Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs

Mariam HASPEKIAN
IUFM de Créteil et DIDIREM

1. Introduction et Questionnement Initial

La recherche présentée ici correspond à notre travail de thèse, mené sous la direction de Michèle Artigue. Ce travail s'inscrit dans un contexte, a priori bouillonnant, où l'intégration du tableur et, plus généralement, les relations mathématiques/ informatique dans l'enseignement sont loin d'être stabilisées et restent une question vive. Il y a en effet actuellement une volonté institutionnelle d'intégrer les TIC[1] dans les pratiques éducatives en France. Cette volonté se traduit, en mathématiques, par l'incitation forte à utiliser Internet et divers logiciels : géométrie dynamique, calcul symbolique, tableur... Ce dernier pose des questions didactiques auxquelles on a peu de réponses. Face à ces questions, le travail réalisé s'est construit le long d'une histoire dont nous donnons ici un aperçu global.

A l'origine de la recherche, il y a un double constat « paradoxal »:

- le tableur est officiellement présent, dans les programmes de mathématiques, dès 1998 en collège, puis s'est étendu au lycée (notamment en 1eL où il peut même faire l'objet d'évaluations au baccalauréat),
- il est aussi largement présent dans les ressources destinées aux enseignants: on trouve de plus en plus d'activités tableur en mathématiques pour les élèves dans les manuels, publications IREM, réseaux CNDP, bulletins APMEP, sites Internet académiques, sites enseignants,...)

et cependant, force est de constater qu'il est peu, voire pas, présent dans les classes.

[1]Technologies de l'Information et de la Communication

Pourquoi ces contrastes ? Quels problèmes d'intégration le tableur pose-t-il? Des questions tant théoriques que pratiques se soulèvent :

- Que sait-on de ses potentialités pour enseigner les mathématiques et des conditions nécessaires à l'actualisation de ces potentialités ? Et quelles sont les caractéristiques de ces ressources offertes aux enseignants ?
- On peut également se demander quelles sont pratiques des enseignants qui intègrent réellement le tableur.

Face à ces multiples questions, l'idée a été de recenser d'abord ce qui existe en termes de recherche.

2. Le Tableur et les Recherches Didactiques

Quelles questions les didacticiens ont-ils déjà soulevées ? Dans quelles perspectives se placent les recherches ? A quelles problématiques renvoient-elles ?

Des travaux français mais aussi internationaux ont déjà été menés sur le tableur pour l'enseignement des mathématiques, par exemple Ainley et al. (2003), Arzarello et al. (2001), Capponi (2000), Dettori et al. (1995) ou encore Rojano et Sutherland (1997). Les cadres sont différents mais dans l'ensemble ces travaux se placent tous au collège, concernent tous la transition arithmétique-algèbre, et même si leurs approches diffèrent, elles donnent toutes au tableur un rôle positif en jouant sur des points délicats répertoriés en didactique de l'algèbre (voir les travaux de Drouhard, 1992 ; Vergnaud 1989 ; Vergnaud et al., 1987 ; Sfard,1991 ou encore, pour une vue d'ensemble, Bednarz, Kieran, Lee 1996 ou Chick et al. 2001). Les recherches sur le tableur reprennent ici ces difficultés de l'algèbre à savoir:

- sa position par rapport à l'arithmétique analysée en didactique parfois en termes de « transitions », parfois en termes de « ruptures » (discontinuités ou fausses continuités,
- ou la difficulté des rapports sémantique/ syntaxique.

Par rapport à ces difficultés bien repérées en papier-crayon, ces recherches nous disent que le tableur a des potentialités idéales pour favoriser l'apprentisage de l'algèbre par :

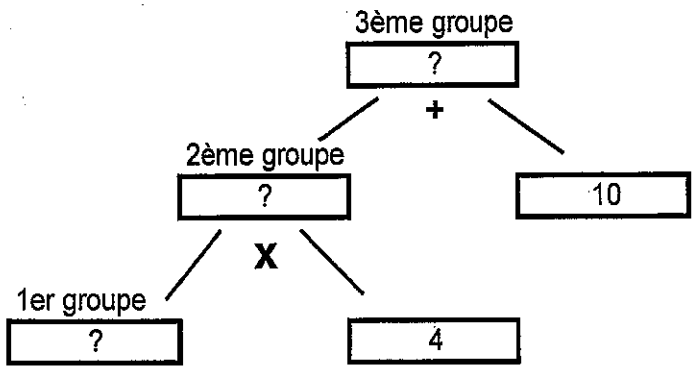
- les nouvelles possibilités qu'il offre (calculatoires, de représentation, d'interactivité, d'articulation de divers langages),
- et aussi par ses contraintes d'utilisation (contraintes dans le symbolisme, dans l'organisation de la feuille).

Donnons un exemple : celui des techniques de résolution.

Pour Rojano et Sutherland (1997), la technique que favorise le tableur, appelée « essai/erreur » serait une technique intermédiaire entre les procédures arithmétiques des élèves et une résolution algébrique. L'usage du tableur aiderait donc à passer de l'un à l'autre, à entrer dans la pensée algébrique.

Examinons ces différentes méthodes sur un même problème qu'elles citent (Rojano & Sutherland, 1997) :

3 groupes d'enfants se partagent 100 chocolats. Le deuxième groupe reçoit 4 fois le nombre de chocolats du premier. Le troisième groupe reçoit 10 chocolats de plus que le deuxième groupe. Combien de chocolats chacun des 3 groupes reçoit-il ?



Avec la méthode arithmétique

Ici, un raisonnement arithmétique par analyse/synthèse classique, qui part des données connues pour calculer l'inconnue, ne fonctionne pas. Néanmoins, les élèves peuvent appliquer d'autres démarches arithmétiques telle que celle de procéder par essai/erreur, en partant soit d'une valeur arbitraire, soit d'un partage égal à partir du nombre total de chocolats (partager 100 en trois) et ajuster. Le tâtonnement peut être plus ou moins contrôlé et se faire sur les trois groupes ou bien sur un seul, mais il est guidé toujours par deux contraintes : les relations données dans l'énoncé entre les nombres de chocolats des groupes doivent être vérifiées, et le nombre total de chocolats obtenus doit être 100. Nous avons montré dans la thèse que cette démarche occupe elle-même, par certaines caractéristiques, une position intermédiaire entre arithmétique et algèbre (Haspekian, 2005).

Avec la méthode algébrique

La solution algébrique conduit à résoudre soit une équation, soit un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} y = 4x \\ z = y + 10 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

où x, y , z sont les nombres de chocolats respectifs des 3 groupes. On arrive ici, par exemple par substitution, à l'équation : $x + 4x + (4x + 10) = 100$, dont la résolution (phase de synthèse) donne la solution : x = 10, y = 40 et z = 50[2]

Avec la méthode tableur

Voici une feuille de calculs correspondant à une résolution possible en environnement tableur :

	A	B	C	D
1	groupe 1	groupe 2	groupe 3	total
2		=4*A2	=B2+10	=A2+B2+C2

On notera que les trois inconnues sont bien explicitement présentes. L'élève teste des valeurs en A2, les formules réactualisent alors les résultats des formules de B2, C2 et D2. Il fait des « essais » jusqu'à obtenir 100 en D2.

Nous constatons que « groupe2=4*A2 » ressemble fortement à « y=4x » de la méthode algébrique. De même pour le groupe 3 : « groupe 3= B2+10 » ressemble fortement à « z=y+10 » de la résolution algébrique. Ainsi, la résolution tableur met-elle en jeu les équations intermédiaires intervenant dans la résolution algébrique. L'équation finale n'est pas obtenue, mais, déjà, toutes les relations intermédiaires entre les données sont présentes.

D'autre part, la méthode ressemble fortement à celle de l'essai/erreur que peuvent effectuer spontanément les élèves, avec la particularité qu'ici les calculs sont automatisés, et organisés. On peut dire, concernant les démarches de résolution, que le tableur donne *une organisation algébrique à une résolution de type arithmétique.* L'outil rapproche ainsi

[2] Dans l'enseignement, vu l'organisation des progressions institutionnelles, on tend à éviter, dans un tel cas, l'écriture d'un système, en choisissant une quantité inconnue et en exprimant directement les autres quantités en jeu en fonction de celle-ci. Mais divers travaux montrent bien la force du contrat didactique dans une telle mathématisation, s'opposant aux tendances spontanées des élèves consistant à introduire autant d'inconnues que de quantités inconnues.

davantage encore l'essai erreur de l'algèbre en rendant plus algébriques certaines des caractéristiques arithmétiques de la méthode (voir la comparaison des démarches dans Haspekian 2005, p.91)

Ce n'est pas le seul exemple, par bien d'autres caractéristiques, le tableur est présenté comme occupant cette position intermédiaire entre arithmétique et algèbre (cf Capponi, 2000 ou Rojano&Sutherland, 2001)

En conclusion, nous nous trouvons face à des potentialités très intéressantes a priori, mais au vu desquelles non seulement ces recherches renforcent la question « pourquoi une si faible utilisation dans l'enseignement des mathématiques ? », mais nous laissent plutôt démunis quant aux situations qu'elles donnent dans le sens où rien n'est dit de leur mise en oeuvre concrète, de la façon de les orchestrer avec des élèves.

Par exemple, dans la tâche précédente, il apparaissait que «gpe2=4*A2 » ressemblait effectivement à l'équation « y=4x » nous amenant à penser que l'élève entre dans l'algèbre, mais, concrètement, comment faire pour qu'un élève de 5e (12ans) en arrive à écrire cette formule dans le tableur, n'aurait-il pas besoin d'avoir déjà compris, comme prérequis, ce qu'est une formule (càd ce qu'on vise)?! Finalement, la question qui se pose est : « ***comment mêler*** les potentialités de l'outil **et** les mathématiques? ». Dans quel sens aller ? Suivant quelle(s) progression(s) ? Et quel est le rôle de l'enseignant?

Ces questions résonnent avec l'approche instrumentale utilisée en didactique ces dernières années à propos des CAS[3], outils qui, comme le tableur, n'ont pas été initialement conçus pour l'enseignement.

3. Une Approche Instrumentale en Didactique des Mathématiques

Les travaux sur les calculatrices symboliques (voir par exemple Artigue, 2001 ; Lagrange, 2000 ; Trouche 1997 ou Trouche 2003) ont conduit ont au développement d'une approche instrumentale des questions d'intégration technologique à l'enseignement des mathématiques (cf. Guin et Trouche, 2002 pour une vision synthétique). Cette approche

[3] Calculatrices Symboliques

repose entre autres sur les travaux de P.Rabardel (voir par exemple Rabardel, 1999) et souligne particulièrement le rôle non neutre des instruments sur les conceptualisations. Pour penser et analyser les modalités de cette influence, P.Rabardel utilise les notions de :

- médiation instrumentale,
- genèse instrumentale (processus progressif d'appropriation, influençant les représentations construites par les contraintes de l'instrument et le champ des actions possibles qui peuvent ouvrir de nouvelles modalités d'organisation de l'action mais aussi supprimer des activités en elles-mêmes formatrices),
- schèmes sociaux d'utilisation (structures permettant l'organisation de l'action du sujet).

Cette approche distingue l'artefact (le dispositif matériel ou symbolique) de l'instrument à proprement parler qui est, pour un sujet donné, une partie de l'artefact à laquelle s'ajoutent des schèmes d'utilisation. Un même artefact peut ainsi conduire à différents instruments pour différents sujets.

Enfin, P.Rabardel souligne l'importance de replacer l'instrument dans un système d'instruments déjà constitués pour le sujet. L'introduction d'un nouvel artefact conduit en effet à la recomposition des systèmes d'instruments déjà en place qui, à leur tour, rétroagissent sur le projet didactique. En introduisant un nouvel artefact, l'enseignant doit donc être attentif aux genèses instrumentales des élèves en tenant compte également de l'impact de l'outil sur les autres instruments déjà travaillés.

3.1 Le cas du tableur

Les questions auxquelles l'approche instrumentale nous sensibilise s'appliquent tout à fait au cas du tableur. Pour tenir compte de l'aspect instrumental, il nous faut donc analyser le tableur en considérant les aspects qu'elle met en avant, aspects qui nous donnent une nouvelle ouverture par rapport aux travaux pré-cités. Par exemple la question de la place des « techniques tableur » par rapport aux techniques « papier/crayon » plus traditionnelles ne se pose plus seulement en termes de : *« l'apprentissage de l'un est là pour remédier aux insuffisances de l'autre »* mais aussi en terme de *« transmission des éléments d'une dialectique technique/conceptuel »* inscrite dans une certaine culture mathématique qui se trouve être instrumentée (Rabardel, 1999).

Dans le cas du tableur, l'approche instrumentale nous permet de montrer une complexité dans l'articulation entre connaissances algébriques et connaissances tableur. Ainsi, trouve-t-on :

- des changements dans les techniques, dans les objets usuels,
- de nouveaux objets que le tableur introduit lui-même,
- enfin, en examinant les activités présentées dans les articles de recherches, nous observons qu'il existe des implicites « instrumentaux » au niveau de la tâche à effectuer.

Ayant évoqué précédemment les techniques avec l'étude de l'essai/erreur, nous allons donc illustrer cette complexité en montrant un exemple d'implicite dans les activités analysées, et un exemple d'objet modifié.

Commençons par les implicites.

3.2 Des implicites

C'est en cherchant à étudier les progressions, entre connaissances algébriques et connaissances tableur, mises en place dans les activités de recherche, que notre attention a été attirée par un certain nombre d'implicites. Nous présentons ici un exemple relevé dans Arzarello et al. (2000) qui propose une activité destinée à montrer l'intérêt du tableur pour le passage à l'algèbre en regard d'un travail comparable en papier crayon.

Proposé pour des élèves de 5e/ 4e, l'énoncé donné est le suivant :

> Trouver une formule générale pour nommer un nombre impair.

Avec cet énoncé, ce que nous savons est que le professeur donne une première colonne d'entiers successifs avec, comme première tâche, de désigner/ nommer cette colonne (nommer la colonne « n » par exemple). L'enseignant vise alors la construction par les élèves, après un travail d'essais permis par le tableur, l'expression « 2n+1 » comme titre pour la colonne B.

	A	B
1	0	
2	1	
3	2	
4	3	
5	...	

La tâche est donc transformée en :

> A partir des nombres de la colonne A, trouver une formule qui génère des nombres impairs dans la colonne B.

L'élève peut réaliser une suite d'opérations sur les nombres de la colonne A, en cliquant sur une case de A : par exemple réaliser A3 + 1, en cliquant sur A3, pour réaliser l'opération 2 +1 et obtenir l'impair 3, ou encore 2*A3 + 1 pour obtenir l'impair 5. Le tableur recevra une formule correspondant à ces opérations, alors que l'élève peut rester dans le numérique si le passage par le symbolique n'est pas perçu. L'élève bénéficie d'un retour dans le numérique qui lui permet de vérifier si le résultat affiché est un nombre impair.

L'énoncé précise bien de trouver une formule générale, ce qui exclut une résolution telle que :

	A	B
1	0	
2	1	=A2
3	2	=A2 + A3
4	3	
5	...	

L'élève doit comprendre que la formule ne change pas à chaque ligne, qu'une seule formule doit être éditée puis recopiée vers le bas. La fonctionnalité de recopie est donc ici essentielle pour arriver au but visé de l'exercice : écrire une formule de type 2n+1. Mais comment l'élève comprend-il que c'est la même formule qui doit être recopiée, au moment où il est en train d'apprendre la notion de formule, d'autant plus que, sur le plan purement syntaxique, le tableur n'affiche pas la même formule ? Nous pouvons faire l'hypothèse que ce n'est donc pas le terme « formule » de l'énoncé qui va l'aider, mais « l'obligation » d'utiliser la fonctionnalité de recopie. C'est le passage par cette contrainte liée au tableur, qui, selon nous, peut mener l'élève à la formule voulue. Comment est créée cette contrainte ? L'expression « formule générale » de l'énoncé ne semble pas *a priori* suffisante, à moins que ce ne soit un effet du contrat didactique, celui-ci ayant déjà initié un lien entre cette expression et la recopie. Ou bien est-ce la place de l'exercice dans la progression adoptée par l'enseignant qui a donné aux élèves l'habitude de recopier une suite d'opérations ? L'article ne le précise pas.

Cependant, même en supposant que l'élève respecte la contrainte d'utiliser la recopie vers le bas, l'exercice peut ne pas atteindre son but puisqu'une résolution possible peut encore être :

	A	B
1	0	=A1+A2
2	1	
3	2	
4	3	
5	...	

Où la formule « =A1+A2 » recopiée vers le bas fournit bien une solution.

Il faut donc aussi ajouter à la contrainte de la recopie, celle d'éditer dans la colonne B une formule n'utilisant, de la colonne A, que la cellule de la ligne correspondante (c'est à dire n'utiliser dans la formule en B1 que la cellule A1), contrainte pourtant absente du libellé de l'exercice. Là encore, les mêmes questions se posent alors : qu'est-ce qui contraint l'élève à agir dans le sens prévu, comment est créée cette contrainte ? Quelle est l'action de l'enseignant ? Tout cela reste implicite, en particulier les fonctionnalités du tableur supposées acquises par l'élève pour que l'activité souhaitée soit l'activité effective :

- L'utilisation de la recopie vers le bas pour éditer les formules des lignes autres que la première
- L'utilisation, dans la formule, des cellules de la ligne correspondante et non des lignes suivantes ou précédentes (formule de type fonctionnel et non séquentiel)

Ces pré-requis, situés au niveau des fonctionnalités du tableur, ne sont pas explicites dans l'énoncé de l'exercice, et pourtant ils sont nécessaires pour que la tâche soit bien dévolue, bien comprise.

3.3 Des nouveaux objets ou des objets anciens modifiés

Ici, la question posée à l'élève précise qu'on cherche un lien entre deux colonnes de nombres. Ainsi, la variable est « matérialisée », ou « concrétisée » par cette colonne. C'est la présence d'une colonne de nombres et non d'un nombre unique sur lequel agir qui est pertinente ici. C'est donc l'objet « variable-colonne » du tableur (autre exemple de nouvel objet que nous avons décrit dans la thèse) qui est l'objet pertinent sous-jacent, la formule étant un lien entre deux variables-colonne. Mais c'est ici de l'objet « formule » que nous parlons. Quel sens donne l'élève à cette « variable-colonne » ? Quelles conséquences cela a-t-il sur l'apprentissage de la notion de variable ? Comment se fait la liaison avec la « variable-lettre » de l'environnement papier-crayon ?

En effet, dans l'exemple de la tâche précédente, on voit que l'objet « formule » dans le tableur diffère de l'objet « formule » en papier-crayon, c'est pourquoi nous avons parlé de «formule-tableur». En effet, comprendre la notion de formule, c'est saisir un certain invariant opératoire qui est, dans l'écriture papier, reflété par un invariant syntaxique. Or, dans le langage du tableur, l'invariance opératoire de la formule ne se traduit pas par une invariance syntaxique : la syntaxe même de la formule varie à chaque ligne du fait de

l'utilisation de références relatives. La bonne formule « 2n+1 », qu'attendait l'enseignant dans l'exemple précédent, s'écrit après recopie vers le bas « 2*A2+1 », puis « 2*A3+1 », etc. Comment l'invariant prend-il alors sens pour l'élève ? Quel rôle joue le *geste de recopie* dans la reconnaissance de cet invariant ? En quoi le geste de « tirer » donne-t-il aux élèves le sens que nous avons en tête à savoir celui de « recopie » d'une formule ? Est-il suffisant ? Est-ce, finalement, la connaissance préalable de ce qu'est une formule qui induit l'usage de la recopie ou bien l'usage répété de la recopie qui donne peu à peu sens à la notion de formule ? Le texte fourni ne nous permet pas de répondre mais l'on saisit bien, ici, l'imbrication des deux et toute l'importance de l'instrumentalisation, qui restait dans l'exemple précédent implicite.

En conclusion, intégré à la classe, le tableur peut être moteur d'un certain travail mathématique. Ses caractéristiques peuvent *a priori* aider à construire un pont entre arithmétique et algèbre comme nous l'avons vu par exemple à travers la technique de l'essai/erreur. Cependant, le tableur introduit de nouveaux éléments susceptibles d'engendrer une certaine complexité qui peut s'ajouter aux difficultés usuelles de l'algèbre :

- par exemple dans l'appréhension différente des concepts (de « variable », de « formule »,...);
- ou dans le symbolisme (avec notamment une plus grande densité d'écriture des variables et des formules)
- enfin, on a vu que la tâche donnée aux élèves ne suffit pas, à elle seule, à ce que l'activité effective soit celle qui est visée, il y a des implicites au niveau des genèses instrumentales susceptibles de créer des malentendus.

Ainsi, l'analyse instrumentale pointe-t-elle, derrière une apparente facilité d'utilisation, le rôle non neutre du tableur à travers une certaine « ***distance*** » qu'il crée au niveau des objets et techniques emblématiques de l'algèbre. Le besoin d'accompagner les genèses instrumentales et ces changements dans les objets, techniques et finalement les organisations mathématiques viables avec le tableur, pose la question **des progressions** dans lesquelles ces changements vont intervenir. Comment associer la mise en place des objets usuels de l'algèbre et des objets tableur? Par exemple, comment, quand, l'enseignant incorpore-t-il à l'apprentissage la fonctionnalité de recopie dont on vient de voir

l'importance ? Pour comprendre mieux les phénomènes en jeu, ces questions nous conduisent à chercher l'écho du terrain.

4 . Une Expérimentation Exploratoire

Nous avons mené une expérimentation où l'objectif était de tester l'utilisation du tableur pour l'apprentissage de l'algèbre (quelles sont les difficultés/stratégies des élèves/enseignants ?) et de comprendre les problèmes soulevés par les genèses instrumentales dans ce domaine.

Nous avons expérimenté une séquence en fin de 5e avec des élèves n'ayant pas spécifiquement reçu d'apprentissage en algèbre. Cinq séances ont été effectuées, étalées sur une durée d'un trimestre. Voici quelques exemples de résultats.

Nous pouvons dire, en premier lieu, que les élèves ont globalement progressé, et à leur rythme, au vu des difficultés néanmoins observées (voir Haspekian, 2005), nous avons été amenée à faire l'hypothèse qu'introduire à la fois un nouvel environnement et de nouveaux savoirs mathématiques semble accroître les difficultés : si le tableur semble, théoriquement, bien adapté à l'apprentissage de l'algèbre, il ne semble pas pour autant pertinent d'initier élèves à cet outil *en commençant par* l'apprentissage de l'algèbre, ce que les précédentes recherches n'avaient pas mentionné.

Versant enseignant: le principal phénomène que l'on a pu observer est le manque de repères didactiques pour ces séances qui s'est manifesté tout le long de l'expérimentation :

- au niveau de l'utilisation du tableur par les élèves (on découvrait des stratégies totalement imprévues),
- au niveau du temps. Notamment, ce qui a le plus étonné a été le temps pris pour initier (ou ré initier) à la fonctionnalité de recopie.

Par exemple, la première séance qui consistait à une prise en main (voir le lien entre cellules, la réactualisation des résultats et entrevoir la recopie d'une formule) a duré deux fois plus de temps que ce que l'enseignante avait prévu : ses élèves ayant déjà vu le tableur en technologie au premier trimestre, elle a pensé que l'activité ne présenterait pas de difficultés et durerait 20mn. C'est aussi ce que lui a dit l'enseignant de technologie qui ne voyait en cette séance que des rappels de ce qu'il avait fait au premier trimestre. Or l'activité a pris l'heure, et les élèves semblaient n'avoir aucun souvenir ni des formules, ni de la recopie. Ceci questionne ce qui a été fait en technologie : quels types de genèses instrumentales ont-ils eu lieu ? Celles-ci reposaient-elles vraiment sur les mêmes

connaissances que celles en jeu en mathématiques ? Et même s'il y a des correspondances possibles, les transferts du cours de technologie vers celui de mathématiques sont-ils facilement réalisables par les élèves ? Et mêmes s'ils le sont, que reste-t-il après environ un trimestre de coupure ?

Un autre résultat versant enseignant est celui d'une plus grande facilité ressentie dans l'intégration des logiciels de géométrie dynamique que du tableur, comme s'ils étaient plus « proches » du papier-crayon. Nous retrouvons là cette idée de « distance » qui reste à préciser. Ceci s'est manifesté au niveau du vocabulaire, et du retour papier en général, c'est à dire des liens avec le travail papier. En effet, on a par exemple un problème de vocabulaire dès qu'on veut introduire quelque connaissance tableur de façon plus institutionnelle. Quels liens peut-on établir concernant la « cellule » : va-t-on la relier au concept de « variable » ? La même question se pose pour la « colonne » : est-ce un ensemble de plusieurs variables ou bien une autre représentation de la même ? Qu'en est-il de la recopie : est-ce une formule ? etc. Dans les logiciels de géométrie dynamique, le lexique paraît déjà plus proche du vocabulaire traditionnel.

Au-delà du vocabulaire, c'est l'ensemble même des objets algébriques valorisés qui se trouve être modifié. On passe, en papier-crayon (pour l'institution collège, en France et dans les programmes actuels), d'une algèbre d'équations et d'inconnues où l'on met en avant sa fonction d'outil de résolution de problèmes, à, dans le tableur, une algèbre de variables et de formules, dans leur aspect fonctionnel, où l'on voit plus l'algèbre comme outil de généralisation, etc... :

« Valeurs » de l'algèbre :	**Environnement papier crayon, au collège**	**Environnement tableur**
Objets centraux	inconnues, équations	variables, formules
Fonction de l'algèbre	outil de résolution de problèmes	outil de généralisation
Démarche globale de résolution	démarches « algorithmisées », application de règles algébriques	démarches arithmétiques d'essai-erreur
Nature des solutions	solutions exactes	solutions exactes ou approchées

Au contraire, en géométrie, prenons l'objet central de «figure» par exemple. Les logiciels de géométrie dynamique ont, nous semble-t-il, non pas éloigné l'objet de sa conception mais rendu sa représentation plus conforme au concept de «figure» en permettant de réaliser, mieux qu'en papier crayon, la distinction dessin/figure (on se réfère là aux travaux autour du logiciel Cabri-géomètre, voir par exemple Laborde et Capponi, 1994).

Au final, l'approche instrumentale montrait une articulation complexe entre algèbre et tableur ; des mathématiques différentes apparaissaient et l'expérimentation confirme que *la difficulté d'intégrer le tableur consiste principalement en la difficulté de construire un enseignement qui conjugue ces savoirs aux savoirs traditionnels.*

A nouveau des questions surgissent alors : les nombreuses ressources offertes aux enseignants prennent-elles en compte ces problèmes, dans quelle mesure aident-elles les enseignants ?

5. Une analyse des ressources sur Educnet

Avec le cadre théorique précédent, nous avons bâti une grille d'analyse des ressources tenant compte de leurs caractéristiques mathématiques mais aussi de leur prise en compte ou non des questions d'instrumentation.

Le corpus choisi a été celui des ressources collège de base Educnet du Ministère de l'Education Nationale, car portant un certain caractère institutionnel et reflétant par là, à travers la façon dont elles accompagnent l'enseignant, la vision qu'a l'institution de cette question de l'intégration du tableur.

Un premier résultat fort imprévisible concerne le domaine mathématique mis en jeu :

Domaine	Effectif	%
Statistiques	**16**	28
Arithmétique	**8**	14
Gestion Données	**9**	15
Géométrie	**2**	4
Fonctions/Analyse	**14**	25
Algèbre	**7**	12
Autre Domaine	**1**	2
Total	57	100

Sur 57 ressources, 7 seulement s'intéressent à l'algèbre. Le couple «Statistiques/Gestion de Données» majoritaire n'est pas surprenant, le tableur leur étant particulièrement bien adapté. Mais le faible «score» de l'algèbre surprend au regard non seulement des recherches mais aussi des *programmes de 4e ET de 3e* (par comparaison, le domaine « Fonctions/ Analyse, uniquement présent dans les programmes de 3e, arrive en deuxième position).

L'idée de distance dont nous avons parlé peut peut-être expliquer pourquoi tant de ressources tableur concernent les statistiques : non seulement la pression des valeurs institutionnelles y est sans doute plus faible qu'en algèbre, mais pour les statistiques, les caractéristiques du tableur sont aussi sans doute plus proches du papier crayon qu'elles ne le sont en algèbre, de par l'origine même du tableur. Les auteurs des ressources semblent donc préférer légitimer l'outil dans un domaine où il présente une moindre distance au papier crayon qu'il ne le fait en algèbre.

Examinons plus précisément les **thèmes mathématiques** visés:

Thème	Effectif	**%**
Optimisation/Approximation	13	**23**
Exploration Numérique/ Graphique., Conjectures	14	**25**
Algorithme, PGCD	8	**14**
Représentation de données	10	**18**
Conjectures, Formules	6	**11**
Résolution Équation	2	**4**
Introduction Algèbre	0	**0**
Autres thèmes	3	**5**
Total	56	100,00

C'est encore plus surprenant concernant les thèmes associés à l'algèbre: *aucune ressource de cette base ne vise l'utilisation du tableur pour entrer dans l'algèbre !* D'ailleurs, la technique de l'essai/erreur n'est exploitée que dans 4 ressources! Il y a donc un décalage entre les potentialités *a priori* et les potentialités utilisées.

Nous constatons également des insuffisances : à part les consignes «élèves», la ressource ne renseigne quasiment rien (fonctionnalités tableur mises en jeu, idée du scénario, prérequis, objectifs, aussi bien mathématiques que tableur,...) sont bien souvent

absents. Plus d'un tiers des ressources analysées (en 2003) ne fournit *aucun accompagnement*, et devient donc difficilement exploitable pour un enseignant non expert.

Par ailleurs, quand des indications existent, elles sont majoritairement *côté mathématiques uniquement* ou bien mal évaluées créant les mêmes types d'implicites que ceux vus en théorie (par exemple, dans certaines ressources, on peut lire : *« Aucun prérequis nécessaire »* et l'on s'aperçoit que les élèves doivent faire *implicitement* l'usage de la poignée de recopie, savoir éditer une formule,...).

En conséquence, du point de vue des ressources offertes aux enseignants, nous ne retirons que très peu d'éléments permettant de prendre en charge les difficultés mises en évidence. Qu'en est-il d'un point de vue plus « interne » aux enseignants ? Il s'agit à présent de s'intéresser **aux conceptions** des enseignants en y recherchant ce qui contribuerait aux résistances ou à l'adhésion des enseignants de mathématiques au tableur, en allant chercher au-delà des motifs traditionnellement évoqués (peur de changer ses habitudes, de paraître incompétent, refus de fournir les efforts nécessaires, manque de formation,...)

6. Du côté des pratiques

Les travaux analysant les pratiques enseignantes motivent notre volonté de dépasser ces discours en soulignant que si les actions des enseignants répondent à des raisons qui ne sont pas nécessairement des arguments de contenus (relatifs aux savoirs) ni d'apprentissage (relatifs aux élèves) mais parfois des arguments relatifs à l'enseignant vu comme individu, exerçant un métier, avec ses contraintes, ses marges de manoeuvre et son histoire personnelle. La double approche d'A. Robert et J.Rogalski modélise l'étude de ces pratiques autour de cinq composantes dont **une** qui est la composante personnelle, liée aux conceptions des enseignants sur les mathématiques, leur enseignement et apprentissage. Nous faisons l'hypothèse que cette composante joue un rôle crucial dans l'adhésion ou non des enseignants au tableur et aux TIC en général. A ce propos, que nous apprennent les enseignants qui intègrent le tableur ? Par ailleurs, la double approche souligne aussi que les pratiques enseignantes sont cohérentes et stables très vite, il est donc intéressant de regarder les stagiaires qui seront les futurs enseignants.

Nous avons alors réalisé un questionnaire et des entretiens auprès de stagiaires PLC2 et d'enseignants experts (en désignant par « experts » des enseignants qui intègrent le tableur

dans leurs classes et font des formations initiale et/ ou continue sur cet outil). Dans le cas des stagiaires, nous avons mené des entretiens groupés pour que ces derniers échangent, débattent, ce qui fait davantage ressortir leurs opinions. Pour les experts, nous avons mené des entretiens individuels reprenant les mêmes questions et ajoutant une partie sur leurs pratiques. Des régularités se dégagent dans les deux cas et se manifestent aux niveaux :

- des conceptions générales sur l'utilisation de l'outil informatique,
- des conceptions plus précises concernant le tableur et son usage pour l'enseignement des mathématiques, notamment pour l'apprentissage de l'algèbre (nous l'avons vu concernant les choix et opinions sur les exercices proposés dans le questionnaire),
- des pratiques « TICE » des formateurs.

Dans ce texte, nous ne présentons qu'une rapide synthèse de quelques traits communs d'une part aux enseignants novices, d'autre part aux enseignants experts.

Donnons d'abord la parole aux stagiaires par quelques extraits déjà riches d'informations.

Nous constatons d'abord une volonté d'utiliser l'informatique, la difficulté ne se situant pas dans l'usage de l'outil en lui-même mais dans l'usage de l'outil *pour* faire apprendre des mathématiques. Les stagiaires sont en effet globalement « pour » mais pour des raisons autres que ce que l'on croit au départ, révélant un clivage mathématiques/ informatique, lequel se traduit par des suggestions, par des peurs aussi. On comprend peu à peu, ce qu'ils mettent derrière « utiliser l'informatique »: quelque chose d'assez vague qui ne signifie **pas nettement faire des mathématiques**, ni avancer dans les apprentissages au programme, comme le montrent les quelques extraits suivants (issus de groupes divers) :

B: *« Ca dépend du temps qui me reste sur mon cours de maths. Pour terminer le programme. »*

N: *« moi je veux bien mais si je veux finir mon programme, je peux pas avoir le temps de faire de l'informatique »*

R : *« Faut que j'avance dans ma progression, (...), ça sert à rien de greffer quelque chose qui me ralentirait »*

Ce petit clivage mathématiques/informatique évoqué devient au fil des entretiens une franche rupture :

N : *« quand on veut respecter les programmes à côté, ben on est parfois réticent à faire de l'informatique »*

C : « *j'me sens pas assez à l'aise pour préparer mes cours en parallèle avec ça* »

H: « *quoi qu'il arrive, ça réduit pas les séances. L'info c'est en plus. Je veux dire ça me permet pas d'enlever des choses* »

Pourquoi sont-ils alors volontaires pour en faire ? Les raisons évoquées sont loin d'être en lien avec les mathématiques :

C : « *c'est bien, c'est marrant, c'est ludique* »

R: « *il faut être dans son temps* »

H : « *c'est une « sortie », pour moi, c'est comme le professeur de musique qui emmène ses élèves à l'auditorium* »

L'utilisation d'outils informatiques n'est donc pas nettement motivée par les potentialités épistémiques de ces outils, potentialités qu'ils ont d'ailleurs du mal à voir comme tout enseignant démarrant dans le métier, nous le constatons dans leurs réponses aux questions où il s'agissait de choisir une activité tableur parmi plusieurs proposées.

La rupture se traduit, dans différents groupes à travers des suggestions :

Cl : « *L'informatique, ça devrait être une matière en soi ! (...) il devrait y avoir des cours d'informatique* »

N : « *ça serait bon de nous donner, dans notre emploi du temps, un espace réservé à ça* »

D'autres encore expriment des craintes :

E : « *en fait, le problème c'est que ça va dériver en : "on va devenir les profs d'informatique" et ça c'est le danger* »

C: « *il faut pas que l'informatique mange les mathématiques* »

A : « *il faut pas que l'informatique devienne l'outil central, et les maths un satellite de l'informatique* »

R : « *oui, parce qu'il faut pas exagérer, on est quand même là pour faire des maths!* »

Pour synthétiser, nous pouvons noter :

1) une évolution sensible des stagiaires par rapport aux opinions exprimées il y a dix ans sur l'utilisation de l'informatique en général : les stagiaires sont globalement très favorables à l'introduction de l'informatique dans les programmes,
2) une position généralement très critique envers les enseignants déjà « installés » dans le métier. Les stagiaires se placent un peu « au-dessus » de ces postures, ils veulent s'en distancier,

3) mais présentant finalement une image assez stable quant aux conceptions qui ressortent autour des mathématiques : nous voyons nettement que dès qu'il s'agit de mathématiques, les stagiaires sont « touchés » et les questions de légitimité de l'informatique se posent bien toujours,
4) ces conceptions sont caractérisées par un clivage mathématiques/ informatique et des pratiques de juxtaposition plutôt que d'intégration réelle, montrant ainsi que l'outil n'a pas une véritable valeur épistémique (il n'a tout au plus qu'une valeur pour les calculs qu'il permet d'effectuer, mais cette valeur seule se traduit par une utilisation peu économique de l'outil, vu le coût que nécessite son intégration, et reste donc, à elle seule, insuffisante à l'imposer).

En conclusion, il nous semble, en comparant les réponses concernant respectivement les usages personnels et les usages par les élèves, que les conceptions jouent un rôle non négligeable. En effet, les stagiaires utilisent l'informatique pour leur usage personnel et professionnel (préparer des fiches, calculer des moyennes, éditer des lettres, ...). La résistance n'est pas dans l'usage de l'outil en lui-même mais dans l'usage de l'outil pour faire apprendre des mathématiques. Elle ne se réduit pas aux discours habituels (à savoir des peurs, le manque de formation, le temps, les problèmes matériels).

Du côté « experts »: on trouve des convergences également et qui sont absolument le contraire **de ce qu'on** vient de lister:

Jeunes stagiaires PLC2	**Enseignants « experts » (TIC)**
■ Difficultés à voir les potentialités	■ Repérage très tôt des potentialités
■ Clivage maths/ info ⇒ Pratiques de juxtaposition ⇒ Perte de temps	■ Intégration harmonieuse ⇒ Avancée dans les maths ⇒ Pas de perte de temps

Par exemple des discours **des formateurs**, se dégage le fait qu'ils ont su très tôt repérer les potentialités, peut-être grâce à un phénomène «déclenchant» particulier dans leur vie, qui semble leur avoir donné une certaine sensibilité aux outils dès le début :

N : « *j'ai compris très vite que ça apportait au moins quelque chose de plus* »

E : « *Je me suis rendu compte très tôt de la richesse des situations* »

D : *« Je me suis très vite rendu compte qu'au niveau de mon métier ça allait pouvoir me servir. (...) Cabri, ça a été lumineux dès le départ »*

S : « *Les ordinateurs, je m'en suis procuré bien avant qu'on en ait en France, j'ai été en Angleterre (...) ça me semblait évident qu'il fallait utiliser les outils »*

Par rapport au clivage mathématiques/ informatique et aux pratiques de juxtaposition précédemment évoquées, on a, là encore, au **contraire** une intégration harmonieuse:

S : « *non c'est terminé le 'j'apprends le solfège et dans trois ans je pourrai toucher à mon instrument' »*

On le voit, il n'y a pas de « séparation ». Par conséquent, il n'y a pas de perte de temps, l'informatique ne venant pas « en plus »:

N : « *l'informatique c'est pas 'en plus' c'est 'à la place de' »*

Ma : « *j'ai toujours trouvé que c'était un gain de temps. Je l'ai jamais considéré comme 'je fais une séance informatique en plus »*

Mo : « *je trouve le temps parce que c'est pas en plus ! »*

Quels sont les éléments qui leur permettent de réussir ? **Dans** les pratiques, c'est l'importance de la prise en compte non d'un outil mais d'un **système d'instruments** qui se dégage. Deux caractéristiques paraissent fondamentalement contribuer à leur réussite à intégrer le tableur :

1. un **jeu « ancien/** nouveau » à la fois au niveau des contenus et au niveau des instruments,
2. un certain art de savoir mêler ces deux jeux ce qui leur **procure un fonctionnement** économique à la fois sur la gestion de classe en séance informatique et sur les genèses instrumentales.

En effet, des activités utilisées par les formateurs et de l'intégration du tableur qu'ils décrivent, il se dégage un art subtil de la combinaison des outils et des contenus mathématiques. Par exemple, les experts disent avoir une « Façon de faire des révisions en apportant quelque chose en plus », d'autres utilisent les « mêmes notions présentées dans deux environnements différents », ou encore font un « Retravail à la main après une séance info », l'une d'elle dit par exemple qu'elle « combine papier-caculatrice-tableur » dans la même séance et ajoute « *je fais des liens sans arrêt,sans arrêt ...* ». L'intégration du tableur peut alors être découpée en différentes parties (qui ne correspondent pas nécessairement à des phases successives) dans lesquelles les experts jouent ainsi sur un « savant » dosage

d'ancien et de nouveau tout à la fois sur le plan des contenus mathématiques et sur celui des outils :

1. Une partie d'initiation d'un outil nouveau bien souvent mêlée à des connaissances « anciennes » sur d'autres outils et à des connaissances anciennes en mathématiques
2. Une partie de travail sur des mathématiques connues, sans apport de nouveau dans les connaissances mathématiques mais plutôt dans les genèses instrumentales (l'accent est mis sur l'instrumentalisation)
3. Une partie de travail de mathématiques connues et nouvelles, (l'accent est mis sur l'instrumentation) avec parfois du nouveau dans l'instrumentalisation

Le « dosage » de chacune de ces parties est sans doute une clé de l'intégration du tableur chez ces enseignants. Malheureusement, il est impossible de saisir cette clé à partir de la seule donnée des activités demandées, il nous manque par exemple la prise en compte des autres outils informatiques, la façon de les agencer avec le tableur, l'articulation avec les séances ordinaires et le travail papier, l'importance en temps de chaque phase,....

Cette orchestration d'un système d'instruments est donc une base de travail servant à intégrer le tableur. Ce dernier étant perçu comme plus complexe, ils le font rencontrer à leurs élèves après d'autres logiciels, obtenant ainsi :

- **un gain** de temps sur la gestion de classe dans ce type de séance (découverte de la salle informatique, mise en place du contrat, etc...)
- **un gain** de temps sur les genèses instrumentales avec tableur: une partie de ces genèses étant prise en charge avec d'autres outils (manipulation du matériel, de l'ordinateur, des fichiers,...)

Si l'importance du système d'instruments mis en place comme base de travail servant à intégrer le tableur s'avère être une condition à la réussite de cette intégration, comme suggéré ci-dessus, (mais il faudrait une étude à plus grande échelle pour confirmer ceci), nous comprenons alors la faible intégration du tableur par les enseignants : il faudrait qu'ils aient déjà intégré d'autres outils informatiques, ce qui restreint encore considérablement le nombre d'enseignants susceptibles d'intégrer (et de réussir à intégrer) le tableur.

En voulant situer les « profils » des stagiaires relativement à ceux des experts, nous avons déterminé quatre degrés différents **d'intervention** de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques, ces degrés constituent simplement des marqueurs grossiers parmi une variété possible :

- intégration nulle (niveau N0), profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques avec l'idée de mathématiques pures, rigoureuses, exactes, figées en un bel édifice déductif de vérités... L'informatique, par une approche plus expérimentale des mathématiques, serait perçue comme véhiculant une représentation conflictuelle avec cette idée,
- intégration parallèle (niveau N1) de l'informatique en tant que discipline, profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques avec l'idée d'accepter de « faire de l'informatique » pour faire découvrir et utiliser des outils modernes qui font partie de notre société, mais avec lesquels on discerne mal comment on peut faire faire des mathématiques aux élèves,
- intégration ponctuelle de l'outil informatique (niveau N2) pour les calculs ou tourné vers des mathématiques expérimentales, profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques avec l'idée d'utiliser les outils informatiques parce qu'ils sont stimulants, motivants pour les élèves et ont des capacités de calculs. On exploite ici les potentialités pragmatiques de la technologie : obtenir des résultats facilement, éviter les calculs longs et fastidieux du papier crayon, construire des figures propres, aborder des situations plus complexes,
- degré 3 (N3) ou intégration harmonieuse de l'outil informatique dans la progression des contenus d'enseignement des mathématiques, profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques intégrant une dialectique « technique/ conceptuel » à travers l'utilisation d'outils informatiques vus à la fois comme outils de calculs, stimulants, motivants pour les élèves (c'est à dire comme N2), mais aussi comme outil d'apprentissage et de découverte de notions mathématiques, d'expérimentation, recherche et conjecture. On intègre donc aussi le potentiel épistémique de la technologie.

Nous arrivons au terme de notre tour d'horizon. Quels résultats avons-nous vu se constituer au fil de cet itinéraire?

7. Conclusion

Nous avons vu que l'approche instrumentale, en soulignant l'importance du rôle des genèses instrumentales, dévoile une complexité dans l'étroite articulation entre connaissances algébriques et connaissances tableur, que nous avons associée à une idée de

"distance" entre environnement : **au niveau des** *objets, démarches et symbolisations dans le tableur, par rapport aux objets, démarches et symbolisations usuels en algèbre.*

On peut supposer qu'un enseignant **non expert de l'outil** peut pressentir une complexité et se montrer *réticent à créer de nouvelles organisations qui,* comme le montre l'expérimentation, *ne vont pas de soi.*

L'expérimentation affirme aussi, par comparaison aux logiciels de géométrie dynamique qui ont été évoqués, l'hypothèse d'un lien entre une certaine notion de «force d'instrumentation» ou «distance» et les difficultés d'intégration du tableur. Si on veut pouvoir comparer, on peut dire que plus fort est le besoin d'instrumentation lié à l'outil, i.e. p**lus grande est sa « distance » par rapport aux habitudes scolaires en cours, et plus difficile est son intégration.**

Par ailleurs, l'expérimentation précise cette vague idée de distance en ajoutant aux éléments déjà vus (qui étaient de « type » transposition informatique sur les objets, les démarches et les symbolisations) de nouveaux tels que le « **design** » i.e. le fait qu'il soit conçu ou non pour l'enseignement, ce qui peut être un critère, le vocabulaire en jeu, ou encore les écarts entre les valeurs mathématiques portées par chaque univers, tableur ou papier- crayon, qui **peuvent être aussi** une gêne comme on l'a vu dans l'expérimentation, l'enseignant *voyant d'abord les écarts avec son système de valeurs.*

Face à ces difficultés, nous avons regardé l'enseignant à travers deux prismes: l'un externe (les ressources) et l'autre interne (ses propres ressources internes).

Notre double enquête auprès des enseignants a identifié les difficultés manifestes chez les non experts à voir les **potentialités de l'outil**, à concevoir des organisations qu'ils n'ont finalement jamais vu vivre.

Elle montre en même temps un nouveau critère pour caractériser la distance : une dimension épistémologique intervient également dans la distance que présente le tableur. Il s'agit de «l'épistémologie embarquée par l'outil» dans le sens : quelle **légitimité, cette fois** non plus institutionnelle mais épistémologique, perçoit-on de l'outil?

- **Du côté des ressources,**

De l'analyse des ressources, il ressort qu'un enseignant non expert peut difficilement tirer bénéfice de ces ressources. Par conséquent, on peut dire en conclusion qu'il se trouve assez

mal armé ***pour gérer un chemin conjuguant tableur et apprentissages visés***, et on comprend alors mieux les problèmes d'intégration du tableur.

Ces problèmes sont certainement variables suivant l'outil en question, et nous avons tenté de « mesurer » cette variabilité grâce **à la notion** de distance, laquelle pose aussi la question de la nécessité d'une « distance minimale ». En effet, elle crée des difficultés d'intégration mais c'est aussi parce qu'il y a une certaine distance qu'il peut y avoir enrichissement.

Alors, pour aller vers des solutions, on peut travailler dans trois directions :

- **au niveau des ressources** qui nécessitent une prise en compte minimale de cette dimension instrumentale.
- Nos quatre profils posent aussi la **question des formations**. Comment faire évoluer les pratiques et atteindre le niveau 3 si c'est **ce rapport à l'informatique** que vise l'institution? La solution peut passer par des moyens de gérer les genèses instrumentales, en **intégrant dans** les contenus de formation l'importance des systèmes d'instrument et la prise en compte de leur **orchestration**,
- **et au niveau des outils** eux-mêmes avec la **notion** de «distance» qui peut peut-être nous aider à réfléchir quant aux outils futurs mais qui reste à creuser pour développer les **critères** qui la caractérisent.

Le travail aussi bien pratique que théorique est donc à poursuivre…

Références

Ainley, J., Bills, L. and Wilson, K. (2003). Designing Tasks for Purposeful Algebra *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy. http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_ainley_cerme3.pdf

Artigue, M. (2001), Learning mathematics in a CAS environment : the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7 (3): 245-274

Arzarello, F., Bazzini, L. and Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Assude, A. Bell and R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra,* vol.22, 61-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Capponi, B. (2000). Tableur, arithmétique et algèbre. *L'algèbre au lycée et au collège,* Actes des journées de formation de formateurs 4-5juin1999 (pp.58-66). IREM de Montpellier.

Bednarz, N., Kieran, C. and Lee, L. (Eds.), (1996), *Approaches to Algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. & Vincent, J. (Eds), (2001). The Future of the Teaching and the Learning of Algebra, *Proceedings of the 12th ICMI Study* University of Melbourne, Australia.

Dettori, G., Garuti, R., Lemut, E. and Netchitailova, L. (1995). An Analysis of the Relationship between Spreadsheet and Algebra, in L. Burton and B. Jaworski (Eds.) *Technology in Mathematics Teaching - a bridge between teaching and learning*, Bromley: Chartwell-Bratt pp. 261-274.

Drouhard, J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse de doctorat. Université de Paris 7.

Guin, D. &Trouche, L. Eds (2002) Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique. Grenoble : *La Pensée Sauvage*

Haspekian, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7, 2005.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 14 (1-2),* La Pensée Sauvage (Eds.), pp. 165-210.

Lagrange, J.B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics* 43 (1) : 1-30Rojano, T. and Sutherland, R. (1997). Pupils' strategies and the Cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets. *Proceedings of the 21st International Conference for thePsychology of Mathematics Education,* vol. 4 (pp. 72-79). Lathi, Finland.

Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Université d'été,* IUFM Caen, pp203-213

Rojano, T & Sutherland, R. (2001) Algebraic reasoning with spreadsheets. International Seminar, Cambridge.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22(1),* 1-36.

Trouche, L. (1997). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un "environnement calculatrice", étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation.* Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, IREM de Montpellier.

Trouche, L. (2003). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Edition de l'IREM,* Université Montpellier II.

Vergnaud, G., Cortès, A., et Favre-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du Colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques,* pp.259-288, La Pensée Sauvage (Eds.).

Vergnaud G. (1989/90) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x n°22* (pp.51-69) IREM de Grenoble.

