IREM
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

93
Octobre 2008

# Argumentation et démonstration de l'école au lycée

**Groupe d'enseignants de l'académie d'Amiens**

**IUFM d'Amiens**
**Département de Mathématiques**

**Inspection Pédagogique Régionale**
**de Mathématiques**

**Formation Continue**

UNIVERSITE PARIS VII - DENIS DIDEROT

# Argumentation et démonstration de l'école au lycée

**Groupe d'enseignants de l'académie d'Amiens**

**IUFM d'Amiens** **Département de Mathématiques**

**Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques**

**Formation Continue**

# Sommaire

## D. Des situations pour accompagner l'entrée de la démonstration au collège



## E. Des pistes pour développer différents types de raisonnement

Ont participé à la rédaction de ce document

Sous la direction de Brigitte Grugeon-Allys, Maître de Conférences à l'IUFM d'Amiens

| École | Collège | Lycée |
|---|---|---|
| Devauchelle Eric<br>Ramet Sylvie | Ansart Sylvain<br>Barré Gérard<br>Courtois Christine<br>Dieval Alain<br>Galaup Philippe<br>Geeraerts Loïc<br>Lefebvre Adrien<br>Mallejac Viviane<br>Marchand Alain<br>Prouveur J.-François<br>Pruvost Mélanie<br>Rindel Christophe | Agnel Eric<br>Bourlet Blandine<br>Fondeur Martine<br>Gamache P. Yves<br>Maille Vincent<br>Spagnol Jean-Pierre<br>Trykowski François |

Avec la collaboration de :
Catherine Roncin et Bernard Aguer, Inspecteurs Pédagogiques Régionaux
Marylène Brare, Inspectrice de l'Education Nationale

# Préface

Ce document est le fruit de deux années de réflexion d'un groupe de professeurs et de formateurs de l'académie d'Amiens intervenant dans le premier et le second degré.
Face aux difficultés récurrentes que rencontrent la plupart des élèves en fin de collège et au lycée dans le domaine de la démonstration et au vu de l'inopérance d'une seule entrée par la structure de la preuve et sa rédaction (démonstrations à trous, organigrammes...), le groupe s'est posé la question de la progressivité des apprentissages puis celle du choix des activités la permettant.
Ce document propose une analyse didactique de l'évolution des apprentissages à travers les programmes, de l'école au baccalauréat, puis des pistes de réflexion assorties d'exemples d'activités portant sur quelques points délicats :

- Distinction dessin/figure
- Nécessité d'avoir recours à une preuve
- Entrée dans la démonstration
- Recours à différents types de raisonnement et changements de cadre

Nous remercions Catherine HOUDEMENT et Brigitte GRUGEON ALLYS pour leur apport théorique et l'accompagnement du groupe dans sa réflexion.

# A. Des points de repère pour favoriser une progressivité dans l'apprentissage de la démonstration

## 1. Argumentation et démonstration dans les programmes de l'école, du collège, du lycée

- **Une évolution des programmes de collège**

Dans l'introduction du nouveau programme de sixième, le paragraphe III.D « une initiation progressive à la démonstration » pointe l'importance d'une évolution progressive d'une pratique de l'argumentation pour convaincre à la pratique d'une forme particulière de la preuve qu'est la démonstration. C'est la poursuite d'un changement important amorcé dans les programmes de 1995. De plus, ce paragraphe explicite et insiste sur les domaines mathématiques concernés par la préoccupation de prouver, les domaines géométrique et numérique, ainsi que les étapes mises en jeu pour aborder la démonstration.

*« La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre «un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.*

*A cet égard, deux étapes doivent être distinguées : la recherche et la production d'une preuve, d'une part, la mise en forme de cette preuve d'autre part. Le rôle essentiel de la première étape ne doit pas être occulté par des exigences trop importantes sur la deuxième. (...)*

*La prise de conscience de ce qu'est la recherche et la mise en œuvre d'une démonstration est également facilitée par le fait que, en certaines occasions, l'enseignant se livre à ce travail devant la classe, avec la participation des élèves.*

*Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis.»*

- **Les analyses et propositions du rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (2001)**

Cette évolution des programmes fait suite à la réflexion menée dans le cadre de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques dirigée par J.P. Kahane. En particulier, le rapport du CREM fait le point sur le raisonnement géométrique non réduit à la simple déduction formelle et sur l'apprentissage de ce raisonnement non limité au domaine géométrique mais à réaliser aussi dans le domaine numérique.

« (..) *Il n'est pas aussi évident de justifier ce qui est l'une des originalités de l'enseignement de la géométrie, à savoir la part considérable du raisonnement.* (..) *Mais s'agissant de la géométrie, un débat philosophique récurrent oppose souvent tenants et adversaires de la méthode déductive à laquelle on l'identifie. Pour notre part, nous pensons que cette identification (à méthode déductive) est très réductrice, que le raisonnement géométrique est beaucoup plus riche que la simple déduction formelle et que l'apprentissage de ce raisonnement, convenablement mené, est sans doute l'argument le plus fort en faveur de la géométrie. Par exemple, le calcul constitue lui aussi, ne serait-ce que dans la justification* *de ses diverses étapes, une forme, simple mais authentique, de raisonnement. Le domaine numérique fournit d'ailleurs, dès l'école élémentaire, des situations dans lesquelles les élèves peuvent argumenter et raisonner (par exemple, situation du plus grand produit). Le calcul mental, lui aussi, nécessite une forme de raisonnement intéressante en ce qu'il mobilise des théorèmes et des démonstrations spécifiques.* »

Les auteurs du rapport indiquent que leur souci *« est d'insister sur les spécificités du raisonnement géométrique, qui (leur) semblent être les suivantes :*

- *Il s'agit d'un domaine qui peut être abordé assez tôt au collège, où le raisonnement intervient dès le début et dans lequel on perçoit aisément les articulations d'une logique dont la portée est universelle.*
- *Il s'agit d'un domaine riche, varié, avec un aspect visuel et esthétique, voire ludique.*
- *Il s'agit d'un domaine dont les objets sont pertinents et utiles.*

*(...)*

*Il est essentiel pour cela de ne pas sous-estimer deux difficultés :*

- *L'apprentissage des mathématiques, en général, et de la géométrie en particulier est difficile,*
- *Le raisonnement géométrique ne doit pas être réduit à l'apprentissage formel de la démonstration.*

*(...)*

*Il faut prendre en compte toute la richesse du raisonnement géométrique, qui s'appuie d'abord sur l'observation de la figure, avant de donner lieu à un véritable travail de recherche, avec l'élaboration de conjectures, soumises à un examen critique et qui permet enfin une validation définitivement convaincante par la démonstration, le tout en maintenant un dialogue permanent entre l'intuition et la rigueur.»*

Cette analyse amène les auteurs à poser des questions cruciales concernant l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée.

- Quoi enseigner ? Faut-il développer la géométrie dans l'espace, renforcer le rôle des invariants (longueur, angle, aire) ?
- Comment ? Avec quels principes ? Il s'agit avant tout de
  - de « *former des têtes bien faites* »,
  - d'amener les élèves à penser géométriquement en redonnant une place au dessin, préalablement à la conjecture et à la démonstration,
  - d'apprendre les élèves à raisonner.

Deux types de critique émergent à travers l'analyse des manuels :

- d'abord, les contenus (cours, exercices) des manuels sont assez pauvres,
- d'autre part, les énoncés proposés restent essentiellement fermés du type « Montrer que ». Ils induisent donc pour beaucoup d'élèves « *un jeu incompréhensible «et stérile* ». Plus précisément, les *« sous questions* (sont) *trop détaillées »* et un *« usage trop précoce et trop rigide des règles de démonstration fait que celle-ci perd son intérêt essentiel, qui est d'emporter la conviction, pour n'être qu'un exercice de style stéréotypé. Bref, on réduit le raisonnement à la démonstration, qui n'en est qu'un aspect* ».

Les auteurs du rapport de la CREM développent alors le point de vue suivant : *« La phase de démonstration, en effet, si elle est essentielle en ce qu'elle est la garantie de la sécurité et de l'exactitude, n'est pas, en tous cas, la seule activité du mathématicien. Il y a dans tout travail de recherche, une phase quasiment expérimentale, avec la formulation de conjectures et leur examen critique, notamment à l'aide de contre-exemples, qui précède la démonstration. Cette phase, qui est une véritable activité mathématique, peut et (doit) aussi se retrouver dans l'activité des élèves si l'on souhaite leur donner une véritable formation* *scientifique, qui aurait en plus l'avantage de se rapprocher de celle que développent les autres disciplines»*

- **Des nouveaux programmes au collège : raisonnement et démonstration**

Dans **l'introduction aux programmes de collège (BO n° 4 du 4 avril 2004),** les auteurs insistent sur la place de la conjecture et de l'argumentation dans l'activité mathématique.

*Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen. À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, **conjecturer** un résultat en expérimentant sur des exemples, **bâtir une argumentation**, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.*

Comme nous l'avons déjà indiqué le paragraphe 4.4 développe des arguments pour « une initiation progressive à la démonstration ».

***La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de prouver.***

*A cet égard, **deux étapes** doivent être distinguées : **la recherche et la production d'une preuve**, d'une part, **la mise en forme de cette preuve**, d'autre part. Le rôle essentiel de la première étape (production d'une preuve) ne doit pas être occulté par des exigences trop importantes sur la deuxième (mise en forme de la preuve). Pour cela, la responsabilité de produire les éléments d'une démonstration doit être progressivement confiée aux élèves. A partir des éléments qu'ils fournissent, la mise en forme peut, elle, être réalisée collectivement à l'aide de l'enseignant.*
*Dans le cadre du socle commun, qui doit être maîtrisé par tous les élèves, c'est la première étape, « recherche et production d'une preuve » qui doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale. La mise en forme écrite ne fait pas partie des exigibles. Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis.*

Dans l'introduction du programme de sixième, les auteurs précisent les enjeux de la démarche d'apprentissage développée en sixième. « *Elle vise notamment à :*

- *développer les capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive ;*
- *(..)*
- *Habiter l'élève à justifier ses affirmations, à argumenter à propos de la validité d'une solution, et pour cela à s'exprimer clairement aussi bien à l'écrit qu'à l'oral (...)* ».

Dans l'introduction des **programmes de mathématiques du cycle central**, les auteurs reprennent le point de vue développé en sixième.
*« [...] Comme en classe de sixième, l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves, et concourt à celle du citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, et en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.*
*Le travail expérimental (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de logiciels) permet d'émettre des conjectures. La résolution de problèmes vise à donner du sens aux connaissances travaillées, puis à en élargir les domaines d'utilisation [...] ».* La suite porte sur la place du raisonnement déductif tant dans le domaine numérique que dans le domaine géométrique.
*« L'initiation au raisonnement déductif permet aux élèves de passer de l'utilisation consciente d'une propriété mathématique au cours de l'étude d'une situation à l'élaboration complète d'une démarche déductive dans des cas simples, dans le domaine numérique comme dans le domaine géométrique ».*

Pour la classe de 5e, le programme précise que « *les diverses activités de géométrie habituent les élèves à expérimenter et à conjecturer, et permettent progressivement de s'entraîner à des justifications au moyen de courtes séquences déductives (...). Les élèves sont initiés à ce qu'est l'activité mathématique en géométrie tout en veillant à ne pas leur demander de prouver des propriétés perçues comme évidentes. Certaines propriétés admises permettent d'en générer d'autres qui, elles, peuvent être démontrées par les élèves avec l'aide de l'enseignant, ou en quelques occasions, par l'enseignant devant la classe* ». La distinction entre preuve et démonstration est clairement indiquée.

En classe de 4e, les auteurs soulignent la nature différente des deux étapes d'une démonstration : « *Les activités de découverte, d'élaboration et de rédaction d'une démonstration sont de natures différentes et doivent faire l'objet d'une différenciation explicite* ».

En troisième, le même point de vue est affirmé par les auteurs dans l'introduction du programme. « *Le travail expérimental (calculs numériques avec ou sans calculatrice, représentations à l'aide ou non d'instruments de dessin et de logiciels) permet d'émettre des conjectures. (...). Comme par le passé, les élèves sont conduits à distinguer conjecture et théorème, à reconnaître les propriétés démontrées de celles qui sont admises. Ils sont le plus souvent possible ; en classe et en dehors de la classe, mis en situation d'élaborer des démonstrations et de travailler à leur mise en forme. Les activités de découverte, d'élaboration et de rédaction d'une démonstration sont de natures différentes et doivent faire l'objet d'une différenciation* ». Cette dernière phrase reprend à l'identique la version du programme de 4e pour insister sur la différence explicite de nature entre ces deux étapes d'une démonstration.

**Seconde : Accompagnement des programmes (2000)**

Le document d'accompagnement des programmes de seconde explicite l'organisation de la classe pour favoriser la recherche et le raisonnement mathématique. « *L'organisation de la classe doit permettre aux élèves d'expérimenter les diverses facettes de l'activité mathématique. Certaines ("chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, (...), accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension") renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes : le choix de ces situations et de ces problèmes doit être fait avec attention ; ils déterminent la qualité de l'activité scientifique menée dans la classe, légitiment l'introduction de nouveaux contenus et justifient ensuite leur efficacité.*

*D'autres ("appliquer des techniques bien comprises, étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, (...), bâtir un ensemble cohérent de connaissances") relèvent de la découverte puis de l'assimilation d'un savoir dont les élèves doivent pouvoir sentir la cohérence et l'harmonie.*
*Contrairement à l'image que certains manuels scolaires relatifs aux programmes de 1990 ont pu contribuer à laisser transparaître, l'enseignement ne peut pas être réduit au simple énoncé de définitions et de propriétés admises, accompagnés d'exercices d'applications très répétitifs.* ***La démonstration doit tenir la place qui lui convient*** *en classe et ne pas être réservée au seul cadre d'un devoir : démontrer une propriété, c'est l'occasion de travailler le raisonnement, d'aborder des questions de logique, de préciser les définitions et surtout, d'aider à mieux comprendre les notions en jeu ».*

Depuis la rentrée 2004, les **ROC** (restitutions organisées des connaissances) accorde une place majeure au raisonnement mathématique et à la démonstration. A partir de la session 2005, certains exercices des BAC S et ES contiendront des questions avec restitution organisée de connaissances (i.e. des questions sur des démonstrations de cours). « *La restitution organisée de connaissances (comme par exemple la rédaction d'une démonstration figurant au programme), l'application directe de résultats ou de méthodes, l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à émettre une conjecture, à expérimenter, la formulation d'un raisonnement, sont des trames possibles* ».

Avant d'aborder des étapes pour l'enseignement de la démonstration de l'école au collège, nous précisons les difficultés que peuvent rencontrer les élèves.

## 2. Quelles difficultés des élèves ?

*a. De l'école au collège*

Les difficultés des élèves peuvent être liées à l'interprétation des termes " *argumenter à propos de la validité d'une solution* " au cycle 3 et " *bâtir une argumentation* " en sixième (Document d'accompagnement « Articulation école collège »).
En particulier, en géométrie, comme l'indique le document d'accompagnement « Articulation école collège », il s'agit *d'amener les élèves à passer d'une reconnaissance perceptive des objets mathématiques du plan et de l'espace à une connaissance de ces objets appuyée sur certaines propriétés, vérifiées à l'aide d'instruments*, c'est-à-dire, au passage d'une géométrie de l'observation à une géométrie de raisonnement.

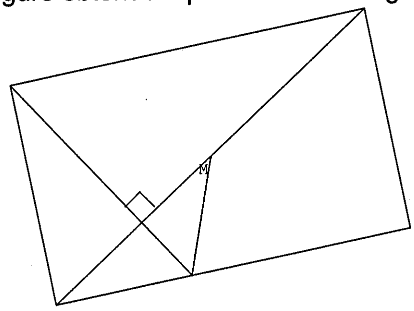
- Savoir interpréter un dessin en termes géométriques

De nombreux élèves ne perçoivent pas que la figure est une représentation d'une réalité physique. En seconde, certains considèrent encore la figure comme un dessin. Les élèves considèrent fréquemment le dessin comme un outil de preuve ; ils se contentent de mesurer pour prouver, comme ils ne différencient pas valeur approchée et valeur exacte. Cette difficulté se rencontre encore à l'entrée en seconde, mais semble rarement concerner les élèves de terminale.

Jusqu'en 2006, les élèves passaient une épreuve dans le cadre de l'évaluation nationale à l'entrée en $6^e$. L'objectif de l'exercice présenté ci-dessous était d'analyser le rapport des élèves à la figure, c'est-à-dire, la place donnée par les élèves aux connaissances spatiales et géométriques à partir des textes rédigés par les élèves pour présenter les étapes de construction de la figure donnée.

Voici le texte de l'énoncé donné dans le cadre de l'évaluation nationale de sixième en 2000.

Evaluation nationale de $6^e$ :
Voici une figure obtenue à partir d'un rectangle de centre M.




Un camarade doit reproduire la figure ci-dessus sans la voir.
Écris les différentes étapes de la construction de cette figure.
La position et l'orientation de la figure n'ont pas d'importance.

Les deux productions ci-dessous

- Production1 :
  *Trace un rectangle puis en haut à gauche trace une droite jusqu'en bas ensuite trace une deuxième droite qui passe par en bas à gauche jusqu'en haut à droite puis trace une troisième droite que tu vas mener (M) rejoignant les deux droites.*

- Production 2 :
  *Trace un rectangle de 8,1 cm de largeur, de 5cm de longueur. Trace une diagonale du haut à droite en bas à gauche (M). Trace une droite perpendiculaire du haut à gauche jusqu'à 3,1 cm du bas à gauche. Trace à la droite (M) et à l'autre diagonale, un triangle de 1,1 cm de L, 2 cm de L, 2,2 cm de*

mettent bien en évidence un rapport à la géométrie inadapté et une difficulté à distinguer ce qui relève de connaissances spatiales du côté du dessin et de connaissances géométriques du côté de la figure.

Le document d'accompagnement « Articulation école collège » insiste sur ces évolutions dans la transition école collège :
*En sixième, où la géométrie occupe une place nettement plus importante qu'à l'école primaire (...) les élèves ne travaillent pas sur des objets nouveaux.* ***Les travaux conduits à ce niveau doivent prendre en compte les acquis antérieurs****, évalués avec précision et se fixer de nouveaux enjeux. Ils doivent viser en particulier à* ***stabiliser les connaissances*** *des élèves, à* ***les structurer****, et peu à peu à* ***les hiérarchiser****... avec, notamment, un objectif d'initiation à la déduction. Les élèves passent d'une lecture globale des dessins géométriques à une lecture ponctuelle : désignation des points par des lettres, identification de points comme intersection de deux droites, cercle comme figure constituée des points situés à une distance donnée d'un point donné. La distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction. A l'école primaire, les élèves ont commencé à utiliser des lettres pour désigner des points (sommets d'un polygone, extrémités d'un segment), mais le recours aux notations*

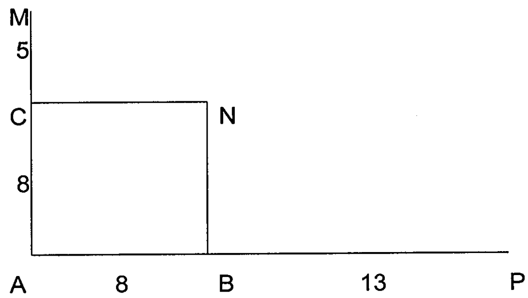
*symboliques (// , □, ...) ou aux conventions pour désigner des propriétés relèvent du collège où leur introduction doit être progressive et faire l'objet d'une attention particulière.*

*b. Au collège :*

- <u>Entrer dans le contrat du géométrique et comprendre la nécessité de démontrer</u>

En géométrie, les élèves ne voient pas forcément l'utilité de la démonstration puisque « ça se voit sur la figure ». De même dans le numérique, comment les amener à passer d'une preuve perceptive à une preuve mathématique, c'est-à-dire, comprendre que la production de nombreux exemples n'est pas une preuve, mais que celle d'un seul contre-exemple en est une (cette dernière difficulté semble disparaître en terminale, en travaillant à partir des QCM) ?

En géométrie, le problème ci-dessous permet bien d'étudier si les élèves perçoivent la nécessité de démontrer. Ici, la majorité des élèves conjecturent que les points M, N, P sont alignés, or ils ne sont pas alignés. Or les élèves se contentent bien souvent de la perception pour conclure à l'alignement des points. Un travail *via* l'agrandissement de la figure permet de déstabiliser cette conception.




Que peut-on dire des points M, N, P ?

Le document d'accompagnement 2007 relatif au raisonnement déductif en géométrie (Cf. IV) éclaire ces difficultés :
*Dans le domaine de la géométrie, il faut en souligner quelques aspects spécifiques ou importants. Le premier obstacle rencontré en 6e (et qui perdure longtemps !) est la compréhension du changement de contrat accompagnant le changement de statut des figures. Il ne suffit plus d'observer ou de mettre en évidence à l'aide des instruments des propriétés sur une figure pour qu'elles soient avérées sur le plan mathématique. La nécessité de construire une argumentation à partir d'une base de références identifiées comme telles n'est ni naturelle, ni intuitive. C'est en travaillant, par exemple, des situations construites sur des doutes "visuels", comme celle de l'exercice sur les rayons du cercle présenté dans "II – Définitions et propriétés", plutôt qu'en appliquant de façon immédiate un théorème, que l'élève comprendra les nouvelles règles du jeu impliquées par les situations de preuve en géométrie. Plus généralement, ce n'est pas en étant confronté à des situations d'une grande pauvreté que peut appréhender vraiment la nécessité d'une preuve, ni d'ailleurs en résolvant de manière répétitive des exercices-types.*

Dans le numérique, le problème suivant permet aussi d'étudier si les élèves perçoivent la nécessité de recourir au calcul algébrique et non à l'exemple pour prouver :

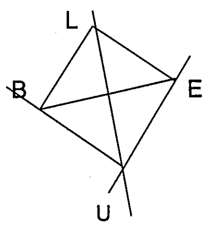
> 1) Choisir un nombre
> 2) Elever ce nombre au carré
> 3) Soustraire 5 au résultat.
> 4) Soustraire 4 fois le nombre choisi à la différence obtenue.
>
> Que constates-tu ? Justifie la propriété numérique conjecturée.

- Comprendre les spécificités du raisonnement mathématique (Cf. production 4e)

Une autre difficulté des élèves concerne les spécificités du raisonnement mathématique et sa rédaction. Ils éprouvent souvent des difficultés à mener une démarche heuristique : ils ne savent pas démarrer, ne voient pas quelles connaissances mobiliser, ne savent pas choisir un type de stratégie, un cadre adapté au raisonnement, surtout lorsque aucun n'est suggéré. Leurs réactions ont tendance à être stéréotypées (pour l'étude des variations d'une fonction, on cherche la dérivée). Le document d'accompagnement « géométrie » précise dans le paragraphe IV les deux démarches essentielles : « *parmi les démarches heuristiques conduisant à l'élaboration d'une démonstration, certaines sont identifiables et donc susceptibles d'être construites et travaillées. Il s'agit principalement du repérage des figures-clés dans un contexte donné et de la pratique de l'analyse remontante* » et les explicite.

Les élèves peuvent aussi confondre donnée et conclusion. Dans le cas du raisonnement déductif à plusieurs pas, ils ont du mal à passer du statut de conclusion du premier pas à celui de donnée pour le second. D'autres difficultés sont liées au fait que le niveau de validation peut également changer (entre le collège et le lycée par exemple) : dois-je énoncer le théorème utilisé avant de l'appliquer ou non ? La démonstration présentée ci-dessous met en évidence ces difficultés : conclusion incorrecte, pas ternaire non explicite, règle explicitée de façon non rigoureuse.

BLE est un triangle isocèle de sommet L. La parallèle à (BL) qui passe par E et la parallèle à (LE) qui passe par B se coupent en U. Démontre que (BE) est perpendiculaire à (LU)




Hypothèses
BLE est isocèle
La parallèle à (LE) passe par B
La parallèle à (BL) passe par E
et se coupent en U
je veux prouver que (LU) perpendiculaire (BE)

| Hypothèse | Or règle | donc conclusion |
|---|---|---|
| BLE est triangle isocèle | il a deux côtés de même longueur | donc UB = UE |
| La parallèle à (LE) passe par B<br>La parallèle à (BL) passe par E et se coupent en U | Si elles sont parallèles 2 à 2 et ont la même longueur | LEUB est un losange |
| LEUB est un losange | Or un losange a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement | (LU) perpendiculaire à (BE) |

L'utilisation d'un théorème pose aussi un certain nombre de difficultés : théorème dont seule la réciproque est vraie, théorème non applicable au vu des données de l'énoncé, théorème dont l'utilisation nécessite de connaître déjà la conclusion, voire même théorème faux... Les élèves éprouvent des difficultés à choisir un type de raisonnement (déductif à un ou plusieurs pas, par l'absurde, par le contre-exemple, par double inclusion, par double implication, par disjonction des cas, par récurrence,...).

Souvent, les élèves restent aussi bloqués parce qu'ils veulent tout de suite rédiger avant même d'élaborer un canevas de démonstration.

## 3. Mais alors, rupture ou continuité de l'école au collège, du collège au lycée ?

*a. L'argumentation à l'école primaire*

C. Houdement[1] précise deux aspects de l'argumentation en mathématiques :

- Distinguer ce qui est vrai de ce qui est faux : la validation, le contrôle
- Produire des points de vue compréhensibles et acceptés par une communauté, c'est-à-dire un discours sur la validation selon les règles de la communauté.

A l'école, l'argumentation conserve toujours une fonction heuristique : valider un résultat. L'écrit a une fonction de communication de la démarche. Avec la démonstration, l'argumentation change de statut : de la fonction de production de résultats, elle devient forme de présentation de la non contradiction de ces résultats avec d'autres considérés comme connus.
Dans le paragraphe D « une initiation progressive à la démonstration » de l'introduction générale pour le collège (BO n°4 du 9 avril 2004), les auteurs des programmes insistent sur le fait que *« la pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration ».*

Dans le paragraphe « Mathématiques et langages », les auteurs précisent leur point de vue : *« Dans le prolongement de l'école primaire, la place accordée à l'oral reste importante. En particulier, les compétences nécessaires pour la validation et la preuve (articuler et formuler les différentes étapes d'un raisonnement, communiquer, argumenter à propos de la validité d'une solution) sont d'abord travaillées oralement en s'appuyant sur les échanges qui s'instaurent dans la classe ou le groupe avant d'être sollicitées par écrit individuellement ».*

En ce qui concerne l'argumentation à l'école primaire, le travail repose essentiellement sur la validation : il s'agit de faire évoluer le mode de validation d'une validation matérielle à une validation possible *via* les connaissances mathématiques acquises puis enfin à une validation s'appuyant sur un débat contrôlé par le professeur. Le choix des problèmes proposés avec possibilité d'auto validation est important. De nombreuses situations sont proposées dans ERMEL « Vrai ? Faux ? On en débat ! » livre édité par l'INRP en 1999 :
« Comment reconnaître qu'un nombre est un multiple de 4 ? »
« Des points étant marqués sur un cercle, trouver le nombre de cordes joignant ces points deux à deux ».
Et en géométrie ?

*b. Quatre types de géométrie (Houdement, Kuzniak 1998)*

[1] Ce paragraphe s'appuie sur les notes prises lors de l'intervention de C. Houdement dans le groupe de réflexion « de l'argumentation à la démonstration » mené dans l'académie d'Amiens en 2006 et 2007.

C. Houdement et A. Kuzniak distinguent quatre types de géométrie :

- Des géométries non axiomatiques à l'école élémentaire
  - La géométrie concrète (G0)
  - La géométrie spatio-graphique (G1)

Les élèves travaillent sur des objets physiques et mobilisent des propriétés physiques pour résoudre des problèmes, argumenter leurs démarches, à partir de l'usage d'instruments. Les élèves s'appuient sur des validations perceptives non instrumentées en G0 et instrumentées en G1 pour valider leurs solutions.

- Des géométries axiomatiques dans l'enseignement secondaire et universitaire
  - La géométrie axiomatique naturelle (G2) au collège et au lycée
  - La géométrie axiomatique (G3) à l'université

Les élèves doivent travailler sur des objets théoriques, s'appuyer sur la représentation des objets et mobiliser les propriétés des concepts en jeu pour réaliser les raisonnements déductifs et les démonstrations. Les validations des démonstrations sont théoriques.

**Le passage d'une géométrie** G1 à une géométrie G2 peut provoquer des **ruptures de contrat** qui peuvent être de plusieurs natures :

- Le statut de l'épaisseur des traits, des points ;
- Le statut de la justification par le perçu ;
- le statut de la figure (dessin pour expérimenter, comparer, mesurer, ou dessin pour analyser et démontrer)

L'enseignement du raisonnement dans le domaine de la géométrie doit prendre en compte la négociation de ces ruptures de contrat. En effet, ces changements de statut semblent évidents pour l'enseignant mais pas pour les élèves, que ce soit pour les objets, d'objets matériels (physiques, graphiques, graphiques visuels) aux objets mentaux puis conceptuels ou pour la validation, de l'appui sur le dessin à l'appui sur le texte définissant la figure.

*c. Niveaux de développement de la pensée géométrique chez l'enfant (Van Hiele 1984)*

Ces quatre types de géométrie sont à mettre en perspective du modèle de P. et D. Van Hiele concernant les niveaux de développement de la pensée géométrique chez l'enfant. P. et D. Van Hiele distinguent cinq niveaux :

- Niveau 0 (visualisation) : les élèves identifient les figures globalement ;
- Niveau 1 (analyse) : les élèves appréhendent des propriétés des figures sans les expliciter ;
- Niveau 2 (déduction informelle) : les élèves s'appuient sur une déduction perçue comme outil de validation. Ils utilisent des résultats obtenus empiriquement comme techniques déductives.
- Niveau 3 (déduction formelle) : Les élèves exploitent une déduction perçue comme outil de validation mais à l'intérieur d'un système axiomatique.
- Niveau 4 (rigueur) : Les élèves travaillent dans différents systèmes axiomatiques.

Le niveau 2 correspond à la négociation de la rupture lors du passage de la géométrie G1 à la géométrie G2 et donne un éclairage sur les ruptures de contrat repérées.

Mais alors, quels éléments prendre en compte pour amener les élèves à passer d'une géométrie de l'observation à une géométrie du raisonnement ?

- le statut de la figure et les différentes appréhensions d'une figure,
- la nécessité du raisonnement pour convaincre,
- les spécificités du raisonnement mathématique,
- Les étapes à prendre en compte dans l'enseignement de la démonstration

Les quatre paragraphes suivant sont consacrés à leur étude.

## 4. Le statut de la figure géométrique

- *Distinction dessin / figure*

Nous explicitons d'abord les spécificités du travail sur les objets géométriques. A tout objet géométrique sont associées des représentations spatio-graphiques *via* le dessin et des descriptions discursives *via* le langage. Une figure géométrique est l'ensemble des objets géométriques et des relations géométriques entre les objets de la figure. Le travail sur une figure géométrique doit permettre la mise en relation entre la visualisation des relations spatiales sur le dessin et la lecture des relations et des propriétés géométriques des objets géométriques constituant la figure.

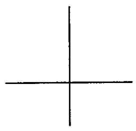


Fig 1

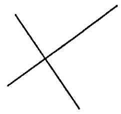


Fig 2

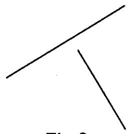


Fig 3

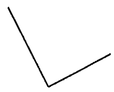


Fig 4

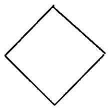


Fig 5

Les figures 1 à 5 ci-dessus représentent des droites perpendiculaires dans cinq contextes distincts :
Fig 1 : le dessin des droites est dans une position prototypique horizontal / vertical
Fig 2 : le dessin des droites est dans une position non prototypique oblique
Fig 3 : les dessins représentant les droites ne se coupent pas
Fig 4 : le dessin correspond à un angle droit dessiné à partir de deux demi-droites
Fig 5 : Les droites perpendiculaires sont portées par les côtés d'un quadrilatère dans une position non prototypique.

Pour distinguer la figure géométrique de ses dessins, les élèves doivent mettre en rapport les représentations spatio graphiques et les descriptions discursives, éliminer les relations spatiales non pertinentes et repérer les relations géométriques non visibles immédiatement sur le dessin.

- *Différentes appréhensions d'une figure (Duval 1993)*

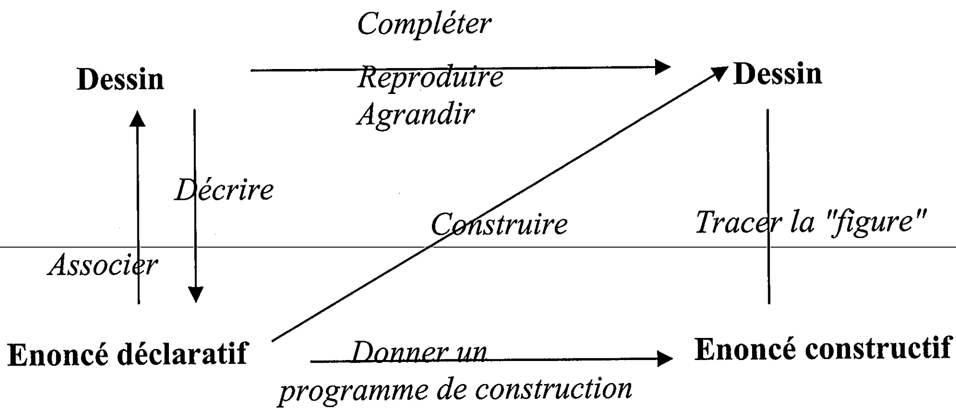
Nous revenons maintenant sur les difficultés des élèves liées à la lecture des figures. Pour expliciter ces difficultés, Duval distingue plusieurs types d'appréhension d'une figure : perceptive, opératoire, séquentielle et discursive.

Le tableau ci-dessous explicite les spécificités de chacun des types d'appréhension, ce qui illustre la complexité de l'interprétation d'une figure géométrique et peut permettre d'éclairer certaines difficultés des élèves.

| Appréhension d'une figure | Traitement | Fonction |
|---|---|---|
| **Perceptive** : ce qu'une figure montre au 1er coup d'œil | Permet de discriminer des sous figures | Identification : permet de reconnaître une forme, un objet |
| **Opératoire** : permet à de modifier une figure matériellement ou mentalement | Permet des opérations modifiant une figure en sous figures, sur figures, … | Heuristique : une opération permet de montrer l'idée d'une preuve |
| **Séquentielle :** permet la prise en compte de l'ordre dans la construction des unités figurales d'une figure | Produit un feed-back : pour réaliser une figure, il faut respecter les propriétés mathématiques | Modèle : permet une représentation séquentielle et ordonnée de la figure étudiée |
| **Discursive :** permet que les propriétés soient données par une indication discursive : dénomination, hypothèse | Permet le raisonnement déductif à partir des propriétés données et en utilisant des définitions, des théorèmes. | Démonstration : permet l'entrée dans le raisonnement déductif |

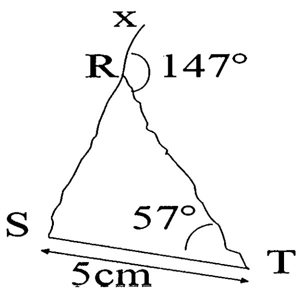
Cette analyse pose la question de l'organisation de l'enseignement de la preuve : n'est-il pas nécessaire de choisir des tâches de nature différente pour faire évoluer le statut et l'appréhension des figures géométriques ?

Le croisement entre différents supports d'une figure, dessin et texte, énoncé déclaratif ou énoncé constructif, permet de distinguer différents types d'activités présentés dans les programmes : reproduire, compléter, agrandir, construire, tracer la figure, décrire, donner un programme de construction, associer énoncé et dessin. Le schéma ci-dessous illustre les différents types d'activités.




De plus, pour amener les élèves à négocier la distinction entre dessin (objet matériel) et figure (modèle d'objet géométrique), il est possible de jouer sur une variable : le type du dessin. En effet, nous pouvons distinguer les dessins cotés (avec mesure), les dessins cotés à l'échelle, les dessins à main levée (éventuellement codés ou cotés), les dessins sans échelle codés.

Nous illustrons ce paragraphe par un exemple de tâche : *reproduire à partir d'un dessin mal fait à main levée.*




Le procédé attendu pour reproduire la figure est le calcul de l'angle RST à partir des données présentes sur le dessin à main levée.

## 5. Les spécificités du raisonnement mathématique

Dans ce paragraphe, nous explicitons les spécificités du raisonnement mathématique.

- *Richesse du raisonnement mathématique ?*

Au-delà de l'argumentation, le programme nous amène à distinguer conjecture, explication, preuve et démonstration. Qu'entend-on pour chacun de ces termes ?

- o **Conjecture :** Émettre une conjecture, c'est résumer dans un énoncé précis une idée que l'on pense universellement vraie (Legrand 2000).

- o **Explication :** Proposer une explication c'est réaliser un discours dont l'objectif est de communiquer à d'autres le caractère de vérité d'un énoncé mathématique.

- o **Preuve :** Faire une preuve c'est proposer une explication acceptée relativement à la vérité d'un énoncé par une communauté de pensée à un moment donné.

Balacheff (1988) distingue différents niveaux de preuve : les preuves pragmatiques, les preuves intellectuelles, les preuves formelles, la démonstration.

La **démonstration** est tout raisonnement valide permettant d'établir qu'un énoncé est vrai ou faux à l'intérieur d'un système théorique. Une démonstration est un outil de preuve avec les caractéristiques suivantes :

- *un statut social :* c'est une preuve acceptée par une communauté donnée (mathématiciens, classe à un niveau scolaire donné)
- *deux fonctions :*
  - *une fonction de validation* dans le but de réduire le doute,
  - *une fonction explicative du pourquoi :* soit pour convaincre, soit pour expliquer.
- *une forme :* toute démonstration respecte des règles ; certains énoncés sont considérés comme vrais (axiomes) ; les autres sont déduits de ceux-ci ou d'énoncés préalablement démontrés à partir de règles déductives.
- *la nature des objets en jeu :* les objets mathématiques mis en jeu dans l'application des règles déductives sont des objets géométriques théoriques qui n'appartiennent pas à l'espace sensible.
- *un contexte :* cet apprentissage ne peut se situer en dehors de résolution de problèmes.

Nous avons déjà mis en évidence trois types d'obstacles :

- Entrer dans la rationalité mathématique différente de celle du quotidien,
- Enclencher un processus destiné à produire des résultats, conjectures et à en établir la vérité,
- Aboutir à un texte présentant la démonstration.

Précisons maintenant quelles sont les spécificités du raisonnement déductif.

La structure du pas déductif est ternaire (Duval 1993) et met en jeu :

| | | |
|---|---|---|
| Prémisse<br>(Proposition) | Règle déductive du type « Si ….. Alors ….. »<br>(Règle de substitution) | Conclusion<br>(Nouvelle proposition) |

- Un raisonnement déductif est une succession de pas de raisonnement.
- Le statut d'une proposition dépend du contexte d'énonciation : ce peut être une hypothèse, un axiome, une définition, un théorème, une conjecture.
- On recherche sa valeur de vérité qui est vraie ou fausse ou non encore déterminée.
- En liaison avec l'organisation d'un pas de raisonnement, une proposition peut être une prémisse, un énoncé tiers ou une conclusion.

• *Rupture ou continuité cognitive entre argumentation en français et raisonnement déductif ? (Duval 1993)*

Duval distingue une argumentation en français d'un raisonnement déductif et développe l'idée d'une rupture cognitive entre argumentation et raisonnement déductif.

Pour étayer cette rupture, Duval développe plusieurs points opposant l'argumentation en français et le raisonnement déductif.

1. Duval distingue le **contenu** d'un énoncé de son **statut** :
   - Son contenu peut avoir comme « valeur épistémique », évident, absurde, nécessaire, vraisemblable, possible, neutre, ….
   - Son statut dépend du contexte d'énonciation : ce peut être une hypothèse, un axiome, une définition, un théorème, une conjecture
2. Duval distingue la structure d'un pas déductif et d'une argumentation :
   - Le raisonnement déductif est décrit par une structure ternaire : les pas sont connectés selon un processus de recyclage, c'est-à-dire, la conclusion du premier pas devient la donnée du pas suivant.
   - Au contraire, dans l'argumentation, les inférences sont reliées par connexion intrinsèque en prenant en compte le contenu.

   Un raisonnement déductif est un raisonnement dont la validité est contrôlée, ce qui n'est pas le cas pour l'argumentation : il est seulement possible d'en évaluer la pertinence.

Duval défend donc la *nécessité de mettre en évidence les différences entre raisonnement mathématique et argumentation en français.*

Pour compléter ce point de vue, nous présentons les travaux de Pedemonte (2002) et de Gandit (2004). Comme Duval, Pedemonte propose de dépasser la rupture cognitive entre argumentation et raisonnement déductif (Duval). Pour ceci, elle développe la mise place de situations qui permettent la production d'une conjecture et l'élaboration de sa preuve.

• *Preuve comme processus et produit (Gandit 2004)*

Comme dans le rapport du CREM, Gandit indique qu'il ne faut « pas considérer une démonstration comme un texte, rédigé dans un cadre formel étroitement codifié, qui ne laisse aucune place ni à l'heuristique, ni à la conjecture, et qui ne donne aucune indication sur le cheminement qui a permis d'aboutir à sa production ». Il est préférable de « considérer la preuve ou la démonstration sous le double aspect du processus et du produit ». « Le processus de preuve se met en place sous la triple impulsion qui naît de la recherche d'une conjecture, d'un désir de combler le doute sur cette conjecture, et du besoin d'explication ». Comme l'indiquait Balacheff en 1987, « l'interaction est un moteur du processus de preuve ».

Nous concluons ce paragraphe par cette citation de Balacheff qui illustre le jeu entre argumentation mathématique et démonstration :

*« Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et c'est donc renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une argumentation mathématique. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration » (Balacheff 1999).*

Pour terminer nous citons les différents types de raisonnement mathématique.

- *Les types de raisonnement mathématique*

  Dans les programmes plusieurs types de raisonnement mathématique sont présents :
  - *Le raisonnement par enchaînements déductifs* (ou par implication logique avec le modus ponens : si p est une proposition vraie, et si « p implique q » est vraie alors q est une proposition vraie)
  - *L'utilisation de contre-exemple*
  - *Le raisonnement par disjonction de cas*
  - *Le raisonnement par contraposée*
  - *Le raisonnement par l'absurde (voir C.1)*
  - *Le raisonnement par récurrence (voir E.3)*

Au fil des programmes de collège et de lycée, nous donnons des exemples pour des types de raisonnement :

- *Utilisation de contre-exemple :*

En sixième : Exercices sur la division euclidienne
En cinquième : Analyse des propriétés caractéristiques des figures, preuve qu'une propriété numérique est fausse, preuve que deux suites ne sont pas proportionnelles.
En quatrième : Preuve d'égalités fausses avec des puissances.
En troisième : Preuve d'égalités fausses avec des racines carrées, preuve de réciproques fausses pour des propriétés des diviseurs d'un nombre entier

- *Raisonnement par disjonction de cas*

En sixième : Comparaison de décimaux
En cinquième : Comparaison de nombres relatifs en écriture décimale, définition de la distance de deux points sur un axe, définition de la somme et du produit de deux nombres relatifs
En quatrième : Etude des effets de la multiplication sur l'ordre
En troisième : Preuve du théorème de Thalès, du théorème de l'angle inscrit

- *Approche du raisonnement par l'absurde*

En cinquième : Construction de triangles impossibles, caractérisation angulaire du non parallélisme
En quatrième : Utilisation du théorème de Pythagore
En troisième : Utilisation du théorème de Thalès
Seconde : Irrationalité de $\sqrt{2}$

Pour un choix de problèmes, voir la brochure « Initiation au raisonnement » de l'équipe académique de Mathématiques de Bordeaux.

## 6. Les étapes à prendre en compte dans l'enseignement de la démonstration

Pour conclure, nous dégageons des étapes à prendre en compte dans l'enseignement de la démonstration, que ce soit dans le domaine numérique ou dans le domaine géométrique.

### *a) Pour favoriser l'argumentation à l'école*

A l'école et au début du collège, comme nous l'avons déjà dit, il s'agit de travailler l'argumentation mathématique dans divers domaines des mathématiques pour valider des propositions ou conjectures. Des activités testées en classe sont proposées au paragraphe B dans le domaine géométrique. Voici deux exemples de problèmes à traiter, à partir du cycle 3, pour favoriser l'argumentation :

*Problème 1* : Chercher parmi les décompositions additives d'un nombre, celle(s) dont le produit des termes est la plus grande.

*Problème 2* : Chercher trois nombres entiers qui se suivent dont la somme est donnée.

### *b) Pour accompagner l'entrée dans la démonstration au collège*

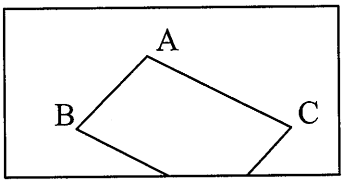
Au collège, nous pouvons étiqueter les étapes suivantes :

**1ère étape : Faire admettre la nécessité d'une preuve**. Des activités testées en classe sont proposées au paragraphe C.

Voici d'autres exemples :

*Problème 1* : [AB] est un segment de 14 cm de longueur. Soit O le milieu de [AB]. M est le point de [AB] tel que AM = 10,4 cm, et C est le point tel que le triangle MBC soit équilatéral. Que peut-on dire du triangle OMC ?

*Problème 2* : ABCD est un parallélogramme.
Construire la droite (BD) sans sortir du cadre.




*Problème 3* : On donne DB = 8 cm ; CD = CB et AD = AB ; DAB = 80° et BDC = 48°

1) Construis la figure donnée à main levée
2) Justifie la construction
3) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

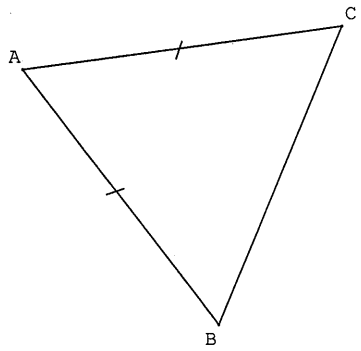
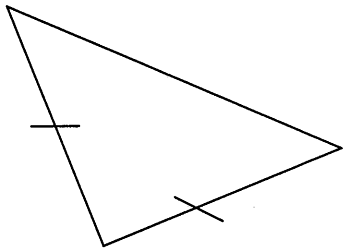
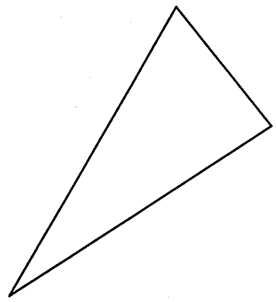
*Problème 4* (dès la sixième) :
Voici un énoncé : « Si on multiplie deux nombres décimaux entre eux, le produit est toujours plus grand que chacun des deux facteurs ». Cet énoncé est-il vrai ou faux ? Pourquoi ?

*Problème 5* :
Dans l'expression $n^2 - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-ton toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?

**2ième étape : Faire évoluer le statut de la figure et traiter les informations données** (interprétation d'une figure, hiérarchisation des informations, recherche des informations nécessaires à prendre en compte pour utiliser une règle de substitution (définition ou théorème). Des activités sont proposées au paragraphe B.

En voici d'autres exemples :

**Exercice 1 :**

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Triangle ABC<br>AC = 6 cm<br>ABC = 60° | Triangle DFE de sommet E<br>EF = ED = 5 cm<br>DEF = 100° | Triangle GHI<br>GHI = 30°<br>HI = 5,5 cm |

Compléter les tableaux :

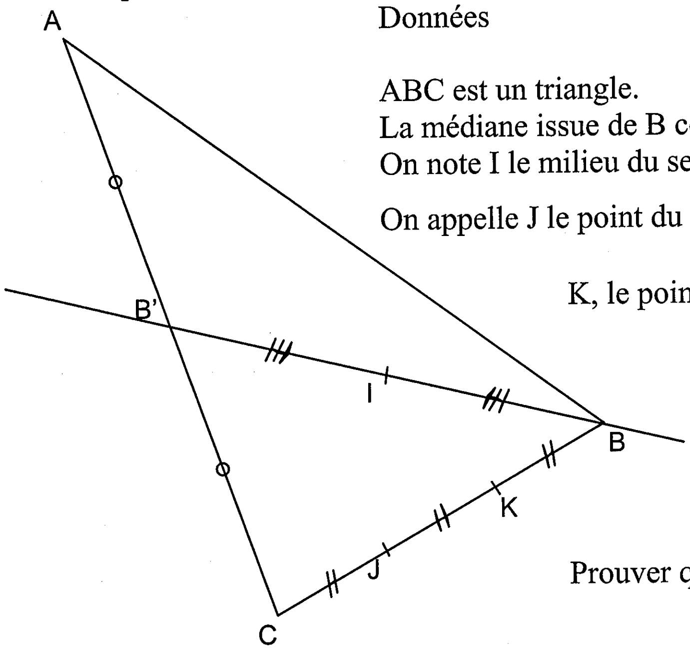
| | Longueur (cm) | Je ne peux pas répondre | Je peux répondre<br>Propriété utilisée |
|---|---|---|---|
| AB | | | |
| BC | | | |
| AC | | | |
| DE | | | |
| EF | | | |
| DF | | | |
| GH | | | |
| HI | | | |
| GI | | | |

| | Mesure angles (degrés) | Je ne peux pas répondre | Je peux répondre<br>Propriété utilisée |
|---|---|---|---|
| BAC | | | |
| ABC | | | |
| ACB | | | |
| EDF | | | |
| DEF | | | |
| EFD | | | |
| GHI | | | |
| GIH | | | |
| HGI | | | |

**3ième étape : Travailler le raisonnement déductif à un pas** (conditions d'application et structure ternaire).

**4ième étape : Comprendre l'évolution du statut des énoncés** (avec processus de recyclage de la conclusion en donnée, Cf. doc. d'application du programme 1995) et **faire des raisonnements à plusieurs pas en travaillant l'heuristique de recherche**. Des activités sont proposées au paragraphe D.

Voici un problème qui permet de travailler le recyclage de la conclusion en donnée:




Données

ABC est un triangle.
La médiane issue de B coupe le côté [AB] en B'.
On note I le milieu du segment [BB'].
On appelle J le point du segment [BC] tel que CJ=$\frac{1}{3}$BC et

K, le point du segment [BC] tel que BK=$\frac{1}{3}$BC.

Question :

Prouver que les points A, I et K sont alignés.

Une modalité de travail pour aider les élèves à chercher peut consister à faire écrire des narrations de recherche. Il s'agit d'écrire un texte expliquant toutes les démarches faites pour chercher une solution à un problème.

**5ième étape : Rédiger une démonstration.**

### c) Pour aider les élèves à chercher et à démontrer

- *Comprendre la nécessité de prouver : démarche de preuve et règles du débat mathématique*

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2, une des difficultés des élèves concerne la compréhension de la nécessité de prouver. Pour amener les élèves à percevoir les limites du numérique via l'exemple, de la mesure, et à comprendre la nécessité de prouver, les exercices proposés doivent mettre en évidence la nécessité de discuter la validité d'énoncés mathématiques et de ne pas en rester à une validation par l'exemple dans le numérique, à une validation perceptive (sur le dessin), reposant sur la mesure ou instrumentée. Ce travail doit s'appuyer sur *les règles du débat mathématique qui peuvent être en contradiction avec les règles de débat de la vie quotidienne* :

- un énoncé est vrai ou faux,
- un contre-exemple suffit à invalider une propriété,
- un ou plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai,
- une constatation ou une mesure sur un dessin ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai,
- le débat prend appui sur des définitions et des propriétés clairement énoncés sur lesquels il y a eu accord et sur des théorèmes démontrés au préalable.

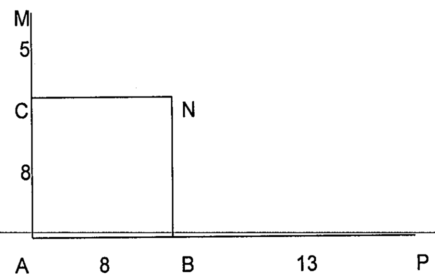
- *Processus de preuve et argumentation mathématique* (Douaire 1999)

Pour faire fonctionner les règles du débat mathématique, Douaire explicite ce qu'il définit par l'argumentation mathématique : c'est une « justification rationnelle ayant pour objectif la recherche de la vérité d'une proposition mathématique, avec validation ou bien réfutation de conjectures par contre-exemple, passant ainsi par l'établissement du faux.»

Il propose de commencer un travail d'argumentation mathématique dès le cycle 3 dans des situations numérique ou géométrique. Voici un exemple de situation :
« Chercher parmi les décompositions additives d'un nombre, celle(s) dont le produit des termes est le plus grand » (Douaire et al). Ce travail passe par la nécessité de faire vivre le débat mathématique en classe.

- *Débat mathématique et phases de mise en commun à l'oral*

Comme l'indique l'introduction générale du programme de mathématiques du collège (BO n°4 du 9 avril 2004) qui poursuit le point de vue développé à l'école primaire, il est nécessaire que « *la place accordée à l'oral reste importante* » pour permettre d'une part la formulation et la comparaison des conjectures, l'argumentation à propos de leur validité en faisant fonctionner les règles du débat mathématique et en formulant les différentes étapes du raisonnement. L'organisation du travail conditionne la mise en place du débat mathématique : il s'agit pour d'abord le professeur de prendre soin de proposer des problèmes ayant des énoncés ouverts ou semi-ouverts qui peuvent conduire à la formulation de conjectures, mais aussi d'organiser différentes phases de travail : phases de travail individuel ou par groupes pour dégager des conjectures, mettre au point les étapes du raisonnement, phases de mise en commun pour formuler les étapes du raisonnement et argumenter à propos de la validité d'une solution, phases de synthèse pour qu'il présente une *« synthèse, brève, qui non seulement porte sur les quelques notions, définitions, résultats, théorèmes et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais qui est aussi l'occasion de dégager les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en œuvre ».*
Ces différentes phases sont l'occasion de développer les différents types d'écrits présentés dans l'introduction générale des programmes de mathématiques de collège : écrits de recherche, écrits destinés à être communiqués et discutés, écrits de référence qui laissent une trace des savoirs à retenir.
Le scénario d'enseignement pour amener les élèves à remettre en cause l'alignement des points dans la figure présentée dans le paragraphe 2.b puis à le démontrer illustre des organisations possibles du travail en classe. Il est développé dans le paragraphe C.1.




Que peut-on dire des points M, N, P ?

- *Prendre en compte les deux grandes étapes pour réaliser une démonstration*

Comme l'indique avec force l'introduction des programmes de collège, il est indispensable de distinguer deux étapes d'une démonstration : la recherche et la rédaction.

Le document d'accompagnement 2007 « géométrie » précise « *les démarches heuristiques conduisant à l'élaboration d'une démonstration,* (qui pour*) certaines sont identifiables et donc susceptibles d'être construites et travaillées. Il s'agit principalement du repérage des figures-clés dans un contexte donné et de la pratique de l'analyse remontante.*

*• Le recours à des figures-clés repose sur la reconnaissance d'un modèle déjà rencontré. Cela suppose donc l'existence d'une base de référence constituée de configurations et de théorèmes associés. C'est le cas de la plupart des théorèmes mis en place au collège (propriétés caractéristiques des quadrilatères, propriétés des angles obtenus en coupant deux parallèles par une sécante, configurations de Thalès, de Pythagore, concours de droites remarquables dans un triangle...). (...) L'inconvénient majeur réside dans le fait que, si l'élève ne reconnaît pas la figure-clé (si la mise en évidence de la figure-clé nécessite par exemple un enrichissement ou un appauvrissement de la figure), il ne peut poursuivre sa démarche de raisonnement. Il lui faut donc d'autres possibilités d'analyse pour franchir l'obstacle.*

*• L'analyse remontante consiste, à partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou des propriétés de la configuration étudiée qui, une fois établie(s), impliquerai(en)t, en appliquant un théorème identifié, le résultat à démontrer. Il suffit alors de substituer (momentanément) au problème posé au départ le problème qui consiste à établir les éléments intermédiaires. Cette démarche peut ainsi permettre, dans la plupart des situations rencontrées en géométrie au collège, de "remonter" d'étape en étape une chaîne d'îlots déductifs (hypothèse propriété conclusion) jusqu'à un problème dont la résolution sera immédiate (en général, en appliquant un théorème facile à reconnaître). La difficulté fondamentale reste que le processus n'est pas aussi idéalement "linéaire". Il faut souvent, pour satisfaire aux hypothèses d'un théorème que l'on cherche à appliquer, s'appuyer sur des données ou des résultats dont l'établissement nécessite plusieurs théorèmes différents.*

On peut résumer les deux étapes de la démonstration par le tableau suivant :

| | |
|---|---|
| **Recherche (Heuristique)** | Quelles sont les données (ce qui est connu ?)<br>Quelles sont les propriétés applicables, c'est-à-dire, celles pour lesquelles : d'une part les conditions d'utilisation sont adéquates et d'autre part elles permettent d'atteindre le but visé ?<br>Quelle est la propriété qui semble la plus adaptée au but visé ? il faut réaliser un choix pour déterminer les propriétés dont les conditions d'utilisation correspondent aux données du problème<br>Est-ce que les conditions d'utilisation sont effectivement vérifiées pour la propriété choisie ?<br>Si oui alors on réitère ces questions en utilisant l'une des deux démarches heuristiques présentées ci-dessus.<br>Si non on recommence à **2.** |
| **Rédaction S'appuie sur un pas ternaire de déduction** | On écrit les pas de raisonnement déductif. Plusieurs formes sont envisageables et il est utile de les varier. Une rédaction possible est la suivante :<br>"Je sais que ....<br>Or<br>Si ... Alors ... (énoncé-tiers de la propriété)<br>On en déduit que ... » |

- *Différents types de raisonnement*

Au-delà de ce travail, au collège puis au lycée, il s'agit de proposer aux élèves des énoncés variés conduisant à l'usage de différents types de raisonnement dans des domaines mathématiques variés. Plusieurs situations sont proposées dans le paragraphe E.

## B. Des situations pour argumenter à l'école et en début de collège

A l'école et en début de collège, il s'agit de préparer les élèves à l'heuristique, d'une part par un travail sur le dessin géométrique à partir des activités de reproduction et d'autre part par une sensibilisation à l'usage des définitions et des propriétés sur les objets usuels dans des activités de description et de construction. Un des enjeux majeurs est de faire articuler le registre discursif et le registre figural. Plusieurs types activités sont proposés par C. Houdement :

- Décrire une figure en faisant rédiger un programme de construction,
- Reconnaître une figure dans une figure complexe (Cf. ex 16 et 25 de l'évaluation 6$^{e}$ 2004)
- Reproduire une figure sur papier uni, à la même échelle ou à différentes échelles, à partir ou non d'objets déjà donnés,
- Construire sur papier blanc une figure connue, par exemple un carré, à partir d'un ou plusieurs côtés proposés dans une position non habituelle.

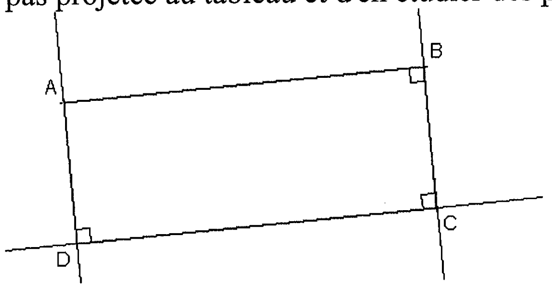
Nous proposons dans ce paragraphe des situations de description pour préparer les élèves à entrer dans le raisonnement déductif dans le cadre géométrique. Il s'agit pour les premières de s'appuyer sur un environnement dynamique pour amener les élèves à travailler la distinction entre la figure et ses propriétés spatiales invariantes par déplacement de ses dessins.

### Travailler la distinction dessin / figure

### 1. *Décrire une figure*

***Présentation du problème : PROGRAMME de CONSTRUCTION***

Le problème consiste à rédiger le programme de construction d'une figure à partir d'une animation logicielle pas à pas projetée au tableau et d'en étudier des propriétés.




L'activité proposée peut être faite pendant la séquence sur les droites perpendiculaires.

***Niveaux concernés*** Liaison Cycle 3/sixième

***Objectifs***

- ➔ Amener les élèves à produire un texte mathématique qui permet la construction d'une figure donnée ;
- ➔ Mettre en valeur la rigueur du vocabulaire mathématique en confrontant les différentes formulations ;
- ➔ Passer de la géométrie descriptive à la géométrie des propriétés :
  - absence de mesure dans les figures
  - Mise en valeur de propriétés géométriques de figures usuelles ;
- ➔ Mettre en défaut les procédures perceptives.

*Pré requis*

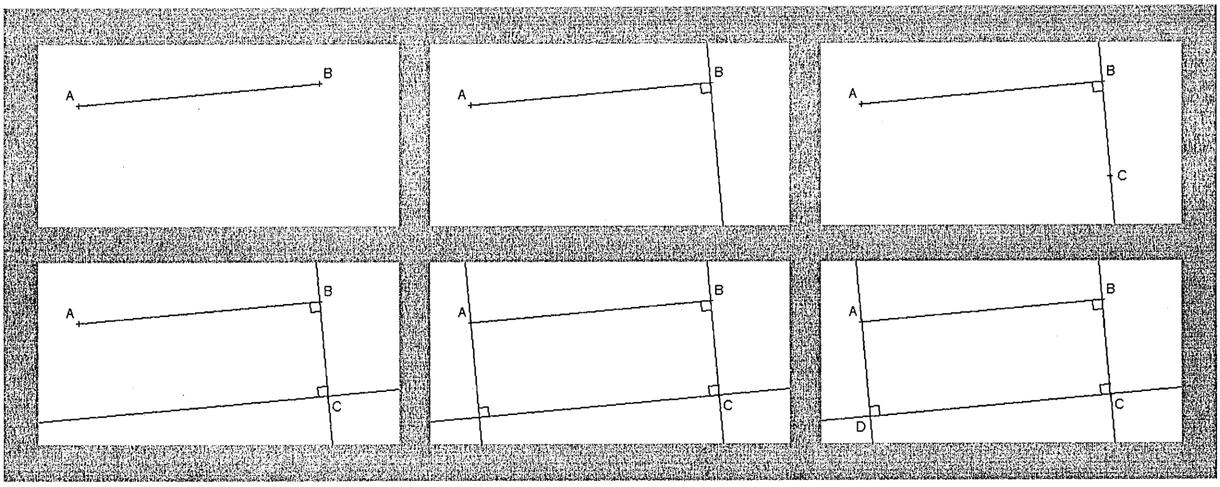
➔ La définition d'un rectangle ;
➔ Le vocabulaire géométrique de base et les différentes notations (point, segment, droite) ;
➔ Connaître les principes de codage.

*Intérêts du problème*

➔ L'introduction permet de distinguer une figure de ses dessins et d'articuler les registres figural et discursif ;
➔ L'animation pas à pas permet d'étudier la figure se construire pas à pas ;
➔ Dans l'animation, on ne voit pas les instruments apparaître mais seulement des codages ;
➔ Le fait d'avoir un pas à pas impose un vocabulaire précis à utiliser et met en évidence les propriétés entre deux éléments de la figure, renforcé par le codage (ce qui peut être aussi un inconvénient car il n'y a pas d'analyse de la figure de la part de l'élève) ;
➔ Travailler sur les notations des différents objets géométriques.

***Fiche élève : animation projetée au tableau***

**(Voir http://mathois.free.fr/ rubrique Programmes de construction)**




***Scénario envisageable en classe et modalités de travail :***

Phase de lancement : Présentation du travail et découverte de l'animation en entier.

En préalable, on présente à l'écran deux figures ayant l'aspect de rectangle. On étudie si les figures restent invariantes en déplaçant les points. Que se passe-t-il ? L'une se déforme et n'est pas un rectangle, l'autre résiste au déplacement et a été construite en s'appuyant sur des propriétés du rectangle. Après un débat rapide sur les différences entre les procédés de construction, les élèves analysent globalement les étapes de construction de la figure « rectangle » et on peut lister rapidement les différents mots qui vont être utilisés.

Consigne orale : "Voici une animation décrivant les étapes de construction d'une rectangle. A chaque étape, il apparaît un tracé avec des codages qui vous indiquent comment cela a été construit. Je vous demande d'écrire le programme de construction de cette figure : il s'agit de donner le mode d'emploi de la figure pour que quelqu'un puisse la refaire sans l'avoir vue auparavant. Je vous laisse 10 à 15 minutes de recherche…"

*Remarque : Cette situation est d'autant plus intéressante si on oppose au départ deux dessins d'un rectangle : l'un étant réellement construit comme rectangle, ses dessins résistent au déplacement, pour l'autre non.*

Phase de recherche et de rédaction : Rédaction individuelle ou en binôme du programme de construction. L'enseignant, libéré de toute contrainte matérielle, passe dans les rangs et peut aider les élèves dans l'utilisation du vocabulaire.

Phase de mise en commun : Validation des formulations pour chaque étape de construction avec recherche de la phrase la plus rigoureuse et la plus concise. Un échange entre les différents groupes est mené par l'enseignant sous la forme d'un mini débat. La confrontation des différentes formulations permet de souligner les exigences du vocabulaire mathématique.

Phase d'institutionnalisation 1 : Mise en évidence des caractéristiques d'un programme de construction. Une affiche contenant les règles de rédaction peut être produite.

Phase d'institutionnalisation 2 : Mise en évidence de propriétés de la figure étudiée. (Un rectangle est un quadrilatère qui possède quatre angles droits mais trois suffisent pour le construire)

***Des pistes pour une meilleure mise en œuvre et exemples de production d'élèves :***

| | |
|---|---|
| *"Les élèves ont du mal à commencer à écrire..."* | Il se peut que certains élèves aient du mal à commencer la production. On pourra alors essayer de décrire avec eux, à l'oral, les premières étapes en leur demandant ce qu'ils voient pour cerner les mots de vocabulaire. Une question qui reviendra tout le temps est "Qu'est-ce qu'il y a de nouveau à cette étape et comment cela a été indiqué (codage)?" |
| *"Un texte descriptif est produit"* | Un élève qui décrit la figure telle qu'elle apparaît n'est pas forcément sur une mauvaise voie. On pourra lui demander de reformuler son texte en imaginant qu'il donne des consignes de construction à un de ses camarades en respectant un ordre dans la construction. |
| *"Le texte est rapidement produit mais est très incomplet, les élèves ont l'impression d'avoir terminé et attendent..."* | Trop rapides ou pressés de finir le travail, certains groupes risquent de s'agiter s'ils n'ont pas un travail à faire. Leur travail est souvent incomplet et mérite une relecture attentive. On pourra leur demander de construire la figure en suivant leur programme de construction : un élève dicte les consignes et l'autre essaie de les réaliser. Avec ce travail de vérification, on peut leur proposer quelques pistes pour améliorer leur production. |

*Variante*

L'étude de différentes animations pour une même figure permet de changer le vocabulaire utilisé et par conséquent de découvrir de nouvelles propriétés.

*Un autre scénario envisageable :*

Le scénario proposé guide les élèves vers une mise en commun immédiatement après la rédaction du programme de construction. Il est possible d'introduire une phase de travail intermédiaire qui peut être très instructive. Après avoir écrit le programme de construction, les groupes peuvent échanger leur production et construire la figure en suivant les instructions à la lettre. Les élèves peuvent corriger ou indiquer ce qu'il manque pour faire la figure. Cela permet de mettre l'accent sur un emploi rigoureux du vocabulaire. Nous n'avons pas indiqué cette étape dans le scénario car, comme le travail est fait en classe entière, tous les élèves connaissent déjà la figure et peuvent interpréter les erreurs selon ce qu'ils viennent de voir.

**Prolongement : Proposer un rectangle construit comme parallélogramme ayant un angle droit. Réitérer la situation. Jeu de messages communicants**

*Présentation de l'activité*

Deux élèves sont connectés à un forum (ou un chat) et communiquent par le biais d'un ordinateur. L'un a devant lui une figure, l'autre une feuille blanche et les instruments de géométrie. Par le biais du forum, le premier élève doit faire construire à son camarade la figure qu'il a devant lui en lui donnant des consignes écrites précises.

*Niveaux concernés*

Liaison Cycle 3/sixième

*Objectifs*

- ➔ Amener les élèves à produire un texte mathématique qui permet la construction d'une figure donnée ;
- ➔ Mettre en valeur la rigueur du vocabulaire mathématique ;
- ➔ Mettre en défaut les procédures perceptives.

*Pré requis*

- ➔ Le vocabulaire géométrique de base et les différentes notations (point, segment, droite) ;
- ➔ Connaître les principes de codage ;

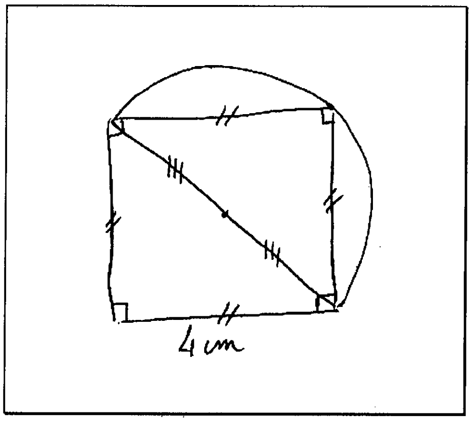
*Intérêts du problème*

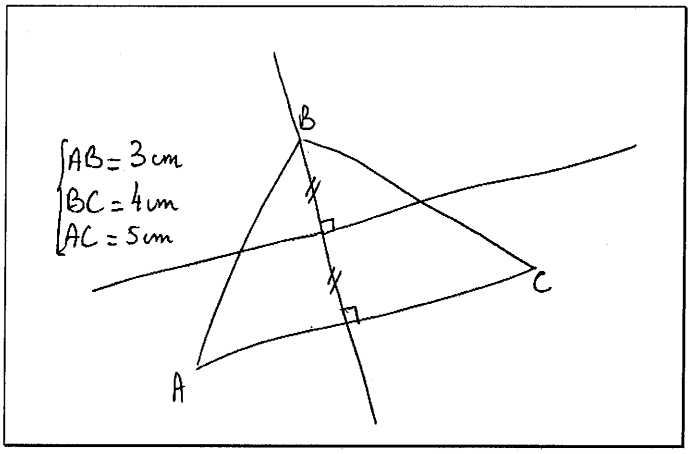
- ➔ La donnée d'une figure à main levée
- ➔ Le fait d'utiliser un forum force les élèves à écrire les consignes, tout geste ou indication non rigoureusement mathématique est écartée, les élèves ne communiquent que par l'écriture.
- ➔ On pourrait se dire qu'il suffit de faire écrire le programme de construction sur une feuille et de la transmettre, ce serait plus simple que toute cette mise en scène. L'avantage d'un chat ou d'un forum est que l'élève qui construit peut demander des précisions en direct et remettre en question celui qui donne les consignes. Sur une feuille de papier, quand le texte n'est pas précis, on est tout de suite bloqué alors que là, on peut quand même

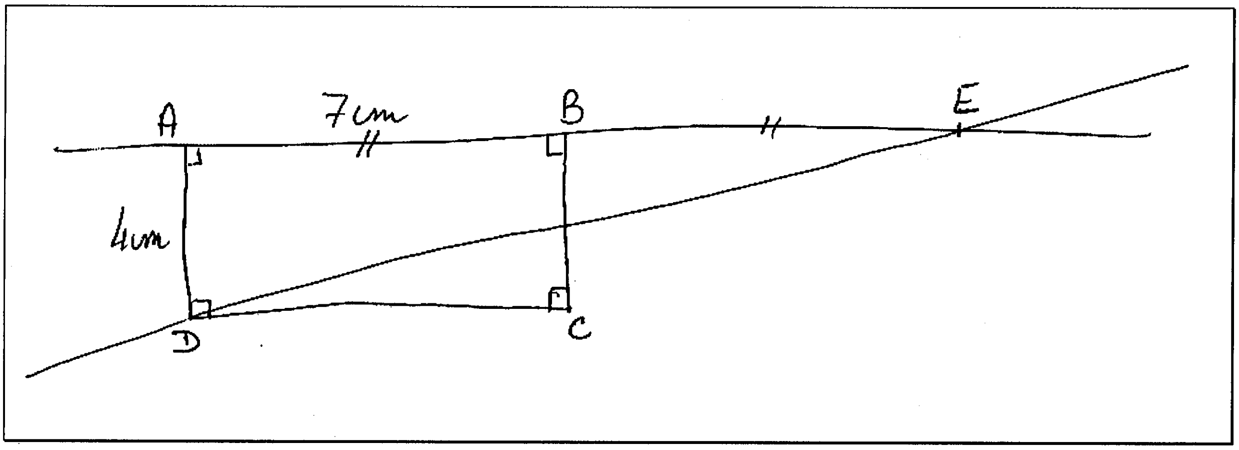
continuer en demandant une autocorrection de l'auteur. Cette communication écrite en direct contraint les élèves à écrire un vocabulaire précis ;

➔ Travailler sur les notations des différents objets géométriques ;

***Fiches élève***




On donne volontairement des croquis aux élèves pour qu'ils soient obligés de <u>lire les codages</u>.

***Scénario envisageable en classe et modalités de travail***

<u>Le matériel :</u> Cette activité se déroule bien évidemment en salle informatique. L'idéal est de pouvoir séparer physiquement les binômes et de disposer de groupes peu nombreux : aucune communication autre que par l'intermédiaire du clavier ne devrait être possible. Ces contraintes sont malheureusement difficiles à réaliser dans certains établissements scolaires (on pourra penser à utiliser des salles de technologie équipées d'ordinateurs par exemple)

<u>Phase d'analyse de la figure :</u> Présentation du travail et découverte de la figure à communiquer.

Consigne orale : "Voici le croquis à main levée d'une figure avec les codages qui vous indiquent comment il est possible de la construire. Sur votre feuille, les longueurs ne sont pas respectées mais vous devez essayer de faire construire cette figure en taille réelle à votre camarade. Le premier travail est de reproduire la figure avec vos instruments pour

comprendre comment elle est faite. Le deuxième travail sera de communiquer cette figure à votre binôme en lui donnant des consignes de construction par le biais de l'ordinateur."
Les élèves essaient donc de reproduire la figure qu'on leur propose pour pouvoir se l'approprier.

Phase de communication : Sur ordinateur, l'élève qui dispose du croquis essaie de donner des consignes à son camarade par le biais du logiciel ou du forum pour construire la figure donnée.

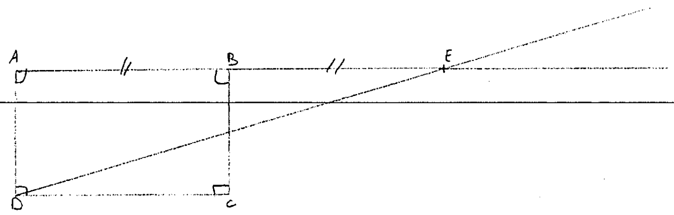
Phase d'institutionnalisation (lors de la séance suivante, en classe entière) : Mise en évidence des caractéristiques d'un programme de construction. On pourra insister sur la rigueur que demande l'emploi du vocabulaire géométrique.

***Production d'élèves***

***Première production :***
*(Les fautes d'orthographe ont été corrigées pour une meilleure lisibilité)*
Priyanka : tu es prête ?
Sabrine : je suis prête
Priyanka : tracer un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 4 cm
Priyanka : nomme les ABCD
Priyanka : tracer une demi-droite et à 7 cm de B nomme un point E
Sabrine : après ?

| | |
|---|---|
| *Pour aider les élèves à organiser leur programme de construction* | Certains élèves arrivent très bien à reproduire la figure donnée mais bloquent dès qu'ils doivent en donner les étapes. Dans ce cas, on pourra leur demander d'écrire le programme de construction en même temps qu'ils construisent la figure. Ce travail écrit en parallèle est utile pour amener les élèves à se concentrer. |
| *Prendre son temps* | Construire une figure demande du temps, les élèves qui donnent les consignes ont tendance à aller trop vite pour celui qui trace. Il faut donc leur demander de bien réfléchir à ce qu'ils vont dire et d'insister sur l'importance de donner tous les détails nécessaires concernant les propriétés géométriques utilisées. |

Priyanka : Tracer une demi-droite passant pas D et qui fait une intersection avec le point E



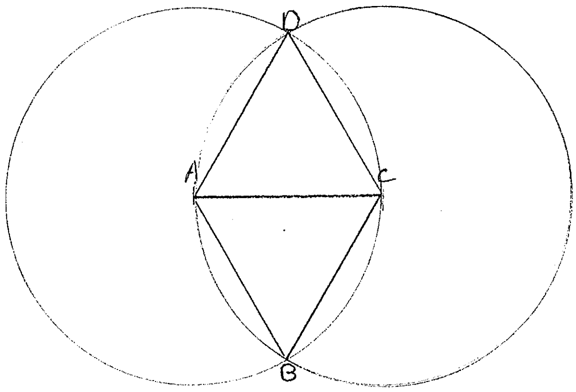

*Commentaire : Priyanka est une élève qui est arrivée en France il y a à peu près trois ans. Sa maîtrise dans l'emploi du vocabulaire géométrique est assez bonne mais on pourra lui faire travailler la rigueur d'utilisation en la confrontant à une élève d'un niveau faible, demandant une précision supplémentaire.*

***Deuxième production :*** *(les fautes d'orthographe ont été corrigées pour une meilleure lisibilité)*

Maroua : tracer un rectangle abcd de 7 cm de longueur et 4 cm de largueur
Maroua : trouver le milieu du segment [bc] et nommer le i
Hatice : c'est bon, j'ai fait ce que tu as dit. Apres je fais quoi, est-ce qu'il y a des codages maroua ?
Maroua : placer un point sur la droite (d1) et be = a 7 cm
Maroua : nomme le e
Hatice : c'est fait après je fais quoi ?
Maroua : tracer une droite (d2) passant par les points a , b , et e
Maroua : et voila la figure est finie. bravo !

*Commentaire : Maroua a placé un point I au milieu du segment [BC], propriété qui a été déduite par un raisonnement qui lui est pourtant inaccessible. Il y a donc confusion entre lecture de codages et propriétés déduites. L'emploi du vocabulaire n'est pas rigoureux mais pourtant elle arrive à se faire comprendre. Pour la faire progresser, on pourra lui demander de communiquer la figure sans nommer de points supplémentaires.*

***Troisième production :*** *(les fautes d'orthographe ont été corrigées pour une meilleure lisibilité)*
Sabrine : tu es prête ? On y va un deux trois alors tu fais un segment de 5 cm
Sabrine : appelle [ac]
Priyanka : c'est bon
Sabrine : fais un cercle de 5 cm de centre c
Priyanka : après ?
Sabrine : et un autre de centre a
Priyanka : du même rayon que le premier ?
Priyanka : c'est bon j'ai fait
Sabrine : le point d'intersection en haut appelle le D
Priyanka : c'est bon
Sabrine : après celui d'en bas appelle le B
Sabrine : relie [DC] ET [AB]
Priyanka : après écris la suite
Sabrine : et [AD] et [BC]
Priyanka : ça y est
Sabrine : c'est fini




*Commentaire : L'emploi du vocabulaire est correct. On pourra cependant ajouter des précisions : on relie des points ; on trace des segments. On pourra aussi lui montrer l'inutilité de l'usage des termes spatiaux « en haut » et « en bas » : on note les deux points d'intersection et leur position n'a pas d'importance.*

***Quatrième production :*** *Un exemple qui n'a pas abouti*
Bodo : Trace une droite de 2,5 cm
Bodo : Trace un rectangle
Sarah : Une droite çà n'a pas de longueur merci
Bodo : Trace du côte à droite de 7 cm tu as compris
Bodo : Trace la même chose à gauche
Sarah : Quelle est la largeur et la longueur du rectangle ?
Bodo : la longueur est de 4 cm des deux côtes
Sarah : et après

Bodo : Trace un rectangle et un triangle
Bodo : Trace le triangle au centre du carré
*Arrêt de l'échange par le professeur. Une analyse avec les deux élèves est nécessaire pour insister sur l'importance d'être précis quand on emploie des mots mathématiques.*

*Commentaire : Bodo est une élève qui peine à employer le vocabulaire. A la suite de cet exercice, elle s'est rendue compte qu'il fallait davantage de précision pour se faire comprendre. On pourra renouveler l'expérience après un travail de remédiation sur le vocabulaire de base. Il pourra être très enrichissant pour elle d'aller voir de temps en temps sa camarade exécuter les ordres qu'elle donne.*

***Variantes***
Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique : au lieu d'un croquis à main levée, une figure construite sous un logiciel de géométrie dynamique est fournie aux élèves. Ceux-ci peuvent la manipuler pour comprendre ses mécanismes et la communiquent ensuite.

## 2. Interpréter des figures pour raisonner : Distinguer validation perceptive, instrumentée, raisonnée

***Présentation de la situation : Un losange inscrit dans un rectangle***
Cette activité est un problème ouvert sur la possibilité d'inscrire un losange dans un rectangle. La simplicité du problème engendre trois niveaux de validation différents : la validation perceptive est le premier niveau lors de la recherche par essais à main levée pour formuler une conjecture, puis nous observons une validation instrumentée quand les élèves tentent de tracer leur figure et enfin le dernier niveau de justification est raisonné par l'utilisation de propriétés mathématiques pour démontrer la conjecture. Progressivement, nous passons d'une géométrie perceptive à une géométrie des propriétés. Quand les élèves voient et comprennent le mécanisme de la symétrie axiale, ils passent tout de suite à la construction avec les instruments. La validation instrumentée est naturelle. Le temps de justification par l'emploi de propriétés est un peu plus long car il est difficile de s'exprimer avec le vocabulaire mathématique mais après réflexion, les élèves accèdent à la démonstration oralement (le passage à l'écrit est plus délicat et non exigible en sixième, il pourra se faire lors de la synthèse avec l'enseignant).

***Niveaux concernés***
Cycle 3 – 6$^{ème}$, prolongements sur les niveaux supérieurs possibles.

***Objectifs***

- Appréhender un problème ouvert ;
- Passer d'une géométrie perceptive à une géométrie déductive ;
- Découvrir les différents niveaux de validation ;
- Organiser sa réflexion et mobiliser ses connaissances pour prouver ;
- Produire un raisonnement déductif.

***Pré requis***

- Propriétés de symétrie du rectangle et du losange ;
- Propriétés de la symétrie axiale (conservation les longueurs) ;
- Propriété d'équidistance de la médiatrice.

***Intérêts du problème***

*Ce que permet le problème*

- Permettre un temps de recherche et une progression dans la validation ;
- Engager un débat autour d'une construction géométrique;
- Engager une recherche sur les propriétés du losange pour permettre une construction ;
- Faire réfléchir sur la nécessité de prouver.

*Démarches et difficultés envisagées*

- Utilisation de la symétrie axiale : une évolution dans l'utilisation de la symétrie axiale (passage du pliage au mécanisme de symétrie avec ses propriétés)
- Utilisation des médiatrices et de la propriété d'équidistance ;
- Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour la recherche.

***Scénario envisageable en classe de sixième***

***Phase 1***

Appropriation du problème par les élèves (des groupes de trois élèves sont formés). Etant donné la simplicité de la consigne, celle-ci peut être donnée à l'oral (et écrite au tableau) sous la forme :

"*Sur un rectangle, on place au hasard un point sur chaque côté. Est-il possible d'obtenir un losange ?*"

Dans les classes les plus difficiles, on pourra donner un polycopié avec l'énoncé, l'évaluation et un cadre pour la recherche (voir fiche élève). L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut être ici très utile, que ce soit en salle informatique ou devant un tableau interactif en inscrivant par exemple les longueurs des côtés et les angles formés par les diagonales du quadrilatère formé dans le rectangle.

On pourra aussi donner le problème sous la forme :

"*On place au hasard un point sur chaque bord d'une feuille A4. Est-il possible d'obtenir un losange ?*"

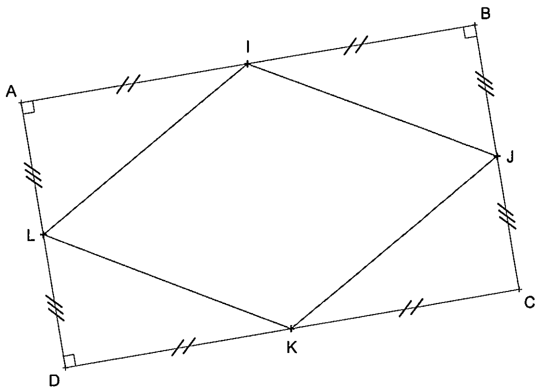
Cet énoncé permettra de raisonner avec des pliages pour faire une conjecture et d'amener les élèves vers l'utilisation de la symétrie axiale.

***Phase 2***

Recherche d'une ou plusieurs configurations correspondant au problème donné et proposition de conjectures. Des discussions sous la forme de débat peuvent être menées entre les élèves, chacun essayant de convaincre l'ensemble du groupe de sa solution. L'utilisation de propriétés du cours doit apparaître dans les échanges pour mener les élèves vers une ébauche de démonstration. L'enseignant passe voir les groupes et se contente de poser des questions pour approfondir les raisonnements.

Pour alimenter les échanges entre les élèves, un travail de groupe pourra être mené et une affiche comportant la figure et les justifications sera demandée pour chaque groupe.

La situation que des élèves de sixième peuvent aborder est la suivante :




***Phase 2 bis facultative***
Pour avoir une base de réflexion lors de la validation de la justification, on peut demander aux élèves de faire la liste des propriétés mathématiques nécessaires pour justifier leur solution.

***Phase 3***
Mise en commun. Les élèves présentent leur production à la classe, les différentes justifications sont exposées et étudiées par la classe. Invalidation des conjectures incorrectes.
Tracé et validation d'une configuration (en classe entière) pour chaque élève sur leur cahier et sur le tableau interactif.
Production d'une justification à partir des propriétés listées. On pourra attendre un raisonnement oral de la part des élèves et rédiger une trace écrite en commun. L'enseignant anime le débat.

***Phase 4***
Débat sur les différentes justifications possibles.

***Déroulement effectif***
Ce scénario a nécessité 2h30 de travail en classe car il est important de valider ou d'invalider toute conjecture des élèves. Les temps de débat ont été nombreux et structurer un raisonnement prend du temps. Un exposé au tableau a été fait à la fin. Il est possible de gagner du temps si le professeur le désire.

***Des pistes pour une meilleure mise en oeuvre***

| | |
|---|---|
| *Les élèves bloquent devant le texte* | On peut commencer par leur dire de faire une figure ou un croquis et de faire des essais pour trouver une conjecture. Trouver un moyen pour valider ou invalider la conjecture (pliage, …) |
| *Les élèves ont du mal à voir les propriétés de la figure* | En s'appuyant sur les démarches d'invalidation (tracé, pliage) et sur la formulation des propriétés du losange non respectées, on peut les amener à tracer les axes de symétrie de la figure. On peut ensuite les renvoyer ensuite à leur cahier de leçon pour se remémorer les propriétés de la symétrie axiale. |

***FICHE ELEVE :***

*Enoncé*

Sur un rectangle, on place au hasard un point sur chaque côté.
Est-il possible d'obtenir un losange ?

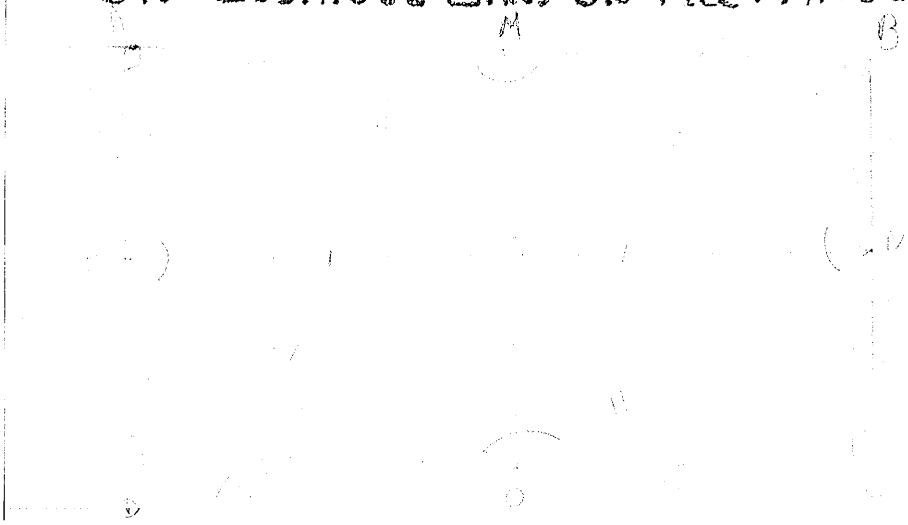
*Consignes*

1. Vous commencerez par chercher au brouillon une figure possible. (Des explications sont attendues…)
2. Puis vous aurez à présenter une affiche sur une feuille A3 dans laquelle apparaîtra cette figure ainsi qu'une explication utilisant des propriétés du cours. On attend de vous que vous soyez clair et précis sur les phrases que vous faites.
3. Ce travail sera noté de la façon suivante :
    - 4 points pour la recherche
    - 4 points pour le comportement et l'investissement
    - 4 points pour les idées émises
    - 4 points pour le soin de la figure
    - 4 points pour la qualité de l'explication

| *Cadre pour la recherche* |
|---|
| |

*Productions d'élèves*

UN LOSANGE DANS UN RECTANGL



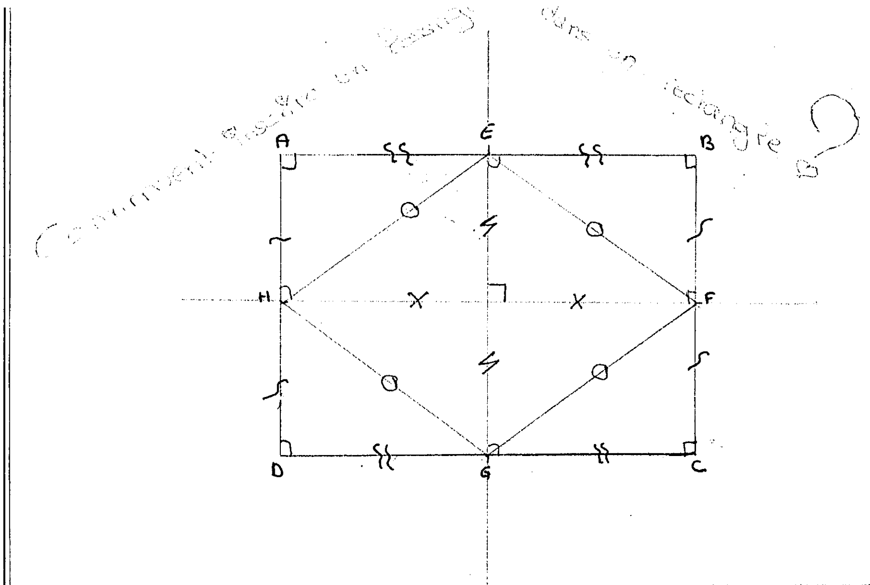

1) Placer le point M au milieu de [AB] et N au milieu de [BC], O au milieu de [CD] et P au milieu de [DF

2) (MO) est médiatrice du segment PN alors PM = MN et PO = NO Mais aussi (PN) est médiatrice du segment MO alors MP = PO et MN

3) C'est pour cela que les quatre côtés sont égaux, donc MNOP est un LOSANGE.

<u>Réécriture du texte :</u>

1) Placer le point M au milieu de [AB] et N au milieu de [BC], O au milieu de [CD] et P au milieu de [DA].
2) (MO) est médiatrice du segment PN alors PM=MN et PO=NO. Mais aussi (PN) est médiatrice du segment MO alors MP=PO et MN=NO.
3) C'est pour cela que les quatre côtés sont égaux, donc MNOP est un LOSANGE.




Dans un rectangle on peut trouver un losange en plaçant des points
tans chaque segment en leur milieu et nomme les EFGH relie
c'est point. Si tout les longueur du losange est de la même longueur
c'est que EFH est symétrique a HGF et EFG par rapport à la droite
(HF) et EFG est symétrique a EHG par rapport à la droite (EG)

Réécriture du texte :

Dans un rectangle, on peut trouver un losange en plaçant des points dans chaque segment en leur milieu et nomme les EFGH relie c'est point. Si toute la longueur du losange est de la même longueur c'est que EFH est symétrique à HGF et EFG par rapport à la droite (HF) et EFG est symétrique à EHG par rapport à la droite (EG).

## C. Des situations pour faire comprendre la nécessité de prouver.

Nous proposons dans ce paragraphe des situations d'apprentissage visant à faire comprendre aux élèves la nécessité de prouver des propriétés numériques et géométriques. Elles visent à faire comprendre l'insuffisance de certaines démarches de validation : la mesure, la conjecture numérique. Nous développons quatre activités :

***Deux activités géométriques :***

- La situation bien connue du « non alignement de trois points définis à partir d'un carré et d'un triangle rectangle », testée au collège et au lycée dans plusieurs contextes d'enseignement, mettant en évidence l'insuffisance d'une conjecture perceptive à partir de dessins.
- La situation du musée montrant aussi les limites d'une conjecture par la perception à partir d'une figure ou à partir d'un contexte.

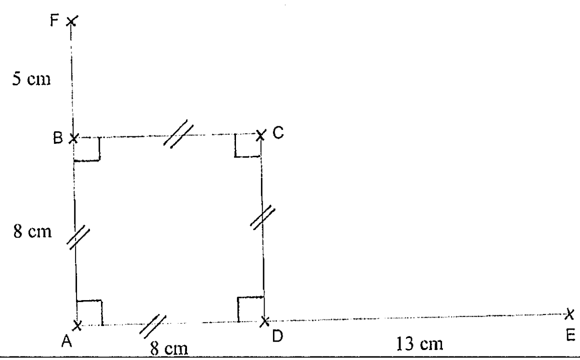
***Deux activités numériques :***

- Une situation numérique opposant la recherche du contre-exemple pour invalider une conjecture fausse et la nécessité de prouver pour montrer qu'une propriété numérique est vraie pour tout nombre.
- Une situation numérique utilisant le tableur pour introduire l'usage de la lettre dans le but de démontrer

### 1. Une situation sur plusieurs niveaux : « Non alignement de trois points définis à partir d'un carré et d'un triangle rectangle »

***Présentation du problème***

Le problème vise à montrer les limites d'une géométrie de l'observation (mesure) et à motiver la nécessité de prouver.




Le problème réside dans le questionnement sur l'alignement des points F, C et E.

***Niveaux concernés***

Ce problème peut être étudié en $5^{ème}$, $4^{ème}$, $3^{ème}$, $2^{nde}$ et même en première S.

*Objectifs*

Ce problème peut s'inscrire dans une séquence de géométrie aboutissant à des démonstrations en rappelant qu'il ne s'agit peut-être pas nécessairement des outils vus dans le chapitre en cours.
Remarquons que, pour le niveau $4^{ème}$, on peut donner cet exercice après avoir vu “cosinus” et “Pythagore” et laisser l'élève aborder une solution avec ces outils. Ainsi on peut montrer que des solutions plus simples existent et ont la même force de preuve qu'une démonstration un plus fastidieuse.

L'enjeu consiste à faire prendre conscience que le fait de tracer [FE] et observer si C $\in$[FE] ne suffit pas à prouver que C $\in$[FE]. On insiste sur la rupture entre géométrie perceptive et géométrie déductive. Les objectifs sont donc les suivants :

- Amener les élèves à distinguer une conjecture d'une démonstration.
- Motiver la nécessité de démontrer.

De plus, cette situation conduit le professeur à mettre en évidence la diversité des démarches dans différents cadres.

*Potentialités du problème*

Le problème amène d'abord les élèves à conjecturer à partir du dessin réalisé que les points sont alignés. On notera que dans l'énoncé [FE] n'est pas tracé, permettant ainsi à l'élève de prendre cette initiative. Un agrandissement de la figure (prévoir une feuille A3) peut conduire facilement la remise en question de la conjecture erronée. L'insuffisance d'une preuve perceptive motive la nécessité de démontrer.

La question est ouverte et motive la recherche et la formulation de deux conjectures : les points sont alignés ; les points ne sont pas alignés.

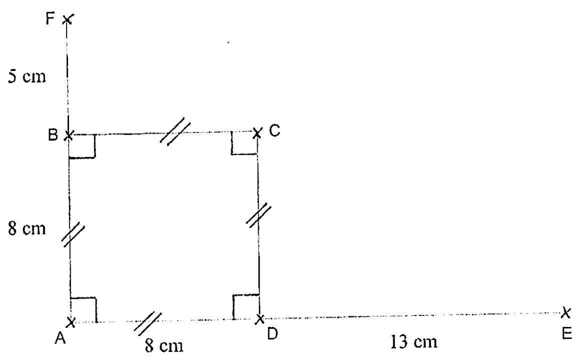
Avec le choix des mesures proposées, selon la démarche utilisée, le calcul porte sur des nombres entiers (calcul d'aire), des nombres rationnels (calcul de rapports avec Thalès ou calcul de tangente) ou des nombres irrationnels (mesure de l'hypoténuse de triangles rectangles avec Pythagore). La recherche de valeurs approchées peut conduire à des preuves incorrectes et à un débat riche sous la responsabilité du professeur.

De plus, les différentes démarches dans différents cadres et la richesse des raisonnements mis en jeu permettent de comparer diverses démarches de preuve, leur coût et l'efficacité de la conviction provoquée par les différentes démarches. On peut donc poser ce problème pour différents niveaux.

***Pré-requis :*** Selon le niveau de la classe, le théorème de Thalès, la trigonométrie dans le triangle rectangle, le calcul des tangentes, l'aire d'un triangle ou le repérage. (Tous ces pré-requis ne sont pas nécessaires, un ou deux parmi la liste suffisent)

***Scénario au collège***

***Fiche élève :***




1) Trace la figure suivante en vraie grandeur.

2) Que peux-tu dire des points F, C, E ?

3) Justifie ta réponse à la question 2).

***Scenario 1 :***

Il est possible de donner ce devoir en recherche à la maison. Ensuite la correction est organisée en classe en fonction des erreurs, des points de vue rencontrés. Cette recherche préalable permet de gagner du temps.

Pour la mise en commun en classe des démarches proposées pour le DM :

- Faire le point à l'oral sur le nombre d'élèves qui ont conjecturé que les points sont alignés et ceux qui ont conjecturé le contraire ainsi que les méthodes envisagées ; engager un débat qui amène à invalider l'alignement des points, en s'appuyant sur l'agrandissement de la figure.
- S'appuyer sur une démonstration correcte d'un élève pour prouver que la conjecture est fausse.
- Rédiger la réponse par le professeur au tableau.
- Dégager d'autres possibilités de démonstration en expliquant pourquoi d'autres démonstrations n'ont pas abouti et auraient pourtant pu aboutir.

En exercice on pourra demander éventuellement de rédiger une autre démonstration possible.

***Scenario 2 :***

Il est possible aussi de faire chercher cet exercice en classe par groupes de 3 ou 4.

- Phase de recherche pour établir une conjecture.
- Phase de mise en commun : il s'agit de faire le point sur les différentes conjectures et d'engager un débat. Le professeur demande à chaque groupe de valider sa conjecture par une preuve.
- Phase de recherche : Le professeur laisse rechercher chaque groupe en fonction de la démarche envisagée. Il intervient dans chaque groupe et peut proposer des aides adaptées en fonction des difficultés rencontrées sur les pré-requis en jeu.
- Phase de mise en commun : Faire formuler les démarches, les valider à partir d'un débat. Comparer les différentes démarches.

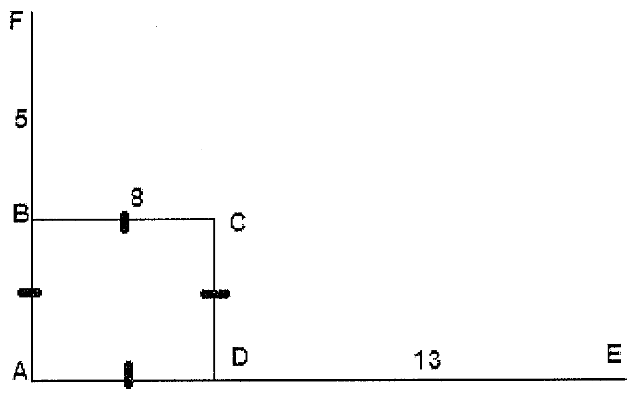
- Phase d'institutionnalisation : le professeur clôt le débat en demandant à un groupe qui détient une solution de l'expliquer oralement.
- On ouvre sur d'autres démonstrations possibles grâce aux écrits de recherches.
- Phase de validation : le professeur donne la trace écrite solution du problème posé en fonction de la démarche envisagée par les élèves.

Remarque :

La rédaction même de la réponse n'est pas un objectif prioritaire. Elle le devient si un groupe a mené correctement sa réflexion.

***Scénario1 au lycée***

***Fiche élève :***
Que peut-on conjecturer sur les points E, C et F ?
Justifier votre affirmation.




**Scenario 1 :**

Introduction : Un défi pour trouver des nouvelles démarches de preuve.

Phase de lancement : Il est possible de donner cette activité en fin de séquence en introduction sur la partie mise au point en géométrie en seconde. La correction peut être organisée sur plusieurs séquences suivant les réponses des élèves quand celle-ci sont suffisamment élaborées.

Phase de recherche : Le problème permet à tous les élèves de conjecturer une réponse. Pour les séquences suivantes les élèves doivent réfléchir sur leurs réponses et essayer de donner une preuve à leur affirmation.

Phase de mise en commun : Si les élèves ne sont pas rentrés dans l'exercice, uniquement quelques figures mais sans raisonnement, il faut alors relancer la recherche avec quelques éléments offerts par les élèves qui ont réfléchi.

- Faire impérativement une figure, à l'échelle par exemple.
- Penser à utiliser la configuration de Thalès.
- Penser à utiliser le Théorème de Pythagore.

Laisser les élèves réfléchir jusqu'à la fin du chapitre, demander à la fin de chaque séquence les idées des uns et des autres.

Phase de synthèse : Reprendre l'exercice pour conclure le chapitre consacré à la géométrie plane. L'exercice permet de retravailler l'égalité de deux fractions, les ensembles de nombres, la démonstration par l'absurde, la notion d'aire parfois oubliées en classe de seconde. (Voir le paragraphe sur : Les différentes méthodes possibles et quelques commentaires)

Commentaires : Voici ici une façon originale de gérer le temps en travaillant l'exercice sur plusieurs séquences pour développer l'esprit d'analyse des élèves.

Phase d'institutionnalisation :

Ils sont convaincus que la démonstration est nécessaire pour ne pas dire n'importe quoi.

Trace écrite sur **la démarche de preuve :**

- Un énoncé est vrai ou faux,
- Une constatation ou une mesure sur un dessin ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai,
- Un ou plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai,
- Un contre-exemple suffit à invalider une propriété,
- Une démarche de preuve prend appui sur des définitions et des propriétés clairement énoncées et sur lesquels il y a eu accord et sur des théorèmes démontrés au préalable.

Phase de réinvestissement : Cet exercice est retraité dans le chapitre avec les vecteurs et aussi avec les équations de droites pour bien montrer qu'il y a de nombreuses façons de prouver en mathématique

**Scenario 2 :**

***Fiche élève*** :

ABNC est un carré de côté 8.
P un point de la demi-droite $[AB)$ tel que BP=13
M un point de la demi-droite $[\mathrm{AC})$ tel que CM=5
Tracez cette figure en prenant pour unité 0,5 cm
Que pouvez-vous conjecturer ? Démontrer le.

**Chapitres déjà étudiés** : vecteurs et coordonnées, chapitre général de géométrie. (Notamment Thalès, Pythagore, trigonométrie dans le triangle rectangle,...). Le chapitre sur les équations de droites n'a pas encore été étudié.

Phase de lancement : L'activité est donnée lors d'une séance de module, Les démarches de preuves pourront être différentes suivant les chapitres traités.

Phase de recherche : Le professeur présente la situation et amène les élèves à conjecturer l'alignement des points. Lors d'un débat les élèves valident ou non la conjecture.
Le professeur engage les élèves dans la preuve. Pour conclure le module, on peut demander de rédiger sur feuille leur démonstration.

Phase de mise en commun : Pour la correction, on peut commenter quelques copies intéressantes (voir ci-dessous quelques extraits). En seconde, il est parfois difficile de convaincre les élèves de l'intérêt d'une démonstration. Avec ce type d'exercice l'élève comprend qu'une démonstration est utile.
L'exercice permet de retravailler l'égalité de deux fractions, les ensembles de nombres, la démonstration par l'absurde, la notion d'aires parfois oubliées en classe de seconde. (Voir le paragraphe sur : Les différentes méthodes possibles et quelques commentaires)

***Commentaires et exemples de production***

***Copie 1 (élève de seconde) :***

A l'aide de Pythagore dans les triangles MCN puis NBP (que l'élève ne justifie pas), on obtient $MN=\sqrt{89}$ , $NP=\sqrt{233}$ et l'élève passe aussitôt à des valeurs approchées : $MN\approx 9,4$ et $NP\approx 15,3$ qu'elle utilise ensuite pour appliquer la réciproque du théorème de Thalès :

$$\frac{PN}{PM}=\frac{15,3}{24,7}=\frac{321,1}{518,7}$$

$$\frac{PB}{PA}=\frac{13}{21}=\frac{321,1}{518,7}$$

Les points P, N, M et P, B, A sont alignés et dans le même ordre de plus $\frac{PN}{PM}=\frac{PB}{PA}$ donc les droites (NB) et (MA) sont parallèles

Cette copie est intéressante puisqu'elle montre la difficulté qu'ont nos élèves de seconde à faire la différence entre valeur exacte et valeur approchée, d'une part, mais aussi à appliquer correctement un théorème ...

Ce problème d'approximation a également été retrouvé dans la méthode des tangentes :

***Copie 2 (élève de seconde) :***

On calcule la tangente de $\widehat{CMN}$ :

$$\tan \widehat{CMN}=\frac{CN}{MC}=\frac{8}{5}\approx 58$$

On calcule la tangente de $\widehat{CNM}$ :

$$\tan \widehat{CNM}=\frac{MC}{CN}=\frac{5}{8}=32$$

De même pour $\widehat{BNP}$ et $\widehat{BPN}$

Les angles sont donc égaux donc les points M, N et P sont alignés

Au passage, on retrouve une présentation assez courante chez nos élèves qui mènerait à penser que 8/5 et 5/8 ont des valeurs proches ...

*Quelques remarques du collège au lycée :*

| Difficultés rencontrées | Remédiation possible |
|---|---|
| Certains élèves écrivent des phrases du genre : "Si je sais que ... alors j'en déduis que..." sans vérifier les conditions nécessaires. | ▪ Engager à écrire les données et la conclusion.<br>▪ Mettre des couleurs pour distinguer données et conclusion. |
| D'autres élèves ont poursuivi leur raisonnement sous la forme: "mais je ne sais pas que...donc je ne peux pas résoudre le problème". Ils pensent donc que le problème est insoluble au lieu d'en déduire que la méthode n'est peut être pas adaptée. | ▪ Engager à écrire les données et la conclusion.<br>▪ Interroger l'élève sur les méthodes à sa disposition pour répondre à la question.<br>▪ Donner une piste simple en fonction du niveau si aucune idée n'émerge. |
| Des élèves ne sont pas convaincus après la démonstration | Donner par la suite des problèmes similaires où les points sont alignés (voir ci-après) |

*Les différentes méthodes possibles et quelques commentaires*

**NIVEAU 5ème**

**Méthode faisant intervenir les aires:**

La somme des aires du triangle FBC, du carré ABCD, et du triangle CDE n'étant pas égale à celle du triangle AEF les points F, C, E ne sont pas alignés.

**NIVEAU 4ème**

**Méthode faisant intervenir cosinus, Pythagore, valeur approchée :**

On raisonne par l'absurde :

Si les points F, C, E sont alignés alors les angles $\widehat{FCB}$ et $\widehat{CED}$ doivent être égaux puisque dans ce cas ces angles sont correspondants vis-à-vis de la sécante (FE).

Les cosinus étant différents les angles sont différents.

**Méthode faisant intervenir cosinus, Pythagore, valeur approchée :**

On peut calculer l'angle lui-même. $\widehat{FCB} \approx 32{,}005°$ et $\widehat{CED} \approx 31{,}608°$

**Difficulté :** L'élève aura tendance à arrondir des résultats intermédiaires.

**Remédiation :** On pourra montrer sur un exemple simple qu'un arrondi ne suffit pas (quelque soit sa précision) à prouver que des nombres sont égaux. $4{,}9 \approx 5$ et $5{,}1 \approx 5$ et pourtant $5{,}1 \neq 4{,}9$ et faire remarquer qu'un arrondi suffit à prouver que des nombres sont différents (il suffit de déterminer la précision suffisante de l'arrondi).

**<u>Calculer les angles</u>** $\widehat{FCB}$ **et** $\widehat{CED}$ **puis** $\widehat{DEC}$ **:**

$\widehat{DCE} + \widehat{DCB} + \widehat{BCF} \approx 179{,}397°$ donc l'angle n'est pas plat.

Arrondir au dixième suffit pour prouver que les angles sont différents.

Le problème est de trouver l'arrondir optimal pour montrer que des quantités sont différentes et qu'un arrondi ne suffit pas pour prouver que des quantités sont identiques.

**<u>Méthode par la caractérisation d'appartenance à un segment et arrondis :</u>**

$\sqrt{89}+\sqrt{233}= 24{,}698\ 318\ 654 \ldots$ $\sqrt{610}= 24{,}698\ 178\ 070 \ldots$

Ici un arrondi (au dix-millième près) suffit pour prouver que les résultats sont différents, et donc que $FC+CE \neq FE$.

**<u>Méthode par la caractérisation d'appartenance à un segment et encadrements :</u>**

$9{,}4339 < FC < 9{,}4340$

$24{,}6981<FE<24{,}6982$

$5{,}2643 < CE < 15{,}2644$

$24{,}6982< FC+CE < 24{,}698\ 4$

On peut donc affirmer que $FC+CE \neq FE$

**<u>Méthode par la caractérisation d'appartenance à un segment (erronée):</u>**

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles AFE, BCF et DCE respectivement en A, B et D.

On trouve que $FE =\sqrt{610}$, $FC=\sqrt{89}$, $CE =\sqrt{233}$.

L'élève cherche à savoir si $FC+CE = FE$.

En arrondissant au centième : $9{,}43+15{,}26 \neq 24{,}70$

**Difficulté :** L'élève tient pour vraie la proposition :

Si l'arrondi d'un nombre n'est pas égal à la somme des arrondis de deux autres nombres alors ce nombre n'est pas égal à la somme des autres.

**Remédiation :**

Il suffit de donner un contre-exemple simple en choisissant par exemple comme nombres 5,12 ; 3,06 ; 2,06 et leurs arrondis aux dixièmes :

$5{,}1 \neq 3{,}1+2{,}1$

Mais pourtant $5{,}12 = 3{,}06 + 2{,}06$

Résultat "correct" mais avec une erreur de raisonnement, donc on a FC+CE $\neq$ FE qui n'est pas recevable ici.

## NIVEAU 3$^{ème}$

**<u>Méthode faisant intervenir Thalès :</u>**

Par l'absurde : Si les points étaient alignés les triangles CDE et EFA seraient en situation de Thalès et donc les quotients seraient égaux, ce qui n'est pas le cas.

**<u>Méthode faisant intervenir la tangente :</u>**

$$\tan \widehat{FCB} = \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BC}} = \frac{5}{8}$$

$$\tan \widehat{CED} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}} = \frac{8}{13}$$

Les produits en croix étant différents les quotients sont différents (il suffit de considérer le dernier chiffre de chaque produit), les quotients étant différents les tangentes sont différentes, les tangentes étant différentes les angles sont différents.

**<u>Méthode faisant intervenir la tangente bis:</u>**

Comme en 4$^{ème}$ on peut calculer directement les angles et voir qu'ils sont différents en arrondissant seulement le résultat final et conclure par un raisonnement par l'absurde puisque si les points F, C, E étaient alignés alors ces angles seraient correspondants vis-à-vis de la sécante (FE).

**<u>Méthode faisant intervenir les identités remarquables :</u>**

En raisonnant par l'absurde: Si on avait FC+CE = FE alors les carrés seraient égaux:

$(\sqrt{89}+\sqrt{233})^2 = 610$. En développant on aboutit à 20737 = 20736 ce qui est impossible.

**<u>Méthode faisant intervenir les simplifications de racines carrées :</u>**

Sinon on peut montrer que FC+CE $\neq$ FE en calculant la différence et montrer qu'elle est non nulle:

$FC + CE - FE = \sqrt{89} + \sqrt{233} - \sqrt{610}$

89 et 233 sont premiers donc on ne peut pas simplifier $\sqrt{89}$ et $\sqrt{233}$.

$610 = 2\times5\times61$ donc on ne peut pas simplifier $\sqrt{610}$.

Donc la somme ne peut pas être simplifiée et est différente de zéro (sinon la somme se serait simplifiée pour donner le résultat zéro à l'aide de regroupement avec des racines de même nature)

**NIVEAU 2$^{nde}$**

**Méthode faisant intervenir la tangente, en lien avec celle de 3$^{ème}$ :**

On calcule la pente de chacune des droites (FC), (CE), (FE) en utilisant la tangente.

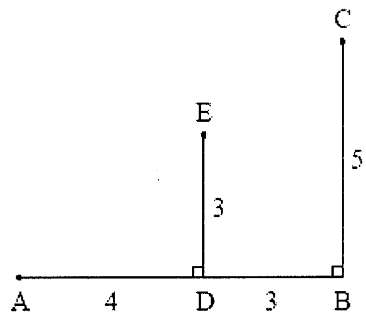
**Méthode faisant intervenir la géométrie analytique :**

Dans le repère $(A\,;\ \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB})$. Aux droites (FC), (CE), et (FE) sont associées des fonctions affines. Il suffit de déterminer ces trois fonctions et de voir qu'elles sont différentes.

*Variantes*

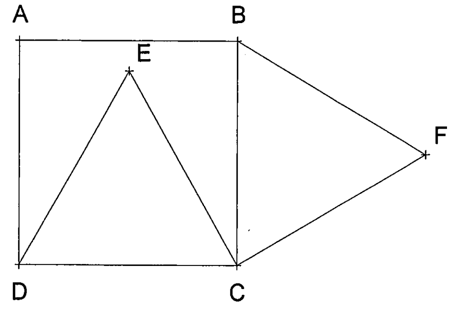
**Exercice 1 :**

L'unité est le centimètre.
1) Reproduire la figure ci-contre en vraie grandeur.
2) Que peut-on dire des points A, E, C ?
*(Points non alignés dans ce cas)*




**Exercice 2 :**

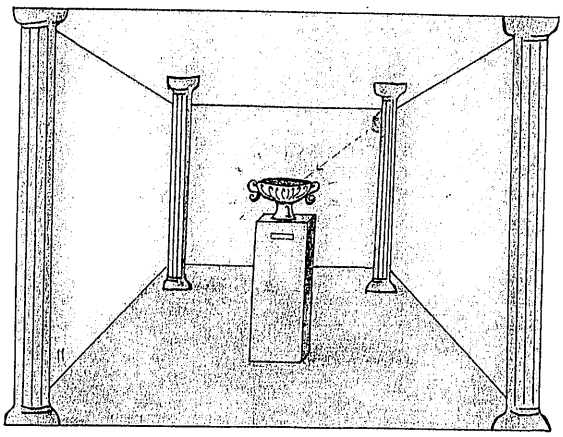
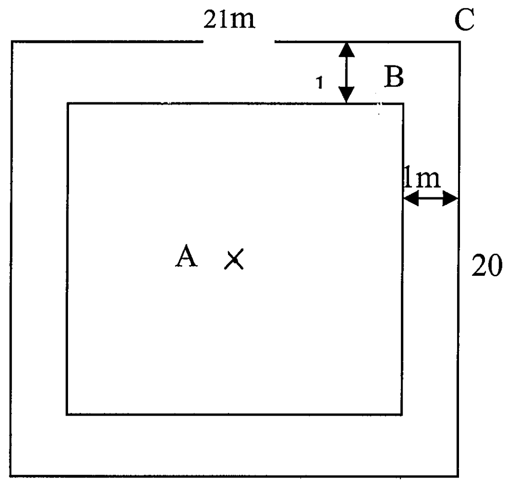
Sur la figure ci-dessous ABCD est un carré de côté 5 cm.
EDC et BCF sont des triangles équilatéraux construis sur deux des côtés du carré.
1) Reproduire la figure ci-contre en vraie grandeur.
2) Que peut-on dire des points A, E, F ?
*(Points alignés dans ce cas)*



## 2. La situation du musée

***Présentation du problème***

Nous proposons un problème qui a été présenté sous deux formes dans des classes de troisième et dans un atelier scientifique de collège.

| Première forme | Deuxième forme |
|---|---|
| Dans un musée, un objet de grande valeur est exposé au centre d'une pièce qui mesure 20 mètres sur 21 mètres. Aux 4 coins de la pièce, situés à un mètre de chaque mur, 4 pylônes en forme de colonne soutiennent le plafond. Un émetteur laser placé au coin de la pièce surveille l'objet en permanence.<br>1. En négligeant le diamètre des pylônes, le laser peut-il atteindre l'objet ?<br>2. Quel peut être le diamètre maximal des pylônes pour que le laser puisse atteindre l'objet ? | Une salle de musée rectangulaire a pour dimensions 21 mètres et 20 mètres.<br>Une œuvre d'art de grande valeur est située en A (centre de la salle).<br><br>En négligeant le diamètre d'un pylône placé en B , un rayon laser (rectiligne ) émis par un dispositif placé en C peut-il surveiller l'œuvre d'art ?<br>*(La figure ci-dessous n'est pas en vraie grandeur)* |
|  |  |

***Objectifs***

- Amener les élèves à comprendre la nécessité de prouver.
- Motiver les élèves à la recherche d'un problème mathématique et au choix d'une stratégie aboutissant à la solution.
- Pour ceci, apprendre à compléter une figure en faisant apparaître des configurations connues permettant d'entamer un raisonnement.

***Potentialités du problème :***

Cet exercice présenté sous sa forme initiale demande une modélisation.

La démonstration de la solution peut être faite en utilisant l'un des outils suivants du programme.

- Calcul d'angles
- Calcul d'aires
- Calcul de distances

- Repère et fonction linéaire

Les questions sont ouvertes et motivent la formulation de conjecture. Les nombres choisis conduisent perceptivement à penser que les points sont alignés. Or les points ne sont pas alignés et le dispositif prévu ne convient pas.

L'élève doit faire le tri à partir des résultats trouvés et de ses connaissances, en particulier distinguer les notions de valeur exacte et valeur approchée. Il doit ensuite bâtir un raisonnement pour aboutir à la preuve de la solution.

Cet exercice peut permettre d'aborder le raisonnement par l'absurde.

Ce problème peut être résolu par différentes méthodes plus ou moins efficaces et plus ou moins convaincantes selon le niveau de la classe.

***Pré requis***

**Selon le niveau de classe**

Théorème de Pythagore et inégalité triangulaire.
Calculs d'angles, angle dans un triangle rectangle.
Calcul de l'aire d'un triangle rectangle et d'un trapèze.
Repère et fonction linéaire.
Droites parallèles et angles correspondants et raisonnement par l'absurde.
Angles opposés par le sommet et raisonnement par l'absurde.

***Document élève :***

Le document élève que nous avons présenté en classe de troisième est la forme modélisée du problème selon le scénario suivant :

***Déroulement envisageable :***

- **Présentation de la situation au groupe entier.**

- **Phase de recherche individuelle :**

On laisse environ 5 à 10 minutes de recherche préalable à chaque élève pour émettre un avis, une impression sur la question posée.

Il s'agit de mettre en évidence la nécessité de trouver la solution adaptée à ce problème : contraintes économiques, possibilités de vol ou de dégradation.....Il faut donc démontrer que la conjecture proposée, l'alignement de points, n'est pas correcte.

- **Mise en groupe des élèves et phase de recherche :** *(des groupes de 3 élèves sont prévus par le professeur)*

On prévoit 15 à 20 minutes pour une recherche de méthode ou de piste menant à la solution. On attend une trace écrite de leur solution.

Passé ce laps de temps, on leur demande de nous exposer les démarches possibles et les notions utilisées. Le temps peut être raccourci si aucune démarche n'apparaît et le professeur peut alors proposer des pistes sur les outils et connaissances à mobiliser.

- **Phase de travail en groupe : Rédaction de la solution :**

Deux cas possibles sont prévus :

  - Si un groupe n'a pas trouvé de piste de travail, on intervient en leur demandant de modéliser mathématiquement le problème : figure à l'échelle annotée avec les mesures connues. Est-il possible de calculer d'autres dimensions ? Quelles sont les configurations reconnues ?

- Pour les autres groupes, on leur laisse la fin de l'heure pour rédiger leur solution

Lors de la deuxième heure de travail, on prévoit 20 minutes pour finir la rédaction.

- **Présentation du travail du groupe à la classe :**

On demande à chaque groupe d'exposer leur démarche. On prévoit 5 minutes par groupe. Un temps est ensuite prévu pour valider la démarche et le raisonnement.

- **Débat avec le groupe entier :**

Que pensez-vous de l'énoncé ? Cet exercice vous a-t-il intéressé ?

***Réactions pendant le déroulement effectif :***

*1ère étape :*

Lors de la recherche individuelle quelques questions surviennent :

- Que signifie le mot rectiligne ?
- Un élève pense qu'un laser est uniquement un pointeur et demande des informations sur les rayons laser, leur utilisation,...
- Oralement, la plupart des élèves ont répondu oui à la question de l'alignement (avec comme justification : les deux rectangles ont le même centre). Certains ne voient pas où se situe le problème puis s'interrogent en ne constatant pas l'alignement sur une figure. Ici la perception conduit à remettre en question la conjecture.
- Certains élèves essaient de détourner le problème en faisant balayer le rayon laser ...
- Autre question : Peut-on faire la figure en vraie grandeur ?

Après cette première étape, chacun a son avis sur la question et on les répartit en groupe.

*2ème étape*

On note une activité très intense dans les groupes, les élèves ayant parfois des avis divergents. A ce stade, tous les groupes font une figure à l'échelle et constatent le non alignement des points.

- Certains trouvent seuls deux pistes exploitables pour prouver que les points ne sont pas alignés : calculs de distances, calculs d'angles, théorème de Thalès. Pour les autres groupes, nous devons intervenir : rappel d'une méthode pour montrer que des points sont alignés, recherche d'une configuration exploitable (tracé de traits auxiliaires)
- En cours d'activité, des groupes manifestent le besoin d'être rassurés sur leur méthode, leur piste de recherche.
- Les difficultés rencontrées sont : valeur approchée en utilisant le théorème de Pythagore pour le calcul de distances, utilisation de l'égalité triangulaire pour trouver la troisième longueur puis vérification de l'égalité par cette longueur, le raisonnement par l'absurde dans des calculs d'angles ou dans le théorème de Thalès.
- Un groupe a commencé à travailler dans un repère (en plaçant l'origine sur un sommet du rectangle) Ce groupe est allé au bout de la méthode avec l'intervention du professeur.

***Impressions des élèves :***

- Les élèves trouvent que l'activité est difficile au démarrage mais les a beaucoup intéressés. « *C'est intéressant car il faut réfléchir* »

- Ils ont aimé car c'est un travail en groupe et c'était un exercice qui leur a semblé concret : on a noté un intérêt manifeste dès qu'ils trouvaient un résultat, une idée ....
- Pour terminer, on leur a proposé le même exercice sous forme purement mathématique (sans habillage) et on leur a demandé ce qu'ils pensaient des deux énoncés. Certains bons élèves n'ont pas de préférence. Les autres se sentent beaucoup plus intéressés par cette présentation, elle leur a donné envie de chercher et de connaître la solution.

L'intérêt manifesté par nos élèves lors de cette activité répondait à nos attentes.

Ce travail a été fait dans le cadre d'un travail noté pour encourager les élèves à travailler en groupe.

## 3. Prouver des propriétés numériques à partir de la donnée d'un programme de calcul

***Présentation du problème***

**<u>Enoncé :</u>**

Voici deux programmes de calcul :

| **Programme 1** | **Programme 2** |
|---|---|
| 1) Choisis un nombre<br>2) Multiplie ce nombre par lui- même<br>3) Ajoute 16<br>4) Retranche le produit de 6 par le nombre de départ<br>5) Multiplie le résultat par le nombre de départ<br>6) Retranche 6 | 1) Choisis un nombre<br>2) Calcule le double de ce nombre<br>3) Ajoute 4<br>4) Multiplie le résultat par 2,5<br>5) Retranche 10 |

1) Applique ces deux programmes de calcul aux nombres 1, 2 et 3.
2) Que remarques – tu ?
3) Ta remarque est-elle valable pour d'autres nombres ? Justifie ta réponse.

***Niveaux concernés*** **:** à partir de la classe de cinquième

***Objectif***
- Emettre une conjecture
- Susciter le besoin de la démonstration

***Prérequis***
- connaissance du vocabulaire
- règles de développement du calcul algébrique

***Potentialités du problème***

Cette situation numérique permet à partir de la donnée de deux programmes de calcul, d'opposer la recherche du contre-exemple pour invalider une conjecture fausse et la nécessité de prouver pour montrer qu'une propriété numérique est vraie pour tout nombre.

Cette situation peut être proposée en cinquième pour montrer l'insuffisance du calcul numérique et la nécessité d'introduire des lettres pour prouver, donc le calcul algébrique. Elle peut viser aussi à introduire le calcul littéral comme outil de preuve et de production de formule. Le choix des expressions peut aussi motiver le travail sur plusieurs écritures d'une même expression et l'introduction de la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Cette situation peut être proposée aussi en quatrième, en troisième avec des expressions plus complexes.

***Déroulement envisageable***

Phase collective de lancement : Il s'agit d'amener les élèves à comprendre les situations numériques en posant la question de l'étude de la vérité d'une propriété numérique : est – elle vraie pour tout nombre ? Est-elle fausse ? Comment le prouver ?

Phase de travail individuel : Il s'agit d'amener les élèves à comprendre et appliquer un programme de calcul. Chaque élève fait ses calculs pour chacun des trois nombres proposés et ce pour les deux programmes. Il a deux possibilités :

- soit il travaille d'abord uniquement avec le programme 1, auquel cas, il ne voit pas de suite le but de la question 2

- soit il traite en parallèle les deux programmes et alors, à l'issue des calculs pour les deux premiers nombres, il émet une conjecture !

Le professeur passe dans les rangs et aide éventuellement les élèves en difficultés face à l'énoncé écrit « en français ».

Phase de mise en commun : Le professeur prend en compte toutes les réponses pour semer le doute. Alors la conjecture réalisée est-elle vraie pour les deux programmes de calcul ?

Phase de recherche individuelle : Il s'agit d'amener les élèves à réfléchir sur la signification de « toujours vrai en mathématiques ». Les élèves choisissent un autre nombre et testent leur conjecture pour l'infirmer dans le cas du premier programme.

Phase de mise en commun : Le professeur fait comparer les réponses et peut alors faire le lien entre « toujours vrai » et « pour tout x » ! Il engage les élèves à prouver la conjecture dans le cas du deuxième programme de calcul.

Phase de travail individuel : Chaque élève écrit le deuxième programme de calcul à l'aide d'une expression littérale, développe et réduit puis traduit la condition d'égalité. Le professeur valide les réponses individuellement puis collectivement. Le professeur apporte des pistes si nécessaire, voire reprend la main pour effectuer la traduction et le calcul collectivement.

Phase d'institutionnalisation : Le professeur conclut sur les démarches pour prouver :

- qu'une propriété numérique est fausse : un contre-exemple numérique suffit,
- qu'une propriété numérique est vraie : une preuve algébrique est nécessaire pour le prouver pour tout nombre.

Commentaires :

On peut s'intéresser à des problèmes plus simples ou plus complexes en fonction de la classe et garder la même trame.

**Enoncé**

Voici deux programmes de calcul :

| **Programme 1** | **Programme 2** |
|---|---|
| 1) Choisis un nombre<br>2) Soustraire 2<br>3) Elever le résultat obtenu au carré<br>4) Soustraire 9 | 5) Choisis un nombre<br>6) Elever ce nombre au carré<br>7) Soustraire 5 au résultat.<br>8) Soustraire 4 fois le nombre choisi à la différence obtenue. |

1) Teste ces deux programmes pour trois valeurs.
2) Quelle conjecture peux-tu faire ?
3) Prouve-la.

**Enoncé**

1) Avec la calculatrice, calculez :
   a) $48^2 - 47^2 - 46^2 + 45^2$
   b) $82^2 - 81^2 - 80^2 + 79$
   c) $166^2 - 165^2 - 164^2 + 163^2$

2) Quelle conjecture pouvez- vous faire ? Prouve-la.

Avec le prolongement possible :

3) Que vaut $123456789515^2 + 123456789512^2 - [123456789514^2 + 123456789513^2]$

4 ) Vérifier à la calculatrice (à cause de la limite de l'écran , la calculatrice ne donne pas 4)

**Autre énoncé**

Dans l'expression $n^2 - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-ton toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?

## 4. Prouver des propriétés numériques

***Présentation du problème :***

Enoncé du problème
Que peut-on dire de la somme de 3 nombres consécutifs ?
Que peut-on dire de la somme de 5 nombres consécutifs ?
Que peut-on dire de la somme de 4 nombres consécutifs ?

Ce problème vise à introduire le calcul littéral comme outil de preuve et de production de formule (en liaison avec le programme du cycle central de collège). La nécessité de prouver est motivée par l'usage du tableur.

***Niveaux concernés*** **:** classe de cinquième.

***Objectifs du problème :***

- Introduire la nécessité de la lettre.
- Utiliser un tableur pour produire et tester des formules.
- Convaincre la nécessité de prouver avec l'usage de lettres et le calcul littéral car le tableur ne peut pas tout faire

***Potentialités du problème :***

L'usage du tableur peut permettre d'effectuer un grand nombre de tests et ainsi une conjecture plus aisée. Par ailleurs, il sera une aide dans la production de formules par comparaison des résultats obtenus.
Mais l'usage d'un nombre à 16 chiffres permet de voir les limites du tableur dans les calculs et de mettre en doute la conjecture sur la somme de 3 chiffres consécutifs.
Hormis les propriétés posées en problème, ce problème permet donc l'introduction de la lettre et l'usage de l'outil algébrique comme moyen de preuve

***Pré requis :***

- Présentation du tableur lors d'une précédente séance
- Le terme consécutif a été expliqué et quelques exemples ont été écrits par les élèves
- La lettre n'a pas encore été introduite

***Enoncé du problème pour les élèves :***

Que peut-on dire de la somme de 3 nombres consécutifs ?

***Déroulement envisageable :***

**Phase 1 : Présentation du problème et conjecture**

La première question est posée aux élèves. Explication du terme « consécutifs ».
Essai individuel à la main et/ou à la calculatrice.
Mise en commun et première conjecture.

**Phase 2 : Le tableur pour confirmer la conjecture**

En salle informatique, les élèves testent un grand nombre de valeurs pour renforcer la conjecture émise dans la phase 1.
On propose la deuxième question («Que peut-on dire de la somme de 5 nombres consécutifs ? »). Le tableur renforce encore la conjecture

**Phase 3 : Semer le doute**

On propose la $3^{ème}$ question aux élèves (« Que peut-on dire de la somme de 4 nombres consécutifs ? »).
Cette fois-ci la conjecture est mise en défaut.
On revient alors sur la somme de 3 nombres consécutifs et on propose un très grand nombre (plus de 16 chiffres). Les limites du tableur sur le calcul des nombres étant atteintes, la conjecture est mise en défaut encore une fois.

**Phase 4 : Introduire la lettre et faire prouver**
Après les phases 1 et 2, il apparaît nécessaire de prouver cette conjecture. Il convient donc d'introduire la lettre et de produire des formules pour confirmer ou infirmer les conjectures.

***Commentaires sur le déroulement réel des séances :***

**Séance 1**
L'activité est proposée aux élèves lors d'une séance en classe classique, puis le tableur est proposé et montré au vidéo projecteur afin de faire un grand nombre d'essais.

**Séance 2**
La séance suivante se déroule en salle informatique. Chaque élève doit faire un grand nombre d'essais avec le tableur puis écrire une réponse (travail individuel ou en binôme).
Mise en commun.
On passe ensuite à la question 2 : « Que peut-on dire de la somme de 5 nombres consécutifs ? »
Travail individuel puis mise en commun
Puis ensuite la $3^{ème}$ question : « Que peut-on dire de la somme de 4 nombres consécutifs ? »
La conjecture n'est plus vérifiée...
On leur propose alors de vérifier la $1^{ère}$ conjecture avec un très grand nombre (plus de 16 chiffres) : les élèves ne sont plus convaincus de la véracité de leur conjecture.

**Séance 3**
Retour en classe avec vidéo projecteur pour revoir les différentes formules, puis écriture des nombres avec les lettres du tableur, soit A1 + (A1+1) + (A1+2), simplification, mais rien de concluant ne semble se dégager, donc on essaie de la faire avec A2, et comme la réponse est « 3*A2 », les élèves sont convaincus.
On leur propose alors de faire la même chose pour 5 nombres consécutifs puis de trouver une formule pour 4 nombres consécutifs.

## Prolongements et variantes :

- Comment peut-on désigner le double d'un nombre? le triple? la moitié?
- Faire la somme de 2 nombres entiers consécutifs.
- Comment désigner un nombre un nombre impair? Comment désigner un nombre pair?
- Production d'une multitude de formules sur la somme de 4 nombres consécutifs qu'il va falloir prouver ou invalider en utilisant le calcul littéral.
- Etant donné un multiple de 3, est-il possible de l'écrire sous la forme d'une somme de 3 nombres consécutifs? Si oui, comment?
- Que se passe-t-il pour la somme de nombres consécutifs négatifs?

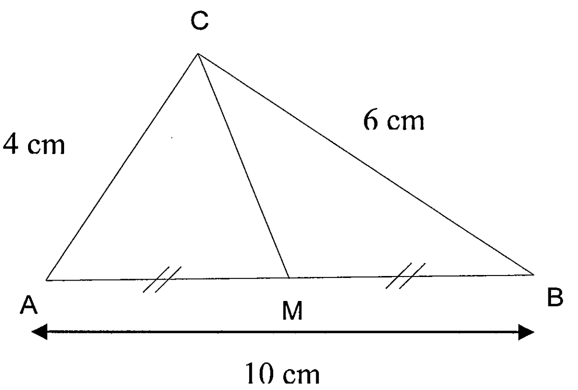
## D. Des situations pour accompagner l'entrée dans la démonstration au collège

Nous proposons dans ce paragraphe des situations pour appréhender la démonstration sous différentes formes. Nous développons trois activités :

- Une situation concernant un triangle aplati mettant en défaut la figure proposée créant ainsi une rupture.
- Une situation concernant les théorèmes des milieux pour construire une démonstration à plusieurs pas.
- Une situation utilisant les TICE pour déterminer un lieu géométrique.

### 1. Faire évoluer le statut de la figure

***Présentation du problème***




Calculer la longueur CM.

***Introduction au problème :***

Ce problème s'inscrit dans un chapitre sur l'étude de triangles, et en particulier sur le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.
Il faut d'abord faire attention au sens des mots de la question et insister sur les attentes qu'ils présupposent. En effet le mot « calculer » nous indique que l'on ne se place pas dans un contexte perceptif mais que nous sommes dans l'attente d'une démonstration. Cette distinction n'est pas une évidence pour nos élèves, et, un des enjeux est de les éclairer sur cette différence fondamentale.

***Niveau concerné :***

- 4$^{\text{ème}}$

***Objectifs spécifiques :***

- Motiver la nécessité de démontrer.
- Distinguer figure et dessin.
- Donner de l'importance au codage des données
- Distinguer recherche de la justification et rédaction de la démonstration.

- Préciser les attentes d'une démonstration.

***Prérequis:***
- Inégalité triangulaire.
- Caractérisation $M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB$.

***Potentialités du problème :***

- Entrée dans le problème :
  Certains élèves vont essayer de construire la figure et mesurer la longueur demandée, ce qui en fait est conseillé pour vérifier la validité du résultat trouvé.
  Si l'élève a bien construit sa figure et obtient le bon résultat, qui est CM=1 cm.
  On peut lui poser comme question « Es-tu bien sûr que c'est 1 cm et non pas 1,1cm, ou 0,9cm ou pire 0,99cm ? » Cette question a pour but de montrer que mesurer ne suffit pas à prouver.

- Il y a possibilité de construction du triangle et d'obtenir un "vrai triangle" à cause des erreurs de mesure peu perceptibles au mm près. Ceci favorise donc un point de rupture entre figure (objet conceptuel) et dessin, ce qui permet de montrer l'apport de la géométrie déductive. La réflexion est ici nécessaire. Seules les données réellement indiquées sont exploitables et non pas le dessin en lui-même. L'enjeu est d'amener les élèves à distinguer la figure de ses dessins

- Si l'énoncé est donné exactement comme dans la fiche élève alors il est possible que l'élève fasse un raisonnement en considérant des méthodes uniquement applicables dans les triangles rectangles. L'avantage est que cela permet de faire un travail sur les données du problème. Toutefois la figure peut être tracée à main levée pour laisser une plus grande part à l'initiative de l'élève.

***Démarche envisageable :***

Le triangle ABC est un triangle aplati et on a : AM = MB = 5 cm.
Les points A, C, M, B sont alignés dans cet ordre et on a alors:
CM = MA – CA= 5 – 4 = 1 cm

Remarque :
Cet exercice peut être vu en 1$^{\text{ère}}$ en utilisant les égalités dans le triangle (théorème de la médiane) en insistant sur le fait qu'il s'agit d'un cas particulier.

***Scenario envisageable :***

***Scenario 1 :***

Il est possible de donner ce devoir en recherche à la maison. Ensuite la correction est réalisée en classe par les élèves eux-mêmes en fonction des erreurs, des points de vue rencontrés et des annotations portées sur la copie. Cette recherche préalable permet de gagner du temps.

Pour la correction du DM en classe :

- Phase de recherche : A la maison.
- Le professeur corrige les copies et souligne les démarches inappropriées pour amener l'élève au questionnement sans lui fournir de réponse au problème posé.
- En classe : Rendre les devoirs.
- Phase de lancement : Faire le point à l'oral sur le nombre d'élèves qui ont conjecturé que les points sont alignés et ceux qui ont conjecturé le contraire ainsi que les méthodes envisagées : Débat. (5 min)
- Phase de recherche : Demander aux élèves de reprendre leur démonstration et d'améliorer les points à revoir signalés lors de la correction s'ils pensent être sur la bonne voie ou bien de revoir leur schéma de démonstration si après le débat leur idée a changé. Le professeur les accompagne en cas de difficulté (15 min).
- Phase de mise en commun : S'appuyer sur les conjectures fausses pour faire émerger les conceptions incorrectes des élèves et les amener à les invalider. (10 min)
- Phase d'institutionnalisation : Reprendre une démonstration correcte d'un élève pour mettre tout le monde d'accord.
- Rédaction de la réponse par le professeur au tableau (10 min)
- Perspectives sur d'autres possibilités de démonstration par le professeur en expliquant pourquoi d'autres démonstrations n'ont pas abouti et auraient pourtant pu aboutir. (5min) En exercice on pourra demander éventuellement de rédiger une autre démonstration possible.

***Scenario 2 :***

Il est possible aussi de faire chercher cet exercice en classe par groupes de 4 ou 5.

- Phase de recherche : Etablir une conjecture. (5 à 10 min)
- Phase de mise en commun : Faire le point sur les différentes conjectures : Débat. (5 à 10 min)
- Phase de recherche : Demander à chaque groupe de valider sa conjecture par une démonstration. Le professeur guide chaque groupe en fonction de la démarche envisagée. (20 min)
- Phase de mise en commun : Faire le point sur ceux qui ont réussi à prouver leur conjecture. (5 min)
- Phase d'institutionnalisation : Le professeur clôt le débat en demandant à un groupe qui détient la solution de l'expliquer. (5 min)
- On ouvre sur d'autres démonstrations possibles grâce aux écrits de recherches. (5 min)
- On demande à chacun des élèves de tenter de rédiger une solution pour la séance suivante. Le professeur validera alors la solution.

<u>Remarque :</u>

La rédaction même de la réponse n'est pas un objectif prioritaire. Elle le devient si un groupe à mené correctement sa réflexion.

***Commentaire sur des mises en œuvre et exemples de productions d'élèves :***

Pour les élèves ayant cherché le DM, 3 élèves ont prouvé que le triangle est aplati mais personne n'a su trouver la longueur cherchée (2 n'ont pas donné de réponse et 1 élève a trouvé zéro)

Des erreurs récurrentes consistent à appliquer le théorème de Pythagore dans des triangles quelconques (qu'ils semblent rectangle ou pas). Certains vont même jusqu'à écrire « le triangle ACM est rectangle » donc on peut appliquer le théorème de Pythagore... Pourtant ce triangle n'est pas rectangle et n'en a pas du tout l'aspect. Manifestement certains élèves n'ont pas compris l'utilité d'une phrase dans la rédaction de la réponse précédente les calculs servant à vérifier les hypothèses du problème. On peut insister sur le sens et l'utilité de la rédaction.

Par contre il est plus logique, le dessin étant trompeur, que certains élèves aient pu écrire que [CM] est la médiane issue de l'angle droit dans le triangle CAB (car celui-ci paraît rectangle) et donc que [CM] ait pour longueur la moitié de l'hypoténuse, c'est-à-dire à 5 cm.

Ce qui est assez étonnant est que peu d'élèves ont essayé de faire la figure en vraie grandeur pour avoir une idée du résultat. Dans cet exercice on ne mentionnait pas du tout de faire la figure en vraie grandeur par rapport à l'exercice précédent. Ils ont tout de suite essayé de se placer dans une démonstration. Quelques élèves sont perturbés par le fait qu'on puisse "naviguer" entre le perceptif et la démonstration proprement dite.
Par exemple: lorsqu'on utilise le théorème de Pythagore, on peut inviter l'élève à construire la figure pour se donner une idée de la marche à suivre. On démarre donc dans le perceptif pour ensuite passer à la démonstration, et ensuite on l'invite à contrôler son résultat en mesurant lorsque les unités le permettent (tout en sachant bien que ce n'est pas une preuve mais un contrôle) avant de rédiger, tout en sachant que mesurer n'est pas obligatoire mais conseillé.

Une autre expérimentation

Aucun élève n'a tenté de refaire une figure « exacte »

Néanmoins, 2 élèves (qui semblent avoir bénéficié d'une aide extérieure) ont fourni la bonne réponse

6 élèves ont utilisé le fait que CM = AM = MB = AB/2 = 5 (sans référence à un triangle rectangle)

2 élèves ont utilisé le fait que CM = AM = MB = AB/2 = 5 en affirmant que le triangle ABC est rectangle en C

1 élève a calculé CM dans AMC puis CM dans BMC « par Pythagore » (et a trouvé deux résultats différents, sans s'en étonner)

3 élèves ont estimé que « la réponse est impossible car il n'y a pas de triangle rectangle »

2 élèves n'ont pas répondu à la question « car le triangle ABC ne peut exister »

5 élèves n'ont pas donné de réponse pour CM, tout en parlant de la médiane du triangle ABC (dont un qui a néanmoins écrit AC + CB = AC)

3 élèves n'ont pas répondu sans motiver leur non-réponse, ou ont fourni une réponse incohérente.

***Les variantes :***

Ouverture et prolongement de ce problème :

Il s'agit d'une situation délicate et ce problème à l'avantage de montrer l'importance des hypothèses de deux types:

- □ Celles se trouvant sur la figure.
- □ Celles figurant dans les énoncés mathématiques des propositions vues en classe.

Exemples:

□ Dans le premier cas la figure ressemble étrangement à un triangle rectangle. Le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle permet alors d'affirmer que $6^2+4^2=10^2$. Ce qui est bien sûr faux. On amène l'élève à comprendre que le codage nécessaire pour avoir l'hypothèse du triangle rectangle.
Cet exercice ne fait pas intervenir de méthodes concernant le triangle rectangle mais cela peut être intéressant de le donner suite à ce chapitre pour montrer l'importance du codage et préciser que nulle part est mentionné dans les données le fait que ABC est un triangle rectangle.

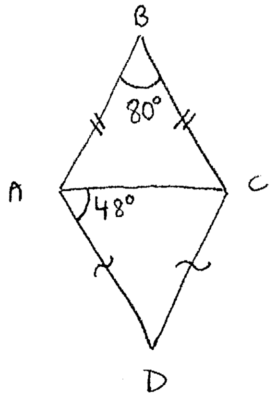
□ Dans le deuxième cas:

Ce triangle est aplati et le point C appartient au segment [AB] donc on a
$\widehat{ABC} = \widehat{CAB} = 0°$
Ce triangle a deux angles égaux donc il est isocèle. Pourtant il a trois côtés de longueurs différentes.
Ceci permet d'insister sur la caractérisation des objets en jeu dans les définitions.

Autre manière de soumettre la question: “Un triangle qui a un angle de 180° est-il toujours isocèle?...” ou bien “Dans quel cas un triangle qui a deux angles de mesure nulle est-il isocèle?”
On peut faire le lien avec le chapitre sur les angles du cours de 5ème.
Un élève peut connaître la définition d'un angle aigu sous la forme suivante: Il s'agit d'un angle dont la mesure est comprise entre 0° et 90°.
Au sens large ceci permet d'affirmer qu'un angle droit est le plus grand des angles aigus.
Au sens strict le plus grand des angles aigus n'existe pas.
D'où l'importance de la caractérisation des objets en jeu dans les définitions...

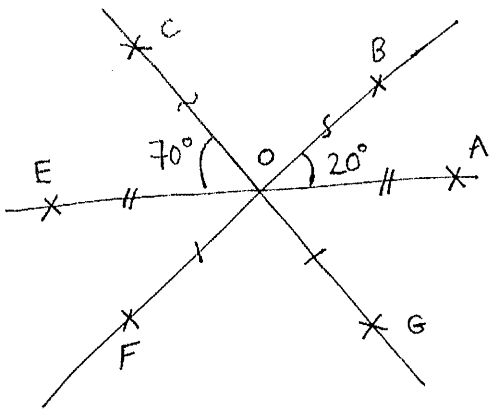
***Autres situations pour faire évoluer le statut de la figure : des figures à main levée***

**Exercice 1 : (5<sup>ème</sup>)**




Le quadrilatère ABCD est-il un losange ?

**Exercice 2 : (5<sup>ème</sup>+3<sup>ème</sup>)**
Le dessin ci-dessous a été réalisé à main levée.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifie chaque réponse

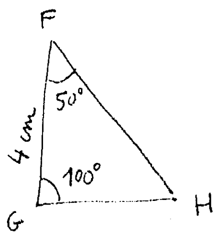



- Les points C et G sont symétriques par rapport à O.
- Le point B est l'image du point F par la symétrie de centre O.
- Le point E est le symétrique du point A par la symétrie de centre O.
- Le triangle OEF est isocèle.
- Le triangle OFG est isocèle.
- Le triangle OFG est rectangle.
- Les droites (BF) et (CG) sont perpendiculaires.

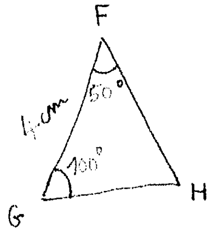
*Prolongement 3<sup>ème</sup> :*
- C est l'image de B par le quart de tour direct de centre O
- E est l'image de C par le quart de tour direct de centre O
- G est l'image de F par le quart de tour direct de centre O.
- A est l'image de G par le quart de tour direct de centre O.
- E est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle 70°.

**Exercice 3 : (5ème)**
Un professeur demande à ses élèves de tracer à main levée un triangle FGH vérifiant les conditions suivantes :
FG = 4 cm, $\widehat{GFH} = 50°$, $\widehat{FGH} = 100°$.

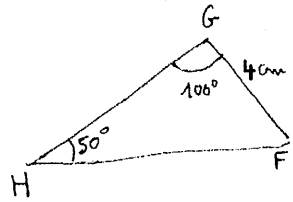
1- Les dessins des élèves suivants sont-ils satisfaisants ? Explique ta réponse.



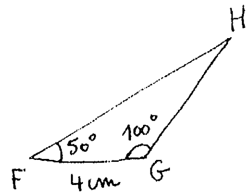

Adélie




Mohamed



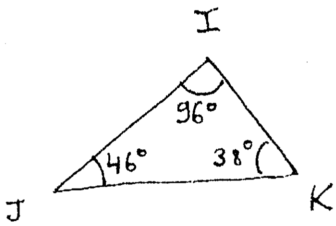

Thomas

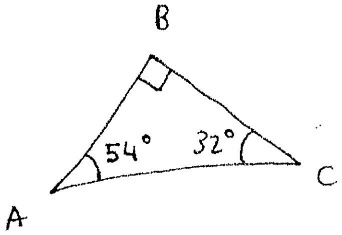


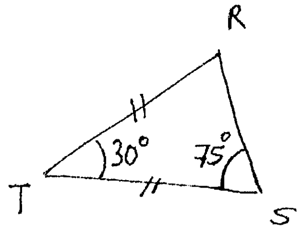

Mégane

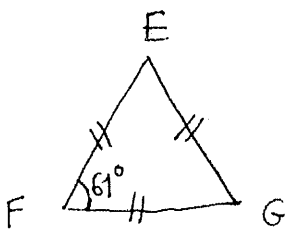
2- Construis en vraie grandeur le triangle FGH.

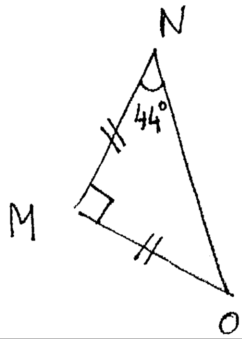
**Exercice 4 : (5ème)**
Les triangles représentés ci-dessous à main levée existent-ils ?

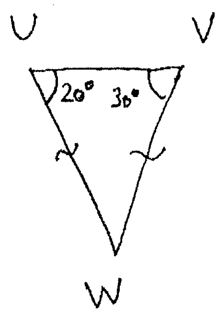


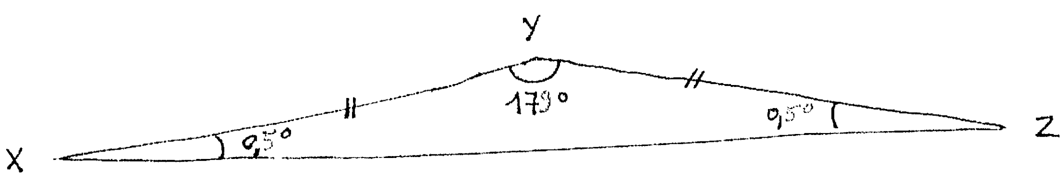



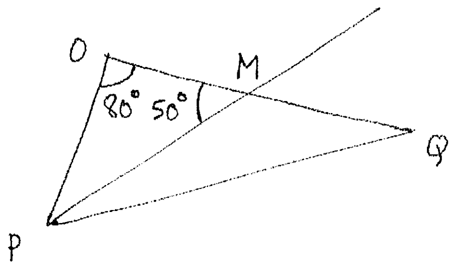



**Exercice 5 : (5ème)**

Déterminer la mesure de tous les angles du triangle OPQ.

La demi-droite issue de P est la bissectrice de l'angle $\widehat{OPQ}$. Elle coupe [OQ] en M.




**Exercice 6 : (5ème)**

a) Construire les figures suivantes en vraie grandeur :

1) ABCD est un rectangle tel que AB = 5 cm et AC = 4 cm.
2) IJKL est un carré tel que IK = 2 cm

b) Construire les figures suivantes en ayant fait au préalable une figure à main levée.

1) RECT est rectangle tel que RE = 5 cm et RT = 4 cm.
2) MATH est un rectangle tel que MT = 8 cm et $\widehat{MTH} = 30°$.
3) BLEU est un losange tel que BL = 7 cm et LU = 5 cm.
4) JOLI est un parallélogramme tel que JI = 5 cm ; $\widehat{OVI} = 100°$, $\widehat{OIV} = 40°$.

**Exercice 7 : (4ème)**

Faire des figures à main levée pour illustrer la définition de chacun des mots suivants :

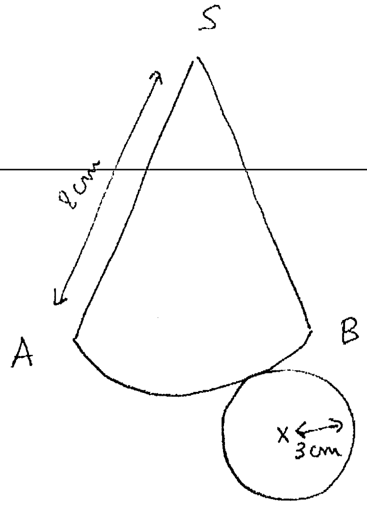
- Médiatrice.
- Bissectrice.
- Médiane.
- Hauteur.

**Exercice 8 : (4ème)**

Faire une figure à main levée pour illustrer les théorèmes des milieux.

**Exercice 9 : (4ème)**

Voici un patron d'un cône de révolution dessiné à main levée.




1) Calculer le périmètre de la base.
2) ~~En déduire la longueur de l'arc AB.~~
3) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ASB}$.
4) Construire un patron de ce cône.

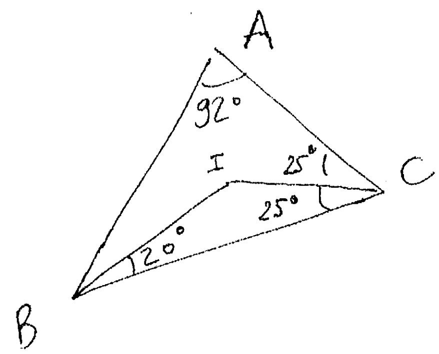
**Exercice 10 : (4$^{ème}$)**
Construire un patron d'un cornet de glace en forme de cône de révolution, de génératrice 12 cm et de diamètre 6 cm.

**Exercice 11 : (4$^{ème}$) nécessité de démontrer**
ABC est un triangle. D est le milieu de [BC]. M est le milieu de [AD].
La droite (CM) coupe [AB] en F.
Par D on trace la parallèle à (CF). Elle coupe (AB) en E.

1- Que peut-on dire du point F par rapport au segment [AE] ?
2- Que peut-on dire du point E par rapport au segment [BF] ?

**Exercice 12 : (4$^{ème}$)**
Soit un parallélogramme noté ABCD, F le milieu de [DC], et E le milieu de [AB].
Est-il vrai que les droites (AF) et (CE) partagent la diagonale [DB] en trois segments de même longueur ?

**Exercice 13 : (4$^{ème}$)**
Est-ce que le point I dans la figure ci-dessous est le centre du cercle inscrit au triangle ABC ?




**Exercice 14 : (3$^{ème}$)**
[AM] est la médiane d'un triangle ABC.
Par un point P quelconque de [AM] on trace la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en E et la parallèle à (AC) qui coupe (BC) en F
Les segments [BC] et [EF] ont-ils le même milieu ?

**Exercice 15 : (3$^{ème}$)**
KRST est un trapèze, (KR)//(TS).
(KS) et (RT) se coupent en O.
On trace par O la parallèle aux bases qui coupe (KT) en I et (RS) en J.
O est-il le milieu du segment [IJ] ?

## 2. Travailler le raisonnement déductif à un ou plusieurs pas

### *a) Raisonner pour calculer le périmètre d'un quadrilatère*

***Présentation du Problème***

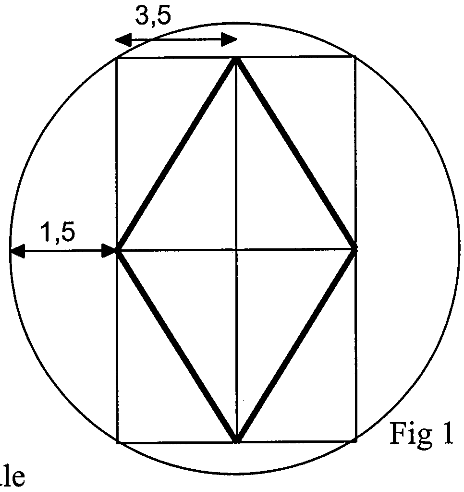



Fig 1

Énoncé 1
L'unité est le centimètre.
Dans cette figure, les deux diamètres du cercle sont perpendiculaires et les cordes sont perpendiculaires à ces diamètres.
Il faut calculer le périmètre du quadrilatère en trait gras.

***Séquence de travail en quatrième.***

***Objectifs :***

- Conjecturer
- Susciter le besoin de raisonner pour établir une formule

***Pré-requis et outils nécessaires* :**

- Connaître les notions de cercle et de rayon.
- Connaître la définition du rectangle et les propriétés de ses diagonales.
- Connaître les propriétés du losange (facultatif pour cet exercice)
- Connaître les propriétés de la symétrie orthogonale.

***Intérêts du problème et analyse a priori***

Pour la conjecture :

L'énoncé de l'exercice est retravaillé pour permettre à tous les élèves de s'approprier la situation, d'abord par des constructions et des mesures (G1). Il n'est pas précisé qu'il s'agit d'un losange. Il n'est pas précisé qu'un triangle rectangle est inscrit dans un cercle .

La justification que le quadrilatère inscrit est bien un rectangle, est faite oralement avec la classe en mobilisant la définition du rectangle et les axes de symétrie du cercle.

Il s'agit de faire apparaître que le calcul du périmètre ne dépend pas des dimensions du rectangle inscrit dans le cercle dont on a fixé le rayon, puis de faire apparaître un lien entre ce périmètre et le rayon en faisant varier la longueur du rayon. La propriété est indépendante de la valeur du rayon.

Pour le besoin de démontrer :

Les élèves construisent des dessins, mesurent et conjecturent que le périmètre du quadrilatère vaut quatre fois la longueur du rayon pour les constructions réalisées. Il s'agit de créer la rupture c'est à dire de rendre le dessin et la mesure inopérants en demandant par exemple ce qu'il en est pour un cercle de 48,75 mètres de rayon. (il faudra donc passer d'un dessin sur lequel des mesures sont possibles à une figure qui représente des situations analogues et sur laquelle s'appuiera le raisonnement)

***Déroulement prévu***

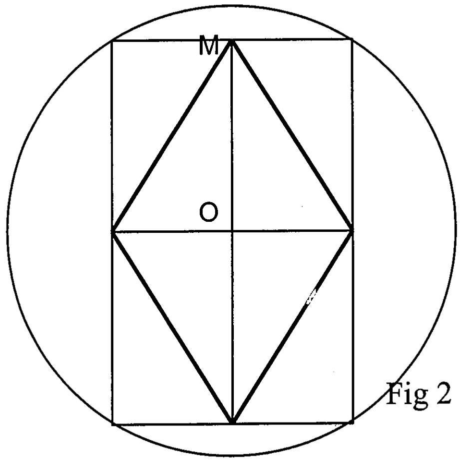


Fig 2

Phase de lancement : Réaliser un croquis au tableau

Le cercle a pour rayon 5 cm.

Phase de travail individuel :

Quatre groupes réalisent un dessin (l'unité est le cm)

1. le premier avec OM = 4,5
2. le second avec OM = 4
3. le troisième avec OM = 3,5
4. le quatrième avec OM = 3

Phase de travail individuel puis en groupe

. Seuls puis en groupe : Rédiger d'abord un programme de construction

. Seul : réaliser le dessin et mesurer le périmètre du quadrilatère

Phase de mise en commun (collectif)

. Ensemble : confronter les résultats ; des remarques sont exprimées ; beaucoup d'élèves trouvent 20 cm mais pas tous ou pas tout à fait.

Remarques : les élèves constatent que les résultats sont très proches mais le rapport avec le rayon n'apparaît pas clairement.

Le professeur propose de refaire des dessins avec cette fois pour rayon 6cm et les mêmes distances OM.

. Ce travail est fait seul à la maison.

Retour ensemble : échanges sur les résultats obtenus ; cette fois le lien avec le rayon apparaît plus nettement et la conjecture d'une formule est possible. Certains veulent vérifier en réalisant une autre figure avec un rayon de 7 cm.

Il reste à confirmer que la propriété est valable pour n'importe quel rayon et pour pouvoir répondre au cas où le rayon vaut par exemple 48,75 mètres. La démonstration s'impose.

. Pour démontrer, les élèves recherchent des justifications seuls puis une phase d'échanges oraux permet de définir l'articulation entre les différentes étapes qui sont notées au tableau.

. Les élèves doivent reprendre la rédaction de la démonstration à la maison.

La conduite de cette séquence obéit à des contraintes qui sont liées à la fois à la précision de l'objectif fixé, au temps que l'on souhaite y consacrer et au public auquel on s'adresse.

La forme de l'énoncé présentée ici rend accessible la construction aux élèves les plus en diffcultés et permet d'accéder ainsi à plusieurs mesures.

D'autres présentations de l'énoncé s'inspirant de la figure 1 sont envisageables. Elles peuvent cependant introduire des étapes de construction et de raisonnement pour lesquelles il faut accepter de passer du temps.

Enoncé 2 : La figure représente un rectangle inscrit dans un cercle. Calculer le périmètre du losange.

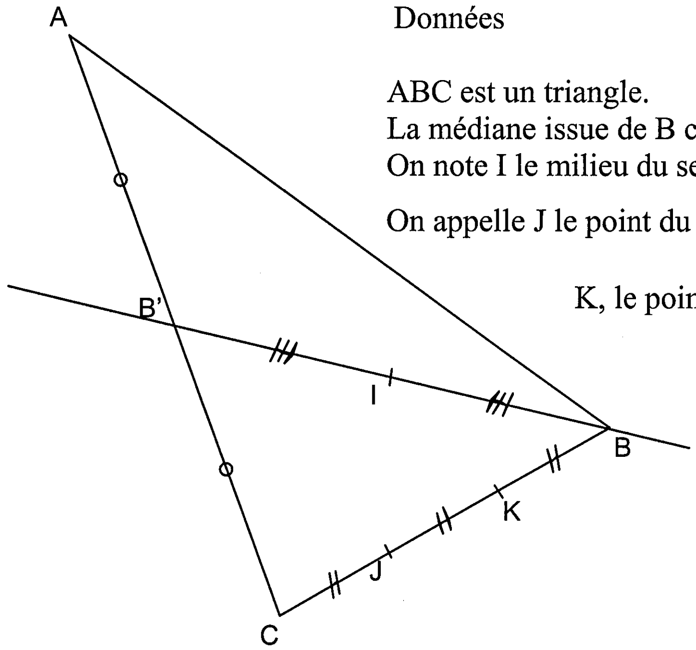
Enoncé 3 : La figure représente un rectangle inscrit dans un cercle. Calculer le périmètre du quadrilatère obtenu en joignant les milieux des côtés du rectangle.

Travail sur la rédaction :

Malgré les indications données en classe, les rédactions manquent de structure et nécessitent d'être retravaillées. Le professeur donne un document qui reprend des copies des textes d'élèves.
En classe les élèves entourent les phrases qui reprennent les données initiales, passent au surligneur ce qui est de l'ordre de l'énoncé d'une propriété. Enfin les conclusions sont soulignées. A partir de ces observations, une rédaction est élaborée ensemble en organisant l'articulation ternaire de la démonstration.

### b) Plusieurs pas de raisonnement

#### Présentation du problème




Données

ABC est un triangle.
La médiane issue de B coupe le côté [AB] en B'.
On note I le milieu du segment [BB'].
On appelle J le point du segment [BC] tel que $CJ=\frac{1}{3}BC$ et

K, le point du segment [BC] tel que $BK=\frac{1}{3}BC$.

Question : Les points A, I et K sont-ils alignés ?

***Niveaux concernés***
Séquence de travail en quatrième.

***Objectifs :***

- Conjecturer
- Susciter le besoin de démontrer
- Travailler sur plusieurs pas de raisonnement déductif

***Pré-requis et outils nécessaires :***

- Connaître la définition d'une médiane d'un triangle.
- Connaître la propriété de la droite des milieux de deux côtés d'un triangle.

***Intérêts du problème et analyse a priori***

Pour la conjecture et le besoin de démontrer :
Les élèves réalisent des dessins différents et la propriété peut apparaître comme une « constante » de la figure. La démonstration s'impose pour généraliser la propriété.
Plusieurs étapes sont nécessaires et il faut accompagner l'identification de sous figures pour dégager des configurations de base dans lesquelles s'appliquent la propriété des milieux.

***Déroulement prévu***

Première phase : construction (15 minutes)

Un premier croquis est réalisé au tableau par un élève avec le codage.
Les élèves construisent un dessin assez grand sur une feuille A4. La grande taille du dessin rend probable les imprécisions de constructions. L'alignement des points peut ne pas être constaté.

Deuxième phase : mise en commun (5 minutes)

Le professeur recueille les conjectures des élèves. Il peut s'appuyer sur les imprécisions des différentes constructions qui permettent d'installer le doute et de rendre nécessaire une démonstration.

Troisième phase : recherche de la justification (15 minutes)

Seuls : les élèves recherchent des justifications pour démontrer l'alignement.
Le professeur peut fournir des pistes :

- Faire l'inventaire des informations de l'énoncé
- Rechercher les propriétés susceptibles de s'appuyer sur ces données
- Préciser les triangles dans lesquels les milieux des côtés permettent l'utilisation du théorème des milieux.
- Justifier un alignement à l'aide du parallélisme.

Quatrième phase : mise en commun des étapes du raisonnement. (15 minutes)

Un schéma au tableau articule les trois étapes du raisonnement pour aboutir au parallélisme de (JB') et (AK) puis de (JB') et (IK), enfin à l'alignement des points A K et I.
Les élèves doivent rédiger la démonstration à la maison.

***Des pistes suite au déroulement réel***

Selon le niveau des élèves, la construction peut poser des problèmes. Il faut donc s'appuyer sur les plus rapides pour mutualiser les compétences et les aides afin de respecter le temps prévu.
Il est essentiel que tous les élèves disposent d'une figure convenable pour participer à la réflexion collective de la deuxième phase.
Le guidage sur les évocations produites par les données de l'énoncé est grandement facilité quand les élèves disposent de la fiche « Comment démontrer que des droites sont parallèles »
(Les figures sont complétées en cours au fur et à mesure de la progression)

| Comment démontrer que des droites sont parallèles ? |
| --- |

| | |
| --- | --- |
| 1- PARALLELES<br><br>Si deux droites n'ont pas de point commun, alors elles sont parallèles.<br>Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles. | |
| 2- PERPENDICULAIRE COMMUNE<br><br>Si deux droites (d1) et (d2) sont perpendiculaires à une troisième (d3), alors elles sont parallèles entre elles. | |
| 3- TRAPEZE<br><br>Un trapèze est un quadrilatère non croisé qui a deux côtés parallèles. | |
| 4 - PARALLELOGRAMME<br><br>Dans un parallélogramme, les côtés sont parallèles deux à deux. | |
| 5- SYMETRIE CENTRALE<br><br>La symétrie centrale conserve le parallélisme.<br><br>L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle. | |
| 6 - SYMETRIE ORTHOGONALE<br><br>La symétrie orthogonale conserve le parallélisme. | |
| 7 - THEOREME DES MILIEUX<br><br>Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. | |
| 8- RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES<br><br>Si (d) et (d') sont deux droites sécantes en A.<br>Si A, B, D et A, C, E sont situés dans le même ordre respectivement sur (d) et (d').<br>Et si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ alors (BC) est parallèle à (DE). | |

# E. Des pistes pour développer différents types de raisonnement

Compte tenu des difficultés que peuvent rencontrer les élèves, nous nous sommes attachés à mettre en place des situations qui s'appuient sur des points clef du programme (types de raisonnement et notions). Elles peuvent permettre à l'élève d'une part d'appréhender les enjeux d'une démonstration, et d'autre part d'élaborer des stratégies articulées sur des changements de cadres. Les situations proposées soulignent la nécessité de prouver à travers le calcul algébrique ou le raisonnement par récurrence. La dernière montre la richesse des outils disponibles et l'influence du choix du cadre sur l'efficacité et le coût du raisonnement.

## 1. Évolution du type de raisonnement du cadre algébrique au cadre de l'analyse : égalité / inégalité

**Activité sur la démonstration d'inégalités algébriques :**

***Présentation du problème :***

**L'objectif** est de prouver la propriété suivante :

$$\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Pour le déroulement de séance, la propriété sera formulée ainsi :

**« La somme d'un nombre strictement positif et de son inverse est toujours supérieure ou égale à deux ».**

***Niveaux concernés*** : classe de seconde.

***Intérêts du problème :***

Le premier objectif consiste à faire prendre conscience à l'élève de l'universalité de la propriété et par conséquent de la **nécessité d'une démonstration**, puisqu'il sera impossible d'établir une liste exhaustive de vérifications ! Ensuite, il s'agira d'élaborer une stratégie démonstrative à l'aide d'**arguments fonctionnels, graphiques ou algébriques**. Une des forces de cette activité est justement de permettre **différentes formes de réflexion**, le travail réflexif s'exerçant dans plusieurs cadres, fortement corrélés entre eux. Pour les élèves, il s'agira notamment :

- de savoir reformuler une phrase en expression mathématique ;
- de mettre en place les outils de calcul et de comparaison idoines ;
- d'utiliser les différents ensembles de nombres, et pas uniquement les entiers ( !) ;
- d'utiliser l'outil fonctionnel, associé à la notion de courbe représentative ;
- de déterminer l'équation d'une droite ;
- de procéder à la résolution algébrique et graphique d'équations et d'inéquations.

***Prérequis :***

- Calcul algébrique ;
- Egalités et inégalités ;
- Fonctions et courbes représentatives associées, résolution graphique d'équations et d'inéquations ;
- Equations de droites, fonctions affines.

***Documents élève :***

Dans un premier temps, il est demandé aux élèves de seconde d'essayer d'expliquer pourquoi :

**« la somme d'un nombre strictement positif et de son inverse est toujours supérieure ou égale à deux ».**

Par la suite, la réflexion faisant émerger différents points de vue, en particulier fonctionnels, le travail va s'appuyer sur l'activité suivante, extraite de *Math 2$^{de}$* – Belin :

**OBJECTIF : Vérifier graphiquement une propriété puis la démontrer algébriquement.**

La somme d'un nombre réel strictement positif et de son inverse est toujours supérieure ou égale à 2 (1).

**1.** Compléter la ligne mathématique suivante qui traduit la phrase ci-dessus :

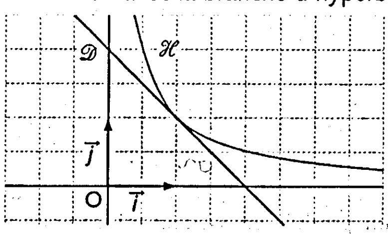
Pour tout nombre réel $x$ strictement positif, ...

Dans ce qui suit, on considère plusieurs stratégies.

**2.** Soit les trois intervalles $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right]$; $\left]\frac{1}{2}\,;\,2\right[$ et $[2\,;\,+\infty[$.

**a.** Prouver que dans deux des intervalles la relation (1) est « presque évidente ».
**b.** Pour le troisième intervalle, considérer cinq valeurs de $x$ et calculer la somme de $x$ et de son inverse.
**c.** Peut-on considérer la propriété (1) comme démontrée ? Pourquoi ?

**3.** On a tracé ci-dessous la branche d'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et une droite $\mathscr{D}$ ayant un seul point commun avec la branche d'hyperbole.




**a.** Quelle est l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ ?
**b.** Existe-t-il un lien entre le graphique et la propriété (1) ? Pourquoi ?
**c.** A-t-on démontré la propriété (1) ? Pourquoi ?

**4. a.** Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ équivaut à $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$.
**b.** Démontrer algébriquement la propriété (1).

***Déroulement des séances :***

L'activité a été proposée aux élèves lors de deux séances de module d'une heure chacune (on peut envisager une durée plus courte).

L'objectif est d'orienter le travail suivants deux axes majeurs : le premier participant de l'appropriation du problème et de la mise en place de stratégies démonstratives – temps de recherche autonome (phase 1) (travail individuel ou par groupes) ; et le second, plus dirigé, visant à mettre les résultats en commun et à établir une synthèse (phases 2 et 3).

<u>Phase 1 :</u> dans un premier temps, il s'agit pour les élèves de formuler la propriété en phrase mathématique puis (d'essayer) de la démontrer.

~~Phase 2 : Le professeur oriente la réflexion vers quelques pistes :~~

- pourquoi choisir des valeurs particulières, différentes selon les élèves, bien que certains aient toutefois choisi des nombres décimaux (aucun n'a d'ailleurs pensé à considérer un rationnel, voire un irrationnel) ? ;
- essayer d'expliquer pourquoi le résultat est « évident » pour $x > 2$.
- trouver un autre intervalle sur lequel la propriété est « évidente » ;
- pour le coeur de la preuve, le professeur peut leur proposer ensuite de penser aux fonctions de référence, en particulier à leur courbe représentative pour comparer la position des courbes des deux fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $x \rightarrow -x + 2$ (usage possible de la calculatrice graphique) ;

- enfin, pour la démonstration algébrique, le professeur va leur demander de réduire au même dénominateur et d'observer que le problème se ramène à $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

Phase 3 : La deuxième séance, plus directive, consiste enfin à établir la synthèse de ce travail, en envisageant le problème, pour développer l'argument fonctionnel, sous la perspective de l'étude graphique de la position de deux courbes : celle de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et celle de la fonction $x \rightarrow -x + 2$.

***Commentaires et pistes de réflexion :***

| **Difficultés à attendre** | **Champs d'interventions possibles** |
|---|---|
| **Traduction mathématique :** Transformer la phrase énonçant la propriété (« la somme d'un nombre réel positif et de son inverse est toujours supérieure ou égale à deux ») en ligne mathématique. Mise en place du vocabulaire (qu'est-ce que l'inverse d'un nombre ?), identification de l'enchaînement des fonctions et lois mathématiques (on prend l'inverse d'un nombre puis on lui ajoute ce nombre), des inégalités (le nombre est strictement positif, supérieur ou égal à deux). | Distinguer inverse et opposé.<br><br>Souligner les priorités opératoires<br><br>Quels sont les nombres à ajouter ?<br><br>Quelle doit être la particularité du résultat ? |
| **Universalité :** Prendre un nombre générique. Difficultés que soulève une vérification exhaustive. Discussion sur le caractère généraliste de la phrase et sur l'impossibilité d'exhiber une valeur minimale qui engloberait à elle seule toutes les valeurs possibles. Choix de la variable générique. | Devant le (grand ?) nombre de valeurs choisies par les élèves et le professeur, laquelle préférer ? Pourquoi une et pas une autre ? Comment éviter ce dilemme ? N'y aurait-il pas une valeur qui « engloberait » toutes les autres ou faut-il introduire un « symbole général » ? |
| **Courbes et valeur démonstrative :** Exploitation du tracé des courbes représentatives. Validité de l'argument graphique. Avantages et inconvénients par rapport à l'argument algébrique.<br>Place de la calculatrice | Une courbe ne contient-elle pas des informations utiles ? Quelles fonctions serait-il intéressant de représenter par rapport à notre problème ? Leur observation est-elle suffisante ? |
| **Calculs algébriques :** Valeur intellectuelle de la preuve algébrique. Utilité de la preuve (évidence raisonnée intuitive). | Comparer deux nombres, c'est étudier le signe de leur différence : qui comparer ? quel signe doit-on avoir ?<br><br>Fraction : réduire au même dénominateur et essayer de factoriser le numérateur (identité remarquable ?). Conclure quant au signe.<br>Intérêts de cet argument algébrique, comparativement à l'observation des courbes. |

***Prolongements et variantes :***

On peut très bien envisager une séance TICE pour construire point par point la courbe représentative de $x \to x+\frac{1}{x}$ à partir de celles de $x \to x$ et de $x \to \frac{1}{x}$ et observer que les images sont toutes supérieures ou égales à 2 pour $x \in ]0;+\infty[$.

Pour des classes de terminale scientifique, cette activité permet un prolongement sur les suites numériques (où il faudra penser à faire des raisonnements par récurrence !) :

*On considère la suite définie pour tout entier naturel n par :*

$u_{n+1} = -\frac{1}{u_n} + 2$, *avec $u_0$ un nombre réel quelconque, différent de 0.*

*Essayer d'étudier, pour diverses valeurs de $u_0$, les propriétés et le comportement de cette suite (distinguer les cas $u_0 < 0$ ; $0 < u_0 < 1$ ; $u_0 = 1$ ; $u_0 > 1$).*

*Quand le cours sur les suites sera avancé (suites croissantes majorées, décroissantes minorées, point fixe), on pourra raffiner le tout :*

- *Montrer que cette suite est majorée par 2 à partir d'un certain rang.*
- *Montrer que cette suite est positive à partir d'un certain rang.*
- *Quelles sont ses variations ?*
- *Préciser sa limite éventuelle.*

## 2. Démonstration par récurrence

### Présentation du problème

*Soit $P_n$ et $Q_n$ les propriétés définies pour tout entier naturel n par :*

$P_n$ : *« 3 divise $4^n - 1$ »* $Q_n$ : *« 3 divise $4^n + 1$ »*

1. *Montrer que $P_n$ et $Q_n$ sont héréditaires.*
2. *Montrer que $P_n$ est vraie pour tout entier naturel n.*
3. *Trouver un entier naturel n tel que $Q_n$ soit fausse. Montrer que $Q_n$ est fausse pour tout entier naturel n.*

### Niveau concerné

Terminale S (Spé Maths)

### Intérêt du problème

L'exercice permet de vérifier que ces deux propriétés à l'expression similaire sont toujours vraies ou toujours fausses selon que l'initialisation est possible ou non.

L'objectif consiste à faire comprendre à l'élève qu'une propriété héréditaire, mais pour laquelle il n'est jamais possible de « démarrer » (initialisation), est toujours fausse. Il faut le prouver ( !!! ) car des essais , même nombreux, ne permettent pas de conclure.
A travers cette activité, l'élève devra pouvoir

- s'approprier la problématique : lire un énoncé en entier avant de répondre à la première question. Les élèves sont « formatés » de sorte que lorsqu'ils lisent le mot récurrence, ils cherchent immédiatement à initialiser la propriété.
- traduire en langage mathématique : réfléchir sur le sens du mot « diviseur » et réussir à traduire la propriété en utilisant le mot « multiple ». Une fois l'expression écrite sous la forme 3k, il faut s'interroger sur l'appartenance de k à l'ensemble des entiers naturels, à l'ensemble des nombres relatifs ou à l'ensemble des réels.
- donner un sens à « les deux propriétés sont équivalentes ».
- sensibiliser au raisonnement par l'absurde.

### Prérequis

- Savoir utiliser un raisonnement par récurrence
- Savoir nier une proposition (la négation de « pour tout entier naturel n .... » est « il existe un entier naturel $n_0$ tel que ..... »)
- Savoir raisonner par l'absurde
- Avoir quelques notions d'arithmétique (division)

**Document élève**

*<u>De l'intérêt de l'hérédité sans initialisation</u>* :
*Soit $P_n$ et $Q_n$ les propriétés définies pour tout entier naturel n par :*

*$P_n$ : « 3 divise $4^n - 1$ »* *$Q_n$ : « 3 divise $4^n + 1$ »*

*1. Montrer que $P_n$ et $Q_n$ sont héréditaires.*

*2. Montrer que $P_n$ est vraie pour tout entier naturel n.*

*3. Trouver un entier naturel n tel que $Q_n$ soit fausse. Montrer que $Q_n$ est fausse pour tout entier naturel n.*

**Déroulement envisageable de la séance**
Préciser le temps attribué pour les différentes phases et les préciser

1. Donner l'énoncé et laisser « attaquer » l'exercice, sans commentaire.
2. Faire lire à haute voix la question 1 par un élève, puis la question 2 et rappeler la hiérarchisation des questions.
3. Encourager à tester différentes valeurs (question 3) et convaincre de la nécessité d'une preuve, même si les nombreux tests laissent croire que la propriété $Q_n$ est toujours fausse.
4. Amener au raisonnement par l'absurde.
5. Sensibiliser à la notion de récurrence descendante.

**Commentaires et pistes de réflexion**
L'activité a été donnée à un groupe d'élèves de Terminale S dans le cadre d'une séance d'approfondissement des techniques mathématiques (les élèves étaient volontaires).

| **Difficultés** | ***Interventions possibles*** |
|---|---|
| <u>Traduction en langage mathématique :</u><br>• Transformer *« 3 divise $4^n - 1$ » en « $4^n - 1$ est un multiple de 3».*<br>• $4^n - 1 = 3k$<br>• $4^{n+1} - 1 = 4 . 4^n - 1$ | • Rappel des notions sur la division<br>• A quel ensemble appartient k ?<br>• Rappel sur les puissances entières |
| **Formatage des élèves:**<br><br>Quand une propriété est à démontrer par récurrence, l'élève est habitué à commencer par initialiser la propriété | • Faire relire à haute voix par élève qui a commencé par l'initialisation, la question 1, puis la question 2.<br>• Rappeler qu'un énoncé se lit en entier avant de chercher à résoudre la première question.<br>• Faire réfléchir sur l'objectif de |

| | |
|---|---|
| | l'exercice (en particulier lire le titre). |
| <u>Nécessité d'une preuve :</u><br><br>• Prouver que « *$Q_n$ est fausse pour tout entier naturel n.* »<br>Les élèves sont désarmés car on leur demande en général de trouver une valeur $n_0$ pour laquelle $Q_n$ est fausse.<br><br>• Retour au problème de l'initialisation<br><br>• Pour un $n_0$ donné, si $Q_{n_0}$ est vraie alors $Q_{n_0-1}$ est vraie, mais, si $Q_{n_0}$ est vraie alors $Q_{n_0+1}$ est aussi vraie. | • Encourager à tester la propriété pour différentes valeurs de n.<br><br>• Comment nier « pour tout entier n » ?<br>• Et si c'était vrai pour un entier $n_0$ ? (raisonnement par l'absurde)<br><br>• Rappel de l'illustration donnée quand on introduit le raisonnement par récurrence (gravir les barreaux de l'échelle). On peut aussi descendre de l'échelle !!!<br><br>• Rappel sur la signification de l'équivalence de deux propriétés.<br><br>• Conclure |

**Prolongements**

Proposer un exercice où il est possible d'initialiser la propriété mais l'hérédité n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang (l'exercice ne sera pas fermé comme celui proposé précédemment).

*Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2\,u_n + 1$.*
*A-t-on $u_n \geq n^2$ ?*

## 3. Des outils différents selon les cadres

### Point de concours : vectoriel, analytique, barycentrique, nombre complexe

Dans ce paragraphe, nous allons, au travers d'un exemple, chercher à montrer aux élèves qu'une démonstration peut sortir du cadre du chapitre en cours et qu'ils peuvent ainsi chercher à utiliser différents outils.

**Présentation du problème** : il s'agit de démontrer l'alignement de trois points définis par des relations vectorielles à partir des trois sommets d'un triangle donné.

**Niveaux concernés** : $2^{nde}$, 1S et TS

**Objectifs** : Pour les trois niveaux, il s'agit non seulement de montrer aux élèves la nécessité de démontrer, mais aussi leur faire voir les différences de raisonnement liées au fait que l'on travaille dans différents cadres.

**Potentialités du problème** : Ici, il s'agit de démontrer un problème d'alignement avec différents outils (calcul vectoriel, analytique, barycentres, nombres complexes). Quel que soit le cadre choisi, on ne peut se limiter à la conjecture mais on peut se poser la question de l'efficacité et du coût du raisonnement.
L'énoncé est ici fermé, le but étant d'amener les élèves à choisir un cadre de résolution.

**Pré requis** :
En seconde : calcul vectoriel (transformer la question en problème vectoriel, utiliser la relation entre alignement et colinéarité, utiliser Chasles) et analytique ( choix d'un repère , condition de colinéarité )
En première : barycentres (transformer une simple relation vectorielle en relation barycentrique, utiliser le barycentre partiel)
En terminale : complexes (choix d'un repère orthonormé, colinéarité et argument, argument d'un quotient)

**Document élève :**

| |
|---|
| Dans le plan, on considère un triangle ABC.<br>Les points I, J et K sont définis par<br>$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BK}=\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}$<br>Démontrez que I, J et K sont alignés |

Scénario prévu *a priori* : plusieurs pistes seront sûrement abordées par les élèves. Cet exercice arrivant après le chapitre sur les complexes, on peut penser que cette piste sera privilégiée, même si on peut aussi l'aborder avec le calcul vectoriel, la géométrie analytique ou les barycentres. Pour la correction, les quatre cadres sont à prévoir.

Scénario testé en TS :

| | |
|---|---|
| Phase de lancement | Distribution de l'énoncé<br>Consigne : à faire en devoir à la maison |
| Phase de recherche | Il s'agit d'un travail individuel à la maison ; au cours de la semaine, les élèves vont proposer différentes démarches mais le professeur n'intervient pas pour permettre différentes pistes. |

| | |
|---|---|
| Phase de mise en commun | • Le professeur explique aux élèves que différents cadres ont été choisis<br>• Les deux méthodes les plus utilisées (barycentre et calcul vectoriel) sont corrigées<br>➢ insister sur les erreurs commises<br>➢ faire quelques rappels (notamment sur le barycentre partiel)<br>➢ insister sur l'erreur de raisonnement commise en ne prenant qu'un exemple<br>• Quant aux deux autres méthodes, elles seront l'occasion d'une nouvelle recherche de la part des élèves, le cadre étant alors fixé par le professeur. La classe est alors divisée en groupes. Là encore, ce sera certainement la notion la plus récente qui posera le plus de problème. |
| Phase de synthèse | • Noter les différentes corrections<br>• Les élèves doivent retenir le fait qu'un problème peut avoir différents types de démonstration, en utilisant différents cadres.<br>• On peut alors engager un (court) débat sur le choix de telle ou telle méthode en liaison avec son coût et sa rapidité et les amener ainsi à prendre l'habitude d'imaginer différents cadres puis de choisir celui qui paraît a *priori* le plus efficace avant de se lancer dans les calculs. |

**Des pistes pour la mise en œuvre :**

| | |
|---|---|
| Les élèves n'ont pas d'idée | Leur suggérer les différents cadres (attention toutefois à ne pas trop en dire pour éviter de les rendre exécutants) |
| Confusion entre barycentre quelconque et centre de gravité | Construire différents barycentres de A et B (utiliser GéoplanW par exemple) |
| ne savent pas utiliser le barycentre partiel | Revoir le théorème et son intérêt (par exemple dans la démonstration de la position du centre de gravité d'un triangle) |
| erreurs classiques du type « $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK}$ donc les points sont alignés »<br>Ou encore « I et J sont alignés, J et K sont alignés, donc I, J, K sont alignés | • Faire des schémas pour des contre exemples<br>• Insister sur la relecture réflexive (objective) de la démonstration |
| Pour l'analytique et les complexes, se contentent de choisir un exemple | Leur faire sentir l'erreur commise et les convaincre de l'insuffisance d'un exemple à l'aide d'une situation de la vie courante (par exemple : « je veux montrer qu'il a fait beau tous les jours du mois d'août, puis-je me contenter de photos prises le 15 août ? ») |

**Autres scénarii :1)** Remplacer la question de l'énoncé par « que pouvez vous dire des points I, J et K ? »
Le problème sera alors ouvert ; l'intérêt étant alors de les amener à développer un comportement de recherche

2) Remplacer la question de l'énoncé par « en utilisant différentes méthodes, montrer que I, J et K sont alignés ». Cela permettrait d'éviter de n'avoir que des copies avec calcul vectoriel ou barycentrique.

## Ressources :


Articles de « Articulation école-collège : des activités géométriques », Commission Inter-Irem Premier cycle COPIRELEM, IREM Paris 7, 2001

- Jean-Claude Fenice, Maryvonne Le Berre et Claude Maurin, *Dessin ou figure ?*
- Hélène Zacchetta et Corinne Hainot, *Ecrire un programme de construction. Un exemple de travail à partir de réponses d'élèves à un test de l'évaluation sixième 1996 sur le cercle.*
- Yves Girmens, Le concept de droite dans l'apprentissage de la géométrie à l'école.
- Maryvonne LE BERRE, Avec des carrés : un problème de construction

Articles de *Comprendre, expliquer, raisonner, écrire*, in « Des mathématiques au Cycle Central » tome 1, Commision Inter-IREM Premier Cycle, 1999

- Groupe « Du raisonnement à la démonstration » IREM d'Orléans : *Argumentation, démonstration en cinquième.*
- Martin M. et al : *Initiation au raisonnement déductif en géométrie.*
- Jaffrot M., Massot A. et al : *Lire et écrire en mathématiques*

Arsac Gilbert ; Mante Michel (1983) : Des problèmes ouverts dans nos classes de premier cycle, Petit x. Num 2. p. 5-33. **Éditeur** IREM de Grenoble, Grenoble

Arsac Gilbert, Germain Gilles, Mante Michel (1991) : Problème ouvert et situation problème. Éditeur IREM de Lyon, Villeurbanne

Arsac G. et al (IREM de LYON) : Initiation au raisonnement déductif au collège, Presses Universitaires de Lyon, 86 rue Pasteur- 69365 Lyon Cedex 07

Balacheff N. (1987) : Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,* 18, pp147-176

Berthelot René et Marie-Hélène Salin (2000 – 2001 ) : *L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? Petit x, n° 56*

Douaire J, Hubert C. (1999) : Quelques repères théoriques relatifs à l'argumentation, in *VRAI ? FAUX ? ... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3,* ERMEL, INRP collection Didactiques des disciplines.

Duval R. (1988) : Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, Annales de didactique et de sciences cognitives, Université Louis Pasteur et IREM Strasbourg, Vol. 1, pp. 57-74.

Duval R. et Egret M.A. (1993) : Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, Repères IREM n°12, Topiques Editions.

Duval R. (1994) : Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométriques, Repères IREM n°17, Topiques Editions.

Duval R. (2000) : Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, in Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 20.2, Edition La Pensée Sauvage

Duval R. (2003) : Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive, *Petit x* n° 31

Houdebine J., Paugam A., Mary M.-N., Alagroute F. (2004) : La démonstration au collège : quelles tâches ? quels outils ? Éditeur IREM de Rennes

Houdebine J., Kerboeuf M-P. (2005) : Les figures-clés : une idée pour l'apprentissage de la démonstration en quatrième. Repères. Num. 59. p. 83-103. Éditeur TOPIQUES éditions Metz

Laborde C. (1994) : Les rapports entre visuels et géométrique dans un EIAO, in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, pp. 387-394, Éditions La Pensée Sauvage.

Laborde C. (1994) : Enseigner la géométrie : permanences et révolutions, Bulletin de l'APMEP, 396, 523-548

Legrand Marc (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. Repères. Num. 10. p. 123-158. **Éditeur** TOPIQUES éditions Pont à Mousson

Muller J.P. (1994) : La démonstration en quatrième et en troisième, *Repères IREM n°15,* Topiques Editions.

Parsysz B. (1988) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1 in Actes de la COPIRELEM, IREM d'Orléans-Tours, pp. 99-110, mai 2001.

RAUSCHER Jean – Claude (1994) : Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs. In Colloque Franco-Allemand, Eds M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, Édition La pensée Sauvage.

Robert A. (2004) : Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. Repères. Num. 54. p. 77-103.

Robert A. (2003) : Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège. Petit x. Num. 62. p. 61-71.

**TITRE :**

**Argumentation et démonstration de l'école au lycée.**

**AUTEUR(S) :**

Groupe d'enseignants de l'académie d'Amiens, coordonné par Brigitte Grugeon-Allys, Département de mathématiques de l'IUFM d'Amiens, Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques.

**RESUME :**

Ce document est le fruit de deux années de travail d'un groupe de professeurs et de formateurs de l'académie d'Amiens intervenant dans le premier et le second degré. Face aux difficultés récurrentes que rencontrent la plupart des élèves en fin de collège et au lycée dans le domaine de la démonstration et au vu de l'inopérance d'une seule entrée par la structure de la preuve et sa rédaction (démonstrations à trous, organigrammes...), le groupe s'est posé la question de la progressivité des apprentissages puis celle du choix des activités la permettant. Cette brochure permet de dresser un état des lieux sur l'enseignement de la démonstration de l'école au collège afin de repérer les besoins puis propose des exemples d'activités déjà testées et exploitables dans les classes.

**MOTS CLES :**

Argumentation, démonstration, débat mathématique, activités en classe, enseignement primaire et secondaire.

**Dépôt légal : 2008 ISBN : 978-2-86612-303-1**

**IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot**
**Directeur de la publication René Cori – Reprographie Nadine Locufier**
**www.iremp7.math.jussieu.fr**