

L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite

Faïza Chellougui

Faculté des sciences de Bizerte- Tunisie

Introduction

L'objectif de notre travail est de montrer la nécessité d'un enseignement explicite des éléments de logique, en particulier les quantificateurs universel et existentiel, pour pouvoir conduire un raisonnement mathématique pertinent.

Dans la classe de mathématique, l'essentiel du discours mathématique est porté par la langue vernaculaire, et par un langage mixte qui incorpore des symboles mathématiques. En début d'université, on introduit le symbolisme logique : $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$ et $\exists$, ce qui permet d'écrire des énoncés entièrement formalisés. Cette introduction qui devrait contribuer à la clarification conceptuelle des notions mathématiques étudiées, et fournir des outils opératoires dans la conduite des raisonnements mathématiques, engendre des difficultés résistantes chez un grand nombre d'étudiants.

Nos questions de recherche se déclinent selon deux points de vue :

- Du point de vue épistémologique :

Quels sont les apports d'une théorie de la quantification pour analyser les raisonnements mathématiques, en particulier pour le contrôle de la validité pour le chercheur en didactique ?

Plus précisément, pour appréhender les difficultés d'appropriation d'un concept mathématique par les étudiants, est-il possible de montrer l'intérêt de la prise en compte d'une analyse fine de sa structure logique ?

- Du point de vue didactique :

Quel rôle joue la quantification dans l'élaboration effective d'un raisonnement mathématique par les étudiants de premier cycle universitaire ?

Cette question se décline elle-même en une sous question qui est explorée au cours de ce travail : l'explicitation de la quantification favorise-t-elle la production d'un argument mathématique pertinent ? Si oui, comment le mettre en évidence ?

Pour apporter des éléments de réponses à ces questions, nous adoptons les trois hypothèses de recherche suivantes :

Hypothèse 1 : L'explicitation des éléments de logique, au début de l'année, ne suffit pas à traiter les difficultés des apprenants.

Hypothèse 2 : En général, la complexité du concept de quantification n'est pas explicitement prise en charge par les enseignants.

Ces deux premières hypothèses fondent notre travail dans sa dimension didactique, en nous conduisant à étudier la place et le rôle des questions de quantification au cœur même de l'activité mathématique des étudiants, en relation avec le niveau de complexité de la structure logique des énoncés en jeu.

Hypothèse 3 : Les étudiants scientifiques de première année universitaire maîtrisent la plupart des raisonnements classiques faisant appel seulement aux caractères propositionnels, à savoir le Modus Ponens¹ et le Modus Tollens².

Cette hypothèse s'appuie sur le fait que les étudiants répondent majoritairement de manière correcte lorsque les raisonnements en jeu mobilisent essentiellement les deux règles d'inférence du calcul propositionnel, à savoir le Modus Ponens et le Modus Tollens.

Cadre théorique : Premiers éléments d'analyse didactique

Pour répondre à ces questions, notre recherche repose sur des travaux antérieurs en didactique des mathématiques qui montrent la pertinence du calcul des prédicats pour analyser les énoncés mathématiques et l'intérêt de la déduction naturelle dans l'analyse *a priori* des raisonnements mathématiques, ce qui relève des inférences logiques et des arguments mathématiques ; ceci nous a conduit à mettre en place des outils d'analyse didactique.

Usage du formalisme en mathématique

Les éléments de fondements théoriques que nous proposons dans l'exposé porteront sur quelques notes sur l'usage du formalisme en mathématique. Selon Blanché (1968) : « Le

¹ Si $(p \Rightarrow q \text{ et } p)$ alors q .

² Si $(p \Rightarrow q \text{ et non } q)$ alors $\text{non } p$.

symbolisme n'a d'intérêt logique que dans la mesure où il est lié à la création d'une langue artificielle. »

Pour cela, nous avons centré notre étude sur un concept travaillé dans l'enseignement supérieur et dont la structure logique est complexe ; il s'agit de la notion de continuité.

Le choix du concept de continuité est basé d'une part, sur le fait que dans l'enseignement tunisien, la continuité est un objet mathématique enseigné au lycée et repris à l'université, d'autre part, sur le fait que bien que cette notion fasse intervenir un nombre important de variables liées, sa structure logique est relativement simple car tous les quantificateurs sont en tête de la formule. En se référant à Schwartz (1991), nous proposons la définition de continuité de la manière suivante :

$$(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) [(|x - a| \leq \eta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon]$$

Ici, il y a trois quantificateurs universels et un quantificateur existentiel en troisième position. La portée de ces quantificateurs sur l'implication est entre crochets. L'étude proposée ici concerne la définition de cette notion telle qu'on la trouve dans plusieurs ouvrages mathématiques de première année d'université section scientifique. L'analyse de ces manuels a fait apparaître plusieurs phénomènes, nous présentons dans ce qui suit un des phénomènes repérés. Il s'agit de l'implication *versus* quantification bornée.

Dans un manuel, Chambadal & Ovaert (1966) définissent la limite finie d'une fonction en un point fini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{« -Si } x_0 \text{ est fini, pour que } f \text{ tende vers } l \text{ lorsque } x \text{ tend vers } x_0, \text{ il faut et il suffit} \\ &\text{que : } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in A, |x - x_0| \leq \eta \text{ et } x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \text{ »} \end{aligned}$$

Un lecteur débutant pourrait se demander d'où vient l'implication qui apparaît.

Dans un autre manuel d'analyse de première année scientifique, Guégand & Gavini, (1995) définissent la continuité d'une fonction de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{« } f \text{ continue en } a \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon. \text{ »} \end{aligned}$$

Le lecteur débutant pourrait se demander où est passée l'implication.

Ce jeu d'apparition/disparition de l'implication qui, dans ces deux ouvrages n'est pas commenté, est mis en relation avec la pratique mathématique de la quantification bornée.

La quantification bornée consiste à restreindre le domaine de quantification sur les éléments qui vérifient l'antécédent (Durand-Guerrier, 2003). Ce type de quantification, fréquent en mathématique, est absent dans le calcul des prédicats. Par exemple l'écriture

mathématique : $\forall x \in A \ F(x)$, se traduit dans le calcul des prédicats par $\forall x (x \in A \Rightarrow F(x))$, si bien que la quantification bornée « cache » l'implication.

Conclusion

- 1- Les formalisations logico-mathématiques proposées pour les définitions de la continuité, de la limite et de la discontinuité sont différentes d'un manuel à l'autre.
- 2- Dans certaines expressions, nous avons repéré la présence de la quantification bornée ; sa pratique engendre un phénomène d'apparition/disparition de l'implication et de la quantification qui produit des écritures non conformes à la syntaxe logique, et qui génèrent de l'ambiguïté.
- 3- Il semble y avoir une illusion de transparence sur le passage du langage vernaculaire à l'écriture relativement formalisée, dans la mesure où ce passage est peu, voire pas, travaillé.

Référence classique en didactique des mathématiques

En continuité du cadre théorique, nous présentons une référence classique en didactique des mathématiques. Il s'agit de Dubinsky et Yiparaki (2000) qui ont mené un travail sur la compréhension par des étudiants scientifiques des énoncés du type AE et EA donnés en langue naturelle. En particulier ils cherchent à savoir si la différence de syntaxe est considérée ou non.

AE : désigne les formulations du type : "Pour tout... il existe...". Il s'agit des énoncés de la forme : $(\forall x) (\exists y) R(x, y)$, où R est une relation binaire.

EA : désigne les formulations du type : "Il existe... pour tout...". Il s'agit des énoncés de la forme : $(\exists c) (\forall d) S(c, d)$, où S est une relation binaire.

Ce travail a mis en évidence la tendance des étudiants à interpréter systématiquement les énoncés comme AE. L'étude a montré, en outre, certaines difficultés pour interpréter et distinguer ces énoncés dans un contexte mathématique et non mathématique.

Selon les auteurs, les étudiants sont beaucoup plus capables de traiter les énoncés non mathématiques que les énoncés mathématiques. En effet, pour les énoncés mathématiques : il y a une mauvaise gestion des quantificateurs et une interprétation non pertinente des énoncés AE et EA.

Première expérimentation : présentation, catégorisation élaborée et résultats

Les éléments du cadre théorique nous ont permis de mettre en place une première expérimentation sous forme d'un test écrit en élaborant une grille d'analyse pour organiser les résultats recueillis. Nous présentons dans la suite notre première expérimentation, notre catégorisation élaborée et quelques résultats.

Présentation :

L'objectif de cette expérimentation est de :

- ✓ examiner la question de l'articulation entre logique et mathématique dans les productions écrites des étudiants
- ✓ analyser la manière dont les étudiants mobilisent le formalisme en particulier l'introduction et la gestion de la quantification,
- ✓ déterminer les difficultés, *a priori*, qui pourraient être engendrées suivant le niveau de formalisme, l'économie du langage symbolique, les moments où il est indispensable d'utiliser les quantificateurs, etc.

Notre expérimentation, se présente sous forme d'un test écrit proposé aux étudiants tunisiens de la première année de la section Mathématiques-Informatique (MI₁) de la faculté des sciences de Bizerte, à la fin du premier semestre de 2001/2002. Ce test est composé de trois exercices classiques, concernant principalement les capacités en matière d'usage du formalisme, et est élaboré d'une part en fonction d'erreurs fréquemment rencontrées et, d'autre part, en tenant compte du fait que les connaissances mathématiques utilisées ne soient pas trop complexes. Nous avons recueillis 96 copies.

Pour analyser ces copies, nous avons retenus neuf variables candidates à être des variables didactiques dont nous présentons les plus importants :

- La position des quantificateurs dans un énoncé ; cette variable permet de tester si la position des quantificateurs au début ou à l'intérieur de la phrase a des conséquences sur la démarche démonstrative.
- La présence des deux types de quantificateurs : universels et existentiels, sous la forme AE ou EA ;
- La nature de la quantification (explicite ou implicite) ; cette variable permet de déterminer la conduite d'un raisonnement mathématique chez les étudiants en fonction de l'apparition

ou non de la quantification. Nous examinons cependant si la portée ou non des quantificateurs a un effet sur la forme sémantique de l'énoncé.

- La forme langagière des connecteurs et des symboles logiques ; cette variable permet de repérer le vocabulaire logico-mathématique employé dans les formulations proposées.

Dans notre travail, nous n'avons retenu que le premier exercice qui est le suivant :

On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathfrak{R}$ définie par :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = q.$$

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

Dans cet exercice, il y a la présence des symboles logiques traduisant les quantificateurs universels et existentiels.

La structure logique de la relation donnée est complexe, elle fait intervenir deux quantificateurs universels en tête de formule et un quantificateur existentiel à l'intérieur de la formule. Nous avons fait le choix d'accepter ce type de formulation pour les étudiants qui la produisaient.

En toute rigueur, pour que la syntaxe logique soit correcte, il est nécessaire de placer des parenthèses pour indiquer la portée des quantificateurs. Suivant l'habitude dans la classe mathématique, l'absence des parenthèses indique que l'équivalence était dans le champ du quantificateur universel.

La question en elle-même se répartit suivant trois propriétés, il s'agit de montrer en effet que :

($\mathfrak{R}$ est réflexive), ($\mathfrak{R}$ est antisymétrique) et ($\mathfrak{R}$ est transitive)

Nous rappelons les trois définitions en prenant dans le cas général une relation binaire $\mathfrak{R}$:

Réflexivité : $\forall p \quad p \mathfrak{R} p$

Formulation comportant une quantification universelle simple.

Antisymétrie : $\forall p \quad \forall q \quad (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p = q)$

Formulation comportant une quantification universelle double.

Transitivité : $\forall p \quad \forall q \quad \forall s \quad (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} s \Rightarrow p \mathfrak{R} s)$

Formulation comportant une quantification universelle triple.

Il est important d'analyser de plus près l'introduction et l'élimination de ces quantificateurs pour mettre en évidence l'articulation entre logique et mathématique et pour pouvoir anticiper les difficultés que pourraient rencontrer les étudiants.

Cet exercice nous a fourni des données riches et conséquentes sur la question centrale de notre travail concernant l'utilisation des quantificateurs, entre usage explicite et implicite, dans l'activité mathématique.

Catégorisation élaborée des réponses

La richesse et la variété des formulations produites par les étudiants nous a conduit à élaborer une grille d'analyse suivant deux axes, mettant en relation la logique et les mathématiques d'une part, et la logique et le langage d'autre part.

Premier axe :

Le premier axe comporte trois niveaux : le premier niveau est ordonné suivant la présence ou l'absence des deux types de quantificateurs

Premier niveau : Apparition des quantificateurs universel et existentiel

Nous avons classé les formulations suivant trois catégories :

Catégorie n°1 : Présence explicite des deux types de quantification (Q2)

Catégorie n°2 : Présence explicite d'un seul type de quantification (Q1)

Catégorie n°3 : Absence totale d'un marqueur explicite de quantification (Q0)

Chacune des trois catégories est ramifiée suivant la présence ou l'absence d'un argument mathématique pertinent même s'il y a des erreurs de syntaxe logique, ce qui donne lieu au deuxième niveau :

Deuxième niveau : Argument mathématique

Ici, les formulations sont classées suivant deux catégories.

Catégorie n°1 : Présence d'un argument mathématique (AM)

Catégorie n°2 : Absence totale d'un argument mathématique ($\neg$ AM)

Dans le cas où cet argument est présent nous déterminons s'il y a une articulation entre logique et mathématique ou non, d'où le :

Troisième niveau : Articulation entre logique et mathématique :

Ce niveau est mis en place lorsque nous marquons, d'une part, la présence d'au moins un quantificateur dans le premier niveau, et d'autre part, la présence de l'argument mathématique dans le second niveau. Ce qui nous intéresse, c'est de regarder comment cette articulation va trouver sa place dans un raisonnement mathématique.

D'autre part, si l'argument mathématique est présent sans faire intervenir dans la formulation des éléments de logique, alors nous déclarons qu'il y a absence totale d'une

articulation entre logique et mathématique. Ainsi, nous avons classé ce niveau suivant deux catégories :

Catégorie n°1 : Présence d'une articulation entre logique et mathématique (ALM)

Catégorie n°2 : Absence d'une articulation entre logique et mathématique ($\neg$ ALM)

Ce premier axe peut-être résumé suivant des triplets ou des couples selon que la réponse présente ou non un argument mathématique. Nous formons ainsi, huit catégories qui sont les suivantes :

C1= (Q2,AM,ALM)	C4= (Q1,AM,ALM)	C7= (Q0,AM)
C2= (Q2,AM, $\neg$ ALM)	C5= (Q1,AM, $\neg$ ALM)	C8= (Q0, $\neg$ AM)
C3= (Q2, $\neg$ AM)	C6= (Q1, $\neg$ AM)	

Deuxième axe

Cet axe concerne le langage utilisé dans chaque type de formulation produite. Nous distinguons les types de langages suivant trois niveaux :

Premier niveau : Langage formalisé

Nous distinguons deux catégories suivant la pertinence de la formulation du point de vue syntaxe logique.

Catégorie n°1 : Syntaxe logique correcte (L1)

Catégorie n°2 : Syntaxe logique incorrecte (L2)

Deuxième niveau : Langage mixte (L3)

Il contient à la fois des éléments du langage formalisé et des mots de la langue (donc, on a, avec...).

Troisième niveau : Langage vernaculaire (L4)

Dans ce niveau, tout est écrit en langage non formalisé à l'exception des symboles mathématiques.

Grille d'analyse

La prise en compte de nos deux axes d'analyse nous ont permis de construire un tableau à double entrée : une entrée verticale de la catégorisation du premier axe de l'articulation entre logique et mathématique, et une entrée horizontale, de la catégorisation du second axe de l'articulation entre logique et langage.

Dans ce document, nous présentons les résultats relatifs à la propriété de l'Antisymétrie :

$$\forall p \forall q (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p = q).$$

Rappelons que : $\mathfrak{R}$ est définie par : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = q$.

Dans cette question, les étudiants ont à manipuler les deux types des quantificateurs universel et existentiel.

En analysant les réponses des étudiants selon les différentes catégories élaborées auparavant, nous avons obtenu le tableau suivant :

Tableau-Antisymétrie-

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	Total	%
L1	3		15			5			23	28,75
L2			5			24		8	37	46,25
L3			5		2	9		2	18	22,5
L4								2	2	2,5
Total	3	0	25	0	2	38	0	12	80	
%	3,75	0	31,25	0	2,5	47,5	0	15		

Comme l'indique le tableau, il n'y a aucune réponse correspondant aux catégories codées respectivement en C2, C4 et C7.

Nous pouvons lire qu'il y a 28 réponses utilisant les deux quantificateurs (Q2), 40 utilisant un seul type de quantificateur (Q1) et 12 ne proposant aucune quantification. Nous constatons également que seuls 5 étudiants fournissent un argument mathématique pertinent (3 dans C1=(Q2,AM,ALM) et 2 dans C5=(Q1,AM,¬ALM)). Ceci, chaque fois que l'étudiant écrit ce qui permet de discuter suivant les valeurs des entiers non nuls n et m l'équation " $p^m = p$ "; c'est-à-dire à chaque fois que nous trouvons " $n = 1$ et $m = 1$ ".

Analyse suivant le premier axe

- La catégorie la plus représentée correspond à C6, où on trouve 38 réponses utilisant un seul quantificateur avec absence d'un argument mathématique (47,5%). Nous illustrons par l'exemple suivant :

Copie1 : « $\left. \begin{array}{l} p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q \\ q \mathfrak{R} p \Leftrightarrow q^n = p \end{array} \right\} \Rightarrow p = q$ »

Ici, il y a un usage erroné des variables et la justification de l'antisymétrie est formellement incomplète.

- Seuls 5 étudiants fournissent un argument mathématique correct : 3 dans C1=(Q2,AM,ALM) et 2 dans C5=(Q1,AM,-ALM). Voici un exemple en (C5,L3) :

Copie2 : « $\exists \alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^\alpha = q$ et $\exists \beta \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^\beta = p \Rightarrow \begin{cases} p^\alpha = q \\ q^\beta = p \end{cases}$
 $\Rightarrow p^{\alpha\beta} = p \Rightarrow \alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 1$. Donc $p = q$ »

Il n'y a pas ici de quantification universelle introduisant les deux variables p et q , l'argument mathématique est bien justifié. Il y a très peu de copies pour lesquelles apparaissent, de manière aussi claire, une articulation entre logique et mathématique. Le langage mixte semble permettre une meilleure articulation.

Analyse suivant le second axe

- La catégorie la plus représentée correspondant à L2 : 46,25%, la syntaxe logique est largement utilisée, présence d'une syntaxe logique non contrôlée et dans chaque cas, absence d'une connaissance mathématique adaptée. En voici un exemple de (C6,L2) :

Copie3 : « $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*; \left. \begin{array}{l} p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow p^n = q \\ q \mathfrak{R} p \Leftrightarrow q^n = p \end{array} \right\} \Rightarrow p = q$ »

- Pour L3, le pourcentage correspondant est de 22,5%, réparti sur les catégories C3=(Q2,-AM), C5=(Q1,AM,ALM), C6=(Q1,-AM) et C8=(Q0,-AM) du premier axe. Cependant, seulement deux copies, classées dans C5 contiennent un argument mathématique. Le langage mixte semble permettre une articulation par les étudiants, ceci permet dans certains cas de renforcer le raisonnement conduit pour déduire le résultat. Par exemple :

Copie4 : « Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$; $\begin{cases} x \mathfrak{R} y \Rightarrow x^n = y \\ y \mathfrak{R} x \Rightarrow y^n = x \end{cases}$ Pour $n = 1$ on a $x = y$ et $y = x$ »

Choix des variables dans le champ du quantificateur existentiel

Pour affiner plus notre analyse, nous avons établi une autre catégorisation pour le choix des lettres dans l'utilisation des énoncés existentiels selon deux catégories.

- Première catégorie : Réponses pour lesquelles la variable, dans le champ du quantificateur existentiel, est désignée par deux lettres différentes. (17 copies)

$$\text{Copie5 : } \langle \forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2 \left\{ \begin{array}{l} x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / x^n = y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} x \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}^* / y^{n'} = x \end{array} \right. \Rightarrow x^n = y^{nn'} = y \Leftrightarrow x = y \rangle$$

$$\text{Copie6 : } \langle \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*; \left\{ \begin{array}{l} p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \\ \quad n = m \\ \quad p^n = q \\ q \mathcal{R} p \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \\ \quad m = n \\ \quad q^m = p \end{array} \right. \Rightarrow n = m \Leftrightarrow p = q \rangle$$

Pour la copie n°5, l'argument mathématique est absent : il n'y a pas de justification mathématique pour l'égalité des deux entiers "x" et "y".

Pour la copie n°6, bien que les deux variables introduites existentiellement soient différentes, le sujet a immédiatement construit chacune d'elles de telle sorte qu'elles soient égales. Dans une telle situation, il nous semble cependant que l'on peut penser que le sujet interprète l'existence comme une construction d'objet auquel il attribue une valeur choisie pour satisfaire la validité de l'énoncé. Ou peut être, il pense que l'égalité est nécessaire.

- Deuxième catégorie : Réponses pour lesquelles la variable, dans le champ du quantificateur existentiel, est désignée par la même lettre.

Cette catégorie est elle-même subdivisée en deux sous-catégories suivant le cas où :

Le quantificateur existentiel est écrit, nous avons rencontré (27 copies)

$$\text{Copie7 : } \langle \forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \left\{ \begin{array}{l} p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q \\ q \mathcal{R} p \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* q^n = p \end{array} \right. \text{ Pour } n = 1 \text{ } p = q \rangle$$

Il y a la présence des deux quantificateurs, le sujet cherche à construire l'objet "n" introduit existentiellement de telle sorte d'avoir la conclusion. Ainsi, pour vérifier la propriété de l'antisymétrie et avoir l'égalité " $p = q$ ", le sujet fait correspondre à l'entier n la valeur "1" qui résout bien l'équation " $p^n = q$ " d'inconnue "n".

Le quantificateur existentiel n'est pas écrit, nous avons rencontré (36 copies)

$$\text{Copie8 : } \langle \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^* ; \left. \begin{array}{l} p \mathcal{R} q \Leftrightarrow p^n = q \\ q \mathcal{R} p \Leftrightarrow q^n = p \end{array} \right\} \text{ donc } p = q \rangle$$

La variable "n" n'est pas introduite. Il y a une mobilisation non déclarée de l'existence et de la valeur de "n". Nous pensons que le sujet a écrit directement la conclusion " $p = q$ " pour avoir l'antisymétrie. Ou bien, les deux équations " $p^n = q$ " et " $q^n = p$ " permettent de voir que "n" vaut "1" et de déduire l'égalité.

Résultats

Cette étude a montré que la présence des deux quantificateurs engendre des difficultés de construction d'un objet mathématique, et d'articulation entre logique et mathématique.

Les ambiguïtés relevées correspondent à une difficulté liée à une pratique du quantificateur universel qui est, soit implicite, soit absent d'une part, et à l'introduction du quantificateur existentiel pour produire un objet mathématique d'autre part.

Cette étude a montré également, une insuffisance de la part d'un nombre important d'étudiants, du contrôle des aspects syntaxique et sémantique d'une structure mathématique.

Approfondissement du questionnement didactique autour d'un concept mathématique

A l'issue de ces premiers résultats, nous avons décidé d'approfondir notre étude didactique en recentrant nos analyses sur l'alternance des deux types de quantificateurs avec un mode de recueil des données plus précis. Pour cela, nous avons choisi une notion mathématique sensible et archétype d'un moment d'enseignement de l'analyse, dont la définition nécessite l'usage des deux types de quantificateurs. Il s'agit d'une des toutes premières notions rencontrées en Analyse : la notion de borne supérieure. Ainsi, nous avons mise en place une deuxième expérimentation sur un concept mathématique en observant des binômes d'étudiants dans une situation de résolution d'exercices, suivie d'un entretien.

Pour finaliser cette étude, nous avons conduit une brève étude épistémologique autour de la notion de coupure de Dedekind, et nous avons repéré quelques éléments d'analyse didactique, en particulier chez Isabelle Bloch (2000), qui montre qu'il est difficile d'échapper au jeu sur les quantificateurs universel et existentiel lorsqu'on veut explicitement faire émerger un objet majorant permettant de prouver qu'une fonction donnée est majorée.

Formalisation de la notion de borne supérieure dans le calcul des prédicats

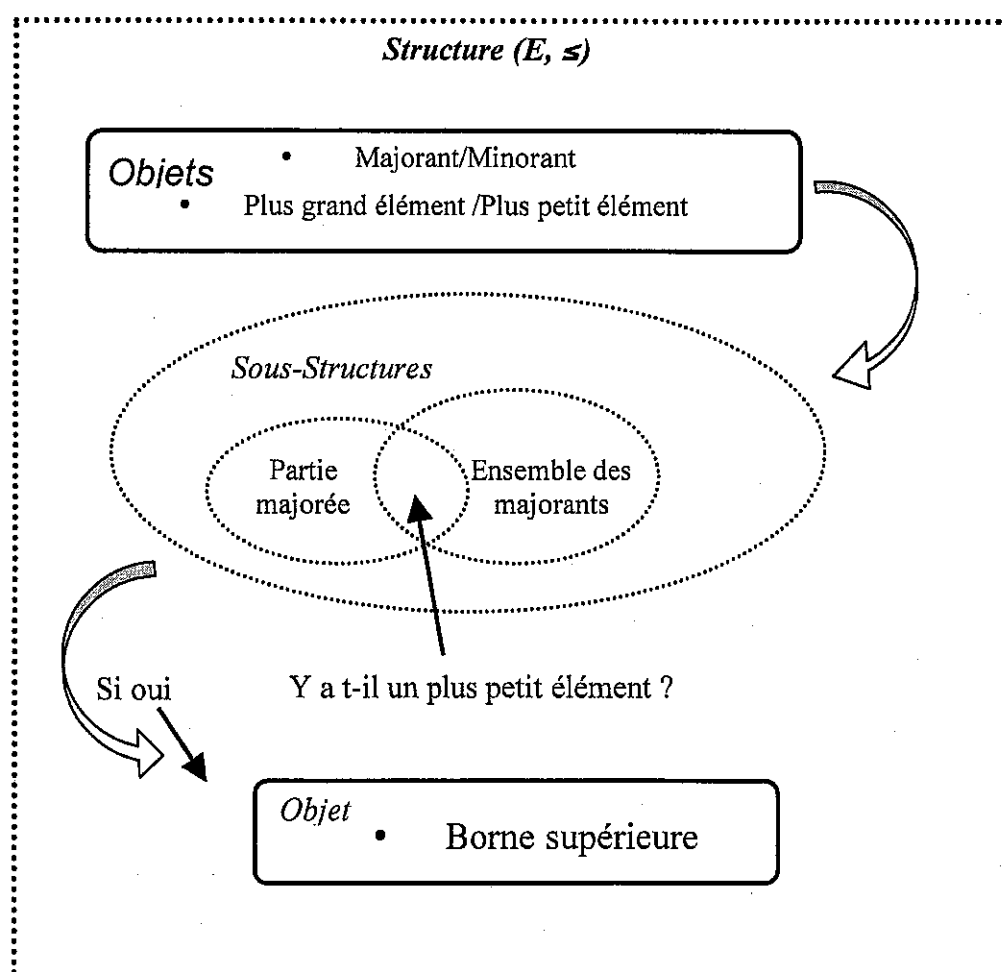
L'un des moyens pour se rendre compte de la complexité de la notion de borne supérieure est l'analyse logique de la notion de borne supérieure dans le calcul des prédicats. Nous

avons ainsi établi une formalisation et une structuration des objets et des structures mathématiques qui entrent en jeu dans la constitution du concept.

Nous avons adopté comme définition de référence celle de Schwartz (1991) qui est donnée entièrement dans un langage vernaculaire :

"On dit qu'une partie A de E admet une borne supérieure si l'ensemble de ses majorants admet un minimum, et ce minimum est appelé borne supérieure de la partie considérée. La borne supérieure est donc le plus petit majorant ; tout élément qui majore A majore aussi sa borne supérieure."

A la simple lecture de cette définition, commence à apparaître la complexité des notions en jeu. En désignant par $(E, \leq)$ un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq$ et par A une partie de E , nous avons élaboré un cheminement vers une définition de la notion de borne supérieure présenté par le schéma suivant :



La complexité de la structuration logique de la notion de borne supérieure fait émerger la nécessité d'un formalisme opératoire. Ce que nous allons essayer de présenter dans la suite.

Formalisation des objets :

« y est un majorant de A » relation qui s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)$ où $A(x) \Leftrightarrow x \in A$, il s'agit d'une phrase ouverte en y et close en x .

« y est un plus grand élément pour A » s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $A(y) \wedge \forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)$, énoncé également ouvert. Dans le vocabulaire équivalent, cet objet est aussi désigné par l'expression « y est un maximum de A »

Formalisation des structures :

« A est majorée » s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $\exists y \forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)$.

« A admet un plus grand élément » s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $\exists y [y \in A \wedge \forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)]$

Ces deux énoncés sont du type EA, ce sont deux énoncés clos³ en y et en x .

Dans le calcul des prédicats la relation « $\alpha = \sup A$ » s'exprime par l'énoncé suivant :

$$[\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq \alpha)] \wedge \forall y [(y < \alpha \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge y < x))]$$

Où nous pouvons distinguer :

$\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq \alpha)$: exprime que α est un majorant de A ;

$\exists x (A(x) \wedge y < x)$: exprime que y n'est pas un majorant de A ;

$\forall y [(y < \alpha \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge y < x))]$: exprime qu'aucun élément inférieur à α n'est un majorant de A ;

$[\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq \alpha)] \wedge \forall y [(y < \alpha \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge y < x))]$: exprime que α est le plus petit des majorants de A .

³ Énoncé où toutes les variables sont dans le champ des quantificateurs.

Approche de la notion de borne supérieure en première année universitaire

A la suite de ce travail, nous avons mené une approche de la notion de borne supérieure en première année universitaire en analysant cinq manuels, qui servent de références aussi bien théorique que pratique pour les enseignants et les étudiants, suivant quatre entrées différentes et complémentaires qui sont les suivantes :

- Langage utilisé où nous pouvons distinguer, le langage formel, le langage mixte (muni des symboles mathématiques ou logiques) ou le langage naturel ;
- Le domaine de référence : on se situe dans une structure d'ensemble totalement ordonné, noté généralement par E , muni de la relation d'ordre générique $\leq$. Pour cela, le domaine spécifique est soit $(E, \leq)$, soit $(\mathbb{R}, \leq)$;
- Le statut des lettres apparues dans les formulations. Nous pouvons distinguer la modalité de chaque variable : explicite ou implicite ;
- La quatrième entrée permet de soulever l'apparition de l'objet *majorant* avant ou après la propriété de la structure d'être *majorée*.

D'autre part, pour cette approche, nous avons analysé des notes de cours, proposées aux étudiants dont nous admettons qu'elles servent en partie de modèle pour les enseignants chargés des cours ou des travaux dirigés, suivant les entrées précédentes et en les situant par rapport aux manuels.

Résultats

L'analyse des manuels, et des notes de cours autour du concept de la borne supérieure, a mis en relief essentiellement les points suivants :

L'objet *élément majorant* est le plus souvent défini à partir de la structure *être une partie majorée*,

Le statut des lettres est le plus souvent instable, surtout lorsqu'il s'agit de manipuler une même lettre variable,

L'existence et l'unicité des objets : *plus petit élément* et *borne supérieure* sont généralement assumées, et signalées plutôt qu'affirmées et explicitées.

Dans $\mathbb{R}$, l'objet *borne supérieure* est parfois défini avant de présenter l'axiome de la borne supérieure.

Le symbolisme logique est peu utilisé dans les manuels.

Cette analyse nous servira de référence, dans la deuxième approche didactique de notre travail, pour analyser les réponses des binômes dans une situation de résolution d'exercices.

Deuxième expérimentation

Notre deuxième expérimentation consiste à observer six binômes d'étudiants en situation de résolutions d'exercices. Cette expérimentation se déroule suivant deux étapes :

-Une première étape consiste à présenter à chaque binôme d'étudiants deux exercices à résoudre successivement suivant nos indications. Ceci nous permettra de dégager, d'une part les types d'explicitations utilisées par le binôme et, d'autre part, les difficultés rencontrées.

-La deuxième étape se décompose en deux temps :

entretien semi-directif, déroulement à partir de la première étape,

questionnement général sur l'enseignement de borne supérieure au lycée et à l'université et sur l'articulation entre la logique et les mathématiques.

L'entretien a fait apparaître plusieurs phénomènes dont nous présentons les plus importants.

Etrange définition d'un objet majorant

Le premier phénomène important concerne l'apparition d'une « étrange définition » d'un objet majorant. Suite à notre question, à savoir la définition d'un majorant, nous avons obtenu dans chacun des binômes la réponse formalisée suivante :

$$\text{« } \forall x \in A \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad x \leq M \text{ » } (1) \quad (\text{AE})$$

Dans cet énoncé, on peut remarquer d'une part l'utilisation d'un énoncé du type AE à la place d'un énoncé du type EA, et d'autre part la pratique consistant à considérer qu'affirmer l'existence introduit l'objet qui n'est pas, ici, nécessairement un majorant. Cette pratique est très présente dans les manuels et dans les notes de cours.

Difficultés dans la signification et l'usage des définitions

Le deuxième phénomène concerne l'apparition des difficultés dans la mobilisation de la définition.

Après la proposition de l'énoncé (1) (AE) par les étudiants, nous sommes intervenue en proposant l'énoncé EA correspondant :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leq M \quad (2)$$

Nous illustrons par une séquence de la transcription du binôme 1 :

1.J : Dans (1), quel que soit x appartenant à E .

2.T : Oui, on peut utiliser (1).

3.J : Non, non, quel que soit x appartenant à E , il existe M appartenant à $\mathbb{R}$.

4.T : Oui, les deux sont justes.

Il existe M appartenant à $\mathbb{R}$, quel que soit x appartenant à E , x inférieur à M .

L'écriture mathématique est différente.

Il y a une différence d'interprétation des définitions pour caractériser un majorant :

Pour l'étudiant J, il y a un rejet de l'énoncé EA et un choix de l'énoncé AE : ici, la syntaxe est porteuse de sens.

Pour l'étudiant T, les deux énoncés AE et EA gardent le même sens, bien qu'il y ait une certaine différence dans l'ordre de l'écriture des deux quantificateurs : ici, la syntaxe n'affecte pas la signification.

Nous pouvons lire plus loin dans la transcription du même binôme :

5.J : Oui, on peut ici, puisque il existe M appartenant à $\mathbb{R}$, E est inclus dans $\mathbb{R}$, et il existe M appartenant à $\mathbb{R}$.

Comme on peut le mettre à l'extérieur de E on peut le faire à l'intérieur de E .

Ici, il y a un problème d'existence qui est interprétée comme un choix. *a priori* ; dans son raisonnement, l'étudiant commence par marquer le réel M comme s'il était introduit universellement : il peut être à l'extérieur et à l'intérieur de l'intervalle.

6.T : Non, ce n'est pas un majorant, M est un majorant de E , M n'appartient pas à E .

Suivant cette réplique, il semble à nouveau y avoir dissociation entre la définition et les objets qu'elle devrait permettre de définir : la définition n'est pas perçue comme caractérisant certains objets.

7.J : Dans (1) M peut être un majorant.

Ici, l'affirmation de l'étudiant J est correcte ; par contre la formulation proposée ne joue évidemment pas son rôle de définition. En effet, l'énoncé (1) permet d'introduire un objet, qui peut être ou non un majorant de la partie considérée.

Il y a deux interprétations possibles : J veut dire que ce point M placé satisfait (1), ou bien, dans le cas où la partie est majorée, on peut choisir M de sorte qu'il vérifie (2)

On voit ici les difficultés à manipuler les définitions et les propriétés : ceci renvoie au fait de savoir ce qu'est une définition.

D'autre part, il y a une différence entre les étudiants T et J : l'étudiant T essaye de modifier la formule pour qu'elle permette de caractériser un majorant, alors que l'étudiante J accepte que la formule ne caractérise pas un majorant.

Instabilité sur le vocabulaire choisi

Certaines ambiguïtés que nous avons relevées et explicitées précédemment, correspondent au vocabulaire choisi par les étudiants. Ceci conduit à faire l'hypothèse qu'il y a un écart entre ce qui est dit par un étudiant et ce qu'il veut exprimer et expliciter. Les ambiguïtés sur le vocabulaire sont inhérentes à l'activité mathématique. De plus les expressions contenant des quantificateurs multiples génèrent de l'ambiguïté en raison même de la grammaire de la langue française. Cependant, dans notre population, les difficultés sont *a priori* renforcées par le fait que le français n'est pas la langue maternelle et qu'en outre la majorité des étudiants ont étudié les mathématiques en arabe jusqu'à la fin de l'école de base (15-16 ans).

Dans la suite, nous proposons d'étudier les difficultés liées au vocabulaire choisi par les étudiants en analysant quelques phénomènes repérés dans le binôme choisi.

8.J : $\sup$ de A plus B est inférieur ou égal à $\sup$ de A plus $\sup$ de B , donc $\sup$ de A plus $\sup$ de B est un majorant de $\sup$ de A plus B .

9.T : Et $\sup$ de A plus B est un majorant de $\sup$ de A plus $\sup$ de B .

A partir de ces deux répliques, nous pouvons formuler *a priori* ces trois hypothèses :

confusion entre l'objet borne supérieure d'un ensemble et la structure de ce même ensemble : $\sup(A+B)$ est considéré comme un ensemble $A+B$.

confusion entre un majorant et l'expression "supérieur ou égal" : traduction de "majorant" comme étant "plus grand que".

effet de la notation qui renvoie à une structure plutôt qu'à un objet. En effet, la notation *sup* est complexe et non habituelle pour désigner des objets.

Ainsi, il devient possible de comprendre qu'un étudiant, tout en disant une chose, veuille aussi dire quelque chose d'autre, non explicitement énoncé, et que son interlocuteur puisse accepter cet énoncé du fait même que ce qui est dit n'est pas explicitement signifié.

Nous pouvons aussi lire dans la suite de la même transcription :

10.Int : Bon d'accord, on va essayer de comprendre ensemble la démonstration.

Juste une petite remarque, si vous voulez montrer qu'une proposition est vraie et vous dites qu'on va démontrer par l'absurde, ça veut dire quoi ?...

11.T : Ça veut dire que c'est l'inverse.

12.J : Non, contraire.

13.T : On va trouver à la fin le contraire de ce qu'on veut démontrer.

14.Int : Bon, si vous voulez, on passe à la question suivante.

15.J : A et B sont la négation. A est la négation de B.

16.T : A est le contraire de B.

17.J : Ils sont différents.

18.Int : Est ce que vous pouvez déterminer l'intersection des deux ensembles A et B ?

19.T : L'ensemble vide, A est l'opposé de B ou B est l'opposé de A.

20.J : A est différent de B.

Dans ce bref échange, apparaît une interrogation sur le vocabulaire des oppositions (*inverse, contraire, négation, différent*).

Résultats

Les résultats obtenus confirment que la complexité de la structure logique d'un énoncé mathématique fait apparaître des difficultés dans l'usage du langage formalisé, et dans sa mise en relation avec le langage vernaculaire et avec les ostensifs graphiques, dans l'articulation des quantificateurs avec l'argument mathématique, et également dans la mobilisation des définitions et des propriétés.

A partir du moment où aucune quantification n'est mise en jeu, les étudiants s'engagent dans une démarche de preuve sans problème ; ceci conforte *a posteriori* notre troisième hypothèse de recherche selon laquelle les étudiants maîtrisent les raisonnements classiques faisant appel aux connecteurs propositionnels.

Conclusion & perspectives

Conclusion

Les résultats didactiques ont montré que le formalisme symbolique et logique ne remplit pas son rôle de clarification conceptuelle dans la population étudiée. En effet, les résultats

de la première expérimentation mettent en évidence des difficultés pour les étudiants de mobiliser de manière rigoureuse les énoncés quantifiés et en particulier ceux du type AE, d'une part, et montrent que la présence du symbolisme logique ne favorise pas la production d'un argument mathématique, d'autre part.

Egalement, dans la seconde expérimentation nous avons repéré des phénomènes didactiques et des difficultés qui sont généraux et spécifiques aux six binômes. Il s'agit principalement de la non prise en compte de l'ordre dans l'alternance des quantificateurs ; de la tendance à mobiliser prioritairement les énoncés sous la forme AE par rapport aux énoncés EA, et de la pratique courante selon laquelle l'affirmation de l'existence introduit l'objet.

L'analyse des manuels et des notes de cours montre un usage instable de la syntaxe logique concernant les questions de quantification, et laisse entrevoir que la complexité de ce concept et de ses usages est sous-estimée par les enseignants. En effet, la production par les étudiants d'une « étrange définition » de la notion de majorant nous semble en être une conséquence.

L'ensemble de ce travail illustre la nécessité de prendre davantage en compte les questions de quantification dans l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Perspectives

Une des pistes de recherche est d'essayer de repérer comment les modalités d'élaboration et de conceptualisation d'une notion mathématique pourraient être sensibles aux questions de quantification.

Une autre piste que nous souhaitons explorer concerne l'étude des pratiques effectives des enseignants dans l'enseignement supérieur concernant les questions de quantification, d'une part en confrontant nos analyses au regard porté par ces enseignants sur certaines productions d'étudiants, d'autre part en conduisant des observations en situation de classe - cours ou travaux dirigés - afin d'étudier comment sont gérées les questions en relation à la quantification dans l'activité mathématique.

Nous pensons cependant être en mesure de proposer un programme d'apprentissage des éléments de logique utile aux mathématiques, particulièrement la quantification, à destination des étudiants arrivant à l'université, prenant en compte explicitement la nécessité de l'articulation entre quantification et conceptualisation, et pouvoir en évaluer les effets.

Bibliographie

BLANCHE R. (1968), *Introduction à la logique contemporaine*, Armand Colin, Paris.

BLOCH I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

CHELLOUGUI F. (2004), L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite, Thèse de doctorat en co-tutelle entre Lyon1 et Tunis, soutenue à l'Université Claude Bernard Lyon1.

CHAMBADAL L. & OVAERT J-L., (1966), *Cours de mathématiques*, Tome1 : notions fondamentales d'algèbre et d'analyse, Paris, Gauthier-Villars.

DUBINSKY E & YIPARAKI O. (2000), On student understanding of AE and EA quantification, *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, CBMS Issues in Mathematics Education, 8, pp.239-289. American Mathematical Society: Providence.

DURAND-GUERRIER V. (2003), Which concept of implications is the right one? From logical considerations to has didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics*, n°53, pp.5-34, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

DURAND-GUERRIER V. & ARSAC G. (2003), *Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques : Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.23, n°3, pp.295-342. La Pensée Sauvage Editions.

GUEGAND J. & GAVINI J-P. (1995), *Analyse : prépa H.E.C ; Scientifique-1^{ère} année*, Ellipses.

QUINE W.V.O. (1960), *Word and Object*, MIT Press, Flammarion, pour la traduction française, 1977.

QUINE W.V.O. (1970), *Philosophy of logic*, Prentice-Hall, Traduction française Aunbier, 1975.

SCHWARTZ L. (1991), *Analyse I, Théorie des ensembles et topologie*, Hermann