IREM
PARIS 7

Documents pour la formation des enseignants

n° 12
octobre 2009
Nouvelle édition

Proposition pour une formation des moniteurs en mathématiques

Idées directrices pour une formation des moniteurs en physique

J. Mac Aleese, J. Pian, A. robert, M; Rogalski, L. Viennot

ISSN : 2102-488X

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Propositions pour une formation des moniteurs en Mathématiques

Jacqueline Mac Aleese, Jean Pian, Aline Robert, Marc Rogalski

Formation des moniteurs de mathématiques

Plusieurs thèmes importants traversent nécessairement le travail avec les moniteurs : on entend beaucoup par exemple que les étudiants ne travaillent pas suffisamment, voire presque pas (c'est une antienne de notre milieu) ; ou encore qu'ils arrivent du lycée avec trop peu de connaissances et qu'on constate que ça ne s'inverse pas, voire que ça empire, avec comme question subsidiaire, qui interpelle la profession, comment se fait-il que ces étudiants soient reçus aux examens ?
Cela dit, un certain nombre de choses ne dépendent pas de nous. Un des objectifs qu'on peut se fixer pour la formation est alors de mettre en évidence et de travailler ce qui dépend des enseignants, notamment de TD, ce qui peut être « optimisé » en TD.
Par exemple les étudiants sont « intelligents », comment récupérer cette intelligence qu'ils semblent souvent laisser à la porte de la salle de TD, quelles conditions fabriquer pour qu'ils puissent l'utiliser (à bon escient) ?
Un autre objectif peut être la formation à tous les moyens informatiques disponibles (aussi bien en termes de prise en main des logiciels qu'en termes de gestion des séances correspondantes) : c'est ce qui est prévu en deuxième année de formation.

I COMMENT NOUS ABORDONS LA FORMATION MATHEMATIQUE DES MONITEURS

1) Problèmes spécifiques de l'enseignement dans le supérieur

Plusieurs paramètres sont relativement spécifiques à ce niveau d'enseignement :
- l'origine de nos étudiants – ils ont des connaissances antérieures souvent moyennes, et même quelquefois des rapports au savoir et aux études souvent décalés par rapport aux attentes),
- au contraire les programmes du supérieur ne sont pas du tout ou seulement partiellement adaptés aux études antérieures,
- les habitudes des enseignants à l'université, très liées à leur double mission d'enseignant et de chercheur, rendent souvent inexistant le travail en équipe, laissant se développer un cours magistral d'un côté et des TD qui peinent à le rattraper derrière ; quelquefois des feuilles de TD sont plus ou moins imposées, sans avoir été discutées ; les examens sont souvent décalés par rapport aux cours.

Voilà quelques paramètres sur lesquels un moniteur qui arrive pour enseigner un semestre dans un TD n'a presque aucune prise.

Un travail spécifique sur « qui sont nos étudiants ? » est développé avec les moniteurs (chapitre 2).
Que veut dire « ils » ne travaillent pas suffisamment ? Dans quelle mesure peut-on repérer des variables selon les filières, le niveau d'études, etc. ? Nous avons mis au point un questionnaire qui, d'une part, peut permettre, à chaque moniteur, s'il le fait passer, à la fois de mieux se rendre compte de son public, et d'entamer une discussion avec eux, qui peut être très utile. D'autre part ce questionnaire permet aussi éventuellement d'avoir une idée globale sur la population de 300 étudiants dont nous avons recueillis les réponses.
Le travail correspondant avec les moniteurs, consacré à une exploration plus précise du travail des étudiants, est ainsi organisé autour de ce que chaque moniteur a recueilli et de l'image

globale dont nous disposons. Bien des variantes peuvent être imaginées, y compris la participation à la rédaction d'une version améliorée du questionnaire ou à son dépouillement. Nous allons présenter le questionnaire actuel et les premiers résultats sur 300 étudiants dans le chapitre 2.

2) Marges de manœuvre et choix des enseignants de TD

En revanche, nous faisons l'hypothèse qu'*il y a quand même certaines possibilités de choix pour les enseignants de TD* : essentiellement sur les énoncés qu'on peut proposer et sur les déroulements qu'on peut organiser pendant les séances, même s'il y a des contraintes incontournables, d'ailleurs variables.
Autrement dit, partant de l'idée qu'il reste des *marges de manœuvre* aux moniteurs en ce qui concerne le contenu du travail mathématique proposé aux étudiants et le mode de travail correspondant à organiser en TD, c'est sur ces marges que nous centrons la formation.

C'est dire que nous pensons qu'il peut exister des différences de pratiques entre les TD en ce qui concerne l'investissement des étudiants dans leur travail et leurs activités mathématiques, allant jusqu'à ce qui peut être fait ou non « à la maison ». Cela entraîne des différences éventuelles sur les apprentissages visés. Sont en jeu les mathématiques qui auront été travaillées et les manières dont ce travail aura été effectué par les étudiants, par delà les différences individuelles entre enseignants et les diversités entre étudiants.

Cela nous semble d'autant plus important à expliciter que, sinon, on risque de voir se reproduire ces séances classiques où les enseignants de TD, de guerre lasse, épuisés par le manque de travail et de courage des étudiants, commencent par rappeler les éléments du cours à savoir (résumant de manière strictement opératoire ce qui a été fait en amphi) puis proposent (au moins) les exercices d'application qu'il faut avoir vus ; ils les corrigent très rapidement, faute de temps, et parce que les étudiants attendent souvent cette correction : cela leur permet de préparer a minima leur examen. Inutile d'ajouter que, même si on donne des feuilles d'exercices à chercher avant le TD, une minorité d'étudiants le fait, ce qui rend plus difficile la gestion du groupe, rendu encore plus hétérogène par la différence de préparation.

Pour modifier, si ce n'est inverser, cet ordre des choses, il nous semble nécessaire que les enseignants puissent éventuellement fournir un travail un peu différent, notamment sur les exercices à proposer et, peut-être encore plus, sur la manière de faire travailler les étudiants en TD. Est-ce donc possible de faire travailler des étudiants qui n'ont pas appris leur cours, qui ne travaillent presque pas en dehors des TD ? Cela nécessite d'en être convaincu (au moins un peu) et surtout, *d'avoir à sa disposition des moyens un peu systématiques pour élaborer les exercices et mener les séances*, permettant de ne pas y passer trop de temps – il ne s'agit pas de détourner les jeunes chercheurs de leur travail de thèse, pas plus que de faire perdre trop de temps à leurs aînés d'ailleurs.
Il y a là une sorte de gageure, d'autant plus que, même si ça ne dépend à strictement parler que de lui, si un seul enseignant d'une équipe se met à enseigner « autrement », il risque d'être mal vu et même de décevoir les étudiants : ceux-ci auront fourni plus d'efforts toute l'année et n'auront pas forcément de meilleures notes à l'examen ; ils auront « seulement » appris davantage et autrement.

3) Des outils pour élaborer les énoncés et mener les séances : ouvrir la palette des possibles

Même si, pour convaincre les moniteurs, nous ne pouvons pas produire de preuves (au sens mathématique du terme) de nos affirmations, un certain nombre de travaux de didactique des mathématiques alimentent ce type de démarches (cf. bibliographie) : des travaux généraux sur les apprentissages des mathématiques (Vandebrouck, 2008) et des recherches plus ciblées sur l'enseignement supérieur. Sur ce dernier point, citons notamment la brochure « Enseigner les mathématiques autrement en DEUG », 1989, le livre de Dorier et al. sur l'algèbre linéaire en question (Dorier 1997 et 2000), dont les propositions de Rogalski pour le début de l'enseignement, les travaux sur les équations différentielles, le travail sur la convergence uniforme (Robinet 1992), un travail en cours sur la topologie (Bridoux).

Ces recherches ont pour caractéristiques d'imbriquer trois points de vue : celui des notions mathématiques à enseigner, dont nous cherchons à spécifier les fonctions et les diverses représentations, celui des étudiants et de leurs manières d'apprendre, celui des enseignants, de leurs marges de manœuvre et des contraintes nombreuses qui restreignent les possibilités.

Nous avons ainsi pu établir par exemple que les notions à enseigner à ce niveau sont souvent porteuses d'un nouveau formalisme, généralisateur, qui unifie des notions antérieures. C'est une source importante de difficultés pour les étudiants (qui parlent alors d'une trop grande abstraction) et pour les enseignants – qui sont démunis de moyen d'introduction « en douceur ». Nous avons développé l'idée d'utiliser notamment avec les étudiants des arguments qui parlent à leur intelligence, des commentaires sur les méthodes ou la genèse des notions, qui permettent de comprendre le sens de ce qui est introduit. Cela peut aussi permettre aux enseignants de mieux calibrer les premiers problèmes proposés sur une notion nouvelle, au moment de son introduction.
Cela n'empêche pas, au contraire, de présenter des exercices variés aux étudiants, et nous avons aussi mis en place des outils pour repérer la variété des énoncés proposés (cf Robert 1998), compte tenu de la spécificité des notions, pour que diverses connaissances soient utilisées, anciennes (supposées disponibles) et nouvelles. En particulier, l'importance des changements de cadres[1] pour aider les étudiants à apprendre n'est plus à démontrer (cf. Douady, 1987, Boschet et Robert, 1984, Actes de la Journée R. Douady 2001) et on doit leur donner une place privilégiée dans les exercices à proposer. De même les problèmes liés aux écritures formelles et aux changements entre les différents registres correspondants doivent être repérés et éclaircis. Enfin une étude précise faite en Capes a montré la corrélation entre la manière d'utiliser leurs connaissances qu'ont les étudiants en début d'année et leurs acquisitions ultérieures, ce qui amène à renforcer l'importance de proposer des mises en fonctionnement non immédiates des exercices (Pian 1999 – voir plus loin §III.1).
Un travail spécifique sur les énoncés de divers types, en relation avec les déroulements, est ainsi développé avec les moniteurs (chapitre 3).
A partir d'énoncés précis, résolus rapidement par les moniteurs ou avec eux, on leur présente plusieurs « outils » : un éclaircissement des divers types de notion qu'on rencontre dans l'enseignement supérieur, une classification de diverses mises en fonctionnement des connaissances qui permet de travailler à la variété des exercices proposés, des éléments élargissant les possibilités de gestion.

Enfin, nous développons des propositions et des repères à discuter sur la manière dont on fait travailler les étudiants en TD. Il s'agit de favoriser une certaine autonomie, indispensable aux apprentissages dès qu'il s'agit de concepts, et de souligner l'importance de respecter une certaine durée de travail qui s'accompagne de la mise en place d'un contrat à respecter. On

[1] Un cadre est un domaine de travail : géométrique, algébrique, graphique. Souvent une notion peut être travaillée dans plusieurs cadres et passer de l'un à l'autre contribue à son apprentissage.

peut aussi présenter la possibilité d'utiliser au maximum le groupe des étudiants, ou même les petits groupes qu'on peut former. Cela permet de les motiver, de les faire discuter (formuler et argumenter). Cela facilite aussi le fait de les écouter et de réussir à interpréter leurs propos. Cette interprétation de « là où en sont les étudiants » enrichit les récapitulations indispensables pour dégager ce qui a servi, le reprendre et le compléter en relation avec ce qui est visé. C'est tout l'intérêt des commentaires « méta », avec les mises en évidence de méthodes notamment et des mises en relation éventuelles...(voir plus loin).
Un travail spécifique sur le déroulement des séances, en relation avec les contenus, est ainsi développé avec les moniteurs à partir du visionnement de quelques vidéos tournées en TD (chapitre 4). Après avoir analysé l'exercice filmé, les moniteurs regardent l'extrait de vidéo choisi et discutent de la séance qu'il présente.

4) Le plan de la formation donnée aux moniteurs de première année

Organisation

- Quatre séances de trois heures au premier semestre pour les moniteurs enseignant déjà pendant ce semestre.
- Quatre séances de trois heures au second semestre pour ceux enseignant pendant ce semestre.

Le nombre de groupes de formation dans chacun des semestres dépend du nombre de moniteurs concernés.

<u>Première séance</u>

A travers *l'examen de divers exercices ou problèmes de mathématiques*, le but est de permettre aux moniteurs d'accéder à la *capacité d'analyser des énoncés d'exercice* afin d'anticiper l'activité mathématique réelle des étudiants que ces exercices peuvent engendrer, et les apprentissages auxquels cette activité pourrait potentiellement contribuer.

Les instrument développés dans ce but sont de plusieurs types :

- une réflexion sur les divers statuts épistémologiques de connaissances mathématiques enseignées à l'université ;
- les divers niveaux de fonctionnement des connaissances mises en jeu dans des énoncés d'exercices et leur résolution ;
- les notions de cadres, registres et points de vue, et l'importance d'amener les étudiants à les utiliser en résolution de problèmes ;
- l'existence de moyens, généraux ou spécifiques à certains domaines, techniques ou conceptuel (des *méthodes*), pour amorcer les recherches de problèmes, et l'importance de mettre les étudiants en mesure d'en être conscients et capables de les utiliser, en leur en parlant explicitement ;
- le rôle décisif du *temps de recherche laissé aux étudiants* sur les exercices qui leur sont soumis.

L'outil privilégié est constitué d'une batterie d'exercices (présentés au § III.2) sur lesquels on fait réfléchir les moniteurs à travers les instruments présentés ci-dessus.

<u>Deuxième séance</u>

Elle est consacrée à l'analyse de « qui sont nos étudiants ? ». On examine comment les bacheliers vivent leur arrivée dans les mathématiques universitaires, quelles sont les ruptures entre le secondaire et le supérieur (en mathématiques), comment nos étudiants se représentent l'activité mathématique, quels sont leurs acquis et leur manques, comment ils travaillent les mathématiques.

L'outil privilégié est *un questionnaire que les moniteurs diffusent dès la première séance à leurs étudiants, et qui est dépouillé et étudié lors de cette deuxième séance.*

Troisième séance

Elle est consacrée aux problèmes de *gestion et de déroulement du travail mathématique des étudiants dans les séances de travaux dirigés*. On aborde en particulier :

- la gestion du temps de recherche laissé aux étudiants (c'est un point essentiel et particulièrement difficile de la gestion) ;
- le travail en petits groupes (trois ou quatre étudiants) ;
- les divers rôles de l'enseignant pendant une séance de travaux dirigés ;
- la nature des bilans à faire avec les étudiants (« qu'a-t-on appris en résolvant tel exercice ? »).

Les outils privilégiés sont *l'examen collectif d'enregistrements vidéo de séances d'exercices*, l'assistance éventuelle de moniteurs à l'enseignement d'autres moniteurs ou enseignants...

Quatrième séance

Elle est très ouverte, et consacrée selon la demande des moniteurs, à diverses activités :

- des exposés de vulgarisation sur les sujets de thèse de moniteurs, par eux-mêmes ;
- des exposés, par des moniteurs, de problèmes pédagogiques rencontrés, ou d'expériences pédagogiques réussies, ou...
- des exemples d'analyses de listes (réelles) d'énoncés d'exercices ;
- des simulations d'une partie d'une séance de travaux dirigés...

II QUI SONT NOS ETUDIANTS ? QUELLES RUPTURES LYCEE/UNIVERSITE ?

A. LE QUESTIONNAIRE D'OCTOBRE 2007 D'ETUDIANTS DE L1 ET L2

Afin de préciser les impressions que nous avons tous :"les étudiants ne travaillent pas", "ils ne savent pas travailler", un questionnaire portant sur leurs relations aux mathématiques et leurs méthodes de travail a été donné en octobre 2007 aux étudiants des groupes de travaux dirigés de quelques collègues et des moniteurs de la formation. Cela concerne des étudiants du niveau L1 au niveau M2, de filières scientifiques en L1-L2 et de filière exclusivement mathématique en L3 et M2. La majorité des questionnaires provient des niveaux L1 et L2, niveaux où interviennent les moniteurs.

1) Les questions sur les méthodes de travail

Le questionnaire proposé comporte quatorze questions, que l'on peut regrouper en 4 thèmes :

• des questions d'ordre général concernant leurs opinions sur les mathématiques au lycée et à l'Université, l'importance relative du cours magistral et des TD, leur quantité de travail :
question 2 : *les mathématiques à l'université sont radicalement différentes de celles du lycée*
question 3 : *pour comprendre une notion mathématique, le cours est essentiel.*
question 4 : *pour comprendre une notion mathématique, les TD sont beaucoup plus importants que le cours.*

Les quatre réponses proposées à ces trois questions sont : pas du tout d'accord, plutôt pas d'accord, plutôt d'accord, tout à fait d'accord.

question 14 (et dernière) : *vous estimez que votre travail est très insuffisant, insuffisant, suffisant, très largement suffisant.*

• Ces questions pouvaient être complétées au verso par des questions libres et ouvertes, qui n'ont pas été exploitées dans un premier temps et qui ont été fort peu remplies :
Quelles difficultés principales rencontrez vous en mathématiques ?
Le cas échéant, quelles sont, d'après vous, les principales différences entre les mathématiques à l'Université et les mathématiques au lycée ?

• Le deuxième thème des questions posées concerne l'usage du cours et des TD :
question 1 : *vous assistez régulièrement aux cours*
question 5 : *vous relisez vos notes de cours*
question 6 : *vous préparez les exercices avant les TD*
question 7 : *vous faites les exercices proposés dans le cours*
question 10 : *vous faites une rédaction personnelle du cours*
question 12 : *vous terminez les exercices non terminés en TD*

• Le troisième concerne l'usage des ressources classiques :
question 8 : *vous utilisez des manuels d'exercices corrigés*
question 9 : *vous utilisez des manuels pour apprendre le cours*
question 13 : *vous travaillez avec un(e) ou plusieurs camarade(s)*

• Le dernier concerne l'usage de ressources Internet question 11 : *vous visitez des sites Internet de mathématiques pour y rechercher des compléments ou des précisions sur le cours*

Pour ces trois groupes de questions, les réponses proposées étaient : jamais, assez rarement, assez souvent, très régulièrement, regroupées de temps en temps en jamais et rarement et assez souvent et très régulièrement.

Nous avons recueilli 309 réponses d'étudiants de quatre universités de la région parisienne (Marne la Vallée, Versailles, Paris 6 -Pierre et Marie Curie, Paris 7 - Denis Diderot). Une quinzaine proviennent d'étudiants de niveau L3 et M2 : elles ne seront pas incluses dans l'étude statistique suivante. 294 proviennent d'étudiants de L1 et L2 selon la répartition suivante : 113 de L1 mathématiques, 79 de L1 physique, 20 de L2 filière MASS, 51 de L2 mathématiques, 31 de L2 physique.

2) Première étude globale, par niveau, de la population étudiante ayant répondu

Nous avons regroupé les réponses aux dix questions concernant l'assiduité aux cours, aux TD et l'utilisation des autres ressources.

Les étudiants, quelque soit la filière et le niveau L1 ou L2, reconnaissent majoritairement (3 sur 5) comme très rares ou assez rares une assiduité aux cours et un travail sur les cours ou TD, en utilisant éventuellement des ressources de bibliothèque.

Il n'y a pas d'homogénéité de la répartition des quatre modalités (jamais, assez rarement, assez souvent, très régulièrement) dans les niveaux. Une hypothèse, à vérifier, à partir de ces données, serait du type : Les étudiants en filière physique travailleraient-ils moins les mathématiques et ceux de filières MASS plutôt plus que les étudiants en filière math ?

En regroupant les niveaux L1 et L2, on constate qu'il n'y a pas de différence significative entre les deux filières math et physique : il y a de l'ordre de 25% de réponses 'jamais', 25% 'assez souvent', 30% ' assez rarement'. La réponse 'très régulièrement' est peu donnée.

Par contre, on constate une différence significative entre les niveaux L1 et L2, filières math et physique regroupées et on peut émettre l'hypothèse qu'il y aurait une diminution de travail régulier pour aller vers un travail plus occasionnel en passant de première en deuxième année d'université.

3) Positions de principe des étudiants relativement aux mathématiques, à l'utilité des cours, à celle des TD, à leur quantité de travail : (questions 2, 3, 4 et 14)

Nous avons examiné les réponses aux questions 2, 3 et 4 (pas du tout d'accord, plutôt pas d'accord, plutôt d'accord, tout à fait d'accord) tous niveaux et filières confondus et aussi par niveau ou par filière.

Tout d'abord, **très majoritairement (presque 3 sur 4), les étudiants sont plutôt d'avis que les mathématiques ne sont pas les mêmes au lycée et à l'université.** Mais il y aurait des nuances selon le niveau et la filière : en L1 math, 80% des étudiants partagent cet avis, en L2 MASS, il n'y en a que 65% et en L1 physique 58%.
En regroupant par filière, et en éliminant la filière MASS trop peu nombreuse dans cet échantillon, la différence d'appréciation des math selon la filière suivie est très significative :

80% des étudiants en filière math pensent que les math sont différentes à l'université et au lycée contre 62% dans la filière physique.

Peut-on dire que les étudiants de la filière physique sont plus réservés par rapport à la nature des math en lycée et en université ? Cela signifie-t-il qu'on n'aborde pas les math de la même manière dans la filière physique et dans la filière math à l'université ou cela signifie-t-il que ce ne sont pas les mêmes étudiants qui vont dans chacune de ces filières ?

Il serait intéressant de regarder les quelques commentaires libres exprimés au verso de ce questionnaire pour savoir comment les étudiants apprécient cette différence. On dira un peu plus loin comment nous enseignants analysons les différences entre lycée et université.

Tous niveaux et filières confondus, **près de 3 étudiants sur 4 sont d'accord sur le rôle essentiel du cours pour comprendre une notion mathématique,** mais cela parait plus marqué en filière math (4 étudiants sur 5) qu'en filière physique. Moins d'étudiants sont convaincus de ce rôle essentiel du cours en seconde année.

Globalement, **près de 90% des étudiants sont plutôt d'accord ou tout à fait d'accord sur le rôle plus important des TD que du cours, ce qui peut apparaître contradictoire avec ce qui précède.** Les étudiants de filière math sont un peu plus réservés que ceux de filière physique.

Très peu d'étudiants expriment des opinions extrêmes en reconnaissant leur travail comme très insuffisant ou très largement suffisant. Une petite majorité le trouvent insuffisant, sauf peut être en L1 math où il y a 56% des étudiants qui reconnaissent leur travail insuffisant. On voit, en regroupant par filière et en regroupant les 4 modalités en 2 modalités opposées : très insuffisant ou insuffisant d'une part, suffisant ou très largement suffisant d'autre part, que les réponses des étudiants de filière math sont à 60% du côté insuffisant, alors que celles des étudiants de filière physique ne le sont qu'à 52%. On voit aussi en regroupant par niveau, qu'il n'y a aucune évolution entre la première et la deuxième année.
On peut résumer en disant **qu'environ 3 étudiants sur 5 reconnaissent ne pas travailler suffisamment, tous niveaux et toutes filières confondus.**

4) Quelles cohérences entre les principes et les pratiques ?

Pour examiner cela, on peut croiser les réponses aux questions relatives aux cours (q3, q1, q5, q7, q10), croiser les réponses aux questions relatives aux TD (q4, q6, q12), croiser des questions sur le cours et d'autres concernant les TD et enfin regarder globalement l'ensemble du questionnaire en faisant une analyse des correspondances multiples.

a) Cohérence à propos du cours

Rappel de l'énoncé des questions :
question 3 : *pour comprendre une notion mathématique, le cours est essentiel.*
question 1 : *vous assistez régulièrement aux cours*
question 5 : *vous relisez vos notes de cours*
question 7 : *vous faites les exercices proposés dans le cours*
question 10 : *vous faites une rédaction personnelle du cours*

- <u>Examen question par question, en tenant compte des niveaux et filières :</u>

Il y a eu beaucoup de non réponses à la première question concernant l'assiduité aux cours, question dont l'intitulé était court (une seule ligne) par rapport à la seconde qui tenait sur 4 ou

5 lignes. Le fait d'assister très régulièrement aux cours semble variable selon les années et les filières, la variation allant de 50% en filière math à 79% en L2 MASS et autour de 67% en filière physique. Filière math et physique confondues, niveau 1 et 2 confondus, environ 60% des étudiants disent assister très régulièrement aux cours, 25% assez souvent et 20% rarement ou jamais. Mais cela diffère significativement selon les filières : en filière math, environ 80% affirme assister assez souvent ou très régulièrement (la moitié affirme assister très régulièrement) alors que en filière physique, c'est presque 90% (2 sur 3 affirment assister très régulièrement).

Tout niveau et toute filière confondus, environ 2 étudiants sur 5 relisent assez rarement leurs notes de cours, 2 sur 5 aussi les relisent assez souvent. Il n'y a pas de différence significative entre les filières math et physique. Mais, il y a une différence significative entre les deux années : de première année en deuxième année, il y a une diminution de ceux qui ne relisent jamais leurs cours, une augmentation de ceux qui le relisent assez rarement, une stabilité de ceux qui lisent assez souvent et très régulièrement : y aurait-il une légère prise de conscience d'un effet de ce type de travail ?

Un tiers des étudiants ne fait jamais les exercices proposés en cours, un tiers assez rarement et le dernier tiers assez souvent ou très régulièrement. Niveau 1 et niveau 2 regroupés, il n'y a pas de différence de comportement entre les filières math et physique. Filière math et filière physique regroupées, il y a une différence significative entre les deux années : les étudiants de deuxième année font plus rarement les exercices proposés en cours que ceux de première année.

La moitié des étudiants ne fait pas de rédaction personnelle du cours, un sur cinq en fait rarement une.

On peut résumer en disant que les comportements diffèrent légèrement d'une filière à l'autre, d'une année à l'autre : les matheux (80%) assisteraient un peu moins aux cours que les physiciens (90%), les deuxièmes années feraient moins les exercices proposés en cours (autour de 35%) mais reliraient un peu plus les notes de cours (autour de 40%), peu font une rédaction personnelle du cours (environ 20%).

Pour tous les croisements, nous avons examiné uniquement les réponses des étudiants de L1 et L2, filière mathématiques et filière physique, en les groupant.

- <u>Croisements de la question 3 avec les 1, 5, 7 et 10</u>

On constate qu'environ 85% des étudiants disant être d'accord sur le rôle essentiel du cours y assistent très régulièrement ou assez souvent, alors qu'il n'y en a que 73% parmi ceux qui sont d'une opinion opposée sur le rôle du cours. On peut toutefois s'étonner de ce dernier chiffre, qui est important : parmi les étudiants niant le rôle du cours, environ 3 sur 4 disent y assister assez souvent ou très régulièrement !

En regroupant en deux modalités opposées les réponses aux deux questions *"vous pensez le cours comme essentiel "* et *"vous relisez vos notes de cours "*, on constate que 70% des plutôt pas d'accord ne relisent jamais ou assez rarement leurs cours tandis que 56% des plutôt d'accord le relisent assez souvent ou très régulièrement (ce qui n'est pas si fréquent d'ailleurs !)

Quelque soit l'opinion a priori sur le rôle du cours, un tiers des étudiants fait les exercices donnés en cours, deux tiers ne les fait pas ; trois quarts des étudiants ne rédigent jamais ou assez rarement le cours.

- Autres croisements

Comme on pouvait s'y attendre, 80% des étudiants qui ne vont jamais ou assez rarement en cours ne relisent jamais ou assez rarement leurs notes de cours ! Mais il y a malgré tout 45% des étudiants qui disent aller assez souvent ou très régulièrement qui ne relisent pas non plus ces notes !
Un tiers des assidus aux cours fait assez souvent ou très régulièrement les exercices proposés, deux tiers ne les fait jamais ou assez rarement, alors que seulement 20% des non assidus les fait assez souvent ou très régulièrement.
La fréquence de recherche des exercices proposés en cours est liée à la fréquence de relecture des notes de cours. Toutefois, même les étudiants relecteurs très assidus ne cherchent pas très régulièrement les exercices. Rechercher assez souvent les exercices est une activité chez à peu près la moitié de relecteurs assidus et un quart des relecteurs moyennement assidus ; cela est l'inverse pour la recherche assez rare des exercices.

On peut dire brièvement que parmi les étudiants pensant le cours comme essentiel, 85% y assistent régulièrement, un peu plus de la moitié le relit régulièrement et un tiers fait les exercices proposés, et parmi les assidus aux cours seulement la moitié environ le relisent et un tiers fait les exercices proposés.

b) Cohérence à propos des TD

– *"pour comprendre une notion mathématique, les TD sont beaucoup plus importants que le cours" (q4), "vous préparez les exercices avant les TD" (q6), " vous terminez les exercices non terminés en TD" (q12)*

Peu importe l'opinion exprimée sur l'importance des TD, un étudiant sur cinq ne finit jamais les exercices de TD, la moitié le fait rarement et seulement un tiers le fait assez souvent.
De même, cette opinion a peu d'influence sur le fait de préparer ou non les exercices : environ 60% de ceux qui sont assez d'accord sur le fait que les TD sont plus importants que le cours préparent rarement les TD, 50% de ceux qui sont tout à fait d'accord les préparent rarement.
Globalement il n'y a que 25% des étudiants qui préparent assez souvent les exercices de TD ; mais 43% parmi ceux qui ne sont pas du tout d'accord sur le fait que les TD sont plus importants que le cours.
13% des étudiants avouent ne jamais préparer et ne jamais finir les exercices de TD, 30% les préparer rarement et les finir rarement et 17% les préparer assez souvent et les finir assez souvent.

En conclusion, même si l'importance des TD n'est pas niée, leur préparation est peu pratiquée : un quart des étudiants prépare régulièrement.

c) Cohérence des pratiques

- Concernant les exercices : *"Préparer les exercices avant les TD" (q6), "faire les exercices proposés dans le cours" (q7), " utiliser des manuels d'exercices corrigés" (q8), "terminer les exercices non terminés en TD" (q12)*

Il n'y a pas de lien entre l'utilisation de manuels d'exercices corrigés et le fait de terminer les exercices de TD.

Globalement, un tiers ne cherche jamais les exercices de cours, un tiers rarement et un tiers souvent. Mais 50% de ceux qui ne préparent jamais les exercices de TD ne cherchent jamais les exercices proposés en cours. 40% de ceux qui préparent souvent les TD cherchent rarement les exercices du cours et 46% le font souvent. L'utilité du travail sur les exercices proposés en TD et sur les exercices proposés en cours n'est sans doute pas clair pour les étudiants puisque 11% seulement d'entre eux le font souvent.
50% de ceux qui préparent souvent les exercices de TD utilisent souvent des manuels d'exercices corrigés alors que ce n'est que 37% de ceux qui préparent rarement les TD et 43% de ceux qui ne préparent jamais les TD. 65% de ceux qui utilisent rarement les manuels d'exercices préparent rarement les TD, alors que c'est 45% de ceux qui n'utilisent jamais les manuels et mais aussi 45% de ceux qui les utilisent souvent. Le travail sur les manuels d'exercices corrigés et sur les exercices proposés en TD est fait souvent par seulement 12% des étudiants.

Parmi les étudiants qui préparent souvent les TD, environ 50% recherchent souvent les exercices de cours et 50% utilisent souvent des manuels. Mais rechercher des exercices de TD, des exercices de cours ou des exercices dans des manuels d'exercices corrigés est rarement fait simultanément (environ 10%). Il semble que les ressources multiples soient peu utilisées.

• Concernant les notions de cours : *"Relire les notes de cours" (q5), "utiliser des manuels pour apprendre le cours" (q9), "visiter des sites Internet pour y rechercher des compléments ou des précisions sur le cours" (q11)*
- Ceux qui n'utilisent jamais de manuels de cours sont moins nombreux à relire leurs cours régulièrement (39% au lieu de 49%) et inversement ceux qui en utilisent sont plus nombreux à relire leur cours (58%).
- Parmi ceux qui ne relisent jamais leurs notes de cours, 40% vont assez souvent sur Internet et 40% aussi n'y vont jamais, alors que globalement environ 25% ne va jamais sur Internet, environ 25% rarement et environ 50% souvent..
- Parmi ceux qui ne vont jamais sur Internet, 40% ne relisent jamais leurs cours alors que c'est environ 50% globalement, plus de la moitié n'utilisent jamais de manuels de cours alors que c'est un tiers globalement.
- Parmi ceux qui vont assez souvent sur Internet, 12% ne relisent jamais leur cours, 35% le font rarement, 53 % souvent (répartition proche de la répartition globale : 13%, 38% et 49%); 25% n'utilisent jamais de manuels, 26% rarement et 50% souvent alors que la répartition globale est 35%, 23% et 42%).

Le lien « travail sur Internet - travail avec des outils classiques » est à approfondir : il semble toutefois que s'il y a travail Internet, il y a aussi travail classique plus fréquent que dans le cas général.

d) Cohérence globale : Analyse des correspondances multiples de l'ensemble du questionnaire.

• Toutes les questions et le niveau :

Une analyse des correspondances multiples a été lancée sur l'ensemble du questionnaire. On constate que le plan 1-2 explique 45% de la dispersion du nuage. Ni la question 14 sur l'évaluation de la quantité de travail fourni ni le niveau ne participent à l'explication de la dispersion.

Dans le plan, on peut visualiser deux groupements :
- le groupe des modalités 'très régulièrement' de *« utiliser des manuels d'exercices corrigés », « utiliser des manuels de cours », « utiliser Internet »* et la modalité 'tout à fait d'accord' à *« les mathématiques à l'université sont radicalement différentes de celles au lycée »* dans le quart supérieur gauche,
- le groupe des modalités 'jamais' à *« relire les notes de cours », « préparer les exercices de TD avant », «terminer les exercices de TD »,* auxquelles il faut ajouter la modalité 'pas du tout d'accord' à *« les mathématiques à l'Université sont radicalement différentes de celles au lycée »*, groupe plutôt à droite le long de l'axe 1.

- Les questions 5 à 13

En sélectionnant les questions 5 à 13 du questionnaire, on trouve que le plan 1-2 explique 62% de la dispersion (40% pour l'axe 1 et 22% pour l'axe 2). On retrouve ce qui précède, en distinguant un groupement supplémentaire :
- les modalités 'très régulièrement' de *« utiliser des manuels d'exercices corrigés », « utiliser des manuels de cours », « utiliser Internet »* dans le quart supérieur gauche. Toutes les modalités 'très régulièrement' des autres questions se trouvent aussi dans cette zone.
- les modalités 'jamais' à *« préparer des exercices de TD », « utiliser des manuels d'exercices corrigés », « utiliser des manuels de cours », « terminer les exercices de TD »,* dans le demi-plan droit. Toutes les modalités 'jamais' des autres questions se trouvent aussi dans cette zone.
- les modalités 'assez rarement' ou 'assez souvent' des questions, en particulier de la question *« utiliser des manuels d'exercices corrigés »*, se trouvent dans le quart inférieur gauche.

On constate bien globalement une cohérence des réponses des étudiants à ce questionnaire. On peut identifier trois types de comportements extrêmes (et ce n'est pas un scoop !):
- **celui qui fait très régulièrement tout type de travail, en particulier qui va sur Internet**
- **celui qui ne le fait jamais**
- **celui qui le fait assez rarement ou assez souvent**, ces deux modalités centrales étant difficilement différentiables (en effet, dans les examens par question, soit 'assez souvent' a été regroupé avec 'très régulièrement', soit 'rarement' a été regroupé avec 'jamais', ou les deux simultanément. Le choix de 4 modalités de réponses aux questions n'a pas évité finalement de voir ce centrage apparaître : jamais, assez rarement ou assez souvent, très régulièrement. La modalité centrale montre une indécision des étudiants dans leur positionnement entre le assez rare et le assez fréquent).

Même si on a pu repérer quelques différences dans les croisements deux à deux des questions, ces trois comportements seraient stables, en tout cas relativement indépendants du niveau, ce qui ne veut pas dire que les étudiants ne changent pas au cours de leur scolarité (ce questionnaire ne permet pas de répondre à cette question). Comme on a pu le constater en regardant finement question par question, il y a des fluctuations autour de ces trois types de comportements. Resterait à faire le lien entre ces comportements et les résultats aux évaluations.

B. D'APRES DES TRAVAUX ANTERIEURS : SUR LES ETUDIANTS ARRIVANT DU LYCEE ET SUR LES RUPTURES LYCEE/UNIVERSITE

1) Remarques d'ordre général :

Les étudiants arrivant à l'Université dans les disciplines scientifiques rencontrent dans leur grande majorité des difficultés en math. Ce ne sont pas les meilleurs élèves de lycée qui viennent à l'Université. A cela, s'ajoutent le changement de vie et l'encadrement moindre qu'au lycée. En semestre 1, le volume de connaissances abordé est beaucoup plus important que celui auquel ils ont été habitués et le rythme est beaucoup plus rapide.

L'enseignement au lycée laisse une grande place aux exercices d'application directe, pour amener le plus grand nombre d'élèves à un savoir-faire de tâches bien précises, sans qu'il leur soit nécessaire de conceptualiser. Très vite, les activités demandées s'automatisent et le mode de penser devient un mode associatif qui rend performant dans les exercices demandés. La confusion entre savoir (ou savoir faire) et comprendre est entretenue.
A l'université l'approche des mathématiques devient tout de suite plus conceptuelle : les notions sont abordées davantage du point de vue de leur place et de leur importance dans la construction des mathématiques. Théorie mathématique qui s'appuie sur des concepts et des objets qui n'ont pas de réalité pour les étudiants : par exemple, les objets « suite numérique », « espace vectoriel » ou encore « espace quotient » demandent tous une vision globale ou ce qu'on peut appeler une réalité mathématique intérieure, que les étudiants ne possèdent pas ou pas encore. L'apprentissage technique est moins mis en avant et plus laissé à l'initiative de l'étudiant, beaucoup d'exercices sont des prolongements de cours et non des applications de cours. L'étudiant est confronté à un questionnement nouveau : on lui demande plus de réfléchir sur les objets et notions mathématiques que d'appliquer des résultats à des situations particulières.

Les étudiants qui nous arrivent ne sont pas performants sur les calculs élémentaires, leur connaissance des fonctions usuelles est fragile, il leur manque des repères : limites, comparaisons des ordres de grandeur, manipulations d'inégalités...Le statut de la démonstration est flou alors que l'analyse du premier semestre met l'accent sur la démonstration de résultats sur les fonctions (limites, continuité, dérivabilité, suites...), résultats qu'ils utilisent déjà au lycée. L'importance du cours n'est pas perçue : dans les exercices, ils n'attendent que des applications directes d'énoncés sur des cas particuliers. Les étudiants ne rentrent pas dans la problématique mathématique proposée à l'Université et reviennent très vite à leur mode de fonctionnement du lycée, qui est de chercher à résoudre des exercices types, dans la mesure aussi où cela leur permettra de réussir les examens. Ils acquièrent donc des savoirs techniques et perdent la possibilité de comprendre les mathématiques.

2) Rupture lycée/université :

Au niveau des tâches proposées,

- Dans les manuels de terminale, on remarque :
  - la prédominance des tâches de calcul
  - le rôle limité des définitions
  - des aides à la résolution toujours importantes
  - un fort taux de répétitivité
  - une mise en fonctionnement des connaissances essentiellement au niveau technique
  - des changements de cadres toujours à sens uniques

- une décomposition des tâches quasi-exclusivement à la charge des énoncés
- une absence totale de paramètres intervenant de façon significative

Et c'est encore pire pour les sujets de bac !

• Dans les feuilles d'exercices de TD de $1^{\text{ère}}$ année, on note :
- une forte baisse du taux de répétitivité
- un fort taux de tâches réalisables de plusieurs façons
- une nécessité d'autonomie nettement plus grande
- des tâches nouvelles : élaboration de conjectures, recherche de contre-exemples, introduction de paramètres
- une évolution vers plus de généralité (moins forte qu'on aurait pu le penser)
- une augmentation de la complexité des situations proposées

Au niveau des thèmes de travail abordés,
- quelques thèmes transversaux qui sont, au niveau des souhaits, une spécificité de l'université, par exemple : négligeabilité, équivalence et quantificateurs, distinction local-global,...
- l'irruption de « l'analyse démontrée », ce qui rend indispensable le questionnement des énoncés

Au niveau des méthodes,
- routinisation de certaines tâches avec les fiches méthodes des manuels de lycée
- fonctionnement à un niveau plus global et réflexif à l'université, bien que la routinisation, sous-estimée, soit nécessaire à la prise de sens de certains concepts et nouvelles tâches

3) Mises en fonctionnement des connaissances

• On peut retenir de J. Pian (1999) des constats issus de l'analyse des questions des tests de mathématiques de début de semestre à l'Université :
- les questions ne relevant pas d'un niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances reçoivent rarement des réponses correctes,
- les réponses données et les arguments utilisés montrent que les étudiants ont très peu d'autonomie, ont beaucoup de mal à prendre du recul face à un problème dès lors que celui-ci ne relève pas d'une application directe et demande d'utiliser plusieurs arguments,
- les connaissances/savoirs des étudiants sont très atomisés : les notions ne sont pas reliées entre elles et ne font pas partie d'un tout cohérent,
- les étudiants ne sont pas concernés par le sens que pourraient avoir les concepts mathématiques qu'ils manipulent : ils privilégient le côté outil de ces concepts. Souvent les mathématiques semblent être vécues comme une discipline de règles s'appliquant à des objets conçus pour ...sans doute appliquer les dites règles !
- les situations de référence, permettant de conserver un ou plusieurs aspects d'un phénomène, font cruellement défaut aux étudiants.

• Dans une comparaison de deux tests passés par des étudiants en mathématiques, à cinq mois d'intervalle et portant sur les mêmes notions mathématiques, on a pu voir que le progrès individuel d'un étudiant est fortement corrélé au nombre de questions relevant des niveaux mobilisable et disponible auxquels il avait apporté des réponses justes au premier test. Ceux qui ont répondu correctement seulement à des questions de niveau technique sur une notion ne progressent pas sur cette notion. Voir le détail et les explications sur cette question, essentielle pour la réflexion sur le type d'exercices sur lesquels faire travailler les étudiants, au § III.1.

- Le développement mathématique d'un étudiant ne se réduit pas à l'assimilation d'un savoir formel. Il apparaît qu'un stade minimum de développement de la « réalité mathématique intérieure » soit nécessaire pour progresser et transformer le savoir formel en connaissance opérationnelle. Il semble que malgré la validation par l'institution d'un niveau en mathématique, la formation reçue par ces étudiants ne leur a pas donné la possibilité d'acquérir une compréhension profonde et efficace des mathématiques.

- On peut retenir aussi de la thèse de F. Praslon des constats similaires :
  - l'existence de problèmes importants au niveau du formalisme et de l'utilisation de la langue naturelle (par exemple « au voisinage »...) ;
  - des difficultés dans le sens de la lecture de graphes de fonctions vers la formalisation des propriétés correspondantes ;
  - la persistance du rôle premier de l'intuition par rapport à l'utilisation de preuves, pour trancher les questions ouvertes, ce qui rend difficile le travail sur des conjectures ;
  - des concepts difficiles à comprendre, comme les notions de limite et de continuité ;
  - des méconnaissances importantes sur les nombres
  - des difficultés dans le raisonnement à ε près.

L'auteur note des blocages engendrés par la culture lycéenne mais aussi des potentialités d'adaptation aux exigences de l'université :
- l'importance des procédures de niveau 0 où le rôle des formules algébriques et le fait même pour les fonctions d'être définies impliquent pour les élèves continuité et dérivabilité, par exemple ;
- une « compartimentalisation des connaissances » autour de tâches routinières autonomes ainsi qu'une organisation insuffisante des connaissances ;
- de grandes difficultés à développer des activités d'allers-retours entre les cadres algébriques et graphiques ;
- mais une certaine disponibilité à travailler sur des problèmes nouveaux et plus formels.

On peut ajouter à ces constats celui fait en 1988 par Barbançon et coll, mais toujours d'actualité : pour une majorité de lycéens, l'activité mathématique semble exclure tout délai de réflexion ou de recherche, de l'ordre d'une heure, dans la compréhension ou dans la découverte d'une solution.

Rauscher (2004), interrogeant des étudiants, constate qu'ils opposent deux pôles dans le fait d'apprendre les mathématiques : le pôle heuristique (chercher à résoudre des énigmes, trouver l'astuce ou la méthode) et le pôle routinier ou algorithmique (calculer, appliquer une méthode, appliquer des formules). On aime ou non chacun de ces pôles et ce serait stable dans le temps. De plus les étudiants opposent concret et abstrait dans les activités mathématiques, et il semble qu'il y aurait passage du concret à l'abstrait (dans l'apprentisage des mathématiques) à un moment variable selon les individus.

III. Quelques exemples de problèmes mathématiques qu'on peut traiter avec les moniteurs pour répondre aux questions : quoi faire en travaux dirigés, quels exercices choisir en vue de la formation des étudiants, quelles sont les marges de manœuvre disponibles ?

Les *objectifs principaux* du traitement de ces problèmes avec les moniteurs sont :

* l'accès des moniteurs à la capacité d'analyser des énoncés d'exercices afin d'anticiper l'activité mathématique réelle des étudiants que ces exercices peuvent permettre ou déclencher, et l'apprentissage auquel cette activité pourrait éventuellement contribuer ;
* la compréhension par les moniteurs des notions de cadres, registres et points de vue, et de l'importance d'amener les étudiants à en prendre conscience, à les utiliser et à penser à en changer si besoin est ;
* une prise en compte par les moniteurs d'une réflexion sur les divers statuts épistémologiques de connaissances mathématiques enseignées à l'université ;
* la prise de conscience par les moniteurs qu'il y a plusieurs moyens, généraux ou spécifiques à certains domaines, techniques ou plus conceptuels (bref des *méthodes*), pour amorcer la recherche d'un problème, et qu'il faut en parler aux étudiants (discours "méta") ;
* la compréhension par les moniteurs de l'importance de faire chercher suffisamment longtemps les étudiants, et donc de maîtriser la gestion des modes de travail qui leur sont proposés.

Plusieurs de ces points ont été traités dans la première partie. Avant de présenter des énoncés sur lesquels on peut faire réfléchir les moniteurs (bien sûr, il y a bien d'autres choix possibles), nous nous proposons de revenir sur la question des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances dans un énoncé, notion essentielle pour le premier objectif que nous avons présenté : *pouvoir analyser des énoncés du point de vue de l'activité mathématique qu'ils peuvent enclencher chez les étudiants.*

III. 1. "Niveaux de fonctionnement" des connaissances mathématiques lors de la résolution d'exercices

Les recherches de A. Robert (voir Robert 1998 et Pian 1999), portant à la fois sur le secondaire et l'université, ont dégagé trois "niveaux de fonctionnement" :

* *Le niveau "technique"* : les utilisations des connaissances mathématiques sont simples et isolées, il s'agit *d'appliquer sans adaptation* un théorème ou une définition. Par exemple, si on demande de trouver les valeurs propres d'une matrice explicite 3x3 à coefficients numériques, ou de trouver la convergence simple sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions $\frac{1}{(x+2)^n}$, le recours aux définitions suffisent pour amorcer la résolution ; si on veut établir que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ a une seule racine dans $]0,1[$, on étudie simplement la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$ et on applique directement le théorème des valeurs intermédiaires et la monotonie stricte de f.

* *Le niveau "mobilisable"* : il faut *adapter* ses connaissances au problème, ou bien changer un peu de point de vue, ou utiliser une étape intermédiaire, mais avec souvent une indication dans l'énoncé du problème. Par exemple, dans l'exemple 3 utilisé avec les moniteurs (voir plus loin : l'existence d'extremums pour f continue avec $f(0) = f(+\infty) = 0$), l'énoncé dirait sans

doute : "on pourra se ramener au théorème classique sur un intervalle fermé borné, si f est non identiquement nulle".

* *Le niveau "disponible"* : les étudiants doivent penser par eux-mêmes à la connaissance ou au changement de cadre ou registre utile pour résoudre le problème. Par exemple, en supprimant indications ou étapes, on peut faire passer un énoncé du niveau mobilisable au niveau disponible. Dans les exemples analysés avec les moniteurs (voir plus loin), on trouvera plusieurs exemples d'énoncés fonctionnant au niveau disponible.

Des observations en classe et l'analyse des listes d'exercices données aux étudiants montrent que la plupart des exercices proposés (parfois tous !) se situent au niveau technique (et souvent avec peu de temps pour les chercher). De plus, pour avoir suffisamment de succès, les examens privilégient régulièrement ce type d'énoncés. On peut penser qu'après un long traitement où on cantonne ainsi les étudiants au niveau technique, la conception qu'ils se font des mathématiques et leurs capacités à étudier des problèmes de mathématiques vont être très pauvres.

Les effets comparés sur l'apprentissage des exercices de type techniques et de ceux de types mobilisables ou disponibles ont été étudiés dans un travail de J. Pian, concernant des étudiants de quatrième année d'université (préparation au Capes). D'abord, les étudiants ont passé un test avec des items des trois types de niveau, puis plusieurs mois plus tard ils ont passé un nouveau test analogue, composé de la même façon relativement aux différents niveaux de fonctionnement et aux contenus mathématiques.

Si N_1 et N_2 sont leurs notes globales (sur 100), leur “progrès normalisé” est défini par

$$P = \left(\frac{N_1}{73}\right)^2 (N_2 - N_1).$$

En effet, il faut écraser les notes basses (il est plus facile de passer de 1 sur 20 à 3 sur 20 que de passer de 10 à 12), et d'autre part se référer au niveau global des étudiants (73 est la meilleure note).

Soit t le nombre d'items de niveau technique résolus par un étudiant, et m le nombre d'items mobilisables ou disponibles résolus, dans le premier test. Avec 50 étudiants, le plan principal d'inertie du nuage des résultats dans les coordonnées (t, m, P) est

$$P = -0{,}06 + 0{,}02\, t + 1{,}32\, m.$$

L'efficacité, en terme de progrès global, de la capacité à résoudre des exercices aux niveaux mobilisable ou disponible se voit clairement sur la comparaison des coefficients des variables t et m. Ce résultat montre l'importance de faire travailler les étudiants sur des exercices qui ne soient pas seulement techniques, et bien sûr ceci demande donc de *donner du temps aux étudiants pour chercher* d'autres types d'exercices.

III 2. Des exemples d'énoncés sur lesquels réfléchir avec les moniteurs

1. Forme des énoncés et importance du temps de recherche.

L'énoncé : Déterminer le signe de f(x) : = x^2 cos x - sin x sur [0, π/2[.

* On demande d'abord aux moniteurs de *prévoir* ce que vont faire les étudiants. La réponse unanime, et sans doute très souvent correcte, est : "ils vont tracer le graphe de f sur une calculatrice, en déduire le résultat ($f \leq 0$), puis essayer de le montrer en étudiant classiquement les variations de la fonction f ".

* On demande ensuite aux moniteurs de commencer cette étude à la manière des étudiants, et d'imaginer ce qui va se passer. Ils calculent donc la dérivée $f'(x) = (2x-1) \cos x - x^2 \sin x$, puis pour étudier cette fonction, la dérivée seconde $f''(x) = (2 - x^2) \cos x + (1 - 4x) \sin x$... (si on manque de temps, on peut le faire soi-même au tableau sous le contrôle des moniteurs).
* A ce moment, *la discussion avec les moniteurs* tourne autour de ce qui va se passer : les étudiants se rendent compte (mais peut-être en dérivant encore une ou deux fois) qu'ils n'y arriveront pas ainsi, et soit l'un d'eux comprend "qu'il faut isoler le x^2 ", soit l'enseignant leur signale lui-même cette possibilité, suggérant la mise en facteur de cos x.
* Ce qu'il faut que les moniteurs saisissent alors, c'est que *le temps consacré à la recherche et la possibilité qu'apparaisse ainsi la conviction que cela ne marchera pas* vont permettre aux étudiants de saisir les deux raisons de la méthode proposée : factoriser par une quantité dont on connaît le signe ne perturbe pas le problème (le signe d'un produit, on sait le trouver !), et la nouvelle fonction à étudier peut ainsi avoir des dérivées bien plus simples. Pour aider à la compréhension de ce point par les moniteurs, on peut les faire réfléchir sur le type d'activité qu'aurait déclenché chez les étudiants l'énoncé ainsi modifié :
"Déterminer le signe de f(x) : $= x^2 \cos x - \sin x$ sur $[0, \pi/2[$ (on pourra mettre cos x en facteur)".
Ils comprennent très bien que ce nouvel énoncé n'aurait pas engendré l'activité de recherche amorcée par l'ancien énoncé, et qu'ainsi la raison de *l'indication de l'énoncé n'aurait pas du tout été comprise par beaucoup d'étudiants : elle aurait ainsi été un obstacle à l'apprentissage*. Pourtant elle aurait donné aux étudiants l'impression de savoir faire, de réussir - alors que la possibilité de réinvestissement du savoir mobilisé par l'indication mais ni problématisé ni étiqueté serait restée très douteuse. Ainsi, on insiste aussi auprès des moniteurs sur *l'importance de la problématisation.*

Remarque. Le problème après la suggestion de changement de tactique devient : "montrer l'inégalité $\tan x \geq x^2$ sur $[0, \pi/2[$". Cet énoncé permet ensuite de développer avec les étudiants des considérations "méta" (dont il faut montrer l'importance aux moniteurs) sur *les méthodes* qu'on peut avoir pour établir des inégalités. Ici, les étudiants vont dériver 2 fois $g(x) = \tan x - x^2$, et obtenir $g''(x) = 2(X^3 + X - 1)$, où $X = \tan x$, de racine $X_0 < 1$, donc g'' s'annule en $x_0 < \pi/4 < 1$, et le minimum m de g' s'écrit

$$m = 1 + X_0^2 - 2x_0 = 1/X_0 - 2x_0 \geq \frac{1-2X_0^2}{X_0} \text{ (car } X_0 = \tan x_0 \geq x_0\text{)} .$$

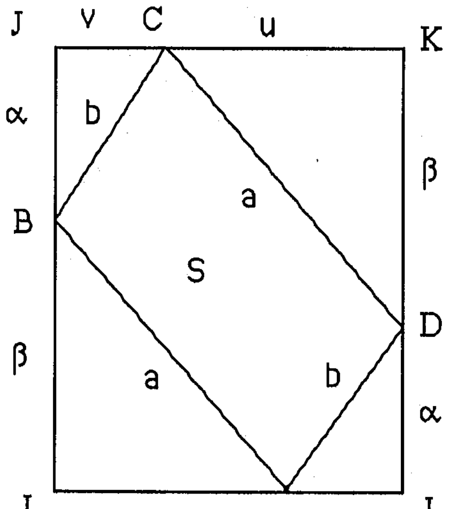
Puis on vérifie que $X_0 \leq 0{,}7$, ce qui montre que $1-2X_0^2 \geq 0{,}02 > 0$... C'est assez subtil, et on peut alors comparer à d'autres méthodes plus faciles, par exemple des inégalités successives : $\tan x \geq x$, $\tan x \geq x + x^3/3$...

2. A la charge de qui sont les changements de cadres et les adaptations ?
L'énoncé : Montrer que le produit de deux nombres qui sont chacun la somme de deux carrés d'entiers est aussi la somme de deux carrés d'entiers.

Variantes possibles de l'énoncé :
"Que peut-on dire du produit de deux nombres qui sont chacun la somme de deux carrés d'entiers ?"
"Que peut-on dire de $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ (a, b, c, d entiers) ? (On pourra utiliser des nombres complexes...)"

"Que peut-on dire de $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ (a, b, c, d entiers) ? (On pourra utiliser les produits scalaires et vectoriels des vecteurs (a, b) et (c, d))"

* Il s'agit de *discuter avec les moniteurs le type d'activités que chacun de ces énoncés peut déclencher chez les étudiants*, en prenant en compte le type d'organisation du travail (en petits groupes, individuel) et le type de gestion (durée de recherche, moment des indications éventuelles, nature des échanges entre étudiants, des étapes).
* Il s'agit aussi de comparer les types de nouveaux savoirs auxquels conduisent ces divers énoncés : *qu'est-ce qui est susceptible d'être institutionnalisé dans chaque cas :* l'utilité d'un changement de cadre sur les couples (a, b), (c, d) donnés (et alors, quel type d'indication, pendant la séance - par exemple : "où rencontre-t-on la somme de deux carrés ?") ? Une formule algébrique valable dans tout anneau commutatif, liée à l'expression de $(x + y)^2$, et dont l'établissement va demander d'*adapter* l'identité remarquable classique pour faire apparaître un signe + et un signe - ? Voir aussi l'exemple 3 pour cette question de l'adaptation de connaissances.
* Il s'agit aussi de *faire évaluer par les moniteurs la possibilité et l'apport éventuel d'un travail expérimental des étudiants pour avancer vers une preuve du résultat cherché* [constatant que
$(3^2 + 1^2)(4^2 + 5^2) = 410$, comment exprimer ce nombre comme somme de deux carrés d'entiers ? Si des essais sur calculatrice révèlent $7^2 + 19^2$ et $11^2 + 17^2$, peut-on en déduire une preuve générale ?]. On comparera utilement avec l'exemple 4.
* Eventuellement, on peut discuter avec les moniteurs la possibilité d'*une motivation mathématique* au problème, pour les étudiants. Par exemple, connaissant l'aire des rectangles de côtés parallèles aux axes, montrer qu'un rectangle en position générale a pour aire ab, en considérant le plus petit rectangle parallèle aux axes qui le contient et utilisant Pythagore...et en se plaçant cette fois dans les réels et plus dans les entiers (voir la figure).



On calcule S par différence, puis la quantité

$a^2b^2 - S^2$, on obtient

$(u^2 + \beta^2)(v^2 + \alpha^2) - (\alpha u + \beta v)^2$,

et on écrit l'orthogonalité de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

* Eventuellement aussi, on peut *proposer des applications* dans d'autres domaines que les entiers, par exemple les polynômes réels (cela met en valeur le fait que c'est d'être dans un anneau commutatif qui est important) : tout polynôme réel positif ou nul partout est la somme de *deux* carrés de polynômes réels (on a besoin de la décomposition des polynômes réels en facteurs irréductibles de degrés 1 ou 2).

* Enfin, on peut demander aux étudiants d'envisager des généralisations (trois carrés, cela ne marche pas, et pour quatre carrés, seule la méthode des nombres complexes se généralise bien, par les quaternions... auxquels il faut penser !).

Remarque : D'autres variantes des énoncés peuvent s'écrire en parlant de "l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers" et en posant une question sur son éventuelle "stabilité par produit" ; ces variantes (avec ou non les indications sur l'usage des complexes, des vecteurs) laissent en plus aux étudiants *la responsabilité d'introduire les notations et symboles* permettant de *traduire* les énoncés ("$a^2 + b^2$", etc), comme l'énoncé initial et la première variante proposée. Cette nécessité d'apprendre aux étudiants à nommer, à symboliser, doit être mise en valeur auprès des moniteurs, voir plus loin (point 5) d'autres exemples d'exercices plus consacrés à ce problème.

3. Appliquer les théorèmes ou les adapter ?
L'énoncé : Montrer qu'une fonction continue f sur $[0, +\infty[$ vérifiant lim f(x) = f(0)=0 possède un maximum et un minimum.

Il s'agit de mettre en évidence auprès des moniteurs que de nombreux exercices classiques de première année d'université demandent, non pas *une application* d'un théorème du cours, mais une *adaptation d'un tel théorème*, introduisant souvent une étape intermédiaire (ici se ramener à un intervalle [a, b]) et éventuellement un changement de cadre ou de registre pour mettre en place cette étape (ici, dessiner un graphe qualitatif, pour faire apparaître les trois cas de figure $f \leq 0$, $f \geq 0$, f de signe variable). C'est là, en tout cas en analyse, une des grandes différence entre les exercices du lycée et ceux de l'université (avec en plus le fait qu'on va souvent, à l'université, faire des exercices sur des fonctions générales non précisées - notées f).

4. Le travail expérimental des étudiants.
L'énoncé : Soit $n \geq 2$ un entier, et $d_1, d_2, \ldots, d_n$ les plus grands diviseurs impairs de $n + 1, n + 2, \ldots, n + n$. Evaluer $\Delta_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$.

* On peut voir avec les moniteurs que, contrairement à l'exemple 2, celui-ci permet parfaitement *une activité d'approche expérimentale* permettant de découvrir une formule conjecturale pour Δ_n, et comme souvent dans ce genre de cas, de la prouver par récurrence : on voit facilement que $\Delta_2 = 4$, que $\Delta_3 = 9$, puis $\Delta_4 = 16$, $\Delta_5 = 25$, $\Delta_6 = 36, \ldots$ Alors la récurrence donne tout de suite la relation

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + 2n + 1, \text{ et bien sûr } n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

* Une question qui peut surgir directement d'une approche non expérimentale du problème, mais aussi de l'approche expérimentale, est de déterminer exactement l'ensemble $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Dans le premier cas, il y a les nombres impairs de $\{n+1, n+2, \ldots, n+n\}$ et les plus grands facteurs impairs des quotients par 2 des nombres pairs de cette liste, quotients qui sont dans $\{1, 2, \ldots, n\}$; et on recommence... Dans l'approche expérimentale on constate que les listes des d_k sont $\{1, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 5, 7\}$, etc. D'où une conjecture, qui mènera d'autant plus facilement à la solution que la formule $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ sera *disponible* chez les étudiants...

* Il faut attirer l'attention des moniteurs sur le fait qu'il n'est pas rare qu'une activité expérimentale des étudiants, même conduisant à de bons exemples ou des résultats partiels, n'induise aucune méthode de solution complète d'un problème (comparer les exemples 2 et 4). D'où *la nécessité d'étudier soigneusement les énoncés avant de les poser...*

5. Trois énoncés centrés sur l'usage du symbolisme et l'introduction de dénominations

(5a) Si une suite réelle (u_n) vérifie $nu_n \to 1$, que peut-on dire de u_n ?

(5b) Montrer que si p et q sont impairs, alors $\dfrac{(p-1)(q^2-1)}{8}$ est un entier pair.

(5c) Limite de la suite définie par $u_0 > 0$ fixé et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{n + \ln(n+1)}{n + \cos n} + u_n}$.

* La discussion avec les moniteurs sur l'exercice (5a) révèle qu'*ils ne s'attendent pas du tout à la réaction des étudiants*. Ces derniers écrivent en effet très souvent "$u_n \to \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \to 0$, donc $u_n \to 0$". Il convient alors d'étudier avec les moniteurs deux questions : "pourquoi les étudiants procèdent-ils ainsi ?" et : "que faire alors avec eux ?"
L'enjeu de la première question, qu'il faut faire comprendre aux moniteurs, est en fait commun aux trois exercices : c'est *l'introduction, pour résoudre un problème, de l'usage de symbolismes* qui, soit *traduisent* une définition, une hypothèse de départ (de l'énoncé, par exemple), soit *simplifient et résument une expression* complexe et son comportement, et *permettent sa manipulation* (dans des calculs, des raisonnements). Ici, par exemple, on traduit l'hypothèse $nu_n \to 1$ par "posons $nu_n = v_n$, alors l'hypothèse est $v_n \to 1$", puis on utilise v_n dans le calcul $u_n = v_n \times \frac{1}{n} \to 1 \times 0 = 0$. Remarquons qu'un étudiant qui écrirait directement la formule $u_n = (nu_n) \times \frac{1}{n}$ aurait en fait probablement compris ce genre de méthode, sans l'expliciter.
En l'absence de cette capacité à « dénoter », les étudiants inventent une procédure intuitive.
La deuxième question est plus délicate : les étudiants utilisent "en acte" une notion non définie dans les cours : la convergence d'une suite vers une autre. Pourquoi pas ? Pourquoi n'est-il pas prudent d'introduire cette notion ? Il n'est pas inutile de faire réfléchir les moniteurs à cette question, et de leur faire élaborer des contre-exemples à destination des étudiants. On peut aussi relier cette manière de faire des étudiants à l'oubli partiel du caractère variable de n dont on voit souvent la manifestation dans des questions non immédiates (par exemple dans l'étude de $(a + 1/n)^n$).

* L'exercice (5b) illustre plus nettement les difficultés que vont avoir les étudiants s'ils ne traduisent pas une hypothèse en introduisant des symboles (de variables, de paramètres) sur lesquels on peut calculer. Ici, si on ne traduit pas l'hypothèse que p et q sont impairs *en posant explicitement* $p = 2r + 1$ et $q = 2s + 1$, il faut raisonner qualitativement et penser à une identité remarquable : $p - 1$ est pair, $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$ est le produit de deux nombres pairs, donc le tout est divisible par 8... mais ensuite ? A comparer au calcul avec r et s qui donne $2r(4s^2 + 4s) = 8r\,s(s + 1)$, et permet de se concentrer sur la parité du nombre $s(s + 1)$.

* Devant l'exercice (5c), les étudiants *et même les moniteurs* peuvent rester bloqués ! Il faut en fait analyser l'énoncé à partir de deux points : l'expression $\frac{n + \ln(n + 1)}{n + \cos n}$ est *trop compliquée à manipuler, il faut lui donner un nom*, par exemple a_n ; et alors on voit que probablement seul le comportement de a_n pour n assez grand va compter dans les raisonnements, ici le fait que $a_n \to a$ (en fait a = 1, mais il est plus facile de généraliser, ce qui n'est pas non plus une activité naturelle pour les étudiants). D'où deux idées, ensuite : d'une part à partir d'un certain rang N on aura les inégalités $a - \varepsilon \leq a_n \leq a+\varepsilon$, et peut-être vont-elles se propager en des inégalités sur u_n pour $n \geq N$ (croissance de fonctions et récurrence) ; de l'autre, l'idée d'une étape intermédiaire : déjà savoir ce que fait la suite v_n définie par $v_0 > 0$ donné et $v_{n+1} = \sqrt{b + v_n}$, où $b > 0$ est une constante. La fin du raisonnement est trop complexe pour être à la charge des seuls étudiants, mais cet énoncé montre bien la grande efficacité en mathématiques de l'action de "*donner un nom*", et c'est de cela qu'il faut faire *prendre conscience aux moniteurs, et plus encore du fait qu'eux mêmes doivent aborder ce type de questions avec leurs étudiants, par un discours "méta"* (c'est-à-dire *sur* l'activité mathématique).

6. Un exercice "élémentaire" pour mettre en valeur la complexité des démarches de traductions logiques dans l'algèbre linéaire.
L'énoncé : "pour quelles valeurs de m la famille de deux vecteurs u = (1, 2) et v = (m, 4) engendre-t-elle IR^2 ? "

Voici comment on peut analyser avec les moniteurs les démarches qu'un étudiant aura à mettre en œuvre pour résoudre ce problème. Il faut bien voir que *cette analyse ne va pas de soi pour les moniteurs*, ils ont naturellement tendance à sauter des étapes qui leur semblent évidentes... et constituent pourtant des obstacles pour les étudiants, qui maîtrisent peu l'usage de la logique en mathématiques, et en particulier celui des quantificateurs (voir plus loin ce qu'on peut dire sur ce sujet précis aux moniteurs).

* *Traduire* l'expression "engendre IR^2", *en revenant à la définition* (c'est une des différences entre le secondaire et l'université : dans les exercices de TD à l'université, on utilise vraiment les définitions - guère au lycée, penser à la continuité ou la dérivabilité) : "tout vecteur de IR^2 est combinaison linéaire de u et v".

* *Première traduction logique* : $\forall w \in IR^2$, w est combinaison linéaire de u et v.

* *Traduire* "être combinaison linéaire" : il existe s et t tels que w = su + tv.

* *Deuxième traduction logique* : $\forall w \in IR^2$, $\exists$ s et t tels que w = su + tv.

* *Changement de registre* : écrire la même chose avec des coordonnées : $\forall$ x et y $\exists$ s et t tels que

$$x = s + mt,$$
$$y = 2s + 4t.$$

* *Changement de point de vue* : interpréter cela comme un système de deux *équations* linéaires d'inconnues s et t (x et y arbitraires étant donnés, on cherche s et t, qui doivent exister). *Traduire une recherche d'existence par la recherche de solutions à une ou des équations est une activité fondamentale en mathématiques*, cette activité de traduction est peu disponible chez les étudiants, et il est nécessaire que les moniteurs prennent conscience qu'il faut en parler aux étudiants chaque fois que l'occasion se présente (*discours méta*).
On cherche donc la ou les conditions de résolution (dans lesquelles m va intervenir). On réécrit le système sous la forme classique

$$s + mt = x,$$
$$2s + 4t = y.$$

* *La suite dépend de l'avancement et de l'organisation du cours d'algèbre linéaire.*
(a) Si on a vu la condition de résolution par déterminant, on trouve $2 - m \neq 0$, $m \neq 2$.
(b) Sinon, la méthode de Gauss mène au système

$$\begin{aligned} s + mt &= x, \\ (4-2m)t &= y - 2x, \end{aligned}$$

et on trouve la même condition si on se rappelle que x et y sont arbitraires.

Bien sûr, si on a déjà à sa disposition l'équivalence entre l'indépendance linéaire et le caractère générateur pour 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on peut directement "trianguler vectoriellement" sur le tableau des coordonnées des vecteur $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ou regarder directement leur déterminant si cette technique a été vue.
La *stratégie peu probable* est celle du *passage au cadre géométrique*, avec traduction de la colinéarité par $m/1 = 4/2$ (coordonnées proportionnelles) ou $4/m = 2/1$ (pentes égales si $m \neq 0$)...
On peut aussi voir sur le système triangulé du point (b) ci-dessus que si $m = 2$, les seuls vecteurs engendrés sont ceux vérifiant $y = 2x$, c'est-à-dire colinéaires à u. Les moniteurs doivent comprendre que tous ces aspects équivalents doivent être passés en revue avec les étudiants.

Remarque. Dans la formation donnée en 2007-2008, *on a fait cette analyse avec les moniteurs avant de leur faire regarder puis commenter une vidéo de l'étude de ce problème dans une séance de travaux dirigés*. L'analyse de cette séance montre que presque toutes ces articulations du travail ont dû être prises en charge par l'enseignant, mais avec une bonne écoute des étudiants, à cause du temps de recherche (même infructueux) qui leur a été laissé.

7. Changement de niveau de conceptualisation, reconnaissance de structures générales, analogies, transferts et particularisations.

L'énoncé : Déterminer la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 2\,u_n + \frac{1}{2^n}$, avec u_0 donné.

L'enjeu de cet exemple est de faire prendre conscience aux moniteurs de la notion de *niveaux de conceptualisation dans lesquels peut s'insérer un problème donné*. Par exemple, une suite vérifiant la relation $u_{n+1} = 2\,u_n + b$ est vue en classe de première comme un "mélange" de suite arithmétique et de suite géométrique, pour lesquelles il y a une technique spécifique. En terminale et début d'université, ce même type de suite peut se rattacher au point de vue des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ et du théorème du point fixe. Le "second membre" variable

$\frac{1}{2^n}$ demande *d'évoquer ici un autre champ conceptuel : celui du linéaire*. Si on écrit la définition de la suite sous la forme $u_{n+1} - 2\,u_n = \frac{1}{2^n}$, on peut interpréter cette relation sous la forme d'une équation linéaire $T(u) = v$ dans l'espace vectoriel S des suites réelles, où $T : S \to S$ est l'application $u = (u_n)_n \to (u_{n+1} - 2u_n)_n$ et v est la suite particulière $\left(\frac{1}{2^n}\right)_n$ (le "second membre"). Dans ce cadre formel on dispose d'une *méthode générale* : résoudre l'équation homogène - ou sans second membre (trouver le noyau de T), puis ajouter à un élément de ce noyau une solution particulière. Ici le noyau est formé des suites $u_n = C\,2^n$, où C est arbitraire, donc est de dimension 1. Comment trouver une solution particulière ? C'est là que *l'analogie peut être utile* : si on a déjà travaillé sur les équations différentielles linéaires du premier ordre, on a vu une méthode dite "de variation de la constante" pour déterminer une solution particulière. On peut donc essayer de *transférer cette méthode*, en faisant varier la constante C, c'est-à-dire en posant $u_n = w_n\,2^n$. Et cela marche !

Qu'est-ce que les moniteurs peuvent retenir de cet exemple pour leur enseignement ? Essentiellement, nous semble-t-il, de varier avec les étudiants les exemples de problèmes de ce type, pouvant se résoudre à divers niveaux, en leur montrant l'utilité de cette diversité des niveaux et des passages entre eux : c'est un *discours* sur les moyens d'utiliser des connaissances mathématiques générales pour étudier des problèmes particuliers. On peut espérer qu'un certain nombre d'étudiants tireront profit pour leur activité mathématique de ce type de discours s'il est fait *régulièrement*.

8. Changement de cadres et transport de compréhension.
L'énoncé : A, B, C, D étant quatre points du plan, peut-on trouver I, J, K, L tels que A, B, C, D soient les milieux des segments [IJ], [JK], [KL], [LI] ?

Si on reste dans le cadre de la géométrie, on peut aborder le problème dans plusieurs sous-cadres de celle-ci.

En géométrie ponctuelle (à la Euclide), on peut partir de la configuration des milieux des côtés d'un quadrilatère pour conclure par le théorème des milieux qu'une condition nécessaire va être que ABCD soit un parallélogramme. Alors, la réciproque du théorème des milieux montre que quel que soit le point I du plan, par exemple, on peut trouver J, K, L répondant à la question.

En géométrie des transformations, on peut composer les quatre symétries centrales de centres A, B, C, D. Comme $S_B o S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$ et $S_D o S_C = t_{2\overrightarrow{CD}}$, $S_D o S_C o S_B o S_A = Id$ si et seulement si $t_{2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})} = Id$, et si et seulement si cette translation est l'identité *sur un point quelconque*.

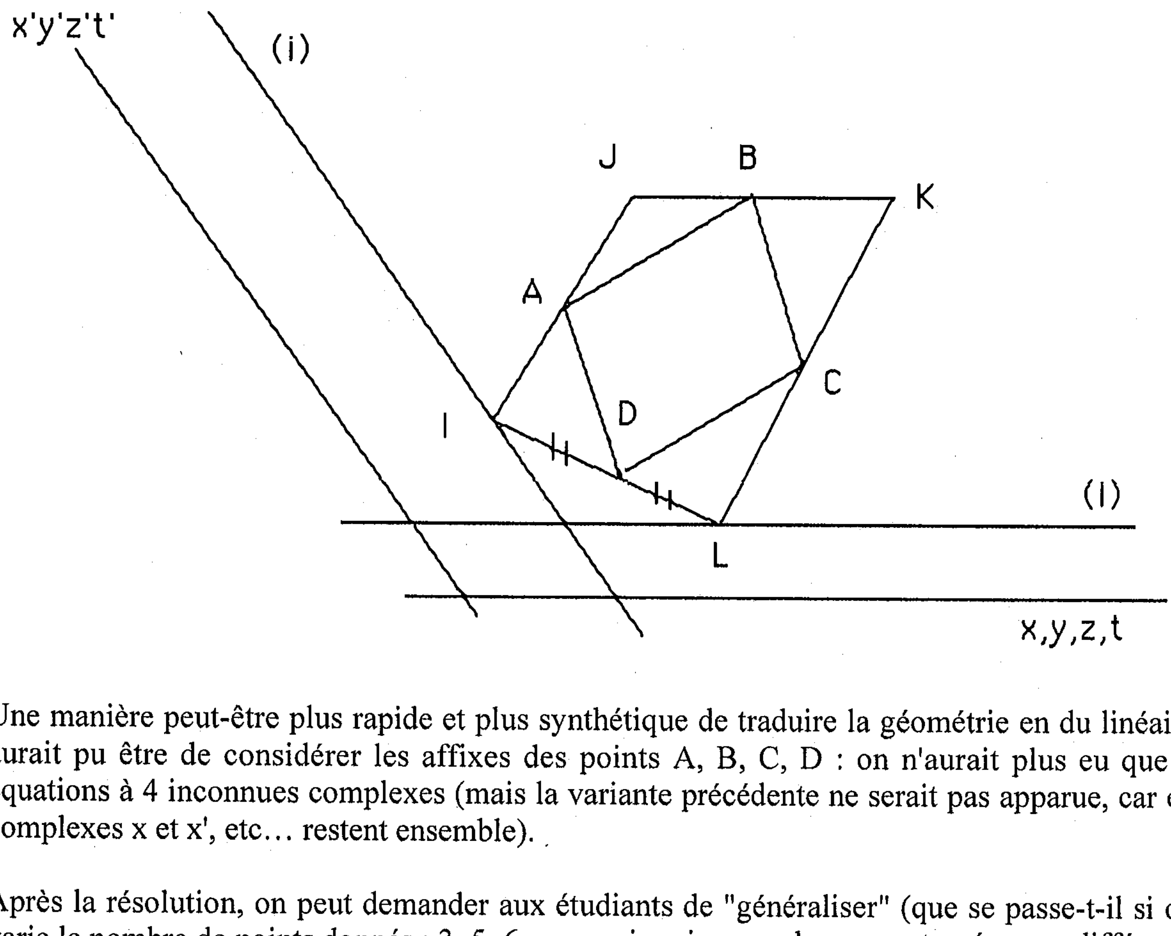
La condition se lit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$, c'est-à-dire "ABCD est un parallélogramme", *qui exprime à la fois que le problème a une solution et qu'il en a une infinité*.

Si on passe *au cadre de la géométrie analytique* où chaque point est représenté par deux coordonnées réelles (a, a') pour A, etc et (x, x') pour I, etc, *on est alors ramené, dans le cadre de l'algèbre linéaire, à deux systèmes de 4 équations linéaires* à 4 inconnues x, y, z, t, et x', y', z', t' :

$$\begin{array}{cccccccl} x & + & y & & & & & = 2a \\ & & y & + & z & & & = 2b \\ & & & & z & + & t & = 2c \\ x & & & & & + & t & = 2d \end{array}$$

et le même avec les lettres primées. Les conditions de résolution pour chacun des systèmes, *résolus de la même façon*, s'écrivent b + d = a + c et b' + d' = a' + c' : [BD] et [AC] se coupent en leur milieu (ou $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$). On voit par exemple que t et t' sont arbitraires, c'est-à-dire que le point L est arbitraire. Cette interprétation géométrique des conditions de résolution *apporte aux étudiants une compréhension supplémentaire de l'idée de paramètres arbitraires* dont dépendent les solutions d'un système linéaire, sous deux aspects : le premier est le fait que la satisfaction d'une condition de résolution pour l'existence d'une solution entraîne *ipso facto* qu'il y en a une infinité ; le second est que suivant les pivots choisis pour résoudre le système, on va trouver comme point arbitraire I ou J ou K ou L.

Attention : si on ne résout pas les deux systèmes (primés et non primés) de la même façon, l'interprétation géométrique des paramètres arbitraires peut être plus délicate ; par exemple, si les variables arbitraires sont x et t', I et L peuvent être choisis sur deux droites (i) et (l) arbitraires chacune parallèle à un des axes de coordonnées, mais chacun des points I et L sont alors fixés sur ces droites (voir la figure). On peut aussi se demander ce qui se passe si les variables arbitraires sont x et z' ... *L'interprétation de la résolution du système linéaire donne ainsi un résultat géométrique initialement imprévu, cela valorise l'utilité du changement de cadre !*



Une manière peut-être plus rapide et plus synthétique de traduire la géométrie en du linéaire aurait pu être de considérer les affixes des points A, B, C, D : on n'aurait plus eu que 4 équations à 4 inconnues complexes (mais la variante précédente ne serait pas apparue, car en complexes x et x', etc... restent ensemble).

Après la résolution, on peut demander aux étudiants de "généraliser" (que se passe-t-il si on varie le nombre de points donnés : 3, 5, 6,..., ou si on impose des rapports - égaux - différents de 1/2 ?).

9. Disponibilité de connaissances à importer d'un autre domaine.

L'énoncé : Soit P un polynôme à coefficients réels ; si on a $\int_0^1 P^2(x)\,dx = 0$, que peut-on dire de $\int_{-1}^0 P^2(x)\,dx$?

Il s'agit de faire comprendre aux moniteurs que les étudiants vont avoir du mal à invoquer un domaine différent de celui où est initialement posé le problème, celui de l'intégrale, et du coup à utiliser le bon point de départ dans ce domaine : l'identité P = 0 sur [0,1]. Un nombre appréciable d'étudiants va essayer de s'en sortir par un changement de variable x --> - x, en le confondant avec le changement P --> - P pour que cela marche (en pensant "en actes" : P est pair) ! Même ceux qui pensent à déduire de l'hypothèse la relation P = 0 sur [0,1] ne pensent pas nécessairement à passer à la théorie des polynômes pour en déduire que P est le polynôme nul.

10. Problèmes d'introduction ou de problématisation d'une notion.

Ce type d'exercices est évidemment à faire si possible *avant* les cours correspondants... mais ils peuvent aussi venir pour *problématiser et améliorer la compréhension après-coup*, selon les relations pédagogiques plus ou moins étroites entre le cours et les travaux dirigés.

(10a) L'indépendance linéaire et le rang.
L'énoncé : Montrer que si, lorsqu'on ajoute à un système S d'équations linéaires homogènes $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n = 0$, $1 \leq i \leq p$, une nouvelle équation linéaire homogène $b_1\,x_1 + \ldots + b_n\,x_n = 0$, l'ensemble des solutions du nouveau système S' est le même que celui de S, alors la nouvelle équation est une combinaison linéaire des anciennes. Conséquence sur la recherche d'un nombre minimal d'équations...

La preuve est aisée en triangulant par Gauss le système S, puis le nouveau système obtenu en ajoutant la nouvelle équation. L'intérêt principal est, partant maintenant d'un système, d'ôter une équation combinaison linéaire des autres, puis de recommencer, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus faire cette opération. Identifiant alors les équations avec les vecteurs $V_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ de IR^n, *cela amène à la notion d'indépendance linéaire* sous la forme : "aucun des V_i n'est combinaison linéaire des autres", définition plus compréhensible que l'habituelle avec sa double négation. De plus, revenant à un système d'équations homogènes dont on retire progressivement les équations encore combinaisons linéaires de celles qui restent, cela amène à la question "le nombre minimal d'équations ainsi obtenu est-il indépendant de la manière de faire ces retraits successifs ?", c'est-à-dire à *une problématisation de la notion de rang.*
Remarque. Il faut comprendre que, pour les étudiants, il ne va pas de soi que le fait d'ajouter une équation à un système diminue (au sens large) l'ensemble des solutions : cela dépend d'une bonne compréhension de la notion d'équations et de solutions d'équations en termes de logique et de théorie des ensembles.

(10b) La notion de famille génératrice. Un problème sur les carrés magiques d'ordre 3 à coefficients réels.

Après avoir défini les carrés magiques d'ordre 3, on note C leur ensemble, et c⟶f (c) la somme associée (des éléments d'une ligne, etc.), et on demande aux étudiants d'exhiber des carrés magiques. A partir des exemples souvent variés trouvés par les étudiants (surtout lorsque la recherche est organisée en petits groupes) on leur demande *comment ils peuvent être sûr de les obtenir tous*, dans la mesure où on voit qu'il y en a une infinité. On peut les aider en suggérant la structure vectorielle, et en les faisant travailler sur la forme linéaire f , avec l'aide du carré formé uniquement de 1 et de l'espace qu'il engendre, et des carrés de somme nulle, et en prouvant la relation $f(c) = 3a_{22}(c)$ ... On peut *problématiser* par le travail sur un tel énoncé *la notion de famille génératrice* ou/et d'espace vectoriel engendré, en faisant apparaître l'idée que cela permet de décrire un ensemble *infini*, mais pourvu d'une bonne structure, par un nombre *fini* d'éléments (ici, 3 générateurs).
On peut aussi changer de point de vue, et chercher les coefficients d'un carré magique comme les solutions d'un système d'équations linéaires à étudier.
On peut enfin s'intéresser aux carrés magiques à coefficients entiers positifs.

(10c) Une introduction à l'intégrale par le problème du barreau.
L'énoncé : Avec quelle force un barreau rectiligne très mince de masse 18 kg et de longueur 6 m attire-t-il une masse ponctuelle de 1 kg située dans son alignement à 1 m d'une de ses extrémités (on rappelle la loi de l'attraction universelle de Newton entre 2 masses ponctuelles m et m' à une distance r : $F = G\frac{mm'}{r^2}$) ?

Ce problème peut mener, par un travail collectif des étudiants, à la construction de l'intégrale de Darboux comme *outil* permettant de résoudre ce problème, et beaucoup de problèmes de mesure de grandeurs géométriques ou physiques. Une analyse détaillée se trouve dans CI2U 1990 et dans Rogalski 2001. L'idée qui doit surgir est de découper la barre en petits morceaux, de minorer et majorer au mieux la contribution de chaque morceau, et d'essayer de passer à la limite, en faisant apparaître ainsi des limites éventuelles de sommes de Darboux comme l'outil (l'intégrale !) adapté à ce type de problème.

(10d) Une introduction à la notion de limite d'une suite numérique : un ensemble organisé de plusieurs activités.

Après l'étude (avec calculatrice et dans le cadre graphique) de plusieurs suites de divers types de comportement (monotones et non monotones, périodiques, convergentes et non convergentes ni monotones,...), on demande un classement de ces suites, avec des critères de classement. Puis on demande si pour chacune de ces suites on peut trouver un nombre λ tel que pour n assez grand on ait $|u_n - \lambda|$ inférieur à $\frac{1}{10}$, à $\frac{1}{100}$. Une notion intuitive, non formelle, comme dans le secondaire, se dégage de ces premières activités.
L'étude de deux vrai-faux est alors le pas décisif qui justifie l'introduction plus formelle de la notion de limite :
(i) une suite à terme positifs qui tend vers 0 est décroissante à partie d'un certain rang ;
(ii) si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Pour plus de détails sur cette introduction à la notion de limite, voir CI2U 1990.

11. Mettre en évidence la nécessité d'avoir intégré l'existence de plusieurs types de méthodes pour certaines classes de problèmes.

(11a) Le "problème des hyperplans" : Dans IR^4 on se donne les sous-espaces E_1, E_2, E_3 définis respectivement par les équations
$3x - 2y - z + t = 0$, $x + y + 2z - t = 0$, $5x + 3z - t = 0$.

(i) Comparez E_3 et $E_1 \cap E_2$.

(ii) Déterminer tous les sous-espaces de IR^4 qui contiennent $E_1 \cap E_2$.

Il s'agit de pointer les *diverses méthodes* dont on dispose pour chercher l'intersection de sous-espaces vectoriels (selon qu'ils sont donnés en implicite, en paramétrique, ou de façon mixte), et les différentes manières dont on peut choisir de décrire un sous-espace vectoriel selon le problème à résoudre (équations, base et paramètres). Pour une analyse détaillée de ce problème bien étudié, on peut se reporter à [Dorier]. L'exemple suivant développe plus en détail certaines de ces méthodes en algèbre linéaire.

(11b) Etant donné un paramètre réel λ, on se donne les 5 vecteurs suivants de IR^4 :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2(\lambda) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer par des équations et par un paramétrage le sous-espace vectoriel $\mathrm{lin}\{u_1, u_2, u_3\} \cap \mathrm{lin}\{v_1, v_2(\lambda)\}$.

Cet exercice est très utile pour faire saisir *l'importance de déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels qui apparaissent dans un problème*, avant tout choix de méthode et plus encore de calcul. Il permet aussi de *mettre en valeur diverses méthodes* pour ce type de problèmes : bricolage intelligent (!), tout par les équations, tout en paramétrique, méthode mixte...

* Bricolage intelligent. La recherche du rang des u_i montre qu'ils engendrent un espace E de dimension 3 (on triangule par Gauss). Puis on voit que $v_1 \notin E$ (plusieurs méthodes), et donc que ces 4 premiers vecteurs forment une base de IR^4 et que si $G = \mathrm{lin}\{v_1\}$ alors $E + G = IR^4$ et $E \cap G = \{0\}$. Ensuite on remarque que $F(\lambda) = \mathrm{lin}\{v_1, v_2(\lambda)\}$ est de dimension 2 quel que soit λ (indépendance de v_1 et $v_2(\lambda)$). Puis on a $4 = \dim(E + F(\lambda)) = 3 + 2 - \dim(E \cap F(\lambda))$, donc $\dim(E \cap F(\lambda)) = 1$, quel que soit λ.
Pour paramétrer cet espace, il suffit d'en trouver un vecteur non nul, qu'on cherche sous la forme $w(\lambda) = av_1 + bv_2(\lambda)$, avec $b = 1$ (pourquoi ?). On écrit que $\{u_1, u_2, u_3, w(\lambda)\}$ est de rang 3 en triangulant, on trouve $a = -\lambda$, d'où $w(\lambda)$ explicitement, et le paramétrage $s \to sw(\lambda)$.

Pour chercher des équations, il y a plusieurs variantes dans le bricolage.

• On cherche tous les hyperplans $ax + by + cz + dt = 0$ qui contiennent $w(\lambda)$; cela donne d en fonction de a, b et c, on fait $a = 1$, $b = c = 0$, puis $a = c = 0$, $b = 1$, puis..., et on trouve 3 équations indépendantes.

• Puisque $E\cap F(\lambda)\subset E$, on peut prendre comme première équation celle de E : $z = 0$. Puis on procède comme ci-dessus en choisissant des cas particuliers "évidents" pour a, b, c, d.

• Comme dans le cours, on élimine s dans le système d'équations traduisant la relation $sw(\lambda) = (x, y, z, t)$ (la condition de résolution).

On voit que le bricolage intelligent demande de dominer de façon disponible beaucoup d'aspects de l'algèbre linéaire (concepts, méthodes, logique). C'est pourquoi il est *utile de donner aux étudiants des méthodes générales portant sur des domaines spécifiques des mathématiques*, qui leur fournissent la possibilité d'entrer dans un problème (souvent par un bon questionnement). On voit déjà à l'œuvre de telles méthodes dans le bricolage précédent. Une manière d'étudier méthodiquement l'entrée dans le problème (11b) peut se faire par exemple des trois façons suivantes.

* Tout par les équations. On cherche les équations de E et celles de $F(\lambda)$, et la réunion des deux forme un système d'équations pour $E\cap F(\lambda)$. On simplifie si nécessaire le système pour qu'il soit de rang maximum, puis on le résout pour paramétrer l'espace. Pour déterminer des équations de E on peut faire comme dans l'une des variantes 1 ou 3 du bricolage. Prenons la variante 1 par exemple : les équations $ax + by + cz + dt = 0$ doivent être vérifiées par les 3 vecteurs u_1, u_2 et u_3 ; on trouve un système d'équations très simple en a, b, c, d dont la solution est $a = b = d = 0$. L'espace E a donc une seule équation : $z = 0$; il est donc de dimension 3.
On fait la même chose pour $F(\lambda)$: ses équations $ax + by + cz + dt = 0$ doivent être vérifiées par v_1 et $v_2(\lambda)$. On trouve 2 équations très simples, on y choisit par exemple c et d comme paramètres, ce qui donne $b = (1 + \frac{\lambda}{2})c + d$ et $a = \frac{\lambda}{2} c + d$. En faisant $c = 0$, $d = 1$, puis $c = 1$, $d = 0$, on trouve les 2 équations indépendantes pour $F(\lambda)$: $x + y + t = 0$, $\frac{1}{2} x + (1 + \frac{\lambda}{2})y + z = 0$. L'espace $F(\lambda)$ est donc de dimension 2 quel que soit λ. On a donc alors 3 équations pour $E\cap F(\lambda)$, et après choix d'un seul pivot naturel on obtient comme système d'équations pour cet espace :

$$\begin{aligned} x + y \qquad + t &= 0 \\ y + z - \frac{\lambda}{2} t &= 0 \\ z \qquad &= 0 \end{aligned}$$

L'espace $E\cap F(\lambda)$ est donc de dimension 1 quelque soit λ (on peut vérifier facilement que ce système est équivalent à celui trouvé par le bricolage). Enfin, ce système étant triangulaire, on le résout immédiatement en prenant t comme paramètre, et on obtient le même paramétrage, avec le même vecteur $w(\lambda)$, que dans le bricolage.

* Méthode mixte : paramétrage et équations. Il faut choisir l'espace qu'on paramètre et celui donné par ses équations. Dans un cas on aura a priori 1 équation (E) et 2 inconnues (les paramètres de $F(\lambda)$), dans l'autre cas 2 équations ($F(\lambda)$) et 3 inconnues (les paramètres de E). Le premier cas est plus simple. On trouve l'équation de E : $z = 0$, par l'une des méthodes déjà vues. Puis on paramètre $F(\lambda)$ par $X = av_1 + bv_2(\lambda)$, et on reporte dans l'équation de E : $z = 0$. On trouve immédiatement $a = - b\lambda$, soit le paramétrage de $F(\lambda)$: $X = bw(\lambda)$. Enfin, il n'y a plus qu'à trouver les équations correspondantes, par l'une des variantes vues dans le bricolage. C'est une méthode assez rapide !

* Tout en paramétrique. On paramètre E (au moyen de u_1, u_2, u_3) et $F(\lambda)$ (au moyen de v_1, $v_2(\lambda)$), et on élimine les 5 paramètres entre les 8 équations paramétrant x, y, z, t. Cette méthode est en fait assez facile, car le système est en grande partie triangulaire : on trouve en effet

$$\begin{array}{lr}
a & = x \\
-a + b & = y \\
\quad 0 & = z \\
2a - 2b + c & = t \\
\qquad d - 2e & = x \\
\qquad -d & = y \\
\qquad d + \lambda e & = z \\
\qquad 2e & = t
\end{array}$$

On en déduit facilement les conditions de résolution en a, b, c, d, e :

$$\begin{array}{l}
x + y \qquad + t = 0 \\
x \quad - z + (1 + \lambda/2)t = 0 \\
\quad z \qquad = 0
\end{array}$$

système d'équations de $E \cap F(\lambda)$ (équivalent à celui trouvé avant !). Le paramétrage s'en déduit en résolvant (facilement!) ce système.

Pour plus de détails sur les méthodes générales pour résoudre certains types de problèmes d'algèbre linéaire, on peut se reporter à [Dorier].

(11c) Trouver la limite quand $n \to +\infty$ de $I_n = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n dx$

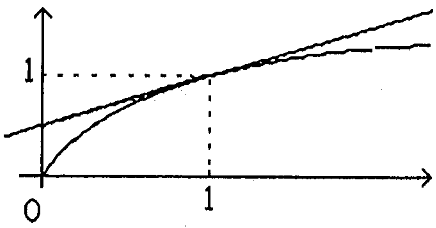
En l'absence du théorème de convergence dominée, ni de possibilité apparente de calculer une primitive, ce n'est pas une application directe et isolée d'un théorème. Il va donc falloir penser à des *méthodes générales* de majoration - minoration, d'intégrales ou/et de fonctions.

La première méthode pour évaluer la limite d'une intégrale dépendant d'un entier n est de regarder comment se présente la fonction à intégrer, qui est ici de la forme f^n, avec $f(x) = \frac{2x}{x+1}$
On peut penser qu'il sera rare de voir les étudiants représenter spontanément le graphe de la fonction f "pour se donner une idée de ce qui se passe", et les moniteurs auront à insister sur ce point de départ, mais peut-être après d'autres tentatives des étudiants.

* Le dessin du graphe de f et de ses puissances peut amener à deux méthodes.

• La fonction f est croissante et n'atteint 1 qu'en x = 1, donc sur [0, a] f^n est majorée par $f(a)^n$, son intégrale sur [0, a] est majorée par $af(a)^n \leq f(a)^n$, et son intégrale sur [a, 1] par 1 - a Si on prend $a = 1 - \varepsilon/2$ et $n \geq N$ choisi pour que $f(a)^N \leq \varepsilon/2$ (ce qui est possible car $f(1 - \varepsilon/2) < 1$), on obtient donc $I_n \leq \varepsilon$ si $n \geq N$. C'est une "limite statique" simple et générale mais *délicate pour les étudiants s'ils n'ont pas atteint ce degré de conceptualisation de la notion de limite.*

• Essayer de majorer f au mieux par une fonction g dont on connaît une primitive de la puissance n-ième. Le seul cas raisonnable pour g est une fonction affine, donc on pense à une tangente au graphe de f.



La fonction f est sous sa tangente en 1 (par concavité immédiate ou parce que l'inégalité $\frac{2x}{1+x} \leq \frac{x+1}{2}$ est évidente). Donc on peut majorer I_n par $\int_0^1 (\frac{x+1}{2})^n dx = \frac{1}{n+1} \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ $< \frac{2}{n+1}$.

En ce qui concerne le démarrage des étudiants, il faut plutôt s'attendre à ce qu'ils cherchent directement à trouver une primitive. Plusieurs manières de faire peuvent leur sembler naturelles.

* Un changement de variable $\frac{2x}{1+x} = t$ donne $I_n = \int_0^1 \frac{2t^n}{(2-t)^2} dt$. A ce point une première intégration par partie donne $I_n = 2 - \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1 - t/2} dt$. Une simple minoration de l'intégrale semble ne rien donner... En deuxième année, l'enseignant pourra suggérer de développer en série entière $\frac{1}{1 - t/2}$, ce qui peut se justifier de plusieurs façons, et on obtient (sans doute avec l'aide de l'enseignant) la valeur $\frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} \frac{k}{2^k(1+k/n)} \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$. En première année, cette méthode ne débouche pas. Une deuxième intégration par partie, "dans l'autre sens", peut être présentée comme plus raisonnable, car faisant apparaître un $\frac{1}{n+1}$. On obtient $\frac{2}{n+1} - I_n =$ $\frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(2-t)^3} dt$. Peut-on majorer le deuxième membre ? En majorant t^{n+1} par 1, on le majore par $\frac{3}{4(n+1)}$, et $I_n \rightarrow 0$. Mais il est important de mettre en valeur l'idée qu'il vaut mieux intégrer un t^{n+1} dans une intégrale sur [0,1] que le majorer par 1 : la première opération fait apparaître un $\frac{1}{n+2}$, au lieu d'une majoration par 1 ! Ici, on majore donc $\frac{1}{(2-t)^3}$ par 1 et on intègre le t^{n+1}, ce qui donne comme majoration $0 \leq \frac{2}{n+1} - I_n \leq \frac{2}{(n+1)(n+2)}$, ce qui montre même que $I_n \approx \frac{2}{n+1}$.

A ce point, *on s'aperçoit restrospectivemnt que la première forme obtenue par changement de variable* : $I_n = \int_0^1 \frac{2t^n}{(2-t)^2}\,dt$, *permettait déjà de conclure en utilisant le principe "on garde le t^n et on majore le reste"* ; on obtient $In \leq \int_0^1 2t^n dt = \frac{2}{n+1}$.

* Une intégration par partie raisonnable donne

$$I_n = \left[x\left(\frac{2x}{x+1}\right)^n\right]_0^1 - \int_0^1 nx\left(\frac{2x}{x+1}\right)^{n-1} \frac{2}{(x+1)^2}\,dx \text{, soit } I_n = 1 - \int_0^1 n\left(\frac{2x}{x+1}\right)^n \frac{1}{x+1}\,dx .$$

On ne peut guère aller plus loin, mais l'enseignant peut demander si on peut majorer ou minorer dans l'intégrale, et aisément $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$. Ceci donne donc l'encadrement $1 - nI_n \leq I_n \leq 1 - \frac{n}{2} I_n$, ce qui permet de conclure que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+2}$: on obtient non seulement la limite 0, mais aussi un équivalent de I_n au facteur 2 près.

En fait il y a encore plusieurs méthodes, chacune apte à valoriser plusieurs techniques générales de majoration. On peut : (1) poser $t = \frac{1}{1+x}$; (2) poser $x = \tan^2 t$, et utiliser l'expression de sin2t en fonction de tan t ; on se ramène à une intégrale sur $[0, \pi/4]$, et en majorant les tangentes qui restent par 1 on obtient $I_n \leq \int_0^{\pi/4} 4\sin^n(2t)\,dt = 2W_n$, où W_n est l'intégrale de Wallis classique, qui aura sans doute déjà été vue par les étudiants ; (3) majorer $\frac{2x}{1+x}$ par $x(2-x)$ et poser ensuite $x = 2\sin^2 t$, ce qui ramène à l'intégrale de Wallis ; (4) intégrer par partie $(2x)^n \frac{1}{(x+1)^n}$ pour en déduire une *relation de récurrence*, où on majore I_n par I_{n-1} ; (5) on peut même par des intégrations par parties successives trouver un développement asymptotique de I_n quand $n \to +\infty$...

Bref cette intégrale peut s'utiliser à divers moment pour présenter aux étudiants diverses manières de prouver la convergence vers 0 d'une intégrale dépendant d'un entier n. *Le bilan à tirer* avec les étudiants concerne *l'existence de diverses méthodes utiles* dans ce genre de situations : évaluer la fonction à intégrer, la représenter graphiquement ; intégrer des facteurs et en majorer d'autres, avant ou après une intégration par partie ; préférer intégrer des morceaux faisant apparaître des termes tendant vers 0, par exemple les x^p, qui donnent un $\frac{1}{p+1}$; chercher une formule de récurrence (c'est souvent une intégration par partie qui permet de la trouver)...

III. 3. Quelques moyens pour traiter de questions de logique avec les étudiants sans faire un cours formel de logique, à l'occasion d'erreurs rencontrées

Le problème des déficiences dans les capacités de raisonnement des étudiants est l'un des points les plus souvent cités par les moniteurs quand on les interroge sur les problèmes d'enseignement qu'ils rencontrent. Cette question n'est pas simple. On a peu parlé et on parle encore peu de ces questions dans le curriculum des étudiants, tant scolaire qu'universitaire. Des sondages faits auprès de professeurs d'université montrent que des questions de logique ne sont abordées dans les cours magistraux qu'à l'occasion de la récurrence, réputée difficile (voir sur ce sujet la présentation de Rogalski 2001).
En ce qui concerne les problèmes soulevés par l'implication, voir [Rogalski et Rogalski]. Pour toutes les questions de logique dans l'enseignement des mathématiques à l'université, et en particulier les problèmes avec les quantificateurs et les notions de variables libres ou liées, voir Durand-Guerrier et Arsac 2003 et Durand-Guerrier 2006.

Avec les moniteurs, outre ces renvois bibliographiques, on peut se proposer de leur donner un moyen peut-être capable de remplacer un cours de logique rarement fait, et souvent peu efficace quand il est fait, car éloigné des mathématiques en action. Nous avons provisoirement choisi de leur donner une liste de tests ou d'exercices à faire avec les étudiants, à telle ou telle occasion d'erreurs de raisonnement rencontrées. Il n'est en effet pas toujours facile de savoir expliquer où se situe une erreur, quand c'est vraiment la logique, et non le sens erroné de concepts mathématiques, qui est en cause, et fabriquer dans le feu de l'action un exemple propre à convaincre les étudiants n'est pas si simple. Les exemples ci-dessous sont donc fournis explicitement aux moniteurs pour leur servir de début à une base de données de ce type à se constituer soi-même. A eux d'avoir recours à l'un ou à l'autre selon les circonstances rencontrées avec leurs étudiants.

(1) La question des hors sujets dans l'implication quantifiée

Un nombre important d'étudiants sont déstabilisés lorsqu'il prennent conscience que dans l'implication universelle "$\forall\ x \in E\ \ P(x) \Rightarrow Q(x)$" il peut y avoir des x pour lesquels P(x) est fausse : c'est la question des "hors-sujet".

Hors-sujet : exercice à proposer aux étudiants

On se propose d'évaluer la véracité de l'assertion (A) suivante :

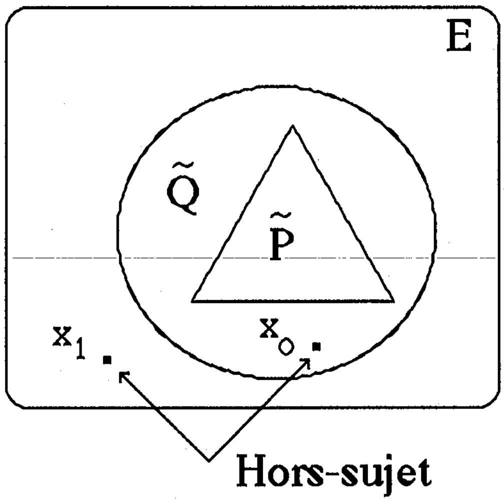
(A) : "$\forall x \in \mathbf{IR}\ \forall \lambda \in \mathbf{IR}$, si $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda + 3 \leq 0$, alors $|x| \leq 2|\lambda| + 1$".

(a) Montrer que l'hypothèse se réécrit sous la forme : $(x - \lambda)^2 \leq (\lambda - 1)^2 - 4$.

(b) Que se passe-t-il si $-1 < \lambda < 3$?

(c) Selon vous, l'assertion (A) est-elle vraie ?

Dans la discussion qui s'ensuit, il peut être utile de donner une interprétation en théorie des ensembles naïve : dans l'ensemble E de référence où varie la variable x, si on note $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ les ensembles des x vérifiant P et Q, l'implication se traduit par $\widetilde{P} \subset \widetilde{Q}$.



(2) Comment montrer à un étudiant de licence que son raisonnement est faux dans sa "preuve" de l'inclusion $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$? Question de la dépendance dans les assertions du type pour tout et il existe.

Rappel : $x \in \overline{A}$ signifie que tout voisinage V de x coupe A.

Preuve de l'étudiant :

"Soit $x \in \overline{A \cup B}$, et soit V un voisinage de x ; V coupe $A \cup B$,

donc ou bien V coupe A, ou bien V coupe B, et par suite x est bien dans $\overline{A}$ ou dans $\overline{B}$."

Bien sûr, l'erreur consiste dans le fait que le choix indiqué par "ou bien...ou bien" dépend de V. Mais comment traduire ce fait de façon convaincante pour un étudiant ? Réponse : *par des notations appropriées rendant possible l'usage de quantificateurs.*

D'abord, on remplace A et B par A_1 et A_2. Puis on réécrit le raisonnement avec des quantificateurs :
$\forall$ V voisinage de x, $\exists\, i \in \{1, 2\}$ tel que V coupe A_i.
La comparaison avec l'écriture formelle de ce qu'on souhaite montrer met l'erreur en évidence :

$\exists\, i \in \{1, 2\}$ tel que $\forall$ V voisinage de x, V coupe A_i (c.à.d. $x \in \overline{A_i}$).

Pour rectifier le raisonnement (en gardant la même idée de démonstration), il faut préciser la dépendance de i en fonction de V. Comme elle n'est pas définie, on introduit

$$c(V) := \{ i \in \{1, 2\} \mid V \text{ coupe } A_i \}.$$

Le raisonnement dit que $\forall$ V c(V) est non vide, et on veut prouver que $\exists\, i \in \{1, 2\}$ tel que $\forall$V c(V) contienne i.

Sinon, par contraposée, pour i = 1 et pour i = 2 il existe V_1 et V_2 tels que V_1 ne coupe pas A_1, et V_2 ne coupe pas A_2 ; mais alors $W = V_1 \cap V_2$ est un voisinage de x qui ne coupe pas $A_1 \cup A_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse $x \in \overline{AUB}$. CQFD

Cette preuve met en évidence que le raisonnement reste vrai pour un nombre fini d'ensemble, et devient faux pour une infinité.
Bien entendu, après un tel exercice utile pour l'usage des quantificateurs, il peut être utile d'utiliser une autre caractérisation de l'adhérence pour obtenir une preuve plus simple...

(3) Quelques tests à faire faire aux étudiants lorsqu'on constate des erreurs de raisonnements concernant l'implication P ⇒ Q, en particulier les idées selon lesquelles l'implication est fausse si P est fausse, ou qu'elle entraîne la réciproque cachée sous la forme non P ⇒ non Q.

(a) Le test de Wason

On dispose de cartes sur lesquelles figurent sur une face une lettre et sur l'autre un nombre entier.

On veut tester la règle éventuelle : "si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un nombre pair sur son autre face". Pour cela on prend un échantillon de 4 cartes, qu'on pose sur la table ; on voit alors la disposition ci-contre .

$\boxed{E}$ $\boxed{4}$ $\boxed{K}$ $\boxed{7}$

Quelle(s) carte(s) exactement doit-on retourner pour savoir si la règle est respectée sur l'échantillon?

Un grand nombre d'étudiants vont retourner seulement le E, et certains les 4 cartes...

(b) Question de contrat social (les bonbons de la maîtresse)

Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit : "cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".
Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent : "Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons !". Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat ...
Quels commentaires vous inspire ce récit ?

Beaucoup d'étudiants vont imaginer tout un tas de raisons pour rendre vraie l'hypothèse "quelqu'un a su faire le problème"...

(c) Assertion non calculable à prémisse fausse (triangle)

Que pensez-vous de la véracité de l'assertion suivante ?
"Si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral".

La discussion sera sans doute épique... surtout si on offre plus d'alternatives aux étudiants pour répondre que seulement vrai-faux : idiot, n'a pas de sens, absurde, etc

(d) Assertion calculable à prémisse fausse (suite récurrente)

Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \lambda$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Soit H_n l'assertion " $u_n \leq \frac{2^n}{3} - 1$".

(a) L'implication " $H_n \Rightarrow H_{n+1}$" est-elle vraie pour certains n ? pour tout n ?

(b) Calculer explicitement u_n en fonction de λ et de n [on pourra poser $u_n = v_n - 1$].

(c) Montrer que si $\lambda > -\frac{2}{3}$ toutes les assertions H_n sont fausses.

(d) Si $\lambda = 10$, que peut-on dire de l'assertion " $\forall n \; H_n \Rightarrow H_{n+1}$ " ?

(e) Assertion calculable à prémisse fausse (arithmétique)

L'assertion "si 1 = 2, alors 2 = 3" est-elle vraie ?

Un certain nombre d'étudiants vont accepter cette assertion parce qu'on peut passer de l'hypothèse à la conclusion par un calcul simple : ajouter 1 aux deux membres. Leur faire toucher du doigt qu'elle est encore plus "bizarre" que l'assertion du triangle...

(f) L'implication de la logique quotidienne est une équivalence, contrairement à celle des mathématiques.

Un père dit à son fils : "si tu réussis ton bac, je t'offrirai une moto". Comment le fils comprend-il cette phrase, pour qu'elle soit efficace ?

Dans la vie courante, $P \Rightarrow Q$ signifie aussi non $P \Rightarrow$ non Q (principe du maximum d'information : si vous savez que Q peut avoir lieu sans que P soit vraie, vous devez le dire à votre interlocuteur, sinon vous serez taxé de mauvaise foi... revoir les bonbons de la maîtresse).

(4) Sur la question des quantificateurs implicites

Par exemple f = g (fonctions) est souvent traduit par f(x) = g(x) avec une variable x qui semble libre, alors qu'elle est en fait liée par un quantificateur caché. Les étudiants ont du mal à saisir cet implicite, surtout si le quantificateur porte sur un objet mathématique plus élaboré qu'un nombre. Voici un exercice qui peut aider à le révéler.

Exercice 1 sur les fonctions. Dans ce qui suit, toutes les fonctions sont réelles et définies sur **IR.**

(1) Montrer que si la fonction f est continue en 0 et si la fonction g n'est pas continue en 0, alors la fonction f + g n'est pas continue en 0 [on pourra écrire g = (f + g) - f].

(2) L'assertion A suivante : "si f est continue en 0 et si g n'est pas continue en 0, alors le produit fg n'est pas continu en 0" est-elle vraie ?

(3) Trois variantes pour cette troisième question :

(a) Quelle hypothèse de plus peut-on faire pour changer la véracité de l'assertion A ?

(b) Comment modifier l'hypothèse dans l'assertion A pour que celle-ci devienne vraie ?

(c) Comment modifier, dans l'assertion A, l'hypothèse pour que la conclusion devienne vraie ?

Exercice 2 sur les fonctions.

(1) Traduire formellement la phrase suivante concernant une fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$: "chaque point possède un voisinage sur lequel f est bornée".

(2) Peut-on en déduire que f est bornée ?

Un test sur les DDI

On considère l'assertion suivante :

"Parmi les nombres rationnels, seuls les nombres décimaux peuvent avoir deux développements décimaux illimités différents",

(où on précise que par exemple 3, 24 a pour développement décimal illimité 3, 2400000...).

Ecrire cette assertion sous la forme "$\forall x \in X \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$", en précisant X, P et Q.

(5) Sur l'inversion des quantificateurs

Voici un petit exercice "concret" qui peut aider à faire saisir la différence entre le $\forall\exists$ et le $\exists\forall$.

Les chiens qui aboient

Deux habitants de maisons dans la campagne vont se plaindre à la gendarmerie du village voisin. L'habitant A dit :

"C'est insupportable, je ne peux pas dormir, dans le voisinage un chien aboie chaque nuit !".

L'habitant B dit :

"C'est insupportable, je ne peux pas dormir, dans le voisinage chaque nuit un chien aboie !".

A votre avis, que vont faire précisément les gendarmes pour répondre à chacune des deux plaintes qui leur sont soumises ?

Mais attention, il ne faut pas croire que le langage courant suffise à expliquer les subtilités de la logique mathématique, c'est même souvent le contraire.

Par exemple, les deux phrases "chez tout homme il y a quelque chose de bon" et "il y a quelque chose de bon chez tout homme" sont synonymes dans le langage courant, bien que les quantificateurs " chez tout" et "il y a" y soient inversés : le contexte fait évidemment comprendre que le "bon" de la deuxième phrase n'a aucune chance d'être le même pour tous les hommes.

IV LES DEROULEMENTS

A. Exemples de travail avec les moniteurs sur des vidéo tournées en TD.

L'idée est de montrer des extraits de vidéos pour sensibiliser les moniteurs aux questions de des déroulements des séances de TD ; ces vidéos correspondent en effet à des choix différents, qu'on va essayer de dégager et de faire discuter, en relation avec les activités possibles des étudiants sur les énoncés proposés.

Ce visionnement se déroule de la manière suivante :
On donne aux moniteurs l'énoncé cherché par les étudiants et on leur demande de faire une analyse a priori de l'exercice, voire de faire des prévisions (nous nous baserons ici pour donner des exemples sur la vidéo correspondant à l'exercice 6 dont l'analyse a priori a été faite), sorte de vidéo-témoin ci-jointe.
Tout ce qui se rapporte à ce témoin est mis en italique. Il s'agit de l'énoncé suivant :
Dans R^2 on considère la famille des deux vecteurs $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (m,4)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de m la famille engendre R^2 ?
Pour quelle(s) valeur(s) de m la famille (u_1, u_2) est-elle libre ?

Puis on visionne des extraits.
On montre au maximum 20 minutes en accélérant sur les phases où les étudiants travaillent individuellement.
Contexte de cet exercice :
Nous sommes au mois de novembre.
Il s'agit d'étudiants de première année qui ont choisi les deux UE de mathématiques du cursus maths-physique. Ils se destinent a priori à des études de maths.
Depuis le début du semestre (3 séances d'1h30 par semaine), la moitié des séances a été consacrée à la résolution et discussion de systèmes linéaires avec paramètres (méthode de Gauss) puis à la notion d'espace vectoriel, plus précisément sous espace vectoriel de R^n, introduit comme sous ensemble stable par combinaison linéaire.
Les notions de famille génératrice, de famille libre ont déjà été vues aux séances précédentes.
Les étudiants ont déjà eu des exercices du type :

1) *Vérifier si un sous ensemble de R^3 est un sous espace vectoriel ou non.*
2) *Montrer que deux vecteurs donnés forment une base d'un plan vectoriel.*

Ici, l'objectif de l'enseignant est de consolider le lien entre famille génératrice, systèmes linéaires et représentation géométrique.
Il a aussi l'intention d'arriver à leur faire trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de deux vecteurs pour qu'ils forment une base de R^2 (sans le dire sous la forme déterminant non nul : aucun zéro sur la diagonale du système triangulaire équivalent obtenu par la méthode de Gauss)
La majorité des étudiants peuvent dire tout de suite qu'il faut que m soit différent de 2 (question) mais ne savent pas comment s'y prendre pour le démontrer.
Ils n'arriveront pas seuls à :
- voir qu'il faut prendre un vecteur u générique de R^2
- traduire « u est combinaison linéaire » en système linéaire où les inconnues sont les coefficients α et β et non les coordonnées x et y de u .
La discussion du système sera difficile.

La phase de recherche guidée par l'enseignant dure 12 mn.
La discussion du système commence à la $20^{ème}$ minute.

Ici l'enseignant ne fait pas travailler les étudiants en petits groupes, sans empêcher les discussions entre voisins. Il laisse chercher les étudiants sur la première question, en circulant dans les rangs et en relançant les recherches à travers ses réponses à des questions. Il relance aussi plusieurs fois au tableau. Il fait avancer quelquefois les choses par des aides intermédiaires collectives - qu'avez-vous à votre disposition, qu'est-ce que vous reconnaissez, ça vous fait penser à quoi ? Comment pouvez-vous dire les choses autrement ?

On ouvre ensuite la discussion avec les moniteurs et on fait un bilan pour conclure cette partie, qui ne fait que reprendre systématiquement les éléments apparus dans la discussion.

Les moniteurs commencent par donner des impressions générales, diverses, on élimine autant que possible les jugements, en montrant qu'on n'a aucun élément pour juger, et, petit à petit, on introduit plusieurs questions pour organiser un peu la discussion en essayant de les proposer après une intervention des étudiants ayant un rapport avec la question.
On essaie de recentrer le débat autour de deux axes : les activités possibles des étudiants et les choix des enseignants.

On peut dégager par exemple des interrogations sur **le démarrage du travail** – qui fait quoi ?
Dans la première vidéo, l'enseignant laisse les étudiants chercher longtemps et intervient pour donner des étapes après que les idées aient été émises par au moins un étudiant.
Les moniteurs sont souvent étonnés du temps que ça prend et se demandent quel est l'intérêt de laisser chercher tout ce temps.
Certains doublent cette interrogation de la réflexion suivante : les étudiants n'apprennent même pas leur cours, comment les faire travailler en TD ? Pourquoi les laisser chercher alors qu'il faudrait d'abord leur refaire le cours ?
Le problème du cours magistral, auquel souvent les étudiants disent ne pas comprendre grand-chose, peut se greffer ici.

Une deuxième série d'interrogations tient à l'interrogation suivante : compte tenu du déroulement précis organisé par l'enseignant, de la durée du travail de recherche et des aides dispensées tout du long, quelles **activités** ont finalement « possiblement » développées les étudiants (a minima ou a maxima) ?
Dans la vidéo « témoin » on peut penser que, grâce au temps de travail qui leur a été accordé et aux quelques relances de l'enseignant, les étudiants sont prêts à entendre (et pas seulement à écouter) la correction qui va leur apporter ce qui leur manquait pour terminer et donc qu'ils vont apprendre quelque chose ainsi.

Une troisième série de questions porte sur les **corrections** : qui corrige, reste-t-il un modèle, quelles relations avec ce qu'ont fait les étudiants, qu'est-ce qui est corrigé (les résultats, les justifications) et comment – au fur et à mesure ? Et question complémentaire quel bilan est tiré de l'exercice : qu'est-ce qui est repris (bilan global, ou local), est-ce que les choix du début sont repris, les étapes éventuelles sont-elles recollées, les connaissances, méthodes ou adaptations mises en fonctionnement sont-elles citées ou reprises....
Ici après avoir rédigé au tableau lui-même un corrigé succinct modèle, l'enseignant élargit sur d'autres points de vue pour résoudre le même énoncé, généralisant ainsi et permettant une meilleure compréhension éventuelle des étudiants en les amenant à croiser le regard algébrique et le regard géométrique.

Une dernière série de discussions porte plus spécifiquement sur les **alternatives** des enseignants.
Évidemment un déroulement est fonction de la tâche elle-même (et des étudiants) ! Et sans doute de conceptions personnelles des enseignants, notamment de l'idée qu'ils ont des apprentissages, des math et de leur rôle dans tout ça.
Cependant une telle question permet de revenir systématiquement sur le choix de faire travailler les étudiants individuellement ou en petits groupes, de leur laisser ou non le temps de chercher, d'envoyer ou non quelqu'un corriger au tableau, voire même de les tutoyer ou non....
Par exemple, une des problématiques très répandues côté enseignants est la suivante : on a le choix entre passer du temps à faire travailler les étudiants en TD et faire peu d'exercices, ou faire beaucoup d'exercices mais sans s'occuper autant des étudiants. On ne tranchera pas !
Et encore une autre : on travaille pour les moyens ou on travaille pour les bons.

De plus, automatiquement alors interviennent **les contraintes** qui pèsent sur notre enseignement.
Cours en amphi et TD : imposé ! Feuilles de TD souvent imposées, mais aussi hétérogénéité des groupes, manque de cohésion dans les équipes d'enseignement, isolement, manque d'engagement réel et de travail des étudiants... tout sort à cette occasion et peut être discuté en essayant de dégager ce qui dépend de nous et nos marges de manœuvre.
La diversité des opinions, qui ne peut manquer de se manifester à cette occasion est très précieuse et emblématique de ce qui se passe à l'Université : elle doit être soulignée.

Un bilan, respectant ces différences, peut être cependant esquissé :

a) Une première idée à souligner est que les activités des étudiants **dépendent** fortement des déroulements, comme elles dépendent fortement des énoncés et de la posture initiale des étudiants.
La même tâche peut ainsi donner lieu à des activités (très) différentes selon le déroulement et l'étudiant. Les différences ne vont pas toujours dans le même sens !

b) Ce qui peut être choisi de manière variable dans les déroulements peut se lister ainsi :
- la chronologie (durées des différentes phases),
- les formes de travail (en petits groupes ou non),
- le fait de donner ou non du travail à la maison et ce qu'on en fait,
- les interventions et tout particulièrement le moment où on les fait : ce peut être des questions, permettant de démarrer sans tout dire par exemple, des relances, des aides, des explications, des corrections, des reprises, bilans, et compléments.

Les aides peuvent être individuelles, publiques ou collectives – elles peuvent donner des sous-tâches (réduire la tâche initiale) ou ajouter des éléments à ce qu'ont fait les étudiants, leur faire gagner quelque chose à partir de ce qu'ils ont esquissé.

Enfin pour donner quelques éléments plus précis liés à des éléments didactiques dont on dispose, on donne aux moniteurs que ça intéresse un petit document sur le travail autonome des étudiants, en petits groupes ou non, qui peut leur permettre d'aller un plus loin.

B. Recherche et /ou travail en petits groupes ?

I Pourquoi laisser chercher les étudiants en TD et/ou les faire travailler en petits groupes ?

Différentes théories générales de l'apprentissage[2] permettent de faire des hypothèses sur les effets positifs, sur les acquisitions éventuelles des étudiants, des moments de recherches qui leur sont laissés, moyennant des conditions sur lesquelles nous reviendrons largement.
Sont en cause plusieurs facteurs, à la fois l'autonomie du travail correspondant et, s'il y a travail en petits groupes, les interactions entre étudiants, qui accompagnent le travail en petits groupes.
D'une part, il semble favorable aux apprentissages[3] de laisser des moments où les étudiants travaillent « sans » l'enseignant[4], se posent des questions, ou encore font des essais, des erreurs et les rectifient en partie eux-mêmes : on dit que cela contribue à la construction de leurs propres connaissances. L'enseignant a posé les problèmes sur lesquels ils travaillent, il peut répondre à des questions, par exemple en relançant les étudiants, mais il n'organise pas leur travail. Cela peut se passer en laissant chercher les étudiants individuellement, ou en tolérant des échanges, non organisés, entre voisins ou encore en mettant en place un travail en petits groupes, modalité particulière du travail autonome.
Soulignons qu'à nos yeux, ce travail n'est pas réservé aux connaissances nouvelles, à introduire aux étudiants : nous pensons en effet que les apprentissages sont longs, lents, différents selon les étudiants, avec des arrêts et des reprises, des allers-retours, des prises de conscience. Toutes les occasions de mises en fonctionnement variées des connaissances sont utiles et peuvent être l'occasion d'une recherche autonome : c'est une dynamique longue entre le (texte du) savoir, son exposition et le travail sur les applications de ces connaissances qui doit se mettre en place. Nous nous plaçons ainsi dans une perspective conceptuelle, où les apprentissages ne s'arrêtent pas à des acquisitions de techniques et adoptons la formule de G. Vergnaud, qui cite les problèmes comme « sources et critères du savoir ». Font partie de l'apprentissage l'exploration des notions et leur réorganisation entre nouvelles et anciennes notions. Apprendre n'est ainsi pas pris au sens de mémoriser les définitions et propriétés du cours mais au sens d'accéder à l'utilisation du cours (à bon escient). Charge aux enseignants d'élaborer une telle dynamique !

Revenons à cette modalité particulière de travail des étudiants qu'est le travail en petits groupes. D'autre part, il semble aussi favorable de laisser des moments où les étudiants discutent des mathématiques sur lesquelles ils sont en train de travailler (seuls), débattent, partagent des propositions, formulent des arguments pour convaincre les autres étudiants[5] : c'est ce que le travail en petits groupes peut ajouter au travail autonome, s'appuyant sur les bénéfices éventuels des échanges et interactions entre pairs.
On peut aussi souligner que le travail autonome peut quelquefois gagner à être organisé en petits groupes, notamment s'il s'agit de problèmes longs et/ou difficiles : cela peut favoriser l'émergence de plusieurs pistes et faire avancer la recherche, évitant le découragement devant la difficulté partagée ; cela peut ainsi participer à une certaine motivation des étudiants.

---

[2] Quelques éléments basiques de ces théories sont donnés dans les références suivantes : Lattuati et al. (1999), Vergnaud (2002), Pariès et de Hosson (2008), Vandebrouck (2008).
[3] On s'inspire ici des théories de Piaget.
[4] C'est ce qu'indique notamment le mot « adidactique » utilisé par Brousseau.
[5] On trouve l'intérêt de cette dimension des apprentissages et chez Piaget et chez Vygotski.

Cependant, des conditions sont requises pour espérer des effets positifs de tels dispositifs sur les apprentissages ultérieurs des étudiants – effets positifs qui ne sont jamais garantis au demeurant. On a déjà évoqué le rôle de l'enseignant, avant le travail, pour le choisir, et pendant le travail, pour l'enrôlement des étudiants[6]. Il est aussi important que le temps laissé aux étudiants soit suffisamment long pour qu'ils s'investissent dans le problème qui leur est proposé, et qu'ils n'attendent pas tranquillement que « ça se passe » et que l'enseignant corrige...
Il est non moins important que l'enseignant intervienne à la suite du travail des étudiants, en petits groupes ou non. Cela permet de fixer les connaissances à retenir, ce que les étudiants ne peuvent pas faire seuls. Cela peut entraîner à revenir sur les méthodes qui ont été essayées, sur la démarche utilisée, de manière d'autant plus intéressante que plusieurs directions ont pu être investies. Cela amène aussi, le cas échéant, à donner des éclaircissements sur des connaissances proches de celles qui sont déjà acquises par les étudiants, en s'appuyant sur le travail qui a été fait et non terminé. Ainsi est-il possible que des corrections d'exercice qui interviennent après une recherche infructueuse mais effective, différente selon les étudiants, contribuent à des avancées de connaissances, suffisamment proches de ce qui a été travaillé[7]. Le levier du collectif est alors activé.

Enfin, plus généralement et pour les mêmes raisons, il est intéressant que l'enseignant arrive à repérer l'état des connaissances des étudiants, en interprétant ce qu'ils disent (et font) : ceci peut être facilité par un travail en petits groupes pendant une recherche d'exercices en TD parce que les étudiants parlent (en général) et que l'enseignant peut entendre. Il y a là un bénéfice indirect sur les apprentissages qui doit être souligné : puisque l'enseignant peut mieux adapter ses propos s'il colle davantage à ce qui est dans la tête d'un maximum d'étudiants, y compris pour les échanges avec chaque petit groupe.

Dans la suite, nous ne préciserons pas, sauf exception, si nous parlons de l'une ou l'autre de ces deux modalités : ce qui précède doit être considéré comme un facteur commun à placer avant chaque proposition.
Revenons plus précisément aux choix des enseignants.

II Des paramètres qui laissent peu de marges de manœuvre aux enseignants

Le premier élément tient aux personnalités en présence. Certains enseignants n'aiment pas laisser leurs étudiants chercher un certain temps en TD, encore moins travailler en petits groupes car ils ne pensent pas que ce type de travail apporte de bons résultats. Plusieurs arguments sont avancés, dont beaucoup sont liés au manque de temps avec les étudiants, compte tenu de la nécessité de suivre le cours en amphi ou de faire travailler les étudiants sur toute la feuille d'exercices distribuée à tout le monde.
Pour les uns, ce type de travail, en autonomie, prend trop de temps, et, ajoute-t-on souvent, a pour trop peu d'efficacité « tangible », au niveau des notes par exemple. On pourrait se dire qu'on ne va laisser les étudiants chercher en TD que de temps en temps, pour ne pas « perdre » trop de temps – cependant il est important d'habituer les étudiants au contrat correspondant, de les convaincre du fait que l'enseignant attend vraiment qu'ils se mettent à chercher. Cela demande une certaine régularité, et rend moins intéressant le recours exceptionnel à cette forme de travail.

---

[6] Nous ne discuterons pas ici de la constitution même des petits groupes – il n'y a pas d'éléments déterminants dans nos expériences à ce sujet, si ce n'est à expliciter le mode de travail. La mise en place de groupes de tables permettant un repérage géographique des petits groupes semble faciliter la prise de conscience d'un tel contrat.
[7] On s'inspire ici des théories de Vygotski, lorsqu'il évoque la Zone Proximale de Développement.

De plus, disent certains enseignants, en TD il faut faire profiter les étudiants de la présence de l'enseignant, il leur est toujours possible de travailler chez eux en autonomie. Souvent il est ajouté que, dans la mesure où les étudiants ne travaillent pas beaucoup chez eux et n'apprennent pas leur cours, il ne sert à rien de les laisser chercher en TD, rien ne peut en « sortir ».
Pour d'autres collègues, le travail en petits groupes peut amener du bruit, voire du chahut et perturber les TD. Par ailleurs les étudiants s'y investissent inégalement, il peut y avoir des leaders, et cela arrête aussi certains collègues, qui peuvent tout de même choisir de laisser chercher les étudiants mais individuellement.
Dans tous les cas, il est difficile de savoir quand arrêter les étudiants, qui ne vont pas tous au même rythme ; de plus la reprise en main du TD après une phase de travail autonome ou surtout en petits groupes est difficile.
Enfin, pour avoir des arguments pour adopter ce type de travail en TD, il faudrait disposer de « preuves » de son efficacité. Or l'évaluation des effets d'une expérience aussi limitée, quoiqu'il en soit, est hasardeuse. Quelquefois ce peut être au niveau du décrochage que cela joue et pas au niveau des notes... On a pu vérifier par exemple que l'investissement des étudiants, travaillant par 2 ou 3 sur un projet en temps non limité, voire un partiel en temps non limité, était très grand et conduisait à de très bonnes productions, mais n'avait pas d'effet direct sur les notes de fin d'année – les examens restant en temps limité et individuels.

Ces conceptions personnelles, qui se forgent souvent lors des premières expériences, sont très importantes et très stables. Il n'y a qu'à observer le tableau d'un enseignant dans n'importe lequel de ses TD pour constater cette stabilité (Robert et Vandebrouck, 2003).

D'autres contraintes peuvent minorer la possibilité d'installer des moments où on laisse chercher les étudiants, en petits groupes ou non. Ainsi interviennent les habitudes de l'établissement scolaire concerné et des autres collègues. En revanche l'existence d'une équipe d'enseignement peut beaucoup contribuer à instituer cette forme régulière de travail en TD.

De plus le travail des étudiants et le bénéfice éventuel en terme d'apprentissages dépendent aussi de facteurs en amont du TD, liés aux postures des étudiants et aux malentendus éventuels (Beau). Autrement dit le même exercice cherché de la même façon peut engendrer des choses différentes et pas toujours au bénéfice des étudiants les plus faibles ! Si on laisse chercher les étudiants sur des bases erronées, on peut ne provoquer aucune activité, voire augmenter encore le découragement de certains...

Revenons à un enseignant qui estime qu'il peut laisser chercher ses étudiants ; il lui reste un certain nombre de choix particuliers à faire, que nous allons développer maintenant.

III Des variables sur lesquelles l'enseignant peut avoir des choix : sur quoi, comment laisser chercher les étudiants en TD ?

Il y a deux types de variables, qui, de surcroît, sont imbriquées, sur lesquelles l'enseignant peut avoir des choix décisifs : les exercices et le déroulement des séances. Tel déroulement s'adapte bien à tel type d'exercices, et réciproquement, tel type d'exercices se conçoit bien si on laisse travailler les étudiants. Par exemple, souvent, on n'a pas très envie de faire travailler les étudiants en groupes sur des exercices d'application immédiate du cours, même s'il peut y avoir des exceptions, pour donner confiance à certains étudiants par exemple. En revanche un travail introductif sur une notion, organisé avant l'exposition des connaissances, pourra

gagner à être abordé collectivement, par exemple on prévoit de ne pas faire faire la même chose aux différents groupes et on les amène à confronter leurs productions .
Qui plus est, il y a lieu de réfléchir globalement au travail à proposer aux étudiants pour y intégrer les exercices sur lesquels on va les laisser chercher, en précisant les modalités de ce travail.
Cependant nous allons d'abord présenter séparément les deux types de variables, pour revenir ensuite sur leur imbrication.

1) Sur quels contenus laisser chercher les étudiants ?

Il y a là une source importante de « variables » tenant aux notions à enseigner, en relation avec le travail des étudiants à organiser, et, à terme, en relation avec leurs apprentissages.

a) Du travail autonome sur les introductions de notion

L'introduction des notions à enseigner en effet peut, a priori, « gagner » ou non à être travaillée grâce à un problème, selon la distance de ces notions avec les connaissances des étudiants (cf. programmes) et selon le statut de ces notions, leur fonctionnalité en mathématiques.
Cela nécessite une coordination entre enseignants de TD et enseignant en amphi.
On peut toujours choisir entre des expositions linéaires qui vont des définitions aux théorèmes et aux applications, des expositions problématiques précédées d'activités donnant sens (même partiellement) à ce qui est enseigné[8] ou des expositions chronologiques rapportant les phénomènes à leurs émergences...
Suivant le vocabulaire introduit par Régine Douady, une notion est utilisée comme outil lorsqu'elle sert à résoudre un exercice ; le caractère objet intervient dans l'exposition de la définition de la notion et des théorèmes correspondants.
L'idée force est que, dans certains cas favorables, un travail autonome des étudiants peut précéder utilement l'introduction de la notion par l'enseignant, mais à condition de faire travailler les étudiants sur un problème adéquat.
Ceci dit, vu le manque d'assiduité aux cours en amphi et la complexité des notions enseignées, on peut proposer des problèmes d'introduction, souvent partiels[9], après que la notion a été abordée en amphi.
Il s'agit de confronter les étudiants avec un problème soigneusement élaboré pour leur permettre de donner du sens à ce qui va être introduit. On suppose que le fait de chercher ce problème, d'essayer de mettre en relation la question à résoudre et un outil de résolution (qui correspond à la connaissance visée), de commencer à mettre en œuvre cet outil, sont autant d'activités qui peuvent, même si elles ne sont qu'esquissées, favoriser les apprentissages ultérieurs de la notion. Qui dit problème d'introduction ne dit pas nécessairement travail de recherche des étudiants, cependant on dispose pour un certain nombre de notions de problèmes d'introduction appropriés à être cherchés par les étudiants et même cherchés pendant un certain temps, voire en petits groupes.

Il y a d'autres notions qu'il est beaucoup plus difficile de faire intervenir comme outil dans un problème – notamment parce qu'elles généralisent avec un nouveau formalisme ce qui a déjà été vu, unifiant des notions antérieures qu'on ne peut pas reconnaître ni transposer à cause du

[8] Il y a un certain nombre d'ingénieries didactiques présentant de tels problèmes.
[9] Cf L'exemple des carrés magiques.

nouveau formalisme, qu'on doit donc apprendre à utiliser, les « règles » antérieures étant en partie changées. L'algèbre linéaire est un bon exemple.

Enfin un tel travail est long à faire en TD et il n'est pas sûr qu'il soit possible de l'organiser pour toutes les notions nouvelles d'un programme donné, même en se restreignant à celles qui sont bien susceptibles d'être introduites par un problème contribuant à leur donner du sens[10]. Il peut donc y avoir des choix à faire.

La classification des types de notions que nous utilisons, notamment pour leurs introductions, résulte du croisement entre des analyses épistémologiques, révélant la manière dont les notions ont émergé dans l'Histoire, et des analyses des programmes scolaires. Cette réflexion sur chaque notion amène à préciser sa fonction actuelle en mathématiques, les différentes manières de l'utiliser compte tenu des programmes, et à élaborer, le cas échéant, un problème d'introduction[11].

b) Du travail autonome sur les différentes mises en fonctionnement des connaissances

Une autre occasion de laisser travailler les étudiants en TD (en petits groupes ou non) est fournie par les exercices non immédiats, les problèmes (plus longs) et problèmes transversaux. Il s'agit de faire avancer les étudiants vers une meilleure utilisation de leurs connaissances en leur proposant de travailler sur des énoncés variés, dont certains en particulier ne sont pas entièrement découpés en petites questions ou ont des questions ouvertes, sur lesquelles il reste à faire une conjecture par exemple, que ce soit sur le résultat à démontrer ou sur la méthode à employer. Les problèmes transversaux donnent l'occasion aux étudiants d'utiliser des connaissances inattendues, non indiquées par la place du problème dans le déroulement du cours. Un tel travail peut contribuer à ce que les étudiants construisent une certaine disponibilité de leurs connaissances, et réorganisent leurs connaissances nouvelles et anciennes.

2) Comment laisser chercher les étudiants ?

Le problème de l'enseignant est maintenant le suivant : comment faire pour que ces exercices, non immédiats, engendrent des activités mathématiques elles aussi variées (et pas réduites aux applications immédiates qui les composent) ? Comment faire pour que les étudiants n'attendent pas le « allez-y » du professeur qui a détaillé les étapes au tableau, y compris avec l'aide de certains étudiants, et qui n'a plus besoin que de calculs bien balisés ? Comment engager les étudiants dans le travail dès le début ? Comment leur faire gagner quelque chose à partir de ce travail ? Comment encadrer ces moments où les étudiants cherchent ?
Il reste là de nombreux choix, encore une fois en partie liés aux contenus concernés.

Bien entendu le temps de cette recherche organisée est une variable importante – ainsi que les critères retenus pour décider d'arrêter la recherche, en relation directe avec les exercices proposés. L'idée reste de laisser le temps pour que « les étudiants », en général une grande partie[12] des étudiants, puissent au moins s'approprier l'exercice, entrer dans le questionnement. Mais c'est là que jouent aussi d'autres modalités du travail organisé par

---

[10] Ou à celles, encore moins nombreuses, pour lesquelles un bon problème d'introduction est disponible dans la littérature.
[11] C'est l'objet du cahier bleu n°9, par Pariès et al.
[12] Il y a là encore une variable qui dépend fortement des TDs et des cycles.

l'enseignant : travail individuel ou en petits groupes notamment. Selon les choix, les étudiants peuvent ou non interagir entre eux, être amenés à formuler des questions ou à élaborer des argumentations, dont on admet que cela peut contribuer à enrichir les activités mathématiques des étudiants. La durée de la recherche effective des étudiants en petits groupes peut sans doute être un peu plus longue qu'individuellement.

Une autre variable tient aux accompagnements de l'enseignant : dans quelle mesure aide-t-il ? Réduit-il les difficultés pour que certains étudiants démarrent ? Dans quelle mesure associe-t-il les étudiants aux corrections ? Comment, quand valide-t-il ? Quels bilans sont tirés des recherches des étudiants ? Toutes ces actions de l'enseignant peuvent influencer les bénéfices que les étudiants peuvent tirer de leur travail.
Nous avons introduit la notion d'aides constructives pour traduire ces accompagnements que l'enseignant peut élaborer au fur et à mesure d'une séance, pour ajouter quelque chose à ce qu'ont fait les étudiants, pour que leur travail se transforme en connaissances. Les aides constructives seraient des intermédiaires pouvant contribuer à valoriser pour les étudiants ce qui a été fait pendant les phases où on les laisse chercher. Elles sont adaptées aux difficultés repérées au démarrage et pendant la résolution, grâce à des interprétations de ce que font les étudiants. Selon les cas elles permettent, en récapitulant, de préciser ou même de dégager ce qui a « marché », notamment les méthodes, de le compléter, en le justifiant par exemple, de le généraliser ou de le mettre en relation avec autre chose. Elles peuvent porter sur les notions à apprendre, leur histoire ou leur genèse par exemple, ou sur le travail à accomplir : on peut parler de commentaires « méta », pour rappeler qu'il s'agit d'indications <u>sur</u> les mathématiques, destinés à enrichir la réflexion des étudiants.

Revenons à cette exploitation, indirecte mais très intéressante, du fait de laisser chercher les étudiants en petits groupes : l'appréhension par l'enseignant de ce qu'il y a dans la tête de ses étudiants. C'est facilité par une analyse a priori, qui amène à attendre des mises en fonctionnement précises de connaissances. Par exemple, il peut être assez facile pendant la séance de repérer les connaissances supposées disponibles qui ne le sont pas (et pour qui), ou de détecter les choix d'étudiants auxquels on n'avait pas pensé, ou de reconnaître les adaptations qui posent problème (à certains), et plus généralement d'évaluer ses propres prévisions d'enseignant. Certes il y a d'autres occasions pour le faire, à l'écrit par exemple, mais on peut apprendre des choses différentes à l'oral, lorsque les étudiants cherchent...

Enfin, la nature du travail régulièrement organisé en TD est une variable à introduire pour répondre à la question posée. En effet selon la coutume des TD, selon que la recherche est exceptionnelle ou habituelle, les relations avec les apprentissages peuvent différer. Il peut aussi y avoir des réticences de la part des étudiants à s'investir dans un travail demandant des efforts s'ils sont toujours en échec ou si leurs évaluations aux contrôles ne suivent pas !

3) Un bilan sur le travail des étudiants

Revenons juste ici sur la réticence fréquente des enseignants à cette forme de travail qui tient à l'interrogation suivante : dans quelle mesure est-ce utile de laisser chercher des étudiants pour leur faire utiliser des propriétés du cours qu'ils n'ont pas du tout apprises ?
Une première réponse, partielle, tient à la possibilité d'associer les étudiants justement à l'introduction de certaines notions : cela peut changer cette donne.

On peut aussi se demander pourquoi les étudiants ne savent pas leur cours. Là encore la relation entre le cours et le travail des étudiants se pose.
On peut poser la chose à l'envers, en suggérant que l'apprentissage n'est pas seulement l'apprentissage du texte du savoir mais bien ce qui provient du travail sur les applications, quitte à faire dépendre pour certains étudiants le travail sur le cours de celui sur les exercices[13].
Mais pour obtenir cet apprentissage, on peut supposer qu'il est nécessaire de proposer des exercices qui demandent davantage qu'une simple restitution de chaque connaissance isolée, qui amènent à adapter les connaissances et à les mélanger.
Un des moyens pour que les étudiants entrent dans une telle visée peut être justement de les laisser chercher, en petits groupes ou non, de favoriser ainsi une entrée dans une démarche de questionnement, d'incertitude, sans attendre d'ailleurs nécessairement qu'ils résolvent tous entièrement les exercices.
De plus, si on ne laisse pas les étudiants chercher un certain temps des exercices non immédiats, on peut se demander ce qu'ils perçoivent des différences entre les adaptations des connaissances à mettre en œuvre, qui participent de leur apprentissage, qui peuvent être proposés aux contrôles. On peut se demander ce qu'ils peuvent appréhender des corrections, et même des commentaires qui sont faits sur ce qui a servi effectivement. On peut se demander ce qu'ils vont gagner aux récapitulations, aux liens et aux généralisations éventuelles qui sont énoncés par l'enseignant.
Une hypothèse complémentaire est que ce type de travail est une bonne occasion de transmettre un certain « relief » sur les mathématiques aux étudiants, à partir de leur travail et pas abstraitement. Ce relief est souvent véhiculé par des commentaires sur les mathématiques (on parle de « méta »). Cela peut porter sur le sens des notions, les liens entre elles, mais aussi sur la manière de chercher, les méthodes à utiliser, les différents domaines de travail (cadres) et modes d'écritures (registres) qui interviennent, les moyens de contrôle, ou encore la rédaction.
En allant un peu plus loin, peut-être peut-on évoquer la possibilité de mettre en jeu l'intelligence des étudiants sur le travail attendu : par exemple, laisser chercher les étudiants aux bons moments, interpréter et compléter leurs réponses, commenter les corrections en revenant sur les méthodes, introduire des éléments d'histoire des mathématiques, n'est-ce pas un moyen de faire entrer leur intelligence « ordinaire », critique, voire sociale dans l'exercice d'une discipline scientifique et en retour de les aider à apprendre ?

[13] Tout comme on peut penser que le travail à la maison dépend de celui fait en TD : si un élève n'a vraiment pas assez compris en TD, il n'y a pas trop de raison pour surmonter cela à la maison !

V Bibliographie

Barbançon, Dupuy, Duval et Pluvinage (1989) - Les lycéens face à l'enseignement des math- quelques résultats de l'opération 50 lycées, *L'ouvert* n°54 pp33-38, IREM de Strasbourg.

Beaud S. (2003) 80% au bac ...et après ? Les enfants de la démocratisation scolaire – *La Découverte*

Boschet F. et Robert A. (1984) Acquisition des premiers concepts d'analyse sur |R dans uen section ordinaire de première année de DEUG, *Cahier de didactique n°7,* Université Paris 7- Diderot.

Bridoux S. (2008) Notions élémentaires de topologie : spécificités et difficultés d'enseignement en première année d'université, Journée 2008 de l'Ecole doctorale Savoirs scientifiques - Epistémologie, histoire des sciences et didactique, à paraître.

Brousseau G. (1998) Théorie des situations didactiques, *La Pensée Sauvage.*

Chappier-Pariès M., Pouyanne N., Robert A., Roditi E., Rogalski M. (2007) – Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner, *Document pour la formation des enseignants n° 9,* IREM, Université Paris 7- Diderot.

CI2U (Commission Inter-Irem Université) (1990), Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année – Principes et réalisations, *Brochure CIIU,* IREM, Université Paris 7- Diderot.

Dorier J. L. (1992), Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire, *Cahier DIDIREM* n° 14, IREM, Université Paris 7- Diderot

Dorier J.L. (ed) (1997) L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, La *Pensée Sauvage.*

Dorier J. L. (ed) (2000), On the teaching of linear algebra, *Dordrecht - Kluwer Academic Publisher*

Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 7/2, 5-32.

Durand-Guerrier V. (2005) Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelles pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes. Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur, Lille, juin 2005.

Durand-Guerrier V. et Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? , *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 23/3, 295-342.

Jarraud P. (1991), La pratique de mémoires étudiants en DEUG SSM première année. L'expérience de Lille *1, Brochure IREM* n° 81, IREM, Université Paris 7- Diderot.

Lattuati M., Robert A., Penninckx J. (1999) L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique, *Ellipses.*

Pariès M., De Hosson C. (2008) Introduction à la didactique des mathématiques et de la physique *Document pour la formation des enseignants*, n°10, IREM, Université Paris 7- Diderot

Pian J. (1999), Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels, *Cahier DIDIREM* n° 34, IREM, Université Paris 7- Diderot

Praslon F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement, *IREM Paris 7 Thèse*

Rauscher J. C. (2004), Des étudiants apprécient leur passé scolaire en mathématiques : que nous apprennent-ils ? *Annales en Didactique et Sciences Cognitives*, vol 9 pp205-221, IREM de Strasbourg

Robert A. (1991), Travaux d'étudiants en temps non limité (niveau licence, présentés par A. Robert), *Brochure IREM* n° 80, IREM, Université Paris 7- Diderot

Robert A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 18/2 pp. 139-190.

Robert A. (2005) - Un module de licence préprofessionnel : faire de la géométrie, faire faire de la géométrie. – *Document pour la formation des enseignants* (bleu) n° 6, IREM, Université Paris 7- Diderot

Robert A. (1990) Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie) licence en formation continuée, *Cahier de DIDIREM*, n°9, IREM, Université Paris 7- Diderot

Robert A et Perrin D. (1991) Formation des moniteurs, *Document de travail pour la formation des enseignants* n°2, IREM, Université Paris 7- Diderot

Robert A. et Rogalski M. (2004), Problèmes et activités d'introduction, problèmes transversaux et problèmes de recherche au lycée, *Repères IREM* n° 54 pp77-103

Robert A., Vandebrouck F. (2003) Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en TD de seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol 23/3, pp. 389-424

Robinet J. (1992) Le pourquoi et le comment d'une ingénierie. (La convergence uniforme*)*, *Cahier DIDIREM* n° 12, IREM, Université Paris 7- Diderot

Roditi E. (2005) Pratiques enseignantes en mathématiques ; entre contraintes et liberté pédagogique, *L'Harmattan.*

Rogalski M. (2001), Carrefours entre Analyse, Algèbre et Géométrie, *Ellipses*

Rogalski J. et Rogalski M. (2003) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 9, 2003, Strasbourg.

Rogalski M. (1991) Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A 1ère année – *Cahier DIDIREM* n° 11, IREM, Université Paris 7- Diderot

Vandebrouck F. (ed) (2008) La classe de mathématiques : activités des élèves, pratiques des enseignants, *Octarès*

Vergnaud G. (2002) Lev Vygotski, pédagogue et penseur de notre temps, *Hachette Education*

Une formation des moniteurs en physique : idées directrices.

Laurence Viennot

Une formation de moniteurs de physique : idées directrices

Laurence Viennot
laurence.viennot@univ-paris-diderot.fr

Le contexte, à grands traits

Le contexte général de cette formation est très voisin de ce qui vient d'être décrit à propos des mathématiques, tant par les conditions où sont placés les moniteurs dans leurs équipes d'enseignement que par les caractéristiques d'ensemble qu'ils perçoivent chez leurs étudiants. Les grandes lignes sont donc évoquées rapidement, pour éviter les répétitions. De cette rapidité peut surgir une impression de caricature : il faut garder en tête que, là comme ailleurs, les exceptions existent.

Dans leurs équipes, les moniteurs sont plus souvent en situation « d'exécuter » la feuille de TD que de la construire, et souvent les textes d'examen se recomposent à partir d'une banque de sujets historiques. Le cours leur échappe encore plus. Les écarts de comportement par rapport aux autres enseignants sont exposés au risque du jugement de « perte de temps » ou d'« activité non rentable » du point de vue de l'examen. Les moniteurs sont, comme d'ailleurs leurs collègues, des produits de l'enseignement qu'ils ont reçu, lequel les a amenés à ce qu'ils sont : sélectionnés pour leur succès dans le domaine. Ceci est une raison de plus de ne pas remettre en cause certaines habitudes, ou, parfois, des manières de faire mieux adaptées au public de (certaines) classes préparatoires qu'à celui qu'ils rencontrent à l'université.

Ce public, en effet, peut les désorienter par le fait que le travail préalable aux TD, en principe nécessaire, n'est le plus souvent pas fait : cours non appris, et/ou non compris, confiance qu'on l'apprendra à l'occasion des TD, passivité observée. « Ils ne s'intéressent qu'aux calculs, ils manipulent des formules sans comprendre » entend-on dire par ces jeunes enseignants de leurs élèves novices.

L'obsession du temps marque tous les partenaires. Moniteurs tiraillés par les besoins de leur thèse, guère encouragés à aller réfléchir sur l'enseignement dans une formation (« du flan ! »). Enseignants et étudiants en devoir oppressant de finir la feuille de TD : le groupe voisin l'a déjà fini.

Le parti pris de la formation : *Enseignement de la physique, des clés pour évoluer*

Comme l'indique le dernier mot de ce sous- titre, un premier défi est d'amener les moniteurs hors d'un fatalisme intégral. Il s'agit de contribuer à l'idée qu'ils ne seront pas les clones de leur propres maîtres, ni l'éternelle répétition d'eux-mêmes. Une telle formation devrait être le début d'un chemin de réflexion et d'évolution, non fermé par une série d'impasses canalisant l'enseignant de TD vers une unique sortie : celle de reproduire au tableau la trame calculatoire d'exercices standard (disponible dans toutes sortes de livres), en se donnant l'illusion de laisser chercher les élèves. Bien sûr, il ne s'agit pas non plus de dévaloriser toutes les pratiques en cours. C'est le mouvement d'une réflexion permanente qu'il faut (contribuer à) installer, avec son indispensable condition d'opérationnalité : des marges de manœuvre existent.

L'ancrage choisi pour agir dans ce sens est double. Chacune des composantes, d'ailleurs enchevêtrées, renvoie elle-même à l'analyse d'un contenu.

- Une composante essentielle est la sensibilisation à ce que pensent les étudiants, plus ou moins explicitement, avant enseignement. Il y a là matière à réexamen : les cibles conceptuelles de l'enseignement et ce que l'on appelle souvent les « idées naïves » s'analysent en contraste mutuel. Ceci contribue à redéfinir de possibles objectifs d'enseignement pour un contenu réputé classique. On ne change pas le chapitre, mais on peut en changer l'éclairage.

- Une seconde composante cruciale est l'analyse des activités intellectuelles proposées, de fait, aux étudiants. Il ne suffit pas, pour la conduire, de lire le texte d'un exercice, il faut se demander ce qui est requis pour avoir « le point » à chaque question posée, ou simplement ce que, de manière réaliste, on peut anticiper de l'action des élèves en TD à ce propos. Une telle analyse ne débouche que si l'éventail des choix en la matière est bien ouvert. C'est du moins la responsabilité d'une formation de moniteurs que de contribuer à ce qu'il le soit.

Englobant ces deux composantes principales de la formation, une philosophie d'ensemble : quels que soit les mérites de telle ou telle « méthode d'enseignement » réputée « efficace », ou simplement tel ou tel grand thème d'inspiration – ainsi : « les étudiants doivent être actifs » - il faut garder en tête que c'est sur des détails bien pensés qu'avancent les grandes idées, c'est sur des manques d'attention qu'elles trébuchent.

En bref, le « quoi » et le « comment » de l'enseignement sont imbriqués, leur analyse ne saurait se conduire sans qu'intervienne un niveau fin d'analyse, impliquant des détails qui ne le sont qu'en apparence – d'où le label volontiers employés ici à leur propos : « détails critiques » de pratique enseignante. Ce caractère –« critique » – s'évalue sur la base d'un examen croisé des idées préalables des étudiants et du contenu, et à la lumière des activités intellectuelles effectivement conduites, ici dans le cadre des travaux dirigés.

La gestion des séances de formation

La formation décrite ici est réduite à quatre séances de trois heures chacune. Le choix retenu est de pratiquer, pour l'entrée principale de chaque séance, aussi bien un centrage sur un domaine de physique particulier, chargé à chaque fois de porter tel(s) ou tel(s) aspect(s) du message, qu'un centrage sur l'un ou l'autre de ces aspects. La réduction du nombre de thèmes de physique abordés est stratégique, surtout dans les deux premières séances. Il s'agit d'éviter l'impression de cours théorique et de motiver les stagiaires tout en évitant de trop les déstabiliser. En effet, ils ont vite fait d'être perdus sur le contenu lui-même, aussi « élémentaire » qu'on le prétende souvent. Ceci tient à ce que, si l'on évoque les idées communes des étudiants, il se trouve qu'ils les partagent plus d'une fois. On ne saurait, dès lors, les promener trop vite d'un thème de physique à l'autre.

Il est important, à ce propos, d'être attentif à ce que des aspects psychologiques ne viennent pas entraver le déroulement du travail. Ainsi, lorsque l'on sait très bien que plus de la moitié des moniteurs se tromperont en réponse à une question d'apparence triviale, il vaut mieux gérer le questionnement d'une manière qui laisse chacun libre d'afficher son erreur, tout en recueillant les résultats globaux (annoncés d'avance ou non). Une façon de le faire est de charger le groupe de gérer lui-même l'enquête.

Pour augmenter la densité d'information, pour ces jeunes habitués à un rythme de travail rapide, des éléments de démonstration expérimentale (« petites manips »), à la fois pertinents et n'engageant pas de longues analyses, sont servies en intermède (pause café) ou à ceux qui arrivent en avance.

Le programme se présente, dès lors, comme d'apparence décousue. En fait les thèmes de formation rapidement décrits plus haut et en introduction du cours se déclinent ensuite en reprises et en croisements continuels.

Ainsi le programme de chaque séance, repris ensuite dans le paragraphe suivant, se présente comme suit.

Première séance

Séance d'introduction sur l'esprit de la formation, et ses idées fortes :

-phénomènes d'enseignement : la conviction, v/s l'analyse critique d'expérimentations ;

-importance du contenu disciplinaire ;

-attention aux idées préalables des étudiants ;

-attention aux détails critiques de pratique enseignante.

Ceci se fait tout de suite sur la base d'exemples. Le thème-support de physique est l'optique, niveau « imagerie élémentaire », puis (licence 3) les interférences.

Supplément éventuel à base de toute petite « manip » : les couleurs, en bannissant le « tout ou rien .

Deuxième séance

Lors de cette deuxième séance, le thème fédérateur est celui du décloisonnement et des liens

-entre points de vue – ou échelles d'analyse – pour un même phénomène ;

-entre phénomènes pour un même traitement ;

-entre mathématique et physique.

Apparait encore, en contrepoint, celui des rituels de pratique enseignante.

Les contenus physiques « supports » sont

- Doppler et Römer : qu'ont-ils en commun ?
- La montgolfière… même quand il n'y a qu'une molécule dedans !

Comme toujours, la discussion prime sur l'obligation de traiter tout le programme.

Eventuel supplément: petites manips en électrostatique

Troisième séance

Séance sur une pratique possible en TD, répondant au titre de la brochure correspondante, qui est distribuée : « Corrigé, mode d'emploi » (Viennot 1987).

Il s'agit de dispenser provisoirement les étudiants de tout calcul, et de centrer toute leur activité sur le questionnement. Comment organiser ce questionnement ? Cette question est abordée à partir de multiples exemples, et lors de travaux de type « atelier », visant à construire soi-même ce type de dispositif. Contenus envisagés : un peu de tout au gré des exemples.

Quatrième séance

Pour terminer ce cycle d'information et de réflexion, on revient sur les idées communes en physique, avec la préoccupation d'en montrer la logique propre. On en illustre une composante transversale par rapport à de nombreux chapitres de la physique : le raisonnement linéaire causal. Cette forme de raisonnement, en contradiction avec l'analyse quasi-statique des systèmes, enchaine des éléments explicatifs n'impliquant qu'une seule variable dans une succession temporelle et causale de phénomènes transitoires. Cette séance débouche sur les procédés communs de la vulgarisation, et envisage le couplage (découplage ? incompatibilité ?) entre le désir de plaire et celui d'illustrer le fonctionnement de la science, dans sa composante de recherche de cohérence.

En fonction du temps disponible, possibilité de voir aussi une séquence d'électrostatique en Math Spé, intéressante notamment du point de vue de l'évaluation.

Les séances : plus de détail

La première séance se centre sur l'existence d'idées communes antérieures à l'enseignement, largement partagées, résistantes au cours d'un enseignement classique. Dans cette première initiation, l'optique élémentaire est choisie comme support parce qu'on peut illustrer facilement un aspect fondamental de la connaissance commune : les concepts de physiques sont volontiers réifiés ; le rayon lumineux, élément théorique d'un modèle, est souvent traité comme s'il s'agissait d'un élément lumineux en lui-même, visible de profil, comme un train qui passe. De même, l'image formée par une lentille simple est souvent traitée comme un objet en déplacement, susceptible de s'écorner au passage d'un obstacle (un cache sur une lentille n'en affecte en fait que la luminosité). Ce voyage en bloc – supposé - de l'information lumineuse amène même à croire qu'en l'absence de lentille l'image arrive non retournée sur l'écran. On présente, à ce propos, les tests classiques d'enquêtes déjà anciennes (Fawaz & Viennot, 1986, Viennot 1996, chap. 2), ceux qui concernent des populations au taux d'échec surprenant (enseignants PLC2 d'IUFM : certains moniteurs ne veulent pas admettre les résultats), ceux enfin qui attestent des profits générés par une bonne connaissance de ces phénomènes, débouchant sur la proposition d'une schématisation modifiée (Viennot & Kaminski, 2006). Le niveau s'élève brusquement quand, en deuxième partie, on aborde les interférences lumineuses et les difficultés engendrées par la compréhension commune du rayon : un objet en soi, passant l'obstacle d'un trou de diffraction pour y subir un destin bien spécifié : « une déviation » et pour se retrouver sous la même symbolisation qu'avant le trou une fois dans l'espace interférentiel, en route vers « le point M sur l'écran ». L'éclairage du contenu prend alors son sens : non identité du statut du trajet de lumière après et avant « le trou » lorsqu'on s'intéresse à une figure de diffraction (interdiction, alors, d'y voir un trajet d'énergie), pertinence de la *sélection* des trajets pertinents *par le point d'arrivée*, laquelle sélection détermine le statut approprié : géométrique ou ondulatoire (Colin & Viennot 2000, 2001, 2003). Critique des modes usuels de schématisation et contre–propositions complètent la séance.

Au passage également, une touche de réflexion sur la vulgarisation est injectée, à travers la non-explication en 2005, par les vulgarisateurs en titre, du fait qu'on pouvait *voir* dans le ciel de Paris le faisceau laser vert qu'il s'étaient attachés à y faire circuler: évidence supposée ?

La deuxième séance se centre sur l'intérêt de faire apparaître les liens qu'autorise la physique – entre

a) phénomènes qu'un même formalisme permet de traiter, ou bien encore,

b) approches différentes d'un même phénomène.

En surimpression sur l'item a) : l'intérêt (la motivation ?) qui s'associe à la pratique des graphiques (et non des seules relations), pour des problèmes relevant d'une même formule très simple, d'apparence plus que banale, voire ennuyeuse : d = vt, en notations usuelles. Ce traitement révèle ici sa puissance en unifiant l'analyse de l'effet Doppler et celui de la découverte de Römer sur le caractère fini de la vitesse de la lumière (Leroy-Bury & Viennot 2003 ; Viennot & Leroy 2004). S'introduit là une discussion sur le rapport bénéfice/coût quand on pousse le raisonnement vers plus d'abstraction, en l'occurrence via les graphiques espace-temps. On analyse ce qu'en disent les élèves préalablement confrontés à cet effort ainsi qu'à l'efficacité des procédures qui s'ouvrent ainsi.

A l'occasion de l'item b) : introduction du phénomène du « rituel enseignant », c'est-à-dire de l'anesthésie du jugement par l'habitude et le centrage sur l'efficacité calculatoire. Ceci est illustré de façon particulièrement marquante à propos de la montgolfière, dont il est classique d'avancer, et rarissime de critiquer, que la pression interne et la pression externe sont égales (*partout ?*). Là comme ailleurs, une contre-proposition pour l'explication est faite, centrée sur cet aspect fondamental de l'hydrostatique regrettablement nié par le rituel : les gradients de pression.

La *troisième séance* prend une forme d'atelier, alors que les deux précédentes se rapprochaient plus d'un séminaire participatif. A cette étape, les moniteurs ont éprouvé sur eux-mêmes ce que signifient « idées communes » (d'élèves) et « rituels d'enseignement » (les leurs, notamment). Les discussions sur les images et sur les graphiques ont ouvert la voie à une certaine prise de distance avec les habitudes à ce propos. La mise en œuvre d'activités inhabituelles s'est déjà invitée, à l'occasion de « mises en lien » (Doppler et Römer), de critiques d'hypothèse (la montgolfière). L'éclairage différent d'un contenu est une idée qui s'est déjà incarnée, via notamment les interférences et leur – très quantique - « sélection par l'aval de l'information lumineuse ». En bref, la notion de marge de manœuvre est préparée.

Comme annoncé plus haut, l'analyse des activités menées en TD fait là son entrée, mais plus par l'illustration *a contrario* de ce qui n'est pas fait usuellement que par le décorticage de ce qui est déductible des feuilles de TD.

Compte tenu de la contrainte de temps – dans cette formation aussi – un exercice de style est privilégié, ouvrant lui-même la voie à bien des variantes : la discussion critique sur une trame de corrigé d'exercice standard.

La philosophie générale est que savoir prendre connaissance du travail des autres – relativement à la science - est une aptitude universellement utile. Ceci pas seulement pour le futur citoyen, l'élève qui copie à un examen ou l'étudiant qui apprend un cours, mais aussi pour le futur chercheur. Or l'examen critique d'un texte est une activité qui ne s'improvise pas, mais requiert une éducation.

Lors de cette séance, la forme choisie est celle de l'analyse de corrigé standard d'exercice standard : il s'agit d'exemples extraits de feuilles de TD de première année universitaire ou de livres d'enseignement, y compris de Terminale. Quant au corrigé qui sert de base au travail proposé, le texte utilisé peut se réduire à une trame de calcul, ou bien comporter quelques liens verbaux. Le but n'est pas d'évaluer les mérites de tels textes, mais d'en prolonger l'usage par une réflexion stimulée. Le travail proposé aux moniteurs, après une phase de sensibilisation, consiste à élaborer les questions à poser à leurs étudiants supposés après que ceux-ci aient lu à la fois le texte de l'exercice et un corrigé.

On peut s'étonner que les étudiants (ici hypothétiques) soient censés disposer du corrigé dans la foulée du texte de l'exercice. C'est un scénario non obligatoire, bien sûr, mais fait pour illustrer fortement la différence entre cet exercice de critique et celui de recherche de solution. Il est bien évident que les deux activités ont, idéalement, vocation à s'imbriquer. Mais n'en pratiquer provisoirement qu'une présente l'avantage suivant : totalement débarrassé de l'angoisse du calcul, l'étudiant n'a plus qu'à réfléchir à celui qu'il a devant les yeux. Dans le même temps qu'en version classique, l'exercice est utilisé autrement. Enfin, la réflexion n'arrive pas en dernière roue du carrosse, alors que déjà les étudiants rangent leurs affaires pour le cours suivant. L'expérience en vraie grandeur a été menée auparavant, évaluée en Terminale (Groupe A. Cros, 1983), récapitulée par une brochure en première année universitaire (Viennot 1987). Les moniteurs la vivent eux-mêmes dans la phase de sensibilisation, en répondant à des questions sur trois textes classiques (le champ d'un miroir, l'inévitable satellite, le glissement sur un plan incliné avec frottement solide). A eux, ensuite, de construire des questions pour un autre thème (ex : la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique), pour nourrir ensuite un débat critique sur leur production.

Les questions à construire répondent à un but bien précis. Il s'agit d'affermir et de prolonger la compréhension du corrigé, en recherchant notamment comment il peut servir pour des situations voisines de celle qui est présentée. Sans en faire une liste dogmatique ni limitative, on suggère les types de question suivants, illustrés en Encadré 1 (Groupe A. Cros 1983, Viennot 1987).

Encadré 1 . Des types de question envisageables pour conduire des étudiants à approfondir un corrigé d'exercice ou une partie de cours.

S- La signification des symboles ou expressions verbales utilisés dans le texte analysé.
A- L'influence du codage dans la désignation des symboles et dans l'écriture des relations algébriques du texte : cette rubrique renvoie à ce que l'on désigne souvent par « convention de signe ».
H- Les hypothèses du texte : on examine ici les fondements mêmes de l'argumentation du texte. Cette rubrique correspond à des questions souvent difficiles, par exemple :
Où telle hypothèse intervient-elle ?
Sur quelle hypothèse repose telle affirmation ?
Que doit-on changer si on change telle hypothèse ?
Analyser les ordres de grandeurs qui justifient telle hypothèse .
C- Le déroulement du calcul, ex :
Telle égalité est-elle démontrée dans le texte à partir d'une autre ? Ou bien « parachutée » (« or on sait que… ») ?
Où se situent les intermédiaires de calcul ?
R- Le résultat : c'est la signification de la conclusion qui est en cause ici, ex :
Enoncer le résultat avec des phrases.
Contrôle du résultat : homogénéité, cas limites
Comment telle grandeur varie-t-elle lorsque telle autre croît, les autres restant inchangées ?
Evaluer l'ordre de grandeur de telle grandeur dans telle circonstance .
P- Ce sont les questions qui ressemblent le plus à celles d'un exercice classique. Il s'agit de pousser un peu plus loin le calcul présenté dans le texte pour en tirer des informations supplémentaires.

Que ce soit à propos de la discussion sur les hypothèses ou par une focalisation sur l'analyse fonctionnelle des relations (par opposition à leur pratique purement numérique), la discussion sur les invariances et l'analyse de la généralité des affirmations sont pointées comme tout à fait centrales et génératrices d'intérêt.

A titre d'exemple, deux textes de « corrigé » avec quelques questions susceptibles d'amener des étudiants à en approfondir la compréhension sont donnés en annexe à ce texte. Lors du stage, ce sont quatre corrigés qui sont ainsi travaillés, et une brochure en présentant une douzaine est distribuée (Viennot 1987).

La *quatrième séance* revient sur la question des modes de raisonnement communs, en l'abordant à un niveau qui s'éloigne de la seule prise en compte des idées naïves. On en vient à celle de structure organisatrice, en l'occurrence celle du raisonnement linéaire causal. L'exposé de ce que désigne cette expression commence la séance. Il s'agit d'établir un contraste avec ce que dicte la physique acceptée lorsqu'elle fait l'hypothèse d'évolution *quasi-statique* ou *quasi-stationnaire* des systèmes. Alors, plusieurs variables sont supposées évoluer en même temps sous la contrainte permanente de quelques relations simples. Une chaine de ressorts, dans cette perspective, est étirée sous une traction extérieure de manière à ce que, à chaque instant, les tensions de ces ressorts restent égales : autant dire que, tout le long de la chaine, tous les ressorts sont « informés » de l'action extérieure *quasi* instantanément. Ce modèle néglige la durée de propagation par rapport à celle d'évolution globale du système. En cela, il s'oppose à une analyse propagative, celle qui conviendrait à un tremblement de terre parcourant une série de territoires contigus. Contrairement au traitement quasi-statique, le raisonnement linéaire causal mis au jour par Fauconnet (1981, voir aussi Closset 1983, Rozier 1985, Viennot 1996, chap. 5) consiste à enchainer des liens cause-effet binaires, relatifs à des événements ϕ_n spécifiés par une seule variable à la fois, envisagés (implicitement ou explicitement) successivement : $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \phi_3 \rightarrow \ldots \phi_n$. Outre le caractère réducteur de l'analyse fonctionnelle, on y observe une structure de récit. Voici un prototype d'un tel raisonnement : « Le ressort du bas s'allonge, la tension de ce ressort se transmet au ressort du haut, lequel, *au bout d'un certain moment,* s'allonge aussi. »

Au-delà du discours, les résolutions de problème se trouvent fortement affectées par une telle vision, qui conduit classiquement à des erreurs.

Dans cette quatrième séance, on illustre les implications de cette tendance dans la compréhension qu'ont les étudiants de la physique. Il est souligné que ce phénomène est renforcé par celui d' *« explication-écho »* chez les experts (Viennot 2008). Ceux-ci, spécialement quand ils veulent plaire, adoptent en effet le même style d'explication que celui que dicte le raisonnement linéaire causal, un fait particulièrement marquant en vulgarisation. Toute exploitation des « petites manips », souvent pratiquées dans la perspective de motiver l'audience, peut être exposée à ce risque. Ce thème de réflexion est activé en soulignant, pour une série de manipulations (verre d'eau retourné, siphon), des variantes à la fois dans la mise en scène matérielle et dans le questionnement. Ces variantes sont ciblées sur des exploitations non moins diverses du point de vue conceptuel. Une fois encore, l'idée de marge de manœuvre, de détail critique et d'éclairage du contenu sont réactivées.

La discussion sur le dilemme attractivité/pertinence pour les actions de vulgarisation sert de loupe pour, et réintroduit, celui qui concerne l'enseignement ordinaire, et qui opposerait efficacité et satisfaction intellectuelle.

En conclusion

On ne peut compter sur ces seules quatre demi journées pour provoquer un basculement radical chez ceux qui, fatalistes, en tiennent pour une efficacité de reproduction de calculs, solutions d'exercices standardisés. Dans ce stage d'introduction, il s'agit que tous les moniteurs repartent avec des perspectives et des outils à expérimenter, pour trouver leur propre voie et rester attentifs à ce qui pourrait être un chemin d'évolution : la critique productive de l'existant. Tout au long du stage, de la documentation est à leur disposition afin que ce parcours intellectuel, parfois quelque peu allusif, puisse s'ancrer dans une réflexion plus profonde et dans une expérimentation personnelle.

N.B. Un document (160 p., soumis pour publication), récapitule le contenu visé par cette formation : *En physique, pour comprendre*, (Viennot). Il sera soit publié soit disponible auprès de l'auteur au printemps 2010.

Références

Chavannes, I. 1907 : Leçons de Marie Curie aux enfants de nos amis. EDP Sciences (2003).

Closset, J.L. 1983. *Le raisonnement séquentiel en électrocinétique*. Thèse de troisième cycle, Université Paris 7.

Colin P. & Viennot L.2000. Les difficultés des étudiants post-bac pour une conceptualisation cohérente de la diffraction et de l'imagerie optique, *Didaskalia,* n° 17, pp. 29-54.

Colin P & Viennot L. 2001. Using two models in optics: Students' difficulties and suggestions for teaching, *Physics Education Research, American Journal of Physics Sup.* 69 (7) S36-S44.

Colin P. & Viennot L. 2003. Géométrie, phase, cohérence: questions d'optique, *Bulletin de la Société Française de Physique* n° 137, p. 30 et http://sfp.in2p3.fr (18p.).

Colin P., Chauvet F & Viennot L. 2002. Reading images in optics: students' difficulties, and teachers' views. *International Journal of Science Education.*24 (3), pp. 313-332.

Fauconnet, S. 1981. *Etude de résolution de problèmes: quelques problèmes de même structure en physique*, Thèse de troisième cycle, Université Paris 7.

Fawaz A. & Viennot L. 1986. Image optique et vision, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n° 640, pp. 1125-1146.

Groupe A. Cros, 1983. Les exercices en classe terminale. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, n° 659, 385-416

Hirn C. & Viennot L. 2000. Transformation of didactic intentions by teachers: the case of geometrical optics in grade 8 in France, *International Journal of Science Education*, 22, 4, pp. 357-384.

Hosson (de) C., 2006. Historical Controversy as an Educational Tool: Evaluating elements of a teaching-learning sequence conducted with the text "Dialogue on the Ways that Vision Operates" 7 *International Journal of Science Education*

Hosson (de) C., Kaminski W., 2002, Les yeux des enfants sont-ils des « porte-lumière » ?, *Bulletin de l'Union de Physiciens,* N°840, pp.143-160

Kaminski W., 1989, Conceptions des enfants (et des autres) sur la lumière, *Bulletin de l'Union de Physiciens*, N°716, pp. 973-996

Kaminski W., 1993, Rayons épinglés ou comment tracer les rayons lumineux en quatrième, *Bulletin de l'Union de Physiciens*, 750, pp.29-33.

Kaminski W., Isambert J., 2004, Miroir plan en première S : image inversée ou lumière réfléchie ?, *Bull. de l'Union des Physiciens,* 866, pp.1069-1080.

Kaminski W., Mistrioti Y., 2000, Optique au collège : le rôle de la lumière dans la formation d'image par une lentille convergente, *Bulletin de l'Union de Physiciens*, 823, pp.757-784.

Leroy-Bury, J.L. et Viennot, L. 2003. Doppler et Römer: physique et mathématique à l'œuvre. *Bulletin de l'Union des Physiciens,* n° 859, pp. 1595-1611.

Rozier, S. 1988. *Le raisonnement linéaire causal en thermodynamique classique élémentaire*. Paris, Thèse, Université Paris 7.

Saltiel E., K Kaminski W., 1996, Un exemple d'évaluation des nouveaux programmes : problèmes liés à l'évaluation elle-même et à la formation des maîtres, *Bulletin de l'Union de Physiciens*, N°786, pp.1271-1287

Viennot L. & Chauvet F. 1997. Two dimensions to characterize research based teaching strategies: examples in elementary optics. *International Journal of Science Education.*; 19 (10), pp.1159-1168.

Viennot L. & Leroy J.L. 2004. Doppler and Römer: what do they have in common? *Physics Education*, vol. 39, issue 3,

Viennot L., Chauvet F., Colin P. & Rebmann G. 2004. Designing Strategies and Tools for Teacher Training, the Role of Critical Details. Examples in Optics. *Science Education*, 89 (1), pp. 13-27.

Viennot, L. & Kaminski, W. 2006, Can we evaluate the impact of a critical detail ? The role of a type of diagram in understanding optical imaging, *International Journal of Science Education*, 28 (15), pp.1867-1895.

Viennot, L. 1987. *Corrigés : mode d'emploi*, brochure LDPES (actuellement LDSP, au sein du Laboratoire André Revuz, Université Paris-Diderot.

Viennot, L. 1996. *Raisonner en Physique, la part du sens commun.* Bruxelles : de Boeck

Viennot, L. 2002. *Enseigner la Physique*, Bruxelles : de Boeck

Viennot, L. 2006. Modélisation dimensionnellement réductrice et traitement "particulaire" dans l'enseignement de la physique, *Didaskalia*, 28, pp. 9-32.

Viennot L.2006.Teaching rituals and students' intellectual satisfaction, *Phys. Educ.* 41 pp. 400-408. http://stacks.iop.org/0031-9120/41/400.

Viennot, L. 2008. La physique dans la culture scientifique. Quelle place pour le raisonnement? In L. Viennot (dir.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences – Penser l'enseignement.* Collection Sciences, histoire et société, Paris : PUF. 2008. pp. 213-236.

Annexe : deux exemples de corrigé proposable à des élèves assorti de questions pour l'approfondir.

A Le champ du miroir

Ce qui suit est une proposition de texte à soumettre, telle que, aux élèves. Seules les phrases en italiques sont à destination de l'enseignant.

Lisez d'abord cet exercice et son corrigé : le miroir, dans une version courante

Soit un miroir plan circulaire de 10 cm de diamètre. Si on place l'œil à 1m, sur l'axe du miroir, représentez sur un dessin la région de l'espace que l'on peut voir dans ce miroir.

On peut imaginer que la réponse attendue par l'enseignant est un dessin du type représenté en figure 1a, fondé sur l'égalité des angles d'incidence et de réflexion. Pour plus de commodité, l'échelle n'est pas la même dans les deux dimensions.

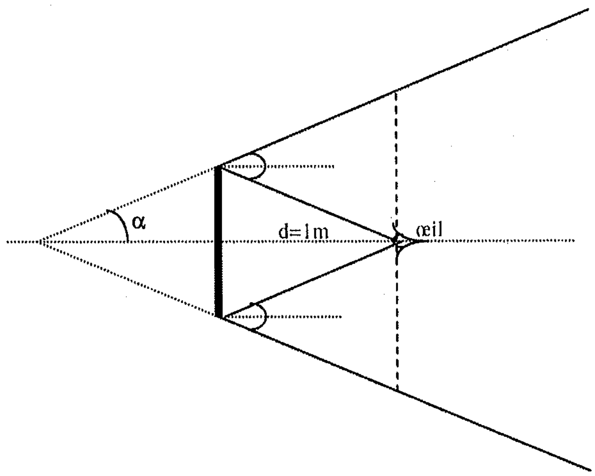


Figure 1a. Un corrigé classique pour la question du champ du miroir.

Proposition pour aller plus loin :
Le miroir, dans une version enrichie

Pour une meilleure compréhension de la situation, on peut poser à l'élève les questions suivantes, après lui avoir fourni à la fois le texte de l'exercice et la solution proposée ci-dessus.

• Par quelle(s) grandeur(s) peut-on caractériser la « région de l'espace » à laquelle on s'intéresse ici ?
Les grandeurs suivantes sont utilisables : angle au sommet du tronc de cône limitant l'espace visible, α ; angle solide correspondant; diamètre de la partie de l'observateur lui-même qui est visible. On peut discuter leurs mérites respectifs, leurs relations.
• Comment varie la région de l'espace en question lorsque l'on éloigne l'œil du miroir ? L'observateur peut-il voir une plus grande portion de lui-même ?

Celle-ci, en considérant qu'il s'agit d'un disque comme si l'observateur était plat, a toujours, en vertu du théorème de Thales, un diamètre double de celui du miroir, donc une surface quadruple. Voir par exemple la Figure 1b, qui, comparée à la Figure 1a, laisse inchangée la longueur de la ligne verticale pointillée, au niveau de l'œil.

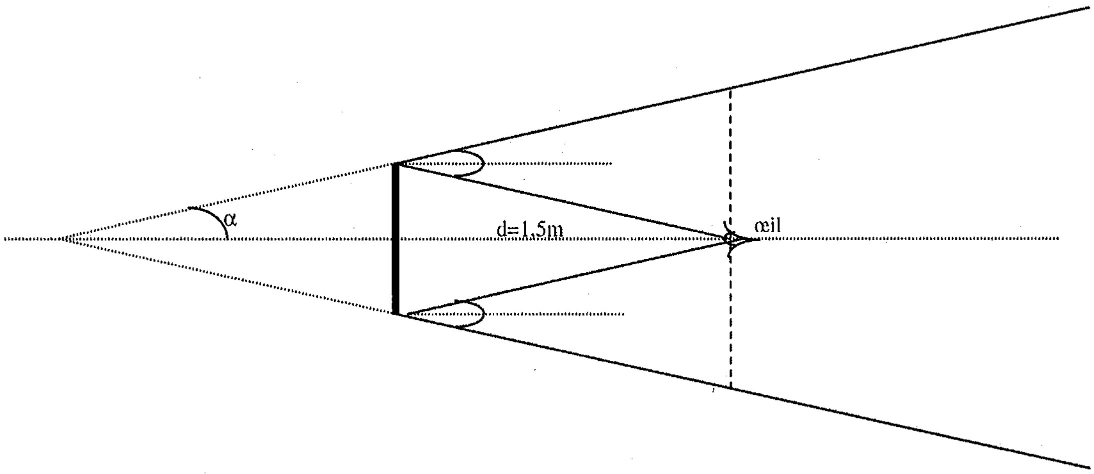


Figure 1b. Modifier la distance entre œil et miroir ne modifie pas la partie du plan vertical de l'œil visible dans le miroir (voir Figure 1a) : la surface de celle-ci est toujours quadruple de celle du miroir.

• Il s'agit de vision. Avec le premier dessin, on ne peut pas comprendre comment l'œil voit un objet. Complétez-le pour que l'on comprenne le trajet du faisceau de lumière qui permet à l'observateur de voir une piqûre d'insecte sur son visage. S'agit-il d'un faisceau convergent ou divergent ?

Malgré la faveur dont jouit habituellement la réponse : faisceau convergent, renforcée par une lecture superficielle de la Figure 1a, il s'agit d'un faisceau divergent. Le dessin sur la Figure 1c souligne bien l'importance de l'étendue de la pupille : on ne voit pas grand-chose « avec un seul rayon » (cette expression n'a d'ailleurs, bien sûr, pas de sens) ! Pour une analyse encore plus avancée, on peut y associer le fait que les limites du champ de visibilité ne correspondent pas à une discontinuité.

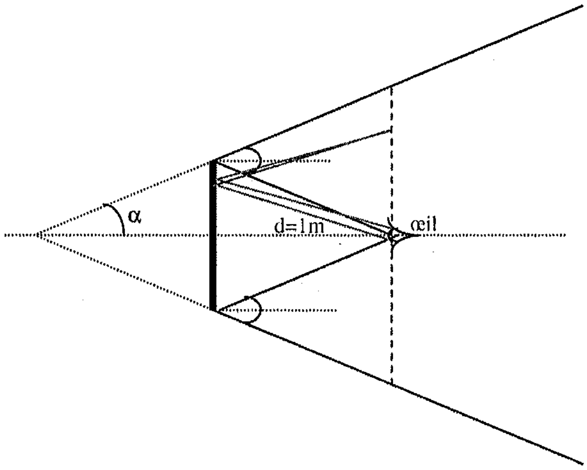


Figure 1c. La lumière diffusée par une piqûre d'insecte, dans le plan vertical de l'œil, pénètre dans la pupille en un faisceau divergent.

B- La déviation d'une particule chargée par un champ magnétique

Ce qui suit est une proposition de texte à soumettre, telle que, aux élèves. Seules les phrases en italiques sont à destination de l'enseignant.

Lisez attentivement ce texte, paru il y a quelques années dans un livre de Terminale :

Etude de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique

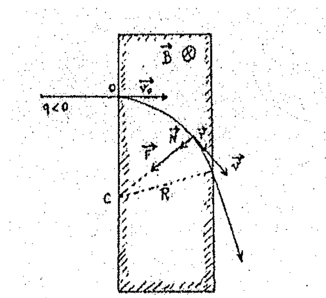
Le champ $\vec{B}$ est uniforme ; la vitesse initiale $\vec{v}_0$ est orthogonale à $\vec{B}$.

Considérons une particule de masse m, de charge q, pénétrant dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ est orthogonale aux lignes de champ (fig .). Négligeons le poids de la particule ; elle peut donc être considérée comme soumise à la seule force d'origine électromagnétique :

$\vec{F} = q.(\vec{v} \wedge \vec{B})$

L'accélération $\vec{a}$ est liée à la force appliquée, et ce, par la relation fondamentale de la dynamique :

$$m.\vec{a} = q.(\vec{v} \wedge \vec{B})$$



A tout instant, le vecteur $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{B}$.

La trajectoire est tout entière dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$ et contenant $\vec{v}_0$.

Supposons $q < 0$: le trièdre $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ est inverse. Nous en déduisons le sens de la déviation.

Dans le repère de Frenet, nous avons :

$\vec{F} = m.(\vec{a}_N + \vec{a}_T)$

$= m\ \frac{v^2}{\rho}\ .\vec{N} + m.\frac{dv}{dt}.\vec{T} \ = \ q.(\vec{v} \wedge \vec{B})$

et donc :

$* \vec{F}.\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_T = \vec{0}$

$\rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad v = v_0 = C^{te}$

$* \; q.(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{mv^2}{\rho}.\vec{N}$

La relation entre les normes et les valeurs absolues s'écrit:

$|q|.\,v.B\sin\alpha = \frac{mv^2}{\rho}$

avec ρ : rayon de courbure de la trajectoire.

Or : $v = v_0$ et $\sin\alpha = 1$ ($\alpha = 90°$)

d'où : $|q|.\,v_0.B = \frac{mv_0^2}{\rho}$

$\Rightarrow \quad \rho = \frac{mv_0}{|q|B}$

Le rayon de courbure est constant, la trajectoire est un cercle de rayon:

$R = \frac{mv_0}{|q|B}$

Répondez ensuite aux questions suivantes

(Il s'agit, à titre d'exemple, d'une liste de questions envisageables, dont les réponses empiètent les unes sur les autres : à chacun de choisir ou reformuler.)

- Que représentent les symboles $\vec{a}_N$, $\vec{a}_T$ et α ?
- « Négligeons le poids de la particule » : par rapport à quoi ? Imaginer la zone d'un spectrographe de masse, où, avant l'impact sur le détecteur, la particule n'est soumise à aucune autre force que son poids. Que néglige-t-on alors, pour traiter la trajectoire comme un segment de droite ?
- Comment change la trajectoire si le signe de la charge est changé ? Analyser la façon dont le calcul est algébrisé : l'appel aux barres de valeurs absolues pour la charge est-il nécessaire, et la grandeur pourrait-elle être négative, tout en gardant une signification au calcul ?
- Comment le rayon de courbure varie-t-il avec chacun des (autres) paramètres de la situation ? Faites de cette discussion un moyen mnémotechnique pour éviter d'inverser la fraction donnant l'expression de ce rayon de courbure.
- Enoncez la propriété de la force qui permet d'affirmer que le mouvement est uniforme.
- Le mouvement est-il encore uniforme
  a) Si le champ magnétique $\vec{B}$ n'est plus uniforme ?
  b) Si le champ magnétique est uniforme et la vitesse initiale non perpendiculaire à $\vec{B}$?
- Quel(les) est(sont) l'(les) hypothèse(s) du texte qui condui(sen)t à affirmer que la particule chargée a une trajectoire plane ?
- Quel est le mouvement de la particule si $\vec{v_0}$ est parallèle au champ uniforme $\vec{B}$? S'agit-il d'une trajectoire stable ?
- Le fait que le champ $\vec{B}$ soit uniforme intervient à plusieurs reprises dans cette démonstration. Récapitulez où et comment.
- Donnez un ordre de grandeur pour les valeurs de v, B, R, au LHC (Large Hadron Collider au CERN, à Genève) ?

TITRE :

Proposition pour une formation des moniteurs en mathématiques. Idées directrices pour une formation des moniteurs en physique.

AUTEUR/S :

J. Mac Aleese , J. Pian, A. Robert, M. Rogalski, L. Viennot

RESUME :

Dans la première partie de ce texte, issu de l'expérience des premiers auteurs en 2007-2008 et 2008-2009, figurent des propositions de formation des moniteurs en mathématiques. Les idées, qui s'appuient sur divers travaux de didactique, sont développées selon trois axes:

- le premier concerne la connaissance des étudiants actuels et celle des ruptures lycées / universités,
- le second concerne les analyses d'exercices en terme de tâches et d'activités,
- le dernier concerne les déroulements de séances de TD, avec analyse de vidéo.

Tous ces éléments, à travailler avec les moniteurs au fur et à mesure des séances, peuvent leur donner un certain nombre de leviers pour mettre les étudiants sur le chemin des connaissances mathématiques espérées.

Dans la deuxième partie, issue de l'expérience de l'auteure depuis de nombreuses années, figurent des idées directrices dans la formation des moniteurs en physique, centrées sur l'imbrication entre analyse du contenu à enseigner et celle des idées « préalables » des étudiants sur les phénomènes étudiés.

MOTS CLES :

Formation des moniteurs mathématiciens ou physiciens, analyses d'exercices, analyses de déroulements de séances de TD, analyse de vidéo, université, travail en séance de TD en petits groupes, sens commun en physique, conception des étudiants en physique, raisonnements en physique.

IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache – Reprographie Nadine Locufier
www.iremp7.math.jussieu.fr
Dépôt légal : octobre 2009 nouvelle édition – ISBN : 978-2-86612-302-4