Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction

Rossana Falcade
Université de Modena et Reggio Emilia

1. Introduction

Ce texte présente la thèse de doctorat intitulée «Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction » (Falcade, 2006)[1].

Cette thèse a été conduite en cotutelle Italie-France, entre l'Université Joseph Fourier de Grenoble et l'Università degli studi di Torino, sous la direction de Colette Laborde, de Maria Alessandra Mariotti et, pour l'Université de Turin, de Ferdinando Arzarello.

Bien évidemment notre présentation ne permettra pas de tout expliciter d'un travail commencé avant la thèse (Falcade, 2001, 2002 ; Falcade, Laborde et Mariotti 2003 et à paraître).

Nous chercherons ici à présenter des éléments marquants de cette étude, tout en sachant que si cette opération permet de réduire la complexité, elle comporte aussi le risque d'une certaine banalisation.

2. Le point de départ de notre recherche

On pourrait définir le processus de médiation sémiotique (noté MS) comme le processus par lequel des signes sont susceptibles de fonctionner comme médiateurs dans la construction d'autres signes.

---

[1] Je voudrais remercier, en particulier, Cécile Ouvrier-Buffet pour ses suggestions et sa disponibilité à relire ce texte.

Cette notion, inspirée de la psychologie de Vygotsky (Vygotsky, 1931/1978, 1934/1997), nous a semblé très importante dans le cadre de l'enseignement actuel des mathématiques, confronté au problème d'une utilisation efficace, c'est-à-dire didactiquement pertinente, des nouvelles technologies. En effet, la notion de MS peut jouer le rôle simultané d'outil d'analyse et de construction d'ingénierie.

C'est pour cette raison que nous avons décidé de l'étudier le processus de médiation sémiotique (PMS) dans notre thèse.

3. Théorie de la médiation sémiotique (TMS)

En se fondant principalement sur les travaux de psychologie cognitive développés par Vygotsky (Vygotsky, 1931/1978, 1934/1997) et, notamment, sur cette notion de processus de médiation sémiotique (PMS), Bartolini-Bussi et Mariotti ont développé un paradigme didactique appelé Théorie de la médiation sémiotique (TMS) (Bartolini Bussi, 1998 ; Bartolini Bussi et Mariotti, 1998, 1999 et 2006 ; Bartolini Bussi et al, 1995 ; Bartolini Bussi, Mariotti et Ferri (à paraître); Bartolini Bussi, Boni et Ferri (à paraître b) ; Mariotti, 2000, 2002, 2003).

Ce paradigme s'appuie sur l'hypothèse psychologique que le fonctionnement cognitif est profondément affecté par l'utilisation d'outils. L'émergence, l'évolution et l'internalisation de certaines signes, socialement partagés et fabriqués à partir de l'usage d'outils culturellement significatifs, apparaissent comme centrales dans le processus d'enseignement apprentissage,.

La TMS accorde donc une grande importance :

- au langage et à l'usage de signes ;
- aux dynamiques sociales, qui relient étroitement le plan intersubjectif avec le plan intra-subjectif;
- à l'utilisation d'outils, impliqués dans des activités didactiques à finalités spécifiques ;
- à la dimension culturelle et historique des outils impliqués.

Ainsi, puisque notre objectif premier était celui d'étudier le PMS, nous avons choisi de placer notre recherche au sein de ce cadre théorique.

4. Processus de médiation sémiotique (PMS) et Théorie de la médiation sémiotique (TMS)

Dans la TMS, les signifiés mathématiques sont les produits issus d'une certaine culture (qui utilise elle-même des artefacts) et d'une expérience phénoménologique.
Par conséquent, en utilisant une métaphore (Figure n°1), on pourrait affirmer que le monde des mathématiques peut trouver un correspondant dans le monde de l'artefact.

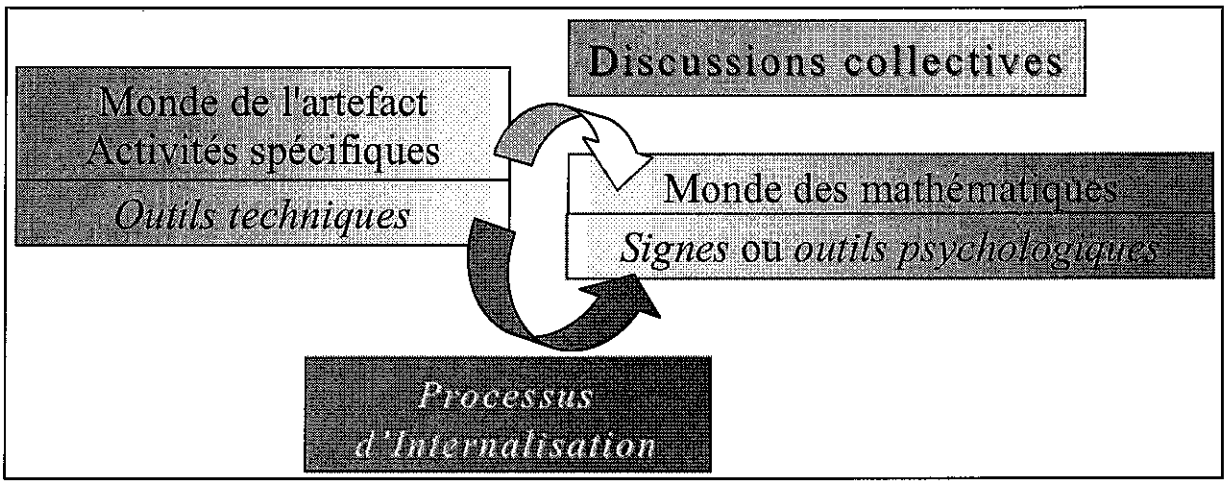


Figure n°1

Au sein d'activités spécifiques, socialement significatives, organisées dans le monde de l'artefact, les élèves peuvent mobiliser certains outils, qui de leur point de vue, sont là pour accomplir une tâche. En utilisant une expression Vygotskyenne, ,ces outils fonctionnent alors comme *outils techniques* du coté des élèves.
En revanche, du côté de l'enseignant, ces mêmes outils peuvent être engagés dans une stratégie didactique bien précise et devenir *signes* ou *outils psychologiques* au sens de Vygotsky, et participer ainsi à la construction de certains signifiés mathématiques.
Le principal objectif didactique du paradigme théorique de la TMS réside justement dans l'obtention de ce changement de signification d'*outils techniques* en *signes* susceptibles de renvoyer aux signifiés mathématiques visés. Ce changement de signification participe à ce que Vygotsky appelle *processus d'internalisation.*
En fait, ce processus est défini comme :

- « la reconstruction interne d'une opération externe »

- « la transformation d'un processus inter-personnel en un processus intra-personnel » (Vygotsky, 1931/1978)

La mise en place d'un espace intersubjectif dans lequel l'émergence, la négociation et l'internalisation des signifiés peuvent s'effectuer apparaît alors fondamentale au PMS.
Cet espace métaphorique revêt un rôle primordial dans la TMS et caractérise effectivement les moments de discussion collectives, où la mise en relation du monde de l'artefact avec le monde des mathématiques est centrale.

Soulignons que c'est dans l'usage tout particulier qu'en fait l'enseignant que réside la possibilité pour un outil de fonctionner comme instrument de médiation sémiotique (IMS).
Le rôle de l'enseignant est crucial :

- il organise les tâches avec l'artefact ;
- il orchestre les discussions collectives.

5. Articulation « Théorie des situations didactiques (TSD)/ Théorie de la médiation sémiotique (TMS) »

Lors de notre recherche, nous avons eu recours à un deuxième cadre théorique, celui de la Théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998), pour caractériser les conditions didactiques selon lesquelles organiser et étudier a posteriori le PMS.
Rappelons que les hypothèses psychologiques et didactiques sous-jacentes à ces deux cadres théoriques sont très différentes. Dans la TSD (Brousseau, 1998), les connaissances visées sont censées se construire comme connaissances nécessaires à la résolution d'une situation problème. En revanche, dans la TMS, les connaissances visées sont censées se construire en tant que signifiés, par un processus d'internalisation se mettant en place à la suite d'activités spécifiques conduites avec l'artefact ainsi que dans des discussions collectives orchestrées par l'enseignant.
Nous avons donc fait l'hypothèse qu'il existe une articulation possible et didactiquement pertinente entre TMS et TSD (première hypothèse de travail).
Le paragraphe suivant est consacré à la recherche des raisons qui, d'une part fondent une telle hypothèse, et d'autre part nous ont amené à bâtir cette articulation.

5.1 Pourquoi cette articulation ?

Plusieurs raisons nous ont conduit à considérer comme viable et didactiquement opportune cette articulation.

D'une part, nous constatons que la TSD est fortement opérationnelle pour construire et analyser des séquences d'enseignement. En particulier, elle a élaboré depuis une trentaine d'années des outils très efficaces d'analyse et de modélisation des interactions Elève-Situation.

D'autre part, nous observons que la TMS a une valence théorique générale et une longue pratique d'utilisation dans l'enseignement des mathématiques en Italie. Elle est très développée en ce qui concerne la mise en place et l'analyse du PMS et, au sein de ce processus, des discussions collectives orchestrées par l'enseignant.

Cependant, la TMS nous donne relativement peu d'outils pour la prise en compte des interactions Elève-Situation. D'une manière générale, les domaines d'opérationnalité de ces deux cadres théoriques ne sont pas les mêmes.

Construire une articulation entre ces deux cadres théoriques a également été motivé par la spécificité suivante : le type de savoir que nous envisageons enseigner et, plus particulièrement, le statut de son insertion et son fonctionnement dans le paysage mathématique déjà construit ou en cours de construction chez les élèves.

Nous envisageons la construction du signifié[2] de « fonction » dans son sens général : il n'est pas question de le réduire aux « fonctions numériques ».

Pour les fonctions, un grand nombre de représentations existent au lycée. De plus, elle présente des enjeux d'apprentissage importants (« variable », « graphe », etc.) ainsi qu'une dimension historique forte.

Ainsi, si l'on s'interroge sur le statut de la notion de fonction, on s'aperçoit que cette notion s'avère centrale transversale. et revêt différents registres de représentation. A juste titre, étiquetée par Robert et Robinet (Robert, 1998 ; Robert et Robinet, 1996) comme « généralisatrice, unificatrice et porteuse d'un nouveau formalisme ».

Ce n'est pas un hasard si les analyses épistémologiques conduites autour de cette notion (à l'image d'autres notions de ce type) montrent que son passage dans la genèse historique,

---

[2] Pour simplifier le discours nous utilisons ici le mot « signifié » au singulier mais, en réalité, pour nous, il s'agit toujours de la construction d'une pluralité de signifiés différents inter-reliés.

pour utiliser une expression de Dorier (Dorier et al, 1997) « a été très lent, sinueux et compliqué ».

Ainsi, il nous semble qu'il n'existe pas une suite de situations fondamentales qui, seule, peut faire émerger cette notion, dans toute sa complexité, dans un temps raisonnable et de façon opérationnelle, en tant que connaissance nécessaire à la résolution d'un problème.

En revanche, à l'intérieur de cette notion, on trouve des éléments susceptibles de bien jouer le rôle de « concepts en acte » (Vergnaud, 1991) dans la solution d'une situation-problème.

Le processus de médiation sémiotique peut justement soutenir le passage du niveau « outil implicite de solution » (Douady, 1986) au niveau « objet explicite » par la mise en place, en particulier, de discussions collectives orchestrées par l'enseignant, avec un contrat didactique spécifique.

Les raisons que nous venons d'évoquer brièvement expliquent pourquoi nous avons supposé possible et didactiquement pertinent l'articulation entre ces deux cadres théoriques.

Nous voulons cependant souligner que la place de ces deux cadres théoriques n'est pas « symétrique » : la TMS a guidé globalement la mise en place et l'analyse du PMS. La TSD est intervenue donc, de manière « orthogonale » à la TMS, à deux niveaux :

- d'une part, lors de la conception de la séquence, en permettant une analyse *a priori* de certaines tâches et de l'artefact en tant que composant du milieu ;
- d'autre part, lors de l'analyse *a posteriori,* en fournissant des outils d'analyse et de modélisation de ce même PMS, complémentaires aux outils fournis par la TMS.

5.2 Questionnement

A partir de notre hypothèse de travail, nous avons questionné l'articulation TMS/TSD tout au long de notre recherche. En fait, chaque cadre théorique nous semble pouvoir fournir un regard complémentaire par rapport à l'étude du PMS.

Nous aurions pu aborder la présentation de notre thèse par d'autres perspectives, cependant nous avons choisi de l'introduire par un questionnement concernant plus spécialement cette articulation.

Nous nous sommes posé alors les questions de recherche suivantes :

Q1 : Quelle articulation possible ?

Grâce à cette articulation…

Q2 :... quels apports pour l'étude du fonctionnement prévu/effectif d'un artefact impliqué dans le PMS ?

Q3 :... quels apports pour la modélisation de l'enseignant lors de l'orchestration des discussions collectives conçues en fonction du PMS ?

Q4 :... quels apports pour la modélisation plus en général de ce PMS ? Quels mécanismes liés au PMS permet-elle d'identifier ?

La présentation (brève) de la séquence expérimentale et du rôle attendu/effectif joué par l'artefact permettront d'apporter des éléments de réponse respectivement à la première et à la deuxième question.

Certains éléments de notre analyse de l'action de l'enseignant permettront de répondre à notre troisième question.

En ce qui concerne notre dernière question, plus générale, nous aborderons très brièvement notre analyse des signes. En fait, cette analyse, reprenant aussi des éléments de la sémiotique peircienne, a permis d'intégrer l'articulation TMS/TSD pour apporter des réponses à la quatrième question.

5.3 La séquence expérimentale

Afin d'étudier le PMS nous avons élaboré une ingénierie didactique.

Elle a conduit à la conception et à la réalisation effective d'une séquence expérimentale.

Nous n'aborderons dans ce texte que très brièvement la construction de cette séquence expérimentale. Cependant, lors de notre travail de thèse, nous avons dégagé un certain nombre de critères de constructibilité basés en particulier sur l'articulation TMS/TSD. Cela nous permet d'affirmer que la séquence actualise, voire, implémente ces critères et, par conséquent, constitue en elle-même un théorème d'existence « constructif » de l'articulation possible entre TSD et TMS.

Cela permet aussi, et nous le verrons par la suite, d'apporter des éléments de réponse à notre première question (Q1).

Notre analyse des racines historico-épistémologiques et cognitives des notions de « variable », « fonction » et « graphe de fonction », ainsi que des difficultés et obstacles liés à cet apprentissage, ont conduit à l'identification de deux autres hypothèses de travail fondamentales.

La première affirme qu'**il est nécessaire de fonder l'apprentissage de la notion de « fonction », telle qu'elle l'a été historiquement, sur le signifié de co-variation, c'est-à-dire sur le signifié de « fonction » comme de relation particulière, asymétrique, entre deux variations corrélées, une dépendante de l'autre (deuxième hypothèse de travail).**

En corollaire à notre première hypothèse de travail, nous postulons que **ce signifié co-variationnel de « fonction » est aussi fondamental pour la construction du signifié de « graphe de fonction » car il permet d'accéder à une *interprétation dynamique du « graphe de fonction »* (corollaire de la deuxième hypothèse de travail).**

Pour *interpréter le « graphe » en termes dynamiques* et co-variationnels, comme l'explique Laborde (Laborde, 1999), il faut avoir à l'esprit la dissymétrie des variables et pouvoir considérer la courbe représentative (Figure n°2) comme la trajectoire d'un point **M** qui bouge, représentant la variable dépendante, en fonction de la variation d'un autre point **P** variable sur l'axe des abscisses, qui représente la variable indépendante. Cette interprétation complexe requiert la réintroduction du temps et la prise en compte de deux variations inter-reliées.

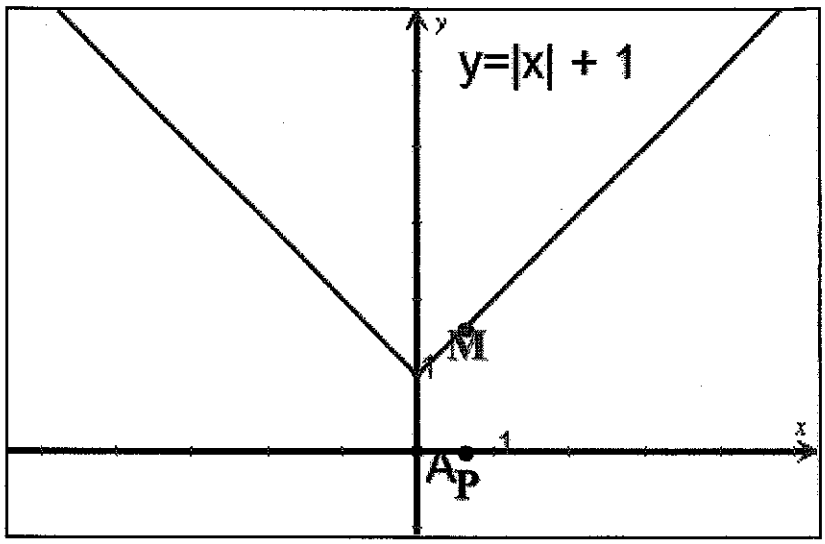


Figure n°2

Malheureusement, cette interprétation reste souvent négligée dans les textes scolaires. Elle ne peut pas être expérimentée concrètement et demeure comme une sorte d'expérience mentale, peu souvent socialement partagée.

Parallèlement, il faut aussi observer que, dans l'institution scolaire, en opposition avec notre première hypothèse, cet aspect de « fonction » comme co-variation est souvent négligé au profit d'une approche quantitative, presque exclusivement numérique ou algébrique.

Nous considérons que le signifié co-variationnel des « fonctions », réinvesti dans la notion de graphe, permettrait de fonder l'apprentissage du graphe sur le rôle dissymétrique des variables et de réintroduire une sorte de lien temporel entre les variation des variables indépendante et dépendante.

Pour cette raison, nous avons proposé une approche alternative et nous avons conçu une séquence expérimentale d'un certain point de vue, radicalement différente de ce que présentent les curricula français et italiens.

En particulier, nous avons bâti la construction des signifiés de « fonction » et de « graphe de fonction » à partir des fonctions géométriques, dans un environnement de géométrie dynamique (EGD), tel que Cabri-géomètre. Ce choix correspond à notre deuxième hypothèse de travail.

En offrant une modélisation des objets géométriques à l'écran en tant qu'objets variables, cette approche nous semble pouvoir soutenir une appréhension dynamique et co-variationnelle des notions visées. Ainsi, par exemple, des points qui bougent librement peuvent effectivement fonctionner comme des signes des « variables indépendantes », alors qu'un point ne bougeant que de façon indirecte (en déplaçant les points dont il dépend), peut fonctionner comme un signe de la « variable dépendante ».

5.4 Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental a été modifié, de façon interactive, au fur et à mesure des ses réalisations. Cela nous a permis d'aboutir à une dernière séquence en Italie de 22 séances environ. Nous allons relater cette séquence dans le présent article.

La classe étudiée est une classe de niveau scolaire analogue à une classe de seconde où les (treize) élèves avaient déjà une certaine familiarité avec Cabri et avaient déjà participé à d'autres expérimentations se situant dans le paradigme de la TMS. L'enseignante italienne, qui a accepté de réaliser cette séquence, collabore depuis dix ans avec Mariotti et est une enseignante expérimentée dans la gestion des discussions collectives, toujours selon le paradigme de la TMS.

Ces conditions ont garanti la présence d'un contrat didactique bien établi et, étant donné le nombre réduit d'élèves, une implication fortement facilitée dans les discussions collectives.

Lors de la dernière expérimentation, nous avons demandé aux élèves de prendre part à une organisation des activités « cyclique » synthétisable de la manière suivante (Figure n°3) :

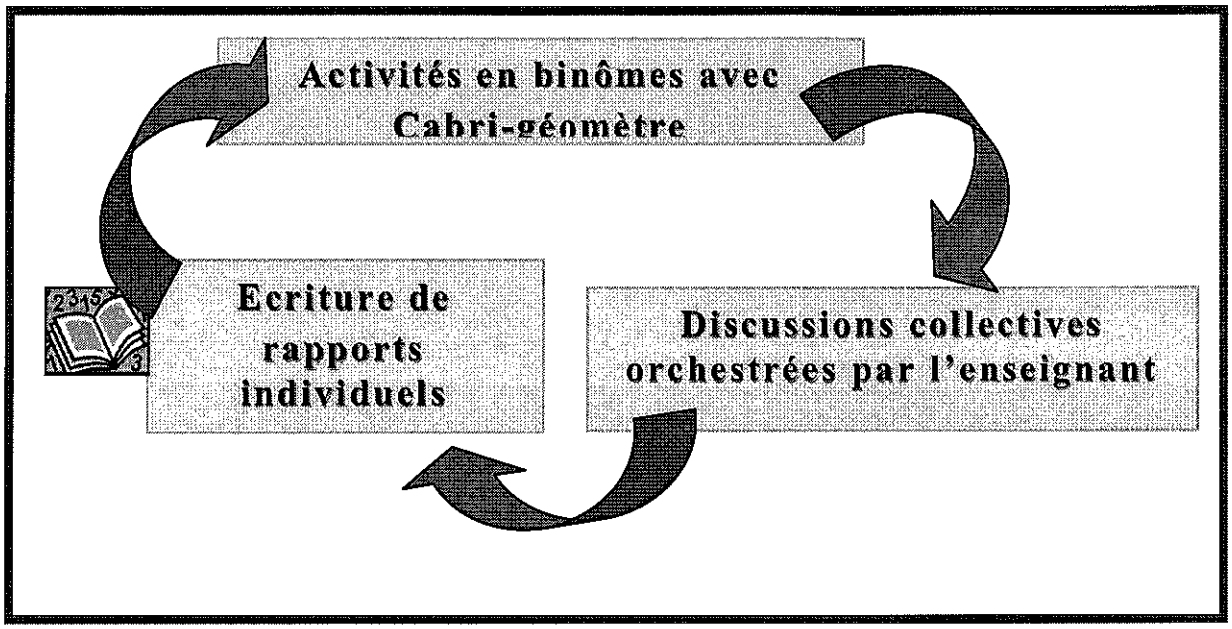


Figure n°3

En particulier, à chaque séance, après avoir travaillé en binômes dans Cabri, et avoir rempli une fiche de travail concernant l'activité avec Cabri, les élèves ont pris part à une discussion collective, puis ont rédigé à la maison un rapport individuel.

Les élèves avaient pour consigne d'écrire et justifier ce qu'ils avaient vécu et compris, ainsi que leurs doutes et questions.

Selon les termes du contrat didactique, tout ce qui était écrit devait être ponctuellement justifié et devenait l'objet des discussions ultérieures.

Nous voulons souligner la complexité et la dimension temporelle importante de cette dernière séquence. Toutes ces conditions expérimentales finalement très particulières, permettent de garantir, d'une part, la mise en place d'un processus (le PMS) qui nécessite du long terme et, d'autre part, une analyse fiable même du bref segment expérimental présenté de manière plus approfondie lors de notre thèse.

5.5 Organisation générale de la séquence

La séquence était organisée en trois parties :

I. La première partie portait sur la construction de la notion et de la définition de « fonction », à partir des « fonctions géométriques » (mais non limitée à celles-ci) et de l'idée de trajectoire dans Cabri. En effet, puisque dans Cabri le domaine et l'ensemble image d'une « fonction » (géométrique) sont représentés en tant que

trajectoires de points corrélés qui bougent, cette notion de trajectoire, qui est à la fois « une succession de positions d'un point qui bouge dans le temps » et « un objet en soi », peut conduire à la construction d'un signifié de fonction, qui incorpore une relation asymétrique de co-variation entre, à la fois, des points qui bougent et des ensembles corrélés.

II. La deuxième partie portait sur la lecture, l'interprétation et l'implémentation dans Cabri d'un extrait du texte **"Introductio in analysin Infinitorum, Tomus secundus"** d'Euler.

Dans ce texte, ce mathématicien introduit l'idée de graphe comme moyen permettant de représenter « géométriquement » (en termes modernes nous pourrions dire « par une fonction géométrique ») une fonction numérique donnée.

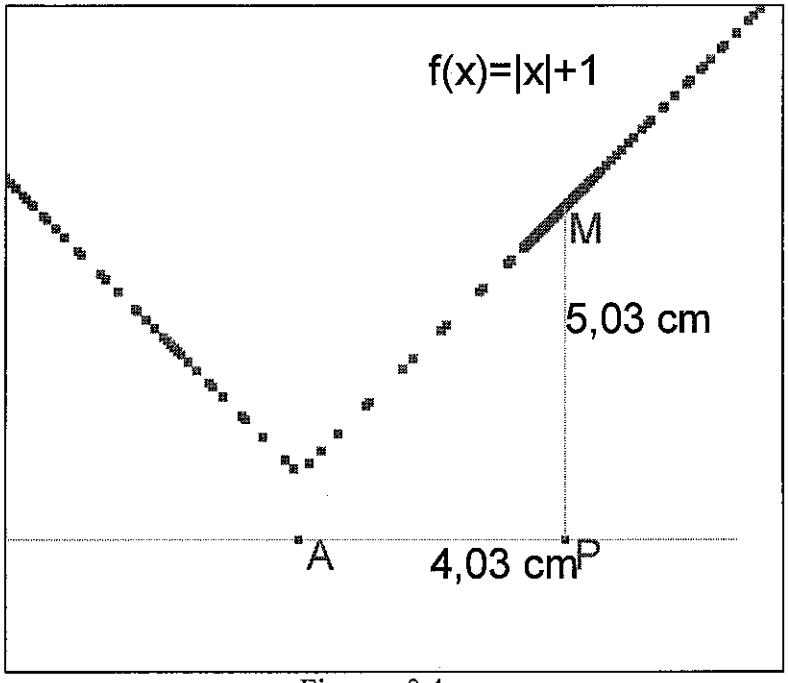


Figure n° 4

Plus précisément (Figure n°4), dans Cabri, étant donné un seul axe horizontale et un point fixé sur cet axe, l'origine, **A**, le graphe d'une fonction numérique **f**, selon Euler, peut être construit comme trajectoire d'un point **M** qui est l'extrémité d'un segment de longueur **f(x)** et dont l'autre extrémité est un point variable **P** de l'axe des abscisses qui est à la distance **x** de l'origine.

III. En fin, la troisième partie de la séquence expérimentale concernait la résolution de problèmes d'interprétation du graphe et de modélisation à l'aide de graphes de fonction.

5.6 L'articulation TMS/TDS dans la séquence expérimentale

L'articulation TMS/TSD a conduit à l'organisation d'un processus d'enseignement-apprentissage, modélisé à la fois comme processus d'adaptation à un milieu didactique organisé, porteur de déséquilibres et comme processus de construction de signifiés.

Cette double approche a trouvé son instanciation tant au niveau microscopique, dans la conception des tâches diverses, au sein de chaque séance, qu'au niveau macroscopique, dans l'organisation et l'enchaînement global des séances diverses au sein de la séquence expérimentale.

En particulier, du point de vue de la TSD, les notions de « milieu » et de « variable didactique » nous ont servi pour concevoir des tâches, comportant, souvent, des moments adidactiques, à partir desquelles le travail de semiosis (c'est-à-dire de production, partage et réélaboration conséquente de certains signes) orchestré par l'enseignante, surtout lors des moments de discussions collectives, a été possible.

Nous présenterons deux exemples de cette articulation.

Le premier exemple nous permettra de montrer comment l'articulation TMS/TSD a fonctionné au niveau microscopique, c'est-à-dire, dans la conception d'une tâche au sein d'une séance.

Le deuxième exemple, quant à lui, permettra d'illustrer comment cette articulation au niveau macroscopique a joué, c'est-à-dire dans l'organisation globale de la séquence.

5.6.1 Exemple d'articulation au niveau microscopique : séance 1, question 5

Ce premier exemple est tiré de la première séance et porte sur la cinquième question posée aux élèves.

Lors de cette première séance les élèves doivent explorer puis reconstruire une macro-construction inconnue, déjà préenregistrée sur leur écran, appelée « Effet1 ».

Cette macro implémente dans Cabri une « fonction » f qui à un triplet de points **(A, B, P)** du plan, associe un point $\mathbf{H}=f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P})$ du plan qui est la projection orthogonale de **P** sur la droite **(A, B)**.

La situation créée met donc en jeu quatre points variables, les trois points **A, B** et **P** indépendants et le point **H** dépendant des trois autres.

Le choix de faire varier les points **A, B** et **P** dans tout le plan est dû à notre souci de faire apparaître par contraste, la trajectoire de **H** comme contrainte. Les traces des déplacements

de **A, B** et **P** sont quelconques dans tout le plan, erratiques, alors que celle de **H** se détache comme une forme bien déterminée, cercle ou ligne droite.

Ce choix permet d'amplifier du point de vue visuel le comportement dissymétrique des points « variables indépendantes », « versus » point « variable dépendante ».

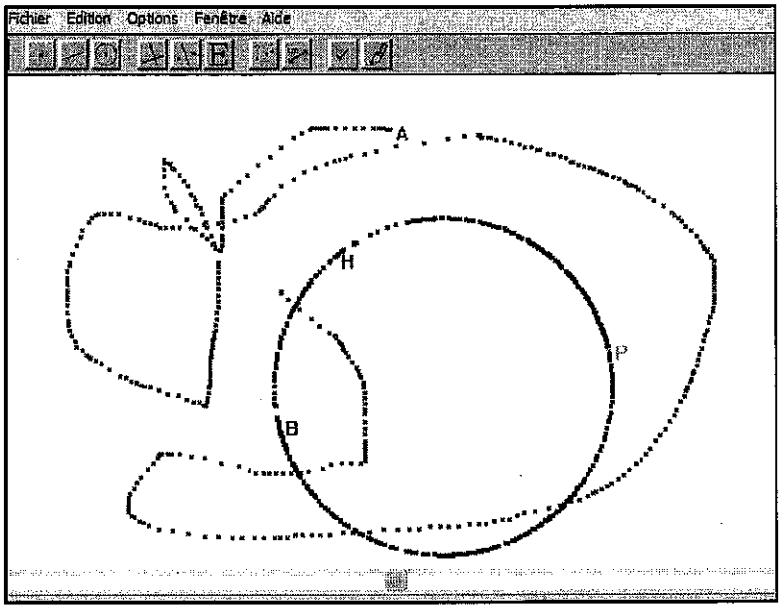


Figure n°5

Ainsi, par exemple, les élèves peuvent observer que (Figure n°5) s'ils déplacent le point **A** partout dans le plan, le point **H** bouge aussi et se déplace sur un cercle. En revanche s'ils cherchent à déplacer le point **H** directement, en le prenant avec la souris, ce point ne bouge pas.

Lors de la résolution des quatre premières questions, les élèves ont déjà exploré le comportement dissymétrique de différents points. Ils ont déjà étudié et décrit, en termes géométriques, les trajectoires suivies par ces points et ils ont aussi reconstruit par eux-mêmes (c'est-à-dire sans utiliser la macro « Effet1 ») une des constructions géométriques sous- jacente à la macro « Effet1 » donnée.

A la suite de ces activités la question cinq est la suivante :

*« Comment déplacer **P** pour que le point **H** ne bouge pas ? Utilisez l'outil Trace pour vous aider et décrivez ci-dessous ce que vous avez fait et obtenu. »*

La TSD est intervenue dans la conception de cette question et a permis deux apports fondamentaux.

Tout d'abord, elle a guidé la conception de cette question grâce à la notion didactique de « variable didactique ».

En fait, cette question fait jouer la variable didactique « nature de la fonction à une variable mobilisée », en proposant aux élèves la « fonction » qui à **P** associe **H** et qui est non

« injective ». Nous n'avons pas ici la place d'étudier les autres questions posées, mais il faut savoir que les élèves y ont travaillé avec des « fonctions à une variable injectives ». La question posée, donc, par l'opposition à d'autres questions mobilisant des « fonctions injectives », permet d'aborder le signifié de « fonction constante ».

Même si cette question à été construite à partir d'un outil issu de la TSD, c'est-à-dire la notion de « variable didactique », elle ne problématise pas vraiment le fait qu'il existe des positions de **P** pour lesquelles **H** ne bouge pas : sa formulation semble suggérer, déjà, un tel constat.

Ce qui est problématique pour les élèves est l'identification des moyens par lesquels obtenir le fait que **H** reste effectivement immobile. En outre, pour passer d'une pure conjecture sur la trajectoire de **P** à suivre (Figure n°6, à gauche), à une certitude expérimentale, il est nécessaire de chercher une validation par Cabri. Il faut concevoir la trajectoire de **P** comme une droite perpendiculaire à la droite (**AB**), la construire (donc mobiliser des connaissances géométriques opportunes) ; éventuellement activer l'outil de Cabri « Redéfinition d'un

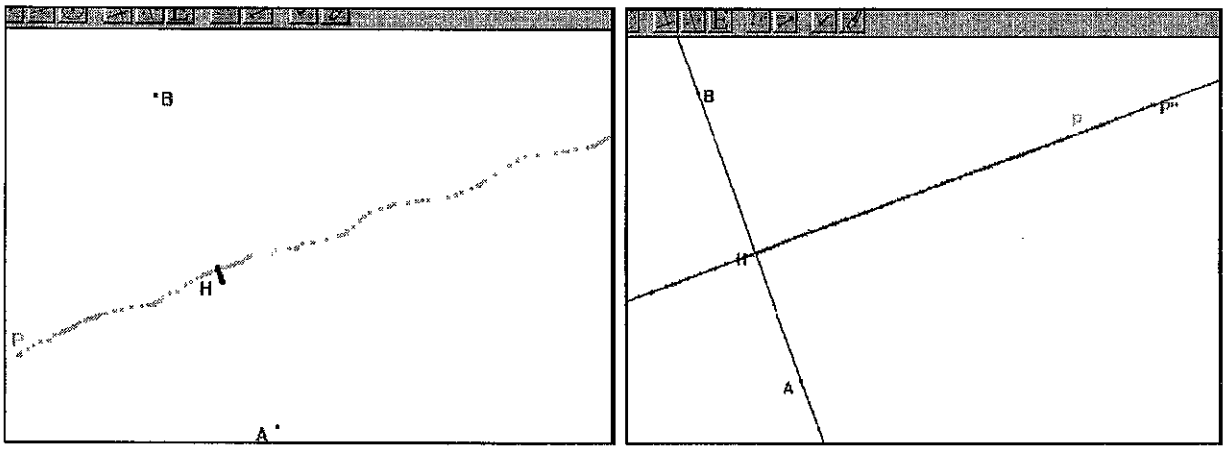


Figure n°6

objet » pour redéfinir **P** comme appartenant à cette droite et, par le déplacement de **P** sur cette droite (c'est-à-dire par une rétroaction opportune de Cabri), vérifier que **H** ne bouge effectivement pas (Figure n°6, à droite).

Cette tâche permet donc l'entrée dans un milieu adidactique organisé au sens de la TSD. Là, en guidant l'organisation d'un milieu adidactique susceptible de mobiliser la construction de certaines connaissances, nous situons le deuxième apport fondamental de la TSD à la construction de cette tâche.

Cependant, et là nous pouvons voir l'articulation TMS/TSD, les connaissances géométriques, outil de résolution de ce problème (TSD), ne sont pas en cause en tant que

connaissances visées ; ces connaissances sont en fait supposées être déjà présentes chez des élèves de Seconde.

En revanche, l'objectif principal de cette activité réside dans la possibilité, lors de la discussion collective consécutive, de travailler sur :

- la co-variation entre les points « variables indépendantes » et le point « variable dépendante »
- le double statut de la « trajectoire »,
- la co-variation entre le « domaine » et « l'image »,
- les signifies de « domaine » et « restriction du domaine »,
- les signifiés « d'image » (ponctuelle/globale)
- le signifié de « fonction constante ».

Ainsi, la raison didactique de cette tâche réside dans la TMS, où des connaissances construites en interaction avec l'artefact serviront comme éléments sur lesquels articuler un travail spécifique sur les signes et les signifiés visés, lors de la discussion collective consécutive.

5.6.2 Exemple d'articulation au niveau macroscopique : la séance 5

Voici les questions posées lors de la séance cinq :

*1a) Comment représenteriez-vous **par une formule** la fonction numérique **g** qui à chaque nombre réel **x** associe son carré augmenté de 5 ?*

*1b) En utilisant la "Calculatrice" de Cabri, complétez le "Tableau des valeurs" de la fonction **g** suivant :*

x	*g(x)*
-2	
-1,3	
0	
1,78	
2,651	
3	

*En général, un tableau de valeurs ne permet pas de représenter complètement une fonction numérique, c'est-à-dire de représenter **toutes** les valeurs de x réel et de son image.*

Nous voulons trouver une méthode pour représenter géométriquement dans Cabri la variation de l'image d'un nombre x quand x varie.

2a) D'abord, comment pouvez-vous représenter géométriquement dans Cabri ***un nombre réel x qui varie de -2 à 3*** *? Décrivez ci-dessous en détail ce que vous avez fait en Cabri.*
2b) En suite, comment pouvez-vous représenter géométriquement dans Cabri ***la variation d'un nombre réel x qui varie de -2 à 3 et, en même temps, la variation de son image*** *par la fonction g? Illustrez et décrivez en détail ci-dessous la méthode que vous avez inventée.*

La séance cinq n'était pas prévue dans nos premières réalisations de la séquence expérimentale en France et en Italie en 2001. Les élèves, après avoir rencontré les fonctions numériques, étaient alors d'emblée confrontés à la tâche d'interpréter le texte d'Euler à l'aide de Cabri. Rappelons que ce texte est censé fonctionner comme médiateur sémiotique pour la construction du signifié de « graphe de fonction », puisqu'il propose et décrit une méthode pour représenter une fonction numérique par l'intermédiaire d'une fonction géométrique. Rappelons aussi que, dans les implémentations habituelles du paradigme théorique de la TMS, l'arrivée d'un outil de médiation sémiotique n'est pas systématiquement problématisée.

En revanche, lors de la dernière réalisation de la séquence expérimentale, nous avons décidé d'insérer aussi cette nouvelle séance. Comme on peut le lire, elle demande de représenter une fonction numérique donnée par une expression algébrique et par une table de valeurs. Ensuite, elle demande aux élèves de trouver eux-mêmes une méthode susceptible de représenter dynamiquement, par une fonction géométrique adéquate, la variation conjointe des deux variables numériques, l'une dépendant de l'autre, associées à la fonction donnée.

Ce choix, dû spécifiquement à l'interaction entre TdS et TMS, a eu justement pour objectif, d'abord, de focaliser l'attention des élèves sur l'existence de plusieurs représentations sémiotiques d'une fonction numérique et, ensuite, de problématiser l'arrivée du texte d'Euler, qui, au problème de « comment représenter dynamiquement et géométriquement une fonction numérique », propose une solution efficace. L'introduction de cette séance est issue directement de l'hypothèse élaborée par Brousseau (Brousseau, 1996), concernant la nécessité de dévoluer aux élèves la responsabilité face aux connaissances à construire. En fait, le travail préalable sur la recherche d'une méthode de représentation géométrique et dynamique d'une fonction numérique dans Cabri (séance cinq), doit permettre aux élèves de s'emparer puis de prendre en charge la question à laquelle le texte d'Euler, introduit lors de la séance consécutive, répond. Le travail demandé par cette séance correspond donc partiellement à l'élaboration de ce que Brousseau appelle

« la stratégie de base », tandis que la méthode d'Euler serait une des « stratégies optimales ».

Observons en outre que la réponse à la question 2a) est correcte si la représentation fournie permet de voir tout nombre réel x qui varie dans son domaine. En revanche, la deuxième représentation requise est correcte (réponse à la question 2b) si elle permet de visualiser la variation de tous les nombres du domaine et en même temps la variation des images correspondantes. Ainsi, dans cette deuxième question, la co-variation joue le rôle de critère pour valider ou invalider les méthodes proposées.

5.7 Articulation TMS/TSD et rôle de l'artefact (Q2)

Venons maintenant brièvement aux apports de l'articulation TMS/TSD pour l'étude du rôle de l'artefact, impliqué dans le PMS (question de recherche n°2).

En fait, cette articulation relève de manière particulière du rôle attribué à Cabri-géomètre.

Comme nous l'avons aperçu lors de l'exemple précédent, mais cela est vrai pour la séquence entière, cet artefact a été impliqué selon une double perspective:

- en tant que composante fondamentale du milieu organisé ;
- et en tant qu'instrument de médiation sémiotique.

Par exemple d'une part, Cabri permet soit de valider la résolution de la tâche soit de répéter les essais.

Cette première perspective permet donc de prendre en compte les connaissances outils de solution de problèmes, mobilisées par les tâches posées, susceptibles d'être construites par les élèves.

D'autre part, toujours dans l'exemple précédent, la tâche cinq permettait de mobiliser les outils de Cabri ***Déplacement*** (***direct*** et ***indirect***) + ***Trace,*** auxquels nous avons relié, dans notre analyse épistémologique de l'artefact, la possibilité de construire les signifiés de « trajectoire », de « co-variation point variable indépendante-point variable dépendante » et de « co-variation domaine-image ».

Cette deuxième perspective permet donc l'identification et l'exploitation du potentiel sémiotique des outils disponibles.

Il s'agit donc de deux perspectives complémentaires non exclusives :

- l'une, permettant d'organiser des rétroactions opportunes de Cabri, au sein de chaque séance, et par conséquent de mieux saisir le rôle et l'effet potentiel de l'artefact dans la résolution de certains problèmes,

- l'autre de mieux guider l'orchestration des discussions collectives vers l'actualisation de ce potentiel.

5.8 Articulation TMS/TSD dans la modélisation du rôle de l'enseignant lors de l'orchestration des discussions collectives (Q3)

Par rapport à notre troisième question de recherche, celle concernant l'analyse de l'action de l'enseignant, nous avons élaboré une méthodologie d'analyse spécifique.

Cette analyse intègre plusieurs outils (outils qui ont conduit à la constitution de deux grandes familles de catégories d'actions) et se développe à deux niveaux.

Les outils intégrés dérivent de :

- la TSD (Brousseau, 1996) (« milieu », « contrat ») ;
- les recherches de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni sur l'activité professorale (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000) ;
- les recherches de Comiti, Grenier et Margolinas sur les phénomènes de « résonance » (Comiti et Grenier, 1993, 1997 ; Comiti, Grenier et Margolinas, 1995) ;
- les recherches de Bartolini-Bussi et Mariotti sur l'orchestration des « discussions mathématiques » (Bartolini Bussi, 1998 ; Bartolini Bussi et Mariotti, 2006)

Des travaux précédents, nous avons extrait deux grandes familles de catégories d'analyse.

La première famille porte particulièrement sur la TSD et relève, en général, de la modélisation de l'action professorale. En fait elle s'appuie fortement (en les réinterprétant) sur des éléments des recherche de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000).

Par rapport à cette famille, nous avons cherché à identifier différentes actions :

- des actions *à dominante mésogénétique*, c'est-à-dire des actions qui concernent plus particulièrement la fabrication et l'agencement du milieu (autrement dit la production des objets des milieux et l'organisation des rapports à ces objets) ;
- des actions *à dominante topogénétique*, c'est-à-dire des actions qui portent plus particulièrement sur la production et la gestion des positions occupées par les différents acteurs de la relation didactique ;
- des actions *à dominante chronogénétique*, c'est-à-dire des actions qui concernent plus particulièrement la gestion de l'avancée du temps didactique.

La deuxième grande famille, issue de la TMS, relève plus spécifiquement de la modélisation de l'action professorale lors des « discussions mathématiques » (Bartolini Bussi, 1998 ; Bartolini Bussi et Mariotti, 2006).

Par rapport à cette deuxième famille, nous avons cherché à identifier :

- les actions de type langagier (« reflet », « paraphrase », ...) car, rappelons-le, la TMS accorde une place centrale aux signes langagiers ;
- la dialectique signifiés personnels / signifiés socialement partagés (rappelons que cette dialectique intervient dans le « processus d'internalisation ») ;
- les mouvements de généralisation/ spécification : ces mouvements caractérisent souvent les allers-retours entre le monde de l'artefact et le monde des mathématiques.

Ces deux grandes familles d'analyses parfois se recoupent, parfois se chevauchent, parfois sont complémentaires dans leur apport à la modélisation de l'enseignant et du PMS.

Comme annoncé, notre méthodologie s'est aussi développée selon deux niveaux d'analyse :

- un niveau *à dominante descriptive*, en restant les plus proches possibles de la sémantique de l'action ;
- un niveau *à dominante interprétative*, utilisant des catégories plus proprement didactiques pour chercher à interpréter ce qui se passe.

Nous parlons toujours de caractère « dominante » car, dans le deux cas, il s'agit toujours d'interpréter les évènements. Cependant, dans le deuxième niveau, le degré d'interprétation didactique est plus important : il est majeur.

5.8.1 Exemple d'analyse d'un extrait de la première discussion collective

Nous présentons maintenant un petit extrait issu de la première discussion collective. En amorçant brièvement le type d'analyse conduite, nous chercherons à montrer comment nous avons fait fonctionner les catégories d'actions évoquées précédemment et quels sont les résultats que nous avons pu en obtenir.

Cet extrait relève de la séance dont nous avons présenté la question cinq et se situe après une trentaine de minutes de discussion collective.

Pendant ces trente premières minutes, les élèves ont déjà revisité collectivement les trois premières questions et, par cela, ils ont déjà étudié ensemble le comportement dissymétrique des différents points à l'écran, **A**, **B**, **P**, et **H**. Ils ont déjà caractérisé

géométriquement la trajectoire de ces points et ils ont reconstruit collectivement les constructions géométriques différentes sous-jacentes à la macro « Effet1 ».
Lors de ces reconstructions, ils se sont aperçus que, pour construire **H**, sans utiliser la macro « Effet1 », il est nécessaire de considérer, dès le départ, les trois points **A**, **B** et **P** simultanément à l'écran. Pour cette raison, Marco intervient et dit :

130. MARCO : H est en fonction des trois points !
131. P : H est en fonction des trois points... Oh ! Quelle phrase magique !... H est en fonction des trois points... Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P. Et alors qu'est cette chose qui faisait apparaître le point H, pour nous ?
132. MARCO : Deux cercles et une droite.
133. P : Si je la fais. Et sinon, au début, juste au début ?
134. IGOR : La Macro.
135. P : La Macro. Donc nous avons un correspondant de la fonction dans Cabri qui sont les Macros. Toutes celles-ci sont des Macros, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux le voir comme une fonction?
136. Plusieurs voix : Oui
137. P : Car, qu'est-ce qu'il prend ?
138. FILIPPO : Il prend les deux extrémités du segment
139.P : Et il me donne ?
140.FILIPPO : Et il trouve le troisième point qui est le centre du segment, c'est-à-dire qu'il est équidistant des sommets du segment.
141. P : Et il me donne le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si je vais voir... en somme dans Cabri, nous avons les Macro et nous disons que celle-là peut être une idée de notre fonction... Et quand en revanche c'est nous qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?
142. FILIPPO : C'est la construction.
143. P : C'est la construction.

Au niveau *à dominante descriptive*, nous avons considéré la première partie de l'intervention de l'enseignante (131) « *H est en fonction des trois points... Oh ! Quelle*

phrase magique !... H est en fonction des trois points... » comme une action de *reflet.* En fait, elle répète l'intervention de Marco.

De même, toujours au niveau descriptif, un peu plus loin, nous avons interprété la deuxième partie de l'intervention de l'enseignante (131) «... *Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P* » comme une action de *paraphrase avec glissement de signifié.* En fait, l'enseignante reprend l'intervention de Marco et en modifie subtilement le sens : par l'introduction des expressions *« résultat d'une relation »* et *« les trois points initiaux »*, elle réinterprète l'expression *« être en fonction de »* et réoriente la correspondance entre objets initiaux et objet final [3].

En faisant ainsi, elle pivote sur cette expression *« être en fonction de »* pour la relier au signifié de fonction que nous avons appelé de *machine à input/output.*

Ces deux actions (le *reflet* et le *paraphrase*), issues de la TMS, sont donc des actions *à dominante mésogénétique* puisqu'elles contribuent à modifier le milieu commun en voie de construction.

En revanche, au niveau *à dominante interprétative*, nous avons considéré toute l'intervention de l'enseignante (131) comme une action de *résonance forte.* Pour la troisième fois, des élèves utilisaient l'expression *« être en fonction de »* (en particulier, juste au début de la discussion collective, Marco même l'avait déjà employée). Cependant l'enseignante reprend, avec emphase, l'intervention de l'élève et, en faisant levier, oriente la suite de la discussion collective vers l'établissement d'un lien interprétatif entre macro et fonction (141-143). Elle estime visiblement que le moment propice pour un tel établissement est bien arrivé.

Il faut souligner que cette action de *résonance forte*, issue, à la différence des actions précédentes, de la TSD, est une action *à dominante chronogénétique.*

Cet exemple montre alors comme ces deux familles de catégories d'analyse amènent des regards complémentaires par rapport à notre objectif de modéliser l'action professorale lors de la mise en place du PMS.

---

[3] Observons en fait que dans l'expression « ***H est en fonction de A,B,P*** » l'ordre est renversé : on cite, d'abord, **H** et, ensuite, **A**, **B**, **P**).

Il montre aussi le cas où les domaines d'application de ces deux catégories d'analyse, l'une issue de la TMS, l'autre de la TSD, se superposent partiellement, bien que le degré d'interprétation didactique pour la catégorie issue de la TSD est, cette fois-ci, majeur.

Cependant, nous avons pu aussi observer le cas où une famille de catégories d'analyse prend en compte des actions que l'autre ne considère pas (au moins en termes d'actions). C'est le cas, par exemple, de la catégorie des actions *à dominante topogénétiques*, issue de la TSD, dont nous avons pas pu trouver une catégorie d'actions homologue (ou au moins voisine) dans le TMS.

Toujours dans l'extrait présenté ci-dessus, observons, en fait, l'utilisation que l'enseignante fait des pronoms personnels.

Dans l'intervention (131) elle utilise le « nous » *(... Donc **nous** pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P. Et alors qu'est cette chose qui faisait apparaître le point H, pour **nous** ?).*

Dans l'intervention (133), elle parle à la première personne (*Si **je** la fais. Et sinon, au début, juste au début ?)*

Dans l'intervention (135) elle utilise d'abord le « nous » et puis le « je » *(135. P :... Donc **nous** avons un correspondant de la fonction dans Cabri qui sont les Macros. Toutes celles-ci sont des Macros, si **nous** voulons, toutes celles que **nous** avons dans le menu de construction, même faire le milieu **je** peux le voir comme une fonction?)*

Au contraire, dans (141) elle utilise d'abord le « je » et puis le « nous » *(141 : P : Et il **me** donne le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si **je** vais voir... en somme dans Cabri, **nous** avons les Macro et **nous** disons que celle-là peut être une idée de **notre** fonction... Et quand en revanche c'est **nous** qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?)*

Au niveau *à dominante interprétative*, en réélaborant des catégories d'analyse issues des travaux de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000), nous avons considéré les parties des interventions (131) (135) et (141) où l'enseignante utilise la première personne plurielle comme étant des actions de *réduction topogénétique*. En fait l'enseignante, par ces interventions, réduit la distance topogénétique entre sa propre position de prof et la position de ses élèves et parle au nom de toute la classe.

Nous avons vu que, dans l'intervention (133), à la fin de l'intervention (135) et au début de l'intervention (141), elle arrive même à annuler cette distance topogénétique par des actions de *fusion topogénétique*. Dans le « je » qu'elle emploie, toute la classe est implicitement

représentée. Par ces actions, peut-être de façon non totalement consciente, elle contraint alors les élèves à s'identifier avec son propre discours et les conduit vers l'établissement d'un lien interprétatif explicite entre macro et fonction (141-143).

Il est important de souligner que cette catégorie d'actions, que nous avons dérivé de la TSD et que nous n'avions pas dans la TMS (au moins dans cette forme), nous a servi pour modéliser un aspect crucial de la TMS, qui est la gestion de la part de l'enseignant de l'espace intersubjectif et de la dialectique entre signifiés personnels et signifiés socialement partagés en voie de construction.

5.8.2 Résultats issus de notre méthodologie

La méthodologie d'analyse des actions de l'enseignant, basée sur l'articulation TMS/TSD, que nous avons vue appliquée dans ce petit extrait, a permis de :

- repérer des actions topogénétiques susceptibles de modéliser la gestion délicate de l'enseignant entre plans inter-subjectif et intra-subjectif ;
- mettre en évidence des actions chronogénétiques permettant d'interpréter les intentions de l'enseignant dans sa gestion de l'avancée du temps didactique lors de la mise en place du PMS ;
- mettre en lumière des actions mésogénétiques génériques ayant un rôle dans le PMS ;
- d'identifier *ex novo* des actions mésogénétiques spécifiques du travail de sémiosis.

Cette méthodologie n'est pas seulement une méthodologie d'analyse. Elle s'est en fait révélée valide pour la modélisation de l'action professorale et du PMS. Elle constitue donc, en soi-même, un résultat de cette thèse.

Cependant, soulignons que son domaine de validité est dépendant de conditions expérimentales particulières et du type de contrat mis en place dans cette classe. On pourra alors dire que notre méthodologie a plutôt une valence théorique.

5.9 Articulation TMS/TSD dans la modélisation du processus de MS (Q4)

Nous n'avons pas la place ici pour détailler l'analyse issue de l'articulation TDS/TMS, menée lors de notre thèse. Nous en rappelons seulement les résultats principaux[4].

[4] Pour cela, nous renvoyons le lecteur intéressé à la lecture intégrale du manuscrit de notre thèse, déchargeable du site http://tel.archives-ouvertes.fr/.

A partir de cette analyse, nous avons pu interpréter la métaphore de la (re)définition d'un espace intersubjectif (TMS) en termes de processus de co-construction du milieu commun (TSD).

En outre, cette analyse a permis de faire ressortir le contrat didactique (TSD) spécifique au PMS (TMS) existante dans la classe. Elle a conduit à repérer un certain nombre de règles fondamentales et à mettre en évidence l'existence d'une certaine « symétrie » et circularité des rôles : les élèves manifestent une réelle coresponsabilité avec l'enseignante dans la co-construction du milieu commun. Cette condition s'est révélée constitutive du bon fonctionnement du PMS.

Ainsi, autrement dit, par un outil didactique issu de la TSD (la notion de « contrat didactique ») nous avons pu mieux modéliser les conditions favorables à la mise en place de ce PMS (TMS).

6. Quelques éléments d'analyse des signes

Articuler les deux cadres théoriques n'a pas été suffisant pour l'étude du PMS du point de vue de l'évolution des signes.

Pour cela, nous avons dû développer une méthodologie d'analyse spécifique en intégrant des éléments issus de la TMS avec des éléments de la sémiotique peircienne. Cette analyse a été ensuite traduite dans l'environnement Atlas.ti[5].

Notre travail a conduit à l'identification et à la caractérisation de typologies de signes différents. Ce texte les évoque seulement :

- signes simples (*signes-artefact*, c'est-à-dire signes issus du monde de l'artefact, *signes-mathématiques*, c'est-à-dire signes issus du monde des mathématiques, et *signes-pivot*, c'est-à-dire signes potentiellement polysémiques sur lesquels l'enseignant joue pour établir le lien entre le monde de l'artefact et le monde des mathématiques)
- signes complexes (*caractérisations*, *définitions*, *interprétations* et *instanciations*)

[5] Atlas.ti est un logiciel utilisé surtout dans les sciences humaines qui permet une analyse qualitative de textes, images, signaux graphiques, etc. Dans cet environnement il est possible de définir des codes et puis de les associer à des parties du texte à analyser. Cet logiciel permet aussi de regrouper ces codes en familles, de faire des recherches (« queris »), de mener des analyses croisées et de construire des réseaux sémiotiques.

A partir de cette classification, nous avons pu élaborer, à l'aide du logiciel Atlas.ti, des représentations possibles des réseaux sémiotiques des signes socialement partagés lors des discussions collectives.

Ces représentations différentes ont ensuite permis d'inférer les types de signifiés en voie de construction dans la classe.

Ainsi par exemple, nous avons pu construire une représentation du réseau sémiotique des signes associés à la variable dépendante (Figure n° 7).

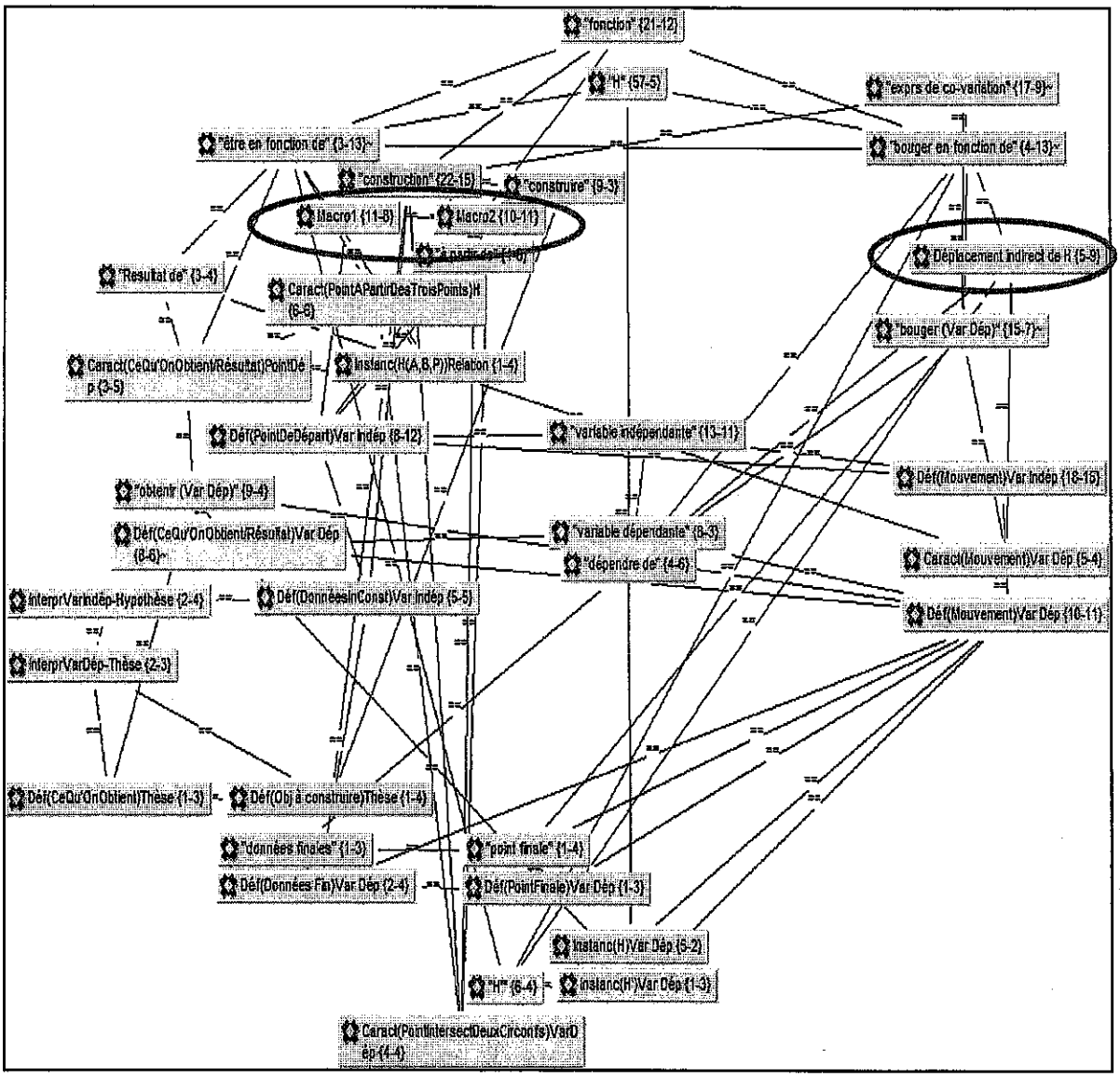


Figure n°7

Par cette représentation nous avons pu mettre en évidence un développement bi-axial, lié respectivement aux outils ***Macro*** et ***Déplacement indirect*** et, par cela, d'inférer l'existence et l'évolution de deux grandes familles de signifiés de variable dépendante. On peut en fait observer le développement du signifié de « variable dépendante » comme objet final d'un

processus déterminé d'Input/Output (Figure n°7, à gauche). De plus, (Figure n°7, à droite), on voit se développer le signifié de « variable dépendante » comme le point qui bouge indirectement en fonction des points dont il dépend, c'est-à-dire comme élément variable d'une relation « asymétrique » de co-variation.

7. Articulation TMS/TSD + analyse des signes : apports dans la modélisation du PMS (Q4)

L'intégration de notre analyse des signes avec notre analyse issue de l'articulation TMS/TSD a apporté ainsi d'autres éléments de réponse à notre quatrième question de recherche (Q4). Non seulement elle a permis d'inférer les signifiés socialement partagés en voie de construction dans la classe et de relier ces signifiés aux outils de l'artefact mobilisés, mais elle a aussi permis d'identifier et de caractériser certains mécanismes liés au PMS comme, par exemple, le processus que nous avons appelé *d'Icônisation.*

Sans détailler ultérieurement, ce processus, qui consiste en la transformation de *signes-artefact* particuliers de l'activité en *icônes*, au sens de Peirce, d'objets mathématiques, s'est révélé très important dans le processus plus général de médiation sémiotique.

En outre, notre analyse a permis aussi de repérer des liens entre la structure du discours et le processus de sémiosis[6] et de mettre en évidence des phénomènes que nous avons appelés de *mélange sémiotique*[7].

8. Conclusions et perspectives

Dans ce texte, nous avons voulu montrer (parfois simplement évoquer) quelques apports de l'articulation TMS/TSD.

Nous avons cherché à rappeler les résultats issus de notre thèse relativement à :

---

[6] Elle a, par exemple, montré que le développement du signifié de fonction comme « relation de co-variation » était associé à l'utilisation de gérondifs et phrases conditionnelles, tandis que le développement du signifié de fonction comme « machine à Input/Output » était fortement relié à un certain format du discours composé d'une affirmation portant sur les variables indépendantes et d'une question analogue subséquente sur la variable dépendante.

[7] En synthétisant, nous pouvons dire que ces phénomènes correspondent à un discours où des signes issus du monde de l'artefact se mélangent avec des signes issus du monde des mathématiques. Ces mélanges ont été considérés comme des indicateurs d'un apprentissage en cours et de la mise en place et de la complexification du réseau sémiotique disponible.

- à l'organisation du PMS (en montrant comment cette articulation a joué tant au niveau micro que au niveau macro)
- au fonctionnement de l'artefact impliqué dans un PMS ;
- à la modélisation de l'action professorale lors de l'orchestration d'une discussion collective ;
- aux mécanismes liés à la médiation sémiotique en général.

Bien évidemment ce travail ne s'arrête pas là. Il ouvre à de multiples perspectives.

Il serait intéressant, par exemple, de relire des travaux qui ont été faits, soit dans la TSD soit dans la TMS, à la lumière de cette articulation TMS/TSD.

On pourrait aussi renverser le rapport qui existe dans cette thèse entre les deux cadres théoriques et étudier l'apport d'une analyse en termes de TMS, dans une étude réalisée principalement dans le cadre de la TSD.

Il serait aussi très intéressant d'approfondir les points de tension entre TSD et TMS et de questionner les relations entre institutionnalisation et PMS et les relations entre une analyse en termes de TMS et une analyse en termes de « dialectique outil/objet ».

Plus généralement, il serait nécessaire ou, au moins très pertinent, de rechercher d'autres conditions permettant l'instauration du type de contrat didactique spécifique à ce PMS et d'étendre l'analyse des réseaux sémiotiques aux travaux écrits individuels des élèves pour étudier l'incidence spécifique dans ces réseaux nouveaux, des signes élaborés collectivement.

Enfin, à partir de cette double manière de concevoir l'intégration d'un artefact dans un processus d'enseignement-apprentissage, il serait intéressant d'étendre ce type d'étude :

- pour d'autres artefacts (en particulier de géométrie dynamique),
- pour d'autres signifiés mathématiques, fondés sur l'idée de variation, comme celui de tangente et de dérivée.

Bibliographie

Bartolini Bussi, M. G. : 1998, 'Verbal interaction in mathematics classroom : a Vygotskian analysis', in H. Steinbring et al. (éds.), *Language and communication in mathematics classroom*, NCTM, Reston, Virginia, pp. 65-84.

Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. : 1998, 'From drawing to construction : teacher's mediation within the Cabri environment', *Proceedings of the 22nd International*

Conference Psychology of Mathematics Education, Vol. I, pp. 180-95. Stellenbosh, South Africa.

Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. : 1999, 'Semiotic mediation : from history to mathematics classroom', *For the Learning of Mathematics*, vol. 19(2), pp. 27-35.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. : 2006, 'Semiotic mediation in the mathematics classroom'. In L. English & al. (Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, LEA.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. et Ferri, F. : 1995b, *Interazione sociale e conoscenza a scuola : la discussione matematica.* Rapport technique n°21. Centro Documentazione Educativa, Comune di Modena.

Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A. et Ferri, F. : (à paraître a), 'Semiotic mediation in the Primary School : Durer's glass', in Hoffmann H.; Lenhard J.; Seeger F. (éds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte)*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. et Ferri, F. (à paraître b), 'Construction problems in primary school : A case from the geometry of circle', in P. Boero (éd.), *Theorems in School : From history and epistemology to cognitive and educational issues*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Brousseau G. : 1998, *Théorie des situations didactiques*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Comiti, C. et Grenier, D. : 1993, 'L'observation, outil de recherche pour la modélisation de phénomènes didactiques, *Cahier n°3 du séminaire Recherche/Réflexion/Interaction, année 1993*, Publication de l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Grenoble, pp. 55-72d.

Comiti, C. et Grenier, D. : 1997, 'Régulations didactiques et changements de contrats'. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17.3, pp. 81-102, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Comiti, C., Grenier, D. et Margolinas, C. : 1995, 'Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situations de classes et modélisation de phénomènes didactiques' in ARSAC et al. (éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 92-113, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dorier, J. L. et al. : 1997, *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Douady, R. : 1986, 'Jeux de cadre et dialectique outil-objet', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7.2, pp. 5-31, La Pensée Sauvage, Grenoble

Falcade, R. : 2001, *L'environnement Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction*, Mémoire de DEA, UJF, Grenoble.

Falcade, R. : 2002, 'Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe de fonction', *Petit x*, Vol. 58, pp. 47-81.

Falcade, R. : 2006, 'Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction', Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble.

Falcade, R, Laborde, C. & Mariotti, M.A. : à paraître, 'Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation', *Educational Studies in Mathematics,* Kluwer, Dordrecht.

Laborde, C. :1999. 'Core geometrical knowledge for using the modelling power of Geometry with Cabri-geometry'. *Teaching Mathematics and its Applications, 18*(4), 166-171.

Mariotti, M. A. : 2000, Introduction to proof : the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* Vol. 44, (1&2) , pp. 25-53, Kluwer, Dordrecht.

Mariotti, M. A. : 2002, 'Influence of technologies advances on students' math learning', in L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (éds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erbaum Associates, pp. 695-723.

Mariotti, M. A. : 2003, 'Introduire les élèves à une théorie. La médiation du logiciel Cabri', *Actes du Séminaire national de didactique de mathématiques*, Vol. 1, pp. 173-186, Paris.

Mariotti, M.A, Laborde, C. & Falcade, R. : 2003, 'Function and Graph in a DGS environment, (In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*. Vol. 3 (pp. 237 – 244). University of Hawai'i, Honolulu, HI, USA: CRDG, College of Education.

Robert, A, : 1998, 'Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au licée et à l'université', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18.2, pp. 139-189, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert, A. et Robinet, J. : 1996, 'Prise en compte du "méta" in didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 16.2, pp. 145-175, La Pensée Sauvage, Grenoble,

Sensevy, G, Mercier, A. et Schubauer-Leoni, M.L. : 2000, 'Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20.3, pp. 263-304, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Vergnaud, G. : 1991, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique des mathématiques*, 10/2.3, Grenoble, La Pensée Sauvage Editeurs pp. 133-169.

Vygotsky, L. S. : 1931/1978, *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. : 1934/1997, *Pensée et langage*. 3e édition, La Dispute, Paris.