IREM PARIS 7

Documents pour la formation des enseignants

n° 10

Février 2008

Introduction à la didactique des mathématiques et à la didactique des sciences physiques
Une option en formation initiale d'enseignant

M. Pariès, C. de Hosson

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Introduction à la didactique des mathématiques et à la didactique des sciences physiques
Une option en formation initiale d'enseignants

M. Pariès, C. de Hosson

Introduction à la didactique des mathématiques et à la didactique des sciences physiques

Une option en formation initiale d'enseignants

Monique Chappet Pariès, Cécile de Hosson

Ces quelques pages ont comme ambition de donner un premier éclairage sur le travail des didacticiens des mathématiques et des sciences physiques et son utilisation éventuelle par des enseignants.
Rappelons que les didactiques des mathématiques et des sciences physiques ont comme objet l'étude des relations entre enseignement et apprentissage d'un contenu donné à un niveau scolaire donné. L'introduction à ces deux champs scientifiques est ainsi commune et permet de placer ces pages dans le paysage général des recherches abordant les questions d'enseignement et d'apprentissage. Dans la première partie, avoir présenté les théories générales communes qui sont adoptées par les chercheurs, une présentation plus spécifique de chaque champ est proposée. Dans les parties II et III, on illustre le champ de la didactique des mathématiques en présentant un exemple puis en discutant plusieurs apports éventuels en direction des enseignants. La partie IV est réservée à la didactique des sciences physiques.
Des références sont données à la fin du texte.

Introduction

1. Les autres recherches proches

Une première idée est l'importance, en amont ou à côté de ce travail, d'autres champs de recherches (connexes). Il y a par exemple le travail des sociologues, celui des psychologues-ergonomes, des chercheurs en sciences de l'éducation par exemple. Tous ces chercheurs travaillent sur des régularités indépendantes[1] des contenus (mathématiques ou physiques), contrairement aux didacticiens qui centrent leurs recherches sur les contenus enseignés, même s'ils doivent prendre des détours. Ainsi souvent les didacticiens sont amenés à spécifier des résultats généraux aux mathématiques ou aux sciences physiques et à la situation scolaire. Les sociologues par exemple dégagent des difficultés liées à la posture de certains élèves ou au développement de malentendus entre l'enseignant et les élèves. Charge aux didacticiens d'identifier en mathématiques, en sciences physiques ces postures où les élèves en restent à la résolution de la tâche sans que cela induise une possibilité d'apprentissage. Charge aux didacticiens de traquer les malentendus en mathématiques… Et de travailler à les faire dépasser !

Un peu différent, il y a aussi le travail des historiens des sciences et des mathématiques et épistémologues, qui dégagent la genèse des notions, leur évolution, le champ des problèmes abordés. Les didacticiens sont souvent amenés à emprunter à ce camp des analyses assez élémentaires, ils ne font pas progresser le champ (sauf à poser des questions particulières) mais en utilisent des synthèses notamment. De même pour l'informatique : les didacticiens ne font pas nécessairement progresser les théories mais interrogent les utilisations et peuvent amener à des problèmes nouveaux.

[1] Au-dessus, plus générales…

Notons enfin que selon les recherches, même en didactique, les échelles de temps mises en oeuvre, les cadrages théoriques, les grains d'analyse sont différents – nous y reviendrons.

2. Spécificité des recherches en didactique des mathématiques et de la physique

Pour résumer et donner quelques idées synthétiques
a) Notre champ de recherche ne recouvre pas le champ des préoccupations des enseignants (dans les 2 sens) : certains de nos travaux n'intéressent pas les enseignants (travaux sur des anciens programmes par exemple) et certains problèmes des enseignants ne sont pas directement abordables par nos seules recherches (classes difficiles par exemple).
Plus important encore, notre travail ne prescrit en aucun cas. En particulier, les limites de nos recherches (souvent qualitatives ou ne portant que sur une dizaine de cas) et le grand nombre de paramètres intervenant dans une classe ne permettent en aucun cas de donner des résultats applicables directement à une classe donnée.

b) Nos recherches se caractérisent par une centration sur les contenus à enseigner avec des emprunts à d'autres champs : ils mettent en jeu une imbrication d'approches épistémologiques élémentaires, d'éléments sur les enseignements et sur les connaissances concernant les apprentissages des élèves
De plus la prise en compte des pratiques des enseignants est nécessaire, ce n'est pas un « plus » facultatif.
Enfin des expériences (y compris observations de classes ordinaires) sont indispensables à l'établissement de nombreux résultats, à la vérification de ce qui a été prévu ou pour en tester les limites.

c) Compte tenu de ce qui précède, les méthodologies utilisées sont des éléments clefs de la légitimité des travaux.

3. Les hypothèses générales que nous retenons (quitte à les spécifier)

Nous reconnaissons l'apport des grandes théories sur l'apprentissage et particulièrement celles de Piaget et Vygotski qui précisent les conditions favorables à l'acquisition de connaissances. Il reste bien sûr à les préciser dans le contexte de l'enseignement des mathématiques et des sciences physiques.

En sciences physiques, de nombreuses recherches s'inscrivent également dans la ligne de pensée définie au début du 20^{e} siècle par Gaston Bachelard qui postule que la « formation de l'esprit scientifique » passe par une rupture avec les idées de « sens commun ». Selon Bachelard, l'élève apprend contre un « déjà-là », une connaissance pré-existante à l'enseignement susceptible de lui faire obstacle. Dans la perspective bachelardienne, le « sens commun » génère un ensemble de raisonnements incompatibles avec les raisonnements scientifiques ; la tâche de l'enseignement des sciences consiste à les éradiquer. Si cette vision, assez extrême reconnaissons-le, ne fait pas l'unanimité parmi les chercheurs d'aujourd'hui, elle demeure la grande inspiratrice de notre discipline.

En mathématiques, nous nous inscrivons dans un courant de recherche qui s'inspire de la **théorie de l'activité**. C'est un cadre théorique parmi d'autres qui a été développé notamment par Vergnaud et qui prend en compte dans ses analyses non seulement les contenus, la situation scolaire mais aussi le sujet singulier.
Nos analyses s'attachent notamment à essayer de reconstituer les activités des élèves considérées comme un intermédiaire légitime entre enseignement et apprentissage. De ce fait nous étudions les

pratiques des enseignants qui provoquent ou peuvent provoquer ces activités en classe. Bien entendu nous n'avons pas accès aux activités réelles des élèves (ce qu'il pense, fait...) mais nous étudions les activités possibles. Pour ce faire nous croisons les analyses des tâches proposées dans les énoncées des exercices et les déroulements effectifs.

4. A quoi les travaux de didactique peuvent servir à des professeurs ? A des débutants ?

La didactique ne permet pas de donner des prescriptions. Cependant les démarches qu'elle met en place et certains résultats peuvent permettre d'outiller les enseignants pour se repérer notamment dans leur travail de préparation, voire pour se poser certaines questions systématiques ; cela peut contribuer à enrichir les enseignants, compte tenu de leurs expériences, et ainsi les aider à dégager des phénomènes et à faire des choix, y compris pendant les séances (ce que nous appelons choix de « déroulement ») ; cela peut donc donner des idées pour analyser et agir ensuite. Les enseignants peuvent finalement tirer de notre travail une idée plus précise de certaines questions non « transparentes », une palette des choix possibles et des conséquences de certains choix. On notera qu'il leur reste toujours quelque chose à faire entre ce qu'ils peuvent trouver dans les ressources didactiques et leurs activités en classe, travail d'adaptation, voire de transposition.

Pour les débutants, le plus important et immédiatement nécessaire nous semble de se couler dans le métier, ce que prend en charge une partie de la formation où la didactique n'intervient pas ou peu, formation disciplinaire sur le terrain et en centre. La didactique intervient plutôt dès qu'il s'agit de réfléchir à ce qui s'est passé, ou de faire un choix, hors urgence donc. Elle permet de gérer les marges de manœuvre. On ne commence évidemment pas par ça. C'est « un plus »[2] à nos yeux...
A quoi par exemple peut-on alors sensibiliser les débutants ? Nous suggérons que ce peut être à l'importance de l'analyse a priori des tâches demandées aux élèves et à l'influence croisée des énoncés et des déroulements sur ce que les élèves font comme math ou comme physique en classe.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler en I quelques lignes de force des théories sur lesquelles nous nous appuyons, en complétant par des éléments spécifiques aux sciences physiques à la fin du paragraphe ; puis nous développerons en II et III d'abord un exemple de recherche en didactique des mathématiques puis des éléments, issus de tels travaux, qui peuvent servir aux enseignants de mathématiques. La dernière partie IV permettra d'éclairer le cas des sciences physiques. Des références bibliographiques laisseront aux lecteurs la possibilité d'ouvrir encore leur réflexion.

I. Des éléments théoriques sur le développement et l'apprentissage - Piaget, Vygotski, Vergnaud et des cadres théoriques en didactique.

Piaget et Vygotski ont construit des cadres théoriques pour rendre compte des processus qui interviennent dans le développement de l'enfant. Nous en rappelons les principaux apports et ce que nous en retenons pour la didactique des mathématiques. Nous précisons les compléments en relation avec les mathématiques que Vergnaud a apportés à ces cadres théoriques.

Une présentation plus étoffée et une mise en regard de ces théories sont proposées dans le livre « la classe de mathématiques » (2008).

Des éléments communs aux deux disciplines

---

[2] Même si dans certaines formations PLC2, au contraire les didacticiens estiment que les connaissances didactiques doivent être premières et orienter dès le début le travail de l'enseignant.

I.1 Le constructivisme piagétien

L'idée d'une construction interne du sujet est probablement la représentation dominante du constructivisme piagétien. Piaget exprime le processus du développement en termes de double régulation proactive et rétroactive.

Pour Piaget, le sujet qui est un sujet épistémique, est engagé dans une action sur les objets du monde avec les intentions d'obtenir des résultats ou d'acquérir des connaissances sur ces objets. Son activité est déterminée par ses connaissances et les propriétés des objets. Cette activité est régulée avant l'action par les connaissances du sujet sur les objets. La comparaison entre les effets attendus concernant les objets et l'impact de l'action sur les objets conduit à une modification de l'activité pour adapter l'action dans une régulation rétroactive. Cette double régulation a lieu sur le temps court de l'action.

Ce mécanisme conduit à la restructuration des connaissances. Piaget précise ce mécanisme en termes d'une dialectique entre assimilation (de la nouvelle situation)/ accommodation (de la structure de connaissances) grâce à un processus de déséquilibration (les structures antérieures anticipent un résultat qui est infirmé dans la réalisation de l'action) / rééquilibration (où les structures sont modifiées).

Une autre boucle de régulation développementale a lieu sur le temps long. C'est celle qui concerne l'impact de l'activité et de ses effets sur la structure des connaissances du sujet. Elle concerne aussi les objets et les buts visés puisque les connaissances créent de nouveaux questionnements sur les objets donc de nouveaux buts d'action avec de nouveaux outils.

La théorie de Piaget ne dit rien sur les processus d'intervention par l'enseignant sur le développement. Elle offre un cadre théorique pour étudier les acquisitions mathématiques (ou plus largement scientifiques) des élèves (les relations savoir- élève) des élèves en mathématiques (les relations savoir- élève) mais pas pour analyser les interventions de l'enseignant. De ce point de vue, la théorie de Vygotski est une approche complémentaire à celle de Piaget.

I.2 Le socio constructivisme de Vygotski

Vygotski prend en compte l'articulation entre « concepts spontanés » (dans le cadre de la vie quotidienne) et « concepts scientifiques » (essentiellement dans le cadre scolaire) qui font l'objet d'une médiation didactique spécifique à l'école.
Les concepts quotidiens peuvent être isolés, vivre « en acte » mais ne sont pas nécessairement conscients ou verbalisables. En revanche les concepts scientifiques non spontanés, qui se forment dans le processus de l'apprentissage scolaire, sont toujours liés par des relations mutuelles. Ils sont conscients, avec des mots pour le dire. Donnons un exemple. Le concept de « frère » est un concept quotidien alors que celui de fonction est un concept scientifique. Le premier est « gorgé de contenu empirique » comme le dit Vygotski, le second est lié à la notion de variable, vit à travers des représentations symboliques (langagières, algébriques ou graphiques).
Ces deux types de concepts se développent en interaction dans un processus de « double germination ». D'une part la germination des concepts quotidiens se fait du bas vers le haut à partir de l'interaction avec les objets du monde de l'action. On va vers une réorganisation des concepts quotidiens. D'autre part la germination des concepts scientifiques se fait du haut vers le bas avec des mots pour dire le général, en se concrétisant. Les concepts scientifiques doivent arriver à faire sens.
Ce processus d'interaction suppose des propriétés quant à la dynamique du développement. La zone proximale de développement en est le lieu.
La zone proximale de développement est située entre le niveau présent de développement, attesté

par ce que l'enfant est capable de résoudre seul, et ce que l'enfant peut résoudre avec l'aide d'autrui. Cette zone est significative à la fois pour la dynamique du développement et pour celle de Tout se passe comme si lorsque l'on est « au-delà »de la ZPD, les aides ne produisent pas un apprentissage mais une copie ou une récitation, mais si on est « en deçà », l'élève n'a rien à apprendre.
En agissant dans cette zone, l'aide de l'enseignant (en particulier) va permettre aux concepts en développement de se transformer en concepts scientifiques.
Dans la ZPD, le développement permet l'apprentissage et l'apprentissage agit sur le développement.
Vygotski a aussi insisté sur l'importance du langage intérieur dans le processus extrêmement complexe de la mise en mot de la pensée, médiateur entre la pensée et les mots du langage extériorisé. « *Le langage intérieur est un processus qui va de l'extérieur vers l'intérieur, un processus de volatilisation du langage dans la pensée* » dit-il dans Pensée et Langage. On peut ainsi mieux appréhender le caractère socio- constructiviste de la conceptualisation qui peut prendre appui ~~sur les apports extérieurs (par exemple ce que disent les autres élèves ou le professeur).~~

Des éléments spécifiques à la didactique des mathématiques

I.3 La théorie des champs conceptuels de Vergnaud

Cette théorie est une spécification des théories précédentes aux mathématiques et à la situation scolaire. En effet elle a permis de prendre en compte le contenu des connaissances dans le développement cognitif de l'enfant et d'analyser conjointement les effets de l'apprentissage et ceux du développement cognitif chez l'enfant et l'adolescent.
Vergnaud avance que c'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Il considère l'action du sujet en situation et l'organisation de sa conduite.
La notion de champ conceptuel pose l'existence de systèmes de concepts organisés. Par exemple, quand Vergnaud parle du champ conceptuel des structures additives dans le calcul élémentaire, il entend un ensemble de concepts numériques : nombre, relation d'ordre, addition, soustraction (avec leurs propriétés) et des classes de problèmes impliquant ces opérations.
La notion de schème permet de rendre compte de la dimension adaptative de la connaissance. Un schème est une organisation invariante de l'action pour une classe de situations données. C'est-à-dire que l'organisation de l'action est invariante mais l'action peut s'adapter à différentes situations de même type. Vergnaud prend l'exemple du dénombrement d'une petite collection par un enfant de 5. Que cette collection soit des bonbons, des assiettes ou des personnes assises, l'organisation en est invariante : coordination des mouvements des yeux, gestes des doigts, énoncé de la suite numérique et cardinalisation de l'ensemble dénombré par répétition du dernier mot-nombre ou soulignement tonique.

I.4 Un cadre unificateur : le cadre de la théorie de l'activité

Cette théorie a été développée par des chercheurs qui se sont intéressés à la psychologie du travail et à la psychologie du développement des apprentissages, suite à Vygotski et al. Elle vise à analyser des processus en jeu chez un sujet agissant et les processus par lesquels son activité évolue et par lesquels il se développe.
On s'intéresse donc à un sujet individualisé avec des intentions, des compétences, inséré socialement, en situation de travail étendue par la suite à la situation scolaire.
La distinction entre tâche et activité est donc centrale dans cette théorie. La tâche est ce qui est à faire, l'activité est ce que développe le sujet lors de la réalisation de la tâche (ce qu'il fait ou ne fait pas, pense, gère son temps, son stress...)
Le sujet répond à des tâches qui lui sont proposées, ce sont les tâches prescrites. L'activité du sujet

ne répond pas directement à ces tâches prescrites. Le sujet redéfinit la tâche prescrite, s'en fait une représentation : c'est la tâche effective à laquelle va répondre le sujet.
L'activité est du côté du sujet. Elle est finalisée par la tâche à réaliser mais peut intégrer d'autres déterminants par exemple lutter contre l'ennui de la répétition.

I.5 Différents cadres théoriques en didactique des mathématiques.

a) La double approche didactique et ergonomique dans le cadre de la théorie de l'activité

A la suite de G. Vergnaud, ce courant de recherches qui s'inspire aussi de la Théorie de l'activité a pour ambition de donner toute leur place non seulement aux contenus et à la situation scolaire mais encore aux sujets singuliers, élèves et enseignants.
Pour étudier les relations entre l'enseignement d'un contenu mathématique donné et son apprentissage par les élèves les chercheurs essayent de reconstituer les activités mathématiques des élèves, considérées comme un intermédiaire de qualité, légitime pour comprendre les apprentissages. Du même coup ils étudient les pratiques et les activités des enseignants, car ce sont elles qui sont à l'origine et nous donnent accès aux activités des élèves, en tout cas en classe.
Par ailleurs, l'étude des pratiques des enseignants permet d'introduire les contraintes du métier d'enseignant qui pèsent sur leurs choix y compris en classe.
Dans cette démarche, les activités désignent quelque chose d'inaccessible : ce qui est pensé, dit, pas dit, fait, pas fait par l'acteur.
Du côté des élèves, on peut s'en approcher en étudiant leurs activités possibles, celles qu'il est bien possible qu'un certain nombre d'entre eux aient faites, que ce soit « a maxima » pour ceux qui s'y engagent d'emblée ou « a minima » pour les plus « lents » à entrer dans le jeu.
Pour étudier ces activités possibles des élèves les chercheurs croisent les tâches réellement proposées (les énoncés) et les déroulements organisés. En effet, ce sont les mises en fonctionnement des connaissances mathématiques induites par les activités des élèves qui contribuent aux apprentissages. Pour mieux les caractériser, ils cherchent, par exemple, si les énoncés proposés amènent les élèves à utiliser des connaissances non indiquées dans le contexte du travail, ou à introduire des intermédiaires et des étapes, ou encore à mélanger différents domaines. Les élèves peuvent travailler dans différents cadres, selon l'expression introduite par Régine Douady, pour qualifier les différents domaines de travail comme le graphique, l'algébrique, le ponctuel ou dans différents registres, selon l'expression introduite par Raymond Duval, pour qualifier différents modes d'écriture d'une même notion : autant de « variables » aux mains des enseignants, autant de choix d'adaptations des connaissances qui n'amènent pas les mêmes apprentissages et sont complémentaires... Mais ces études sont complétées par l'analyse de tout ce qui peut se passer en classe, en repérant tout spécialement ce qui peut avoir une influence sur le travail effectif des élèves, modifier les mises en fonctionnement de leurs connaissances. Par exemple la nature et la forme du travail en classe, la durée des différentes phases de travail, les aides de l'enseignant, les échanges...
Pour les enseignants, on tient compte du contexte institutionnel (programmes, horaires), social (type d'établissements, collègues), personnel (représentation du métier, des mathématiques) pour mieux dégager et interpréter les tâches et déroulements proposés aux élèves.

b) La théorie des situations didactiques ou TSD

Elle a été élaborée par Guy Brousseau qui a travaillé essentiellement à l'école élémentaire. Son travail a évolué et il est impossible de le présenter dans sa globalité aussi brièvement que je vais le faire.
Au coeur de la théorie des situations, la notion de **situation fondamentale** qui modélise un procédé didactique "forçant" les élèves à utiliser les mathématiques à acquérir. Le problème correspondant est élaboré à partir du sens « profond » de la notion. Les élèves pour le résoudre n'ont pas d'autre recours que celui d'utiliser la connaissance visée (s'ils jouent le jeu) de plus c'est au sein du

problème qu'ils trouvent des éléments leur permettant de valider seuls leur démarche (cf puzzle de Brousseau 2005).
Du point de vue des déroulements, Brousseau a dégagé l'intérêt d'une succession de phases[3] : action, formulation, validation encadrées par une phase de dévolution de la tâche aux élèves et une phase d'institutionnalisation.
Pour analyser se qui se passe en classe, il a introduit la notion de contrat didactique qui modélise les attentes (implicites peut-être) du professeur vis à vis de ses élèves et réciproquement et qui peut expliquer certaines réponses d'élèves pas toujours associées aux activités attendues (cf l'age du capitaine).
Dans des recherches ultérieures, il a ensuite introduit le milieu pour caractériser les ressources présentes pendant le travail des élèves.
D'autres chercheurs notamment Margolinas se sont inspirés de la TSD pour étudier les enseignants. Pour elle le travail de l'enseignant est une mise en jeu de connaissances de différents niveaux y compris sur les élèves et sur les mathématiques. Etudier ce travail c'est donc mettre en évidence ces différents niveaux et leurs liens pour ensuite réfléchir sur les moyens de faire acquérir les connaissances.

c) La théorie anthropologique du didactique ou TAD

Cette approche, tout aussi impossible à résumer, a été introduite par Chevallard (1992, 1999). Elle spécifie au didactique des éléments empruntés à une étude anthropologique de l'homme dans le monde. Elle se caractérise en termes de praxéologies mathématiques : le modèle met à la disposition des chercheurs des moyens systématiques pour établir une description exhaustive de l'offre mathématique d'une institution concernant une ou plusieurs notions. Les unités d'analyses sont les types de tâches associées à une ou des manières de les résoudre (techniques) à des possibilités de les justifier (technologies) inclus dans une théorie.
Par exemple tracer la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné est un type de tâche. Les techniques pour la résoudre sont l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée (géométrie instrumentée G1) ou la construction d'une médiatrice au compas (géométrie déductive G2). La technologie associée utilise les propriétés de la médiatrice et l'unicité de la droite cherchée. Selon les niveaux scolaires les théories sont la géométrie plane G1 ou la géométrie euclidienne.
Du côté des déroulements, un découpage systématique est proposé, de la première rencontre à l'exposition des connaissances en passant par le travail de la technique et de la technologie indépendamment des classes, des enseignants et des notions.
Du côté des enseignants, c'est l'exhaustivité des tâches à proposer assorties des techniques et technologies qui les accompagnent qui organisent un certain nombre d'analyses de manière générique.
Dans ces deux modèles, il n'y a pas de place pour les sujets singuliers, ni pour les différences, que ce soit entre contenus, entre les classes ...

Des éléments spécifiques à la didactique des sciences physiques

[3] Dévolution : le maître confie la résolution du problème aux élèves.
Action : les élèves prennent conscience de l'insuffisance de leurs connaissances. Ils mettent en place des procédures de résolution en utilisant leurs connaissances anciennes
Formulation : les élèves explicitent par écrit ou oralement les procédures utilisée et les solutions trouvées.
Validation : les différentes procédures sont exposées à la classe entière. La confrontation des différentes procédures doit permettre de faire émerger la procédure attendue.
Institutionnalisation : le maître identifie et met en place les nouveaux savoirs.

I.6 Des éléments spécifiques à la didactique de la physique

Les recherches en didactiques des sciences se développent selon trois grandes orientations : la mise à jour et l'analyse des raisonnements dits « de sens commun »[4], la conception et l'analyse de séquences d'enseignement, l'analyse des pratiques des enseignants. Plus récemment, certaines recherches s'intéressent aux pratiques de formation, mais nous n'en parlerons pas ici. Bien entendu, ces thèmes sont loin d'être exclusifs les uns des autres. Ils s'interpénètrent dans la plupart des travaux actuels.

a) L'analyse des raisonnements de sens commun

Les théoriciens de l'apprentissage (didacticiens, cognitivistes, pédagogues) reconnaissent de façon unanime qu'un élève construit ses connaissances à partir de celles dont il dispose déjà, dans une constante dialectique très largement étudiée par les approches constructivistes. La prise en compte des représentations de l'élève est un acte fondamental des recherches en didactique des sciences. En effet, même lorsqu'elles sont en désaccord profond avec les connaissances scientifiques, les représentations se révèlent d'une efficacité redoutable dans la résolution d'un certain nombre de problèmes. Et il est intéressant de noter qu'elles ne diffèrent pas tellement d'un individu à l'autre, si bien qu'il existe de grandes tendances de raisonnement, communes à l'ensemble d'une population sur un sujet donné[5].

Les représentations et les modes de raisonnements communs se constituent en une structure de pensée opératoire souvent cohérente (ou au moins partiellement cohérente), sans qu'aucune négociation avec une connaissance nouvelle ne semble nécessaire. Ainsi, les raisonnements de sens commun constituent un « ensemble structuré » qui permet la résolution cohérente d'un certain nombre de problèmes. Cette autosuffisance se révèle être une des difficultés majeures de l'enseignement. De nombreuses recherches ont montré que ces représentations résistent à l'enseignement au point qu'on les retrouve souvent inchangées au terme de la scolarité obligatoire, à l'entrée à l'université, et parfois au-delà, alors même qu'elles coexistent avec des connaissances scientifiques acceptées. Par conséquent, il est important, avant tout enseignement d'un sujet particulier, de connaître les idées des élèves sur ce sujet afin d'élaborer une stratégie didactique visant la déstabilisation, voire la réorganisation des structures cognitives en jeu afin de les rendre rationnellement opérationnelles.

Pour mettre à jour ces tendances de raisonnement (que l'on appelle aussi des « conceptions initiales » ou « représentations »), deux méthodes sont utilisées. L'analyse de questionnaires « papier-crayon » permet d'obtenir des résultats généralisables, c'est-à-dire des tendances de raisonnements partagées par le plus grand nombre. Les échantillons sont suffisamment importants

---

[4] Ce qui est appelé « sens commun » semble ne faire l'objet d'aucune définition consensuelle. Sa signification varie selon les époques et selon les différents courants d'idées. Aussi, nous pensons opportun d'en proposer une approche personnelle dans le champ restreint de la didactique. Notre définition s'inspirera des propos du sociologue Bernard Charlot, pour qui le sens commun est un ensemble des perceptions et de significations du monde partagé par plusieurs hommes (voir Charlot B. *Du rapport au savoir,* Anthropos, 1997), et surtout des idées développées par Laurence Viennot dans son ouvrage *Raisonner en physique, la part du sens commun.* Ainsi, pour nous, le sens commun est constitué d'un ensemble de représentations du monde d'origine extra-scolaire le plus souvent (mais pas toujours), partagées par le plus grand nombre, capables de générer des explications opérationnelles, mais non conformes à l'explication scientifique.

[5] Dans son ouvrage *Raisonner en physique, la part du sens commun,* Laurence Viennot propose une revue des grandes tendances de raisonnements mises en lumière par différents travaux de recherche didactique dans des domaines tels que la mécanique, l'électrocinétique, l'électrostatique, l'optique, etc. Viennot L. *Raisonner en physique, la part du sens commun,* De Boeck, 1996. En chimie, on pourra se reporter aux travaux de Martine Méheut. A noter, le *Bulletin de l'union des professeurs de physique et de chimie* disponible dans la plupart des établissements, consacre en moyenne un numéro tous les quatre ans aux résultats de la recherche en didactique.

(plus de 100 élèves ayant des caractéristiques proches) pour pouvoir faire l'objet de traitements statistiques. Pour une analyse plus fine de ces raisonnements, certains chercheurs privilégient (souvent en complément des questionnaires) des entretiens individuels d'élèves ou d'étudiants. On découvre ainsi que les électrons qui se déplacent dans un circuit « s'épuisent » au passage d'un dipôle, qu'une lentille dont on cache une partie va donner sur un écran une image « écornée », que la lumière est « visible » de profil ou que l'acide chlorhydrique « mange » l'aluminium... Autant d'idées présentes chez nos élèves et qui vont, de fait, fortement contraindre l'enseignement et l'apprentissage lorsqu'il s'agira d'aborder l'enseignement de l'électrocinétique, celui d'optique ou celui des réactions chimiques, par exemple.

Ce que l'on constate, c'est que même après enseignement, de nombreuses idées demeurent. Ainsi, près de 50% des étudiants de première année universitaire scientifique (titulaires d'un bac S) continuent de prévoir qu'une pierre lâchée du haut du mât d'un navire animé d'un mouvement rectiligne uniforme tombera « derrière » le mât... Le raisonnement sous-jacent n'a alors pas beaucoup évolué depuis le collège. Est-ce à dire que l'enseignement de la mécanique au lycée a échoué ? Certainement pas. Tout au plus pouvons-nous affirmer qu'il n'a peut-être pas suffisamment pris en compte l'ampleur de la difficulté.

b) L'analyse d'impact de séquences d'enseignement-apprentissage

Ces conceptions étant connues, il nous est possible d'élaborer des séquences d'enseignement-apprentissage didactiquement orientées. Leur objectif est de permettre aux élèves de palier les difficultés engendrées par ces conceptions pour le moins tenaces. Le chercheur se dote d'outils divers qui peuvent aller des expériences contre-intuitives ou surprenantes, à l'histoire des sciences (comme nous le verrons plus avant), en passant par les TICE (pour les modélisations du comportement particulaire de la matière, par exemple) ou les documents vulgarisateurs (et la liste n'est bien évidemment pas exhaustive). Afin d'en étudier l'impact sur l'apprentissage des élèves, plusieurs méthodes sont envisageables. La méthode « pré-test / post-test » permet de comparer les effets de la séquence didactique au regard d'une séquence classique : une même question est posée aux élèves avant et après enseignement afin de juger de l'évolution conceptuelle des élèves dans les deux cas. Une méthode plus fine, fondée sur la théorie de « l'ingénierie didactique » (empruntée aux didacticiens des mathématiques) permet de suivre de manière plus individuelle le cheminement cognitif des élèves à chaque étape-clé définie par le chercheur. Dans cette méthode, le chercheur formule un certain nombre d'hypothèses relatives aux effets supposés de la stratégie didactique mise en place, hypothèses qui sont ensuite mises à l'épreuve des faits. Cette mise à l'épreuve est souvent réalisée sous forme d'entretiens enregistrés avec un échantillon restreint d'élèves, pris individuellement ou en binôme (de façon à favoriser les échanges dans une perspective socio-constructiviste). L'analyse de cette première phase permet d'identifier les écarts avec ce qui était initialement prévu, d'en comprendre les raisons, d'améliorer la séquence afin qu'elle soit ensuite réalisée en situation réelle de classe, puis, analysée à nouveau.

c) L'analyse des pratiques d'enseignement

De plus en plus de recherches s'attachent à observer la façon dont les enseignants s'approprient les résultats de la recherche en didactique. Comment réagissent-ils après avoir été mis en alerte sur un certain nombre de difficultés associées aux raisonnements spontanés ? Comment s'approprient-ils les séquences mises à leur disposition ? Toutes ces questions jalonnent les travaux de ces dernières années. Une orientation toute aussi récente vise à caractériser la façon dont les enseignants s'approprient les programmes, en particulier, lors de changements saillants (introduction de la démarche d'investigation dans les programmes de collège de 2005, incitation explicite à l'utilisation de l'histoire des sciences, nouvelle façon d'appréhender la lumière dans les derniers programmes de première S, etc.). Les cadres théoriques dans lesquels s'inscrivent les recherches relatives à ces questions sont très largement inspirés de celles du champ de l'ergonomie du travail.

II. Un exemple de recherche en didactique des mathématiques – permettant une intervention en PLC2

Nous utilisons, pour présenter notre exemple, le travail de mémoire de master de Didactique des mathématiques d'Anne Dumail, soutenu à Paris 7 en 2007, intitulé "la racine carrée en troisième – Des enseignements aux apprentissages". Dans ce travail, elle compare les tâches proposées par un enseignant en classe et les résultats des élèves à diverses évaluations : interrogation écrite, contrôle, brevet blanc et les met en relation avec le travail proposé par l'enseignant pendant l'étude en classe de la notion de racine carrée.

Nous allons présenter simultanément l'exemple et une séance de formation en PLC2 sur cet exemple. La séance est intitulée « A propos de l'enseignement de la racine carrée en troisième au collège ». Nous dégageons plusieurs types d'interventions – des informations et des moments de travail autonomes.

II.1 Un travail de didacticien (une information préalable)

Un cadre théorique en amont

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'activité et reprend toutes les hypothèses sur le développement et l'apprentissage de Piaget, Vygotski et Vergnaud.

Plusieurs composantes de la recherche sont à imbriquer, en voici un bref survol.

Un travail épistémologique préliminaire

L'analyse épistémologique reprend les conclusions de Assude et celles de Bronner qui mettent en évidence le fait que les nombres écrits avec des radicaux n'ont pas de statut fixe. Les règles de calcul, les opérations leur sont appliquées alors même que rien ne permet de justifier leur existence.

D'où des premières questions :

L'enseignement de la racine carrée est donc complexe puisqu'on ne peut pas ni justifier son existence ni ce qu'on peut faire avec. Dès lors, quelle rigueur attendre des élèves pour une notion introduite avec si peu de rigueur ? Même si ce défaut de rigueur ne gêne pas vraiment les élèves, l'enseignant doit néanmoins être attentif à la mise en place de l'utilisation attendue de ces nombres.

L'enseignement de la notion « racine carrée aujourd'hui »

Au collège, le symbole $\sqrt{\ }$ apparaît en quatrième dans le chapitre traitant de la propriété de Pythagore. Il s'agit d'utiliser cette touche de la calculatrice pour déterminer une longueur connaissant son carré.

Ce n'est qu'en classe de troisième que les programmes consacrent au sein de la partie numérique un chapitre aux « calculs élémentaires avec radicaux » (racine carrée d'un nombre positif, produit et quotient de deux radicaux). Il en est fait mention dans les paragraphes « équations et inéquations du premier degré » et « écritures littérales et identités remarquable ». Dans la partie « travaux géométriques », les calculs avec radicaux sont mentionnés pour l'application des théorèmes de Pythagore et Thalès et de leurs réciproques. Enfin dans la partie « organisation et gestion de données », les coefficients des fonctions linéaires et affines peuvent s'écrire avec des radicaux.

La mise en place du questionnement initial

Dans ce travail, pour étudier les liens entre enseignement et apprentissage, A. Dumail analyse des erreurs des élèves sur la notion de racine carrée sur une longue durée. Soulignons que ces erreurs ne sont pas étudiées pour elle mêmes mais en relation avec l'enseignement proposé aux élèves.

Une méthodologie systématique[6] adaptée

Très globalement, ce sont les analyses de tâches a priori et les analyses de déroulements des séances qui permettent de préciser les liens entre enseignement et apprentissages et de travailler sur les erreurs.

Pour l'analyse des tâches, il s'agit de dégager à partir des énoncés proposés aux élèves:

- les connaissances anciennes et/ou nouvelles en jeu pour effectuer les tâches proposées
- les connaissances indiquées ou non (directement)
- les différents types d'adaptations dans la mise en fonctionnement des connaissances sur la racine carrée (reconnaître les modalités d'application d'une propriété, d'un théorème, introduire des intermédiaires, des étapes, utiliser les questions précédentes dans un problème...)

En effet ce sont les « ingrédients » qui ont été choisis pour caractériser les activités attendues des élèves, en relation avec les apprentissages attendus. Pour prendre un exemple caricatural, si les élèves n'ont à résoudre que des exercices avec des applications immédiates des propriétés, ils auront sans doute des difficultés, pensons-nous, à apprendre la notion et à aborder des exercices plus complexes.

Pour l'analyse des déroulements, la forme de travail, les durées des différentes phases de la séance, les interactions, sont pris en compte systématiquement.

Ce sont les ingrédients choisis pour repérer les activités possibles des élèves en comparant les tâches prévues et attendues et ce qui se passe.

Ainsi les erreurs sur des tâches caractérisées vont être mises en relation avec ce qui a été travaillé en classe.

Une suite possible ?

Ce travail pourrait aider à l'élaboration d'une ingénierie didactique. Il en préciserait des objectifs et des conditions nécessaires, il resterait à le tester.

Portée et limites de ce travail

Même si toutes les séances portant sur la notion de racine carrée ont été étudiées, ce travail ne porte que sur une notion avec une classe et un enseignant. Les résultats sont donc à relativiser.

II.2 La séance de formation en PLC2 : A propos de l'enseignement de la racine carrée en troisième au collège

Il s'agit de sensibiliser les stagiaires avec un nouveau champ scientifique en partant d'un exemple.
En s'inspirant directement du travail déjà cité, on développera sur le thème de l'enseignement de la racine carrée en troisième une réflexion à partir d'erreurs d'élèves à différentes évaluations dans une classe de troisième ; cela se prolongera par un exemple d'analyse de mise en relation de la pratique du professeur de la classe et de résultats des élèves.
La racine carrée est une notion difficile à appréhender pour les élèves. Les erreurs qu'ils commettent sont récurrentes et peuvent révéler des difficultés plus vastes.

a) Un premier axe de questionnement didactique : Quel objet mathématique présente-t-on aux élèves ? A quoi peut-il servir ? Manque-t-il des éléments ?

[6] *différente selon les travaux*

Pour nous aider à comprendre ce qu'est la racine carrée, comment et pourquoi l'utiliser nous avons recours à l'histoire de la notion pour en dégager la genèse et le développement et à l'histoire de son inscription dans les programmes scolaires.
Nous reprenons ici les résultats de T. Assude (1996). Elle a mis en évidence plusieurs périodes dans l'enseignement de la notion liées aux évolutions des savoirs et des techniques mathématique.
Elle a étudié ce que nous appelons la **transposition didactique** (cf Chevallard) c'est à dire la transformation qu'il y a entre le savoir savant et la savoir enseigné.
Elle a considéré en particulier le statut de cette notion (nombre, fonction, irrationnel, opération...), le calcul (extraction, approximation) et les opérations (algèbre des radicaux).
Elle a mis en évidence trois périodes :

- 1° période : jusqu'en 1970.

l'objet “racine carrée” fait partie du domaine arithmétique. C'est une opération utilisant un algorithme. Simplifier, rendre rationnel un dénominateur est utile (pas de calculatrice). La racinecarrée est plutôt un outil.

- 2° période : 1970- 1978

La racine carrée est la bijection réciproque sur $\mathbf{R}^+$ de la fonction carrée. $\sqrt{a}$ est un réel donc l'existence et l'unicité sont assurés par la définition.

- 3° période : après 1978

Les nombres réels disparaissent des programmes du collège mais sont supposés préconstruits au lycée. Les racines carrées n'ont plus de statut précis : ce sont des objets sur lesquels on fait des opérations alors même que les calculatrices ne nécessitent plus tous les calculs. La racine carrée n'est plus une opération, ce n'est pas une fonction non plus.
On appelle racine carrée du nombre positif a le nombre positif qui a pour carré a. Pourquoi existe-t-il toujours ? Pourquoi est-il unique ? Que représente le carré de ce nombre s'il n'est pas un nombre connu ? Comment prolonge-t-on es opérations sur de tels nombres ?
T. Assude avance que le passage du savoir savant au savoir enseigné s'est arrêté au cours du chemin. On peut alors se demander si ça gêne les élèves, comment passent les enseignements et quels choix, quelles alternatives on peut proposer.

b) Racine carrée et calculatrice

D'autres auteurs ont cherché à légitimer l'utilisation « naturelle » que les élèves font de leur calculatrice faisant le lien entre cette utilisation et la théorie. Ce type de travail s'inscrit dans une démarche générale de recherche d'adaptation de l'enseignement des mathématiques aux nouvelles technologies, voire aux nouveaux médias. Les auteurs y voient un enjeu majeur de survie de la discipline scolaire mathématique, et un travail spécifique de didacticien…
Ainsi Chevallard, 2004, a énoncé et démontré le résultat suivant, garantissant l'égalité de deux racines carrées dont la calculatrice affiche l'égalité des n premières décimales seulement :
Soit *a*, *b* et *c* trois entiers. $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales.
Si $a\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^n$ alors $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$.
En effet, $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales donc :
$0 \leq |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < 10^{-n}$.
Or $0 \leq a\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^n$
En multipliant membre à membre ces deux encadrements de réels positifs, on obtient :
$0 \leq |a\sqrt{b} - \sqrt{c}| \times (a\sqrt{b} + \sqrt{c}) < 10^{-n} \times 10^n$
ou encore $0 \leq \quad |a^2b - c| \quad < 10^0$
soit $0 \leq \quad |a^2b - c| \quad < 1.$

Mais a, b et c sont trois entiers donc seule possibilité $a^2b - c = 0$ et $a^2b = c$ et donc $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$ et les deux nombres $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ sont égaux.

c) La suite du questionnement : une étude d'un enseignement de la racine carrée en 3° et des apprentissages correspondant

Les documents utilisés sont extraits du mémoire d'Anne Dumail. Nous essayons de faire partager aux stagiaires certaines questions et certains résultats qu'elle met en évidence en commençant par leur faire étudier quelques unes des tâches proposées dans des évaluations et les résultats obtenus par les élèves.

On part de la fin : on étudie d'abord 3 contrôles proposés successivement aux élèves, en faisant dégager les tâches sur les racines carrées que rencontrent les élèves. Il se trouve qu'on a intérêt à repérer trois types de tâches qui sont présentées d'abord. Puis leur combinatoire est reconstituée sur chaque épreuve. On donne alors les résultats des élèves sur le premier type de tâches. On réfléchit (fait réfléchir) à ces résultats en relation avec les déroulements des séances, qui sont résumés. On termine par des conclusions didactiques.

Une interrogation écrite, un contrôle, le brevet blanc.

Un des intérêts de cette étude est de montrer l'importance du travail d'analyse a priori des tâches proposées aux élèves dans les énoncés même s'il n'est pas possible de le faire à chaque fois. Il aide l'enseignant à varier les activités possibles des élèves et l'aide à fixer ses objectifs pour évaluer. Ces analyses fines des tâches à résoudre permettent aussi de mieux comprendre les difficultés et les erreurs éventuelles des élèves.

Après l'analyse des tâches où il s'agit de mettre en évidence les adaptations de leurs connaissances demandées aux élèves, on comparera les différentes évaluations en repérant les similitudes et les différences.

c.1 les trois énoncés

Enoncé de l'interrogation écrite

Exercice 1

Retrouver l'intrus parmi les six nombres suivants

$A = 2\sqrt{20} =$ $D = 4\sqrt{5} =$

$B = \sqrt{80} =$ $E = \sqrt{\dfrac{90}{2}} =$

$C = 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} =$ $F = 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} =$

Exercice 2

Ecrire le plus simplement possible :

$G = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{32} =$ $H = \sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{245} + \sqrt{5}$

$I = \sqrt{50} + 3\sqrt{162} - 5\sqrt{8} =$ $J = 5\sqrt{12} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{75}$

Exercice 3

Dans chaque ligne cocher d'une croix la bonne réponse

Est égal à	0	3	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{3} + \sqrt{3}$					
$\sqrt{27}$					
$\sqrt{3} \times \sqrt{3}$					

$\dfrac{\sqrt{75}}{5}$					
$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$					
$(\sqrt{3}+1)^2-4$					

Exercice 4

Prouver que A est un nombre entier, sachant que $A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$

A =

Exercice 5

Trouvez les nombres égaux à zéro parmi :

$K = \sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{5}$; $L = \sqrt{150} - \sqrt{100} - \sqrt{50}$; $M = \sqrt{48} - \sqrt{32} - \sqrt{18}$; $S = \sqrt{108} - (3\sqrt{192} - 2\sqrt{243})$

Enoncé du contrôle (exercices avec racines carrées)

Exercice 1

Donner les résultats des calculs suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ (b est un nombre entier)

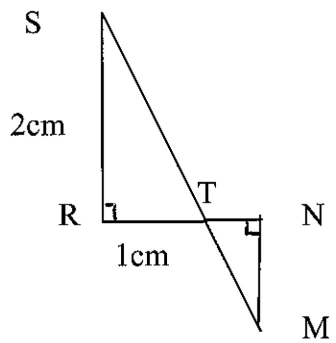
$A = \sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32} - \sqrt{98}$; $B = 3 - \sqrt{45} + 2\sqrt{20} - 4\sqrt{80}$; $C = 5\sqrt{300} - 2\sqrt{12} + \sqrt{363}$

Exercice 2

Soit A = 4x(x+3) – 10x +5

a. Développer et réduire A
b. Calculer A si x = -1 ; si $x = \sqrt{2}$ et si $x = \sqrt{3}$.

Exercice 3



Dans la figure ci-contre RST et TNM sont des triangles rectangles en R et N. S, T, M sont alignés.
SR = 2CM ; RT = 1cm et RT = TM.

1. Démontrer que les droites (RS) et (MN) sont parallèles
2. Calculer la <u>valeur exacte</u> de ST
3. Calculer la <u>valeur exacte</u> de MN
4. Calculer la mesure de l'angle RST à 0,1 degré près.

Exercice 4

Il ne fait pas intervenir de racine carrée.

Les racines carrées et le brevet blanc

Exercices numériques

Exercice 1 :

1. Soit le nombre $A = \sqrt{500} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{20}$

Montrer que A peut s'écrire sous la forma $a\sqrt{b}$ où a est un nombre entier.

2. Développer et réduire B = $(5 + \sqrt{5})^2$

Exercice 2 :

On considère l'expression F = $(2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 7)$

1. développer et réduire F
2. Factoriser F
3. Calculer F pour $x = -\frac{3}{2}$; $x = 7$; $x = \sqrt{3}$ (pour le dernier calcul, on donnera le résultat sous la forme $a - b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers).

Exercice 3

Soit (O, I, J) un repère orthonormal. Placer les points A(-2 ; 1), B(-1 ; 3) et C(5 ; 0).

1. démontrer que la valeur exacte de AB est $\sqrt{5}$.
2. On admet dans la suite que AC $= 5\sqrt{2}$ et BC$= 3\sqrt{5}$. démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

c.2 Analyses des trois différentes tâches[7] rencontrées dans ces trois textes et pendant les séances

Tâche 1 : écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible

Plusieurs étapes sont nécessaires avant d'appliquer les connaissances nouvelles sur les racines carrées.

- Etape 1 : décomposer le nombre sous le radical comme produit dont un des facteurs est le carré d'un entier le plus grand possible. L'élève a donc à choisir le « bon » b et également à utiliser des connaissances anciennes sur la décomposition d'un nombre sous forme de produit. L'adaptation est renforcée si le nombre est grand ou donné sous forme de produit de puissances par exemple.
- Etape 2 : écrire le nombre sous la $a\sqrt{b}$ souhaitée. Il s'agit alors de reconnaître les modalités d'application de la propriété sur la racine carrée d'un produit ($\sqrt{cd} = \sqrt{c}\ \sqrt{d}$) puis d'utiliser la définition de la racine carrée ($\sqrt{a^2} = a$) et éventuellement la commutativité de la multiplication étendue aux nouveaux nombres. Il s'agit aussi de prolonger à un nombre et une racine carrée la convention d'écriture vue en 5° qui supprime le signe × entre un nombre et une lettre.
- Etape 3 : Si une somme algébrique est donnée dans l'expression de départ, il s'agit de réitérer l'étape 1 à chaque terme. Le choix de la décomposition est alors supprimé puisqu'il faut factoriser $\sqrt{b}$. A partir de là il y a un mélange des cadres numériques et algébriques puisqu'on agit avec $\sqrt{b}$ comme avec une lettre. Il reste à faire des calculs numériques qui demandent l'utilisation de connaissances anciennes (sommes de relatifs).

Etape 1	Choix du bon « b » Décomposition en produit de facteurs (ancien)
Etape 2	$\sqrt{cd} = \sqrt{c}\ \sqrt{d}$ (nouveau) $\sqrt{a^2} = a$ (nouveau) extension des conventions d'écriture d'un produit à des nombres écrits avec √ (nouveau
Etape 3	Réitération de l'étape 1 à plusieurs termes Factorisation et réduction en mélangeant des

[7] On peut parler ici de type de tâche au sens de Chevallard.

	cadres numérique et algébrique (nouveau+ ancien)

Tâche 2 : calculer la valeur d'une expression littérale pour x = $+\sqrt{a}$ ou $-\sqrt{a}$.

Plusieurs déclinaisons de cette tâche sont possibles :

- L'expression donnée dans la consigne est développée (souvent polynôme du second degré). Il y a alors à la fois à utiliser les connaissances nouvelles sur la racine carrée et à mélanger les cadres numériques et algébriques pour effectuer et réduire l'expression trouvée ($\sqrt{a}$ se comporte comme x).
- Si l'expression de départ est factorisée le calcul s'effectue avec le mélange des cadres déjà évoqué ci-dessus.
- Si l'élève choisit une autre expression que celle donnée il devra d'abord transformer son expression ou utiliser les questions précédentes de l'exercice.

Expression développée donnée	Expression factorisée donnée	Autre
$\sqrt{a}^{\,2}$ = a (nouveau) mélange des cadres algébrique et numérique (nouveau+ ancien)	mélange des cadres algébrique et numérique (nouveau+ ancien)	Choix de l'expression Utilisation éventuelle des questions précédentes Utilisation des connaissances citées dans les deux premiers cas

Tâche 3 : calcul de la valeur exacte de la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle connaissant les valeurs exactes des longueurs des autres côtés.

- Etape 1 : reconnaître les modalités d'application du théorème de Pythagore (connaissance ancienne)
- Etape 2 : remplacer les longueurs connues par leurs valeurs numériques. On a alors un mélange des cadres géométrique et numérique.
- Etape 3 : passage du carré de la longueur cherchée à sa valeur. Il faut ici utiliser la définition de la racine carrée (la longueur est un nombre positif).
- Etape 4 : donner le résultat exact (faire le lien entre l'utilisation de la touche √ de la calculatrice comme en 4°).

Etape 1	Reconnaissance des modalités d'application du théorème de Pythagore (ancien)
Etape 2	Remplacement des longueurs par leur valeur numériques (mélange des cadres géométrique et numérique)
Etape 3	Utilisation de la définition de la racine carrée d'un nombre (nouveau)
Etape 4	Selon les cas écrire un nombre avec ou sans le symbole $\sqrt{\ }$ (choix- nouveau)

Des tâches « outil » et/ou des tâches « objet » :

Certains exercices ont pour objet la résolution des différentes 1, 2 ou 3. Pour d'autres la résolution de certaines de ces tâches est un outil pour répondre à la question posée. Nous soulignons donc ces deux aspects.

La répartition des tâches dans les différentes évaluations

Interrogation écrite :
Tous les exercices se situent dans le cadre numérique.

- Ex 1 à 4 les signes = écrits par le professeur incitent à transformer les écritures limitant ainsi la difficulté de l'introduction d'étapes (A4). Le choix de la méthode (A6) par exemple élever les nombres au carré est ici limité.
- Si on regarde les exercices traités les élèves vont plutôt mettre les nombres sous la forme $a\sqrt{b}$ plutôt que sur $\sqrt{c}$; le choix est ainsi limité.
- Dans l'exercice 1 la consigne est inhabituelle.
- Dans l'exercice 1 aucune justification n'est demandée pour affirmer que $3\sqrt{5} \neq 4\sqrt{5}$.
- Dans l'exercice 5 aucune justification n'est demandée pour prouver que L≠0 ce qui est difficile à prouver pour un élève de 3°.

Le contrôle :
La tâche 1 fait l'objet de l'exercice 1.
La tâche 2 intervient dans la question 2 de l'exercice 2 du contrôle comme objet.
La tâche3 intervient dans la question 2 de l'exercice 3 du contrôle

Le brevet blanc :
Au brevet blanc, la tâche 1 est l'objet de la première question.
La tâche 2 intervient dans la question 4 de l'exercice 2 du brevet blanc.
La tâche 3 est présente au brevet blanc.

<u>c. 3 Les séances et les résultats des élèves concernant la tâche 1. Analyse et discussion.</u>

Nous n'évoquerons ici qu'une des tâches abordées dans le chapitre : "mettre sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible" décliné aussi sous la forme de "simplifier" ou encore de "écrire le plus simplement possible". (tâche 1).
Nous proposons aux stagiaires le tableau des résultats des élèves dans lequel ils ne regardent que les résultats concernant la tâche 1.
Nous pouvons préciser quelles sont les erreurs des élèves en mettant en prenant en compte le codage des erreurs.
Nous pouvons également suivre l'évolution de certains élèves.

Quelques précisions sur les déroulements relatifs à cette tâche.

Dans le cours, les deux premières étapes font l'objet d'un paragraphe intitulé « simplification d'une racine carrée ». L'enseignant présente une méthode de décomposition du radicande en produit de facteurs premiers (présentation en deux colonnes) pour faire apparaître et ensuite sortir les carrés parfaits. Aucune mention n'est faite de la propriété $\sqrt{cd} = \sqrt{c}\,\sqrt{d}$ ni de la conséquence de la définition : si a>0 ou a=0, $\sqrt{a^2}$ =a.
La tâche 1 est toujours objet des exercices traités en classe. Elle est presque toujours prescrite dans le cadre numérique : seuls 3 expressions sont littérales.

Sur les 31 expressions comportant des sommes algébriques de radicaux transformées en classe, 25 donnent un résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, 2 un résultat littéral qui s'écrit sans radical et 4 des résultats différents ($a+b\sqrt{c}$; $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$; $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}+e$)
Pendant les exercices, l'enseignant renvoie systématiquement à la technique vue dans le cours. A plusieurs reprises elle encourage la décomposition du radicande en produit de facteurs premiers, qui permet 'à coup sûr' d'arriver au résultat et déconseille de tenter d'autres décompositions. Elle n'encourage ni l'anticipation mentale des calculs ni les démarches de type essais/erreurs.

Les résultats

Les résultats des élèves aux différentes évaluations sont indiqués dans le tableau de la page suivante où les différentes erreurs sont codées par des nombres.

		Interrogation					contrôle							brevet blanc								
								Pour $x=-1$	*Pour* $x=\sqrt{2}$	*Pour* $x=-\sqrt{3}$	Dév. litt.			activités numériques					activités géométriques			problème
		Ex1	Ex2	Ex3	Ex4	Ex5	Ex1	Ex2.2				Ex3.2	Ex3.3	Ex1.1	Ex1.2	Ex2.1 Dév litt.	Ex2.4 *pour* $x=-\sqrt{3}$	Ex2.4 *pour* $x=7$	Ex2.2	Ex2.3	Ex2.4	q2
1	**Abri,** arrivée en cours d'année.	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	4	1	1	0	0	0	0	0	6
2	**Hadi, g.B**	4	1	4	2	6	1	0	0	0	0	3	2	1	4	1	4	1	0	0	0	1
3	**Thom, g.B**	2a	5	3b	0	6	1	4'	4'	4'	1	2	0	1	3	1	4	1	6	0	0	1
4	**Pier, g.A**	1	1'	4	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	**Roma, g.A**	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1'
6	**Anis, g.B**	3	5	6	0	0	1	4'	4'	4'	4	3	6	4	4	1	1'	4'	4	6	4	4et5
7	**Joha, gB**	4	0	4	3	6	1	4'	4'	4'	1	6	6	0	0	1	4'	4'	0	0	0	2
8	**Fato, g.B**	2a	3	6	0	6	6	1'''	1'''	1'''	4	0	0	6	5	6	4"	4"	0	0	0	4et5
9	**Merv, g.B**	3	4	6	3	0	4	4'	4'	4'	4	0	0	6	6	6	4"	4"	0	6	4	6
10	**Paul, g.A**	3	1	1	1	2	A	A	A	A	A	A	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1'
11	**Luçi, g.A**	1	1	1	1	1	2	4	1	1	1	1	1	1	3	1	4"	1"	1	1	1	1
12	**Cami, g.B**	1	1	3b	0	2	1	4'	4'	4'	1	0	0	1	1	6	0	0	0	0	0	0
13	**Vale, g.A**	2b	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1
14	**Rach, g.B**	3	1	3a	3	6	3	0	0	0	0	0	0	0	6	6	0	0	0	0	0	0
15	**Kevi, g.B**	3	1	1	3	6	1	1	1	1	1	3	0	1	1	1	1	1	0	0	0	4
16	**Zaki, g.A**	1	1	3a	0	2	1	1	1	4	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
17	**Tuan, g.A**	2b	1	3b	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	**Kari, g.B**	2a	3	3a	1	2	3et5	4'	4'	4'	4	0	0	0	0	6	0	0	2	0	0	4et5
19	**Clar, g.A**	2d	1	3a	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1
20	**Anto, g.A**	2b	1	1	3	1	1	4	1'	1'	4	1	2	1	1	1	1	1	5	1	0	1
21	**Pier, g.A**	2b	1	1	1	6	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	4	1	1	1	0	3
22	**Elie, g.A**	1	1	1	2	1	1	1'''	1'''	1'''	4	1	6	1	1	1	1	1	1	1	2	1
23	**Davi, g.A**	4	1	1	2	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1
24	**Fant, g.B**	2c	1	1	0	2	1	4'	0	0	1	2	2	1	5	1	1	1	4	4	0	0
25	**Mari, g.B**	2a	1	3a	2	2	1	4'	4'	4'	1	2	1	1	6	1	0	4	0	0	0	0
26	**Umut, g.B**	2d	1	4	1	6	1	4'	4'	4'	1	0	0	1	1	1	1	4	1	0	2	2
	Ihab, g.A	1	1	1	1	2	A	A	A	A	A	A	A	1	1	1	1"	1"	1	1	1	4

Légendes ci-après

Légende des codages :
Globalement :

0 : non abordé.

A : absent(e) lors de cette évaluation.

1 : réponse exacte, justifiée si nécessaire.

2 : réponse incomplète ou comportant des erreurs auxquelles nous ne nous intéressons pas dans notre analyse (rien n'est faux concernant les radicaux dans ce qui est écrit)

3, 4, 5 : erreurs répertoriées

6 : autre type d'erreurs.

Plus précisément (codes autres que A, 0 ou 1) :
Interrogation, exercice 1 :
2 : l'intrus attendu E est donné mais la justification est considérée incomplète donc l'élève n'obtient pas le maximum des points. Tout ce qui est écrit est juste. Voici les différentes possibilités :

2a : A=B=C=D=F=$4\sqrt{5}$, E non transformé.

2b : A=B=C=D=F=$4\sqrt{5}$, E transformé sous une autre forme que $3\sqrt{5}$.

2c : A=B=D=F=$4\sqrt{5}$, E et C transformés sous une autre forme.

2d : aucune transformation.

3 : l'intrus attendu E est donné mais les transformations comportent des erreurs.
4 : l'intrus donné est C.

Codages communs à l'exercice 2 de l'interrogation, à l'exercice 1 du contrôle et à l'exercice 1.1 des activités numériques du brevet blanc, dans lesquels on étudie la tâche 1 (fond jaune) :
1' : une erreur isolée mais système compris.
2: calculs avec les radicaux justes mais erreur(s) de signe ou de calcul dans la factorisation finale.
3 : erreur due au problème « des coefficients devant » (par exemple $a\sqrt{m \times n^2}=a+n\sqrt{m}$ à la place de a x $n\sqrt{m}$). Code possible dans l'interrogation uniquement pour le I et le J.

4 : bonne décomposition sous le radical mais erreur(s) « pour sortir le carré » (souvent $\sqrt{a^2b}=a^2\sqrt{b}$ au lieu de $a\sqrt{b}$).
5 : pas de b commun trouvé (non valable pour le brevet blanc ou le H de l'interrogation, dans lesquels le b est donné).

6 : autres erreurs.

Interrogation, exercice 3 :
3 : tout est juste sauf d) dont **3a** : 0 trouvé en d) et **3b** : 3 trouvé en d).
4 : erreur en f (0 trouvé)
6 : 3 erreurs ou plus
Interrogation, exercice 4 :
2 : essais justes non aboutis
3 : essais avec erreurs.
Interrogation, exercice 5 :
2 : tout ce qui est écrit est juste mais des transformations sont « non abouties ».

6 : il y a des erreurs dans les transformations proposées.
Codages communs à l'exercice 2.2 du contrôle et à l'exercice 2a des activités numériques du contrôle, dans lesquels on étudie la tâche 2 (fond rose pour $x=\sqrt{2}$ et $x=-\sqrt{3}$ et gris pour $x=-1$ et $x=7$) :
1 : juste à partir de l'expression développée.
1' : juste à partir de l'expression de la consigne.
1'' : juste à partir de l'expression développée factorisée.
1''' : juste à partir de l'expression développée fausse.
4 : faux à partir de l'expression développée.
4' : faux à partir de l'expression de la consigne.
4'' : faux à partir de l'expression factorisée.
Codages communs à l'exercice 3.2 du contrôle et au 2) du problème du brevet blanc, dans lesquels on étudie la tâche 3 (fond bleu):
1' : dans le problème, transforment le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$
2 : donnent une valeur approchée.
3 : donnent comme réponse le carré de la valeur exacte (du type $ST^2=4+1=5$ $ST^2=5^2=25$ $ST^2=\sqrt{25}=5$).
4 : longueurs dont on a besoin mesurées ou problème d'échelle.
5 : propriété de Pythagore appliquée mais erreur sur l'hypoténuse.
6 : autres erreurs.
Contrôle, exercice 3.3 :

2 : pensent à utiliser la propriété de Thalès mais ne parviennent pas à remplacer toutes les données connues par leur valeur (en particulier ST=$\sqrt{5}$).

4 : utilisent la propriété de Thalès mais échouent en résolvant l'équation associée.

6 : ne pensent pas à utiliser la propriété de Thalès mais utilisent celle de Thalès ou la trigonométrie.

Brevet blanc, activités numériques, exercice 1.2 :

3 : $(5 + \sqrt{5})^2 = 5^2 + \sqrt{5}^2 = 25 + 5 = 30$

4 : $(5 + \sqrt{5})^2 = 5^2 + 2x5x\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 25 + 10\sqrt{5} + 5 = 40\sqrt{5}$

5 : identité remarquable appliquée ou retour à la définition du carré mais erreur(s) autres que 4.

6 : autre(s) erreur(s) : pas d'identité remarquable appliquée ou de retour à la définition du carré.

Brevet blanc, activités géométriques, exercice 2.2 :

4 : formule de calcul de distance dans un repère orthonormé fausse.

5 : essaient d'utiliser la propriété de Pythagore avec des longueurs « intuitées » alors qu'on ne sait pas encore que le triangle est rectangle.

6 : bonne formule mais erreur(s) de calcul sans lien apparent avec les racines carrées.

Brevet blanc, activités géométriques, exercice 2.3 :

~~**4** : valeurs numériques mesurées pour appliquer la propriété de Pythagore.~~

6 : bonne formule mais erreur(s) de calcul sans lien apparent avec les racines carrées.

Brevet blanc, activités géométriques, exercice 2.4 :

2 : la réponse donnée est « la moitié de l'hypoténuse » mais cette longueur n'est pas calculée.

4 : la valeur donnée pour le rayon est fausse, certainement mesurée sur la figure.

Quelques commentaires des résultats

Quand la tâche 1 est objet :

- des élèves ont progressé entre l'interrogation et le contrôle mais ils réussissent moins bien au brevet blanc.
- Tout se passe comme si les répétitions étaient efficaces à court et moyen terme mais pas à long terme.
- On peut s'interroger sur le rôle de la mémoire, l'incidence des choix de l'enseignant (absence de justification), les conditions qui permettraient de faire passer des connaissances de fragiles à véritables.

Quand la tâche 1 est outil :

Il y a plus d'échec. Il y a davantage d'adaptations à faire.

La forme de l'expression de départ et celle du résultat semblent déterminantes.

L'effet de contrat est très grand : certains élèves n'osent pas utiliser une autre méthode que celle préconisée par l'enseignant.

Cependant les élèves qui ne choisissent pas la stratégie de l'enseignant (décomposition du radicande en produit de facteurs premiers) réussissent mieux que les autres. Ils écrivent pour l'ex 4 de l'interrogation $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ au lieu de $\sqrt{2 \times 2 \times 2} \times \sqrt{2} = 2\times(\sqrt{2})^2 = 2\times2=4$.

Notons aussi qu'entre l'interrogation et le contrôle certains élèves ont adopté la méthode précédente. Il se peut donc que la répétition de la même tâche avec les mêmes adaptations puisse devenir un handicap.)

Plus généralement les erreurs sont nombreuses quand le signe × est supprimé entre un nombre et un radical avec la confusion entre addition et multiplication. L'utilisation des racines carrées est donc révélatrice de difficultés dans le jeu permanent mais implicite entre cadre numérique et cadre algébrique.

III. Didactique des mathématiques et choix de l'enseignant : questionnements systématiques, ouverture de la palette des possibles et hypothèses

Les résultats obtenus dans les analyses de pratiques amène les didacticiens des mathématiques à formuler des hypothèses sur leur enseignement : les choix de contenus, les choix de gestion peuvent avoir une influence sur les apprentissages des élèves. Ces hypothèses doivent être adaptées à la classe, au contenu et à l'enseignant. Elles engendrent des questionnements systématiques et un certain nombre de choix systématiques permettant d'ouvrir la palette des choix possibles.

Après avoir présenté ces hypothèses en les déclinant en deux volets (choix des contenus et déroulements), nous donnons deux exemples de choix d'activités où certaines de ces hypothèses sont utilisées.

III.1 Des hypothèses liées aux choix sur les contenus

- *Pour l'introduction d'une notion :*

Selon le type de notion il peut exister des problèmes à faire travailler avant le cours favorisant la prise de sens (il n'en existe pas toujours). Dans ce cas, introduire le cours par la recherche d'un problème adéquat pourrait aider les élèves – ou peut-être seulement une partie des élèves, déjà dans une posture favorable aux apprentissages, le problème reste posé.

L'élaboration de telle ou telle introduction dépend ainsi d'un questionnement systématique sur la nature de la notion, en relation avec les programmes. Extension de notions déjà introduites, réponse à un problème ou trop généralisatrice pour être introduite dans la continuité, telles sont les questions à renseigner d'emblée sur la notion.

- *Pour travailler une notion :*

Varier les activités proposées aux élèves, les adaptations de leurs connaissances requises pour résoudre des problèmes et ne pas se limiter à des tâches simples et isolées peut permettre aux élèves d'explorer le champ des problèmes impliquant une notion (objet et outil) et d'intégrer la notion aux connaissances anciennes ou en cours d'acquisition.

Tout ce qui précède illustre cependant l'importance des déroulements et le fait qu'un choix de tâches fait a priori peut être très modifié en ce qui concerne les activités suite à ce qui se passe en classe. Le questionnement sur la variété adaptée à la classe considéré est ainsi précisé.

- *Le passage à l'écrit :*

Il semble indispensable à plusieurs titres : travail sur des représentations, travail de précision et de rigueur, importance des écritures en mathématiques.

Le travail des sociologues rend attentif à ces questions, pour les élèves en difficulté notamment. Mais le passage à la réalité de la classe n'a pas fini de nous questionner (quand, comment…).

- *L'exposition des connaissances par l'enseignant :*

Les moments d'exposition des connaissances même préparées par un travail des élèves sont indispensables à formaliser et à fixer ce que tous les élèves ont à savoir. En revanche s'il n'y a que ces moments là on peut supposer que certains élèves vont décrocher.

De plus ce peut être l'occasion de faire des commentaires (méta) sur ce qui a été travaillé, les méthodes, l'imbrication ancien/nouveau, les relations entre diverses parties du programme, voire d'esquisser des généralisations.

Comment répartir ces interventions un peu décontextualisées dans une séance ?

III.2 Des hypothèses sur les choix de gestion

La diversité des tâches proposées aux élèves peut favoriser l'apprentissage des élèves. Encore faut-il que ces tâches ne soient pas trop modifiées par l'enseignant au cours de la séance et transformées en tâches simples et isolées. Certaines gestions peuvent ainsi contribuer à installer un apprentissage.

- *Un temps de travail autonome effectif*

Cela suppose de laisser les élèves travailler seuls un temps suffisamment long, voire échanger entre eux. Comment optimiser le temps entre travail autonome (nécessairement long) et nécessaire avancée du temps didactique ? Quand arrêter le travail des élèves pour passer à la correction ?

Comment corriger en tenant compte du travail des élèves tout en insistant sur une ou plusieurs solutions correctes ?

- *Des habitudes :*

Un certain type de gestion de la classe ne se met pas en place d'emblée. Il faut imposer certains contrats.

- *Un travail en petits groupes pour certaines tâches :*

Il favorise les échanges entre élèves, le travail autonome et peut permettre la construction collective d'une connaissance. Là encore des diversités importantes doivent être prises en compte, tant du côté des élèves que de celui des enseignants, quelquefois réticents à cette forme de travail.

- *Des aides appropriées*

L'accompagnement de l'enseignant varie selon qu'il se situe avant, pendant, après la résolution des tâches par les élèves. Les aides proposées peuvent être plus ou moins générales, relatives à des choix de méthodes (générales) ou à l'utilisation de propriétés ou théorème précis. Elles peuvent consister en un découpage de la tâche à résoudre plus ou moins fin, sous forme de questions ou d'affirmations. Elles peuvent aussi ajouter quelque chose aux actions de l'élève, en en dégageant une certaine généralité par exemple et/ou en la mettant en relation avec autre chose.

L'efficacité de ces aides dépend bien évidemment des élèves auxquels elles s'adressent, de leurs difficultés éventuelles, de leur ZPD. Tout l'enjeu pour l'enseignant c'est de se placer au « bon » niveau et ce pour le maximum d'élèves de la classe. Tout le travail de prise en compte de la diversité des élèves prend son sens.

Cela suppose d'essayer de détecter des difficultés par delà ce qui est dit, y compris en termes de postures vis-à-vis de l'apprentissage, voire d'interpréter des réponses ou non-réponses d'élèves, y compris en terme de malentendus. Comment avoir le temps de le faire ?

Dans quelle mesure peut-on anticiper et préparer certaines aides ?

- *Un travail à la maison à la portée des élèves « faibles »*

Des travaux ont montré que c'est le travail en classe qui conditionne le travail à la maison et non l'inverse !

III.3 Deux exemples de choix d'activités : pour introduire une propriété des racines carrées puis pour introduire les triangles semblables et en faire travailler les propriétés à enseigner.

Pour illustrer notre propos nous analysons dans un premier temps différentes introductions de la propriété $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ et de la notion de triangles semblables.

Dans un second temps nous analysons différents exercices demandant différentes adaptations des connaissances sur la notion de triangles semblables.

a) Trois introductions de la propriété $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

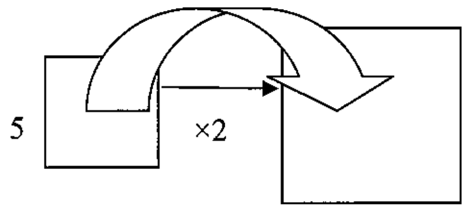
Activité 1

Cette activité intitulée « Vers de nouveaux nombres »a été conçue par Eric Roditi. Il l'a décrite et analysée dans le cahier vert IREM n°17 (décembre 1996), La racine carrée en troisième.

Il s'agit d'agrandir des carrés. On s'intéresse à la longueur des côtés, à leur aire et aux coefficients d'agrandissement des longueurs et des aires. Les nombres sont donnés aux élèves au fur et à mesure.

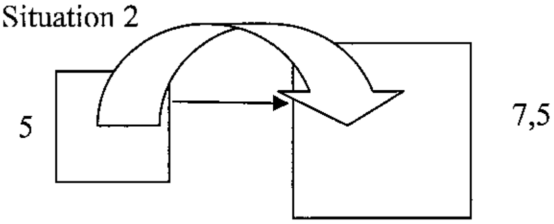
Les flèches horizontales correspondent à des agrandissements de longueurs, les flèches « courbes » à des agrandissements d'aires.

Situation 1



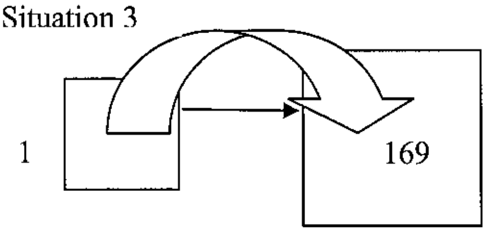
Egalités vérifiées :

Situation 2



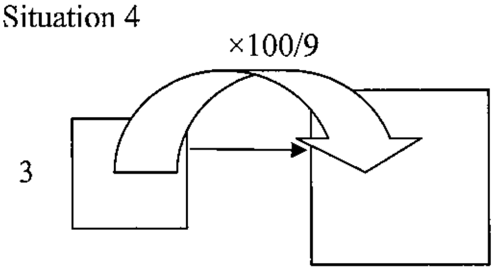
Egalités vérifiées :

Situation 3



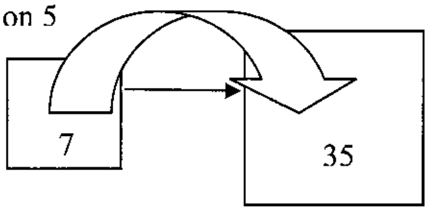
Egalités vérifiées :

Situation 4



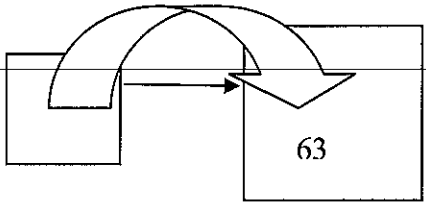
Egalités vérifiées :

Situation 5



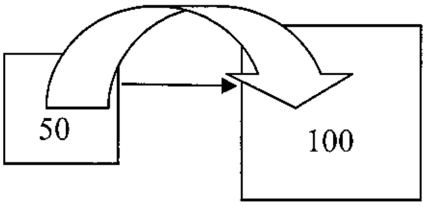
Egalités vérifiées :

Situation 6 $\times 9$



Egalités vérifiées :

Situation 7



Egalités vérifiées :

Les coefficients d'agrandissement des longueurs sont des entiers, des décimaux non entiers, des rationnels non décimaux ou d'autres nombres ($\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$) qu'on appelle irrationnels.

Comme $(\sqrt{5})^2 = 5$ le nombre $\sqrt{5}$ a pour carrée 5.
On a $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{35} = \sqrt{7 \times 5}$

On a $\sqrt{7} \times 3 = \sqrt{63}$ mais $3 = \sqrt{9}$ et $63 = 7 \times 9$ donc $\sqrt{7} \times \sqrt{9} = \sqrt{7 \times 9}$

D'après la situation 1, quand on double le côté, l'aire est multipliée par 4

D'après la situation 7, quand on double l'aire, son côté est multiplié par $\sqrt{2}$.

Cette activité permet donc de donner du sens à la définition de nouveaux nombres (coefficients d'agrandissement) et d'en conjecturer une propriété qui fonctionne comme outil.

Cette activité permet donc de donner du sens à la définition de nouveaux nombres (coefficients d'agrandissement) et d'en conjecturer une propriété qui fonctionne comme outil.

Activité 2

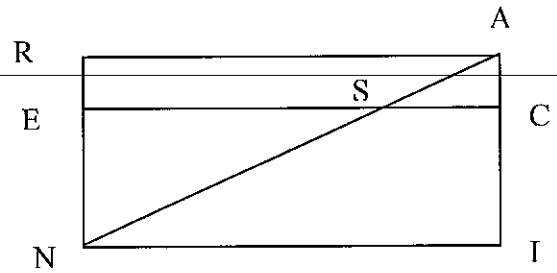
Cette activité est évoquée dans le cahier bleu IREM n° 8 (mai 2006), « Un dossier sur « racine carrée » à l'usage des formateurs.

Enoncé

RAIN est un rectangle tel que RA = 10cm et AI = 5cm. C est le point de [AI] tel que AC = 2cm.

La parallèle à (NI) passant par C coupe [RN] en E et [AN] en S.

Calculer la valeur exacte de SN.



Il s'agit de faire un choix entre plusieurs méthodes en organisant des étapes :

a) - Calcul de NA avec le théorème de Pythagore dans le triangle AIN (ancien). On trouve AN = $\sqrt{125}$

- Reconnaissance des modalités d'application du théorème de Thalès dans NRA et calculs avec de nouveau nombres. On trouve SN = $3\frac{\sqrt{125}}{5}$

b) – Première étape identique

- reconnaître les modalités d'application du théorème de Thalès dans le triangle ANI pour calculer AS. On trouve AS = $2\frac{\sqrt{125}}{5}$

- Calculer SN. On trouve SN = $\sqrt{125} - 2\frac{\sqrt{125}}{5}$.

c) - Calcul de SE en utilisant le théorème de Thalès dans RNA. On trouve SE = 6 (ancien)

- Calcul de NS en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle NES. On trouve NS = $\sqrt{45}$ (ancien+ nouveau)

L'enjeu de l'exercice est donc d'aboutir à plusieurs propositions différentes pour introduire la propriété et étendre les opérations connues aux nouveaux nombres. La nouvelle propriété est ainsi vue dans un fonctionnement outil, à savoir l'expression d'une longueur. Elle doit être dégagée comme objet.

Activité 3

C'est une des activités proposées dans le manuel « Cinq sur Cinq » Elle est intitulée « *A la découverte des formules* ». Dans l'édition réservée aux enseignants, l'objectif est précisé :

« *conjecturer* que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ».

Enoncé

Compléter le tableau suivant (on pourra utiliser la calculatrice)

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$a \times b$	$\sqrt{ab}$
9	16					
64	36					
25	144					

Ici aussi seule la conjecture de la propriété, à deviner sur quelques cas, est l'objet de l'activité (propriété objet).

b) Diversité des adaptations des connaissances dans des exercices sur la notion de triangles semblables

Nous empruntons ici des résultats obtenus par Julie Horocks dans sa thèse soutenue en 2006, intitulée « Les triangles semblables en classe de 2° : Des enseignements aux apprentissages- Etude de cas. »

Les exercices proposés dans les manuels

Nous présentons quelques uns des résultats des analyses des 356 exercices proposés par 12 manuels de seconde puis des exemples d'introduction de la notion. Cela permet d'avoir une vision globale de la diversité des adaptations proposées dans les manuels.

Les connaissances nouvelles à utiliser dans les exercices :

- D1 : deux triangles semblables ont leurs trois angles respectivement de même mesure ».

- D'1 ; pour que deux triangles soient semblables il suffit qu'ils aient 2 angles égaux.

- P1 : Si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont proportionnels

- P'1 : Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels alors ils sont semblables.

- P2 : Si ABC et MNP sont deux triangles semblables et si k est le rapport de similitude qui transforme ABC en MNP alors aire(MNP) = k^2 aire(ABC).

- P3 : Deux triangles ayant un angle de même mesure compris entre deux côtés proportionnels sont égaux.

Les manuels étudiés :

Belin, Bréal, Déclic, Delagrave, Dimathème, Fractale, Hyperbole, Indices, Point, Pyramide, Pythagore, Transmath.

Les configurations rencontrées :

La plus simple, celle de triangles non emboîtés est la plus fréquente, mais les configurations plus difficiles comme cercle et triangle emboîtés sont présentes dans tous les manuels.

Les propriétés travaillées :

- La propriété la plus travaillée dans les exercices pour tous les manuels est celle qui permet de démontrer que deux triangles sont semblables à l'aide de leurs angles (D1). Elle est souvent couplée à la recherche de rapports de longueurs ou de calcul de longueurs (P1).

- La combinaison des propriétés triangles semblables, rapport de longueurs, rapport des aires est travaillée dans tous les manuels sauf 2.

- Le travail des propriétés concernant la proportionnalité des côtés (P1) et les aires (P2) est absent de la majorité des ouvrages.

- Les propriétés permettant de démontrer la similitude de deux triangles à partir des côtés (P'1) ou d'un angle et de deux côtés (P3) sont présentes dans presque tous les manuels.

Le mélange ancien/ nouveau

Le travail ancien nouveau est présent dans tous les manuels. Il est plus important que celui sur le nouveau avec le cadre algébrique est peu présent. Il est absent de deux manuels.

Le mélange avec la géométrie pure vue au collège (angle inscrit, parallèles et sécantes, propriétés des figures) est présent dans la moitié des exercices. Il y a pourtant des exercices qui n'en contiennent pas mais utilisent ce que Horocks appelle de la géométrie calculatoire (Théorèmes de Thalès, de Pythagore, formules de trigonométrie, géométrie analytique).

Le niveau de mise en fonctionnement des connaissances

L'introduction d'intermédiaires en particulier l'utilisation d'un théorème ancien pour démontrer des égalités d'angles et appliquer la connaissance nouvelle est la mise en fonctionnement la plus fréquente.

L'introduction d'étapes est présente dans tous les manuels mais rare à trois exceptions près.

La nécessité de faire des choix n'est pas représentée dans tous les manuels.

Le tableau suivant récapitule ces conclusions.

Manuels	Configurations très présentes	Ancien	Nouveau	Mises en fonctionnement des connaissances
Belin	Triangles	≈50% sans ancien	Peu d'exercices <20 -Travail de P2	Pas de choix »
Bréal	Triangles ou emboîtés	Peu d'ancien Beaucoup de géométrie pure Peu de géométrie calculatoire	>45-Exercices variés Travail de P1 et P2	« Intermédiaires » majoritaires Pas de « choix »
Déclic	Triangles	Peu d'exercices sans ancien	Peu d'exercices <20- Travail des longueurs	Très variées
Delagrave	Triangles	Pas d'algèbre	Travail de P1 et P2	« reconnaissance des modalités »
Dimathème	Triangles	≈50% sans ancien	>45- Travail de P1 Travail	« Intermédiaires »

			des longueurs	majoritaires
Fractale	Emboîtés		Pas de travail avec des combinaisons complexes	Assez variées
Hyperbole	Triangles	≈50% sans ancien Peu de géométrie pure	>45-Exercices variés Travail de P1 et P2 Travail des longueurs	« Intermédiaires » majoritaires
Indices	Triangles	≈50% sans ancien	Peu d'exercices <20-Travail de P1	Pas de « choix »
Point	Cercle	Peu d'ancien Beaucoup de géom calculatoire	Pas de travail des longueurs	Pas de « choix »
Pyramide	Cercle			Assez variées
Pythagore	Triangles	Pas d'algèbre	Pas de travail des longueurs	Reconnaissance Pas de « choix »
Transmath	Triangles	Peu d'ancien Travail de l'algèbre	Travail des longueurs	Mises en fonctionnement variées

Ces manuels sont donc relativement différents en termes de variétés des exercices proposés sur les triangles semblables.

Deux exemples d'introduction

Les introductions suivantes sont proposées par deux enseignantes avant la définition (D1) de deux triangles semblables.

Introduction 1

Enoncé proposé aux élèves

Construire un triangle dont on connaît deux angles (60° et 45°) sans rapporteur.

Déroulement (17min30)

Pendant le 5 minutes de recherche individuelle, le professeur donne des conseils à la demande.

Un élève est interrogé pour la mise en commun de la méthode de construction.

Chaque élève et le professeur découpent leur triangle et mesurent un côté.

Le professeur demande à plusieurs élèves la mesure obtenue et « devine » la mesure des autres côtés. Le professeur interroge les élèves sur la propriété utilisée. Un élève donne la réponse : le triangle du professeur et ceux des élèves ont des côtés proportionnels.

Il s'agit alors de démontrer la propriété. Une élève suggère le théorème de Thalès. Le professeur propose que chaque élève « superpose » son triangle avec celui du voisin. Il fait remarquer le parallélisme puis demande de le démontrer.

Professeur et élèves cherchent la transformation qui va permettre de superposer le triangle du tableau et celui d'un élève (posé sur le tableau) puis terminent la démonstration concernant l'utilisation et l'application du théorème de Thalès.

Cette activité permet d'introduire une notion nouvelle, qui va permettre de donner un nom à tous les triangles dont les côtés sont proportionnels (caractère unificateur, généralisateur de la notion). Le professeur peut faire un lien avec l'ancien : les triangles « en configuration » de Thalès et réactiver des connaissances anciennes : angles et parallèles, angles et triangles particuliers, transformations du plan. Cette activité permet aussi de faire appel à la mémoire de la classe quand il s'agit de démontrer ou d'admettre la propriété P1.

Introduction 2

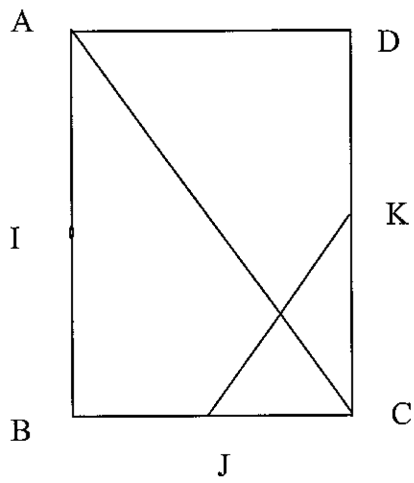
Cette activité est celle que propose Fractale qui l'intitule « Des côtés proportionnels »

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle, l'angle ACB mesure 60° et AD = 4cm. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des côtés

[AB], [BC] et [CD].

On veut comparer les triangles ABC et KCJ.

1) En utilisant les relations trigonométriques déterminer les longueurs des côtés du triangle ABC. Préciser les angles.
2) Par quelle transformation le triangle IBJ est-il l'image du triangle KCJ ?
3) Déterminer les longueurs du triangle IBJ. Précisez ses angles.
4) En déduire les longueurs et les angles du triangle KCJ.
5) Placer les points P et R respectivement sur [AD] et [AB] tels que AP = 2/3AD et AR = 2/3 AB. Quelle relation existe-t-il entre les côtés des triangles CJK et APR ? Comparer leurs angles.



L'objectif est indiqué dans l'édition de l'enseignant : mettre en évidence la notion de forme d'un triangle par les égalités d'angle et la proportionnalité des côtés.

Dans les différentes questions 1) 2) des choix sont à effectuer dans des domaines relativement balisés mais utilisant plusieurs adaptations des connaissances des élèves :

- choix de la « bonne » relation trigonométrique pour calculer une des longueurs, mélange des cadres numérique (avec ou sans radical selon la longueur à calculer), géométrique puis choix entre trigonométrie et théorème de Pythagore pour le calcul de la dernière longueur. Le nouveau (tangente, sinus, racine carrée, en cours d'acquisition) et l'ancien (cosinus, Pythagore) peuvent être sollicités.

- choix de la « bonne » transformation : la symétrie axiale

Pour la question 3), il s'agit de reconnaître les modalités d'application de 2 théorèmes des milieux.

La question 4) nécessite l'utilisation des propriétés de la symétrie axiale (connaissance ancienne).

Dans la question 5) il s'agit d'organiser des étapes (qui peuvent être analogues à celles proposées dans la première partie de l'exercice) :

- reconnaître les modalités d'application du théorème de Thalès aux triangles APR et ADB et déduire l'égalité des angles et la proportionnalité des côtés.

- déterminer la transformation par laquelle le triangle ABD a pour image le triangle ABC (ancien) ou démontrer que ces triangles sont isométriques (nouveau)

- En déduire la relation demandée et l'égalité des angles.

Cette activité sensibilise les élèves aux triangles de même forme dans un contexte où angles, coefficients de proportionnalité et mesures des longueurs sont particuliers. L'introduction d'une définition semble moins nécessaire pour unifier les connaissances que dans la première approche.

Dans l'activité précédente la notion « triangle semblable » semble plus

Diverses adaptations des connaissances dans un exercice sur les triangles semblables

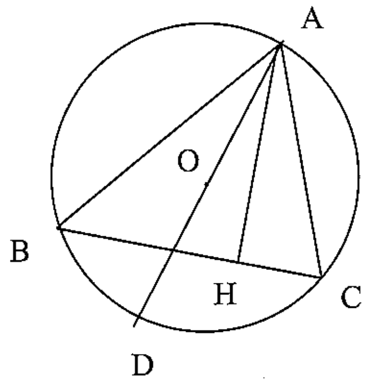
Enoncé de l'exercice

(C) est un cercle de centre O et de rayon r, AB est un triangle inscrit dans (C) tel que l'angle BAC est aigu. Le point H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. D est le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C).

1) Démontrer que les triangles ABD et AHC sont semblables

2) On pose AB=c, AC=b et AH=h, déduire de la question précédente que bc=2rh.

3) On pose BC=a et on appelle s l'aire du triangle ABC Démontrer que abc=4rs.



Le cercle et les triangles emboîtés sont deux configurations présentes dans cet exercice.

Les questions posées sont fermées. Nous les analysons successivement en termes d'adaptations des connaissances à utiliser.

Question 1

Il s'agit d'élaborer et d'organiser des étapes :

- choisir le raisonnement à utiliser, 2 angles égaux (D'1) ou côtés proportionnels (P'1) ou un angle et deux côtés (P3) : ici D'1
- reconnaître les modalités d'application du théorème, « triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre » : l'angle ABD est droit (connaissance ancienne 4°)
- en déduire que les angles ABD et AHC sont égaux.

- reconnaître les modalités d'application du théorème des angles inscrits aux angles ACB et ADB et déduire qu'ils sont égaux (connaissance ancienne 3°)

Question 2

Il s'agit de servir du résultat établi dans la question précédente pour déduire la proportionnalité des longueurs des côtés. Ici les triangles sont cités dans le « bon » ordre, les sommets homologues sont donc implicitement donnés (connaissance nouvelle) . On trouve AB/AH = AD/AC. En remplaçant les longueurs par leurs valeurs littérales et en utilisant les propriétés algébriques on trouve bc=2rh (connaissance ancienne).

Question 3

Il s'agit une fois encore d'utiliser la question précédente et de mélanger cadres géométrique et algébrique.

On trouve s=1/2 ah et en remplaçant h par bc/2r, on obtient l'égalité demandée au produit « en croix » près.

Cet exercice demande donc des adaptations nombreuses et variées et l'utilisation de connaissances anciennes et nouvelles. On peut donc le qualifier de complexe pour des élèves de seconde.

IV Didactique des sciences physiques et choix de l'enseignant : généralités et exemple (l'utilisation d'une controverse historique en situation d'apprentissage - le Dialogue de Galilée).

Nous l'avons dit plus haut, le parti pris fondamental de la didactique des sciences est de s'intéresser à la relation maître-élève(s) sous l'angle du *savoir à enseigner*. La didactique des sciences se distingue donc d'autres types de recherche en éducation dans la mesure où elle se préoccupe essentiellement de savoirs scientifiques spécifiques et des rapports que l'enseignant et l'élève entretiennent avec eux (le premier étant tenu d'aider le second à se l'approprier). Or ces savoirs, présentés sous forme programmatique dans les Instructions Officielles sont issus de la recherche scientifique fondamentale. Les résultats de la recherche, ces *savoirs savants* (les concepts, les lois, les théories etc.), sont eux chargés d'une histoire, souvent longue et tumultueuse qui témoigne des progrès de la science mais également des difficultés rencontrées par les communautés de savants. Dès lors que le chercheur en didactique des sciences s'intéresse au savoir à enseigner, une part de son travail de recherche peut être dédiée à l'étude du savoir scientifique qui lui a donné naissance, et par conséquent à son histoire.

IV.1 Recherche en didactique des sciences physiques et enseignement, quels rapports ?

Depuis la fin du 19e siècle, l'introduction d'éléments d'histoire des sciences dans l'enseignement des sciences physiques apparaît comme une exigence récurrente des programmes officiels[8]. Les raisons d'un tel plébiscite sont à rechercher dans la nature même de la science que l'on enseigne : si l'histoire est souvent témoin des errances qui jalonnent la construction d'une loi, d'un concept, d'une théorie, elle justifie à elle seule l'abandon d'un enseignement dogmatique d'une science en

[8] A ce sujet, on pourra se reporter aux articles travaux de Danielle Fauque ainsi qu'à ceux de Nicole Hulin. Voir en particulier, D. Fauque, « L'enseignement de l'histoire des sciences dans les classes du secondaire », *BUP*, n°712, 1989, 417-426. Et N. Hulin, « Histoire des sciences et enseignement scientifique, quels rapports ? Un bilan 19e-20e siècles », *BUP*, n°786, 1996, 1203-1243.

constante évolution. Pasteur, Langevin, Enstein, Schrödinger, et bien d'autres encore, praticiens de la science, se sont ainsi prononcés en faveur d'une utilisation systématique de l'histoire des sciences dans l'enseignement. Outre l'acquisition des connaissances scientifiques, l'enseignement des sciences a pour vocation la formation de l'esprit scientifique, et il est aujourd'hui acquis que celle-ci doit pouvoir tirer profit des apports de l'histoire des sciences.

D'une façon générale, l'histoire des sciences permet des innovations pédagogiques susceptibles de favoriser l'apprentissage tout en développant chez les élèves, grâce à la pratique de l'argumentation et des débats, une autre représentation du fonctionnement de la science et un goût pour la recherche. L'histoire des sciences peut avoir un rôle tout à fait positif sur l'image que la science renvoie aux élèves, même aux plus jeunes.

Dans cet esprit, et à titre d'exemple, les nouveaux programmes des classes de 5^e^ et 4^e^ de 2007 encouragent les enseignants à intégrer certains éléments d'histoire des sciences à leur pratique. Ainsi, la colonne « contenus-notions » mentionne-t-elle en italique les liens avec d'autres disciplines, et notamment avec l'histoire des sciences. Se pose alors la question des modalités d'utilisation de supports historiques que l'on sait nombreux et surtout variés.

IV.2 Considérer l'erreur autrement

Il n'est pas rare de trouver dans les raisonnements des élèves des idées proches de celles que l'on rencontre dans l'histoire des sciences. Pour autant, de telles similitudes ne doivent pas être prise au sens strict. En effet, les raisonnements de nos élèves et ceux des savants du passé sont élaborés dans des contextes bien différents. Certaines théories historiques sont nées dans le cadre de contingences philosophiques particulières qui rend leur compréhension complexe et leur transposition périlleuse. Et l'on peut imaginer qu'il sera toujours possible de rapprocher une prévision d'élève d'une prévision historique. Parle-t-on alors de similitude ou de simple coïncidence ? Et que faire des analogies lorsqu'elles existent ? Doit-on toutes les classer au rang des coïncidences sans que l'enseignant puisse en tirer un quelconque profit ? Peut-être pas.

Un regard sur l'histoire des sciences peut inciter l'enseignant à davantage de **tolérance**. En particulier, il constitue un moyen efficace de relativiser l'erreur de l'élève[9]. Pour reprendre une idée développée par la physicienne Françoise Balibar dans un plaidoyer en faveur de l'introduction de l'histoire des sciences dans la formation des professeurs des écoles, aucun enseignant ne peut être certain de ne pas se retrouver un jour face à un raisonnement analogue à celui d'une période historique donnée. L'erreur développée par l'élève n'a pas plus à être condamnée que celle du savant. Elle obéit à des règles de raisonnement particulières parfois proches de celles qui ont autrefois guidé certaines démarches scientifiques. Ce regard porté sur l'erreur dans l'histoire donne de la science une image dynamique et humaine bien éloignée de celle véhiculée par un enseignement parfois trop dogmatique.

IV.3 Prendre la mesure des difficultés liées au savoir à enseigner

La perspective historique propose une lecture dynamique et cohérente des processus mis en œuvre dans la résolution de problèmes. Elle peut servir à **détecter les moments difficiles**, les points d'achoppement que la science a rencontrés au cours de sa construction. Ces éléments devraient

[9] Il ne s'agit pas de banaliser l'erreur de l'élève sous le prétexte qu'elle trouve une résonance dans l'histoire, ou au contraire de la considérer comme la preuve que l'élève n'a pas suffisamment travaillé. Il s'agit plutôt de considérer l'erreur comme un indice témoignant d'une difficulté qui mérite des moyens pédagogiques particuliers.

constituer des zones d'attention particulières pour l'enseignant. En particulier, les raisonnements qui ont perduré dans l'histoire en s'opposant au développement rationnel de la science laissent entrevoir les difficultés auxquelles les élèves risquent de se heurter au cours de leur apprentissage scientifique. L'enseignant dispose alors d'un moyen pour mesurer l'ampleur de la difficulté rencontrée par l'élève. Ainsi, la mise en évidence d'obstacles historiques persistants peut-elle donner une idée des difficultés que risque de rencontrer l'élève au cours de son apprentissage.

L'éclairage historique doit permettre à l'enseignant d'agir sur les modalités de son enseignement. A titre d'exemple, savoir qu'il a fallu 21 siècles pour que la communauté savante accepte de façon consensuelle que pour voir un objet il est nécessaire que la lumière provenant de cet objet pénètre dans l'œil (objectif de connaissance du programme d'optique de la classe de 5^{e}), permet de prendre la mesure de la difficulté du savoir à enseigner. L'enseignant pourra donc prendre appui sur des éléments d'histoire des sciences afin d'enrichir sa pratique et sa réflexion pédagogique sans que cette histoire soit pour autant directement accessible aux élèves.

IV.4 L'histoire des sciences, un outil pour l'élève

L'expérimentation, la schématisation, le discours explicatif, le débat de classe, etc. constituent les moyens pédagogiques généralement utilisés par l'enseignant pour permettre à l'élève de surmonter les difficultés sous-jacentes à l'acquisition des notions et des contenus scientifiques. Parmi tout l'arsenal pédagogique dont l'enseignant dispose pour sa pratique de classe, l'histoire des sciences se pose elle aussi comme une aide à l'acquisition du savoir scientifique. Malheureusement, face à la diversité des supports qui s'offre à lui, l'enseignant se trouve parfois démuni. En effet, l'histoire des sciences peut s'exprimer sous des formes diverses, et la multiplicité des entrées possibles en classe nécessite que l'on réfléchisse aux objectifs pédagogiques et didactiques qui leur sont associées. A titre d'exemple, on pourra s'interroger sur le bien-fondé pédagogique du récit anecdotique, ou sur la pertinence historique des revues chronologiques linéaires de telle ou telle découverte. Gardons en outre à l'esprit que quel que soit le support choisi (texte original, document iconographique, récit historiographique, réplication d'expérience historique...), il semble important qu'il s'inscrive dans une séquence favorisant l'activité de recherche dans une perspective constructiviste. Autrement dit, une séquence dans laquelle l'élève soit mis en situation **d'investigation**. A cet égard, l'utilisation d'une controverse historique apparaît comme une piste pédagogique prometteuse.

La controverse scientifique en tant que support d'enseignement est intéressante pour deux raisons. D'abord parce qu'elle est le lieu d'un débat dont la transposition en classe pourrait s'avérer efficace d'un point de vue socio-cognitif ; ensuite, parce que le règlement par lequel elle s'achève pourrait inspirer une stratégie didactique particulière. Il s'agit par conséquent de choisir un problème qui, ayant donné lieu à une polémique dans l'histoire des sciences, donne lieu pareillement à un débat au sein de la classe. En donnant à ses élèves l'occasion de se projeter dans le débat historique, l'enseignement de physique-chimie révèle la nature même de la science et montre de façon claire que l'erreur fait intrinsèquement partie de la construction de la connaissance scientifique. Cela risque de modifier le rapport que l'élève entretient avec l'erreur en la dédramatisant. Bien entendu, la pertinence d'une telle transposition va donc se trouver suspendue à la connaissance que l'enseignant peut avoir des raisonnements des élèves, et de leur ressemblance éventuelle avec des idées déjà présentes dans l'histoire.

La séquence que nous présentons maintenant s'inscrit dans le cadre du programme de mécanique de la classe de seconde (programmes de 2002), et plus spécifiquement dans la partie consacrée aux référentiels. A ce niveau, il s'agit pour les élèves de construire l'idée que le mouvement d'un corps dépend de l'endroit que l'on choisit pour décrire ce mouvement. Autrement dit, un même corps peut être simultanément immobile et en mouvement, tout dépend du référentiel que l'on choisit, l'endroit par rapport auquel le mouvement sera étudié.

IV. 5 Un point sur les raisonnements communs à propos des référentiels

L'exemple le plus couramment utilisé dans l'enseignement est celui de deux passagers assis face à face dans un train animé d'une vitesse constante. Lorsque le train roule, les passagers sont immobiles l'un par rapport à l'autre, mais en mouvement par rapport au quai, qui, lui-même est en mouvement par rapport aux passagers. Cet exemple ne pose, en général, aucune difficulté de compréhension, mais il permet aux élèves de concevoir qu'il n'existe pas de corps en mouvement dans l'absolu, pas plus qu'il n'existe d'immobilité absolue : les passagers sont immobiles dans le référentiel du train, et en mouvement dans le référentiel du quai. Dire que les passagers sont immobiles dans le référentiel du train signifie qu'ils se déplacent à la même vitesse que le train par rapport au quai. De même qu'une personne immobile sur un tapis roulant se déplace à la même vitesse que le tapis par rapport au couloir. Or, les études de raisonnement réalisées sur ce thème ont montré que la plupart des élèves (et des étudiants) interrogés expliquent la vitesse des passagers par une cause unique : le train. Pour ces élèves, si les passagers sont en mouvement c'est parce qu'ils sont en contact avec le train et que celui-ci les « entraîne ».

Pour la pensée pré-scientifique, lorsque deux corps A et B en contact sont en mouvement, c'est que l'un (A) joue le rôle de moteur pour l'autre (B). Si le contact entre A et B est rompu, alors B perd instantanément la vitesse correspond à l'action de A sur B. Ce type de raisonnement conduit à prévoir qu'une bille lancée verticalement vers le haut par une personne immobile sur le tapis roulant (animé d'une vitesse constante) tombera derrière cette personne. Dans ce cas, l'absence de lien physique avec la personne (et donc avec le tapis roulant) supprime la composante horizontale de la vitesse de la bille. Ne subsiste alors plus que le mouvement vertical. Or, la bille conserve le mouvement du tapis roulant même lorsqu'elle n'est plus en contact avec le tapis. De ce fait, elle tombera au pied du lanceur (ou dans ses mains s'il cherche à la rattraper).

IV.6 L'étude des mouvements : enjeux d'une controverse historique

L'idée que le mouvement d'un corps nécessite l'action d'un moteur est l'un des fondements des théories aristotéliciennes du mouvement :

> Tout mû est nécessairement mû par quelque chose : d'une part en effet, s'il n'a pas en soi le principe du mouvement, évidemment il est mû par une autre chose, car c'est un autre chose qui sera le moteur[10].

Nous n'entrerons pas dans la complexité de la physique aristotélicienne. Signalons simplement que cette physique est en partie fondée sur la recherche des causes du changement ou du mouvement des corps. Pour Aristote il existe des mouvements « naturels » et des mouvements « violents » ou « contre-nature ». Aux mouvements violents sont associées des causes dites « efficientes » c'est-à-dire l'action d'un « moteur ». En outre, pour que le mouvement violent soit possible, il est nécessaire que le moteur et le mobile soient en contact. Si le contact du mobile avec le moteur est rompu, alors seul subsiste le mouvement naturel qui tend à faire tomber le mobile verticalement vers son lieu naturel, c'est à dire le sol. Un tel raisonnement conduit Aristote a affirmer que la Terre est immobile, parce que si tel n'était pas le cas, les corps lâchés verticalement ne pourraient pas, de ce fait, retomber à la verticale de leur point de lancer. La preuve de l'immobilité de la Terre est

[10] Aristote, *Leçons de physique,* trad. J. Barthélemy Saint Hilaire, Presses Pocket, livre VII, chapitre 1, p. 191.

suspendue, dés lors, aux théories aristotéliciennes du mouvement, et à un principe de causalité particulier : une Terre en mouvement serait un moteur pour tous les corps en contact avec elle, et notamment pour une pierre posée dans la main d'un lanceur immobile. Cette pierre serait donc en mouvement parce qu'entraînée par la Terre. Dès lors que la pierre quitterait la main du lanceur, elle perdrait instantanément le mouvement le la Terre au profit du mouvement naturel qui la conduirait à tomber verticalement et vers le bas, loin du lanceur, qui toujours entraîné par la Terre, se serait éloigné de la pierre. Et comme la pierre tombe au pied du lanceur c'est que la Terre est immobile. Un raisonnement analogue conduit à conclure qu'une pierre lâché du haut du mât d'un navire voguant à vitesse constante sur la mer tombe derrière le mât.

Le problème de la chute de la pierre sur le navire fera l'objet de nombreuses discussions au cours des siècles qui suivront. Nous n'entendons pas reprendre ici le contenu des débats qui animent la science des périodes médiévale et pré-classique autour de cette question. Nous retiendrons néanmoins que si certains savants affirment dès la fin du 16e siècle que la pierre lâchée du haut du mât du navire tombe au pied du mât, ils invoquent en général la nécessité d'une cause inscrite dans la pierre elle-même, une « vertu impresse » transmise par le navire à la pierre. Ainsi pour Giordano Bruno :

> ... la pierre, ou toute autre chose grave, jetée du mât vers un point situé au pied du dit mât, ou en quelque partie de la cale ou du corps du navire, y viendra en ligne droite (...) La pierre qui part de la main de celui qui est porté par le navire, et par conséquent se meut selon le mouvement de celui-ci, possède un certaine vertu impresse, que ne possède pas l'autre, celle qui vient dans la main de celui qui est en dehors du navire[11].

En 1642, Gassendi rompt avec les conceptions médiévales du mouvement et avec l'*impetus.* Pour lui, le mouvement de la pierre n'est pas lié cause à une cause interne à la pierre, à une « force active » qui lui serait communiquée par le navire :

> Il paraît que la force active, qui est la cause de la projection, est dans le projetant lui-même, et nullement dans la chose projetée, qui est purement passive. Ce qu'il y a dans la chose projetée, c'est du mouvement, lequel, bien qu'il soit appelé force, *impetus,* etc. n'est cependant en réalité, rien d'autre que le mouvement même... Or rien n'empêche que le moteur soit séparé, ou même périsse, et que le mouvement reçu perdure. Car on ne requiert pas le moteur afin que, en dehors du mouvement, il transmette au mobile une force, qui ensuite produirait le mouvement ; mais il suffit qu'il produise dans le mobile un mouvement, qui puisse continuer sans lui. Or le mouvement peut le faire, car telle est la propriété de sa nature, pourvu qu'il ait un sujet perdurable, et que rien de contraire ne lui arrive ; il a la propriété de persévérer sans action continue de sa cause[12].

Autrement dit, le mouvement est à considéré pour lui-même, et il n'a pas besoin de cause pour « persévérer » : le principe d'inertie vient d'être énoncé. Ajoutons qu'en 1641 Gassendi apporte la preuve expérimentale du lieu de chute de la pierre lâchée du haut du mât :

> Monsieur Gassendi ayant été toujours très curieux de chercher à justifier par les expériences, les hypothèses que le passé lui propose, et se trouvant à Marseille en l'an 1641, fit voir sur une galère qui sortit exprès en mer, qu'une pierre lâchée du haut d'un mât, tandis que la galère vogue avec toute force, ne tombe point ailleurs qu'elle ne le ferait si la même galère était restée immobile. Cette expérience fut faite en présence de Monseigneur le Comte d'Allais et d'un grand nombre de personnes qui y assistaient[13].

Quelques années avant Gassendi, Galilée s'intéresse lui-aussi au problème de la chute des corps, et de celle, désormais célèbre, de la pierre lâchée du haut du mât. Dans un passage du *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde,* le personnage de Salviati affirme que la pierre tombe au pied du mât, et ce, que le bateau soit en mouvement ou non (voir extrait ci-dessous). Par une argumentation

[11] Giordano Bruno, *De motu,* , cité par Koyré A. *Etudes Galiléennes,* p. 316.
[12] Gassendi, *De motu,* cité par Viennot L. *Le raisonnement spontané en physique élémentaire,* 122-123.
[13] Koyré A. *Etudes Galiléennes,* Hermann, Paris, 1966, p. 225.

cinématique davantage fondée sur l'étude du mouvement de la pierre pour lui-même que sur la recherche dynamique d'une cause interne à la pierre (Salviati parle de « mouvement communiqué » et non de « force » ou de « vertu impresse »), Salviati cherche à convaincre Simplicio, qui, par un raisonnement inspiré de la pensée aristotélicienne, conclut au contraire que le point de chute de la pierre se situera derrière le bateau. Or, si comme le dit Salviati, la pierre tombe au pied du mât que le bateau soit, ou non, en mouvement, le point de chute de la pierre ne nous renseigne en rien sur l'état de repos ou de mouvement du navire. D'une façon analogue, le lieu de chute d'une pierre lâchée du haut d'une tour ne permet par de conclure à l'immobilité ou la mobilité de la Terre.

Le dialogue ci-dessous rend compte de la discussion entre Salviati et Simplico à ce sujet. Pour les besoins de notre séquence, nous avons pris la liberté de supprimer du texte original de Galilée les passages digressifs sans lien direct la démarche que nous entendons proposer aux élèves.

Salviati :	Aristote prétend que la Terre est immobile puisque nous voyons les projectiles lancés vers le haut, à la verticale, revenir sur la même ligne au lieu d'où ils ont été lancés(…). Or, cela ne pourrait arriver si la Terre se mouvait, car, pendant le temps où le projectile, séparé de la Terre, monte et descend, le lieu d'où on l'a lancé aurait, du fait de la révolution de la Terre, parcouru un long chemin vers le Levant. (…)
Simplicio :	Bien sûr ! Si la terre se mouvait, le mouvement de la pierre serait en effet transversal et non vertical. Il y a par ailleurs l'expérience si caractéristique de la pierre qu'on lance du haut du mât d'un navire : quand le navire est au repos, elle tombe au pied du mât ; quand le navire est en route, elle tombe à une distance du pied [du mât] égale à celle dont le navire a avancé pendant le temps de chute de la pierre ; et cela fait un bon nombre de coudée quand la course du navire est rapide. (…)
Salviati :	Vous dites, puisque, lorsque le navire est immobile, la pierre tombe au pied du mât, et tombe loin de lui lorsque le navire se meut, on peut en déduire, réciproquement, que si la pierre tombe au pied du mât, le navire est immobile et que si elle tombe loin de lui, le navire se meut ; et comme ce qui se produit sur le navire doit pareillement se produire sur la Terre, le fait que la pierre tombe au pied de la tour implique nécessairement que le globe terrestre soit immobile. C'est bien là votre raisonnement, n'est ce pas ?
Simplicio :	C'est très précisément cela, et votre résumé en facilite beaucoup la compréhension (…)
Salviati :	Et moi, sans avoir fait l'expérience, je suis sûr que la pierre tombera au pied du mât. (…) Car la pierre qui est au sommet du mât, emportée par le navire, a en elle un mouvement indélébile imprimé par le navire. Quand celle-ci est lâchée, elle garde ce mouvement ; elle parcourt donc la même vitesse horizontale que le bateau, dans le même temps, tout en tombant verticalement. (…)
Simplicio :	La conclusion ultime a laquelle vous faites allusion, c'est sans doute que, si son mouvement lui a été imprimé de façon indélébile, la pierre n'abandonnera pas le navire, mais le suivra, pour tomber finalement au même endroit que lorsque le navire est à l'arrêt.

Extrait du *Dialogue* de Galilée[14].

La difficulté essentielle de Salviati est de reconnaître que le mouvement de la pierre ne dépend pas du contact avec le navire, et qu'il peut perdurer même lorsque le contact entre la pierre et le navire est rompu. Cette difficulté est analogue à celle que l'on trouve chez les élèves et les étudiants confrontés au même problème[15].

---

14 Galilée, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde,* op. cit. extrait de la deuxième journée, 164-174.

15 Ce qui est paradoxal ici, c'est que les étudiants justifient le mouvement des projectiles par un élan imprimé. Cet élan présente des caractéristiques communes avec l'*impetus* médiéval. Mais alors que les savants pré-galiléens affirment, avec raison, que la pierre tombera au pied du mât (en utilisant un raisonnement erroné fondé sur l'*impetus*), les élèves, tout aussi adeptes de l'idée de cause imprimée dans l'objet, prévoient que la pierre tombera derrière le mât.

Notre séquence d'enseignement est construite à partir de l'extrait ci-dessus[16]. Elle s'appuie sur une possible identification des élèves à Simplicio qui devrait conduire, selon nous, à ce qu'il est convenu d'appeler un conflit-cognitif : si les élèves se reconnaissent dans les idées de Simplicio et admettent avec lui que la pierre lâchée du haut du mât du navire tombe derrière le mât, alors ils constateront peut-être que la transposition de cette situation à celle d'une pierre lâchée du haut d'une tour amène à conclure à l'immobilité de la Terre, par un raisonnement du type : « la pierre tombe au pied du mât uniquement lorsque le bateau est immobile, or la pierre tombe au pied de la tour, donc la terre est immobile et pourtant je sais que la Terre tourne sur elle-même ». Cette situation conflictuelle devrait conduire l'élève à mettre en place un raisonnement nouveau qui rende compatible la réalité de l'expérience avec celle du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même. L'histoire des sciences, est ici un moyen d'aider l'élève à construire un nouveau système de pensée proche de celui de Salviati, intégrant l'idée d'une transmissibilité du mouvement.

IV.7 Le problème de la chute de la pierre : présentation de la séquence d'enseignement

La Terre qui nous héberge tourne sur elle-même en 24 heures environ. Du fait de ce mouvement, un point situé à sa surface, à Paris par exemple, se déplace avec une vitesse de 950 kilomètres par heure, soit quelques 264 mètres par seconde. Mais notre perception de nous même et des choses que nous voyons nous pousse à croire que celle-ci est immobile. Nos expériences sensibles, à elles seules, ne nous livrent aucune information sur le mouvement de notre planète : l'alternance des jours et des nuits peut parfaitement s'expliquer par un mouvement de rotation du Soleil autour de la Terre. Pourtant les élèves d'aujourd'hui savent que la Terre tourne sur elle-même. L'objectif de la séquence proposée n'est donc pas d'amener les élèves à redécouvrir la mobilité de la Terre, mais de confronter une connaissance, celle du mouvement terrestre, avec leurs conceptions du mouvement.

Notre séquence d'enseignement est construite en cinq étapes, répartis sur deux séances d'une heure chacune. En préambule à la séance, nous présentons le *Dialogue* en disant simplement qu'il s'agit d'un ouvrage écrit au 17^{e} par un savant italien du nom de Galilée dans lequel des personnages discutent de physique (et plus particulièrement d'astronomie).

Première séance : Problème de la chute d'une pierre

Dans un premier temps, nous demandons aux élèves de prévoir le lieu de chute d'une pierre lâchée du haut d'une tour. Cette question ne devrait pas poser de difficulté et la réponse devrait être conforme à celle que nous attendons, c'est-à-dire : « au pied de la tour ». Puis, nous leur posons la même question, mais cette fois dans le cas où la pierre est lâchée du haut du mât d'un navire voguant sur l'eau. Nous leur précisons qu'ils peuvent accompagner leur réponse d'un schéma.

Ainsi que nous l'avons vu au début de ce chapitre, depuis les première études de conceptions sur le mouvement réalisées il y a plus de vingt ans, nous savons que la pensée pré-scientifique refuse l'idée de continuité du mouvement d'un corps lorsque le contact entre celui-ci et l'objet mobile dont il « dépendait » est rompu. Instruit par ces résultats, nous nous attendons à ce que les élèves raisonnent de la sorte : « pendant que la pierre tombe, le bateau continue d'avancer » et prédisent que « la pierre tombera derrière le bateau. » Ensuite, nous leur demandons de comparer leur prévision avec celles proposées par Simplicio et par Salviati dans l'extrait du *Dialogue* ci-dessous :

[16] Il existe dans la littérature pédagogique quelques propositions de séquences construites à partir du *Dialogue* de Galilée. On citera par exemple celle des *fiches pédagogiques pour le lycée* proposées par le CLEA (Centre de liaison entre les enseignants et les astronomes).

Simplico :	Il y a l'expérience si caractéristique de la pierre qu'on lance du haut du mât d'un navire : quand le navire est au repos, elle tombe au pied du mât ; quand le navire est en route, elle tombe à une distance du pied [du mât] égale à celle dont le navire a avancé pendant le temps de chute de la pierre ; et cela fait un bon nombre de coudée quand la course du navire est rapide.
Salviati :	Et moi, sans avoir fait l'expérience, je suis sûr que la pierre tombera au pied du mât.[17]

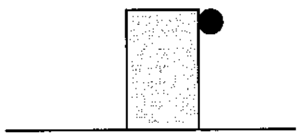
Extrait du *Dialogue* proposé aux élèves lors de la séance n°1.

La phrase de Simplicio devrait conforter les élèves dans leur raisonnement. Cette première étape correspond au questionnaire distribué aux élèves (voir page suivante).

La chute des graves (1/4)

Imaginez qu'on lâche une pierre du dernier étage d'un immeuble de 10 étages. Où tombera cette pierre ?

- ❑ Au pied de la tour ?
- ❑ Derrière la tour ?
- ❑ Devant la tour ?



Justifiez votre réponse

____

____

____

Imaginez maintenant que cette même pierre soit lâchée du haut du mat d'un navire en mouvement uniforme sur une mer parfaitement calme. Où tombera cette pierre ?

- ❑ Au pied du mat du bateau ?
- ❑ Derrière le bateau ?
- ❑ Devant le bateau ?

c

Simplicio :	Il y a l'expérience si caractéristique de la pierre qu'on lance du haut du mât d'un navire : quand le navire est au repos, elle tombe au pied du mât ; quand le navire est en route, elle tombe à une distance du pied [du mât] égale à celle dont le navire a avancé pendant le temps de chute de la pierre ; et cela fait un bon nombre de coudée quand la course du navire est rapide.
Salviati :	Et moi, sans avoir fait l'expérience, je suis sûr que la pierre tombera au pied du mat.

____

____

____

NB : on précise que la pierre est suffisamment lourde pour que l'on puisse négliger l'effet de l'air. On rappelle en outre que la Terre tourne sur elle-même à raison de 1 tour par 24 heure, ce qui équivaut, pour un point situé à la surface de la Terre (à Paris par exemple) à environ 260 mètres par seconde.

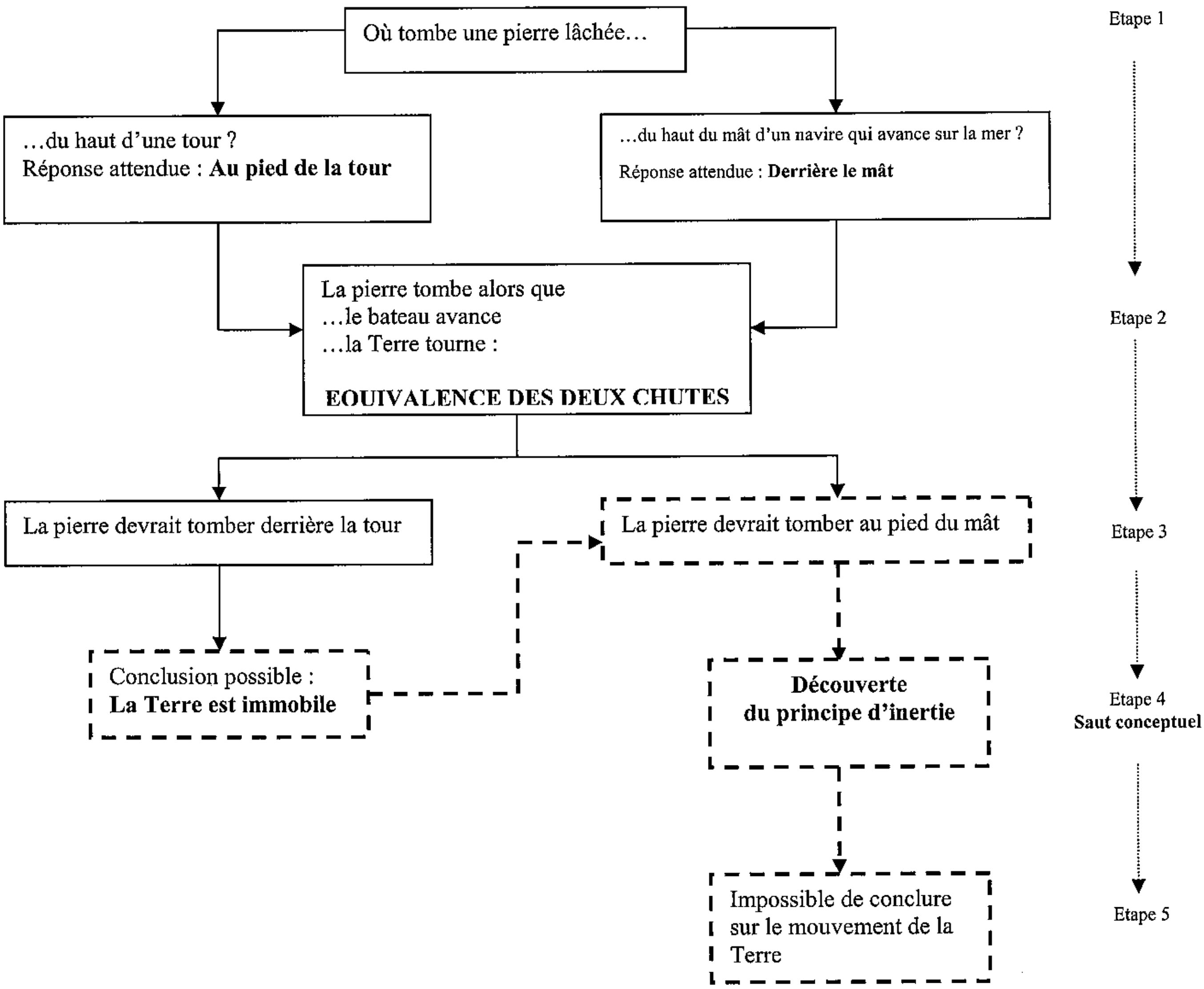
Questionnaire « chute des graves », séance n°1.

Si la majorité des élèves sera sans doute convaincue que la pierre tombe derrière le mât, quelques

[17] Galilée, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde,* op. cit.

uns se risqueront peut-être à prévoir que la pierre tombe au pied du mât. Dans une perspective socio-constructiviste nous pensons qu'il sera nécessaire d'instaurer un espace d'échange collectif à ce moment de la séance, afin de leur permettre de formuler un discours argumenté.

Pour conclure cette première séance, nous proposons aux élèves de considérer les deux chutes du point de vue du mouvement du bateau et de celui de la Terre. Notre objectif est qu'ils reconnaissent que ces deux chutes sont en fait équivalentes. Par conséquent, le raisonnement qui les amène à prévoir que la pierre tombe derrière le mât, devrait pareillement les amener à conclure, soit que la pierre ne tombe pas au pied de la tour mais derrière elle (ce qui est contraire à l'expérience quotidienne), soit que la Terre est immobile (ce que les élèves tiennent pour incorrect). Cette ambiguïté pourrait conduire les élèves à revoir leur prévision concernant la chute de la pierre lâchée du haut du mat, et donc, à se ranger du côté de Salviati : la pierre lâchée du haut du mât du navire devrait tomber au pied de ce mât et non derrière lui. C'est sur cette nouvelle hypothèse que devrait s'achever notre première séance.



Organigramme représentant la démarche de pensée proposée aux élèves lors de la séance n°1 sur la chute des graves. Les pointillés correspondent à une situation instable et conflictuelle qui devrait conduire les élèves à modifier leur raisonnement afin de conclure que la pierre tombe au pied du mât et non derrière lui.

Deuxième séance : découverte du principe d'inertie

L'objectif de notre séance est alors de les amener à formuler une hypothèse permettant d'expliquer la raison pour laquelle la pierre tombe, contre toute attente, au pied du mât. Nous leur proposerons de construire leur hypothèse par écrit et par groupe, en leur précisant qu'ils pourront, s'ils le souhaitent, faire des schémas. Cette nouvelle phase de recherche constitue la 4e étape de notre séquence. Cette étape nécessite de rompre avec un raisonnement de sens commun : proposer une première approche du principe d'inertie relève de ce que nous avons appelé en introduction un « saut conceptuel », d'un cheminement de pensée associé à un effort d'abstraction important. En outre, nous ne proposons ici aucune vérification expérimentale.

En référence aux recherches didactiques antérieures, nous pouvons nous attendre à ce que certains élèves justifient le mouvement de la pierre par un raisonnement proche de celui de l'*impetus*, dans lequel apparaîtrait l'idée de transmission par le bateau d'une « force », ou d'un « élan » qui permettrait à la pierre de conserver sa vitesse horizontale pendant un certain temps. Toutefois, cette séquence est réalisé avant tout enseignement de mécanique sur les forces. Quoiqu'il en soit, nous inviterons alors les élèves à lire l'ensemble du texte présenté plus haut, de façon à ce qu'ils confrontent leurs hypothèses à l'explication proposée par Salviati : la pierre possède un mouvement qui lui a été « imprimé » par le navire, et non une « force » : ce mouvement perdure même lorsque le lien entre le bateau et la pierre est rompu. Cette confrontation a pour objet d'accompagner les élèves dans l'accomplissement du « saut » que nous évoquions à plus haut, et de conforter ceux qui formuleront l'hypothèse d'une transmission du mouvement dans leur choix.

IV.8 Déroulement et Analyse de la séquence

Cette séquence, d'une durée totale de deux heures fut réalisée au mois de janvier 2002 dans trois classes de ZEP, dans le cadre du cours de mécanique de sciences physiques. Elle concernait au total 71 élèves de niveaux très hétérogènes. Des espaces d'échanges collectifs alternaient avec des temps de réflexion individuels ou en binômes. Dans l'une des classes, la séquence a été intégralement enregistrée. L'essentiel de notre analyse portera sur les effets de l'interaction texte-élèves. En particulier, nous regarderons la façon dont les élèves s'approprient le texte, et comment ils se positionnent par rapport aux personnages de ce texte. Nous tenterons de faire ressortir les éléments qui, de notre point de vue, font du support choisi un outil d'apprentissage potentiel.

Première séance : Problème de la chute d'une pierre

La séance débute par la présentation du *Dialogue* Galilée :

> Nous allons travailler aujourd'hui à partir d'un texte écrit au 17e siècle par un savant italien nommé Galilée. Dans ce texte, deux personnages Simplicio et Salviati discutent d'un problème. Et ils ne sont pas d'accord sur la façon de résoudre ce problème. Ce problème, je vais vous le poser à vous, et vous allez essayer d'y répondre. A la fin, on verra lequel des deux a raison.

Suite à cette petite introduction, nous leur distribuons le questionnaire ci-dessus et nous leur laissons vingt minutes pour le compléter.

Question n°1 : Imaginez qu'on lâche une pierre du dernier étage d'un immeuble de 10 étages. Où tombera cette pierre ?

Conformément à nos attentes, la plupart des élèves interrogés (96% de l'ensemble des élèves) prévoit que la pierre tombera au pied de la tour. Pour Nadia, « La pierre tombe au pied de la tour car il n'y a aucun vent et aucun obstacle » et pour Mehdi : « Elle tombe au pied de la tour car elle n'est pas lancée mais lâchée ».

Au pied de la tour	68	96%
Devant la tour	2	3%
Derrière la tour	1	1%
TOTAL	**N=71**	**100%**

Répartition des réponses à la question de la chute de la pierre du haut de la tour.

Deux élèves répondent que la pierre tombera devant la tour. Pour eux, il n'est pas possible de lâcher une pierre de sorte que son mouvement soit parfaitement vertical, comme nous l'explique Laura : « La pierre tombera devant la tour parce qu'elle ne peut pas tomber exactement tout droit si on la lâche, ça sera forcément un peu dévié ». L'idée que la pierre puisse tomber derrière la tour est évoquée par une élève :

> La Terre tourne sur elle-même avec une vitesse de 260 m/s alors j'en déduis que la pierre tombera derrière la tour. (Cong).

Dans sa réponse, Cong fait appel à une donnée de l'énoncé : la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. A notre grand étonnement, elle justifie sa réponse par un argument que nous nous attendions à trouver en réponse à la deuxième question.

Question n°2 : Imaginez maintenant que cette même pierre soit lâchée du haut du mat d'un navire en mouvement uniforme sur une mer parfaitement calme. Où tombera cette pierre ? Justifiez votre réponse et comparez-là à celles de Simplicio et de Salviati dans cet extrait du *Dialogue* de Galilée :

Là encore, les réponses des élèves à cette deuxième question viennent confirmer nos prévisions (voir tableau ci-après).

Au pied du mat	8	11%
A l'avant du bateau	2	3%
A l'arrière du bateau	61	86%
TOTAL	**N=71**	**100%**

Répartition des réponses à la question de la chute de la pierre du haut du mât d'un navire voguant sur l'eau à vitesse constante.

86% de l'ensemble des élèves interrogés prévoient que la pierre tombe derrière le mât. La plupart justifient leur réponse par une explication proche de celle que nous nous attendions à trouver. Ainsi pour Franck :

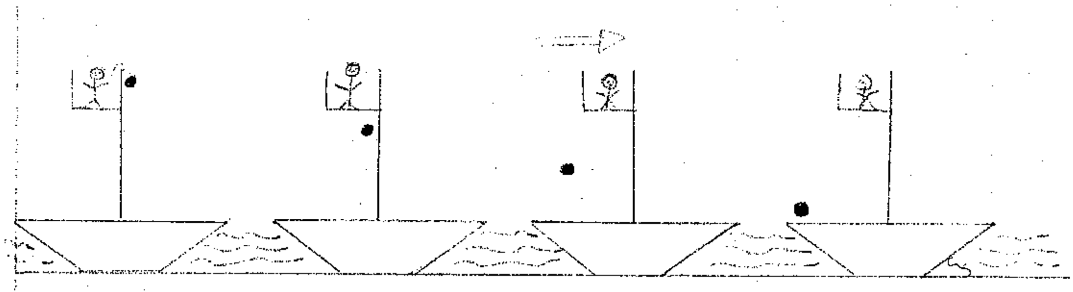
> La pierre touchera le sol en arrière, parce que quand le bateau avance, la pierre tombe et pendant ce temps là, la pierre elle n'avance plus, elle ne change pas de trajectoire, elle tombe tout droit. A notre avis, c'est Simplicio qui a raison.

Pour la grande majorité des élèves interrogés lorsque la pierre quitte la main du lanceur, celle-ci perd instantanément toute la vitesse que lui procurait le navire :

> Je pense comme Simplicio. La pierre tombe derrière le bateau car le bateau bouge et la pierre, dès qu'elle est lâchée, elle n'avance plus donc elle tombe tout droit pendant le bateau, lui, il avance toujours. (Christopher)

Seul le contact justifiait le fait que la pierre avançait avec le navire. Le contact était la cause du mouvement horizontal de la pierre. Le contact étant rompu, le mouvement horizontal disparaît ; ne subsiste alors plus que le mouvement vertical. Certaines réponse sont accompagnées de dessins, comme celle de Sarah (voir dessin ci-dessous) qui explique que :

> Dans l'air, la pierre tombe toujours droite alors que le bateau avance. Il y a forcément un décalage de position de la pierre par rapport au bateau. C'est donc que la pierre tombe à l'arrière. Je suis d'accord avec Simplicio.



Dessin prédictif de Sarah en réponse à la question de la chute de la pierre du haut du mât du navire.

Nous avons noté qu'au cours de leur réflexion certains élèves ont simulé l'expérience avec des objets de leur trousse. Par exemple, l'un d'eux tenant une gomme immobile au dessus de la table, faisait avancer un stylo sur la table. Lorsque le stylo est passé sous la gomme, l'élève a lâché la gomme. Il a alors pu constater que la gomme tombait derrière le stylo. Sa situation expérimentale n'était évidemment pas conforme à celle décrite précédemment, puisque dans la situation expérimentale de l'élève, le stylo était immobile.

Une partie des élèves interrogés (11% de l'ensemble) semble raisonner selon une intuition galiléenne, et prévoit que la pierre tombera au pied du mât. Pour Julie :

> Le bateau est en mouvement alors la pierre suivra le mouvement du bateau et tombera au pied du mat, moi, je pense que c'est Salviati qui a raison.

et pour Kimnara :

> La pierre tombera au pied du mat parce que quand la pierre est lâchée d'en haut, elle a toujours la vitesse du bateau donc elle avance en même temps que le mât. Simplicio a faux.

Signalons que lorsque les élèves justifient leur choix (c'est le cas pour 6 d'entre eux, soit 8% de l'ensemble), parlent de « mouvement » ou de « vitesse », mais jamais de « force ». Enfin, il est intéressant de retenir que 84% des élèves interrogés comparent explicitement leur réponse à celle de Simplicio ou de Salviati de façon cohérente. Les autres expliqueront quelques minutes plus tard oralement que le texte proposé leur a semblé très difficile à comprendre.

<u>Analyse des réponses au questionnaire et émergence d'un conflit-cognitif et socio-cognitif</u>

A l'issue de cette première étape nous ramassons les questionnaires, et nous proposons aux élèves de confronter leurs opinions lors d'un débat ouvert initié de la façon suivante :

Prof : Alors, d'après vous, qui a raison, Simplio ou Slaviati ? Selim ?[18]
S : Simplicio, parce que le bateau avance toujours quand la pierre tombe, et pas elle.
Prof : Pourquoi pas elle ?
S : Parce qu'elle est plus accrochée au bateau.
Prof : Tout le monde est d'accord avec Selim ?
K : Non
Prof : Kimnara, qu'en penses-tu ? Tu es de l'avis de Simplicio ?
K : Non
Prof : Pourquoi ?
K : Parce que la pierre elle a la même vitesse que le bateau, même quand // quand elle est plus accrochée, comme il dit Selim, elle continue a avancer quand même, en même temps.

[18] Pour la retranscription des entretiens, Prof désigne le chercheur (nous-même), E1...En, les élèves lorsque nous n'avons pas pu les identifier. La lettre C correspond à une réponse collective et enfin, les élèves identifiés sont désignés par l'initiale de leur prénom.

L'échange dure quelques minutes. Tous les élèves s'impliquent dans la discussion, et ils semblent globalement très impatients de savoir qui, de Simplicio ou de Salviati, a raison. Nous poursuivons la séance dans le but de leur faire admettre l'équivalence des deux problèmes :

Prof :	Est-ce que la Terre est immobile ?
C :	Non !
Prof :	Rachida ?
R :	Elle tourne, sur elle-même, comme ça, et autour du Soleil.
Prof :	Mais alors, si la Terre tourne, c'est comme pour le bateau non ? Comment se fait-il que la pierre tombe derrière le mât et pas derrière la tour ? C'est pas pareil ?

Globalement, les élèves admettent sans trop de difficulté l'équivalence des deux situations, mais très vite, ils ne comprennent plus pourquoi les réponses qu'ils ont formulées ne sont pas identiques. Pour certains d'entre eux, cela est dû à la différence entre la vitesse de déplacement du bateau et celle de la Terre :

E1 :	C'est parce que la Terre elle tourne pas vite du tout, d'ailleurs, on s'en rend même pas compte.
E2 :	Mais si, elle tourne grave vite, t'as pas vu la vitesse ou quoi ? 260 mètres par seconde… ça fait… ça fait combien madame en kilomètre/heure ?
Prof:	environ 950 km/h.
E2 :	T'as vu, c'est plus vite que le bateau, alors la pierre elle devrait atterrir, loin derrière.
Cong :	Moi c'est bien ce que j'avais dit, la pierre elle tombe derrière la tour[19].
E1 :	Pff, n'importe quoi.

Les élèves ayant répondu comme Simplicio reconnaissent que leur raisonnement est bancal car il conduit à conclure que la Terre est immobile. Toutefois, certains viennent à en douter :

E :	Si ça se trouve, c'est n'importe quoi que la Terre elle tourne !
C :	Mais bien sûr elle tourne !
N :	Ah ! En fait, on s'est trompé sur le bateau peut-être…
Prof :	Pourquoi, Nordine ?
N :	Parce que la Terre elle tourne et pourtant la pierre elle tombe en bas de l'immeuble // de la tour / et le bateau il bouge alors c'est pareil, **ça doit avoir le même raisonnement.**
E :	Oui c'est pareil, ça doit tomber en bas du mat.
N :	Mais ils avaient qu'à faire l'expérience et voilà, hop, on voit, c'est tout.
Prof :	Ils l'ont faite l'expérience, mais plus tard, en 1641, dans le port de Marseille, à l'initiative de monsieur Gassendi
E4 :	Et ils ont trouvé quoi ?
Prof :	A votre avis ?
N :	Au pied du mat j'parie
E :	Non, derrière !
N :	Mais non, pas derrière, sinon ça veut dire que dans la tour ça tomber derrière aussi.

Nous rappelons à ce moment-là que certains parmi eux ont émis une hypothèse qui pourrait expliquer que la pierre tombe au pied du mât.

Prof :	Et les élèves qui ont dit que la pierre tombait au pied du mât, comment vous l'avez justifié ? Julie ?
J :	Ben, parce qu'en fait, elle garde la vitesse du bateau.
Prof :	Les autres, vous en pensez quoi ? Alexandre ?
A :	En tout cas, si c'est ça, évidemment ça tombe au pied.
Prof :	Brahim, tu n'as pas l'air d'accord ?
B :	Non, enfin si, je suis d'accord quand ils sont collés, là d'accord, la pierre elle a la même vitesse que le bateau. Mais après, quand elle tombe, elle le touche plus, donc // donc elle a plus de vitesse.

[19] Voir la réponse proposée par Cong.

Cette séance s'achève dans une ambiance étrange. La plupart des élèves comprend que si les deux problèmes sont équivalents alors la pierre doit tomber au pied du mât. Mais cela leur semble tellement improbable qu'ils se disent que finalement les problèmes ne sont peut-être pas comparables. Une élève quitte la salle de classe en disant que :

> Comme la Terre tourne en rond et que le bateau avance tout doit, c'est peut-être ce qui explique que la pierre ne tombe pas au même endroit. (Jennifer).

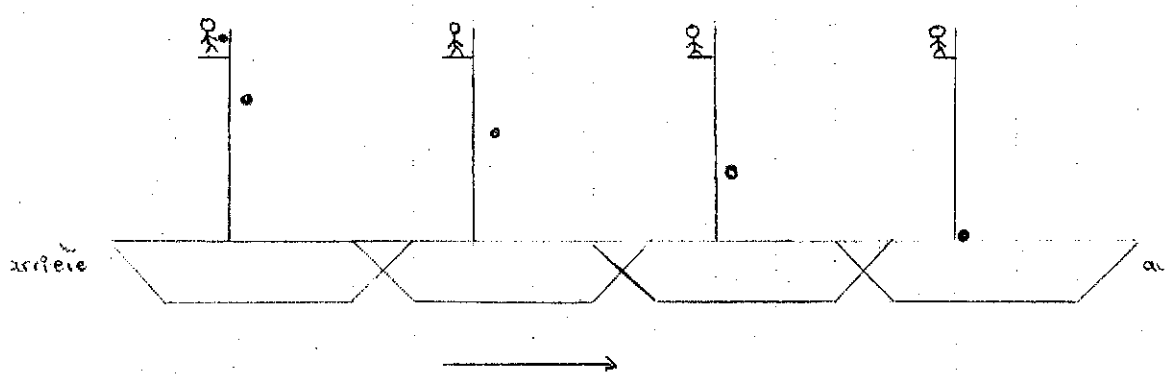
Ajoutons que dans les trois classes, les élèves ont spontanément évoqué l'idée d'une vérification expérimentale.

<u>Deuxième séance : A la recherche du principe d'inertie</u>

Nous débutons la séance par un rappel des enjeux de la séance précédente. Puis, nous décidons d'apporter quelques précisions sur le *Dialogue* que nous leur avons présenté. En particulier, nous leur expliquons que Simplicio défend les idées d'un savant grecs du nom d'Aristote, et que Salviati se pose en défenseur d'une pensée révolutionnaire, celle de Galilée, lui-même. Ceci pour plusieurs raisons. Tout d'abord, nous souhaitons leur montrer que le problème de la chute des graves est de taille et que leur perplexité est historiquement légitimée. Ensuite, nous entendons que les élèves profitent d'une possible identification de leurs idées à celles d'éminents savants: les élèves qui se reconnaissent dans les idées de Simplicio (et donc dans celles d'Aristote), trouveront peut-être leur « erreur » moins dévalorisante ; quant à ceux qui se reconnaissent dans les idées de Salviati (et donc dans celles de Galilée), ils en retireront sans doute une grande satisfaction. Nous leur expliquons donc que « la question de la chute de la pierre a été au cœur de discussions très animées entre des savants renommés, et ce, pendant plusieurs siècles, jusqu'à ce que Galilée en donne une réponse qui sera confirmée par l'expérience de Gassendi quelques années plus tard. »

Comme la séance précédente le laissait entendre, la prévision correcte est bien celle de Salviati. Il s'agit maintenant pour eux de trouver une explication qui justifie cette prévision. Nous leur proposons de construire une hypothèse par groupe de deux, en leur précisant qu'ils peuvent, s'ils le souhaitent, faire des dessins. Certains reprennent les schémas des positions successives du bateau et placent chaque fois la pierre à une distance du mât identique à celle de départ (voir dessin ci-dessous) :

> Tu vois, si la pierre elle tombe là [au pied du mât], ça veut dire qu'elle reste toujours collée au mât quand elle tombe. Bon, donc, elle va a la même vitesse que le bateau. C'est bizarre quand même // Mais ça doit être ça, elle doit garder la vitesse. (Sarah).



Dessin réalisé par le groupe de Sarah pour illustrer l'idée de transmission du mouvement.

Après dix minutes de discussions en groupe, nous initions un nouveau débat :

Prof : Est ce qu'un groupe peut proposer une explication qui permette de comprendre pourquoi la pierre tombe au pied du mât, de la même façon qu'elle tombe au pied de l'immeuble ? Sarah ?
S : Nous on pense que c'est possible si la pierre a toujours la même vitesse que le bateau.
E : Oui mais quand elle part du mat, elle a plus de vitesse.
S : Elle doit bien la garder sinon elle tomberait derrière.
Prof : Est-ce que d'autres parmi vous pensent que la pierre garde la vitesse du bateau ? Nordine ?
N : Oui, nous on pense qu'elle suit le bateau à la même vitesse que lui, parce qu'il lui donne la vitesse.
Prof : Certains d'entre vous l'avaient déjà dit ça, non ? Yacinne, Kimnara ?
Y : Nous on le dit depuis le début, personne veut nous croire.

Que ce soit dans l'une ou l'autre des classes, quelques binômes ont avancé l'idée d'une vitesse qui se serait transmise du bateau vers la pierre. Aucun binôme ne parle de « force ». C'est bien une expérience par la pensée qui conduit Sarah et son groupe à conclure que la pierre « doit garder la vitesse » du bateau. L'hypothèse du lieu de chute de la pierre (au pied du mât) permet à certains élèves de construire ce que Feyerabend appelle « une nouvelle idée », c'est-à-dire, une explication proche de celle de Salviati qui consiste en une première formulation du principe d'inertie. Afin de conforter les élèves dans leur démarche, nous leur proposons de confronter leurs explications avec la théorie de Salviati en leur distribuant l'intégralité du dialogue (voir plus haut).

Après avoir lu le texte proposé, la plupart des élèves expriment leur satisfaction et leur fierté :

Prof : Alors, quelle est l'explication proposée par Salviati, enfin, par Galilée ? Linda ?
L : Il dit la même chose que nous.
S : Ouais, on est trop fort !
Prof : Bon, mais c'est-à-dire ? Il dit quoi exactement ?
L : Que le bateau il imprime sa vitesse à la pierre, et après c'est indélébile, ça veut dire que ça s'en va pas, même quand la pierre est lâchée.
Prof : Oui, c'est exactement ça. Rachid, tu as quelque chose à dire ?
R : Rien, je disais // Ça veut dire qu'on est aussi intelligent que Galilée ?

Cette question de Rachid et l'enthousiasme de nombreux élèves montrent que l'identification au savant est particulièrement valorisante, à la fois pour les élèves qui se reconnaissent dans l'explication de Salviati, mais également pour ceux qui, n'ayant pas trouvé d'explication satisfaisante, réalisent que certains de leurs camarades en sont capables. Quelques-uns refusent néanmoins d'admettre que le mouvement du navire puisse être « imprimé dans la pierre de façon indélébile » et demeurent convaincus que la pierre tombe au pied du mât. Les propos de Salviati ne font pas autorité car pour ces élèves « l'explication ne remplace pas une expérience », seule façon selon eux de « voir qui a raison ». Ces mêmes élèves peinent d'ailleurs à reconnaître l'équivalence des deux chutes et font du problème du navire une question à part entière. Nous rappelons alors l'expérience réalisée par Gassendi, mais celle-ci reste abstraite car les élèves « ne la voient pas ».

A l'issue de la séquence, certains élèves expriment le souhait de travailler à nouveau selon une modalité identique. Nous leur demandons alors d'expliquer pour quelles raisons :

B : Parce que quand on se trompe, on a moins la honte si des savants comme // comment il s'appelle déjà ?
Prof : Aristote ?
B : Oui, Aristote. Et ben, Aristote, finalement il dit que la pierre tombe au pied du mât, presque comme tout le monde.
E : Sauf que, il y en a c'est encore mieux, direct, ils disent comme Galilée.

B :	Oui, mais après, on arrive à changer d'avis, et on trouve comme Galilée sans que la prof elle nous dise la réponse. Enfin si / juste que ça tombe en bas du mât. Après on trouve l'explication.
Prof :	Bon, donc un cours comme ça, ça vous plaît parce que vous vous rendez compte que vous raisonnez comme de grands savants. C'est tout ? Mohamed ?
M :	Non, aussi on peut discuter entre nous. Des fois on est pas d'accord, il faut essayer de se convaincre. Comme eux, là *[Mohamed montre le texte]*, ils sont pas d'accord.

Cet échange est instructif à plusieurs titres. En comparant son raisonnement avec celui d'Aristote, l'élève dédramatise la portée de son erreur : Aristote raisonne « presque comme tout le monde » nous dit Brahim, réalisant ainsi que le fait de se tromper n'est pas nécessairement condamnable. En outre, les élèves sont majoritairement conscients du cheminement intellectuel qui les conduit à formuler une première approche du principe d'inertie : « on arrive à changer d'avis (...), on trouve comme Galilée (...), on trouve l'explication ». Cette prise de conscience relève d'un acte métacognitif dans lequel l'élève analyse les tâches accomplies, les procédures suivies, et les résultats obtenus. Dans l'extrait ci-dessus, Brahim souligne qu'il a eu besoin de savoir que la pierre tombait au pied du mât pour avancer « sans que la prof nous dise la réponse ». Enfin, les élèves sont satisfaits d'avoir pu discuter entre eux, et Mohamed compare explicitement leurs divergences à celles des protagonistes du *Dialogue.*

Au cours de notre analyse, nous nous sommes attaché à considérer les réactions des élèves au regard des différentes tâches qui leur étaient proposées (formulation d'hypothèse, échanges collectifs, confrontation à l'autorité savante) du point de vue de la cognition et de la motivation. Notre intention était de dégager les éléments qui, de notre point de vue, pouvaient justifier l'utilisation en classe du *Dialogue* de Galilée.

Références (les ouvrages destinés directement à un public enseignant sont marqués d'un *).

Artigue M (1990) Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 9/3, 281-308

Bachelard G. (1938) *La Formation de l'esprit scientifique*, Vrin.

*Bautier, E. Rochex J.Y. (1998) *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens, démocratisation ou massification*, Armand Colin.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*, La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées pour une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol 12/1, 73-112

Chomat A., Larcher C. et Méheut M. (1988), Modèle particulaire et activités de modélisation en classe de quatrième, *Aster*, n°7, 143-184.

*Cissé F. (2006) Un dossier sur racine carrée à l'usage des formateurs (collège/lycée), *Document pour la formation des enseignants*, Cahier bleu n°8, IREM, Université P7.

Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2) pp.5-32.

Dumail A. (2007) *La racine carrée en troisième* – Mémoire de didactique des mathématiques, Parcours recherche- Université Paris 7 Denis Diderot.

Fauque D. (1989) « L'enseignement de l'histoire des sciences dans les classes du secondaire », *BUP*, n°712, 417-426.

Horoks J. (2006), *Les triangles semblables en classe de seconde : des enseignements aux apprentissages - Etude de cas.* Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Hosson C. (de) (2004), *Contribution à l'analyse des interactions entre histoire et didactique des sciences. Elaboration d'une séquence d'enseignement du mécanisme optique de la vision pour le primaire et le collège et premiers éléments d'évaluation.* Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

Hulin N. (1996) « Histoire des sciences et enseignement scientifique, quels rapports ? Un bilan 19e-20e siècles », *BUP,* n°786, 1203-1243.

Joshua S. & Dupin J.J. *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, PUF.

*Lattuati M., Robert A., Penninckx J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique,* Ellipses.

Méheut M. (1996) Enseignement d'un modèle particulaire cinétique du gaz au collège, questionnement et simulation, *Didaskalia*, n°8, 7-32.

Pariès M. (2007) Enseigner les mathématiques en ZEP et ailleurs, analyses de pratiques d'enseignants expérimentés au collège, *Cahier de Didirem* n°55, IREM, Université P7

Pariès M., Pouyanne N., Robert A., Roditi E., Rogalski M, (2007) Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner *Document pour la formation des enseignants,* cahier bleu n°9, IREM, Université P7

*Peltier M.L. Edr (2004) *Dur, Dur d'enseigner en ZEP*, La pensée sauvage, Grenoble.

Robert A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 18/2 pp. 139-190.

Robert A. (2003) De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et en lycée), *Didaskalia* n°22, 99-116.

Robert A. (2005) De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et sciences cognitives* Vol10 pp.209-250

Robert A. (2005) Quelles différences y a-t-il... Exemples d'analyses didactiques d'exercices et d'activités d'élèves en collège et en lycée *Bulletin de l'APMEP,* n°457, 226-238

Robert A. (2008) La parole à Aline Robert, entretien avec une didacticienne des mathématiques, Plot n° 21

Robert A. (2008) Vous avez dit "didactique des mathématiques", Repères IREM n° 71

Roditi, E. (1996) La racine carrée en troisième. Étude d'une activité, *Document pour la formation des enseignants,* Cahier vert n°17, IREM, Université P7

*Roditi E. (2005) *Pratiques enseignantes en mathématiques ; entre contraintes et liberté pédagogique,* Paris : L'Harmattan.

*Rosmorduc J. (1996) *L'Histoire des sciences.* Hachette Education.

Saltiel E., Malgrange J.L. (1979) Les raisonnements naturels en cinématique élémentaire. *BUP* n° 616, 1325-1355.

Vandebrouck F. *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants*, à paraître

Vergnaud G. (2002) La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie, in *Actes de la Desco de l'Université d'Automne Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants*, Paris

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol10/2.3 pp 133-170.

*Vergnaud G. (2002) *Lev Vygotski Pédagogue et penseur de notre temps*. Hachette Education.

*Viennot L. (1996). *Raisonner en physique, la part du sens commun*, De Boeck. Paris-Bruxelles.

Vygotski L. (1997) *Pensée&langage.* La Dispute.

TITRE :

Introduction à la didactique des mathématiques et à la didactique des sciences physiques. Une option en formation initiale d'enseignants.

AUTEUR/S :

Monique Chappet Pariés, Cécile de Hosson

RESUME :

Qu'est ce que le travail du didacticien en mathématiques et en sciences physiques ? Que peuvent en faire les enseignants de mathématiques et de sciences physiques ? Ce sont des éléments de réponse à ces questions que ce travail précise.
Dans la première partie, avoir présenté les théories générales communes qui sont adoptées par les chercheurs, une présentation plus spécifique de chaque champ est proposée.
L'étude d'un exemple de recherche permet d'illustrer le champ de la didactique des mathématiques. Cette recherche est le support d'une séance destinée à la formation des PLC2 proposée ici. Plusieurs apports éventuels de la didactique des mathématiques sont également proposés en direction des enseignants.
La dernière partie est réservée à la didactique des sciences physiques. Une séquence d'enseignement y est présentée et analysée.

MOTS CLES :

Didactique, mathématiques, sciences physiques, enseignement, apprentissage, Vygotski, Piaget, théorie de l'activité, vergnaud, analyse des pratiques des enseignants, activité, tâche, racine carrée, triangles semblables, erreur, étude des mouvements, chute de pierre.

IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache – Reprographie Nadine Locufier
www.iremp7.math.jussieu.fr
Dépôt légal : février 2008 – ISBN : 978-2-86612-296-6