phénomènes naturels étudiés.

En mathématiques, l'idée que « tout peut se déduire » demeurera longtemps vivace (elle l'est encore aujourd'hui au collège, même quand on y pratique peu la déduction *stricto sensu*). La géométrie est ainsi une « rationalité à vide », comme le note Bertrand Russell dans son livre *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897).

> Geometry, throughout the 17th and 18th centuries, remained, in the war against empiricism, an impregnable fortress of the idealists. Those who held – as was generally held on the continent – that certain knowledge, independent of experience, was possible about the real world, had only to point to Geometry : none but a madman, they said, would throw doubt on its validity, and none but a fool would deny its objective reference.

Sur la longue durée, on observe donc un immense retard de développement de la dialectique des médias et des milieux. La remarque suivante, due à Richard Feynman (dans *The Meaning of It All*, Penguin, 1999), dont on peut penser qu'elle *devrait* aller de soi, gagne pourtant encore à être explicitée, et cela par l'un des plus grands esprits « galiléens » du XX^e^ siècle.

> Now, another example of a test of truth, so to speak, that works in the sciences that would probably work in other fields to some extent is that if something is true, really so, if you continue observations and improve the effectiveness of the observations, the effects stand out more obviously. Not less obviously. That is, if there is something really there, and you can't see good because the glass is foggy, and you polish the glass and look clearer, then it's more obvious that it's there, not less.

3. Interdits et autorisations

3.1. Auctores *et* lectores

On trouve, sur une page du Web [1], cet extrait d'une lettre de Patrick Champagne, sociologue proche de Pierre Bourdieu, qui y précise la distinction du *lector* (« lecteur ») et de l'*auctor* (« auteur »).

> « Lectores » s'oppose à « auctores ». C'est une distinction qui date du Moyen Âge ; elle oppose « ceux qui lisent les œuvres produites par les auteurs » (notamment les professeurs, les commentateurs) et « ceux qui les produisent » (notamment les chercheurs, les écrivains, les savants). Bourdieu insiste sur cette opposition pour montrer les biais de la lecture des purs lectores par comparaison aux lecteurs qui savent ce que c'est que produire. Cet accent mis sur la disposition du pur lecteur est au principe des développements chez Bourdieu du biais scolastique. Cette distinction est du même ordre que celle qui renvoie à la distinction entre « opus operatum » et « modus operandi » qui oppose le résultat d'une action singulière à son mode de production.

La culture intellectuelle du pur *lector* demeure aujourd'hui encore largement dominante en nombre d'institutions académiques, où l'on prétend répéter avec un ascétisme intrépide, rigoureux, mais fréquemment dénaturant, les œuvres d'*auctores* qui n'en peuvent mais. Contre cette domination, le développement de la dialectique des médias et des milieux devrait aboutir à faire reconnaître, à côté de la figure immémoriale de l'*auctor* génie solitaire (Eudoxe, Aristote...), la figure aujourd'hui encore fort improbable de l'*auctor collectif*, notée *X* dans le schéma herbartien. Une première condition pour que cela advienne est que le long interdit *politique* de se « mêler » de la plupart des questions *Q* qui importent à *X* soit enfin rejeté. Une « anecdote » en rappellera la prégnance dans les sociétés d'Ancien Régime (dont certains aspects sont encore très actuels). Elle est due à l'Abbé Morellet (1727-1819), qui la rapporte dans ses *Mémoires sur le dix-huitième siècle et sur la Révolution* (1822).

> En 1764, M. de Laverdy, alors contrôleur général [2], ayant fait rendre un arrêt du conseil qui défendait d'imprimer sur les matières d'administration, sous peine d'être poursuivi extraordinairement, ceux qu'on appelait alors philosophes furent indignés ; et j'étais de ce

[1] Voir http://khayyami.free.fr/francais/messages.htm.
[2] Clément de Laverdy (1723-1793) fut contrôleur général des finances de décembre 1763 à octobre 1768.

> nombre. Je combattis pour la liberté de la presse, et j'intitulai mon ouvrage *De la liberté d'écrire et d'imprimer sur les matières de l'administration.* C'était le développement d'une partie du *Traité de la liberté de la presse* que j'avais commencé à la Bastille [...]. Je gardais ici une extrême modération, afin de ne pas rencontrer d'obstacles ; mais cette réserve ne me servit de rien, et je ne pus obtenir pour moi-même la liberté que je demandais pour tous. Cependant mon travail n'avait pas déplu à M. Trudaine [3] ; son fils l'avait communiqué à M. Chauvelin, intendant des finances, et celui-ci au contrôleur général : mais le ministre y fit une réponse à mi-marge, tout entière de maximes despotiques, ou de la théorie des premiers commis : « pour parler d'administration, il faut tenir la queue de la poêle, être dans la bouteille à l'encre ; et ce n'est pas à un écrivain obscur, qui, souvent, n'a pas cent écus vaillants, à endoctriner les gens en place. »

Pouvoir se soucier de tout, partout, en toutes circonstances est une conquête récente et encore fragmentaire. Cette exigence d'une épistémologie démocratique est consubstantiellement corrélée avec l'avènement d'une dialectique des médias et des milieux ubiquitaire. Or l'école, qui devrait en être l'opérateur, est là-dessus très en retard.

3.2. Lectores *contraints et faux* lectores

Le professeur se vit souvent, en effet, comme un *lector* qui connaît les *auctores* et, pour cela, *devrait* avoir réponse à tout. « Que ne sais-je pas ? » semble être sa première maxime constitutionnelle. Cela le conduit parfois à des réponses étonnantes, comme dans l'épisode suivant : dans une classe de troisième, le professeur de technologie teste par écrit la culture informatique des élèves ; à la consigne de citer un navigateur Web, un élève, qui a, semble-t-il, une « vie en ligne » déjà assez riche, répond en mentionnant *Firefox* (alors que le navigateur utilisé en classe est autre) ; le professeur rejette cette réponse avec assurance, au motif que « Firefox » serait, non pas un navigateur, mais une... secte. Plus souvent encore, la tyrannie du « Que ne sais-je pas ? » amène nombre d'à-peu-près, erreurs vénielles qui mitent les discours professoraux. Le développement de la dialectique médias/milieux impose que l'on s'émancipe de cette tyrannie d'un principe intenable et que l'on s'efforce constamment de surprendre, en autrui certes, mais *d'abord en soi*, le faux *lector* toujours

[3] Daniel-Charles Trudaine (1703-1769) fut jusqu'à sa mort directeur de l'Assemblée des inspecteurs généraux des ponts et chaussées, fonction dans laquelle son fils Jean-Charles-Philibert Trudaine de Montigny lui succéda.

sur le qui-vive. Richard Feynman avait une technique pour déjouer ce malhonnête personnage ; il la rapporte dans ce passage de l'opuscule déjà cité (pp. 65-66).

> The first one has to do with whether a man knows what he is talking about, whether what he says has some basis or not. And my trick that I use is very easy. If you ask him intelligent questions—that is, penetrating, interested, honest, frank, direct questions on the subject, and no trick questions—then he quickly gets stuck. It is like a child asking naive questions. If you ask naive but relevant questions, then almost immediately the person doesn't know the answer, if he is an honest man.

3.3. Le schéma herbartien malmené

Dans *La crise de l'éducation* (1956), réfléchissant à la « disparition des préjugés », Hannah Arendt rappelle le processus de naturalisation auquel sont soumises les réponses qui, un jour, ont été apportées à des questions elles-mêmes depuis longtemps oubliées. Elle souligne à ce propos la vertu des *crises*, si du moins nous savons en avoir une juste appréciation.

> La disparition des préjugés signifie tout simplement que nous avons perdu les réponses sur lesquelles nous nous appuyons généralement, sans même nous rendre compte qu'elles étaient à l'origine réponses à des questions. Une crise nous force à revenir aux questions elles-mêmes et requiert de nous des réponses, nouvelles ou anciennes, mais en tout cas de jugements directs. Une crise ne devient catastrophique que si nous y répondons par des idées toutes faites, c'est-à-dire par des préjugés. Non seulement une telle attitude rend la crise plus aiguë mais encore elle nous fait passer à côté de cette expérience de la réalité et de cette occasion qu'elle fournit.

Dans un tel contexte critique, certains X, avec l'aide de certains Y, peuvent étudier certaines questions Q depuis longtemps délaissées – au détriment peut-être du projet de vie d'une société. Mais, comparée à cette situation d'étude et de recherche renouvelée, la situation scolaire classique semble se faire l'écho presque exact de la description arendtienne de la fabrication des « préjugés ». Dans une classe scolaire ordinaire, en effet, le professeur, y, le *lector* donc, consulte les œuvres, en rapporte une réponse R, qu'il présente aux élèves $x \in X$, pour lesquels ce sera *la* réponse $R^{\blacktriangledown}$, cette réponse orthodoxe dont ils devront montrer

ensuite qu'ils « la connaissent ». (Dans cette configuration, l'élève x n'est pas « autorisé », sinon à accéder aux œuvres O_k *à titre privé*, du moins à s'en prévaloir légitimement dans le cadre de la classe.) Le *lector*, y, apportera alors devant les élèves, à qui il les « enseignera », c'est-à-dire à qui il les montrera, des œuvres $O = R^{\blacktriangledown}$ qui, d'ailleurs, cesseront bientôt d'apparaître comme répondant à quelque question que ce soit. C'est là une dynamique que peint le schéma suivant :

$$(S(X, y\,;\, Q) \curvearrowright R^{\Diamond}_{,1}, R^{\Diamond}_{,2}, \ldots, R^{\Diamond}_{,m}, O_{m+1}, \ldots, O_n) \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}.$$

3.4. Les TPE comme analyseur

Les *travaux personnels encadrés* (TPE) introduits dans les classes de première de l'enseignement général à la rentrée 2000 s'éloignent *sur le papier* du schéma scolaire traditionnel, dont l'emprise ne s'abolit pas pour autant. C'est ainsi que, si l'on se réfère à ces catégories de pensée traditionnelles de la profession que sont « le cours » et « les exercices », les TPE vont être spontanément situés plutôt *du côté des exercices*, c'est-à-dire parmi les travaux d'élèves dont, solidairement, les « résultats » 1) n'ont pas à être connus de la classe, et 2) *ne peuvent pas* être utilisés dans le travail courant de la classe. À l'instar des « exercices », les TPE sont donc des travaux « semi-perméables » aux connaissances à enseigner : si des connaissances validées en classe y entrent presque nécessairement, rien, en revanche, n'en sortira que par effraction. En outre, si la réponse R attendue n'est plus, ici, apportée toute faite *par le professeur* (lequel devient officiellement un « encadreur », position institutionnelle jusqu'alors à peu près inconnue dans l'institution scolaire), elle est néanmoins trouvée toute faite *dans la « culture »*, les élèves $x \in X_i$ (où X_i est l'équipe de TPE, formée par exemple de trois élèves de la classe $X = \bigcup_i X_i$) se contentant dans le meilleur des cas de *combiner* diverses réponses $R^{\Diamond}_{,1}$, $R^{\Diamond}_{,2}$, …, $R^{\Diamond}_{,m}$. (Les TPE ont été à cet égard un révélateur d'une vérité profonde du système scolaire : sa propension à fabriquer – chez les élèves, et *donc* chez les professeurs – de dociles « recopieurs de la culture établie ».) Enfin, comme dans l'enseignement scolaire ordinaire, les *questions* génératrices du travail demandé sont souvent *oblitérées*. Les élèves apportent alors dans leur TPE ce qui n'est pas une *réponse à une question* dans la mesure où cette question *n'a pas été posée*. La production qui est la leur peut à cet égard se représenter par la formule $\oplus_i(Q_{ij} \rightarrow R^{\Diamond}_{,ij})$, où le

symbole ⊕ désigne une opération de « combinaison » forcément non univoque. Dans le passage de la classe « traditionnelle » aux TPE « novateurs », on passerait ainsi d'un enseignement *dogmatique* à… un *auto*-enseignement dogmatique.

3.5. *Internet : le désarroi des* lectores

Le principe scolaire de l'accès libre aux œuvres refusé à l'élève en tant qu'élève est aujourd'hui mis en grand péril par l'enrichissement de la masse des œuvres accessible à tous par le biais de l'Internet. Voici de cela un exemple à la fois banal et typique. Dans un article intitulé *The Internet: Problem Solving Friend or Foe?*, paru dans le numéro de février 2007 du magazine *The Mathematics Teacher*, l'auteur, Jeffrey J. Wanko, écrit ceci (p. 402).

> A few years ago, students could turn to advanced mathematical software like Mathematica, Maple, or Derive to simplify complicated expressions, factor polynomials, extrapolate missing data from a given set, and plot a variety of different graphs simultaneously. Today, many of these tasks are also readily performed for free on a number of Web sites that anyone can access easily. When they are used to increase understanding through exploration and discovery, these Web sites hold a great deal of potential and promise in our mathematics classrooms. But these Web sites can also be used to find direct or indirect solutions to some problem-solving tasks. This disconnect between the problems and the available technology exposes a common misconception held by novice problem solvers-that their goal is simply to get an answer to the problem. Understanding the difference between "locating a solution" (obtaining an answer without actually solving the problem) and "finding a solution" (using mathematical problem-solving strategies to arrive at an answer) lies at the crux of the matter.

La distinction entre *"locating a solution"* et *"finding a solution"* devient cruciale, alors qu'elle était traditionnellement sans objet – "locating a solution", c'était tricher, tout simplement ! L'auteur cité observe des élèves qui ont à étudier le problème suivant : "The number $2^{48} - 1$ has two factors bteween 60 and 70. What are they?" En l'espèce, certains de ces élèves vont recourir au logiciel de calcul en ligne Factoris, que l'on trouve sur le site de l'Université de… Nice [4]. Ce qu'ils en obtiennent (on aurait $2^{48} - 1 = 281474976710655 =$

[4] Voir http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi.

$32 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 97 \times 241 \times 257 \times 673$) leur permet aisément de conclure que $2^{48} - 1$ est divisible par $5 \times 13 = 65$ et par $9 \times 7 = 63$ (et par ces nombres-là seulement entre 60 et 70). Bien entendu, ce qu'attendait le professeur n'appelait aucunement l'usage de « Factoris ». On a en effet (par exemple) :

$$2^{48} - 1 = (2^{24} - 1)(2^{24} + 1) = (2^{12} - 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1) = (2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1)$$
$$= (64 - 1)(64 + 1)(2^{12} + 1)(2^{24} + 1).$$

La preuve est ainsi faite à l'aide d'un outil de calcul dont l'élève est censé disposer de façon permanente, *sans dépendre de quiconque ou de quoi que ce soit*, à savoir l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. C'est *cela* la tâche de résolution de problème que le professeur aurait souhaité voir ses élèves accomplir. Et c'est cela qu'il se désole de voir Internet, le cas échéant, rendre désormais d'apparition plus improbable.

4. Vers un changement de paradigme disciplinaire ?

4.1. Multiplier les voies de recherche et de contrôle

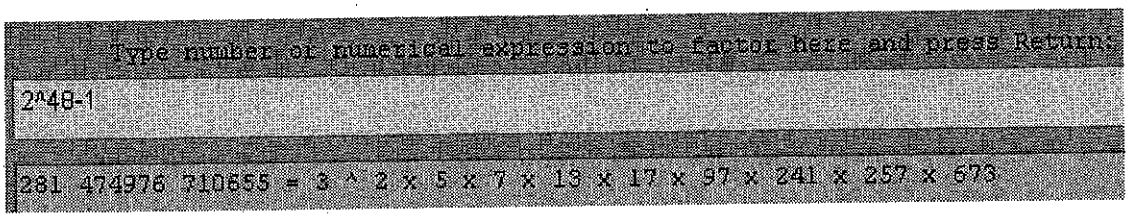
En vérité, le problème est beaucoup plus large : Internet ne fait, là encore, que le poser plus nettement. Si je recherche les diviseurs éventuels de $2^{48} - 1$ compris entre 60 et 70, je peux aussi, tout simplement, utiliser une calculatrice adéquate, par exemple celle que fournit Microsoft avec Windows. On a ainsi les résultats suivants.

$\blacksquare \frac{2^{48}-1}{60} =_{calc} 4691249611844{,}25$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{61} =_{calc} 4614343880502{,}54\ldots$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{62} =_{calc} 4539918979204{,}11\ldots$ $\blacksquare \mathbf{\frac{2^{48}-1}{63}} =_{calc} \mathbf{4467856773185}$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{64} =_{calc} 4398046511103{,}98\ldots$ $\blacksquare \mathbf{\frac{2^{48}-1}{65}} =_{calc} \mathbf{4330384257087}$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{66} =_{calc} 4264772374403{,}86\ldots$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{67} =_{calc} 4201119055382{,}91\ldots$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{68} =_{calc} 4139337892803{,}75$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{69} =_{calc} 4079347488560{,}21\ldots$ $\blacksquare \frac{2^{48}-1}{70} =_{calc} 4021071095866{,}5.$

Ces résultats confirment ce que donne le logiciel Factoris. Ils confirment aussi le résultat du « travail » de l'expression $2^{48} - 1$ à l'aide de l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mais bien d'autres « contrôles » peuvent encore être effectués ! Par exemple, le même logiciel en ligne Factoris donne ceci :

$$a^{48} - 1 = \pm (a-1)(a+1)(a^2 - a + 1)(a^2 + 1)(a^2 + a + 1)(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)(a^8 + 1)(a^{16} - a^8 + 1).$$

On aperçoit les facteurs $a^2 + 1$ et $a^4 - a^2 + 1$ qui, pour $a = 2$, valent respectivement 5 et 13 ; et de même encore le facteur $a^2 + a + 1$ et le produit de facteurs $(a + 1)(a^2 - a + 1)$, qui valent respectivement 7 et 3×3. Nouvelle confirmation donc ! On peut encore contrôler le résultat donné par Factoris en recherchant d'autres logiciels de factorisation en ligne. Le dispositif *Factorization using the Elliptic Curve Method* [5] fournit par exemple le résultat suivant, qui s'accorde avec ce que donnait Factoris.



On peut aussi s'appuyer sur d'autres connaissances élémentaires que celles envisagées plus haut. Sachant que $2^{48} = (2^6)^8 = 64^8$ et que $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$, on obtient que $2^{48} - 1 = 64^8 - 1$ est divisible par $64 - 1 = 63$. Sachant en outre que $a^n = (-a)^n$ lorsque n est pair, on a $2^{48} - 1 = 64^8 - 1 = (-64)^8 - 1$, d'où l'on déduit que $2^{48} - 1$ est divisible par $-64 - 1 = -65$, et donc par 65. (On notera que cette manière de faire permet d'établir que tout entier de la forme $2^{12k} - 1$ est divisible par 63 et 65 ; par exemple, pour $k = 2$, on a $2^{24} - 1 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17 \times 241 = (9 \times 7)(5 \times 13)(17 \times 241)$; ou encore : $2^{60} - 1 = 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 31 \times 41 \times 61 \times 151 \times 331 \times 1321$; etc.) La dialectique des médias et des milieux ne saurait s'arrêter à *la* preuve décisive : elle est indéfiniment ouverte, en son principe, à des relances mettant en jeu les milieux les plus divers.

[5] Voir http://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM.

4.2. Deux principes de méthode

Le nouveau paradigme épistémologique qui entre ainsi par effraction dans la vieille institution scolaire – laquelle en est toute surprise, et en reste étonnée –, doit être développé, mis à l'épreuve, théorisé. Deux principes peuvent d'ores et déjà être explicités. Le premier est le *principe d'ignorance méthodique*, que l'on peut formuler ainsi : quant aux questions sur lesquelles porte une recherche, on ne mêle pas ses connaissances éventuelles relatives à des réponses allogènes supposées aux éléments de réponse explicites ou implicites rencontrés. En d'autres termes, *on laisse parler les médias*, sans mêler sa propre voix à ce qu'ils font entendre. Le second principe, qui complète le précédent, est le *principe du doute méthodique* : en règle générale, toute affirmation à propos des questions sur lesquelles porte la recherche doit être regardée d'abord comme conjecturale (et non pas accréditée ou rejetée *a priori*) en vue d'être *travaillée* quant à sa vérité. C'est ainsi que doit se manier la dialectique des médias et des milieux : dans le silence de l'opérateur en tant que média potentiel, et dans la polyphonie des « œuvres ». Sur la voie ainsi balisée, la dynamique épistémologique de l'institution scolaire rencontre pourtant un immense obstacle.

4.3. L'épistémologie autoritaire et son dépérissement

Le changement évoqué jusqu'ici suppose en effet la dissolution de l'emprise des logiques autoritaires. Alors que les sciences modernes se sont affranchies, à partir de la seconde moitié du XVI^{e} siècle, du système antique des « autorités » pour ne plus se référer, en principe, qu'aux verdicts bien combinés de la raison et de l'expérimentation, tout une tradition scolaire a partiellement dévitalisé ces acquis de l'histoire des sciences en en faisant des *attributs de la fonction professorale*, à laquelle elles confèrent son autorité propre. Si, par exemple, la démonstration est censée garantir la vérité de l'assertion mathématique qu'elle « démontre », c'est en droit et en fait le professeur (ou le manuel) qui garantit la validité de la démonstration et donc, en dernier ressort, de l'assertion elle-même – laquelle pourrait alors aussi bien *se passer de démonstration !* Cette structure archaïque du rapport à la vérité et à la vérification fait que la culture de la mise à l'épreuve objectivante, émancipatrice par rapport au schéma autoritaire ancien, est demeurée largement étrangère à l'École. En mathématiques, en particulier, la mise à l'épreuve de

toute conjecture étudiée a pris durant deux siècles la forme rituelle exclusive du « Démontrer que… », manière subtile d'indiquer – on l'a suggéré – que l'institution scolaire se porte, en droit comme en fait, garante de la vérité de l'assertion à « démontrer », et que cette démonstration n'est donc demandée aux élèves que pour mimer la culture émancipée propre aux savants – qui, eux, démontrent sans garantie d'aucune tutelle surplombante. La culture « galiléenne » de la preuve, sans doute invoquée, voire vénérée, dans l'enseignement des sciences dans le registre des *objets* d'étude, remplacera-t-elle la culture autoritaire traditionnelle en matière d'*outils* d'étude ? Il faudrait pour cela que change l'épistémologie scolaire aujourd'hui encore dominante.

4.4. Reconsidérer le sort de l'expérience en mathématiques

La formule classique « On le voit, mais pour en être sûrs on va le démontrer », que tant d'élèves ont tant de fois entendue, mérite d'être fortement interrogée. Est-il vrai, se demande-t-on par exemple, que l'entier $n^4 + 4$ est divisible par 5 dès lors que n est un entier strictement positif ? Ça l'est pour $n = 1$ (on a $n^4 + 4 = 5$), pour $n = 2$ (on a $n^4 + 4 = 20$, pour $n = 3$ (on a $n^4 + 4 = 85$), pour $n = 4$ encore (on a $n^4 + 4 = 260$) ; mais ça ne l'est pas pour $n = 5$: $n^4 + 4$ vaut alors 629. Pour quelles valeurs de n l'entier $n^4 + 4$ est-il alors divisible par 5 ? Un tableur fournit aujourd'hui, en quelques clics, des résultats dont le tableau suivant précise le type.

n	n^4+4	n	n^4+4	n	n^4+4
1	5	21	194485	41	2825765
2	20	22	234260	42	3111700
3	85	23	279845	43	3418805
4	260	24	331780	44	3748100
5	629	25	390629	45	4100629
6	1300	26	456980	46	4477460
7	2405	27	531445	47	4879685
8	4100	28	614660	48	5308420
9	6565	29	707285	49	5764805
10	10004	30	810004	50	6250004
11	14645	31	923525	51	6765205

12	20740	32	1048580	52	7311620
13	28565	33	1185925	53	7890485
14	38420	34	1336340	54	8503060
15	50629	35	1500629	55	9150629
16	65540	36	1679620	56	9834500
17	83525	37	1874165	57	10556005
18	104980	38	2085140	58	11316500
19	130325	39	2313445	59	12117365
20	160004	40	2560004	60	12960004

Ce que révèle cette « expérience numérique » est assez clair : $n^4 + 4$ est divisible par 5 *sauf* lorsque n est un multiple de 5. (Plus précisément, si n est divisible par 10, l'écriture décimale de $n^4 + 4$ se termine par un 4 ; si n est divisible par 5 mais non par 10, alors l'écriture décimale de $n^4 + 4$ se termine par un 9.) Le milieu interrogé a-t-il parlé clairement, définitivement ? On connaît le verdict de la profession : que nenni ! Car, dit certaine *doxa* professorale, *il se pourrait* que l'on rencontre des valeurs de n au-delà de celles que l'on aura examinées et qui mettront en défaut cette conclusion, qu'il faut donc appeler prudemment une *conjecture*. Refrain connu ! Or, on va le voir, ce refus n'est pas plus – mais pas moins, il est vrai – justifié que l'adhésion absolue à la démonstration (entendue au sens mathématique, comme déduction au sein d'un système hypothético-déductif).

4.5. Pour des outils intellectuels adéquats

Le précepte à mettre en œuvre dans une rénovation « galiléenne » (ou « feynmanienne ») du curriculum mathématique est à cet égard, et plus généralement, le suivant : il faut développer les technologies *mathématiques* qui d'un même coup, lui épargneront d'avoir à se renier (« Je le *vois* mais je *ne dois pas* le croire ! ») et lui permettront d'exploiter au mieux les nouveaux *milieux* rendus disponibles dans la classe de mathématiques par le progrès des technologies numériques. Dans le cas de $n^4 + 4$, ainsi, se pourrait-il qu'apparaisse, plus loin dans la suite des entiers, un entier qui mette à mal ce qu'on a observé plus haut ? Nullement. Considérons plus généralement un polynôme à coefficients entiers, $P \in \mathbf{Z}[X]$, et un entier $d \in \mathbf{N}^*$; le comportement de l'entier $P(n)$ vis-à-vis de la

divisibilité par d n'est pas si compliqué qu'il puisse donner lieu à des extravagances du type de celles *évoquées* contre la conclusion tirée des résultats apportées par le tableur : d'une façon générale, si $n = dq + r$, où q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de n par d, pour tout entier $k \in \mathbf{N}^*$ on a $n^k \equiv r^k$ mod. d, en sorte que $P(n) \equiv P(r)$ mod. d. Le fait que $P(n)$ soit divisible par d dépend ainsi uniquement de $r = 0, 1, \ldots, d - 1$. En examinant d valeurs consécutives de n, *on peut donc conclure d'une façon tout à fait générale*. C'est pourquoi il n'est pas possible que, pour n « plus grand », la propriété observée soit mise en défaut. Dans le cas où $P(n) = n^4 + 4$ et $d = 5$, il suffit d'examiner les valeurs de $n^4 + 4$ pour 5 valeurs consécutives de n, par exemple pour... 1, 2, 3, 4, 5. Bien entendu, les technologies mathématiques utiles à la valorisation des ressources exploitables doivent être diffusées en priorité à ceux qui devront les diffuser auprès des élèves : les professeurs. Ce travail suppose de faire bouger certaines contraintes qui, au niveau de la discipline, traduisent l'emprise, sur l'enseignement des mathématiques, de contraintes de niveau supérieur.

4.6. Contre une certaine paresse théorique

La révolution attendue se heurte non pas seulement aux habitus mathématiques scolaires, mais encore à l'insuffisance du travail *technologique* (on l'a vu) et *théorique* (au sens que la théorie anthropologique du didactique donne à ces mots). Pour illustrer *a contrario* une certaine paresse théorique régnante, voici un extrait des notes d'une séance d'un séminaire adressé, à l'IUFM d'Aix-Marseille, aux professeurs stagiaires de mathématiques.

➔ Soit un système S, qu'on ne précisera pas davantage pour le moment : S peut être de nature biologique, physique ou même... mathématique. Et soit une assertion θ à propos de S. Le fait que θ soit vraie dans S sera notée

$$\models_S \theta.$$

➔ Comment savoir si l'on a $\models_S \theta$? La réponse poussée en avant par les mathématiques depuis des millénaires est la suivante : on construit une théorie déductive T de S, c'est-à-dire une théorie telle que, ***au moins***,

$$\text{si } \vdash_T \theta \text{ alors } \models_S \theta$$

soit encore

$$\models_S \theta \text{ si } \vdash_T \theta$$

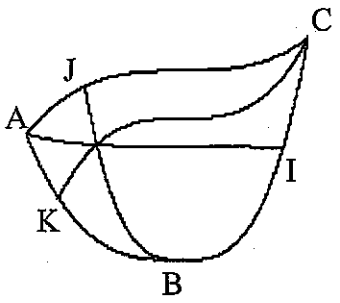
où $\vdash_T \theta$ signifie que θ est ***déductible*** dans T, c'est-à-dire est un ***théorème*** de T (au sens large, en comptant les axiomes de T comme des théorèmes). Bien entendu, l'idéal serait que l'on ait $\models_S \theta$ si, ***et seulement si***, $\vdash_T \theta$.

➔ Lorsqu'on se trouve dans la situation précédente, on peut, pour établir que θ est ***vraie*** dans S, chercher à établir que θ est ***déductible*** dans T. Telle est la solution « magique » qu'apporte les mathématiques. À une condition : que l'on ait pu construire une théorie déductive T adéquate !

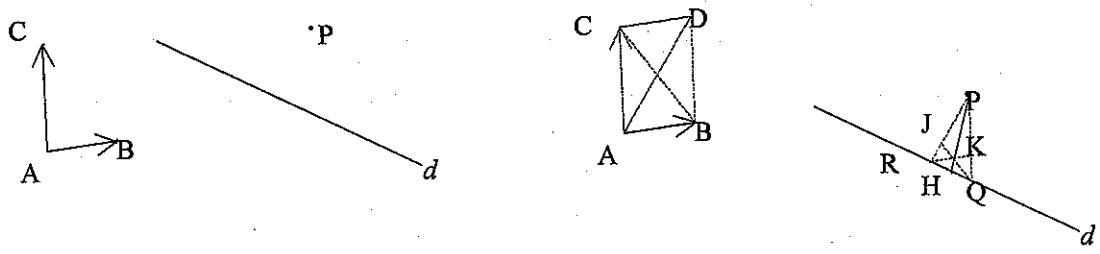
➔ La construction de T suppose essentiellement qu'on y mette des assertions vraies relatives à S qui auront le statut d'axiomes. Mais comment sait-on alors que telle assertion est vraie dans S sinon en « interrogeant » S, c'est-à-dire en procédant à une expérimentation sur S ? Si, par exemple, S est l'espace physique autour de nous, E, comment sait-on que, disons, « par deux points distincts il passe une droite et une seule » ? En interrogeant E. Mais c'est là que le bât blesse : personne ne peut se targuer d'avoir vérifié cette assertion ***pour tous les couples de points distincts de l'espace !*** En d'autres termes, la théorie déductive $T(E)$ sera elle-même fondée sur un mécanisme d'***induction à partir de résultats de l'expérience.***

➔ En pratique, on devra construire $T(S)$ dans des allers et retours incessants entre déduction théorique et expérimentation : on met dans $T(S)$ des assertions que l'expérimentation a prouvé raisonnablement être vrais dans S, et, en sens inverse, on vérifiera expérimentalement les théorèmes θ établis déductivement dans $T(S)$, pour s'assurer que $T(S)$ est « fiable » dans ce qu'elle nous révèle sur S.

Un tel développement témoigne d'une exigence qui devrait devenir commune : celle de *combattre les préjugés empiristes* en mathématiques. Une théorie mathématique, en effet, ne « théorise » pas toujours que ce que d'aucuns pensent. J'en donnerai ici, pour terminer, deux exemples solidaires à propos de ce qui est noté ci-dessus $T(E)$. La notion *physique* de droite est évidemment « modélisée » par $T(E)$. Mais, si l'on peut dire, $T(E)$ ignore – au double sens du terme – cette notion extramathématique. Et ce n'est que par une convention intéressée que nous interprétons les droites dont parle $T(E)$ avec les droites physiques – rectilignes – de E. Il est facile de montrer qu'on pourrait tout aussi bien les interpréter comme une tout autre famille de courbes du plan physique : on le verra sur la figure ci-après (représentant un triangle ABC avec ses trois hauteurs, qui se coupent), où la notion de droite de $T(E)$ est interprétée par les courbes qui, dans un repère orthonormé physique d'un plan P de E ont pour équation soit $x = p$ ou $y = b$ (ce sont alors des droites physiques, « verticales » ou « horizontales »), soit $y = ax^3 + b$, avec $a \neq 0$, c'est-à-dire par des cubiques du plan P.



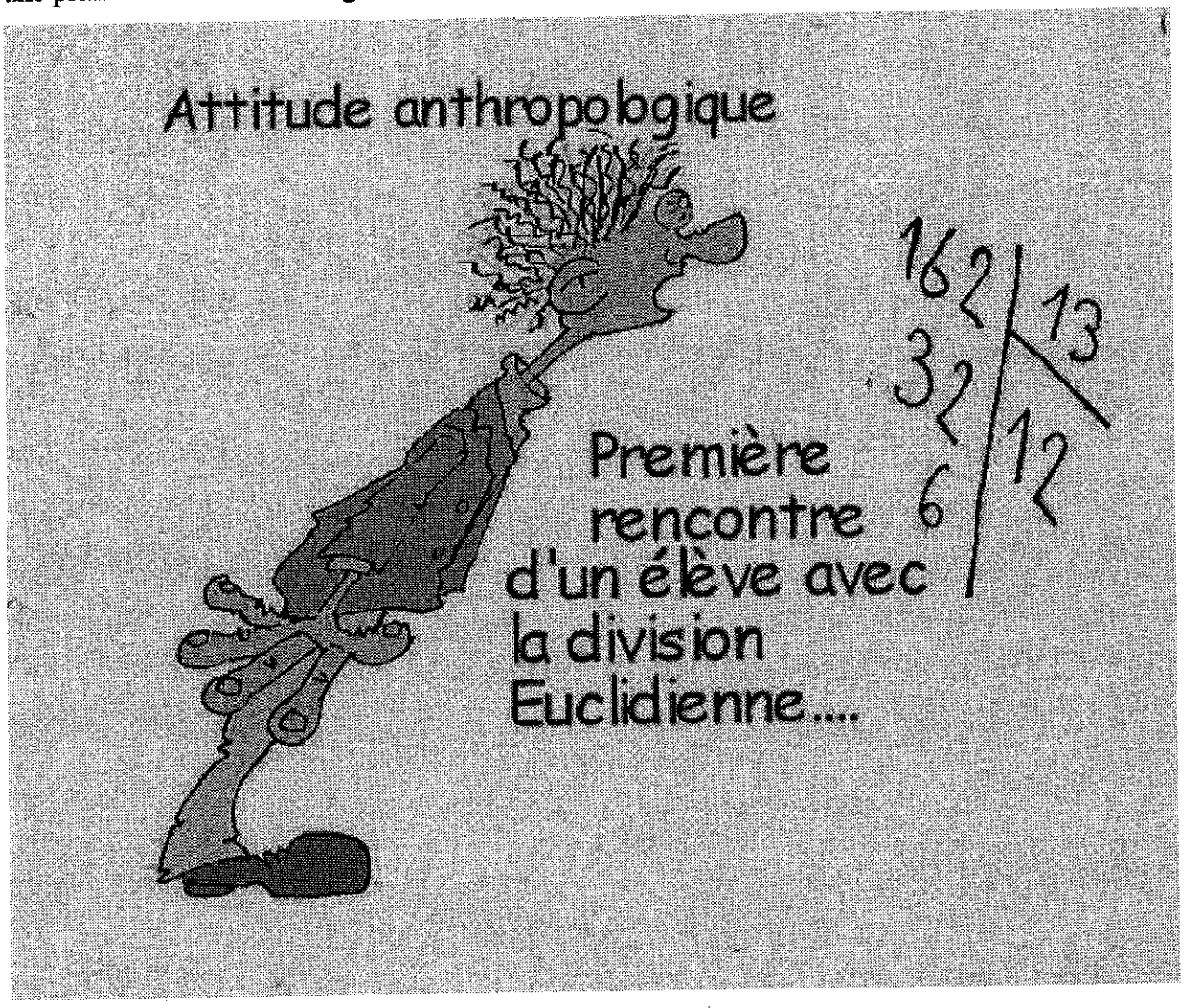
La même remarque peut être faite à propos de la relation de *perpendicularité* entre deux droites. Si l'on suppose maintenant que la notion de droite théorique est interprétée par la notion de droite physique, la notion théorique de perpendicularité – celle qu'on la définit dans $T(E)$ et telle que cette théorie la « gouverne » – peut fort bien être interprétée par une « perpendicularité » physique que l'on définit – de façon non univoque – en se donnant trois points A, B, C non alignés et en *décidant* que le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est orthornormal : cela définit *ipso facto* une métrique du plan P qui ne coïncide plus avec la métrique usuelle de l'espace physique, mais pour laquelle toutes les propriétés déductibles dans $T(E)$, et donc vraies pour la métrique usuelle, *restent vraies*. À titre d'illustration, le lecteur pourra examiner le problème suivant : étant donné le repère « orthonormal » (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) (ci-dessous à gauche), comment construire la perpendiculaire à la droite d passant par le point P à l'aide d'une règle et d'un compas « usuels » ? Une réponse est suggérée par les figures ci-dessous à droite.



5. L'avenir n'est pas écrit

Éclaircissements théoriques et mises en adéquation technologiques sont ainsi des instruments indispensables au progrès – tout à la fois dans la civilisation, dans la société, à l'école, dans la classe de mathématiques – de la dialectique des médias et des milieux. Bien loin de consister en un simple changement de « style » pédagogique, ce progrès apparaît

ainsi indéfectiblement lié à une évolution épistémologique qui touchera profondément les disciplines à enseigner. C'est désigner là ce qui est solidairement un point douloureux et une pierre de touche de changements ébauchés, possibles mais encore nimbés d'incertitude.



Notre site web

http://iremp7.math.jussieu.fr

IREM Université Paris 7- Denis Diderot
Case 7018
75205 PARIS Cedex 13

TITRE :

ACTES DU SEMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. ANNEE 2007

AUTEUR (S) :

Ghislaine Gueudet et Yves Matheron (EDS)

RESUMÉ :

Ces actes recouvrent presque tous les textes correspondant aux communications faites lors des trois séances du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, organisé par l'Association de Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).
Ces séances se sont tenues à Paris les 19 et 20 janvier, 23 et 24 mars et 19 et 20 octobre 2007.

MOTS CLES :

Didactique des mathématiques
Théorie anthropologique
Théorie des situations
Approche instrumentale
Ressources pour les enseignants
Contrat institutionnel
Pratiques des enseignants
Formation des enseignants
Défis de l'enseignement des mathématiques
Action didactique
Raisonnement
Démonstration
Logique
Intégration des technologies
Logiciels de géométrie dynamique
Calculatrice
Bases d'exercices en ligne
Triangles semblables
Aide aux élèves
Dialectique des médias et des milieux

Éditeur : IREM
Université Paris 7- Denis Diderot
Directeur responsable
de la publication : R.CORI
Case 7018
75205 PARIS Cedex 13
Dépôt légal : mars 2008
ISBN : 978-2-86612-297-3