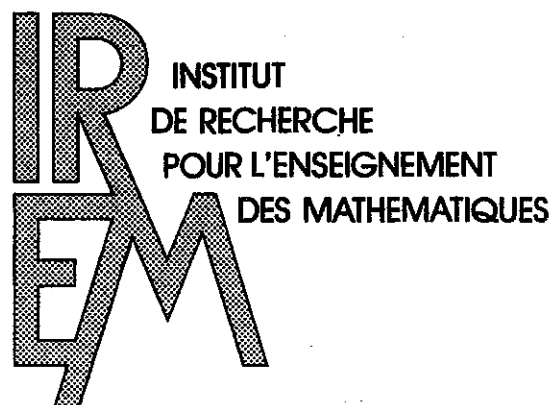


ASSOCIATION
POUR LA
RECHERCHE
EN
DIDACTIQUE
DES
MATHÉMATIQUES



Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2006

Édités par Ghislaine Gueudet et Yves Matheron

*CREAD et IUFM de Bretagne,
GRIDIFE - ERTe 46 & UMR-ADEF et IUFM de Midi-Pyrénées*

ARDM et IREM de Paris 7

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2006

*Édités par Ghislaine Guendet et Yves Matheron
CREAD et IUFM de Bretagne,
GRIDIFE - ERTe 46 & UMR-ADEF et IUFM de Midi-Pyrénées*

*Illustrés par Serge Cecconi
IREM de Grenoble*

ARDM et IREM de Paris 7

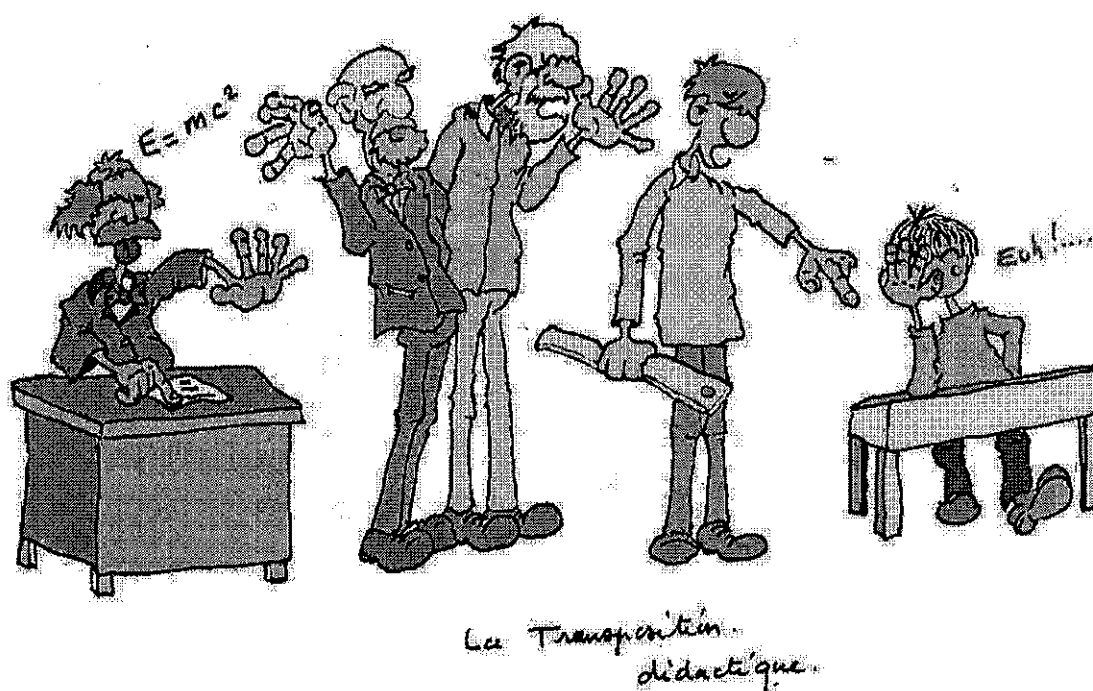
Nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué à la réussite de ce séminaire durant l'année 2006 : intervenants, public, personnels administratifs de l'Université Paris 7.

Serge Cecconi a bien voulu en les illustrant, rajouter une touche humoristique à certains des articles composant ces actes. Il en a donc été un des tout premiers lecteurs et a accepté d'en prendre connaissance dans des délais très (trop) courts, compte tenu des contraintes d'édition. Qu'il soit ici chaleureusement remercié pour cette collaboration.

Les organisateurs du séminaire

Ghislaine Gueudet

Yves Matheron



Sommaire

Le séminaire national de didactique des mathématiques de l'année 2006 a comporté deux séances spéciales, qui se sont toutes deux déroulées à l'Institut Henri Poincaré. Il s'agissait, en mars, d'une séance co-organisée par l'ARDM et le comité scientifique de la dix-septième étude ICMI : « Repenser les TICE ». C'est aussi à l'occasion de ce séminaire de mars que Luc Trouche a présenté le site Educmath ; on trouvera en fin de ce volume les grandes lignes de cette présentation. En octobre, s'est déroulé le deuxième colloquium de didactique des mathématiques, lors duquel André Deledicq, premier récipiendaire (2003) du prix Erdős, a présenté une intervention intitulée : « Apprendre les mathématiques : de l'urgence à la jubilation ».

RESUMES

3

TEXTES DES COMMUNICATIONS

Textes de synthèse

Denis BUTLEN	Mars	13
Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles.	2006	
Corine CASTELA	Mars	33
Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de Première scientifique.	2006	
Bernard SARRAZY	Octobre	79
Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques : fondements épistémologiques et ancrages théoriques.	2006	

Thèmes mathématiques

Faïza CHELLOUGUI	Janvier	101
L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite.	2006	
Floriane WOZNIAK	Octobre	123
Enseigner la statistique en classe de seconde : conditions et contraintes	2006	

Enseignants et formation des enseignants

<i>Sylvie COPPE</i>	Janvier	139
Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale.	2006	
<i>Francia LEUTENEGGER & Florence LIGOZAT</i>	Janvier	169
Processus contractuels dans le traitement d'un problème d'agrandissement de distances. Eléments d'une modélisation de l'action conjointe professeur -élèves	2006	
<i>Lalina COULANGE</i>	Octobre	215
Etude des pratiques de professeurs de mathématiques « néo-titulaires » dans des collèges de zones d'éducation prioritaire	2006	

Intégration des technologies dans l'enseignement

<i>Mariam HASPEKIAN</i>	Mars	245
Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Etude du cas des tableurs.	2006	
<i>Sophie RENE de COTRET</i>	Mars	271
Conception et mise à l'essai de « Bouchons les trous » un environnement informatisé pour le travail de mise en équations algébriques ...et deux autres sujets.	2006	
<i>Kenneth RUTHVEN</i>	Mars	313
Les représentations des praticiens sur l'usage des technologies dans l'enseignement des mathématiques au secondaire en Angleterre	2006	
<i>Rossana FALCADE</i>	Octobre	337
Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement qui utilisent Cabri-géomètre et qui visent à l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction.	2006	
<i>Luc TROUCHE</i>	Mars	367
Présentation du site web EducMath http://educmath.inrp.fr	2006	

Résumés des contributions présentes dans ce volume.

Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire.

Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles.

Denis BUTLEN

denis.butlen@creteil.iufm.fr

Dans un premier temps, je présente une synthèse de mes travaux portant sur les élèves en difficulté, notamment ceux concernant les élèves issus de milieux socialement défavorisés. Il mettent d'une part en évidence l'absence de certains pré-requis nécessaires à l'apprentissage des structures additives et multiplicatives. D'autre part, ces recherches ont permis d'identifier des cheminements cognitifs spécifiques aux élèves en difficulté issus de milieux populaires.

Dans un deuxième temps, une analyse de pratiques effectives de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP débouche sur une première catégorisation et une identification de gestes et routines professionnels associés. Cette catégorisation s'appuie sur la prise en compte de la double mission du professeur des écoles : instruire et éduquer.

Dans un troisième temps, une analyse de conditions de formation des pratiques enseignantes débouche sur des pistes pour la formation initiale et continue des professeurs des écoles.

Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de Première scientifique.

Corine CASTELA

Corine.Castela@rouen.iufm.fr

Mon intervention sera un prolongement du cours que j'ai présenté à l'école d'été (Août 2005). Je montrerai d'abord rapidement sur quoi je fonde l'hypothèse selon laquelle la réussite scolaire en mathématiques suppose que les élèves réalisent des apprentissages ignorés par l'institution d'enseignement. Ayant ainsi justifié mon intérêt pour le travail personnel des élèves, je proposerai une réflexion sur la répartition des responsabilités entre élèves et professeur dans le processus paradoxal d'apprentissage autodidacte en milieu scolaire. Ceci me conduira à travailler sur le modèle de structuration du milieu : je chercherai à caractériser le niveau 0 dans le cas d'une situation didactique d'enseignement

de façon à pouvoir différencier la position E0 des positions E1 et E2 d'élève-autodidacte que je proposerai d'introduire aux niveaux sur-didactiques.

Ces outils étant présentés, je montrerai comment ils me sont utiles pour analyser des entretiens au cours desquels des élèves de Première scientifique racontent le travail qu'ils ont effectué pour préparer leur dernier contrôle de mathématiques.

**L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année
d'université, entre l'explicite et l'implicite.**

Faïza CHELLOUGUI

chellouguifaiza@yahoo.fr

Dans cette communication, nous présentons une synthèse des aspects théoriques de notre travail de thèse (Chellougui 2004), ainsi que quelques résultats expérimentaux. Ce travail s'inscrit dans le cadre de recherches sur l'articulation entre logique et raisonnement mathématique dans une perspective didactique.

Dans la première partie de notre exposé, nous présentons les éléments d'une étude théorique sur le formalisme mathématique, qui nous a fourni un cadre de référence pour analyser les résultats d'une première expérimentation. L'objectif de cette expérimentation est d'étudier, à travers un exercice, la gestion des quantificateurs universel et existentiel entre l'explicite et l'implicite, par des étudiants de première année universitaire. Cette étude confirme la grande sensibilité des résultats aux contenus, des difficultés dans la production d'un argument mathématique et des phénomènes liés à la dépendance des lettres variables. Ceci nous a conduit à approfondir nos analyses didactiques en choisissant un objet sensible enseigné à l'université : il s'agit de la notion de borne supérieure. Cette étude fait l'objet de la deuxième partie de notre exposé.

Dans la deuxième partie de notre exposé, nous présentons une formalisation logique des objets et des structures qui interviennent dans la définition de l'objet borne supérieure. Notre travail illustre la thèse de Quine (1960, 1970) selon laquelle l'enrégimentement des énoncés dans le calcul des prédicats est la pierre de touche de la clarté conceptuelle. Nous proposons une analyse des manuels et des notes de cours autour de l'objet borne supérieure à la lumière de l'étude précédente. Les résultats montrent la variété des choix de présentations pour définir des objets et des structures mathématiques, révélant une sous estimation de cette complexité et laissant prévoir des difficultés de manipulation des

définitions par les étudiants. Ceci nous a conduit à mettre en place une deuxième expérimentation avec des binômes d'étudiants dans une situation de résolution d'exercice et un entretien, autour de l'objet borne supérieure. Cette étude a fait apparaître, d'une part, des phénomènes didactiques liés à l'alternance des deux types des quantificateurs, et d'autre part des difficultés dans la mobilisation de la définition des objets et des structures qui illustrent un problème majeur dans le processus de conceptualisation.

**Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la
préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale.**

Sylvie COPPE

sylvie.coppe@univ-lyon2.fr

Nous présenterons les premiers résultats d'une recherche en cours visant à déterminer comment les professeurs préparent leurs séances de classe. Nous faisons l'hypothèse que ce moment de préparation est un moment fondamental dans l'activité du professeur parce que celui-ci doit mobiliser et articuler des connaissances relevant de différents types et de différents champs. De plus, nous pensons que mieux connaître comment les professeurs réalisent cette tâche de préparation peut contribuer d'une part à déterminer des connaissances professionnelles et d'autre part, à améliorer la formation initiale (et continue) des professeurs.

Actuellement, nous nous sommes centrés sur les professeurs de mathématiques stagiaires en fin de formation initiale. Pour cela, nous avons réalisé et analysé quatre entretiens faits à la fin de la première année de formation en utilisant la méthodologie de l'entretien d'explicitation. Celle-ci vise à faire raconter comment ces professeurs ont fait pour faire cette préparation et à leur faire expliciter leurs choix (et non à expliciter une méthode générale).

Notre cadre théorique utilise la classification de Shulman (1987) complétée par une autre classification qui tend à déterminer l'origine de ces connaissances et par la distinction entre le caractère plus ou moins explicite des ces connaissances.

Dans la conclusion, nous montrerons les limites d'une telle étude qui peut cependant permettre de formuler des hypothèses de recherche qui devront être poursuivies.

**Etude des pratiques de professeurs de mathématiques « néo-titulaires »
dans des collèges de zones d'éducation prioritaire**

Lalina COULANGE

lalina.coulang@gmail.com

La recherche présentée correspond à un axe récent du projet de l'équipe de l'IUFM de Créteil, qui travaille déjà depuis plusieurs années, sur les pratiques des professeurs des écoles en ZEP (Butlen et al. 2004). Ces travaux concernant les pratiques de professeurs de collège ont été initiés par Jean-François Chesné et moi-même depuis 2005, et coïncident avec le fait que nous ayons été sollicités pour intervenir dans la formation des professeurs de mathématiques « néo-titulaires » dans des collèges de l'Académie de Créteil.

Nous disposons à ce jour de peu de résultats concernant les pratiques des professeurs enseignant dans des collèges ZEP. Un des objectifs de la recherche est dès lors de renseigner cette question. Mais le fait que les professeurs concernés soient débutants de surcroît (dans leur première année d'exercice), nous a conduit à adopter un point de vue spécifique dans l'étude de ces pratiques enseignantes. Nous les considérons *a priori*, comme des pratiques *transitoires* : « formées » récemment, destinées à évoluer ou à se stabiliser. Je présenterai dans un premier temps, les éléments d'une réflexion théorique à la croisée des différentes approches sur les pratiques enseignantes en didactique des mathématiques (TAD, TSD et double approche), qui vise précisément à prendre en compte cette spécificité dynamique dans l'étude des pratiques d'enseignants débutants. Puis j'exposerai quelques exemples d'analyse de pratiques de professeurs « néo-titulaires » en ZEP, développés à partir d'un corpus de données diverses, recueillies dans différents contextes : moments de préparation collective par quatre enseignants d'une séquence autour de l'introduction des fractions et observation de quelques-unes des séances correspondantes, entretiens de deux enseignants autour de leur formation initiale et observation de plusieurs séances autour de la symétrie axiale dans leurs classes de sixième, etc. Sur la base de ces études de cas, je pointerai quelques-uns des processus qui semblent à l'œuvre dans la formation et l'évolution des pratiques de professeurs « néo-titulaires » dans des collèges ZEP. En conclusion, j'interrogerai la portée de ces résultats, et je formulerai des questions qui renvoient à une étude plus systématique des pratiques *transitoires* de professeurs débutants et de leur évolution, dans différents contextes : collèges EP1, EP2, ou plus « ordinaires »...

Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement qui utilisent Cabri-géomètre et qui visent à l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction.

Rossana FALCADE

rossana.falcade@imag.fr

Une des directions actuelles les plus fécondes de la recherche en didactique des mathématiques cherche à étudier le processus d'apprentissage des mathématiques comme un processus de fabrication et d'internalisation de signes engendrés lors de l'activité avec un artefact.

Mon intervention cherchera à questionner le processus de médiation sémiotique mis en place lors de l'utilisation d'un artefact technologique, dans une séquence d'enseignement ayant pour objectif l'apprentissage des notions de variable, fonction et graphe de fonction.

Elle se développera selon trois axes principaux :

- la présentation de la séquence d'activités, en partant d'une analyse historico-épistémologique et du cadre inhabituel de la géométrie dynamique, rendu possible par l'environnement Cabri-géomètre.

En fait, en offrant une modélisation des objets géométriques en tant qu'objets variables, nous faisons l'hypothèse que ce cadre peut conduire à une appréhension dynamique et co-variationnelle des notions visées.

- La réflexion théorique sur l'articulation possible entre les deux paradigmes théoriques qui ont guidé la conception et l'analyse de la séquence : celui de la « Théorie de la Médiation sémiotique » inspirée par Vygotski et particulièrement développé en Italie et celui de la « Théorie des situations didactiques ».
- L'analyse du rôle de l'enseignant lors de l'orchestration de moments de discussions collectives.

En fait, au sein du processus de médiation sémiotique, l'enseignant occupe une place critique et cruciale. D'une part, par la proposition de tâches spécifiques avec l'artefact, il organise l'accès à certains signes. D'autre part, par une orchestration adéquate des discussions collectives, il soutient l'évolution de ces signes dans une dialectique étroite entre les signifiés personnels élaborés à partir de l'activité avec l'artefact, les signifiés mathématiques socialement partagés en cours de construction lors de l'activité de discussion collective et les signifiés mathématiques visés.

Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Etude du cas des tableurs.

Mariam HASPEKIAN

haspekian@math.jussieu.fr

Il s'agit, ici, de porter un regard didactique sur l'intégration d'un outil informatique professionnel dans l'enseignement des mathématiques : le tableur. Les recherches en didactique des mathématiques sur le tableur font apparaître ce dernier comme un outil idéal pour l'enseignement de l'algèbre de par sa nature arithmético- algébrique, mais la réalité des pratiques contraste avec ces potentialités didactiques et montre une très faible utilisation du tableur en classe de mathématiques. La réflexion développée dans ce texte se situe dans une approche instrumentale, perçue comme incontournable pour approcher les questions d'intégration technologique. Les éléments dégagés nous permettent alors de mieux cerner les difficultés d'intégration du tableur.

Processus contractuels dans le traitement d'un problème d'agrandissement de distances. Eléments d'une modélisation de l'action conjointe professeur -élèves

Francia LEUTENEGGER & Florence LIGOZAT

Francia.Leutenegger@pse.unige.ch

Florence.Ligozat@pse.unige.ch

Notre exposé se situe dans une perspective de *modélisation des gestes didactiques* observés en situation ordinaire d'enseignement et d'apprentissage. Les données sur lesquelles nous travaillons trouvent leur origine dans un ensemble de recherches plus vastes qui s'attachent à déterminer la place, la fonction et la gestion didactique de la *notion d'échelle* dans des enseignements de géographie et de mathématiques à la fin de l'école primaire et au début du secondaire (thèse en cours de V. Chiesa Millar ; Projet Ecole & Sciences Cognitives 2003). Plus particulièrement, notre exposé se propose de développer *une analyse didactique de l'action conjointe du professeur et de ses élèves* (6^{ème} année primaire - Genève) dans le cas du traitement d'un problème d'agrandissement de distances, représentées sur des cartes géographiques. Nous prendrons appui sur le *modèle de l'action du professeur* (au sens de

Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000), en le revisitant pour prendre en compte ce que nous appelons *l'action conjointe professeur/élèves*. Pour ce faire, nous tenterons d'articuler différents niveaux d'analyses dont l'analyse *a priori* du problème, le synopsis de l'activité effectivement observée, les systèmes d'attribution de connaissances qui existent entre les différents acteurs dans l'activité didactique, mais également dans les entretiens réalisés en amont et en aval de l'observation en classe. À l'aide des catégories mésogénétiques, topogénétiques et chronogénétiques de description du fonctionnement du contrat didactique, notre but est de mettre en évidence de quelle manière s'opère *la construction d'une référence conjoncturelle* pour l'action conjointe de l'enseignant et de l'élève. Parmi les objets venant à exister dans les interactions, quels sont ceux qui se constituent en « traits pertinents » pour le professeur ? pour les élèves ? Quels sont ceux qui sont le siège de « contradictions » ? Les tentatives de réponses engageront inévitablement une réflexion sur la nature des objets constitutifs du processus mésogénétique observé : sont-ils constitutifs d'un système porteur d'une organisation mathématique effective ou du moins potentielle ? Le corpus sur lequel nous travaillons devrait rendre visible les topos différenciés de certains élèves par rapport aux objets et aux systèmes de tâches mis à la disposition de tous par le professeur, mais également la construction chronogénétique du professeur qui, au fil de la séance, se nourrit d'une partie des micro-histoires différenciées naissant dans les groupes d'élèves visités au fil de la séance.

**Conception et mise à l'essai de « Bouchons les trous » un environnement informatisé
pour le travail de mise en équations algébriques ...**

et deux autres sujets.

Sophie RENE de COTRET

sophie.rene.de.cotret@umontreal.ca

La question posée pour ce séminaire est : Sur quoi travaillez-vous en ce moment ? J'ai choisi d'y répondre pour de vrai et de présenter trois recherches en cours, indépendamment de leur niveau d'avancement. Une recherche nouvelle sur la didactique du sens commun : Partant du constat que, même suite à un meilleur apprentissage de contenus disciplinaires, les élèves n'utilisent pas leur savoir scolaire dans le quotidien, comment faire en sorte que le sens commun, qui semble régir ce quotidien, s'arrête pour consulter le savoir scolaire

appris. Une autre, en redémarrage, sur la prise en compte de l'observateur et la notion de milieu : admettant que le milieu constitue ce à quoi est sensible le sujet (en quelque sorte son système antagoniste), chacun des intervenants de la classe agit dans son milieu et ce qu'en conçoivent les autres (élèves, professeur ou chercheur) est nécessairement lié à leur propre sensibilité, ce qui peut donner lieu à des milieux compatibles ou non. Enfin, face à la difficulté à appréhender les connaissances en jeu dans la validation des équations représentant un problème écrit, j'ai conçu un environnement informatisé qui avait pour fonction première la mise en évidence et l'observation de ces connaissances. Il s'est avéré être aussi un outil d'enseignement intéressant. C'est cette troisième recherche qui fera l'objet principal de la présentation.

**Les représentations des praticiens sur l'usage des technologies dans
l'enseignement des mathématiques au secondaire en Angleterre**

Kenneth RUTHVEN

kr18@cam.ac.uk

Malgré une rhétorique favorable à l'intégration des TIC dans l'enseignement des mathématiques, renforcée par un investissement important dans le matériel informatique et la formation professionnelle, la réalité internationale est que l'utilisation de ces technologies – à part les calculatrices – reste faible. Avec une histoire d'activité innovatrice et des conditions apparemment propices, l'Angleterre constitue un cas particulièrement aigu de cette énigme. Une analyse des prévisions curriculaires révèle une reconnaissance réservée de ces technologies et un manque d'attention aux questions d'instrumentation. Une étude des discours professionnels indique que les idées des enseignants sur l'usage réussi des TIC sont ancrées dans des représentations établies de la motivation des élèves et de l'apprentissage en classe. L'usage des TIC sert à réaliser des valeurs pédagogiques classiques, bien qu'il admette une rééquilibration des pratiques existantes. Une deuxième étude de la pratique professionnelle renforce ces conclusions, démontrant en particulier la forte influence de la culture empirique, surtout arithmétique, des mathématiques scolaires anglaises sur l'usage de la géométrie dynamique. Une synthèse est proposée qui prend en compte les analyses françaises homologues pour suggérer un modèle – adapté de l'étude de Laborde (2001) – des degrés d'intégration d'une technologie, et un modèle – reconnaissant l'analyse d'Artigue (2002) – du système socioculturel qui forme l'intégration des technologies. En conclusion, un défi systémique à

l'intégration des technologies est souligné, surtout dans les conditions où les enseignants ne sont pas considérés comme des interprètes d'un curriculum institutionnellement négociable, chargés de son adaptation et d'une innovation continue.

**Approche anthropo-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques :
fondements épistémologiques et ancrages théoriques**

Bernard SARRAZY

bernard.sarrazy@sc-educ.u-bordeaux2.fr

La plupart de mes travaux sur l'enseignement des mathématiques ont été, depuis une quinzaine d'années, plus au moins liés au contrat didactique et aux effets de son caractère indicible. Cet intérêt a conduit au développement depuis 1996 d'une approche anthropo-didactique des conditions de diffusion des connaissances mathématiques dans la scolarité obligatoire. Cette approche examine les situations scolaires comme le produit d'une double structuration : d'une part, elles se nouent toujours autour d'un savoir (d'un projet didactique), d'autre part elles exigent de ses membres, la pratique d'un jeu de langage spécifique à la forme scolaire (dimension anthropologique *lato sensu*). Ces dimensions qui définissent la situation n'y sont pas considérées comme de simples ingrédients qui viendraient se surajouter à la situation didactique, mais contribuent activement à la définition même de la situation d'enseignement. La prise en compte conjointe des conditions didactiques structurant le milieu repérables et analysables dans le cadre de la théorie des situations (Brousseau, 1998) et, des conditions non-didactiques – i.e. toutes conditions non encore identifiées dans un modèle didactique mais identifiables dans le cadre d'une approche anthropologique et repérables en tant que modalités d'assujettissement des individus à des formes culturelles – a permis de repérer des effets didactiques qui n'auraient pu être perçus seulement dans l'un ou l'autre cadre.

Cette approche de l'enseignement présente le double intérêt de poser la question de son étude sous l'angle d'une acculturation mathématique c'est-à-dire dans la perspective de l'apprentissage d'une activité spécifique, repérable institutionnellement, et de mettre en évidence le caractère indicible de ce qui est effectivement visé par l'enseignement. Que signifie « apprendre une pratique des mathématiques » et quelles conditions doivent être

examinées afin d'en rendre compte de façon raisonnable ? Telles sont les deux questions majeures qui définissent le projet anthropo-didactique.

Ce projet est redevable d'une part à la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997) et d'autre part à la philosophie de l'usage de Wittgenstein (1961) qui en constituent l'ossature épistémologique. En deçà de leurs différences, c'est fondamentalement une manière de traiter les problèmes de diffusion des connaissances mathématiques qui permet leur rapprochement : examiner les conditions susceptibles de *montrer* ce qui ne peut être dit et décrire les pratiques par et dans lesquelles les savoirs trouveront leurs sens, en refusant toute autre forme d'explication qu'un consensus non explicite dans l'action comme critère externe de toute compréhension.

Enseigner la statistique en classe de seconde : conditions et contraintes

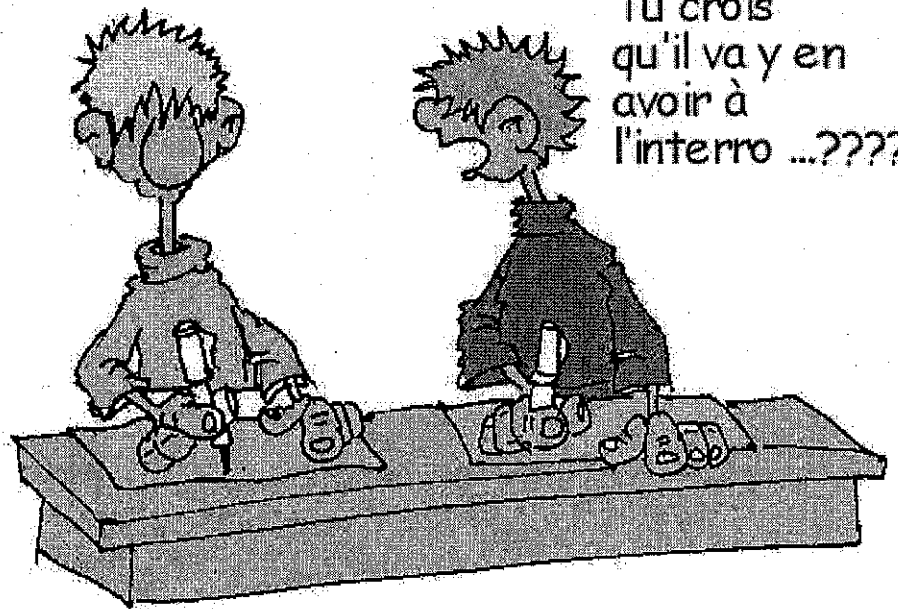
Floriane WOZNIAK

floriane.wozniak@lyon.iufm.fr

Former les citoyens à la pensée de la variabilité et à la gestion de l'aléatoire est aujourd'hui une question socialement vive – que nous apprennent les sondages ? que signifie la notion de « risque zéro » ? quels sont les enjeux de l'épidémiologie ?... – dont on montre ici, à propos de la classe de seconde, qu'elle est aussi didactiquement vive. Lorsqu'un professeur de mathématiques conçoit et réalise la partie de son enseignement relative à la statistique, sous quelles contraintes doit-il opérer ? Pourquoi les enseignements donnés semblent inexorablement converger vers une réduction arithmétique de la statistique ? Peut-on modifier ces contraintes pour rendre possible un enseignement plus « authentique » au plan épistémologique ? Qu'y peuvent les professeurs et leurs organisations professionnelles ? L'exposé s'emploiera à montrer comment, du triple point de vue des problématiques, des concepts, des méthodes, les outils de la théorie anthropologique du didactique permettent d'aborder l'étude de ces questions.



L'essentiel c'est....
de donner du sens
au SAVOIR !!!



Tu crois
qu'il va y en
avoir à
l'interro ...????

* Toute ressemblance n'est pas fortuite ...

Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire.

Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles

Denis Butlen,

IUFM de Créteil

Equipe DIDIREM, Université de Denis Diderot-Paris 7

Je présente dans cette contribution le contenu d'une habilitation soutenue en décembre 2004, en Sciences de l'Education (70^e section) à l'Université Paris VIII. Ce travail a été mené sous la direction d'Elisabeth Bautier et d'Aline Robert. Cette HDR s'appuie sur un ensemble de recherches menées en collaboration avec d'autres chercheurs : Monique Pézard, Marie-Lise Peltier et Pascale Masselot notamment.

L'analyse des difficultés des élèves en mathématiques, notamment celles rencontrées par les élèves de milieux populaires mais aussi la recherche de conditions permettant leur dépassement constituent l'objet premier et central de mes recherches. Cette question fédère l'ensemble de mes travaux.

J'ai fait le choix de présenter comment, pour traiter cette question des difficultés, j'ai progressivement articulé trois grandes séries de recherches.

Je présente ainsi les différents problèmes de recherche que j'ai abordés et le cheminement théorique qui l'accompagne.

Pour des raisons de temps, ce choix m'amène à ne pas développer des questions méthodologiques que je ne ferai qu'évoquer dans cet exposé.

La première série de travaux concerne les apprentissages numériques des élèves de l'école élémentaire, et plus particulièrement, les rapports qu'entretiennent sens et technique. Il s'agit plus particulièrement d'analyser les rapports existant entre le développement de la

maîtrise de techniques opératoires et le développement de la connaissance des nombres et des opérations en lien avec la résolution de problème.

La deuxième série de travaux est centrée sur l'étude des difficultés rencontrées par les élèves de milieux populaires dans l'apprentissage des notions mathématiques étudiées précédemment. Il s'agit à la fois du diagnostic de ces difficultés, de leur interprétation et d'une étude des conditions permettant de les surmonter.

La troisième série de travaux porte sur l'analyse des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques à des élèves issus de milieux particulièrement défavorisés. Cette analyse porte aussi sur la formation des pratiques enseignantes.

Cet exposé comporte trois parties :

1. Rapports entre maîtrise des techniques opératoires, connaissances sur les nombres et les opérations
2. Les difficultés des élèves de milieux populaires
3. Les pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP

Présentons la première problématique.

1. Travail de techniques opératoires, processus de conceptualisation et résolution de problèmes numériques

Ces premières recherches portent sur les liens existant entre le travail sur les techniques opératoires et le processus de conceptualisation des nombres et des opérations arithmétiques usuelles.

Elles ont donc pour objet, l'étude des rapports qu'entretiennent sens et techniques en mathématiques.

1.1. Des développements imbriqués

Maîtrise des techniques opératoires et connaissances sur les nombres et les opérations se renforcent mutuellement ; leurs développements sont étroitement liés. La maîtrise des techniques opératoires n'est pas première par rapport à la construction du sens des

opérations, mais cette dernière n'est pas non plus un préalable à la construction des techniques.

A partir de l'analyse des effets d'une pratique régulière de calcul mental, nous avons montré que la maîtrise de techniques opératoires (écrites ou non) permettait aux élèves de l'école élémentaire de mieux reconnaître les opérations intervenant dans la résolution de certains problèmes numériques.

1.2. Un accès au sens par le biais de la maîtrise de techniques

L'étude des conditions de l'accès au sens par le biais d'un travail sur les techniques opératoires, sans être en rupture avec les travaux de didactique des mathématiques de l'époque, a apporté un éclairage nouveau sur la question des liens entre sens et techniques, en particulier dans le domaine de la résolution de problèmes.

1.3. Automatisation, mémorisation, disponibilité et adaptabilité des connaissances

Nous nous sommes plus particulièrement intéressé aux rôles que jouaient respectivement dans ce processus de reconnaissance des opérations, l'automatisation de certaines procédures de calcul, la mémorisation de faits numériques et le développement de compétences permettant aux élèves d'adapter leurs connaissances aux problèmes à résoudre (Butlen, Pézard, 1997, 1998, 2003) et aux calculs à effectuer (Butlen, Pézard, 1992).

Automatisation, mémorisation et adaptabilité contribuaient à accélérer le processus d'automatisation de la reconnaissance des opérations en jeu dans les problèmes.

J'ai travaillé cette question en expérimentant des situations utilisant un environnement informatique, ce qui était relativement nouveau à l'époque de ces travaux (Butlen, 1985).

1.4. Un premier élargissement du cadre théorique : des emprunts à la psychologie cognitive (gestion des systèmes mnésiques, représentation du problème)

Pour dépasser le seul constat expérimental, nous avons intégré dans le cadre théorique de la didactique, que nous avons initialement mobilisé, des éléments provenant de la psychologie cognitive.

Nous nous sommes notamment appuyé sur les travaux français et anglo-saxons relatifs à la gestion des systèmes mnésiques (Fayol), à la notion de schéma de problèmes (Morales, Shute et Pellegrino, Fayol, Julo) ou à la représentation du problème (Richard, Julo).

Ces apports ont permis de comprendre comment les élèves, bénéficiant d'un travail sur la technique, réussissaient, en s'appuyant sur une certaine automatisation, à s'en échapper pour se construire des schémas de problèmes ou des représentations. Cette élaboration traduisant une généralisation qui s'appuie sur une possibilité accrue pour l'élève d'adapter son traitement à la spécificité des données intervenant dans les calculs et les problèmes.

1.5. Les limites de ces premiers résultats

La mise en correspondance des procédures de calcul des élèves, de leurs stratégies de résolution de problèmes et de leurs performances générales en mathématiques a fait apparaître un autre résultat. Les élèves, considérés comme étant en difficulté en général en mathématiques, ne bénéficiaient pas de la dynamique existant entre disponibilité et adaptabilité.

Source d'apprentissage pour les élèves, l'automatisation devenait pour eux une source de difficultés.

L'automatisation se faisait au détriment de l'adaptabilité. En effet, l'automatisation de certaines procédures de calcul (notamment écrites) limitait, voire interdisait la mobilisation d'autres procédures et, de ce fait, limitait les choix possibles ; l'adaptabilité nécessitant que l'élève mobilise en même temps que la procédure, le domaine d'efficacité de celle-ci.

Ces élèves n'arrivaient pas ou nettement moins aisément que leurs pairs, à échapper à l'automatisation. Les généralisations et les décontextualisations, au lieu d'être favorisées, étaient alors limitées, voire interdites, par trop d'automatisme.

Cette première série de travaux m'a donc permis de mettre en évidence une première source de difficultés : les pré-requis mathématiques nécessaires à la conceptualisation.

2. Des difficultés des élèves aux élèves en difficulté issus de milieux populaires

Ce constat m'a amené à intégrer mon premier questionnement dans une problématique plus générale de différenciation scolaire.

Des recherches menées précédemment en didactique des mathématiques me permettaient d'avancer certains éléments d'explication et d'émettre certaines hypothèses. Il en est ainsi des travaux de Perrin-Glorian sur les élèves en difficulté. Ces travaux ne me semblaient toutefois pas suffisants pour expliquer les difficultés constatées et surtout pour travailler les conditions de leur dépassement.

De même, la psychologie cognitive ne me semblait pouvoir à elle seule combler ces manques. Ces deux cadres théoriques ne suffisant pas, nous avons fait d'autres emprunts.

2.1. Un deuxième enrichissement du cadre théorique : des emprunts à la sociolinguistique

Je me suis appuyé sur les travaux de Lahire, Bautier, Charlot et Rochex, relatifs au rapport au savoir et à l'écrit, pour mieux comprendre les raisons du non fonctionnement de la dynamique précédente. De même, je me suis référé à différents travaux sur les interactions entre pairs et plus généralement sur les rapports entre apprentissage individuel et apprentissage collectif.

Sans mettre complètement en bijection le rôle joué par l'écrit dans ces travaux et le rôle qu'il pouvait jouer dans les apprentissages mathématiques notamment dans l'élaboration d'un certain formalisme, il nous a semblé qu'il existait dans le recours à l'écrit et dans le

recours au collectif, des pistes à la fois pour expliquer que le passage à la conceptualisation ne s'était pas fait pour certains élèves et pour le favoriser.

Ce deuxième élargissement de notre cadre théorique nous a permis d'élaborer de nouvelles ingénieries ayant un double but : susciter, mais aussi analyser des conditions permettant de surmonter les difficultés identifiées par ailleurs (Butlen, Pézard, 1992, 2003).

Il s'agit ici de dispositifs d'enseignement qui visent à intervenir sur les apprentissages des élèves afin de les favoriser, mais aussi et surtout, d'affiner l'analyse de modes d'apprentissages spécifiques à ce public.

2.2. La mise en évidence d'étapes dans le processus de conceptualisation

Une analyse *a priori* mettant en relation les résultats des précédentes recherches, et des analyses plus générales sur les difficultés des élèves de milieux populaires, ont permis de prévoir d'autres cheminements cognitifs susceptibles d'être empruntés avec profit par ces élèves. Des ingénieries élaborées dans le but, soit de les provoquer, soit de les révéler, ont permis de les identifier, de les analyser et d'étudier les conditions de leur existence.

Nous avons ainsi mis en évidence des étapes dans le processus de conceptualisation des élèves en difficulté, étapes qui ont à voir notamment avec les rapports qu'entretiennent conceptualisation et décontextualisation (Butlen, Pézard, 2003).

Nous avons ainsi identifié des cheminements cognitifs spécifiques. Cela constitue un deuxième résultat important. En effet, la prise en compte de ces cheminements particuliers par l'enseignement conditionne pour une part importante les apprentissages de ces élèves en difficulté. Ils permettent à certains de ces élèves de combler les manques identifiés précédemment.

2.3. Les limites de cette deuxième recherche

Ces expérimentations ont certes permis d'affiner le diagnostic précédent, de dégager des leviers susceptibles de dépasser les difficultés manifestées par certains de ces élèves. Elles font toutefois apparaître de nouvelles limites.

Nous avons en effet constaté que les élèves ayant le moins bénéficié des ingénieries sont souvent issus de milieux défavorisés, et présentent le plus de difficultés.

Tout se passait comme s'il existait des seuils, résultats d'une accumulation de difficultés qui limitaient les effets des dispositifs précédents. Certes, certains élèves, même en grande difficulté, pouvaient en bénéficier, mais nous ne pouvions généraliser ce résultat. Ce qui n'était pas le cas pour des élèves en difficulté moyenne.

Ne pouvant expliquer ce nouveau constat grâce au cadre théorique même élargi dont nous disposions à ce moment, il est apparu indispensable de rechercher d'autres facteurs susceptibles d'expliquer les limites auxquelles nous étions confronté.

Un détour par l'analyse des pratiques enseignantes s'imposait à cette étape de nos recherches.

3. L'analyse des pratiques enseignantes et de leur formation

3.1. Les raisons de cette nouvelle problématique

3.1.1. Un détour par l'analyse des pratiques pour mieux comprendre les différences et non plus pour les dépasser

Pour mieux comprendre les difficultés des élèves, et non plus pour les dépasser, je me suis intéressé aux pratiques enseignantes et notamment à celles des professeurs des écoles s'adressant prioritairement à ce public d'élèves en grande difficulté et issus de milieux populaires.

J'ai étudié les pratiques enseignantes pour plusieurs raisons.

3.1.2. Recherches de nouvelles explications et de nouvelles réponses

Une première raison : il s'agissait de rechercher dans les systèmes de réponses que les enseignants ont élaborés individuellement, mais aussi et surtout collectivement, d'autres explications et d'autres pistes pour résoudre les difficultés des élèves.

Dans quelle mesure les pratiques enseignantes renforcent-elles les difficultés des élèves ? *A contrario*, existe-il dans les réponses apportées par les enseignants de nouvelles pistes pour les surmonter ?

3.1.3. Etudier les écarts entre les pratiques effectives et les pratiques privilégiées par certaines recherches et par la formation

Une deuxième raison : il s'agissait de rechercher, dans la comparaison entre les pratiques effectives des professeurs des écoles et les pratiques favorisées par les recherches (basées sur l'expérimentation d'ingénieries) ou de celles favorisées par la formation initiale, des pistes pour mieux adapter les ingénieries aux caractéristiques du public de ZEP et aux pratiques des enseignants susceptibles de les mettre en œuvre.

Le but est de mieux prendre en compte différents facteurs (relevant notamment des domaines médiatif, institutionnel et social) conditionnant l'activité du professeur et susceptibles d'avoir des effets encore non étudiés sur les apprentissages des élèves.

3.1.4. Etudier les pratiques pour améliorer la formation des professeurs des écoles

Ce détour par l'analyse des pratiques est beaucoup plus grand que les détours précédents. Au moment où j'amorçais ces travaux, ce sujet était peu abordé en didactique des mathématiques, les études étaient récentes et parcellaires. Nous ne disposions pas encore de résultats importants, de méthodologies éprouvées ni de modèles susceptibles d'apporter des réponses aux questions que je me posais.

Ce détour m'a semblé profitable, car j'estimais que ce type de recherches permettrait d'apporter des connaissances nouvelles utiles pour la formation des maîtres elle-même. En effet, j'admets qu'il existe dans la formation des enseignants elle-même des pistes pour surmonter les difficultés des élèves, pour développer ou renouveler les réponses apportées par les maîtres.

3.2. Les objets de la recherche

Précisons davantage certains objets de cette recherche.

3.2.1. Les processus de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation

Les questions d'institutionnalisation et de dévolution étant centrales dans les adaptations proposées par nos ingénieries de calcul mental et de résolution de problèmes, une analyse des modalités effectives de gestion de ces processus m'a paru incontournable. J'espérais ainsi recueillir des informations sur les contraintes qui conditionnent les modalités de mise en œuvre de ces deux processus.

3.2.2. Recherche de régularités intra et interpersonnelles

Admettant l'hypothèse d'une cohérence, d'une cohésion et d'une stabilité des pratiques, j'ai été amené à rechercher, pour une part importante en collaboration avec Pézard, Peltier et Masselot, des régularités intrapersonnelles mais aussi interpersonnelles.

Avant de présenter rapidement les réponses apportées à cette question, il est nécessaire de revenir sur le cadre théorique dans lequel ces nouvelles recherches s'inscrivent. Il s'agit essentiellement de la double approche didactique et ergonomique élaborée par Robert et Rogalski (2002).

3.2.3. Une référence à la notion de genre

Nous avons emprunté en l'adaptant à notre objet de recherche la notion de genre, élaborée par Clot, pour décrire mais aussi pour interpréter les régularités intra et interpersonnelles que les analyses de nos observations avaient permis d'identifier.

Les concepts de genre et de style nous ont paru intéressants dans la mesure où ils permettaient de mettre en relation ces deux types de régularités. Les régularités intrapersonnelles relevant davantage de ce que Clot désigne par mémoire personnelle, les secondes renvoyant à ce qu'il désigne sous le terme de mémoire collective. Ces deux mémoires « *ayant à voir avec genre et style* » selon son expression.

L'idée d'un ensemble de ressources correspondant à l'éventail de choix possibles relevant du genre paraissait pouvoir expliquer les grandes catégories de choix effectués par les enseignants observés, et la rapidité de la stabilisation de ces choix.

Précisons plusieurs points qui caractérisent la manière dont nous avons adapté le concept de genre.

L'idée de catégorisation différencie notre approche de celle de Clot. Nous intéressant aux grands choix effectivement réalisés (et non potentiellement réalisables) par les professeurs observés, et aux stratégies qui en découlent, nous avons été amenés à hiérarchiser ces choix en prenant en compte contraintes et marges de manœuvre (Butlen, Peltier, Pézard, 2002). Cela m'a conduit à définir quatre dimensions intervenant dans la composition des pratiques : l'ordre du métier (Butlen, 2004) le i-genre, le e-genre et le style personnel (Butlen, Peltier, Pézard, 2002, 2004). Les trois premières participent de la notion de genre, la quatrième reprend la notion de style.

L'ordre du métier est un ensemble de réponses très voisines à des contraintes très fortes dont la variabilité restreinte relève du style.

Les i-genres et le e-genres permettent de décrire dans leur complémentarité mais aussi dans leur tension, les grands modes de réalisation effective des deux missions d'instruction et d'éducation.

3.3. Les apports de ces recherches

3.3.1. Les résultats

Les liens entre pratiques enseignantes et difficultés des élèves

Qu'apportent ces analyses des pratiques effectives à la question des difficultés des élèves ?

L'étude des pratiques permet d'envisager et d'explicitier des liens entre pratiques enseignantes et difficultés des élèves. Ces liens reposent sur l'analyse des mathématiques proposées par chaque i-genre à la fréquentation des élèves, mathématiques que nous pouvons cerner à l'aide des indicateurs définissant les i-genres. Ils reposent également sur la manière dont les rapports entre i-genre et e-genre interviennent sur les processus de dévolution, régulation et institutionnalisation, les modes de réalisation de ces processus déterminant pour une part les mathématiques potentiellement fréquentées par les élèves.

Les trois i-genres et les quatre e-genres que nous avons identifiés ne sont évidemment pas identiques de ce point de vue (Butlen, Peltier, Pézard, 2002, 2004).

Les mathématiques potentiellement fréquentées par les élèves

Les deux premiers i-genres majoritaires présentent certaines caractéristiques qui peuvent limiter l'acquisition par les élèves des pré-requis mathématiques évoqués dans la première partie de cet exposé.

Les adaptations effectivement réalisées par ces enseignants des i-genres majoritaires peuvent limiter, voire interdire, la mise en place des cheminements spécifiques identifiés dans la seconde série de recherches que je viens de présenter.

La décomposition quasi-systématique des tâches proposées, l'algorithmisation des activités mathématiques qui en découlent revient davantage pour l'élève à parcourir les tâches-parcours qui peut lui permettre de les réaliser une à une- plutôt qu'à explorer la tâche générale, exploration qui lui permettrait d'en percevoir la structure globale et les composants. Cette manière de gérer la complexité des tâches, liée à une anticipation sur les difficultés des élèves, peut être à l'origine ou du moins renforcer certaines caractéristiques de ces élèves : manque d'adaptabilité des connaissances liée à un refuge dans la mobilisation d'algorithmes considérés comme toujours fiables par exemple, difficulté de généralisation et de décontextualisation.

Le faible nombre de phases de bilan et de synthèse, l'absence de phases d'institutionnalisation, qui peuvent s'expliquer par une individualisation excessive,

renforcent encore les constats précédents. Les élèves confrontés à ce type de pratiques n'ont pas accès, au même titre que les autres, aux savoirs de référence. Ils doivent les percevoir lors d'institutionnalisations menées sur un mode public voire individuel.

Des dérives possibles et leurs effets

J'ai mis en évidence des dérives et en ai analysé certains effets (Butlen, 2004, 2005). Ces dérives constituent une source de difficultés. Elles peuvent s'expliquer, là encore, par la manière dont les enseignants (novices ou débutants dans les recherches) réalisent le e-genre et le i-genre dans leur complémentarité mais aussi dans leur tension.

Certaines concernent le processus de dévolution (invention de la consigne, dévolution des conditions de réalisation de la tâche par exemple, convocation de domaines de rationalité variés pouvant rentrer en concurrence avec une validation relevant des mathématiques).

D'autres concernent le processus d'institutionnalisation : c'est le cas de la pratique consistant à privilégier l'explicitation des procédures à la hiérarchisation (notons à ce propos que i-genre 3 peut mener à la dérive inverse).

D'autres concernent le rapport à la vérité qu'entretiennent les objets mathématiques fréquentés à l'école élémentaire (Butlen, Masselot, Ngono, 2004). Les domaines de rationalité convoqués en sont un exemple (Ngono, 2002), le domaine de validité des connaissances en est un autre. Rentre aussi dans cette catégorie, la gestion de l'ambiguïté existant à l'école élémentaire entre argumentation, justification et explicitation, ambiguïté qui pour une part est inhérente aux modes d'apprentissages de ces objets (Butlen, 2004).

Ces quelques exemples montrent que le détour par l'analyse des pratiques a permis de mettre en relation les sources de difficultés précédentes permettant de caractériser les élèves en difficulté, et deux autres sources de difficulté liées aux pratiques : les mathématiques proposées à la fréquentation des élèves, les dérives découlant de relations qu'entretiennent i-genre et e-genre notamment.

D'autres résultats sur les pratiques : contraintes, marges de manœuvre et modes de réponse

Nous avons également contribué, grâce à cette recherche et du fait de l'importance du détour effectué, à accroître la connaissance de l'existant, bien que ces connaissances ne soient pas toujours en rapport direct avec mes questions initiales.

Nous avons été amenés à préciser des contraintes auxquelles les enseignants exerçant dans ces écoles sont assujettis, les marges de manœuvre qui leur restent, les contradictions que provoquent ces contraintes, les systèmes de réponses apportées (Butlen, Peltier, Pézard, 2002, 2004).

Nous avons également montré que ces pratiques étaient le résultat d'un ensemble de compromis entre différentes contraintes qui déterminent l'activité du professeur.

Nous avons ainsi identifié plusieurs contradictions qui se révèlent être particulièrement fortes dans le contexte particulier des ZEP très défavorisées. C'est le cas notamment de la contradiction existant entre une logique des apprentissages et une logique de la socialisation. J'emploie le terme de contradiction, plutôt que de tension pour les désigner, pour deux raisons : par référence au concept philosophique de dialectique mais aussi parce que le dépassement de ces contradictions conditionne l'exercice même du métier de professeur des écoles. La fuite très importante des enseignants titulaires de ces lieux d'exercice en témoigne.

L'analyse des systèmes de réponses apportées par ces enseignants à ces contraintes et contradictions a débouché sur une catégorisation.

Cette meilleure connaissance des pratiques existantes débouche sur des pistes pour la formation initiale et continue que j'ai détaillées dans la quatrième partie de ma note de synthèse.

Certaines d'entre elles recourent des préoccupations ergonomiques, d'autres relèvent de recherche en didactique des mathématiques, d'autres peuvent être à l'origine de recherches sur la formation.

3.4. Des pistes pour la formation des professeurs des écoles

Le schéma ci-dessous résume les entrées que j'ai choisies pour étudier des causes des difficultés rencontrées par les élèves en difficulté issus de milieux socialement défavorisés.

Nous pouvons distinguer, côté élèves, des manques en termes de pré-requis, manques que nous avons identifiés dans le domaine numérique lors de nos recherches sur le calcul mental. Ces dernières ont également permis de mettre en évidence la non prise en compte de cheminements cognitifs adaptés, ménageant notamment des étapes dans le processus de conceptualisation (décontextualisation, généralisation, réinvestissement).

Côté professeur, nous avons identifié des dérives et les malentendus qui peuvent en découler ; ceux-ci trouvent notamment leur origine dans les contradictions existant entre i-genre et e-genre d'une part, dans la maîtrise des gestes et routines professionnels associés d'autre part.

Ces constats permettent de poser de nouvelles questions de recherche mais aussi de formation.

Je m'appuie pour cela sur un résultat d'ergonomie souvent minoré dans les recherches en didactique. Les enseignants seront plus à l'aise pour développer ou mettre en œuvre des réponses efficaces aux difficultés des élèves si l'exercice au quotidien de leur métier est confortable. Différents résultats de mes recherches peuvent permettre à la formation initiale (mais aussi continue) d'agir dans ce domaine, en respectant la diversité des pratiques observées, en assurant la mutualisation de ces pratiques et notamment des gestes et routines efficaces (Butlen, 2004), en développant des compétences professionnelles potentielles ou nouvelles existant notamment dans la dualité entre ordre du métier et style personnel, d'une part, entre i-genre et e-genre, d'autre part.

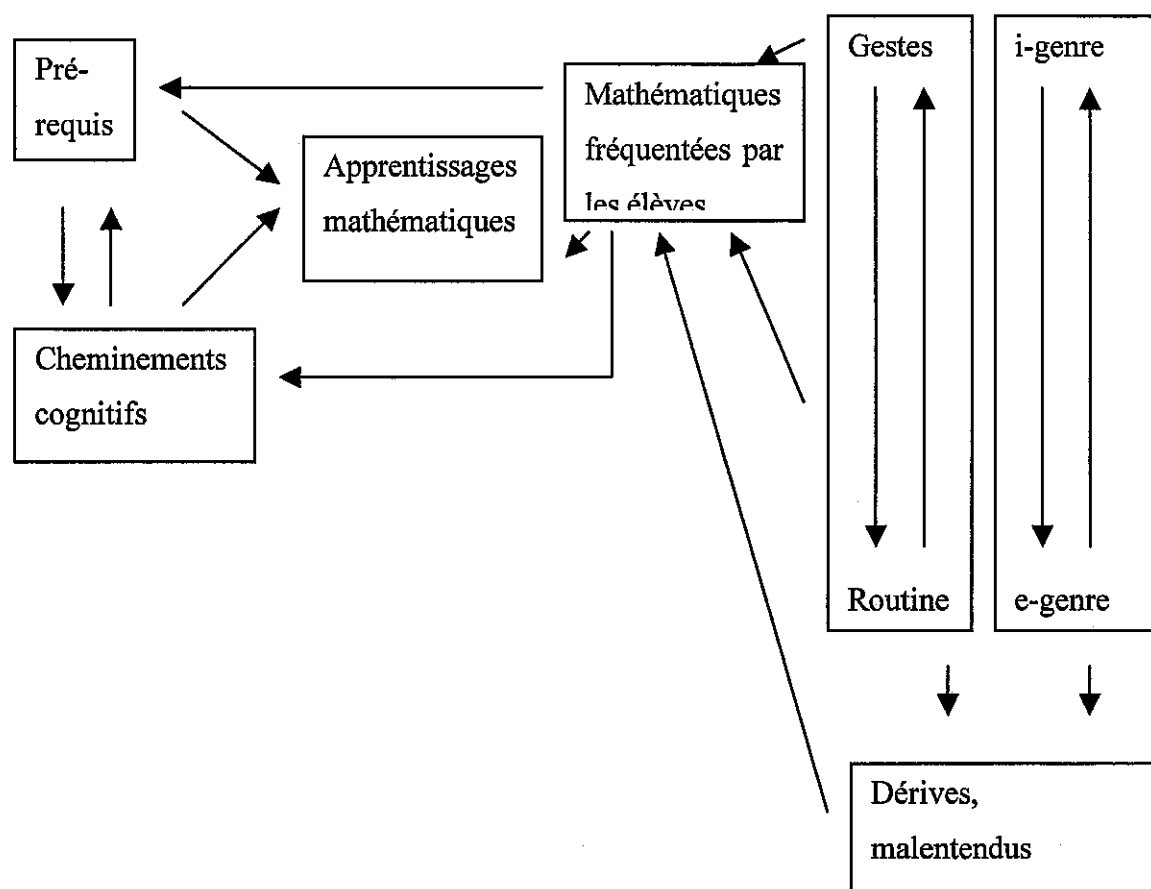
Je rejoins et affine une piste développée par Clot. De même que style et genre chez Clot sont sources de développement de compétences professionnelles, les rapports qu'entretiennent i-genre et e-genre le sont également. En effet, i-genre et e-genre sont deux dimensions complémentaires des pratiques mais pouvant parfois rentrer en compétition. C'est cette complémentarité et cette compétition potentielle qui est source de développement.

Notons à ce propos que j'ai théorisé à l'aide des i-genres et de e-genres (mais aussi à l'aide des contradictions que nos recherches ont mises en évidence) une vieille connaissance en actes de formateur, liée aux rapports entre approche didactique liée à une discipline et approche pédagogique générale

La mise en évidence de gestes et routines professionnels associés aux différents genres identifiés pose de nombreuses questions de formation.

Comment s'acquièrent ces gestes et routines ? Quelles situations de formation faut-il mettre en place ? A quel moment de la formation ?

L'organisation des pratiques que j'ai décrite permet d'envisager des alternatives nouvelles. Les contraintes pesant sur les pratiques des enseignants de ZEP sont tellement fortes qu'il est difficilement envisageable de viser une transformation brutale de leurs pratiques. Le risque de déstabilisation étant trop grand, les enseignants risqueraient (cela a été maintes fois constaté) de refuser en bloc tout changement proposé. Une intervention visant un enrichissement des routines semble une bonne entrée. En effet, les routines constituent le niveau d'organisation des pratiques le plus petit où l'observateur a accès aux grands choix stratégiques de l'enseignant (et donc au genre). En lui présentant des alternatives possibles en termes de routines et en lui donnant les moyens de leurs mises en œuvre (grâce à une explicitation des gestes professionnels associés), l'enseignant peut envisager des changements locaux, minimisant les risques de déstabilisation, mais questionnant ses choix globaux.



3.5. Perspectives de recherche

Enfin, je terminerai en soulignant la nécessité de développer de nouvelles recherches sur l'enseignement des mathématiques destinées aux élèves en difficulté.

Les différentes pistes que je viens d'évoquer me permettent de dégager un programme de recherche dont je n'évoquerai que quelques grandes directions.

Je ne développerai pas davantage les pistes pour la formation que je viens de pointer, pour me centrer sur des pistes de recherches relatives aux difficultés des élèves.

Mes recherches ont permis de dégager quatre sources de difficultés que j'ai mises en relation dans cet exposé. Deux concernent les élèves eux-mêmes. Les deux autres relèvent des pratiques enseignantes.

Ces quatre sources de difficultés, et surtout les liens qu'elles entretiennent et que je n'ai fait qu'aborder dans mes recherches, constituent autant de pistes de recherches nouvelles.

Je vais les présenter en me référant au schéma ci-dessus

3.5.1. Les pré-requis

Une première piste consiste à repenser l'ensemble des résultats accumulés par les recherches en didactique des mathématiques, notamment pour mieux comprendre les pré-requis faisant défaut aux élèves en difficulté, et pour élucider en partie l'origine de ces manques.

Les travaux sur le calcul mental, que j'ai évoqués ci-dessus, proposent d'ailleurs une approche de cette question. Il s'agit notamment de repenser en fonction des caractéristiques de ce public, les relations qu'entretiennent les différentes connaissances entre elles, la manière dont leurs développements se renforcent ou se contrarient et la manière dont s'organisent les recompositions nécessaires.

3.5.2. Les cheminements cognitifs

Il s'agit, en s'appuyant sur les analyses précédentes, de développer des recherches qui viseraient à mettre en évidence d'autres cheminements cognitifs, et les articulations qui peuvent exister entre ces différents cheminements. Quelles caractéristiques ont-ils en commun, qu'est-ce qui les distingue et comment les contenus mathématiques interviennent ?

Quels publics d'élèves concernent-ils ? Qu'est-ce qui les différencie en fonction du degré de difficulté manifesté par les élèves ?

J'ai choisi de m'intéresser au calcul mental, quel autre domaine des mathématiques enseignées dans le cadre de l'école obligatoire pourrait permettre de travailler cheminements cognitifs et pré-requis ?

3.5.3. Les mathématiques potentiellement fréquentées et mathématiques effectivement fréquentées

Quelles mathématiques sont privilégiées par les relations qu'entretiennent i-genre, e-genre notamment ? Il s'agit de définir les mathématiques effectivement fréquentées par les élèves et d'évaluer leurs effets sur les apprentissages. Comment cette fréquentation développe les pré-requis nécessaires aux apprentissages, comment ces mathématiques permettent-elles, favorisent-elles des cheminements cognitifs adaptés aux élèves en difficultés ou, au contraire, en limitent-elles l'existence ?

Là encore la question de la définition des contenus nécessaires pour mieux saisir ces mathématiques fréquentées et celle de la définition du public auquel elles sont destinées pour en préciser les effets se pose.

3.5.4. Dérives et malentendus

Enfin une dernière entrée réside dans l'exploration des dérives et des malentendus, provoqués par les rapports entre les quatre dimensions (ordre du métier, i-genre, e-genre et style) et dans quelle mesure ces dérives et malentendus interviennent sur les apprentissages des élèves.

Je terminerai cet exposé en soulignant que ce détour par l'analyse des pratiques enseignantes a permis de produire des connaissances sur l'existant, qui n'ont pas toujours un rapport direct avec la question des difficultés des élèves, mais qui permettent de la poser autrement, en dégagant de nouvelles questions de recherche sur les élèves en difficulté et sur la formation des enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Bautier E. (1995) : *Pratiques langagières, pratiques sociales. De la sociolinguistique à la sociologie du langage*, Paris, l'Harmattan.

Butlen D. (1985) : *Apport de l'ordinateur à l'apprentissage des écritures multiplicatives au cours élémentaire*, Thèse de troisième cycle de Didactique des Disciplines, option mathématiques, Paris, IREM de Paris VII, Université Paris VII

Butlen D., Pézard M. (1992) : Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, *cahier de DIDIREM n° 13*, Paris, IREM de Paris VII, Université Paris VII.

Butlen D., Pézard M. (1992) : Elèves en difficulté, situations d'aide et gestion de classe associée, *Grand N n° 50*, 29-58, IREM de Grenoble, Université Grenoble I.

Butlen D., Pézard M. (1992) : Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM₂, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 12.2.3, 319-368, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Butlen D., Pézard M. (1997) : Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *Cahier de DIDIREM n° 27*, Paris, IREM Paris VII, Université Paris VII.

Butlen D., Pézard M. et al. (2000) : Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, *Repères-IREM*, n° 41, 5-24, Topiques Editions, Metz, France.

Butlen D., Peltier M.L., Pézard M. (2002) : Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions, *Revue Française de Pédagogie n°140*, 41-52, Paris.

Butlen D. (2003) : Les gestes professionnels des professeurs d'école débutants, leur acquisition en formation initiale In COPIRELEM, *Concertum, Carnets de route de la COPIRELEM*, tome 3, 76-86, ARPEME, Paris

Butlen D., Pézard M. (2003) : Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège, *Spirale, Revue de Recherches en Education*, vol 31, 117-140, Lille.

Butlen D., Pézard M. (2003) : Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 23.1, 1-40, Grenoble, La Pensée sauvage.

- Butlen D., Masselot P., Pézard M. (2004) : De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation, *Recherche et Formation*, n°40, (15 pages) Paris, INRP
- Butlen D. Masselot P. (2003) : Usage d'outils issus du cadre de l'ergonomie cognitive pour l'analyse de pratiques enseignantes, In *ARDM, Actes de la XII^e école d'été de didactique des mathématiques*, Corps, La Pensée Sauvage
- Charlot B., Bautier E. et Rochex J-Y. (1992) : *École et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin.
- Fayol M. (1985) : Nombre, numération et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ?, *Revue Française de Pédagogie* n° 70, 59-77, Paris, INRP.
- Fischer J-P. (1987) : L'automatisation des calculs élémentaires à l'école, *Revue Française de Pédagogie* n° 80, 17-24, Paris, INRP.
- Julo J. (1995) : *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes.
- Lahire B. (1993) : *Culture écrite et inégalités scolaires*, Lyon, Presses Universitaires de Lyon.
- Legrand M. (1991) : Circuit ou les règles du débat mathématique, in *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.
- Peltier- Barbier M.L. et al (2004) : *Dur d'enseigner en ZEP*, Editions la pensée Sauvage, Grenoble
- Resnick L-B. (1983): A developmental theory of number understanding, in H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*, New York, New York Academic Press.
- Richard J-F. (1982) : Mémoire et résolution de problèmes, *Revue Française de Pédagogie* n° 60, 9-17, Paris, INRP.
- Robert A., Rogalski J., (2002) :Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Canadian Journal of Science, Mathematics and technology Education (La Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences des Mathématiques et des Technologies)* 2(4), 505-528.

Gare Brousseau

Départ

E_1 - réflexif quai 2

E_0 - Elève apprenant quai 3

E - agissant quai 4

E_3 - objectif

P_3 - noosphérique quai 1

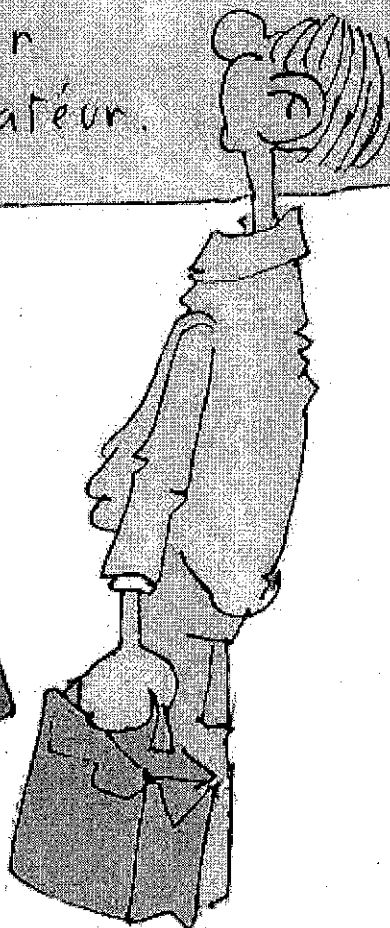
P_1 - Projecteur

P_2 - observateur

Je ne sais
pas encore

.....
J'hésite.....

M'sieur....
notre
cours est
sur quel
quai...
aujourd'hui



Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de Première Scientifique

Corine Castela¹,

Equipe Didirem Paris 7,

Iufm de l'Académie de Rouen

Les travaux présentés dans cette intervention s'intéressent à la question de l'échec dans l'enseignement post-obligatoire, plus précisément au phénomène suivant : pour de nombreux élèves jusque là en réussite en mathématiques, le passage en Première Scientifique² se traduit pour cette discipline par une baisse notable dans la hiérarchie scolaire.

Les recherches que je mène actuellement abordent cet objet de deux points de vue, celui des institutions, celui des élèves. Les questions suivantes constituent pour chacune de ces approches une porte d'entrée dans l'étude :

- Du côté des institutions :

Qu'est-ce qui change en mathématiques entre collège et Première S pour rendre ainsi inadéquat le travail de certains élèves ?

En particulier, que recouvre le discours rituel sur l'importance de l'autonomie au lycée ?

- Du côté des élèves :

Qu'est-ce qui différencie le travail des élèves en Première Scientifique ?

Peut-on repérer des gestes d'étude plus spécifiques des élèves en réussite ?

Dans ce texte, l'approche institutionnelle est abordée dans les deux premières sections, l'étude du travail personnel des élèves dans la dernière. Il me paraît intéressant de signaler que ces deux axes se distinguent non seulement par leur objet mais aussi par la nature des recherches correspondantes.

¹ Corine.Castela @ rouen.iufm.fr

² Sixième année de l'enseignement secondaire, deuxième du lycée, 16-17 ans, section spécialisée en sciences.

Dans le premier cas, le travail est mu par une dynamique théorique. Il constitue un développement de mes travaux antérieurs sur les enjeux d'apprentissage relatifs à la résolution de problèmes en mathématiques (Castela 2000, cours de la 13^e Ecole d'Été de didactique des mathématiques, article soumis à RDM). Ceux-ci me permettent d'apporter quelques éléments de réponse aux questions relatives à la comparaison des institutions, plus largement de formuler des conjectures sur ce point et de définir les modalités des recherches qui permettraient d'obtenir des résultats pour des contenus mathématiques plus nombreux. Articulés avec le modèle de structuration du milieu, ils m'outillent pour définir un modèle des différentes positions de l'élève dans un système didactique, modèle utilisable pour envisager *a priori* des éléments de différenciation parmi les gestes d'étude des élèves. L'objectif des sections I et II de ce texte est de présenter, sans éluder les difficultés rencontrées, l'état actuel de mes propositions relatives au modèle de structuration du milieu, en me centrant sur les niveaux didactique et sur-didactique.

Le travail présenté dans la section III se situe, au contraire du précédent, dans une logique empirique : il s'agit d'explorer la terre largement inconnue du travail personnel des élèves de Première Scientifique à partir de 10 entretiens centrés sur la préparation du dernier contrôle de mathématiques. L'analyse de ces entretiens est en cours, je me contenterai ici de présenter quelques éléments saillants qui, dans la limite de validité de la méthodologie utilisée, nous informent sur les gestes d'étude à ce niveau et leurs possibles différences d'efficacité. Je citerai également dans les sections I et II des extraits d'entretiens, comme appuis venant du terrain aux analyses théoriques développées.

Développement théorique d'un côté, empirique de l'autre, ces deux pans de la recherche en cours débouchent sur deux pièces d'un puzzle qui dans l'état actuel du travail ne sont pas encore entièrement ajustées, même si les deux démarches convergent déjà sur les points essentiels. La conclusion de ce texte s'efforcera de montrer les points qui font encore problème.

1. Essai de caractérisation des positions E0 et E1 (niveaux didactique et sur-didactique local)

Le modèle de structuration du milieu, introduit par G.Brousseau, modifié par C.Margolinas puis complété par I.Bloch pour le professeur (voir Margolinas, 2002, p.145 pour une version facilement accessible) comporte une position pour E dans les situations S0 et S1.

M3 :		P3 :	S3 :	Situation	
M-de construction		P noosphérique	noosphérique		
M2 :		P2 :	S2 :	Situation	
M-de projet		P constructeur	de construction		Sur-didactique
M1 :	E1 :	P1 :	S1 :		
M-didactique	E-réflexif	P projeteur	Situation de projet		
M0 :	E0 :	P0 : Professeur-pour	S0 : Situation		
M-d'apprentissage	Elève	-l'élève	Didactique		
M-1 :	E-1 :	P-1 :	S-1 : Situation		
M-de référence	E apprenant ³	Professeur en action	d'apprentissage		
M-2 :	E-2 :	P-2 :	S-2 : Situation de		
Milieu objectif	E agissant	P Observateur	référence		A- didactique
M-3 :	E-3 :		S-3 :		
Milieu matériel	E objectif		Situation objective		

Tableau 1. – Modèle de structuration du milieu (C.Margolinas, I.Bloch)

Pour aboutir à une caractérisation de l'ensemble formé par ces deux positions et tenter de différencier l'une de l'autre, je m'appuierai sur une description des responsabilités qui incombent à P0. Sans prétention à l'exhaustivité puisque mon objet de travail n'est pas le professeur mais l'élève, cette description prendra en compte ce que je considère comme une dualité de l'enseignement des mathématiques, dualité que je vais analyser maintenant.

1.1. La double orientation de l'enseignement des mathématiques : théorico-pratique et pratico-théorique

Les deux orientations que je me propose de définir ici résultent de la transposition dans le système d'enseignement de la dualité de l'activité des mathématiciens eux-mêmes, tout à la fois producteurs et utilisateurs de savoirs théoriques.

1.1.1 L'orientation théorico-pratique

Selon cette orientation, le processus d'enseignement/apprentissage est centré sur, organisé par des savoirs théoriques S_{th} , définitions et théorèmes. Ceux-ci sont désignés aux élèves

³ Dans le cours que j'ai donné à la 13^e école d'été de didactique des mathématiques dans le cadre du thème Hétérogénéité et Différenciation, j'ai proposé de revenir pour E-1 à la désignation première utilisée par G.Brousseau (1986) : E-1 est le sujet épistémique Résolveur de problèmes. Dans la situation a-didactique, le sujet E est engagé dans des régulations fonctionnelles, à court terme, orientées vers le succès de l'action dont il a accepté la responsabilité. Des travaux d'origines diverses tendent à prouver que ces régulations ne se traduisent pas nécessairement par des évolutions structurelles au niveau des connaissances du sujet, autrement dit en termes d'apprentissage (voir pour un point de vue psychologique Rogalski, 2006 ; pour un point de vue sociologique de Certeau 1980, pour un point de vue didactique Perrin-Glorian 1993).

comme enjeux didactiques par un texte qui les formule : l'institutionnalisation a la double fonction d'explicitier le savoir et de dire qu'il s'agit de l'apprendre.

Mais, en mathématiques, dans toute la scolarité, la récitation du texte du savoir n'est qu'un objectif marginal de l'étude, l'enjeu dominant est que les élèves sachent utiliser S_{th} dans des tâches relevant de types significatifs de l'intérêt de ce savoir. Ainsi, pour un élément de savoir S_{th} donné, les élèves sont amenés à rencontrer les principales OM ponctuelles dont la technologie intègre S_{th} . Cependant, le pratique est ici subordonné à l'étude du théorique ; il s'agit de construire le sens du savoir étudié (ou un sens assez riche) par une certaine fréquentation de ses applications, ce qui pousse à la diversification des OM présentées plutôt qu'à leur étude approfondie.

1.1.2 L'orientation pratico-théorique

Dans ce cas, l'objet de savoir qui apparaît au pôle S du triangle didactique est une OM ($= [T, \tau, \theta, \Theta]$) ponctuelle. L'enjeu de l'étude est alors que les élèves aient identifié le type de tâches T et sachent utiliser la technique τ pour des tâches relevant de T , quitte à procéder à des adaptations plus ou moins importantes. On vise également la construction d'une certaine technologie de la technique. Celle-ci intègre les éléments de savoirs théoriques que l'OM contribue à illustrer. Elle comprend également des savoirs complémentaires de nature à favoriser le pilotage de τ . Je fais ici référence à ce que, dans Castela 2000, j'ai appelé des savoirs sur le fonctionnement mathématique : ainsi, pour ne donner qu'un seul exemple, la technologie de l'intégration par parties comprend des critères de choix des fonctions u' et v , compte tenu des spécificités du produit intégré.

Yves Chevallard (2002) a décrit les différents moments de l'étude d'une OM⁴ :

1. Moment de la première rencontre avec T
2. Moment de l'exploration de T et de l'émergence de la technique τ
3. Moment de la construction du bloc technologico-théorique
4. Moment de l'institutionnalisation
5. Moment du travail de l'OM et en particulier de la technique
6. Moment de l'évaluation.

J'insisterai sur le fait suivant : dans le contexte d'une orientation pratico-théorique, c'est-à-dire lorsque l'objet de l'étude est l'OM et non le savoir théorique en jeu dans cette

⁴ Dans le cadre de la TAD, il n'existe pas de description des moments de l'étude d'un savoir théorique. On pourrait facilement en construire une à partir des travaux de G. Brousseau et de R. Douady qui s'intéressent fondamentalement à l'enseignement du savoir théorique.

OM, les moments 2, 5 et 6 (l'évaluation étant alors comprise au sens d'évaluation de la technique, exploration des limites de son efficacité) supposent la confrontation à un nombre assez important de tâches relevant de T , pour lesquelles τ est (ou n'est pas pour le moment de l'évaluation) efficace. Ce travail favorise le développement de la composante non théorique de la technologie mais ne provoque pas, au moins à court terme, d'évolution du rapport institutionnel aux savoirs théoriques en jeu.

Aux didacticiens français, maintenant coutumiers de la notion de praxéologie, ces deux orientations peuvent apparaître comme naturellement complémentaires, deux lectures du quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Il ne me paraît pas superflu de dénaturer cette évidence de façon à nous rendre capables d'envisager que d'autres, en particulier certains élèves, puissent avoir un point de vue différent. La notion de praxéologie met en avant la généricité des situations problématiques et exhibe la double dimension, technique et technologico-théorique du savoir construit (ou à construire) comme réponse à cette problématique générique. Or ceci est l'expression d'un double parti pris qui n'est pas également partagé :

- *Parti pris de la stratégie contre celui de la tactique* : dans une situation nouvelle, il s'agit de privilégier l'assimilation à des expériences anciennes et l'exploitation des connaissances accumulées plutôt que de tabler exclusivement sur la ruse et l'invention dans le feu de l'action.

Je ne développerai pas ici ce point dont les conséquences au niveau de la différenciation scolaire sont explorées dans le cours de l'école d'été mentionné précédemment. Ce choix tient au public sur lequel se centre ce texte : je fais l'hypothèse que sont en difficulté en Première S des élèves qui ont pourtant compris que les tâches rencontrées en mathématiques ont une dimension générique et qu'à travers la résolution d'exercices, le professeur attend d'eux l'acquisition de savoirs permettant le traitement d'autres exercices de même type. Autrement dit, pour ces élèves, le diagnostic d'incapacité à adopter une attitude de secondarisation⁵ (E. Bautier et R. Goigoux, 2004) est insuffisant pour analyser

⁵ " Cette notion de " secondarisation " des activités scolaires, qui implique simultanément décontextualisation et adoption d'une autre finalité, nous semble en mesure de rendre raison de l'origine d'une bonne partie des difficultés des élèves des milieux populaires. La centration de la plupart d'entre eux sur le sens ordinaire, quotidien, des tâches, des objets ou des mots semble les empêcher de construire ces objets dans leur dimension scolaire seconde. " (ibidem, p. 91)

l'échec en mathématiques. Tenter de comprendre les difficultés de ce public est l'objectif des travaux que je présente ici.

- *Parti pris du couplage technique/théorie contre celui de la prédominance de la théorie* : il s'agit de considérer que le savoir théorique ne suffit pas à rendre compte de la généricité des tâches et des pratiques de résolution, donc des apprentissages à réaliser.

Je veux insister ici sur le fait que ceci n'est pas la seule conception possible de l'activité mathématique : on peut considérer que toute la dimension stratégique de la résolution d'un problème est formalisée par le savoir dit savant, le reste étant affaire d'affrontement tactique à la contingence ; un bon mathématicien est alors un expert du savoir théorique, particulièrement rusé et inventif en situation. Il me semble que ce point de vue préside au développement des Olympiades et autres institutions non scolaires de pratiques mathématiques.

Il est possible que certains élèves envisagent sous cet angle l'enseignement des mathématiques : s'ils comprennent que les exercices et problèmes répondent à une finalité d'apprentissage, ils considèrent que l'enjeu réside dans l'appropriation du savoir mathématique théorique tenu pour le lien pertinent entre les tâches. Une telle approche ne débouche pas spontanément sur l'installation d'Organisations Praxéologiques.

A l'appui de cette hypothèse, je citerai un extrait de l'interview de Julien ; ce garçon a été absent pendant quelques jours et n'a donc pas assisté à une partie des cours sur lesquels porte le contrôle objet de l'entretien⁶ :

I : Donc là tu as travaillé avec ... ça c'était un exercice que le professeur avait donné

J : Oui, oui

I : Les autres ne t'avaient pas donné le corrigé ou ...

J : Ben si mais enfin déjà j'avais demandé à ce qu'ils me redonnent les cours, mais eux, ils m'ont dit " On n'a fait que des exercices ", donc ils m'ont dit " ça sert à rien que tu le prennes " et ... (rire) conclusion j'aurais dû le prendre en fait

I : Oui, tu donc là quand tu as été malade, tu n'as pas récupéré les exercices ?

J : Non, non

Pour les amis de Julien, l'apport d'une séance d'exercices à l'apprentissage peut être négligé, c'est le cours qu'il est important de rattraper.

⁶ Dans les extraits d'entretiens, I désigne l'interviewer. Les échanges sont cités dans leur forme originelle, à quelques raccourcis près (suppression de euh, de redites, etc.) visant à faciliter la lecture. Les passages en gras sont des éléments que je souligne, ils ne correspondent pas à des intonations particulières.

Ainsi je retiendrais que, si l'approche praxéologique conduit à les regarder comme complémentaires, les orientations théorico-pratique et pratico-théorique peuvent aussi être dissociées dans la conception de l'activité mathématique comme dans celle de l'enseignement et de l'apprentissage. Etude des éléments de savoir théorique et étude des OM dont nous avons vu rapidement qu'elles suivaient des chemins au moins en partie différents, ne vont pas nécessairement de pair.

1.2. Les responsabilités du professeur en position P0 relativement aux orientations théorico-pratique et pratico-théorique

Dans l'enseignement secondaire français, les deux types d'objets de savoir, savoirs théoriques et organisations praxéologiques, sont présents dans les classes de mathématiques. Cependant, ils ne sont pas également reconnus comme enjeux d'apprentissage. Les savoirs théoriques apparaissent explicitement dans les programmes alors que la plupart des OM associées en sont absentes, elles sont au mieux très fugitivement évoquées. C'est pour l'essentiel par une étude des tâches prescrites que l'on peut déterminer les exigences institutionnelles relativement à ces OM (Castela, 2006). Autrement dit, le point de vue théorico-pratique est le point de vue dominant, il structure l'enseignement, régissant notamment la répartition du temps scolaire attribué aux mathématiques : la durée impartie est d'abord distribuée entre les savoirs théoriques figurant au programme ; l'étude d'un élément de savoir S_{th} et des OM qu'il contrôle (autrement dit d'un thème – Chevallard, 2002) doit s'inscrire dans cette dotation temporelle ; si elle se révèle chichement comptée, priorité est donnée à la diversité des applications de S_{th} , l'étude des OM ainsi introduites étant assujettie aux limites imposées par la pénurie. Le point de vue pratico-théorique n'est pas absent mais c'est sur lui que pèsent d'abord les accélérations du rythme didactique.

Dans ce contexte, le professeur est fortement assujetti à organiser l'étude des savoirs théoriques figurant au programme ; par contre, les assujettissements relatifs aux OM sont plus faibles et plus flous ; le développement de leur étude est une variable d'ajustement aux contraintes temporelles.

En position P0 (à l'issue d'une préparation et de décisions élaborées dans les niveaux sur-didactiques), **le professeur organise l'étude des savoirs théoriques au**

programme. En particulier, **il les désigne aux élèves comme enjeux d'apprentissage**. Comme cela a déjà été relevé précédemment, ce processus d'explicitation de l'enjeu est favorisé par la production d'un texte du savoir institutionnalisé, texte qui en mathématique est écrit par le professeur, au tableau ou sous d'autres formes, polycopiés, transparents, etc. (ce n'est pas le cas dans toutes les disciplines).

Pour introduire l'élément de savoir étudié⁷ et plus communément pour en illustrer l'intérêt, P0 confronte les élèves à certaines tâches qui sont toujours des premières rencontres avec des OM relevant du thème traité. Sous l'effet des différents assujettissements contradictoires qui encadrent son action (contrainte temporelle, niveau des exigences institutionnelles relatives aux OM en question⁸...), P0 développe plus ou moins l'étude des OM rencontrées.

Certaines sont véritablement constituées en enjeux didactiques en ce sens que le professeur veut provoquer chez les élèves un apprentissage relatif aux tâches du type et s'efforce d'en créer les conditions dans la situation didactique (il s'agit alors d'installer autour de cette OM ce que G.Brousseau –1996, pp.23-26- désigne comme un contrat fortement didactique portant sur un savoir nouveau). Suivant Y.Chevallard, on peut supposer que les conditions les plus favorables à la réalisation d'un tel objectif sont réunies lorsque les différents moments de l'étude sont proposés.

Dans ce cas, comme pour le savoir théorique, **l'institutionnalisation contribue à l'explicitation du contrat noué autour de l'OM en la désignant dans toutes ses dimensions** (practico-technique et technologico-théorique), **comme enjeu d'apprentissage**. Toutefois, contrairement à ce qui se passe par la force des choses dans un manuel, P0 peut décider de ne pas recourir lui-même à l'écrit lorsqu'il s'agit d'institutionnaliser la technologie et par ce biais la technique, se contentant d'interventions orales. Or, tous les entretiens réalisés le montrent, prendre en notes les commentaires du professeur est une pratique rare et limitée en mathématiques.

Justine

I : D'accord, et sur ce que le professeur dit, ça t'arrive de noter...

⁷ Il s'agit ici d'envisager le cas d'un enseignement inspiré par les travaux de notre communauté.

⁸ Je renvoie à nouveau à la première partie du cours de l'école d'été pour un développement sur la question suivante : en l'absence d'explicitation dans les textes, comment décrire et déterminer l'échelle des apprentissages relatifs aux OM nécessaires à la réussite en mathématiques ?

J : Non, je prends pas de note parce que en général c'est écrit des ...démonstrations... enfin je note les démonstrations qu'il écrit au tableau ou

I : Donc en math, on écrit ce qui est au tableau

J : Oui, parce qu'il écrit tout, il écrit toutes les démonstrations au tableau, donc **nous on prend pas de note, c'est pas comme un cours de français ou un cours d'histoire où il faut prendre des notes**

I : D'accord, donc ça ne se fait pas

J : Non *rire* enfin je l'ai jamais fait

Ainsi, l'explicitation orale de la technologie peut ne pas avoir de fonction institutionnalisante pour certains élèves ; pour tous, c'est une forme affaiblie d'institutionnalisation qui minore l'importance accordée aux savoirs technologiques.

Mais, par manque de temps ou par crainte de s'engager dans l'enseignement de recettes (voir les objections relatives à l'enseignement de méthodes), P0 peut choisir de réduire la technologie à des considérations sur le savoir théorique, alors seul à être objet d'institutionnalisation. Il reste que **le bloc pratico-technique $[T, \tau]$ peut demeurer un enjeu didactique pour P0 qui en organise l'étude** en développant les moments d'exploration du type de tâches T , d'émergence puis de travail et d'évaluation de la technique τ . C'est une forme de **contrat d'ostension** (Brousseau, 1996, p.46) qui se noue autour de l'OM, je ferai l'hypothèse que **même en l'absence d'explicitation technologique, le temps consacré à l'étude, s'il est suffisant, est perçu par les élèves comme la manifestation des intentions didactiques du professeur**. D'autres indices semblent émis par le professeur pour mettre en avant certaines OM :

Alice : Je relis, de temps en temps, j'en refais quand ...quand ça coince un peu ou...des trucs ...parce qu'on a des exercices un peu basiques par exemple sur les débuts...calculer des produits scalaires ou des trucs dans le genre, donc il faut que...**ça ils nous disent bien qu'il faut savoir le faire pour le contrôle** et tout ça. Donc j'essaie de m'exercer, d'en faire un peu.

Blandine : Ben quand...parce qu'en général, on a des séries d'exercices, la consigne, c'est même exercice, même exercice donc j'en fais un ou deux et puis après...enfin ça c'est les exercices de base et puis après les exercices...compliqués, je fais souvent ceux sur lesquels j'ai buté ou...enfin sur **lesquels on a passé beaucoup de temps** parce que je pense que le professeur trouve ça important donc je les refais et puis voilà.

Mathilde

I : Donc sur ton cahier en fait, tu mets des commentaires ?

M : Oui voilà. P'tites...p'tites annotations mais en fait, ça aide bien quand on relit, ça nous dit ...enfin on regarde Ah ben là, tiens ça, ça peut tomber au contrôle ...enfin

I : Et comment tu devines alors que le professeur... Qu'est-ce qu'il donne comme genre d'indications ?

M : Ben par exemple, y a des exercices où il insiste beaucoup plus longtemps, enfin où il nous réexplique deux ou trois fois alors que ça nous semble euh enfin simple comme exercice, où tout le monde a compris enfin...ou je sais pas, des fois il dit euh Oui, ça c'est important euh enfin...c'est des petits détails

I : Mais c'est l'ancien professeur ou le nouveau ? Ils font tous ça ?

M : Oui, ils le font tous. Mais **c'est des petits détails, en fait inconscients que les professeurs ils donnent comme ça...mais...Bon pas dans toutes les matières mais je sais qu'en mathématiques, je peux le faire par exemple et euh inconscients, où ils vont nous dire ça c'est bien important...**

Enfin si le temps est compté, P0 doit renoncer à prendre à sa charge l'organisation des apprentissages relatifs à certaines des OM qu'il a introduites pour illustrer le savoir théorique. Il en engage l'étude mais l'abandonne plus ou moins rapidement. P0 provoque ainsi la rencontre des élèves avec certaines ignorances, commence dans S0 le processus d'étude permettant d'y remédier mais ne le mène pas à son terme, loin de là dans certains cas. Ainsi, conformément au fonctionnement du modèle de structuration du milieu, P0 construit pour le niveau suivant **un milieu qui contient des ignorances à combler, autrement dit des objets dont l'étude est à mener⁹.**

Résumons les analyses présentées jusqu'à présent.

Le professeur de mathématiques joue un double jeu : d'une part, il enseigne les savoirs théoriques du programme ; d'autre part, il organise, plus ou moins, l'étude d'un certain nombre d'Organisations Mathématiques qu'il n'explicite pas toujours (pas souvent) comme enjeux d'apprentissage. Chacun des exercices ou problèmes qu'il propose aux élèves participe de cette double finalité : à l'avant-scène, sous les feux de l'institutionnalisation, étude du savoir théorique ; au deuxième-plan, un peu dans l'ombre parce que non mise en exergue par le même niveau d'institutionnalisation, étude d'une ou plusieurs OM.

Dans la partie I.1., nous avons évoqué ces élèves qui, peut-être trompés par la différence d'éclairage, ignorent la deuxième finalité. Mais les considérations développées introduisent une deuxième source de difficultés, à savoir l'inachèvement de l'étude de certaines OM dans le système didactique. Relativement aux OM, P0 ne joue pas toujours franc jeu didactique, il n'assume souvent que très partiellement l'organisation des apprentissages remédiant aux ignorances qu'il a introduites dans S0. Cette analyse est prise en compte dans le travail des positions E0 et E1 qui est l'objet de la partie suivante.

⁹ Ce que C. Félix dans sa thèse appelle un milieu à "trous" (Félix, 2002, Félix et Joshua, 2002).

1.3. Les positions didactique et sur-didactique locale de E : des propositions inabouties

Commençons par une caractérisation des positions E dans les niveaux didactique et sur-didactiques : 1. E est animé du projet de réaliser les apprentissages relatifs aux objets de savoirs mathématiques (S_{th} et OM) nécessaires à sa réussite dans l'institution "Enseignement de Mathématiques" ; 2. il sait que ces apprentissages dépendent de son propre engagement dans l'étude.

Ces positions sont donc dotées d'une double dimension, **E est apprenant et étudiant**. Les recherches de l'équipe Escol-Paris 8 par exemple ont amplement montré que les enfants et adolescents n'adoptaient pas nécessairement cette double posture en venant à l'école (cf. les travaux d'E.Bautier, S.Bonnéry, B.Charlot et J-Y.Rochex). Par ailleurs, j'insiste sur le fait que selon moi, le projet d'apprentissage ne relève pas des positions de E dans les niveaux a-didactique, y compris dans la situation a-didactique S_{-1} où l'activité de E est orientée vers la résolution du problème (voir note 3). Je ne développerai pas ces points ici, renvoyant au cours de l'école d'été.

Par rapport aux niveaux sur-didactiques, **le niveau 0 est caractérisé par l'interaction didactique entre E0 et P0** : E0 est élève de P0 en ce sens qu'il est animé du projet de réaliser les apprentissages que lui désigne P0 et s'engage pour ce faire dans le parcours d'étude organisé par le professeur au sein de la situation didactique. Contrairement à ce que j'avais présenté à l'école d'été (E0 = E-apprenant), je reprends ici à mon compte la désignation proposée par C.Margolinas : au niveau 0, l'Etudiant-apprenant est Elève mais je résiste mal à l'envie d'explicitier la relation à P0 en parlant plutôt d'Elève-de.

Les niveaux sur-didactiques sont au contraire caractérisés par la clôture de la relation didactique relativement aux objets de savoirs. Ceci ne signifie pas que la relation disparaît mais qu'elle est figée, elle appartient aux milieux des situations supérieures dans lesquelles élèves et professeur ne coopèrent plus par définition. Je définirai plus loin la position de E-étudiant au niveau 2, les analyses développées jusqu'à présent ne permettant pas encore de le faire. Elles sont par contre suffisantes pour définir E1 que je désignerai comme **E-étudiant localement autonome** : au niveau 1, E prolonge

l'étude des Organisations Mathématiques¹⁰ contrôlées par le savoir théorique sensible, OM que P0 a introduites dans S0 sans pouvoir en développer suffisamment l'étude. Le milieu M1 étant constitué par S0 est à la fois récent et local (même si S0 peut-être constituée d'une série de séquences correspondant à une unité thématique).

Cette caractérisation des niveaux didactique et sur-didactique est encore en chantier, on verra dans la section III qu'en l'état, elle ne permet pas facilement de situer certaines dimensions du travail personnel repérées dans les entretiens entre S0 et S1 dont la frontière demeure floue. Je terminerai cette section en m'appuyant sur quelques exemples qui éclaireront, je l'espère, les choix formulés sans doute de manière trop laconique dans les définitions ci-dessus.

La distinction S0-S1 ne dépend pas du lieu où se déroule l'activité de l'élève ni de la présence effective du professeur mais de l'impossibilité définitive pour E d'impliquer P dans son étude. Dans ce cadre, la recherche à la maison des exercices ou devoirs relève de S0 (éventuellement pour une part de S-1) et non de S1, P0 étant a minima celui qui propose une solution valide à partir de laquelle, si P0 ne le fait pas explicitement (ce qui peut arriver), E0 peut valider sa propre production¹¹, repérer les erreurs ou les maladresses.

Inversement, l'élaboration de la technologie, l'institutionnalisation de la technique peuvent être largement placées sous la responsabilité de E1. En effet, comme cela a été évoqué dans I.2., faute de temps ou par conviction pédagogique, certains professeurs se contentent de donner à résoudre quelques exercices relevant d'une OM donnée sans développer la composante non théorique de la technologie ou en se contentant de commentaires oraux, diversement pris en compte par les élèves.

Mais où situer les gestes que l'élève doit réaliser en propre, parfois en classe, parfois en dehors, pour que l'étude organisée par P0 se convertisse en apprentissage ? Ces gestes, à forte dimension mentale et cognitive, nous savons qu'ils existent puisque, à partir de la même organisation de l'étude, certains élèves n'apprennent pas quand d'autres apprennent. Je pense ici aux travaux de M.-J. Perrin, D. Butlen et M. Pézard (Perrin-Glorian 1993, Butlen et Pézard 2003) qui montrent comment P0 importe, dans des classes faibles,

¹⁰ On peut envisager que l'étude concerne également des éléments de savoirs théoriques mais je ferai l'hypothèse que ce n'est pas le cas au secondaire.

¹¹ Dans certains cas, un élève peut être amené à rejeter sa solution, pourtant valide, parce qu'elle ne correspond pas à celle du professeur.

sur la scène publique de S0 des gestes d'étude dont on peut faire l'hypothèse qu'ils sont plus ou moins consciemment accomplis par les élèves en réussite. Décider d'attribuer ce niveau de l'étude à E1, c'est mettre en avant le fait que l'école n'intervient pas dans la formation de ces gestes. Mais c'est en même temps vider la situation didactique de tout ce qui n'est pas interactions entre P0 et E0 et réduire de beaucoup les responsabilités incombant à E0. J'ai rejeté cette option pour la raison suivante : je cherche un modèle susceptible de rendre compte des difficultés qui apparaissent dans les niveaux scolaires supérieurs (lycée et université), attribuer à E1 des formes de travail dont on sait qu'elles font déjà défaut à de nombreux élèves en échec au collège ne permet pas d'atteindre cet objectif. Je considère donc que **S0 est, pour utiliser une métaphore mathématique, l'enveloppe pour l'élève de l'étude organisée par P0. A ce niveau, ce n'est pas le professeur qui a le dernier mot, c'est l'élève.**

Mais ce choix¹² ne clôt pas le chantier, à l'usage la frontière reste floue. Nous touchons sans doute ici aux limites de la dynamique purement théorique qui anime cette partie du travail.

2. Caractérisation d'un deuxième niveau sur-didactique pour E

Dans le prolongement du cours de l'école d'été, je me propose dans cette section d'introduire une position de E dans S2, ce qu'aucun des chercheurs ayant travaillé sur le modèle du milieu n'a considéré comme utile jusqu'à présent. Pour motiver cette initiative, j'évoquerai d'abord rapidement "la longue vie des OM ponctuelles" dans l'enseignement des mathématiques en montrant pourquoi elles restent des objets sensibles alors que les rapports aux savoirs théoriques qui les justifient ont cessé d'évoluer.

¹² Cette décision attribue au niveau 0 des gestes situés au niveau 1 par F.Génestoux (2002, a et b) dont le travail est particulièrement centré sur le travail personnel de l'élève et les aides qui peuvent lui être apportées hors système scolaire. Cette différence est en cohérence avec une autre : F.Génestoux utilise E-étudiant pour E1 alors que pour moi, E est étudiant (et apprenant) dans les niveaux didactique et sur-didactiques.

2.1. La nécessaire prolongation de l'étude des Organisations Mathématiques

Je ne pourrai donner ici qu'un aperçu extrêmement réduit de la réflexion présentée dans la première partie du cours de l'école d'été et qui fait l'objet d'un article soumis à RDM. Dans ce travail, je m'appuie sur certains outils d'analyse d'exercices proposés par A.Robert et M.Rogalski (2002) pour distinguer différents niveaux d'intervention d'une OM = $[T, \tau, \theta, \Theta]$ dans les problèmes mathématiques. Ces niveaux sont obtenus en croisant trois critères : 1. L'identification du type de tâches T est-elle à la charge de l'élève ? 2. La tâche s'insère-t-elle dans un contexte contenant des objets de savoir nouveaux autres que ceux qui relèvent de θ que l'élève doit manipuler lorsqu'il met en œuvre la technique τ ? 3. L'élève dispose-t-il de plusieurs OM relatives à T parmi lesquelles il a la responsabilité de choisir la technique efficace ?

Lorsque le savoir théorique inclus dans θ est un objet sensible, les élèves sont rarement confrontés à des problèmes qui sollicitent les OM du thème régi par θ dans des conditions conduisant à une réponse positive pour l'une ou l'autre de ces trois questions. Par contre, l'avancée du temps didactique, avec son lot d'objets de savoirs théoriques et d'OM nouveaux, favorise l'intervention des OM plus anciennes à des niveaux plus complexes : lors de la mise en œuvre d'une nouvelle technique, une tâche relevant de T apparaîtra comme sous-tâche non explicitée dans l'énoncé du problème ; pour certains types T , l'enrichissement des savoirs mettra à disposition des élèves des techniques plus nombreuses. Je fais l'hypothèse que ce développement des formes d'utilisation des Organisations Mathématiques ponctuelles provoque un double processus : évolution-complétion de chacune d'une part, structuration de l'ensemble qu'elles forment d'autre part.

Avant de justifier ces propos par quelques exemples, j'introduirai une description des OM ponctuelles qui explicite le fait que la technologie est duale, associant des savoirs théoriques θ_{th} à une composante plus pratique, comprenant notamment des savoirs sur le fonctionnement mathématique (cf. I.1.) : $OM = [T, \tau, (\theta_{th}, \theta'), \Theta]$.

Evolution et développement des OM ponctuelles.

Je m'appuierai sur deux exemples relevant du programme de Première S pour expliquer ce que j'entends par là.

Le premier exemple concerne un type de problèmes que l'on rencontre dans tous les manuels de ce niveau (plusieurs des élèves interviewés ont fait référence au cas plus simple des suites arithmético-géométriques), il s'agit de l'étude des suites récurrentes homographiques par l'introduction d'une suite annexe :

Enoncé

La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_1 = 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

1. On pose, pour tout $n > 0$: $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2}$ et on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies pour tout $n > 0$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
2. En déduire que la suite (v_n) est géométrique et calculer la limite de $(|v_n|)$.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n . En déduire la limite de (u_n) .

L'OM dont l'intervention est analysée ici concerne la résolution des équations à une inconnue faisant intervenir un quotient de polynômes du premier degré ; dans la question 2, les élèves doivent reconnaître ce type de tâches sous la formulation "Exprimer u_n en fonction de v_n ", de façon à mettre en œuvre la technique qu'ils connaissent, dans un contexte où l'inconnue n'est pas l'ostensif usuel x et où le second membre est un paramètre. C'est ici la **caractérisation du type** qui est en jeu. Il s'agit en quelque sorte d'**élargir le type de tâches** en y intégrant des tâches qui ne sont pas a priori formulées comme celles du type initialement introduit, en particulier parce qu'elles utilisent des ostensifs différents¹³ (on peut aussi penser à des exercices de géométrie de Seconde qui conduisent à calculer une longueur AM sachant que $\frac{AM}{AM + 3,6} = \frac{3}{7,5}$ ou plus tard en Terminale S¹⁴ aux questions classiques relatives à la recherche d'antécédent par une fonction homographique complexe).

Le second exemple concerne le calcul vectoriel et la technique de démonstration d'une égalité par emploi de la relation de Chasles. Le savoir théorique est enseigné en Troisième, repris en Seconde mais dans le cadre des programmes en vigueur qui mettent

¹³ Ces éléments ont une certaine proximité avec les analyses présentées par M.Bosch, C. Fonseca et J.Gascón (2004) mais je ne reprends pas à mon compte la modélisation proposée.

¹⁴ Troisième année de lycée, année du baccalauréat, section scientifique, 17-18 ans

l'accent sur la géométrie analytique, cette OM est alors peu travaillée. Sans aucun apport théorique nouveau concernant le calcul vectoriel stricto sensu, les élèves de Première S sont confrontés dans les chapitres sur le barycentre et le produit scalaire à des exercices où la technique considérée ici est indispensable et doit être contrôlée pour être efficace : les élèves doivent développer des règles d'usage de la relation de Chasles leur permettant de piloter les décompositions ; par exemple, " on peut avoir intérêt dans le plan, à choisir deux vecteurs non colinéaires pour exprimer tous les vecteurs de la figure " (c'est évidemment la notion de base qui est sous-jacente mais ce savoir théorique est hors programme, la règle apparaît à ce niveau comme un savoir sur le fonctionnement mathématique, élément de θ'). Dans ce cas, l'intervention de la technique dans des exercices plus complexes et sous la responsabilité des élèves débouche sur **le développement de la composante non théorique θ' de la technologie** (nous verrons dans la section III comment une très bonne élève, Laura, a rencontré la nécessité d'exercer un contrôle sur le calcul vectoriel et comment elle a par son travail personnel résolu le problème ; l'entretien lui donne l'occasion d'explicitier la technologie qu'elle a élaborée).

Structuration des OM associées à un même type.

Il s'agit ici d'envisager le cas où les élèves ont rencontré plusieurs OM ponctuelles distinctes pour affronter les tâches relevant d'un type T. Je fais l'hypothèse que l'élaboration d'une structure regroupant les OM relatives à T est un élément facilitateur dans le cas de problèmes au sein desquels la responsabilité de choisir la technique efficace incombe aux élèves.

Dans le cours de l'école d'été, j'ai présenté le cas d'un type de tâches que l'on pourrait caractériser par la présence d'un travail sur des inégalités, composé de plusieurs sous-types que la pratique conduit à rapprocher puisque les différentes techniques de résolution font circuler de l'un à l'autre : Démontrer une inégalité, un encadrement ; démontrer l'appartenance à un intervalle ; Etudier le signe d'une expression ; montrer qu'une expression est positive ; Résoudre une inéquation. J'ai montré que, pour ce type de tâches, les élèves de Terminale S ont rencontré de nombreuses techniques dont les technologies relèvent de plusieurs thèmes : transitivité de l'inégalité, propriétés des opérations algébriques relativement à la relation d'ordre, relativement au signe, sens de variation des fonctions et lien avec la dérivation, croissance de l'intégrale. Deux domaines sont en jeu, algèbre et analyse, et en analyse au moins deux secteurs distincts (dérivation,

intégration). Il n'existe donc aucune théorie, au moins parmi celles qui sont enseignées au lycée, qui soit susceptible d'accueillir l'ensemble des OM ponctuelles associées à T . C'est pourquoi je représenterai la structure visée de la façon suivante :

$$OM_T = [T, \tau_{kji}, \theta_{kj}, \Theta_k]_{k,j,i}$$

Notons que l'élaboration d'une telle structure relance le travail, notamment le développement de θ , pour chacune des OM ponctuelles connues ; il s'agit notamment d'explorer le domaine d'efficacité dans T de chaque technique, de trouver des critères permettant a priori de privilégier une technique par rapport aux autres à partir de l'énoncé. Ce point de vue est développé dans un article soumis à RDM et en cours de révision.

Je retiendrai de ces considérations que les Organisations Mathématiques ponctuelles restent des objets sensibles beaucoup plus longtemps que les savoirs théoriques qui fondent leur technique. Elles peuvent donc être des objets d'apprentissage alors que ces savoirs relèvent du milieu institutionnel (au sens donné à cette notion par Chevallard, 1992). La nécessité et l'occasion de réaliser les apprentissages en question sont créées par les tâches proposées par P_0 , dans les situations didactiques S_0 relatives à d'autres enjeux didactiques. Ainsi, non seulement ces tâches participent du double jeu analysé dans la section I, étude des savoirs théoriques qui définissent le présent didactique d'une part, étude plus ou moins développée des OM associées d'autre part, mais elles s'inscrivent également dans un prolongement de l'étude d'objets passés. Cette troisième dimension complexifie le travail de E-étudiant, elle motive l'introduction de la position E_2 .

2.2. La position sur-didactique transversale de E

A ce niveau, le travail de E-étudiant vise à pallier des ignorances dont P_0 n'a pas pris en charge la mise en évidence. E_2 fait évoluer son rapport à certains objets sans que P_0 lui ait fait sentir que cette évolution était utile et *a fortiori* sans qu'il en ait précisé le contenu. Ceci est une première différence entre S_1 et S_2 : E_2 doit se donner ses objets d'étude.

Ceux-ci sont par définition des objets non sensibles dans S_0 , essentiellement des OM anciennes, que E rencontre dans des conditions nouvelles au cours du processus d'étude des objets sensibles organisé par P_0 , éventuellement prolongé par E_1 . Conformément au principe de l'emboîtement des milieux, S_0 et S_1 participent du milieu de S_2 , c'est-à-dire du milieu de l'étude pour E_2 . Mais, celui-ci intègre également des situations didactiques antérieures, celles qui ont eu pour enjeux didactiques les OM anciennes étudiées dans S_2 .

Peuvent aussi s'y incorporer d'autres rencontres plus isolées dans des problèmes mettant en jeu ces OM. Se constitue ainsi un milieu rapprochant des éléments dispersés dans le temps et dans la structure théorique du cours, de nature à permettre l'évolution-complétion des OM considérées et éventuellement leur organisation dans certaines structures plus complexes. Ce milieu est chronologiquement et topologiquement transversal ; ceci est la deuxième différence entre S1 et S2. L'inscription dans le long terme légitime le choix de situer au niveau 2 cette position de l'étudiant, elle correspond bien aux caractéristiques attribuées à la situation de construction pour P2.

E2 définit ses objets d'étude, il contribue grandement à la constitution du milieu sur lequel il appuie son travail, ces deux dimensions qui caractérisent cette position de l'étudiant relativement à la position antérieure permettent de cerner en quoi l'autonomie nécessaire à l'étudiant dans S2 est plus développée que celle qui convient à E1. E2, **l'étudiant autonome**, s'approche de l'autodidacte auquel j'ai consacré une partie de ma réflexion dans le cours de l'école d'été.

3. A propos des gestes de préparation d'un contrôle de mathématiques en Première S

Je me propose dans cette section de donner une idée des éléments recueillis auprès de 10 élèves de Première S qui ont accepté de me rencontrer pour un entretien d'environ 45 minutes consacré à leur façon de travailler. Ces élèves sont scolarisés dans le principal lycée de centre ville de Rouen, établissement de public socialement favorisé, accueillant les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs. Ce choix n'est évidemment pas fortuit : il s'agit de s'intéresser à des élèves dont l'origine sociale ne peut pas être prise comme facteur explicatif des difficultés et dont le projet personnel (ou celui de leur famille) n'est pas étranger à la poursuite d'études scientifiques longues.

Au plan méthodologique, trois points me paraissent intéressants à signaler.

Tout d'abord, les élèves ont été contactés en dehors de la présence du professeur, seulement prévenu de l'existence de la recherche, je n'ai jamais assisté à un cours de mathématiques. Ceci a des conséquences sur le plan des informations en ma possession sur S0 (par exemple, je ne sais pas jusqu'où va le professeur dans ses commentaires technologiques), ce qui limite l'interprétation des gestes d'étude et leur attribution aux différentes positions de E dans le modèle. Mais cette option vise à bien distinguer le

chercheur du professeur et de l'institution de façon à créer un climat de confiance avec les élèves : ils doivent pouvoir parler de leur travail personnel même s'ils sentent qu'il ne correspond pas aux canons institutionnels.

Ensuite, la technique de l'explicitation inspire la réalisation des entretiens avec une consigne initiale centrée sur le récit de la préparation du contrôle précédent (les rencontres ont lieu dans les deux semaines qui suivent ce contrôle). Mais il s'agit plutôt d'un horizon dans la mesure où, par exemple, j'ai laissé se développer des phases consacrées à des habitudes générales. Par contre, j'ai systématiquement cherché à ce que les élèves illustrent leurs considérations d'exemples précis, la plupart du temps reconstitués à partir de leurs seuls souvenirs (y compris au niveau des énoncés d'exercices).

Enfin, du fait de la méthodologie utilisée, l'échantillon ne peut pas prétendre à la représentativité et ce, quelle que soit la proportion d'élèves interviewés dans une classe : n'ont participé que des élèves volontaires, ayant donc nécessairement un certain désir de parler sur leur travail personnel.

L'échantillon est composé de 2 garçons et 8 filles (peut-être faut-il mettre ce déséquilibre en relation avec la dernière observation mais le fait que la recherche ait été présentée par deux chercheuses¹⁵ peut avoir également eu une influence). Ils appartiennent à la même classe dont tous les élèves volontaires ont été interviewés (12 élèves – dont 9 garçons – présents à la séance d'information ont refusé de participer). Sur le plan de la réussite en mathématiques, 2 élèves – les 2 garçons, Julien et Thomas – se sont vu proposer un redoublement en fin d'année (moyennes inférieures à 8), 3 élèves, Justine, Laura et Pauline ont eu toute l'année une moyenne supérieure à 15, les autres se situant entre 10 et 12.

Les entretiens ont été réalisés entre fin Janvier et fin Mai, les changements entre Seconde et Première S ont pu à ce moment commencer à produire des effets sur le travail personnel.

Bien évidemment, les développements qui suivent n'ont aucune prétention quantitative. Il s'agit de donner une idée des éléments rencontrés dans l'un ou l'autre de ces entretiens très riches en les organisant si possible grâce au modèle présenté en I et II. Pour ce faire, je m'appuierai largement sur la parole des élèves eux-mêmes.

¹⁵ Ce travail s'inscrit dans un projet bidisciplinaire soutenu par l'Iufm de Haute-Normandie : les élèves sont interrogés sur leur travail personnel en mathématiques et en Sciences de la Vie et de la Terre.

3.1. Par rapport au collège, nécessité d'un développement du travail de E0 en dehors de la classe ; première dimension : auto-diagnostic des incompréhensions et des ignorances

Pour déterminer en quoi les éléments obtenus dans les entretiens manifestent une évolution du collège à la Première S, je prendrai comme référence les conclusions de C. Félix dans sa thèse. Je m'appuierai également sur les dires des élèves interviewés qui ont en général évoqué les changements d'une institution à l'autre en réponse à une question sur l'évolution de leur façon de travailler.

Dans l'article déjà cité de C. Félix et S. Joshua (2002, pp. 94-95), les auteurs avancent la conjecture suivante : " l'essentiel de l'étude, pour les " bons " élèves de collège, se déroule essentiellement en classe." Plus loin, ils précisent notamment que pour ces mêmes élèves, l'accession à l'expertise est rendu possible " par le travail fourni [...] dans les moments ordinaires de classe, ceux qui accompagnent l'étude de la notion durant toute la séquence d'apprentissage. C'est dans ces moments que l'élève met progressivement à sa main l'organisation mathématique étudiée. Cette routinisation presque systématique des pratiques réduit d'autant les moments héroïques¹⁶ ; moments qui n'abritent pour les élèves forts que des gestes de lecture servant " à se remettre en tête". Ces gestes [...] " correspondent à l'évocation de pratiques de travail élaborées en classe. " (Félix 2002, p. 371).

Les entretiens réalisés montrent un net changement sur les deux aspects mis en avant ici, changement qui n'épargne pas les trois meilleures élèves.

3.1.1 Le rythme adopté en classe rend difficile la compréhension complète en temps réel des connaissances en jeu

Laura (moyenne : 13-15-15) décrit très bien le changement qu'a représenté pour elle le passage de Seconde en Première S :

Laura : J'ai vraiment trouvé que entre la Seconde et la Première, y a vraiment un fossé. C'est plus du tout la même chose. En Première, on va beaucoup beaucoup plus vite. Je sais quand on est arrivé, le prof de maths allait super vite, il écrivait tout au tableau, on n'avait pas le temps de comprendre en cours, on était... là au début de l'année, j'étais vraiment obligée de travailler le soir à la maison parce que sinon, je comprenais pas... j'avais pas le temps de tout assimiler, j'avais pas le

¹⁶ Il s'agit des phases de préparation des contrôles.

temps. Le prof allait tellement vite, il dicte les phrases, il va super vite et tout. Toi, tu as du mal à essayer de... de tout noter, tout le cours, donc t'as pas du tout le temps d'enregistrer ce qu'il dit. Donc là après, **ça demande une demi-heure à la maison, on relit bien le cours, on essaye de tout bien recomprendre.** Et puis après, c'est un rythme à prendre. Je veux dire que maintenant là, en cours même si ça va vite, on arrive à comprendre en même temps. Mais c'est vraiment au début, c'est plus du tout le même rythme donc oui, c'est plus ça.

Laura décrit le travail complémentaire qu'elle a dû faire à la maison entre deux cours, pour remédier à ce qu'elle ressentait comme une compréhension insuffisante. On voit qu'après une période d'adaptation (entretien réalisé en mars), elle a réussi à réintégrer cette partie de l'étude dans la classe elle-même ; elle peut désormais en général se dispenser de revenir sur ce qui s'est passé en cours avant la période héroïque de préparation du contrôle. Justine, autre " bonne " élève (moyenne : 14-17-17,5), semble être dans la même situation, ne reconnaissant que de rares difficultés de compréhension. Ce n'est pas le cas de Pauline (moyenne : 15,5-16,5-17) :

Pauline

I : Donc en moyenne, quand tu sors de la classe... du cours, tu penses que t'as tout compris en gros ?

P : Non, par ex... enfin par exemple, **au début des suites, je comprenais rien** quoi enfin je voyais pas... les rapports avec les raisons, tout ça et puis en fait, c'est venu très vite quoi... **Sur les homothéties, je suis sortie du cours, je comprenais rien euh ça me saoulait trop** et en fait, comme c'est toujours la même chose, ça vient, petit à petit.

Pauline doit donc effectuer un travail hors classe pour remédier à ses difficultés.

Il est intéressant de noter que Laura et Pauline ont spontanément évoqué l'état de stress dans lequel les met le sentiment d'incompréhension :

Laura : Enfin je les fais [les exercices]... je sais pas si c'est toujours utile de les faire mais moi je... **ça me rassure de les refaire** en fait parce que je sais que si jamais je les refais pas, le soir je vais être stressée parce que j'aurai pas refait les exercices et ça va pas... ça va pas aller

[...] Ben quand je comprends vraiment pas un truc, ça me panique presque. Alors le soir, je me sens obligée de le refaire parce que enfin quand je comprends pas un truc ça m'énerve donc j'aime bien...

Pauline : On a eu un devoir, un DM pour la semaine d'après et... et je suis arrivée, j'y comprenais rien, j'ai eu un gros stress, je me suis dit " Je vais jamais y arriver, c'est fini " ... j'ai passé tout mon week-end à faire mon DM où je comprenais rien, y a mon père qui m'a aidée et... et j'étais en stress et donc du coup, ce coup de stress eh ben, ça m'a forcée à réviser pour me sentir en confiance.

On peut raisonnablement conjecturer que des élèves de résultats plus moyens sont aussi confrontés aux difficultés rencontrées par Pauline et Laura. Ainsi Perrine (moyenne : 9-11-10) dit revenir sur les séances sans attendre la révision pour le contrôle.

Perrine :

I : Et finalement entre les cours qu'est-ce que tu fais comme genre de travail, sans compter le contrôle ?

Pe : Ben je refais les... enfin j'essaie de refaire les exercices que j'ai pas compris [...]

I : Mais qu'est-ce qui fait que tu te dis " Tiens, faudrait que je retourne ? " Comment...

Pe : Ben ... soit parce que là souvent on a 2 heures...avec l'autre prof¹⁷ c'était plus... plus marquant mais... au bout de 2 heures... enfin ça... ça s'enchaîne tout ça et...moi à la fin, je comprenais plus rien... **Donc du coup le week-end je refaisais les 2 heures de maths toute seule parce que ça allait trop vite et au bout de 2 heures, t'es un peu submergée** quoi et là par rapport... enfin là, ça se passe mieux, mais... déjà un peu mieux mais... mais ouais, je refais les exercices... que j'ai pas compris et puis justement je suis allée... je suis allée plus souvent avec Pauline ou des gens qui y arrivent bien en maths, elle arrive à m'expliquer un peu mieux.

Mais inversement d'autres élèves déclarent ne rien faire d'autre entre les séances de mathématiques que de chercher les exercices donnés pour l'étude à la maison par le professeur ; en particulier, le retour sur les exercices corrigés en classe est réservé à la période de révision du contrôle. J'avancerai que cette attitude est fréquente, même chez les élèves en difficulté, la justification avancée étant la nécessité de préparer les contrôles des autres disciplines : à ce niveau, il y a toujours un contrôle en vue.

3.1.2 Les gestes d'évaluation de l'état de l'apprentissage relatif aux exercices faits dans S0

Intéressons-nous maintenant au travail réalisé, en fait surtout à l'occasion de la préparation du contrôle, sur les exercices résolus et corrigés dans S0. Pour les élèves, il s'agit alors non seulement d'avoir compris mais en prévision du contrôle de savoir faire et donc au moins refaire. Je me pencherai dans un premier temps sur ce que je considère comme des gestes d'évaluation de l'état de l'apprentissage réalisé relativement à ces exercices grâce à ce qui s'est passé antérieurement, à la maison (recherche de l'exercice) et en classe (correction, explication du professeur).

Pour les deux bons élèves interviewés par C. Félix, la routinisation des pratiques est telle que ces élèves sont vraiment confiants en la qualité de leur apprentissage, ils se contentent d'une relecture des corrigés, leurs notes aux contrôles les confortent évidemment

¹⁷ Les élèves ont changé de professeur de mathématiques suite au départ à la retraite du premier. Ceci n'a pas été sans effet sur le rythme de l'enseignement, le remplaçant jeune certifié ayant aussi une expérience en collège.

et dans leur diagnostic et dans leur stratégie. Ce résultat doit certainement être relativisé puisque par exemple Mathilde et Laura qui étaient de bonnes élèves au collège affirment avoir toujours travaillé comme elles le font en Première, refaisant notamment par écrit les exercices faits avec le professeur. Ceci étant, 5 élèves dont les deux meilleures, Pauline et Justine, disent clairement que leur façon de travailler a changé au passage en Seconde, voire plutôt en Première S, ce qui confirme les résultats de C. Félix :

Pauline

P : C'est depuis cette année. Ben enfin, les maths, la bio, la physique, ça compte vraiment beaucoup. Donc... bon, avant, enfin je faisais... je faisais pas grand chose... je m'y prenais pas à la dernière minute, non, mais je bossais devant la télé ou des trucs comme ça, ça me gênait pas...

[...]

I : Donc tes contrôles de maths, tu les révisais...

P : Je les révisais pas beaucoup hein. Je refaisais pas tant d'exercices que ça... je me contentais du cours... souvent.

I : Lire le cours ?

P : Hmm

I : Et ça te suffisait ?

P : Oui

Justine

I : Est-ce que tu te souviens du moment où tu t'es mise à travailler comme ça ? Comme tu viens de me raconter...

J : Ben en fait euh au collège, je ne faisais pas du tout ça parce que c'était... enfin ça semblait plus facile. Enfin les maths au collège, c'est facile. C'est à partir en fait de la seconde où j'ai... c'était une technique que je trouvais vachement bien pour apprendre et c'est ce qui me permettait d'avoir des bonnes notes.

I : Mais t'en as parlé, quelqu'un t'a aidé à trouver tout ça ?

J : Non, non, j'ai commencé à refaire les exercices et puis finalement je me dis que c'est un concours en fait d'essayer de les refaire tous avant le contrôle pour être sûre d'être bien... bien parée pour le contrôle. Mais non, non, c'est pas quelqu'un qui m'a dit de faire comme ça, non c'est toute seule euh, je me suis aperçue que ça m'aidait bien à... à me préparer au contrôle.

Dans les différents interviews se sont présentés les gestes suivants qui sont tout à la fois reprise de contact avec les exercices et leurs corrigés et auto-évaluation du savoir refaire :

- Lire directement le corrigé.
- Refaire de tête puis confronter au corrigé dans des aller et retours portant sur des parties plus ou moins courtes.
- Refaire entièrement par écrit puis confronter au corrigé.

La contribution d'Alice (7,5-9,5-12,5)¹⁸ me permettra d'illustrer les deux premières façons de faire qu'elle utilise comme on va le voir suivant l'importance qu'elle accorde aux exercices dans la perspective du contrôle, suivant aussi sa motivation. Comme on va le voir, Alice exprime un certain malaise par rapport à sa façon de travailler, seuls les deux garçons qui sont les plus en difficulté dans le groupe, la rejoignent sur ce terrain.

Alice

A : et puis Jeudi, ben j'ai revu les exercices qu'on avait faits en cours... plus profondément

I : Oui. Alors comment tu fais ça ?

A : Ben je les relis. Je relis, de temps en temps, j'en refais quand... quand ça coince un peu ou... des trucs... parce qu'on a des exercices un peu basiques par exemple sur les débuts... calculer des produits scalaires ou des trucs dans le genre, donc il faut que... ça ils nous disent bien qu'il faut savoir le faire pour le contrôle et tout ça. Donc j'essaie de m'exercer, d'en faire un peu.

I : Oui mais comment alors ?

A : Ben pff. Là pour celui-là, je l'ai refait plus dans ma tête en fait, je me dis... je cache... **je cache en fait ce qu'on a écrit** et puis je relis les... l'énoncé, tout ça, donc je relis, et puis je me dis ça fois ça et ça et **je calcule... dans ma tête et je regarde si j'ai fait... si ça coince ou si ça va pas [...]**

I : Donc ça, c'est les... tu fais comme ça pour les petits exercices

A : Ouais, exercices... types en fait, entre guillemets, pour chaque... chaque leçon.

Alice utilise donc le deuxième geste pour les exercices de base, ceux dont elle perçoit qu'ils doivent être maîtrisés. Pour ces exercices, cette approche est aussi présente chez Pauline, ce qui lui permet de traiter rapidement les exercices simples proposés par le manuel, " les trucs qui entraînent, les trucs de base ".

Alice (suite)

I : Et puis les autres alors ?

A : Ben ça dépend *rire* ça dépend des contrôles, ça dépend de ma motivation. Si je suis motivée, on va dire je vais les refaire à l'écrit, au brouillon mais euh... quand je le suis pas, je les relis juste en fait, je regarde, j'essaie de me souvenir comment il faut faire, d'avoir la méthode... et tout ça [...]

I : Bon. Et alors là, c'était une fois où t'étais... dans tes révisions, alors c'était un devoir où t'étais motivée ou...

A : Ben en fait non

I : Donc en fait, tu les as refaits... tu les a relus tous

A : Oui oui, **j'ai tout relu**, tous les... tous les exercices qu'on avait faits, toutes... les méthodes et tout ça aussi ouais quand même... mais euh pff **je les ai pas refaits réellement en fait...** Parce que c'est vraiment... parce que là je considérais que ça allait... que ça allait quand même... plus ou moins... que j'avais compris

I : Oui

A : Donc quand c'est des contrôles où j'ai... un peu plus de mal en fait, dans ce cas-là, je vais plus les refaire mais là...

Pour les exercices plus compliqués, bien qu'elle se rende compte que ce n'est pas l'idéal, Alice s'est contentée du premier geste pour ce contrôle, comme les bons élèves de Troisième et ce, en particulier parce qu'elle pensait avoir compris. Elle n'éprouve pas le

¹⁸ Cette élève poursuit sa progression en Terminale S en 2005-2006 et se propose de candidater en Classes Préparatoires.

besoin d'un diagnostic plus strictement fondé (ou elle n'a pas envie, c'est un élément récurrent dans son discours). En réalité, c'est plus un geste d'étude que de validation de ses acquis qu'elle accomplit en lisant : elle dit bien qu'elle cherche par cette lecture à mémoriser les façons de faire. Mais elle ne cherche pas à les mettre elle-même en œuvre. Qu'en est-il des deux élèves les plus en difficulté ? Thomas (6-7-7) applique un mixte des deux premiers gestes pour les exercices courts, alors qu'il refait les autres exercices par écrit :

Thomas

I : Cet exercice tu le refais dans ta tête ou tu le refais par écrit ?

T : Ça dépend desquels

I : Ça dépend desquels

T : Enfin si, quand je refais dans ma tête, je regarde, je reste avec la réponse, mais si je le refais entièrement là, je... je regarde pas les réponses. Et les exercices assez courts, en fait quand ils sont assez courts, je ne les réécris pas, **je les regarde seulement en essayant de suivre la correction** quoi, suivre les étapes pour... ce qu'on a fait pendant la correction.

Mais Thomas ne semble pas du tout systématique dans son travail de vérification (il a par exemple fait une impasse complète sur l'un des deux thèmes au programme du contrôle en pariant qu'il serait peu présent dans le sujet), il reprend les exercices qui lui paraissent importants mais ne sait pas dire comment il détermine son choix et peut-être la proportion des exercices faits de tête est-elle plus forte qu'il ne le dit. Globalement il ne semble pas suivre une stratégie vraiment assumée. Il faut dire que Thomas est très mal à l'aise pendant cet entretien, on ne peut pas exclure que les hésitations exprimées résultent autant de la situation d'entretien elle-même que de l'image qu'il a de sa position scolaire et de ses méthodes de travail.

Quant à Julien (moyenne : 9-11-8), s'il refait par écrit les exercices qu'il décide de reprendre, ce travail est chez lui aussi loin d'être systématique :

Julien

I : Dans les exercices que vous avez faits pour ce chapitre, y avait pas des inéquations ?

J : Si si y en avait de ça... j'y arrivais un petit peu. Ben d'ailleurs au contrôle on en avait eu, j'avais réussi à faire l'exercice, mais euh je me rappelle plus si j'ai eu bon, j'ai dû en avoir un peu un peu de bol (rire)

I : Et donc dans tes révisions, tu te souviens d'en avoir revu des exercices

J : Euh non j'avais pas trop envie de

I : C'est-à-dire là finalement tu n'as pas repris... tu ne refais pas tous les exercices que le professeur a donnés ?

J : Non Ben euh déjà les inéquations euh ben j'y ai pas pensé sur le moment (rire) et euh **en général je reprends ceux que j'ai moins... moins bien compris** et euh ben là j'avais bien lu surtout les études de fonctions et tout ça

Alice, Thomas et Julien sont les seuls à ne pas refaire par écrit la majorité des exercices faits avec le professeur, ce que font les 7 autres en appliquant éventuellement un traitement plus léger aux exercices les plus simples ou en choisissant certains énoncés dans le cas de séries d'exercices de même consigne¹⁹. Comme le dit très bien Laura dans l'extrait ci-dessous, ces élèves se sont rendu compte qu'ils ne pouvaient plus réaliser en classe tous les apprentissages nécessaires ni se fier à leur seule impression pour évaluer leurs acquis et décider si l'étude pouvait être close ou devait être prolongée.

Laura

L : Le professeur lui, il fait son truc, il met la réponse et puis il passe à autre chose, il prend pas le temps de... forcément... ben sur le coup, on comprend, donc on pose pas de question mais après c'est vrai que... enfin comprendre et savoir le refaire, c'est... c'est différent. Et puis il y a plein de choses, donc quand le prof le fait, il le fait vite et tout, nous on comprend et après on se dit Mince est-ce que je serai capable de le refaire ? Et c'est pour ça qu'après il faut justement travailler, parce que si on fait juste lire le cours, on comprend tout, mais si on n'essaie pas de creuser un peu, on sait pas le refaire tout seul

I : Donc quand tu les refais, ça te sert à ça ?

L : Oui ça me sert à... parce que même si j'ai compris, après il faut que je sois sûre que en arrivant devant la feuille d'énoncés au contrôle, je sache vraiment comment partir et quoi faire, c'est pas ..il suffit pas... pour moi, il suffit pas d'avoir compris, il faut savoir vraiment le refaire parce que sinon ça sert pas... ça sert moins.

Qu'ils soient moyens ou forts, les élèves se sont donc dotés d'un geste d'auto-évaluation plus strict que ce qu'ils pouvaient s'autoriser au collège. Ceci marque donc un changement d'une institution à l'autre, que les élèves en difficulté interrogés ne semblent pas avoir perçu ou dont ils n'assument pas bien toutes les implications.

¹⁹ Je signalerai qu'une seule élève, Perrine, a évoqué un retour sur les devoirs faits à la maison. Ceux-ci sont-ils les grands absents du travail de préparation des contrôles ? Ceci ne serait pas sans conséquences sur l'extension des apprentissages réalisés, notamment relativement à l'évolution et à la structuration des OM.

3.2 Seconde dimension du développement du travail de E0 : les gestes d'étude visant à pallier les ignorances diagnostiquées

Dans cette partie, je m'intéresserai à ce que font les élèves lorsqu'ils ont éprouvé un sentiment d'incompréhension ou lorsqu'ils ont échoué dans leur reprise d'un exercice (erreur ou impasse).

3.2.1 Gestes de lecture

Il s'agit de lire, éventuellement plusieurs fois, en essayant de comprendre. Ce geste est souvent évoqué pour l'étude du cours, nous avons vu précédemment que c'est ce que faisait Laura le soir lorsqu'elle a été débordée par le rythme de la séance. Il intervient aussi pour les exercices (les citations précédentes ont fait apparaître qu'il constitue une entrée dans l'étude des exercices pour certains élèves) avec deux finalités possibles, non également mentionnées dans les entretiens : comprendre d'une part, mémoriser d'autre part.

L'efficacité d'une telle lecture dépend de toute évidence de l'activité intellectuelle qui l'accompagne, activité dont les entretiens ne donnent que rarement idée (il aurait fallu aller plus loin sur la voie de l'explicitation). Néanmoins certains extraits laissent entrevoir des différences :

Julien

I : Et alors, quand tu n'as pas su faire un exercice, qu'est-ce que tu fais avec ce que le professeur a donné ?

J : Ben je regarde l'exercice puis j'essaie de comprendre comment il a fait

[...]

I : Et donc ceux que tu n'as pas bien compris, comment en général... comment tu fais pour mieux comprendre quand t'es tout seul ?

J : Ben je regarde l'exercice qu'on a fait en cours et puis euh je regarde comment le prof a fait euh en général en regardant et puis en me concentrant bien j'arrive à trouver... à trouver l'explication.

Thomas²⁰

T : Et les exercices assez courts, en fait quand ils sont assez courts, je ne les réécris pas, je les regarde seulement en essayant de suivre la correction quoi, suivre les étapes pour... ce qu'on a fait pendant la correction.

Plus loin Thomas explique qu'il refait par écrit les exercices plus compliqués

T : Après je compare avec l'exercice corrigé et je regarde si c'est correct.

I : Oui, et alors ?? Oui, et alors

T : (*Sourire*) et alors si c'est correct, je passe au suivant.

²⁰ Thomas a constamment besoin d'être relancé, cela apparaît clairement dans l'extrait cité. On pourra aussi noter combien le vocabulaire utilisé exprime un grand manque de confiance (j'essaie, je crois...).

I : Et sinon ?
T : Sinon, ben j'essaye de voir là où il y avait un problème dans le nouvel exercice que j'ai fait
I : Et après ?
T : Ben après je le corrige, enfin j'essaye de comprendre pourquoi là j'ai pas... j'ai... pourquoi ça diffère de la correction
I : Oui et alors ??? Et alors ??
T : Ben, et alors... et alors j'ai appris, j'ai appris là où était mon erreur donc je passe à la suite
Un peu plus tard, Thomas évoque son travail sur les exercices corrigés d'un livre parascolaire
T : Euh, je le fais plusieurs fois en fait. Je... ça ouais, je le refais pas, je le fais pas une fois bien, je le relis plusieurs fois jusqu'à temps que ça soit imprimé quoi !!
I : Qu'est-ce que c'est quand c'est imprimé ?
T : Ben c'est quand je le relis et que j'ai pas besoin de m'arrêter. Enfin, quand je comprends quoi, quand j'ai l'impression d'avoir compris.
I : Et c'est comment quand tu as l'impression d'avoir compris ?
T : Ben c'est quand j'arrive au raisonnement final et que, que je me souviens des étapes et que je crois pouvoir le refaire !

Alice

Nous avons vu précédemment qu'Alice pouvait, faute de motivation, se contenter de lire les corrections des exercices compliqués : “ je les relis juste en fait, je regarde, j'essaie de me souvenir comment il faut faire, d'avoir la méthode... et tout ça ”. On voit que sa lecture a une visée de mémorisation. Dans l'extrait ci-dessous, elle explique comment elle utilise les démonstrations et/ou les exercices pour comprendre un point qu'elle n'avait pas compris, à savoir la conservation du produit scalaire par projection orthogonale :

Alice : En fait il y a des choses, je sais plus trop. Mais après, je vais regarder plus... plus attentivement en fait comment... j'ai fait, comment on a fait pour démontrer dans...dans le cours ou alors... comment on a fait dans un exercice avec... Par exemple, oui, j'avais pas trop compris... c'était les projetés

[...] Je voyais pas trop comment on pouvait en arriver...et donc j'ai relu, j'ai refait la démonstration... sur le truc... enfin j'ai relu comment on a fait et puis... et puis c'est venu en fait quoi... je me suis plus rendu compte que... comment ça marchait... comment on faisait en fait pour avoir le projeté surtout.

Alice nous donne l'exemple d'une lecture active qui sollicite plusieurs sources pour éclairer un point obscur. A l'inverse, chez Julien, la compréhension semble presque magique, il regarde et se concentre²¹. Chez Thomas, on peut se demander, en reconstruisant une interprétation à partir des éléments rapprochés ici, si l'indicateur de la compréhension n'est pas en fait dans tous les cas la mémorisation (capacité à refaire de tête), mémorisation qui est obtenue presque passivement par lectures répétées. On retrouve cette identification

²¹ Il est clair que l'interprétation de ces interviews prend en compte la position scolaire de ces élèves. Ce que dit Julien est lu comme signe d'une passivité qu'on n'attribuera pas nécessairement à la lecture de Laura parce que l'un est en échec et l'autre en réussite.

réussite-compréhension chez certains des élèves qui ont recours aux gestes de répétition que nous abordons maintenant.

3.2.2 Gestes de lecture et résolutions écrites répétées

Il s'agit ici après comparaison de la solution personnelle avec celle du professeur de recommencer en cas d'erreurs la résolution de l'exercice par écrit jusqu'à obtenir une solution identique. L'enjeu est donc de savoir reproduire pour l'exercice en question la façon de faire validée par le professeur, qui apparaît ainsi comme un objet institutionnalisé ; la rédaction au tableau ou sur polycopié du corrigé contribue vraisemblablement à cette institutionnalisation.

Blandine (moyennes : 10-10-10,5)

B : Ben je prends... je regarde le numéro de l'exercice, je le prends dans le livre, je le fais et puis je compare avec la correction et puis, si j'ai faux, je regarde où j'ai fait une erreur, à quel niveau, et puis j'essaie de recommencer jusqu'à... jusqu'à ce que j'y arrive.

I : D'accord. Tu recommences toujours le même exercice ?

B : Ben, jusqu'à temps que j'y arrive ou alors, si vraiment... j'y arrive pas, ben je passe à autre chose mais j'essaie au maximum de... d'aller jusqu'au bout

Justine : Si j'ai faux, euh je le refais plus tard pour avoir oublié un peu l'exercice. Et j'ai noté sur un petit post-it quel exercice à refaire.

Mathilde (moyenne : 9-9-11,5) : Ah oui, oui, oui *rire* ça m'est arrivé plusieurs fois de refaire 3 fois le même exercice. Bon, à la fin, c'est un peu embêtant, ce que j'essaie de faire c'est une fois, deux fois, j'y arrive pas, je laisse tomber et le jour suivant, je vais le refaire une troisième fois... Oui, oui. Je suis plutôt acharnée

Les gestes que nous venons d'évoquer correspondent à des tentatives solitaires de l'élève pour remédier aux difficultés qu'il a rencontrées relativement aux objets dont l'étude a été au moins commencée dans S0. Selon la décision explicitée à la fin de la section I, il relève de l'enveloppe pour l'élève de ce qui s'est passé en classe et ce d'autant que l'apprentissage est très orienté vers la reproduction des exercices traités dans S0. Et c'est bien dans cette position E0 de l'Elève-de que des élèves prennent l'initiative d'introduire en classe certains éléments de leur étude personnelle.

3.2.3 Gestes d'implication du professeur dans l'étude personnelle.

Face aux difficultés constatées, certains élèves sollicitent l'aide du professeur, provoquant ainsi le prolongement de l'étude coopérative caractéristique de S0 :

Chloé (moyennes : 10-9-12)

C : Tout le monde est intéressé quoi, tout le monde pose des questions...

I : Ça t'arrive toi d'en poser ? Au professeur ?

C : Oui quand je comprends pas

I : Et dans la classe, y a beaucoup d'élèves qui font ça ?

C : Euh oui enfin... c'est un peu toujours les mêmes mais... oui y en a quand même pas mal qui font ça

Mathilde

I : et alors qu'est-ce que tu fais quand tu n'y arrives pas ?

M : Ben, enfin si j'y arrive pas, vraiment vraiment, j'essaie d'aller demander au prof... parce que enfin j'estime que si au bout de trois ou quatre essais, enfin, j'ai pas réussi à le faire correctement, y a quand même un problème quoi Rire Donc ben, soit j'essaie de demander à mes parents si ils savent le faire, des fois ils savent, des fois ils savent pas

Mathilde est cette élève dont nous avons vu l'attention extrême aux discours du professeur à partir duquel elle repère les exercices importants pour le contrôle. Elle parle ici de ce qu'elle fait en phase de révision, commencée précocement, lorsque après plusieurs essais, elle ne parvient pas à savoir refaire un exercice. On voit très bien dans cet extrait à quel point elle est en position d'Elève-de, rappelant P0 à l'ordre de la relation didactique en le sommant de lui donner plus d'éléments pour apprendre.

Mais tous les élèves n'osent pas interpeller le professeur ou n'en ont pas l'occasion car ils ne prolongent l'étude qu'au moment crucial de la préparation du contrôle ; ils doivent alors mener sans l'aide du professeur le travail complémentaire nécessaire à la compréhension de ce qui s'est passé en classe, avec plus ou moins de bonheur.

Julien²²

I : En fait le... le problème c'est que finalement tu étais coincé sur un exercice

J : Oui

I : Et tu n'as pas pu demander à Monsieur B ... Tu ne demandes pas quand tu ne comprends pas ?

J : Ben euh en règle générale je demande rarement au prof mais euh et puis euh Sinon je demande à mon père mais comme il est là que le week-end ben euh et que là il n'y avait pas de week-end bon...

3.2.4 Sollicitation de systèmes didactiques auxiliaires

Le recours à des personnes susceptibles d'aider à l'étude apparaît dans la plupart des entretiens : un autre élève (dans ces entretiens, j'ai rencontré 3 paires Tuteur-Tutorée visiblement très importantes pour l'élève plus faible), les parents ou la fratrie (les personnes

²² Julien est cet élève qui a été absent quelques jours avant le contrôle et qui n'a pas à sa disposition les exercices faits en son absence. Lors de ses révisions, il est revenu sans succès sur un exercice qui déjà en séance lui avait posé problème (nous reviendrons sur cet exemple en III.4). Mais il a pu suivre une dernière séance avant le contrôle. C'est ce qui est évoqué dans cet extrait.

consultées ont fait des études scientifiques), un cours particulier (seule Perrine déclare en bénéficier).

Deux élèves seulement disent utiliser la partie Cours de leur manuel (Terracher-Hachette). Mathilde s'appuie sur les exemples traités qui y figurent pour travailler un point qu'elle a mal compris (il s'agit d'une technique pour établir une inégalité par implication à partir d'inégalités connues). Justine cherche dans le livre des méthodes décontextualisées ("des règles") pour traiter les exercices qu'elle n'a pas réussi à résoudre correctement dans S0 (cas de la détermination du nombre de termes d'une somme de termes d'une suite) ou pour les exercices nouveaux que le professeur n'a pas déjà préparés par un exemple et pour lesquels elle devrait donc se placer en position E-1 (elle cite le cas de l'étude des suites arithmético-géométriques, OM à laquelle ce manuel consacre une étude très développée, comprenant les différents moments). Justine utilise donc son livre pour étendre le champ du savoir institutionnalisé qu'elle s'emploie ensuite à mettre à sa main en le faisant fonctionner :

Justine

I : Mais tu l'as trouvée comment cette règle-là ?

J : Ben, c'est avec plusieurs exercices, euh... le prof nous a donné ou non, ça doit être dans le livre aussi parce que parfois j'utilise le cours du livre. **C'est dans le livre, c'était écrit qu'il fallait prendre le dernier terme... moins le premier terme plus 1**, je crois. Si on démarre à u_0 , $n-0+1$ et donc on trouvait $n+1$ termes. Si on démarre à u_2 , ça fait $n-2+1$ termes et c'est... là j'ai appris par cœur cette formule, enfin cette formule euh entre guillemets, je l'ai appliquée dans les exercices...

I : Et alors, ça a marché...

J : Ouais, enfin..., ça marche, euh, ben c'est ce qui y'avait dans les livres donc je me suis dit que ça marchait et j'ai utilisé ça...

I : Donc celui-là tu n'as pas essayé de comprendre pourquoi c'était comme ça ?

J : Ben, j'ai essayé sur plusieurs, euh, sur plusieurs exemples et ça marchait à chaque fois, donc euh, donc j'ai utilisé ça. [...] **Je me suis pas bloquée pendant trois heures, j'ai regardé dans le livre ce qu'il mettait.**

I : Donc le livre, ça t'a servi ?

J : Ben, oui..., le livre... le cours du livre... quand je trouve pas quelque chose qui n'est pas dans mon cours à moi... Je lis le livre ou quand... ou quand il nous donne des exercices, qu'on n'a pas encore fait le cours, je prends le cours du livre parce que, euh ça aide, c'est toujours ça (rire)... Je préfère regarder le cours du livre que les corrigés de l'exercice pour essayer de trouver de moi-même le résultat de... de l'exercice.

De l'entretien avec Justine qui, rappelons-le termine l'année avec une moyenne de 17, il apparaît que cette excellente élève semble éviter autant que possible d'être en situation

d'invention ; d'après ses dires, elle situe sa part de créativité dans la recontextualisation d'une règle décontextualisée ou dans le transfert à partir d'un exemple.

Trois élèves utilisent des livres complémentaires à leur manuel, ces instruments ne sont pas envisagés comme des aides pour la compréhension. Aucun ne mentionne des logiciels ou site Internet.

En résumé, les élèves interviewés s'efforcent, d'une manière plus ou moins rigoureuse, de se rendre capables de reproduire les solutions des exercices corrigés par le professeur. Cette part du travail est nécessairement solitaire. Ils cherchent également à lever les incompréhensions qu'ils rencontrent dans le cours et dans l'étude des exercices. Cette dimension de l'étude est plus délicate et pour certains se confond avec la précédente : ils ne s'interrogent plus en terme de compréhension dès lors qu'ils savent refaire correctement les exercices, objectif plus facile à atteindre et à contrôler. En cas d'incompréhensions persistantes, notamment celles qui ont pour effet l'incapacité à mémoriser la solution d'un exercice, ces élèves ont presque tous recours à une autre personne pour les aider dans l'étude. Cette observation me conforte dans le choix de situer cette face du travail personnel au niveau didactique S0. Elle met aussi dramatiquement en exergue le cas de ces élèves que leur position dans la classe, la confiance qu'ils ont en eux, n'autorisent pas à interroger le professeur, qui ne peuvent s'appuyer sur les ressources familiales, financières (pas de cours particulier) ou culturelles (pas de parent ni de frère ou de sœur ayant fait des études scientifiques) et qui n'ont pas la chance de bénéficier de l'aide d'un pair, c'est le cas de Thomas : ils sont livrés à leurs propres moyens qui ne suffisent pas toujours.

3.2.5 Pourquoi un tel acharnement sur les exercices proposés par le professeur ?

On peut se demander comment les élèves justifient les efforts accomplis autour de la reproduction des exercices résolus dans S0 puisqu'ils savent très bien que le contrôle ne reprendra aucun de ces énoncés. Un premier niveau de réponse est valable pour tous, c'est le pari de la proximité :

Laura

L : Ben j'estime que... le prof enfin c'est pas... enfin, il est pas trop vicieux donc il... les exercices qu'on fait, les exercices qu'il va nous donner en contrôle, c'est à peu près le même genre d'exercices donc... retravailler des exercices en plus, euh enfin je pense que des fois, c'est un peu...

I : C'est-à-dire là, là pour l'instant, tu... tu... enfin d'après ton expérience, les exercices que... avoir refait les exercices, ça te permet de traiter les exercices qui sont posés en contrôle ? T'as jamais eu de surprise sur les façons de faire ?

L : Non non Jamais. Ben je trouve... ben j'arrive toujours à m'en sortir au contrôle parce que je trouve que l'entraînement que j'ai eu à la maison en faisant les exercices que le prof nous a donnés, c'était suffisant donc. J'ai jamais eu de... jamais eu de surprise en contrôle, je suis jamais arrivée devant un exercice, je me suis dit Mince, j'ai jamais fait un truc dans ce genre-là, je sais pas du tout comment faire.

A ceci s'ajoute chez Laura l'idée d'entraînement qui apparaît chez plusieurs autres élèves, notamment Chloé dont nous développerons le point de vue dans la partie suivante. Par ailleurs, Laura compte sur sa capacité, validée par l'expérience, à adapter ce qu'elle a appris dans ses révisions aux exercices du contrôle²³ mais elle est la seule à formuler cette confiance :

Laura

L : Oui. On peut tourner la phrase autrement mais euh mais euh on arrive... même si... par exemple, en exercice, on avait fait... on avait tourné le problème autrement, on, on... enfin j'arrive à remélanger l'exercice et à repartir de... à faire le contraire par exemple de ce qu'on avait fait en cours.

Par ailleurs, il apparaît que les élèves n'ont pas beaucoup d'autres solutions que de retravailler ainsi sur les exercices faits avec le professeur, c'est ce que nous allons préciser maintenant.

3.3 Des gestes de prolongement de l'étude attribués au premier niveau sur-didactique

3.3.1 Gestes de développement des moments du travail et de l'évaluation de la technique

Pour prolonger le travail de la technique au-delà de ce que P0 a organisé dans S0, l'élève doit pouvoir résoudre des exercices nouveaux. Mais les entretiens réalisés laissent à penser que les élèves n'endossent qu'exceptionnellement la responsabilité de la validation.

Justine

I : Est-ce que ça t'arrive de faire des exercices que vous n'avez pas faits ?

²³ Laura adopte pour l'essentiel la posture d'apprenant tactique que j'ai introduit dans le cours de l'école d'été. On verra plus loin (III.4.) qu'elle peut avoir un point de vue plus stratégique dans certains cas.

J : Ben, non parce que en fait, si je les fais et que j'ai faux, en fait ben euh et **je saurais pas si j'ai faux ou pas et donc j'essaierais... je préfère pas les refaire parce que ça m'entraînerait peut être à avoir une mauvaise technique** ou quelque chose mais comme là on a quand même fait beaucoup d'exercices. Ce serait pas... on n'aurait pas beaucoup d'exercices, peut-être que j'en referais mais là on en a quand même un certain nombre, donc on a... j'ai quand même un bon entraînement

I : D'accord et donc tu n'as pas non plus d'annales ou de livres d'exercices corrigés

J : Non

Sur 10 entretiens, quatre évoquent la résolution d'exercices non traités avec le professeur. Deux seulement, Pauline et Mathilde, cherchent dans ce contexte des exercices non corrigés dans leur manuel, il s'agit d'exercices de base. Les deux autres, Chloé et Thomas, ont recours à des énoncés corrigés du manuel ou de livres parascolaires ; autrement dit, ils s'assujettissent à une institution didactique auxiliaire qui ici se substituent à P0 pour prolonger l'étude. Le travail de Chloé est particulièrement intéressant :

Chloé

I : Donc si tu te souviens de cet exercice-là, comment tu as fait ? Qu'est-ce que tu as fait comme travail ?

C : Ben je l'ai fait... j'ai fait petit à petit. Et une fois que je l'avais fini, j'ai regardé le corrigé

I : Donc tu as comparé ce que tu avais fait et le corrigé ?

C : oui je regardais... à chaque question, je regardais le corrigé pour la même question

I : Et d'avoir fait ça, comment tu expliques que ça te sert après ?

C : Ben...je sais pas. C'est le fait oui... c'est parce que j'en fait plusieurs et donc après **je suis entraînée...** je pense que c'est plus une question de rapidité parce que j'avais souvent du mal à finir les contrôles en entier.[...]

I : Et est-ce que finalement tu te souviens de la façon de faire ?

C : ouais je me souviens, parce qu'à force d'en faire à la fin ça devient un mécanisme pour... pour faire les... enfin pour utiliser la technique et... donc à la fin

I : Donc finalement, c'est en en refaisant

C : Oui c'est en en refaisant que ça... c'est la façon de faire rentrer dans la tête [...]

C : y a des fois aussi où... pendant le cours, je fais des erreurs, on corrige et quand je refais, je refais la même erreur. Donc... quand c'est comme ça, j'essaie d'en faire d'autre dans le même genre...Si on n'en a pas fait d'autres dans le cours dans le même genre, je vais aller chercher ceux du livre qui sont un peu pareils pour... pour trouver un peu pourquoi... je me trompe à chaque fois enfin... [...]

I : Mais donc une fois que t'as lu ce que tu avais fait...enfin tu as essayé de comprendre pourquoi il fallait faire comme ça dans un exercice où tu t'étais trompée... Et tu refais une fois de plus ou t'arrêtes là ?

C : Non j'arrête, enfin je ne refais pas le même, je refais du même genre mais... je ne refais jamais le même parce que... ou alors, je le fais mais plusieurs jours après, pour être sûre de pas me souvenir

non plus exactement de la correction et pas refaire... machinalement ce que j'avais lu dans la correction.

Chloé accomplit, en s'appuyant sur le milieu construit par P0 et étendu grâce aux manuels, un travail personnel d'appropriation qu'on ne trouve pas chez tous les élèves : elle met à l'épreuve ce qu'elle a compris par l'étude d'un exercice dans d'autres exercices de même type au lieu de refaire le même. Comme Laura, elle justifie ce mode de travail par l'idée d'entraînement, elle s'est rendu compte qu'elle devait gagner en rapidité pour finir les contrôles.

Une seule autre élève, Perrine, évoque également ce style d'attitude mais elle se restreint aux exercices proposés par le professeur ; donc si l'étude n'a pas été développée dans S0, elle ne peut procéder ainsi. **Décider d'attribuer de tels gestes à E1, c'est choisir d'en mettre en avant la dimension autonome**, même si cette autonomie se réduit à la décision de chercher un système didactique auxiliaire permettant d'élargir le milieu de l'étude et, peut-être cela ne doit-il pas être négligé, d'y choisir des exercices pertinents. C'est aussi prendre en compte le fait que les corrigés d'exercices donnés par les manuels scolaires sont majoritairement laconiques, voire parcellaires et rarement accompagnés de commentaires, ce qui les différencie des résolutions organisées par P0. Il s'agit bien pour E de s'émanciper du cadre créé par P0, dans lequel semblent enfermés presque tous les élèves interrogés. **Mais le modèle théorique présenté dans I n'est pas assez affiné pour fonder cette option.**

De même, il ne me permet pas de différencier le travail de Chloé de celui de Thomas qui s'appuie sur un ouvrage parascolaire de la façon suivante :

Thomas

T : Ben j'utilise aussi un livre de... un livre avec le cours et les exercices

[...] Donc ben j'ai relu, avant de me coucher, j'ai relu les exercices résolus et le cours

I : Et tu t'attaches à quoi quand tu les relis les exercices comme ça ? Comment ça se passe pour tes yeux là ?? Ils s'attachent où ??

T : Ben euh, ils s'attachent sur, sur les méthodes... sur les méthodes pour arriver à la conclusion, enfin à la fin de l'exercice, enfin le plus souvent quoi

I : Hum, hum et alors comment tu extrais cette méthode justement, tu vois, c'est ça qui est intéressant !! C'est de savoir comment tu t'y prends pour sortir ça

T : Ben par exemple là, enfin elles sont écrites, elles sont soulignées en bleu, les étapes en fait, c'est plutôt une sorte d'étape, quoi !

J'ai envie de dire que Thomas s'assujettit en tant qu'élève E0 à une seconde institution didactique qui développe plus que ne l'a fait P0 l'étude des OM en lui proposant de

nouveaux exercices corrigés et certains éléments d'explicitation de la technique qu'il s'efforce d'étudier. Comment fonder en théorie l'attribution de ce travail à E0 et celui de Chloé à E1 ? C'est une question non résolue qui nécessite de reprendre l'analyse du rôle de P0 : le professeur n'est pas seulement celui qui choisit des exercices et en donne une solution valide.

3.3.2 Gestes de développement de la technologie et d'institutionnalisation

Suivant les professeurs, suivant les OM, la composante non théorique de la technologie est plus ou moins réduite dans S0. Pour un même professeur, elle est ensuite diversement entendue par les élèves, selon l'importance qu'ils accordent aux commentaires oraux du professeur. L'élaboration de la technologie, l'institutionnalisation de la technique peuvent donc être dans ces conditions largement placées sous la responsabilité de E1. Captives comme les autres du corpus d'exercices corrigés avec le professeur, Justine et Pauline prolongent clairement le travail sur les corrections d'une démarche de décontextualisation qui les amène à formuler des éléments de technologie dont elles fournissent toutes les deux des exemples précis dans l'entretien. Notons que c'est la seule façon pour un élève de prolonger l'étude commencée en classe s'il n'a pas recours à des énoncés d'exercices et leurs corrigés dans un manuel.

Justine

J : Et la veille du contrôle, je relis la leçon, je refais des exercices à l'oral, sans écrire !! dans mon lit !! *rires* [...] Je refais quelques exercices ou je me récite les démonstrations dans la tête.

I : Les démonstrations ?

J : Ben comment démontrer qu'une suite est bornée ou qu'elle est croissante, décroissante.

I : Et là, par exemple, comment démontrer qu'une suite est bornée ?

J : En fait faut avoir la suite devant soi... si... si... si c'est une fonction... si c'est une suite sinus ou cosinus, je sais quelle est entre.... encadrée entre -1 et 1 ; après j'additionne ou je multiplie, enfin ça dépend de la suite mais je sais comment ça marche quoi !! Je travaille comme ça [...]

I : Et dans ta tête donc tu as des choses sur celui-là, sur ce... ce type de problèmes par exemple...

J : C'est clair dans ma tête... ça, je sais le refaire

I : Et tu as appris ça comment ?

J : Ben je sais pas, c'est à force de travailler, enfin c'est à force de voir des fonctions comme ça. Enfin je sais pas, c'est une évidence !! Enfin je sais pas... Non ça c'est rentré comme ça. Alors là, je ne sais pas expliquer comment j'ai fait pour apprendre ça

I : C'est le professeur qui vous l'a dit ?

J : Non, c'est dans des exercices. **Dans les exercices qu'on a faits, il nous l'a démontré une fois, après euh je sais le refaire²⁴.**

I : Et alors... parce que tu... là, là, non seulement tu sais le refaire mais en fait tu as, enfin moi j'aurais envie de dire tirer les leçons de l'exercice

J : Ouais, c'est ça [...] Oui, **je retiens les trucs importants qu'on a vus et... pour savoir les refaire sur un autre exercice en fait**

Pauline

P : pour les homothéties euh, j'aime pas trop la géométrie, donc euh j'ai... enfin j'ai refait tous les exercices qu'on avait fait en cours et... et donc après j'ai vu que... enfin **comme c'était tout le temps le même schéma, j'ai réussi progressivement et en fait, j'ai pas mis beaucoup de temps à le réviser ce contrôle**

I : Le schéma, tu peux me donner un exemple ou... ou me dire ce que t'appelles le schéma sur les homothéties ?

P : Ben, soit c'est... c'est montrer que des points sont alignés, soit... soit montrer que c'est par une homothétie de centre machin qu'on obtient ce point-là enfin c'est toujours le même... le même type quoi... **Même si c'est pas les mêmes points, les mêmes données, c'est le même principe [...]**

I : Et ça tu te souviens que ça t'avais frappée quand tu as révisé ?

P : Quoi ben à la fin ça... ça, ça revenait tout le temps donc... donc à chaque fois que je révisais, ça... **ça me semblait inutile puisque c'était tout le temps pareil et que j'avais bien assimilé donc je me suis pas éternisée.**

Pauline refait à l'oral un certain nombre d'exercices, elle donne dans l'extrait ci-dessous une idée de ce que cela signifie pour elle :

I : Et en géométrie, par exemple, pour démontrer que des points sont alignés, tu dirais... tu sais quoi ?

P : Ben que... par exemple, si on avait un exercice où il y avait une médiatrice, donc y avait des points qu'étaient équidistants donc ils étaient alignés, par la rotation, l'un se transformait en l'autre et puis un autre qu'était aligné se transformait en l'autre donc fallait d'abord montrer que les points initiaux étaient alignés et après, comme la rotation conserve l'alignement des points

I : D'accord, donc ça c'est l'exemple de comment tu fais oralement

[...] Voilà. Donc ça c'est un type de problème d'alignement. Tu sais autre chose là-dessus

P : Ah ben... les homothéties avec les configurations de Thalès, quand... quand on a des rapports euh qui sont... qui sont pareils, eh ben ça veut dire que ceux-là sont alignés. On avait ça dans le contrôle à faire. Voilà.

On remarquera avec quelle assurance Pauline décide d'arrêter ses révisions à partir du moment où le schéma de résolution qu'elle a repéré est plusieurs fois validé par sa réussite. D'une certaine façon, elle institutionnalise ce schéma et s'en tient là.

Pour ces élèves, cette démarche donne sens au travail sur les exercices du professeur, elle situe les apprentissages dans une perspective de généralisation qui prépare au contrôle :

²⁴ On se rappelle que Justine imagine mal faire un exercice sans avoir au préalable rencontré un exemple ; on peut penser qu'elle est d'emblée dans une démarche de décontextualisation-transfert.

Justine

I : Mais comment ça peut t'aider pour le contrôle alors puisque ce n'est pas les mêmes exercices ?

J : Parce que c'est une technique, c'est pas euh, c'est pas une question d'avoir des... des exemples précis la... enfin c'est des... c'est des formules...donc si on sait les appliquer à un exemple, on sait les appliquer à d'autres euh, enfin à n'importe quel exemple.

Il est clair que le dispositif d'interview conduit ces élèves à décontextualiser peut-être plus qu'elles ne le font pour elles-mêmes. Néanmoins, la présence chez ces deux élèves du même geste consistant à faire un récit oral de la solution d'un exercice atteste de l'existence d'un processus de prise de distance par rapport à l'exercice particulier. Cette attitude réflexive et, me semble-t-il, décontextualisante se retrouve chez Laura à propos d'une OM particulière que nous verrons dans la partie suivante ; peut-être peut-on en déceler une forme moins assumée chez Alice. **Les autres élèves ne font pas mention d'un tel travail qui pourrait donc constituer un geste spécifique de la réussite²⁵.**

3.4. Exemples relatifs au deuxième niveau sur-didactique

L'exemple d'une réussite : Laura et la gestion de la relation de Chasles

Laura a été interviewée en mars, après le contrôle sur le produit scalaire. Comme nous l'avons vu dans la partie II.1., les exercices utilisant le produit scalaire mettent les élèves en situation d'avoir à mener en toute autonomie des calculs vectoriels basés sur la relation de Chasles. Est en jeu une OM ancienne, abordée mais peu travaillée en Seconde, rencontrée à nouveau en Première S à l'occasion du chapitre sur le barycentre qui dans la classe dont issus les élèves a été traité en début d'année. En Seconde, le point de vue analytique imposé par les Instructions réduit le travail de la technique. Laura, en refaisant les exercices pour le contrôle a rencontré une difficulté qu'elle a réussi à surmonter seule par l'étude des corrections du professeur :

Laura : Oh, je me souviens plus vraiment de l'exercice mais je sais que c'était un exercice plus avec des vecteurs où c'était un peu la relation de Chasles et je sais que... ben des fois j'ai du mal à voir euh vraiment où aller, quels vecteurs prendre, quels vecteurs additionner, donc ça je me souviens, enfin j'étais partie, y avait beaucoup, y avait **beaucoup de calculs, beaucoup de calculs** et je **m'en sortais pas**. Donc là j'ai regardé comment le prof avait fait pour... et lui il y allait, il y allait plus directement donc j'ai regardé comment il avait fait et après je l'ai refait toute seule

²⁵ Dans Castela, 2004, j'ai montré que ce type de geste était plus présent chez les élèves de Classes Préparatoires que chez les étudiants issus de licence et en CPGE plus dans le groupe fort que dans le faible. Ceci est cohérent avec l'observation réalisée ici.

I : Et là, tu peux essayer de me dire ce que tu as repéré qu'il avait fait, en quoi c'était plus intelligent que toi ?

L : Ben il avait, moi j'étais partie sur des vecteurs qu'étaient moins en rapport avec le... la question demandée [...]

parce que la relation de Chasles c'est bien sauf qu'on peut prendre... on peut faire ça avec beaucoup de vecteurs et on... on peut arriver beaucoup plus rapidement à une solution par exemple, on peut faire une page de calculs alors que le prof va le faire en deux lignes **si jamais on prend pas les vecteurs euh les vecteurs les plus astucieux euh on s'en sort pas**

I : Oui Mais t'as une idée... alors... là on peut essayer de creuser ça, les astuces qu'est-ce qui ... finalement, dans ta réflexion, est-ce que t'as... repéré en quoi c'était astucieux ?

L : Oui. Euh ben euh en fait, moi ce que je fais, c'est que je pars un peu au... je partais un peu au pif et j'essayais de m'en sortir alors que le prof lui, on... **part plus de la réponse et essaye de remonter** pour arriver à... à... donc ça va forcément être plus rapide. [...]

I : Puis bon je pense qu'il doit utiliser par exemple des orthogonalités parce que c'est toujours intéressant

L : Oui, oui, ben oui, c'est toujours plus facile, oui... Des orthogonalités que moi par exemple j'avais pas... j'avais pas fait attention, ou c'est... en fait, j'avais pas vues alors que quand on regarde bien et qu'on fait vraiment attention, on se dit ah ben oui c'était évident, c'est plus des choses comme ça

I : Et ça donc quand tu as retravaillé ce type d'exercices, cet exercice-là qui t'avais... tu te dis des choses comme ça ?

L : Après je regarde comment il a fait et j'essaie de partir un peu dans sa même logique, de remonter, alors évidemment **après la démonstration est pas toujours identique parce que j'essaie juste de partir dans le même sens que lui et c'est vrai que c'est plus rapide mais on va pas utiliser pas forcément exactement les mêmes vecteurs mais ça va être à peu près similaire...** Donc c'est ce que... c'est ce que je fais pour... pour essayer de m'en sortir

I : Et le professeur il vous en avait parlé de ça ou t'as trouvé ça toute seule ?

L : Oh non, j'ai trouvé ça toute seule, j'ai pas... ben le professeur lui, il fait son truc, il met la réponse et puis il passe à autre chose, il prend pas le temps de... forcément... ben sur le coup, on comprend, donc on pose pas de question mais après c'est vrai que ...enfin comprendre et savoir le refaire, c'est... c'est différent.

Ce long extrait montre successivement comment elle a rencontré le problème parce qu'elle a repris complètement par écrit l'exercice (deux autres élèves ont été interviewées sur le même contrôle, aucune n'a évoqué cette difficulté), dégagé une technique relativement élaborée (partir du but visé et faire intervenir dans les décompositions vectorielles des vecteurs sur lesquels portent des hypothèses) et vérifié l'efficacité de cette technique. On aura remarqué comment elle s'autorise à produire une solution non identique à celle du professeur mais de même esprit. Le contrôle lui a donné l'occasion d'utiliser ce qu'elle

avait ainsi appris. Selon ses dires²⁶, P0 n'avait rien explicité en classe sur cette technique, considérant sans doute que cette OM ancienne n'était plus un objet sensible dans S0.

Ce travail de Laura est un exemple significatif de ce que peut être l'étude au deuxième niveau sur-didactique, c'est la dimension Développement d'une OM ancienne qui est ici illustrée.

3.4.1 L'exemple d'un échec : Julien et l'étude du signe d'une fonction trigonométrique

Julien a été interrogé après un contrôle sur la trigonométrie. Il a des difficultés avec l'étude de fonctions trigonométriques, plus précisément avec l'étude du signe de la dérivée :

Julien : Ben en fait fallait, après fallait étudier le signe de... par exemple on a $2\cos x(1 - 2\sin x)$ fallait calculer le signe de $2\cos x$ et de $1 - 2\sin x$... Et ben là j'y arrivais pas. J'avais... je savais pas comment fallait faire

Ayant essayé de reprendre seul cet exercice, il échoue mais ne profite pas de la séance suivante avec le professeur pour obtenir une aide puisque, comme nous l'avons vu, il ne demande que rarement des explications au professeur. Un autre exercice du même type est traité dans cette séance qui constitue une préparation au contrôle mais Julien ne progresse pas. En fait, il apparaît dans l'entretien que ce qu'il ne sait pas faire, c'est remplir le tableau donnant le signe du produit à partir des résultats de la résolution des deux inéquations $\cos > 0$ et $1 - 2\sin x > 0$.

J : Mais même si j'arrive à la fin de l'inéquation, je sais pas comment remplir le tableau de signes

Il ne semble pas avoir construit (ou suffisamment construit) le lien dialectique entre les deux types de tâches en jeu : Résoudre une inéquation $f(x) > 0$ et Etudier le signe de $f(x)$. Ceci est envisageable : en Première S, les élèves travaillent régulièrement la technique consistant à ramener la résolution de l'inéquation à l'étude du signe, celle-ci s'obtenant avec ou sans étude du sens de variation ; par contre, le passage inverse est rare. Dans le contexte complexe des fonctions trigonométriques pour lesquels ce deuxième passage est en jeu, Julien ne réussit pas à revenir au signe de $1 - 2\sin x$ quand il a résolu l'inéquation $\sin x > 1/2$.

Or ce rapprochement entre les deux types de tâches est travaillé depuis la Seconde et concerne deux OM anciennes. On peut penser que le professeur n'a pas éprouvé le besoin de développer des commentaires sur ce point particulier, se concentrant plutôt sur le

²⁶ La méthodologie utilisée me prive de tout moyen de contrôle sur ce que P0 a dit en classe sur le sujet.

nouveau, c'est-à-dire les inéquations trigonométriques. Ainsi c'est en position E2 que Julien doit seul affronter cette ignorance (son père ingénieur à qui il a recours pour l'aider, n'est pas disponible), il n'y réussit pas et échoue de nouveau au contrôle sur ce type d'exercices.

Julien me semble représentatif du sort des élèves en difficulté. Pour eux, le deuxième niveau sur-didactique est beaucoup plus développé que pour les autres : pour certaines OM anciennes, ils n'ont pas construit au moment où ces OM étaient les enjeux de l'enseignement le rapport visé par S0 ; dans des situations didactiques ultérieures où ces OM sont sollicitées au service des OM nouvelles, ces élèves sont confrontés à ces "retards d'apprentissage" dont le rattrapage sollicite E2. **On peut raisonnablement faire l'hypothèse qu'en difficulté, ils sont encore moins que les autres susceptibles de poser le bon diagnostic et d'assumer la responsabilité auto-didactique associée.**

Conclusions

Au niveau des institutions, quelle évolution du collège à la Première S ?

Outillée par le modèle élaboré dans les sections I et II, je formulerai les conjectures suivantes relativement à l'évolution de l'enseignement des mathématiques entre collège et Première Scientifique.

Au collège, l'étude des objets de savoir, savoirs théoriques et OM, est prise en charge par P0 ; en particulier, pour les OM rencontrées, le temps est suffisant pour assurer en classe les principaux moments de l'étude. Les positions sur-didactiques E1 et E2 ne sont pas sollicitées pour les élèves qui, en classe, suivent le rythme, relativement lent, de l'enseignement et donc coopèrent pleinement à l'étude organisée par P0 (voir la thèse de C. Félix). Par contre, les élèves qui n'y parviennent que partiellement peuvent être confrontés à la nécessité de pallier ce "décrochage" en occupant la position E1. Ceux qui accumulent des difficultés sur les objets enseignés les voient réactualisées à l'occasion de certains exercices concernant les objets sensibles, le niveau sur-didactique transversal est alors pour eux passablement développé. Ceci revient à considérer que les élèves en difficulté en classe sont ceux qui devraient ensuite, à la maison, occuper des positions sur-didactiques nécessitant une autonomie dont ils sont vraisemblablement les moins dotés.

En Première S, le nombre d'OM objets d'étude augmente alors que le rythme du temps didactique réduit le développement de l'étude dans S0. Ceci a un double effet : d'une part, la partie du travail de E0 qui s'effectue a posteriori, en dehors de la classe, se développe et devient nécessaire pour des élèves qui n'en avaient pas besoin au collège ; d'autre part, pour de nombreuses OM, l'étude est succincte, son prolongement relève de E1. Par ailleurs, les OM anciennes à disposition des élèves se multiplient ; elles sont plus fréquemment sollicitées sous des formes qui nécessitent leur évolution, voire pour quelques-unes des débuts de structuration. E2 commence donc à être sollicité.

Au niveau des gestes d'étude préparant au contrôle, quelle évolution entre collège et lycée et quelles différences entre les élèves ?

Dans les limites de l'échantillon étudié, j'avancerai les conjectures suivantes.

Les élèves moyens et bons se distinguent des faibles par le caractère plus systématique et plus rigoureux des gestes qu'ils accomplissent pour évaluer l'état de leur apprentissage à l'issue de la suite de séances pour lesquelles le contrôle représente une forme de clôture.

Les élèves se distinguent ensuite entre eux par ce qu'ils font pour se rendre capables de résoudre les exercices traités avec le professeur. Dans le prolongement du premier point, les élèves moyens et bons semblent viser une capacité à reproduire exactement la solution du professeur pour tous les exercices quand les faibles sont moins exigeants, travaillant seulement certains exercices et se contentant de gestes de lecture.

Majoritairement, les élèves sont captifs du corpus des exercices traités avec le professeur ; ils ont tous dit leur besoin de disposer de corrigés pour appuyer leur étude. Fort peu ont recours aux exercices corrigés proposés par le manuel ou autres outils parascolaires. Ceci leur rend extrêmement difficile l'investissement des niveaux sur-didactiques, particulièrement le développement du moment de travail de la technique (rencontré une seule fois). Par contre, un travail de décontextualisation et d'élaboration technologique peut s'appuyer sur les ressources issues de S0, constituant le milieu de l'étude aux niveaux 1 et 2 ; il semblerait que les bons élèves se différencient des moyens par leur capacité à développer cette dimension du travail personnel, à propos des OM sensibles ou anciennes.

Différenciation des niveaux didactique et sur-didactique : nécessité d'une reprise du travail

Le point délicat qu'il faut encore travailler est celui de la frontière entre S0 et S1. Paradoxalement peut-être, il me semble que pour mieux différencier les positions E0, Elève-de et E1, Etudiant localement autonome, il est nécessaire de mieux caractériser les interventions de P0. Il s'agirait notamment de distinguer le rôle du professeur de celui des aides didactiques auxiliaires, manuels, livres parascolaires ou logiciels auxquels E peut avoir recours : Dans quelle mesure en recourant à tel système auxiliaire, E reprend-il une position E0 ? Dans quelle mesure, au contraire, ce système l'oblige-t-il à se situer en position E1, autrement dit à endosser une partie des responsabilités qui dans un système didactique d'enseignement sont prises en charge par P0 ? Telle est la piste de réflexion qu'il me paraît nécessaire d'explorer pour parfaire l'ajustement des pièces du puzzle présentées dans ce texte.

Bibliographie

- BAUTIER, E. ; CHARLOT, B. ET ROCHEX, J-Y. (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*. Collection Formation des enseignants, Paris : Armand Colin
- BAUTIER, E. ET ROCHEX, J-Y. (1998), *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification ?* Collection Formation des enseignants, Paris : Armand Colin
- BAUTIER, E. et GOIGOUX, R. (2004), Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle, *Revue Française de Pédagogie*, 148, 89-100.
- BONNERY, S. (2006), Construction des inégalités scolaires dans la confrontation des élèves à l'Ecole. "Elèves en difficulté" ou inégalités scolaires socialement situées, in Castela et Al. (eds) *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques-Année 2005*, IREM Paris 7, pp. 285-317.
- BROUSSEAU, G. (1986), La relation didactique : le milieu, *Actes de la 4^e école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 54-68, éd IREM de Paris 7
- BROUSSEAU, G. (1996), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, in Noirfalise, R. et al. (eds) *Actes de la 8^e Ecole d'été de didactique des mathématiques -Saint Sauves d'Auvergne- 22-31 Août 1995*, IREM de Clermont-Ferrand, pp. 16-46.

- BUTLEN, D. ET PEZARD, M. (2003), Etapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23 (3), 41-78.
- CASTELA, C. (2000), Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20 (3), 331-380.
- CASTELA, C. (2004), Institutional influences on math students' private work viewed as contributing to differences of performance: a comparative study of two French higher education institutions. *Educational Studies in Mathematics* 57(1), 33-63.
- CASTELA, C. (2006), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, in Rouchier et Al. *Actes de la XIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, à paraître.
- DE CERTEAU, M. (1980), *L'invention du quotidien. 1.Arts de faire*. Paris : Gallimard, Folio Essais n°146, 1990 ; rééd. 2002.
- CHARLOT, B. (1997), *Du rapport au savoir. Eléments pour une théorie*, Paris : Anthropos.
- CHARLOT, B. (1999), *Le rapport au savoir en milieu populaire. Une recherche dans les lycées professionnels de banlieue*. Paris : Anthropos.
- CHEVALLARD, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1), 73-112.
- CHEVALLARD, Y. (2002), Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions, in Dorier, J-L. et al. (eds) *Actes de la 11^e Ecole d'été de didactique des mathématiques –Corps - 21-30 Août 2001*, Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 3-22.
- FELIX, C. (2002), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire*. Thèse Université d'Aix-Marseille Sciences de l'Education
- FELIX, C. et JOSHUA, J. (2002), Le travail des élèves à la maison : une analyse didactique en termes de milieu pour l'étude, *Revue Française de Pédagogie*, 141, 89-97.
- GENESTOUX-ESMANJAUD, F. (2002a), Médiations entre la classe et le travail à la maison : le rôle des assortiments, in Assude, T. et Grugeon, B. (eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques-Année 2001*, Paris : Irem Paris 7, pp.153-176.

GENESTOUX-ESMANJAUD, F. (2002b), Les assortiments didactiques, *Actes de la 11^e Ecole d'été de didactique des mathématiques –Corps - 21-30 Août 2001*, Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 3-22.

21-30 Août 2001, Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 177-186.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les "classes faibles", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 13 (1-2), 95-118.

ROBERT, A. ET ROGALSKI, M. (2002), Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x* 60, 6-25.

ROGALSKI, J. (2006), Piaget et Vygotski : apports croisés pour une approche développementale, in Castela C. et Houdement C. (eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques-Année 2005*, Paris : Irem Paris 7, pp.237-262.

Fondements épistémologiques et ancrages théoriques d'une approche anthro-po-didactique des phénomènes d'enseignement des mathématiques

Bernard SARRAZY

Laboratoire Cultures, Education, Société Equipe DAESL
« Didactique et Anthropologie des Enseignements des Sciences et des Langagiers »
Université Victor Segalen Bordeaux 2

Introduction

Je montre à mes élèves des morceaux d'un immense
paysage dans lequel ils ne seraient pas capables de se
reconnaître.

Ludwig Wittgenstein

La plupart de mes travaux sur l'enseignement des mathématiques ont porté sur la question des effets, principalement didactiques, et leurs déterminants associés à l'indicibilité des attentes mobilisées au sein du contrat. Ma thèse avait permis de montrer que les Arrière-plans culturels des élèves mais aussi les « cultures pédagogiques » dans lesquelles ils évoluaient permettaient de rendre compte des différences de conduites dans leur manière de se positionner à l'égard de ce qui n'était pas enseigné (au sens classique du terme) mais pourtant attendu par leur professeur. La compréhension de ces effets exigeait bien sûr l'examen des conditions didactiques, repérables et analysables dans le cadre de la théorie des situations, mais aussi de conditions « non-didactiques », c'est-à-dire toutes conditions non identifiées d'un point de vue didactique mais repérables d'un point de vue anthropologique comme modalités d'assujettissement des individus à des formes culturelles (telles les croyances, les valeurs déterminant certaines manières d'agir et de penser). Ce double cadrage théorique, anthropologique et didactique, a permis de repérer toute une classe de phénomènes qui n'auraient pu être perçus seulement dans l'un ou l'autre cadre pris isolément ; ce fut le cas de ceux que j'ai appelés « sensibilité au contrat didactique ». Les conditions didactiques bien que nécessaires pour comprendre certains effets de

l'enseignement apparaissaient insuffisantes pour expliquer ces phénomènes de sensibilité : les travaux de Brousseau et, ultérieurement, ceux de Chevallard et de Schubaeur-Léoni, bien qu'ayant permis de montrer en quoi la production d'une réponse numérique à un énoncé du type « capitaine » s'expliquait clairement dans le cadre d'analyse du contrat, la question demeurait de comprendre pourquoi certains élèves s'autorisaient à rejeter la validité de la question et que d'autres, plus sensibles au contrat, produisaient une réponse numérique. Les réponses issues des théories du traitement de l'information ou encore celles avancées par la psychologie sociale ne faisaient que repousser les déterminants de ces phénomènes dans la description de processus hypothétiques : défaillances des procédures de traitement des informations pour celles-ci, expression d'un style cognitif de dépendance ou d'indépendance au champ pour celles-là. Ces descriptions n'avaient pas ici valeur d'explication. Telle fut le problème initial auquel je m'étais attaché et qui donna naissance à ce champ d'étude désormais appelé « anthro-po-didactique ». C'est à cette classe de phénomènes liés à ce non-recouvrement, et plus précisément au croisement de ces dimensions, didactiques et non-didactiques, que s'intéresse l'approche anthro-po-didactique.

C'est durant cette période dans laquelle je me débattais avec ces phénomènes de sensibilité que j'ai pris tout à fait au sérieux le point de vue wittgensteinien sur les mathématiques comme phénomène anthropologique pour tenter de mieux cerner, de l'intérieur des pratiques d'enseignement, les jeux attachés à l'indicibilité des attentes et au désir de dire ce qui ne peut que rester sous silence (pour faire ici allusion à l'un des aphorismes des plus connus de L. Wittgenstein)¹. La jonction des deux approches, broussaldienne et wittgensteinienne, se fit sur une idée en apparence très simple : le sens d'une règle se révèle, et se constitue, dans (par) ses *usages* circonstanciés, par ce que l'on fait (et que l'on fait faire aux élèves) au quotidien. Autrement dit, c'est moins ce qui est enseigné qui importe *ici* (la règle) que les circonstances de cet enseignement, circonstances qui déterminent en large part la manière dont les élèves suivront ultérieurement cette règle pensant, ce faisant, et à juste titre, « se mettre en règle » : l'élève n'apprend pas des mathématiques mais à en faire c'est-à-dire à les pratiquer sans pour autant avoir besoin de considérer cette pratique, comme dirait P. Bourdieu, comme le produit de l'obéissance à la

¹ On l'aura reconnu, il s'agit du dernier aphorisme (§ 7) du *Tractatus Logico-Philosophicus*, « Sur ce dont on ne peut parler, il faut garder le silence. » (L. Wittgenstein, trad. G.G. Granger.)

règle : la logique de la pratique, disait-il, n'est pas la pratique de la logique ! Pour insuffisante que soit cette définition rapide de l'enseignement, elle présente le double intérêt (i) de poser la question de son étude sous l'angle d'une éducation mathématique, c'est-à-dire de l'apprentissage d'une pratique spécifique (les mathématiques), et donc des conditions susceptibles de la réaliser, et (ii) de mettre en évidence, plus que ce ne fut fait auparavant, le caractère radicalement indicible de ce qui est effectivement visé par l'enseignement et des effets (non nécessairement conscientisés par les professeurs ou par leurs élèves) associés à l'indicibilité de ces usages. Que signifie « apprendre une pratique des mathématiques » et quelles conditions doivent être examinées afin d'en rendre compte ? Telles sont les deux questions majeures qui définissent le projet anthropo-didactique, et qui seront développées dans ce texte.

1 . L'apprentissage comme phénomène anthropologique

L'apprentissage a partie liée avec la régularité : dans quelles circonstances dit-on qu'un sujet a appris ? « S'il peut continuer tout aussi bien que moi. » répond simplement Wittgenstein (1983). Mais la simplicité de la réponse n'est qu'apparente ; car les raisons envisageables de cette régularité (entre ce qu'exige la règle et les actions réalisées *en accord* avec elle) pose un sérieux problème épistémologique quant au statut que l'on peut accorder à cet ajustement : doit-on considérer cet ajustement comme la preuve d'une détermination causale de l'action par la règle, ou bien doit-on concevoir l'action comme en accord avec la règle sans pour autant postuler une mystérieuse mécanicité (mentale) par laquelle l'action procéderait *causalement* de la règle (quand bien même les justifications que le sujet lui-même pourrait donner de son action référerait directement à la règle ; on ne devrait voir là, dit Wittgenstein, que la simple expression d'une raison : « Ce que les hommes font valoir en tant que justification, montre la manière dont ils pensent et vivent. – Nous attendons *ceci* et nous sommes surpris par *cela* ; mais la chaîne des raisons a une fin. » (Wittgenstein, 1961, § 325-6).

La question n'est ni épistémologiquement triviale, ni didactiquement inconséquente.

Considérer en effet que la règle puisse déterminer les décisions de l'élève conduit à justifier le bien-fondé d'un enseignement des règles, théorèmes et algorithmes de calcul en dévoluant à la nature (aux dons, aux capacités ou habiletés... ou toutes autres catégories mentales) la responsabilité de son usage (autrement dit de son sens) à l'élève et admettre du

même coup que les actions qui ne se conformeraient pas à la législation de la règle procèderaient d'une *interprétation* erronée de ce qu'elle exige (cette conception, classique et courante, est probablement l'une des plus nocives didactiquement, car le professeur n'a pas d'autres alternatives que le recours à de nouvelles règles pour en régler l'usage (ou les soit disantes « interprétations ») ; rappelons-le avec Wittgenstein : « la chaîne des raisons à une fin ».

Si au contraire, on envisage l'action comme l'effet d'une manière de voir, d'être, de penser... conforme à ce que dit la règle et acquise par diverses adaptations successives à un milieu, alors l'aspect didactique du travail du professeur consiste à s'attacher aux conditions de l'action et aux propriétés des milieux par lesquels l'élève pourra apprendre ce qu'on ne peut lui enseigner directement.

On voit bien comment les idéologies pédagogiques (comme celles qui replacent aujourd'hui au devant la scène le rôle de la mémorisation ou des automatismes) et même certains travaux sociologiques ou psychologiques, trop souvent oublieux des aspects didactiques des situations étudiées et plus particulièrement des contraintes attachées à l'ineffabilité du contrat, au-delà même des intérêts particuliers qu'ils représentent, par les conceptions épistémologiques qu'ils véhiculent, contribuent à maintenir ou à diffuser ce qu'on pourrait appeler, en référence à l'anthropologie bourdieusienne, un *habitus didactique* sorte de matrice génératrice d'une infinité de comportements professoraux contribuant à structurer, organiser et réguler les dispositifs d'enseignement par lesquels les élèves s'approprient à travers cet ensemble grouillant d'expériences particulières et répétées mais épistémologiquement réglées une manière de faire des mathématiques, une manière de voir et des traiter les problèmes. Comme le dit Bourdieu, « ce qui est appris par corps n'est pas quelque chose que l'on a, comme un savoir que l'on peut tenir devant soi, mais quelque chose que l'on est » (1980, 123).

2. Suivre une règle ?

Après avoir rappelé les enjeux praxéologiques associés à ces conceptions épistémologiques, après avoir situé le champ anthropo-didactique au croisement de la théorie des situations et de l'anthropologie wittgensteinienne, examinons maintenant les arguments en faveur de la thèse anthropo-didactique. Pour ce faire, je partirai de la question suivante, propre à la conception précédemment évoquée que désormais j'appellerai 'mentaliste' : peut-on dire qu'une action, telle « donner une réponse à un problème d'arithmétique », suppose de la part de l'élève, une *interprétation* préalable des règles qu'il est censé connaître (puisqu'on les lui a enseignées et qu'on a contrôlé sa capacité à les reproduire dans des situations faiblement décontextualisées – des exercices, pourrais-je dire) ? Rien n'est moins sûr, car l'idée de cette interprétation préalable contient un paradoxe que Wittgenstein formule ainsi : « Aucune manière d'agir ne pourrait être déterminée par une règle, puisque chaque manière d'agir pourrait toujours se conformer à la règle » (1961, § 201). Comment alors une règle peut-elle nous *guider* « puisque nous pouvons interpréter son expression de telle et telle autre façon ? » (1983, 282). S'il est possible de la suivre comme on veut, il est alors impossible de la suivre puisqu'elle ne nous contraint pas ! Tel est ce que devraient découvrir ces élèves qui savent-mais-qui-ne-comprennent-pas.

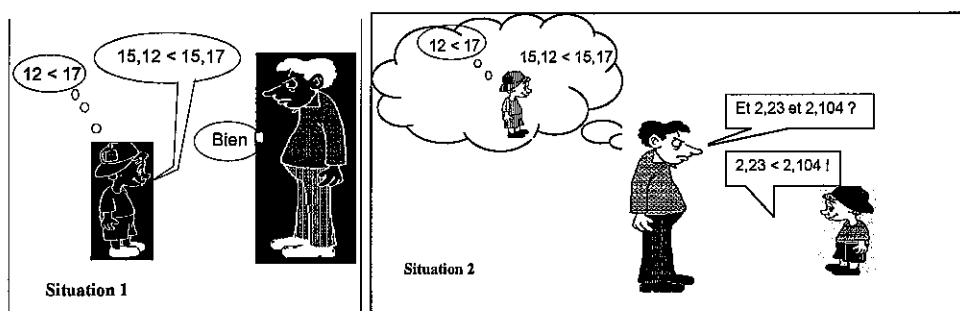
Le paradoxe n'est qu'apparent et permet de dévoiler la faiblesse de la conception mentaliste. Il provient de la tendance que nous avons « à instaurer artificiellement entre la règle et ses applications une distance problématique qui, en réalité, n'existe pas » et qu'un hypothétique mécanisme mental permettrait de réduire (cf. Bouveresse, 1986). On a vu plus haut quelques problèmes associés à une telle conception : la règle ne peut jamais être auto-réglable ou méta-réglable car « c'est précisément, dit Bouveresse, parce [qu'elle] doit pouvoir me servir à chaque instant de norme pour juger ma performance qu'elle ne peut pas me faire faire ce que je fais de la manière dont le ferait un mécanisme quelconque » (1986, 30).

L'énoncé qui dit que j'avais deux pommes, que Johnson m'en a donné deux autres s'accorde avec cette règle $[2 + 2 = 4]$. Il fait sens ; tandis que, eu égard à la règle $4 - 5 \neq 1$, 'Sur les quatre pommes que j'avais, j'en ai donné cinq et gardé une' n'a pas de sens. (Wittgenstein, 1992, 189).

'Suivre une règle' ne se ramène donc pas à pas 'obéir à la règle' mais constitue une 'décision spontanée' dont le sens se juge précisément à l'aune de la règle : 'suivre une règle' est, selon l'expression de Hacker et Backer, une 'création normative' permettant

d'estimer la conformité de l'action à ce que dit la règle². Sa signification *correspond* à l'usage circonstancié que le sujet en fait *hic et nunc* : « Une ligne ne me contraint-elle pas à la suivre ? – Non, mais quand je me suis décidé à l'utiliser *ainsi* comme modèle, elle me contraint. Non, c'est *moi* qui me contrains à l'utiliser ainsi. » (Wittgenstein, 1983, 329).

A ce point de la démonstration, on pourrait me reprocher de retomber dans la contradiction qu'il s'agissait initialement de clarifier à propos du mentalisme que l'on pourrait déceler dans l'idée de « décision » que je fais ici jouer. Ce n'est pas le cas. L'élève décide certes mais ne décide pas de *ce* qui le fait opter pour ceci et non pour cela ici et maintenant. La contradiction n'est qu'un effet de l'ensorcellement produit par la grammaire de 'décider' ; comme le pointe Wittgenstein, « le fait que tout puisse être interprété comme le fait de suivre quelque chose, ne signifie pas que tout consiste à suivre quelque chose. » (1988, § 329). Ceci est particulièrement vrai dans les situations scolaires. Donnons-en une illustration à partir de la situation ci-après :



Dans la situation 1, serait-il correct d'admettre que l'élève agit *en fonction* du théorème implicite (R_1) suivant : « Quand 2 décimaux ont la même partie entière, le plus grand des 2 est celui dont la partie décimale, prise comme un entier, est la plus grande » ? Peut-être. Mais en tout cas, rien ici n'autorise à affirmer que l'élève décide *en fonction* de cette règle.

Imaginons maintenant (situation 2), que le professeur demande au même élève de comparer « 2,23 et 2,104 » et que celui-ci réponde « 2,23 < 2,104 ». Pourrait-on maintenant affirmer que l'élève, dans la situation 1, avait répondu en fonction de R_1 ? Là aussi, rien ne permet de l'attester, même si l'élève justifiait sa réponse en expliquant que « 2,23 < 2,104 car 23 < 104 ». L'élève, dans ce cas, donnerait une *raison* dont l'origine est à rechercher dans la manière dont il a appris les décimaux. En tout cas, rien ne permet d'affirmer qu'il a agi *en fonction* de R_1 . Dans ce cas, il va de soi que très probablement le professeur signalera l'erreur à son élève et peu importe qu'il

² C'est en cela qu'apprendre à suivre une règle est analogue à l'apprentissage d'un langage dans lequel « la grammaire nous autorise à faire certaines choses avec le langage et non certaines autres ; elle détermine le degré de liberté [...] les règles sont fixées et données : elles autorisent certaines combinaisons et en interdisent d'autres. » (Wittgenstein, 1988, 8 ; 94).

pense ou non que R_1 est la cause de sa décision, il lui dira qu'il « est faux de croire [et non pas 'Tu as tort de croire'], que $2,23 < 2,104$ car $23 < 104$ ou que $15,12 < 15,17$ car $12 < 17$ parce que... ». A partir de combien de cas de réussite le professeur considèrera-t-il que l'élève agit en vertu de la règle qu'il veut lui enseigner : « Combien de fois un homme doit-il avoir additionné, multiplié, pour [...] se le prouver à lui-même ? » (Wittgenstein, 1983, 6, §32) ? Enfin, est-ce que le professeur se serait soucié de l'intériorité de l'élève si celui-ci avait répondu correctement en S_2 ?

Par cet exemple, je ne veux pas dire que l'élève ne suit aucune règle mais simplement qu'il est très difficile de déterminer clairement ce qui, dans sa conduite, relève d'une règle et ce qui n'en relève pas, s'il la suit, consciemment ou inconsciemment, volontairement ou pas et finalement de l'inintérêt didactique de la question. Si l'on exigeait une réponse, je serais tenté de dire ni l'un, ni l'autre : il agit ainsi. Il 'sait' comment il doit agir pour faire ce qu'il fait sans pour autant avoir besoin de postuler qu'il est là en train 'd'appliquer des règles'.

« Imagine un processus dans lequel un homme qui pousse une brouette s'est aperçu qu'il lui faut nettoyer l'axe de la roue lorsque la brouette est trop dure à pousser. Je ne veux pas dire qu'il se dit à lui-même : Chaque fois que la brouette est trop dure à pousser... Il agit simplement de cette façon. » (Wittgenstein, 1983, § 317) même si, ajoute-t-il, ce même homme pourra dire à son ami qui pousse une brouette qui a du mal à avancer 'Eh oh ! Nettoie l'axe de ta roue !'.

Comme notre homme poussant sa brouette, l'élève apprend donc, non à suivre une règle, mais à agir conformément à la règle. C'est du moins ce que cherche à atteindre son professeur lorsqu'il enseigne. Qu'est-ce à dire ?

i) Le professeur n'a pas besoin d'attribuer à l'élève des représentations internes qui lui seraient propres :

Est-ce que je me soucie de l'intériorité de celui à qui je fais *confiance* ? Si je ne lui fais pas confiance, je dis 'je ne sais pas ce qui se passe en lui' ; mais si je lui fais confiance, je ne dis pas que je ne sais pas ce qui se passe en lui. Si je ne me méfie pas de lui, je ne me soucie pas de ce qui se passe en lui. (Les mots et leur signification.) Dans une conversation normale, je ne me soucie pas de la signification des mots, de ce qu'il y a derrière eux. Les mots coulent et le passage se fait de lui-même entre eux et les actes, entre les actes et eux. (Wittgenstein, 1994, § 602-603).

Quand bien même le ferait-il, cela ne changerait rien. Je ne veux pas dire que les professeurs n'ont aucun modèle *interprétatif* de ce que font les élèves – ce serait absurde de l'affirmer – je veux simplement dire que ces modèles ne sont que des *descriptions* de ce que font les professeurs : contrôler l'adéquation entre ce que font ses élèves et ce qu'il

pense qu'ils devraient faire. Il est donc vain, pour eux, de rechercher dans la tête de leurs élèves l'origine de leurs erreurs³.

En d'autres termes, si la psychologie nous fournit des instruments pour décrire les transformations des actions de l'élève, on ne saurait attendre d'elle qu'elle fournisse aussi, non seulement les critères de cette transformation (qu'elle peut inférer sous la forme de représentations mentales mais qu'elle ne peut théoriquement contrôler), mais encore les conditions de possibilité de ces transformations. Les « pédagogies attentistes », conséquences du radicalisme du constructivisme piagétien, en les considérant naturellement réunies eu égard à l'idée d'un développement inéluctable, en constituent un regrettable témoignage. Telle est l'une des différences fondamentales entre didactique et psychologie dans leur rapport aux pratiques d'enseignement.

ii) Dire que l'élève agit conformément à la règle, c'est dire que tout se passe comme si il agissait de telle façon que, *selon certains critères externes*, l'usage de la règle révélé par son action soit conforme à ce qui est acceptable, dans ces circonstances, à une *forme de vie*. C'est cette conformité entre l'usage et les circonstances qui constitue le critère de la fausseté et de la vérité :

Est vrai et faux ce que les hommes *disent* l'être ; et ils s'accordent dans le langage qu'ils emploient. Ce n'est pas une conformité d'opinion mais de forme de vie. (Wittgenstein, 1961, § 241).

Ainsi, « pour comprendre le calcul qu'ils font à l'école primaire, les enfants devraient être des philosophes de valeur ; à défaut, il leur faut des exercices » (1970, § 703). Le danger de l'ensorcellement est ici de confondre un « processus qui s'accorde avec une règle » et « un processus dans lequel la règle est impliquée » (Wittgenstein, 1996,

³ Cette tentation est pourtant courante : je prendrai un exemple extrait des résultats de l'évaluation nationale 6^{ème} en mathématiques (MEN, 2001), concernant précisément un item analogue à celui que j'ai présenté : « Item 33 : Voici un encadrement $3,4 < ? < 3,5$ Pour chacun des nombres suivants, regarde si on peut le mettre à la place du point d'interrogation. Si oui entoure-le, sinon barre-le. 3,407 – 3,53 – 3,41 – 3,3 ». Il s'est avéré l'un des plus difficiles (45.7 % de réussite) mais aussi celui qui enregistre l'écart de réussite le plus élevé entre les CSP favorisées et défavorisées (52.9 % pour celle-là, 34.4 % pour celles-ci). Dans les commentaires et analyses de ce résultat, on peut lire : « Il sera intéressant de questionner les élèves pour accéder à leur stratégie... ».

51). Kripke (1996) développe remarquablement le paradoxe impliqué par cette confusion de la façon suivante :

Imaginons une fonction qu'on appellera *quus* ($\oplus$) et qu'on définit de la façon suivante : « $x \oplus y = x + y$, si $x, y > 57$; $x \oplus y = 5$ autrement. » Imaginons maintenant, par simple hypothèse, que je n'ai jamais effectué d'addition que de nombres plus petits que 57. Si maintenant je calcule « $57 + 68$ » et que j'annonce 125, on pourra alors dire que, effectivement, j'utilise l'addition (et non *quus*). Mais comment prouver que *quus* n'est pas la fonction que je signifiais antérieurement par '+' ? Commentant l'argument wittgensteinien, Kripke montre qu'il est impossible de réfuter une telle affirmation en faisant référence à mon propre passé d'additionneur car ma certitude ne peut s'appuyer que sur *ma* propre expérience et rien ne me permet maintenant d'affirmer que lorsque j'additionnais « $2 + 2$ » c'était bien l'addition que j'utilisais et non pas *quus* puisque $2 \oplus 2 = 4$!

C'est de cette confusion que procède l'erreur épistémocentrique dont parle Bourdieu, qui consiste à placer « au principe de la pratique [des agents], c'est-à-dire dans leur 'conscience', ses propres représentations spontanées ou élaborées ou, pire, les modèles qu'il a dû construire (parfois contre sa propre expérience naïve) pour rendre raison de leur pratique. » (Bourdieu, 1997, 65 ; 1992, 98). Elle est classique et récurrente, non pas nécessairement dans les interprétations que les maîtres font des actions des élèves (cf. les illustrations ci-dessus), mais dans le statut qu'ils leur accordent en considérant que la règle identifiée joue un rôle causal dans leur décision. D'un côté, s'il est difficile de ne pas admettre, de fait, la réflexivité du sujet, sa capacité à expliciter le sens qu'il accorde à sa propre action ; de l'autre, il est tout aussi imprudent d'affirmer qu'il maîtrise consciemment les principes impliqués par ses choix, ses décisions ou ses manières d'agir⁴. Comment alors déterminer la règle d'après laquelle il agit, et quel statut peut-on accorder à ses propres rationalisations ?

La réponse n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. Je crois qu'il est d'abord essentiel de ne pas hâtivement assimiler les rapports entre (i) *intention*, *conscience* et (ii) *causalité*. En effet, dire d'une action qu'elle est intentionnelle et consciente ne revient pas toujours à dire que les règles qui permettent de la décrire l'ont déterminée. Car l'intention et la

⁴ La manière dont Bourdieu dépasse par la théorie de l'habitus la contradiction (conscience / inconscience) inhérente à l'opposition entre la tradition phénoménologique et la tradition objectiviste (2000, 235) est structurellement analogue à celle qui permet à Wittgenstein de réduire le paradoxe sceptique en rejetant à la fois la thèse idéaliste (la règle contient l'infinité de ses applications possibles) et la thèse intuitionnisme (pour laquelle il s'agirait à chaque fois d'examiner les circonstances pour en produire une application correcte).

conscience de cette intention, qui m'est propre et par laquelle je signifie⁵ mes projets, mes désirs ou mes souffrances, ne peut exister que dans un espace de possibilités dont je n'ai pas conscience dans sa totalité. Une « objectivité intériorisée » dit Bourdieu (1979, 438). Métaphoriquement, on pourrait dire avec Wittgenstein que « si les puces élaboraient un rite, il se rapporterait au chien » (1982, 25). Cet espace de possibilité est indépendant de ma propre volonté ou de mes désirs⁶ car « l'intention est inhérente à la situation, aux coutumes et aux institutions humaines. S'il n'y avait pas une technique du jeu d'échec, je ne pourrais avoir l'intention d'une partie d'échec. » (Wittgenstein, 1961, § 337). En d'autres termes, il s'agit de ne pas confondre les intentions préalables à l'action (Searle, 1985, 1992), leurs modes de réalisation et leurs conditions de satisfaction. L'habitus (pour Bourdieu) ou l'Arrière-plan (pour Searle) permettent d'expliquer leurs ajustements : « L'habitus, dit Bourdieu, est une subjectivité socialisée » (1992, 101), de la même façon que pour Searle, « les phénomènes intentionnels ne déterminent des *conditions de satisfaction* que relativement à un ensemble de capacité [d'Arrière-plan] qui ne sont pas elles-mêmes intentionnelles. » (1995, 238).

L'erreur de la conception mentaliste réside dans le dispositionnalisme qui voit, dans ces rationalisations (l'invocation de la règle), la preuve d'une détermination causale de l'action par la règle « ce qui, note Bouveresse, revient à confondre la détermination *logique* d'une action par une règle avec sa détermination *causale* par un mécanisme » (1982, 108), alors que ces rationalisations ne sont que la simple expression d'une raison. Tel est, me semble-t-il, un des écueils (et non des moindres) propres au mentalisme que la théorie des situations didactiques, par les ruptures des divers contrats à l'œuvre dans les diverses

⁵ Je pense ici à cette remarque que Wittgenstein écrivit l'avant veille de sa mort : « Si [un] narcotique m'a enlevé toute conscience, alors, je ne parle ni ne pense vraiment en ce moment. [...] Celui qui dit : 'Je rêve' en rêvant, même s'il parle alors de façon audible, est tout aussi peu dans le vrai que celui qui dit : 'Il pleut' en rêvant, quand bien même il pleuvait effectivement. Même si son rêve a en réalité un lien avec le bruit de la pluie qui tombe. » (1976, § 66). On peut aussi se reporter aux nombreuses autres remarques sur la douleur dans *Le Cahier bleu* (« L'amputé d'une jambe vous dira qu'il éprouve une certaine douleur au pied de sa jambe manquante », p. 122), ou sur les mouvements volontaires (*Fiches*, § 595).

⁶ C'est une des idées fortes du *Tractatus*. Wittgenstein montre qu'un fait n'est envisageable que s'il est possible de saisir ses potentialités indépendamment de leur réalisation : je peux imaginer que King's College est en train de brûler mais il n'est pas possible d'imaginer un fait inimaginable. C'est l'ensemble de ces faits qui constitue le monde et, si cruel que cela paraisse, « Le monde de l'homme heureux est un autre monde que celui du malheureux. » (§ 6.43) !

dialectiques – et plus particulièrement celles de l'action et de la formulation – a permis de réduire « anthropologiquement » pourrait-on dire.

3. Milieux et formes de vie comme alternatives au mentalisme

On pourrait opposer à cette thèse, que, le plus souvent, hormis quelques ratés, il y a quand même une régulière *correspondance* entre ce qu'exige la règle et l'action réalisée. C'est précisément le sens accordé à la régularité de cet ajustement qui nous trompe et dans son élucidation que réside un des aspects des plus essentiels de l'approche anthropo-didactique. La régularité de cet ajustement nous pousse à croire que la signification est contenue dans la règle : c'est là une erreur. Cette croyance, je l'ai dit, incite à aller rechercher dans la tête des élèves le sens qu'ils accordent à ce qu'ils font ou, pire, à leur enseigner ce qu'on pense qui devrait s'y trouver⁷. Plus exactement, l'idée que la signification est virtuellement contenue dans la règle n'est pas incorrecte, sauf à la considérer comme une disposition attachée à une construction socio-historique, à 'l'histoire naturelle de nos concepts' comme dit Wittgenstein. Dans ce cas, la signification doit être rapportée à la manière dont nous avons appris ces concepts, la manière dont ils nous ont été enseignés et dont ils sont effectivement utilisés dans nos formes de vie (1961, § 190).

Remarquons ici la forte convergence avec la théorie des situations : le travail de Brousseau sur les obstacles didactiques est exemplaire de cette conception : « Un étudiant utilise le 'théorème' suivant : 'Si le terme général d'une série tend vers zéro, la série converge.' Est-il distrait ? Récite-t-il mal – en inversant hypothèse et conclusion – un théorème du cours ? A-t-il mal compris la notion de limite ? Ou celle de série ? Est-ce une erreur sur les conditions nécessaires et suffisantes ?... En rapprochant cette erreur de quelques autres, on comprend que de façon inconsciente, cet étudiant a fait un

⁷ Entre maints exemples – car ils sont nombreux – j'évoquerai celui de Flavell (1985) qui soutient que : « Si les habiletés métacognitives sont utiles pour l'apprentissage scolaire et si certaines font défaut aux élèves, particulièrement aux plus jeunes, peut-être pourraient-elles et devraient-elles être enseignées aux enfants comme partie intégrante du programme scolaire. », ou encore de façon plus nette, Julo qui, dans son ouvrage *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, déclare : « L'option choisie ici est d'envisager la résolution de problèmes sous l'angle des représentations et donc, d'une certaine manière, d'accentuer la séparation entre des processus qui seraient plus du côté de la représentation et d'autres plus du côté de l'action. Ce choix répond surtout à la préoccupation didactique qui est à l'origine de ce travail et qui nous conduira, dans les chapitres suivants, à défendre l'idée qu'il faut privilégier l'intervention au niveau de la représentation lorsque l'on veut aider quelqu'un à résoudre un problème donné. » (Julo, 1995, 12).

certain raisonnement, faussé par une représentation incorrecte des réels *qui remonte à l'enseignement primaire et secondaire*. [...] » (Brousseau, 1998, 122 – c'est moi qui souligne)

Allons plus loin et examinons les raisons alternatives à celles invoquées par le mentalisme de cette correspondance. Elles doivent être recherchées dans l'usage que nous faisons des *règles de projection* par lesquelles nous établissons nos jugements de conformité entre ce qu'on fait et ce qu'on pense ou plus généralement entre la pensée et la réalité (Wittgenstein, 1988, *passim*). De quoi s'agit-il ? Je choisirai pour débiter, de rapporter l'expérience que Wittgenstein donne de la copie : lorsque nous copions un modèle, on s'*engage* à suivre une règle de projection, du modèle à la copie, qui permet de juger de la conformité⁸ entre le modèle et la copie :

C'est en accord avec une règle de projection déterminée que l'on dit que les choses sont semblables ; *mais certaines règles de projection sont plus familières que d'autres*. (1988, 95).

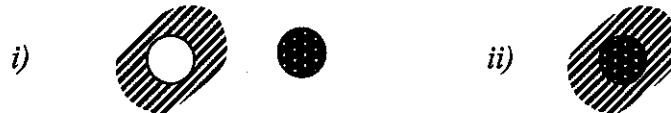
Les raisons de cette familiarité sont à chercher dans certaines formes de vie.

« La proposition doit être semblable au fait qui la remplit. » (1988, 38). « L'attente et le fait qui la comble se conviennent d'une manière ou d'une autre On n'aurait donc qu'à décrire une attente et un fait qui se conviennent pour voir en quoi consiste leur concordance mutuelle. Ici on pense aussitôt à l'adaptation d'une forme pleine à une forme creuse qui lui correspond. Mais si l'on veut décrire ces deux formes-là, on s'aperçoit que, dans la mesure où elles se conviennent, *une description unique vaut pour les deux*. » (1970, § 54. C'est moi qui souligne).

La manière dont Wittgenstein explique les raisons de cet accord est fondamentale pour sortir des ornières du mentalisme qui imprègne aujourd'hui nos manières de voir les phénomènes d'enseignement dans leur rapport à la signification. Cette argumentation est particulièrement développée dans le *Cahier Brun* (1996, 261) où Wittgenstein en donne une illustration particulièrement éclairante :

⁸ Dans ce cas, précise Wittgenstein « les erreurs de ma copie seront compensées par la colère, les regrets, etc., que je manifesterai à leur égard. Le résultat global – c'est-à-dire la copie plus l'intention – est l'équivalent de l'original. Le résultat effectif – la simple copie visible – ne représente pas la totalité du processus de copiage ; nous devons y inclure l'intention. Le processus contient la règle, le résultat ne suffit pas à décrire le processus. » (Wittgenstein, 1988, 43 et 130). C'est probablement de l'amalgame entre le produit d'une action et l'intention ou de l'écrasement de la seconde par la première que réside une des erreurs des plus nocives des mots d'ordre pédagogiques inspirés du cognitivisme.

On est tenté d'expliquer : 'Le mot tombe dans un moule qui était prêt pour lui dans mon esprit bien avant.' Mais puisque je ne perçois pas à la fois le mot et un moule, la métaphore du mot qui s'adapte à un moule ne peut pas renvoyer à l'expérience de comparer une cavité et une forme pleine avant de les ajuster l'une à l'autre, mais plutôt à l'expérience de voir une forme pleine accentuée par un arrière-plan particulier.



i) serait l'image de la cavité et de la forme pleine avant qu'elles ne soient ajustées l'une à l'autre. Nous voyons ici deux cercles et nous pouvons les comparer, ii) est une image du plein dans la cavité. Il n'y a qu'un seul cercle, et ce que nous appelons moule l'accentue seulement, ou comme nous l'avons parfois dit, le fait ressortir.

Cette explication a certaines conséquences tout à fait essentielles pour la question qui nous préoccupe. J'en pointerai trois :

- i) elle permet de régler la question de l'accord entre la pensée et la réalité, la règle et son usage, le monde et le sujet, les rapports savoir/connaissance, sans avoir recours à une métaphysique quelconque (le mentalisme du transfert ou le réalisme métaphysique, ou celle des affordances telles qu'elles sont définies dans les théories de l'action située, chez Gibson par exemple) ;
- ii) elle permet de préciser en la renforçant la thèse de l'indicibilité du contrat. C'est une des thèses des plus fortes chez Brousseau et chez Wittgenstein – elle traversa ses deux périodes : celle du *Tractatus* avec l'argument de « la forme logique de la représentation », celle, dans les *Investigations*, du paradoxe sceptique examiné plus haut ;
- iii) Elle permet de réaffirmer l'importance que l'on doit accorder aux formes de vie, aux milieux et leurs Arrière-plans pour comprendre les raisons des différences de sensibilité au contrat entre élèves (définies, rappelons-le, comme des sortes d'« habitus épistémologiques ») ;
- iv) Enfin, cette thèse permet de souligner en la précisant, de façon réciproque à ce que font les anthropologues, la dimension franchement anthropologique de la théorie des situations : concevoir des milieux permettant de réaliser l'ajustement entre les attentes didactiques (inexprimables) et ce que feront effectivement les élèves (cf. Sarrazy, 2005).

Je crois avoir montré que les rapports entre l'action et la conscience des schèmes qui y sont engagés ne sont pas aussi bi-univoques, décisives ou conscients, que nous le laissent entendre aujourd'hui les partisans de l'explicitation, et pas aussi anarchiques que d'autres semblent le penser. Que ces « décisions » qui semblent présider à l'action, ne sont compréhensibles que rapportées à des univers de pratiques dans lesquels les sujets ont incorporé par frayage ou enseignement des manières d'être, d'agir ou de penser, de se mettre en règle... propres à leur(s) « tribu(s) ». D'où l'importance de se départir d'une conception essentialiste de la transférabilité des schèmes, mais bien de la considérer comme une simple catégorie grammaticale au service d'une description de l'action. Ainsi, l'argument selon lequel il y a parfois des 'ratés' n'est selon moi pas recevable. Car, d'une part, il n'y a de 'ratés' que sur le fond d'une régularité (pourrait-on continuer de mentir si l'on mentait tout le temps) et d'autre part, la régularité n'est pas décrétée : elle est de fait (à '2+2' la plupart des gens, le plus souvent, répondent '4'). Aussi convient-il de distinguer nettement la grammaire d'un langage, des conditions de l'appropriation des usages des jeux de langage propres à une communauté : « On ne peut ici que décrire et dire : ainsi est la vie humaine » (Wittgenstein, 1982, 15). « Un enfant s'est blessé, il crie ; alors les adultes lui parlent et lui apprennent des exclamations et, plus tard, des phrases. Ils apprennent à l'enfant une nouvelle manière de se comporter dans la douleur » (1961, § 244). C'est ainsi que nous héritons des œuvres et que nous incorporons, comme par sédimentation de cette pluralité d'expériences, une image du monde qui ne supporte pas d'autre justification que le fait même qu'elle est.

[Cette] image du monde, dit Wittgenstein, je ne l'ai pas parce que je suis convaincu de sa rectitude. Non, elle est l'arrière-plan dont j'ai hérité sur le fond duquel je distingue entre vrai et faux. Les propositions qui décrivent cette image du monde pourraient appartenir à une sorte de mythologie. Et leur rôle est semblable à celui des règles d'un jeu ; et ce jeu, on peut aussi l'apprendre de façon purement pratique, sans règles explicites. (1976, § 94-95).

Aussi je pense qu'il est essentiel de ne pas confondre les savoirs hérités de nos prédécesseurs ou produits par nos contemporains, avec les conditions spécifiques de leur transposition en vue de leur diffusion. Mais ce serait aussi une erreur de considérer les deux termes de cette distinction séparément ; sans quoi, le travail des professeurs serait incompréhensible puisque, précisément, il consiste, en permanence, à contrôler leurs ajustements réciproques – l'effet Jourdain venant ici parfois soulager leurs doutes ou

conforter leurs illusions. C'est, me semble-t-il, la position défendue par Conne lorsqu'il écrit que :

Le contrôle du sens ne peut s'établir qu'en examinant les deux niveaux de réalité traités et leurs liens : d'une part, celui des interactions des élèves avec les objets et dispositifs qui leur sont soumis, et d'autre part, celui des pratiques mathématiciennes et des savoirs de référence. [...] Le contrôle du sens est le contrôle de la transformation ainsi effectuée ; il porte sur l'activité mathématique engagée (l'évolution des interactions sujets-milieu lors du déroulement de la situation). (Conne, 1999, 43).

C'est en cela que la conception de la transposition didactique telle qu'elle se présente dans la théorie des situations est fondamentalement de nature anthropologique. Elle se propose d'étudier des situations, susceptibles de réunir les conditions pour *re-crée*r une *pratique mathématique* afin de préserver le sens des savoirs enseignés qui, comme toute pratique culturelle, peut être apprise sans pour autant être enseignée directement⁹. Aussi est-ce une erreur de considérer la culture comme une forme figée, a-temporelle, a-politique, immuable sur le fond de laquelle se dérouleraient les jeux des hommes ; cette conception est même politiquement dangereuse en tant qu'elle naturalise, en les 'désanthropologisant', les critères par lesquels on dira qu'un sujet a appris ou n'a pas appris. C'est bien d'ailleurs ce qui se marque dans les phénomènes d'institutionnalisation : elle ne se résume nullement à une sorte de conventionnalisme mais à l'expression d'un usage auquel doivent désormais se contraindre les élèves : « ils s'accordent dans le langage qu'ils emploient. Ce n'est pas une conformité d'opinion, mais de forme de vie » (1961, §241), analogue, selon Bouveresse, au fait de s'entendre sur l'espace entre deux graduations d'une règle ou à régler nos montres à la même heure (Bouveresse, 1987). Répétons-le, cette unanimité n'est à considérer ni comme le produit d'un accord contractualisé, ni comme un fondement (comme le présuppose une conception classique de l'enseignement ou une vision naïve du contrat), ni encore comme une norme à l'aune de laquelle il serait possible d'évaluer la conformité

⁹ Il convient ici de distinguer clairement l'anthropologie de la théorie des situations telle que je viens de la décrire, de l'*approche anthropologique* que Chevallard a introduite en 1991 et dont l'*écologie didactique du savoir* (1994) constitue l'instrument essentiel. La première est anthropologique dans sa démarche et dans son projet alors que la seconde l'est par son ambition universaliste, par l'extension des terrains qu'elle se propose d'étudier. En effet, la question de la pratique est introduite à propos de « l'activité humaine en général » (1995, 85) que Chevallard propose de modéliser par un complexe technico-technologico-théorique, baptisé « organisation praxéologique » valant « pour toute activité humaine, quelle qu'elle soit » (*id.*, 93) : « résoudre une équation », « fermer le robinet », « saluer quelqu'un »... Pour un développement plus complet cf. Sarrazy, 2005.

d'une action à la règle, *mais bien l'inverse* : « on n'apprend pas à suivre une règle en apprenant d'abord l'usage du mot 'accord'. On apprend plutôt la signification d'« accord » en apprenant à suivre une règle » (Schmitz, 1988, 246). Suivre une règle, reconnaître une preuve ou la nécessité d'une proposition, d'une démonstration... dépendent d'une manière de voir qui, elle, n'a rien d'inéluctable car « une démonstration n'en est une que pour celui qui la reconnaît comme telle. Celui qui ne la reconnaît *pas* comme telle, celui qui ne la suit pas comme démonstration, celui-ci nous quitte avant même que nous en discussions. » (Wittgenstein, 1983, I § 61). Et c'est bien parce que les propositions mathématiques sont nécessaires (indépendantes du monde, non empiriques et normatives¹⁰) que les hommes s'imposent de les reconnaître identiquement (Schmitz, *id.*, 243 et *passim*). Aussi, comme le fait remarquer S. Laugier (1998), il est fondamental de distinguer les deux sens 'd'accord' : « Dans le contrat (libéral) je suis la source, le point de départ de l'accord ; mais je ne suis pas tout seul, donc nous nous mettons d'accord, moi et les autres. Dans la communauté, je n'ai pas à me mettre d'accord : je le suis d'emblée, étant membre de la communauté. ». Si l'on exigeait un fondement, c'est probablement là, dans l'anthropologie didactique de la théorie des situations, qu'il faudrait aller rechercher, mais sans intention normative :

Les propositions mathématiques sont-elles des propositions anthropologiques qui disent comment nous, les hommes, inférons et calculons ? – Un code juridique est-il un ouvrage d'anthropologie qui nous dit comment les gens de ce peuple traitent un voleur ? etc. – Pourrait-on dire : « Le juge consulte un ouvrage d'anthropologie et condamne ensuite le voleur à une peine d'emprisonnement ? » Mais le juge n'UTILISE pas le code comme un manuel d'anthropologie. (Wittgenstein, 1983, III, § 65).

D'où l'importance, comme le remarque Schmitz (*ibid.*, 244), « d'un apprentissage spécifique qui se caractérise [...] par le fait que le 'professeur' traite d'une certaine manière les applications que l'élève fait d'une règle : il dit à l'élève ce qu'il doit obtenir et fait du résultat que l'élève obtient le critère de la bonne ou de la mauvaise application qu'il aura faite de la règle » et « toute tentative de justification ne pourra qu'aboutir à un 'c'est ainsi' qui n'est plus une 'raison'. S'il y a 'inexorabilité', sentiment de contrainte, etc. ce n'est pas

¹⁰ « Le mathématicien invente toujours de nouvelles formes de représentation [...] [comme] un paysagiste qui crée des chemins pour un jardin : il se peut très bien qu'il les trace simplement comme des bandes ornementales sur la planche à dessin, sans penser un instant qu'un jour on les empruntera. [...] Le mathématicien ne découvre pas, il invente » (Wittgenstein, 1983, I, § 167-8).

parce que la règle contraint comme des rails contraignent la trajectoire de la locomotive, mais parce que nous agissons en étant inexorables. » (Schmitz, *op. cit.*, 245 n. 28). C'est entre la nécessité des propositions mathématiques et la contingence de sa reconnaissance que le contrat orchestre les illusions ostensives, dans une sorte de jeu du montré-masqué, mais qui, à terme, permettront à l'élève de s'inscrire à part entière dans cette communauté. Les professeurs, comme les élèves, ont besoin à la fois de certitude et d'illusion ; sans cela les premiers ne pourraient pas enseigner et les seconds ne pourraient pas apprendre. Comme j'ai pu l'écrire par ailleurs à propos de l'ostension, elle est probablement au nœud même de ce qui à la fois désenchante les professeurs, par faiblesse du 'montrer', et nourrit l'espoir et l'attente de l'élève par la force et le désir du 'caché'.

Conclusion

Ce cadre anthropo-didactique témoigne je crois de la vitalité de la théorie des situations en tentant de domestiquer, dans d'autres champs que celui où elle s'est développée, des phénomènes se situant au croisement des champs didactique et anthropologique. Cette approche n'a pas la prétention de valoir pour l'action dans toutes les formes qu'elle peut prendre, ni même pour l'action didactique en général, mais vise simplement à décrire celle qui consiste à enseigner des mathématiques en vue de mettre à jour les raisons de l'inégale distribution des sensibilités attachées à l'indicibilité de ce qui doit être appris. J'ignore si ce cadre peut s'étendre à d'autres territoires de l'enseignement, j'en doute fortement. Car les tribus, les coutumes, langages, formes de vie des mathématiciens ne ressemblent en rien à celles des biologistes, à celles des physiciens ou des sportifs, ou à celles des poètes. Je crois même que l'effacement de leurs différences par les amalgames, régulièrement faits entre les enseignements des diverses disciplines (« L'étude des pratiques enseignantes », « Le rapport au savoir » au singulier qui plus est, etc., etc.), sont dommageables à une anthropologie de l'école et, conséquemment à la formation des professeurs. En tout cas, dans les recherches réalisées ou en cours, ce cadre anthropo-didactique n'a pas été mis en défaut et a été même assez productif, et j'invite le lecteur curieux de ces productions (empiriques) à consulter quelques références de travaux, présentés en complément de la bibliographie, qui, par manque de place, n'ont pas pu être présentés ici.

Bibliographie

- Bourdieu P. (1979). – *La distinction* : critique sociale du jugement. Paris : Les Editions de Minuit. 669 p.
- Bourdieu P. (1997). – *Méditations pascaliennes*. Paris : Seuil. 316 p. coll. Liber.
- Bourdieu P., Passeron J.-C. (1980). *La reproduction* : éléments pour une théorie du système d'enseignement, Paris : Les Editions de Minuit. 279 p.
- Bouveresse J. (1987). – *La force de la règle*. Minuit, 1987, p. 69-85.
- Bouveresse J. (1986). – Le 'Paradoxe de Wittgenstein' ou comment peut-on suivre une règle ? *SUD*, 16. 11-56.
- Bouveresse J., (1982). – L'Animal Cérémoniel : Wittgenstein et l'Anthropologie, In L. Wittgenstein, *Remarques sur le rameau d'or de Frazer*. Editions de l'Age d'Homme. 39-124, coll. Le Bruit du Temps.
- Brousseau G. (1998). – *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage, 1998, 395 p., coll. Recherches en didactique des mathématiques.
- Chevallard Y. (1994). – Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques », in M. Artigue et col. (eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* : Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud, Grenoble : La Pensée Sauvage, 1994, p. 311-320.
- Chevallard Y., Johsua M.-A. (1991). – *La transposition didactique* : du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble : La pensée sauvage, 240 p.
- Conne F. (1999). – Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne, F. Conne (dir.). – *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Presses de l'Université de Montréal. 31-69.
- Flavell J.H. (1985). – Le développement métacognitif. [traduit de l'américain par M. Leveille] In J. Bideaud, M. Richelle (eds), *Psychologie développementale* : problèmes et réalités. Bruxelles : Mardaga, 29-42.
- Julo J. (1995). – *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques* : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement, Rennes : PUR. 255 p. coll. Psychologies.
- Kripke S. (1996). – *Règles et langage privé* : introduction au paradoxe de Wittgenstein. Paris : Seuil. 170 p.
- Laugier S. (1998). – Communauté, tradition, réaction, *Critique*, 610, 13-38.

- Sarrazy B. (2005) – Questions à la théorie anthropologique du didactique du point de vue de la théorie des situations et de l'anthropologie wittgensteinienne. *Actes du Premier Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique. Société, École et Mathématiques : Apports de la TAD*. Baeza (Jaén – Espagne) du 27 au 30 octobre 2005
- Schmitz F. (1988). – *Wittgenstein et la philosophie des mathématiques*. Paris : PUF. 281 p. coll. Philosophie d'aujourd'hui.
- Schubauer-Leoni M.-L. (1988). – Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement, *Interactions didactiques*. Université de Neuchâtel. 8. 63-75.
- Searle J.R. (1985). – *L'intentionnalité : essai de philosophie des états mentaux*. Paris : Minuit. 344 p., coll. Propositions.
- Searle J.R. (1992). – *La redécouverte de l'esprit*. Paris : Gallimard. 353 p., coll. NRF.
- Wittgenstein L. (1992). – *Les Cours de Cambridge 1932-1935*. Mauvezin : Trans-Europ-Repress, 267 p., coll. T.E.R. bilingue
- Wittgenstein L. (1961). – *Tractatus logico-philosophicus* (Suivi des *Investigations philosophiques*). Paris : Gallimard, 364 p., coll. TEL.
- Wittgenstein L. (1970). – *Fiches*. Paris : Gallimard, 184 p., Bibliothèque des Idées.
- Wittgenstein L. (1976). – *De la certitude*. Paris : Gallimard, 152 p., coll. TEL.
- Wittgenstein L. (1982). – *Remarques sur le rameau d'or de Frazer* : suivi de J. Bouveresse, « L'Animal Cérémoniel : Wittgenstein et l'Anthropologie ». s.l. : Editions de l'Age d'Homme. 124 p. coll. Le Bruit du Temps.
- Wittgenstein L. (1983). – *Remarques sur les fondements des mathématiques*. Paris : Gallimard, 351 p., coll. Bibliothèque de Philosophie.
- Wittgenstein L. (1994). – *Remarques sur la philosophie de la psychologie* (II). – [Traduit de l'allemand par G. Granel]. Mauvezin : Trans-Europ-Repress, 142 p., coll. T.E.R. bilingue.
- Wittgenstein L. (1996). – *Le Cahier bleu et le Cahier brun*. Paris : Gallimard, 1951, 313 p., NRF.

Compléments bibliographiques

- Chopin M.-P. (2005). – L'hétérogénéité : quels critères, quelles fonctions ? Actes de la XIIIe Ecole d'été de didactique des mathématiques. 17-26 août 2005 – Ste Livrade. Ateliers (3) du Thème 2 Etude d'une question vive : Différenciations et hétérogénéités.

- Chopin M.-P. (2006). – Spécificité personnelle et spécificité didactique. Le cas de l'enseignement des mathématiques aux élèves faibles de classes ordinaires. Communication pour le colloque EMF 2006 (Espace Mathématique Francophone). Thème 7 : « Enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques ou dans des contextes difficiles. » 27-31 mai 2006, Sherbrooke (Québec).
- Chopin M.-P. (2006). – Temps d'enseignement et Temps didactique. Intérêt d'une approche didactique de la question du temps dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école élémentaire. *Carrefours de l'Education*. N° 21
- Clanché P. (2000). – Anthropologie de l'éducation et didactique des mathématiques : pour une anthro-pédagogie, 3^e colloque international *Recherche(s) et formation des enseignants*. Marseille (à paraître).
- Clanché P., Sarrazy B. (2002). – Approche anthro-pédagogie de l'enseignement d'une structure additive dans un cours préparatoire kanak. *Recherches en didactique des mathématiques*. 22.1. 7-30.
- Marchive A. (2002). – Comment s'instaurent les règles de la vie scolaire ? Ethnographie d'une rentrée en classe de cours préparatoire. *Revue Française de Pédagogie*. (Soumis).
- Marchive A. (2002b). – Maïeutique et didactique. L'exemple du Ménon, *Penser l'éducation*. (Sous presse).
- Marchive A. (2003). – D'Emile à Gaël. Situation, dévolution, contrat chez Rousseau et Brousseau, *Autour de la théorie des situations*. [Actes du Colloque International Guy Brousseau], Grenoble : La Pensée Sauvage. (A paraître).
- Marchive A. (2007). – La pédagogie à l'épreuve de la didactique : approche historique, recherches empiriques et perspectives théoriques. Presses Universitaires de Bordeaux (A paraître).
- Sarrazy B. (1997). – Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta-cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 17/2. 135-166.
- Sarrazy B. (2001). – Les interactions maître-élèves dans l'enseignement des mathématiques : Contribution à une approche anthro-pédagogie des phénomènes d'enseignement. *Revue Française de Pédagogie*. 136. 117-132.
- Sarrazy B. (2002). – Effects of variability on responsiveness to the didactic contract in problem-solving among pupils of 9-10 years. *European Journal of Psychology of education*. XVII. 3. (sous presse).

- Sarrazy B. (2002). – Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers. (Dordrecht. Boston. London). 49. 89-117.
- Sarrazy B. (2002). – Pratiques d'éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l'enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans. *Revue Internationale de l'Education Familiale*. (sous presse).
- Sarrazy B., Roiné C. (2006). Du déficient léger à l'élève en difficulté : des effets de la différenciation structurelle sur différenciation didactique. Cas des interactions didactiques dans l'enseignement de l'arithmétique à l'école primaire. *Actes du colloque Espace Mathématiques Francophone*, Sherbrooke. (A paraître).

L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite

Faïza Chellougui

Faculté des sciences de Bizerte- Tunisie

Introduction

L'objectif de notre travail est de montrer la nécessité d'un enseignement explicite des éléments de logique, en particulier les quantificateurs universel et existentiel, pour pouvoir conduire un raisonnement mathématique pertinent.

Dans la classe de mathématique, l'essentiel du discours mathématique est porté par la langue vernaculaire, et par un langage mixte qui incorpore des symboles mathématiques. En début d'université, on introduit le symbolisme logique : $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$ et $\exists$, ce qui permet d'écrire des énoncés entièrement formalisés. Cette introduction qui devrait contribuer à la clarification conceptuelle des notions mathématiques étudiées, et fournir des outils opératoires dans la conduite des raisonnements mathématiques, engendre des difficultés résistantes chez un grand nombre d'étudiants.

Nos questions de recherche se déclinent selon deux points de vue :

- Du point de vue épistémologique :

Quels sont les apports d'une théorie de la quantification pour analyser les raisonnements mathématiques, en particulier pour le contrôle de la validité pour le chercheur en didactique ?

Plus précisément, pour appréhender les difficultés d'appropriation d'un concept mathématique par les étudiants, est-il possible de montrer l'intérêt de la prise en compte d'une analyse fine de sa structure logique ?

- Du point de vue didactique :

Quel rôle joue la quantification dans l'élaboration effective d'un raisonnement mathématique par les étudiants de premier cycle universitaire ?

Cette question se décline elle-même en une sous question qui est explorée au cours de ce travail : l'explicitation de la quantification favorise-t-elle la production d'un argument mathématique pertinent ? Si oui, comment le mettre en évidence ?

Pour apporter des éléments de réponses à ces questions, nous adoptons les trois hypothèses de recherche suivantes :

Hypothèse 1 : L'explicitation des éléments de logique, au début de l'année, ne suffit pas à traiter les difficultés des apprenants.

Hypothèse 2 : En général, la complexité du concept de quantification n'est pas explicitement prise en charge par les enseignants.

Ces deux premières hypothèses fondent notre travail dans sa dimension didactique, en nous conduisant à étudier la place et le rôle des questions de quantification au cœur même de l'activité mathématique des étudiants, en relation avec le niveau de complexité de la structure logique des énoncés en jeu.

Hypothèse 3 : Les étudiants scientifiques de première année universitaire maîtrisent la plupart des raisonnements classiques faisant appel seulement aux caractères propositionnels, à savoir le Modus Ponens¹ et le Modus Tollens².

Cette hypothèse s'appuie sur le fait que les étudiants répondent majoritairement de manière correcte lorsque les raisonnements en jeu mobilisent essentiellement les deux règles d'inférence du calcul propositionnel, à savoir le Modus Ponens et le Modus Tollens.

Cadre théorique : Premiers éléments d'analyse didactique

Pour répondre à ces questions, notre recherche repose sur des travaux antérieurs en didactique des mathématiques qui montrent la pertinence du calcul des prédicats pour analyser les énoncés mathématiques et l'intérêt de la déduction naturelle dans l'analyse *a priori* des raisonnements mathématiques, ce qui relève des inférences logiques et des arguments mathématiques ; ceci nous a conduit à mettre en place des outils d'analyse didactique.

Usage du formalisme en mathématique

Les éléments de fondements théoriques que nous proposons dans l'exposé porteront sur quelques notes sur l'usage du formalisme en mathématique. Selon Blanché (1968) : « Le

¹ Si $(p \Rightarrow q \text{ et } p)$ alors q .

² Si $(p \Rightarrow q \text{ et non } q)$ alors $\text{non } p$.

symbolisme n'a d'intérêt logique que dans la mesure où il est lié à la création d'une langue artificielle. »

Pour cela, nous avons centré notre étude sur un concept travaillé dans l'enseignement supérieur et dont la structure logique est complexe ; il s'agit de la notion de continuité.

Le choix du concept de continuité est basé d'une part, sur le fait que dans l'enseignement tunisien, la continuité est un objet mathématique enseigné au lycée et repris à l'université, d'autre part, sur le fait que bien que cette notion fasse intervenir un nombre important de variables liées, sa structure logique est relativement simple car tous les quantificateurs sont en tête de la formule. En se référant à Schwartz (1991), nous proposons la définition de continuité de la manière suivante :

$$(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) [(|x - a| \leq \eta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon]$$

Ici, il y a trois quantificateurs universels et un quantificateur existentiel en troisième position. La portée de ces quantificateurs sur l'implication est entre crochets. L'étude proposée ici concerne la définition de cette notion telle qu'on la trouve dans plusieurs ouvrages mathématiques de première année d'université section scientifique. L'analyse de ces manuels a fait apparaître plusieurs phénomènes, nous présentons dans ce qui suit un des phénomènes repérés. Il s'agit de l'implication *versus* quantification bornée.

Dans un manuel, Chambadal & Ovaert (1966) définissent la limite finie d'une fonction en un point fini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{« -Si } x_0 \text{ est fini, pour que } f \text{ tende vers } l \text{ lorsque } x \text{ tend vers } x_0, \text{ il faut et il suffit} \\ &\text{que : } \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* : \forall x \in A, |x - x_0| \leq \eta \text{ et } x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon. \text{ »} \end{aligned}$$

Un lecteur débutant pourrait se demander d'où vient l'implication qui apparaît.

Dans un autre manuel d'analyse de première année scientifique, Guégand & Gavini, (1995) définissent la continuité d'une fonction de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{« } f \text{ continue en } a \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha], |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon. \text{ »} \end{aligned}$$

Le lecteur débutant pourrait se demander où est passée l'implication.

Ce jeu d'apparition/disparition de l'implication qui, dans ces deux ouvrages n'est pas commenté, est mis en relation avec la pratique mathématique de la quantification bornée.

La quantification bornée consiste à restreindre le domaine de quantification sur les éléments qui vérifient l'antécédent (Durand-Guerrier, 2003). Ce type de quantification, fréquent en mathématique, est absent dans le calcul des prédicats. Par exemple l'écriture

mathématique : $\forall x \in A \ F(x)$, se traduit dans le calcul des prédicats par $\forall x (x \in A \Rightarrow F(x))$, si bien que la quantification bornée « cache » l'implication.

Conclusion

- 1- Les formalisations logico-mathématiques proposées pour les définitions de la continuité, de la limite et de la discontinuité sont différentes d'un manuel à l'autre.
- 2- Dans certaines expressions, nous avons repéré la présence de la quantification bornée ; sa pratique engendre un phénomène d'apparition/disparition de l'implication et de la quantification qui produit des écritures non conformes à la syntaxe logique, et qui génèrent de l'ambiguïté.
- 3- Il semble y avoir une illusion de transparence sur le passage du langage vernaculaire à l'écriture relativement formalisée, dans la mesure où ce passage est peu, voire pas, travaillé.

Référence classique en didactique des mathématiques

En continuité du cadre théorique, nous présentons une référence classique en didactique des mathématiques. Il s'agit de Dubinsky et Yiparaki (2000) qui ont mené un travail sur la compréhension par des étudiants scientifiques des énoncés du type AE et EA donnés en langue naturelle. En particulier ils cherchent à savoir si la différence de syntaxe est considérée ou non.

AE : désigne les formulations du type : "Pour tout... il existe...". Il s'agit des énoncés de la forme : $(\forall x) (\exists y) R(x, y)$, où R est une relation binaire.

EA : désigne les formulations du type : "Il existe... pour tout...". Il s'agit des énoncés de la forme : $(\exists c) (\forall d) S(c, d)$, où S est une relation binaire.

Ce travail a mis en évidence la tendance des étudiants à interpréter systématiquement les énoncés comme AE. L'étude a montré, en outre, certaines difficultés pour interpréter et distinguer ces énoncés dans un contexte mathématique et non mathématique.

Selon les auteurs, les étudiants sont beaucoup plus capables de traiter les énoncés non mathématiques que les énoncés mathématiques. En effet, pour les énoncés mathématiques : il y a une mauvaise gestion des quantificateurs et une interprétation non pertinente des énoncés AE et EA.

Première expérimentation : présentation, catégorisation élaborée et résultats

Les éléments du cadre théorique nous ont permis de mettre en place une première expérimentation sous forme d'un test écrit en élaborant une grille d'analyse pour organiser les résultats recueillis. Nous présentons dans la suite notre première expérimentation, notre catégorisation élaborée et quelques résultats.

Présentation :

L'objectif de cette expérimentation est de :

- ✓ examiner la question de l'articulation entre logique et mathématique dans les productions écrites des étudiants
- ✓ analyser la manière dont les étudiants mobilisent le formalisme en particulier l'introduction et la gestion de la quantification,
- ✓ déterminer les difficultés, *a priori*, qui pourraient être engendrées suivant le niveau de formalisme, l'économie du langage symbolique, les moments où il est indispensable d'utiliser les quantificateurs, etc.

Notre expérimentation, se présente sous forme d'un test écrit proposé aux étudiants tunisiens de la première année de la section Mathématiques-Informatique (MI₁) de la faculté des sciences de Bizerte, à la fin du premier semestre de 2001/2002. Ce test est composé de trois exercices classiques, concernant principalement les capacités en matière d'usage du formalisme, et est élaboré d'une part en fonction d'erreurs fréquemment rencontrées et, d'autre part, en tenant compte du fait que les connaissances mathématiques utilisées ne soient pas trop complexes. Nous avons recueillis 96 copies.

Pour analyser ces copies, nous avons retenus neuf variables candidates à être des variables didactiques dont nous présentons les plus importants :

- La position des quantificateurs dans un énoncé ; cette variable permet de tester si la position des quantificateurs au début ou à l'intérieur de la phrase a des conséquences sur la démarche démonstrative.
- La présence des deux types de quantificateurs : universels et existentiels, sous la forme AE ou EA ;
- La nature de la quantification (explicite ou implicite) ; cette variable permet de déterminer la conduite d'un raisonnement mathématique chez les étudiants en fonction de l'apparition

ou non de la quantification. Nous examinons cependant si la portée ou non des quantificateurs a un effet sur la forme sémantique de l'énoncé.

- La forme langagière des connecteurs et des symboles logiques ; cette variable permet de repérer le vocabulaire logico-mathématique employé dans les formulations proposées.

Dans notre travail, nous n'avons retenu que le premier exercice qui est le suivant :

On munit l'ensemble $\mathbb{N}^*$ de la relation $\mathfrak{R}$ définie par :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = q.$$

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre.

Dans cet exercice, il y a la présence des symboles logiques traduisant les quantificateurs universels et existentiels.

La structure logique de la relation donnée est complexe, elle fait intervenir deux quantificateurs universels en tête de formule et un quantificateur existentiel à l'intérieur de la formule. Nous avons fait le choix d'accepter ce type de formulation pour les étudiants qui la produisaient.

En toute rigueur, pour que la syntaxe logique soit correcte, il est nécessaire de placer des parenthèses pour indiquer la portée des quantificateurs. Suivant l'habitude dans la classe mathématique, l'absence des parenthèses indique que l'équivalence était dans le champ du quantificateur universel.

La question en elle-même se répartit suivant trois propriétés, il s'agit de montrer en effet que :

($\mathfrak{R}$ est réflexive), ($\mathfrak{R}$ est antisymétrique) et ($\mathfrak{R}$ est transitive)

Nous rappelons les trois définitions en prenant dans le cas général une relation binaire $\mathfrak{R}$:

Réflexivité : $\forall p \quad p \mathfrak{R} p$

Formulation comportant une quantification universelle simple.

Antisymétrie : $\forall p \quad \forall q \quad (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p = q)$

Formulation comportant une quantification universelle double.

Transitivité : $\forall p \quad \forall q \quad \forall s \quad (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} s \Rightarrow p \mathfrak{R} s)$

Formulation comportant une quantification universelle triple.

Il est important d'analyser de plus près l'introduction et l'élimination de ces quantificateurs pour mettre en évidence l'articulation entre logique et mathématique et pour pouvoir anticiper les difficultés que pourraient rencontrer les étudiants.

Cet exercice nous a fourni des données riches et conséquentes sur la question centrale de notre travail concernant l'utilisation des quantificateurs, entre usage explicite et implicite, dans l'activité mathématique.

Catégorisation élaborée des réponses

La richesse et la variété des formulations produites par les étudiants nous a conduit à élaborer une grille d'analyse suivant deux axes, mettant en relation la logique et les mathématiques d'une part, et la logique et le langage d'autre part.

Premier axe :

Le premier axe comporte trois niveaux : le premier niveau est ordonné suivant la présence ou l'absence des deux types de quantificateurs

Premier niveau : Apparition des quantificateurs universel et existentiel

Nous avons classé les formulations suivant trois catégories :

Catégorie n°1 : Présence explicite des deux types de quantification (Q2)

Catégorie n°2 : Présence explicite d'un seul type de quantification (Q1)

Catégorie n°3 : Absence totale d'un marqueur explicite de quantification (Q0)

Chacune des trois catégories est ramifiée suivant la présence ou l'absence d'un argument mathématique pertinent même s'il y a des erreurs de syntaxe logique, ce qui donne lieu au deuxième niveau :

Deuxième niveau : Argument mathématique

Ici, les formulations sont classées suivant deux catégories.

Catégorie n°1 : Présence d'un argument mathématique (AM)

Catégorie n°2 : Absence totale d'un argument mathématique ($\neg$ AM)

Dans le cas où cet argument est présent nous déterminons s'il y a une articulation entre logique et mathématique ou non, d'où le :

Troisième niveau : Articulation entre logique et mathématique :

Ce niveau est mis en place lorsque nous marquons, d'une part, la présence d'au moins un quantificateur dans le premier niveau, et d'autre part, la présence de l'argument mathématique dans le second niveau. Ce qui nous intéresse, c'est de regarder comment cette articulation va trouver sa place dans un raisonnement mathématique.

D'autre part, si l'argument mathématique est présent sans faire intervenir dans la formulation des éléments de logique, alors nous déclarons qu'il y a absence totale d'une

articulation entre logique et mathématique. Ainsi, nous avons classé ce niveau suivant deux catégories :

Catégorie n°1 : Présence d'une articulation entre logique et mathématique (ALM)

Catégorie n°2 : Absence d'une articulation entre logique et mathématique ($\neg$ ALM)

Ce premier axe peut-être résumé suivant des triplets ou des couples selon que la réponse présente ou non un argument mathématique. Nous formons ainsi, huit catégories qui sont les suivantes :

C1= (Q2,AM,ALM)	C4= (Q1,AM,ALM)	C7= (Q0,AM)
C2= (Q2,AM, $\neg$ ALM)	C5= (Q1,AM, $\neg$ ALM)	C8= (Q0, $\neg$ AM)
C3= (Q2, $\neg$ AM)	C6= (Q1, $\neg$ AM)	

Deuxième axe

Cet axe concerne le langage utilisé dans chaque type de formulation produite. Nous distinguons les types de langages suivant trois niveaux :

Premier niveau : Langage formalisé

Nous distinguons deux catégories suivant la pertinence de la formulation du point de vue syntaxe logique.

Catégorie n°1 : Syntaxe logique correcte (L1)

Catégorie n°2 : Syntaxe logique incorrecte (L2)

Deuxième niveau : Langage mixte (L3)

Il contient à la fois des éléments du langage formalisé et des mots de la langue (donc, on a, avec...).

Troisième niveau : Langage vernaculaire (L4)

Dans ce niveau, tout est écrit en langage non formalisé à l'exception des symboles mathématiques.

Grille d'analyse

La prise en compte de nos deux axes d'analyse nous ont permis de construire un tableau à double entrée : une entrée verticale de la catégorisation du premier axe de l'articulation entre logique et mathématique, et une entrée horizontale, de la catégorisation du second axe de l'articulation entre logique et langage.

Dans ce document, nous présentons les résultats relatifs à la propriété de l'Antisymétrie :

$$\forall p \forall q (p \mathfrak{R} q \wedge q \mathfrak{R} p \Rightarrow p = q).$$

Rappelons que : $\mathfrak{R}$ est définie par : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \quad p^n = q$.

Dans cette question, les étudiants ont à manipuler les deux types des quantificateurs universel et existentiel.

En analysant les réponses des étudiants selon les différentes catégories élaborées auparavant, nous avons obtenu le tableau suivant :

Tableau-Antisymétrie-

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	Total	%
L1	3		15			5			23	28,75
L2			5			24		8	37	46,25
L3			5		2	9		2	18	22,5
L4								2	2	2,5
Total	3	0	25	0	2	38	0	12	80	
%	3,75	0	31,25	0	2,5	47,5	0	15		

Comme l'indique le tableau, il n'y a aucune réponse correspondant aux catégories codées respectivement en C2, C4 et C7.

Nous pouvons lire qu'il y a 28 réponses utilisant les deux quantificateurs (Q2), 40 utilisant un seul type de quantificateur (Q1) et 12 ne proposant aucune quantification. Nous constatons également que seuls 5 étudiants fournissent un argument mathématique pertinent (3 dans C1=(Q2,AM,ALM) et 2 dans C5=(Q1,AM,¬ALM)). Ceci, chaque fois que l'étudiant écrit ce qui permet de discuter suivant les valeurs des entiers non nuls n et m l'équation " $p^m = p$ "; c'est-à-dire à chaque fois que nous trouvons " $n = 1$ et $m = 1$ ".

Analyse suivant le premier axe

- La catégorie la plus représentée correspond à C6, où on trouve 38 réponses utilisant un seul quantificateur avec absence d'un argument mathématique (47,5%). Nous illustrons par l'exemple suivant :

Copie1 : « $\left. \begin{array}{l} p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q \\ q \mathfrak{R} p \Leftrightarrow q^n = p \end{array} \right\} \Rightarrow p = q$ »

Ici, il y a un usage erroné des variables et la justification de l'antisymétrie est formellement incomplète.

- Seuls 5 étudiants fournissent un argument mathématique correct : 3 dans C1=(Q2,AM,ALM) et 2 dans C5=(Q1,AM,-ALM). Voici un exemple en (C5,L3) :

Copie2 : « $\exists \alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^\alpha = q$ et $\exists \beta \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^\beta = p \Rightarrow \begin{cases} p^\alpha = q \\ q^\beta = p \end{cases}$
 $\Rightarrow p^{\alpha\beta} = p \Rightarrow \alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 1$. Donc $p = q$ »

Il n'y a pas ici de quantification universelle introduisant les deux variables p et q , l'argument mathématique est bien justifié. Il y a très peu de copies pour lesquelles apparaissent, de manière aussi claire, une articulation entre logique et mathématique. Le langage mixte semble permettre une meilleure articulation.

Analyse suivant le second axe

- La catégorie la plus représentée correspondant à L2 : 46,25%, la syntaxe logique est largement utilisée, présence d'une syntaxe logique non contrôlée et dans chaque cas, absence d'une connaissance mathématique adaptée. En voici un exemple de (C6,L2) :

Copie3 : « $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*; \left. \begin{array}{l} p \mathfrak{R} q \Leftrightarrow p^n = q \\ q \mathfrak{R} p \Leftrightarrow q^n = p \end{array} \right\} \Rightarrow p = q$ »

- Pour L3, le pourcentage correspondant est de 22,5%, réparti sur les catégories C3=(Q2,-AM), C5=(Q1,AM,ALM), C6=(Q1,-AM) et C8=(Q0,-AM) du premier axe. Cependant, seulement deux copies, classées dans C5 contiennent un argument mathématique. Le langage mixte semble permettre une articulation par les étudiants, ceci permet dans certains cas de renforcer le raisonnement conduit pour déduire le résultat. Par exemple :

Copie4 : « Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$; $\begin{cases} x \mathfrak{R} y \Rightarrow x^n = y \\ y \mathfrak{R} x \Rightarrow y^n = x \end{cases}$ Pour $n = 1$ on a $x = y$ et $y = x$ »

Choix des variables dans le champ du quantificateur existentiel

Pour affiner plus notre analyse, nous avons établi une autre catégorisation pour le choix des lettres dans l'utilisation des énoncés existentiels selon deux catégories.

- Première catégorie : Réponses pour lesquelles la variable, dans le champ du quantificateur existentiel, est désignée par deux lettres différentes. (17 copies)

$$\text{Copie5 : } \langle \forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2 \left\{ \begin{array}{l} x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / x^n = y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} x \Leftrightarrow \exists n' \in \mathbb{N}^* / y^{n'} = x \end{array} \right. \Rightarrow x^n = y^{nn'} = y \Leftrightarrow x = y \rangle$$

$$\text{Copie6 : } \langle \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*; \left\{ \begin{array}{l} p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \\ \quad n = m \\ \quad p^n = q \\ q \mathcal{R} p \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \\ \quad m = n \\ \quad q^m = p \end{array} \right. \Rightarrow n = m \Leftrightarrow p = q \rangle$$

Pour la copie n°5, l'argument mathématique est absent : il n'y a pas de justification mathématique pour l'égalité des deux entiers "x" et "y".

Pour la copie n°6, bien que les deux variables introduites existentiellement soient différentes, le sujet a immédiatement construit chacune d'elles de telle sorte qu'elles soient égales. Dans une telle situation, il nous semble cependant que l'on peut penser que le sujet interprète l'existence comme une construction d'objet auquel il attribue une valeur choisie pour satisfaire la validité de l'énoncé. Ou peut être, il pense que l'égalité est nécessaire.

- Deuxième catégorie : Réponses pour lesquelles la variable, dans le champ du quantificateur existentiel, est désignée par la même lettre.

Cette catégorie est elle-même subdivisée en deux sous-catégories suivant le cas où :

Le quantificateur existentiel est écrit, nous avons rencontré (27 copies)

$$\text{Copie7 : } \langle \forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \left\{ \begin{array}{l} p \mathcal{R} q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* p^n = q \\ q \mathcal{R} p \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* q^n = p \end{array} \right. \text{ Pour } n = 1 \text{ } p = q \rangle$$

Il y a la présence des deux quantificateurs, le sujet cherche à construire l'objet "n" introduit existentiellement de telle sorte d'avoir la conclusion. Ainsi, pour vérifier la propriété de l'antisymétrie et avoir l'égalité " $p = q$ ", le sujet fait correspondre à l'entier n la valeur "1" qui résout bien l'équation " $p^n = q$ " d'inconnue "n".

Le quantificateur existentiel n'est pas écrit, nous avons rencontré (36 copies)

$$\text{Copie8 : } \langle \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^* ; \left. \begin{array}{l} p \mathcal{R} q \Leftrightarrow p^n = q \\ q \mathcal{R} p \Leftrightarrow q^n = p \end{array} \right\} \text{ donc } p = q \rangle$$

La variable "n" n'est pas introduite. Il y a une mobilisation non déclarée de l'existence et de la valeur de "n". Nous pensons que le sujet a écrit directement la conclusion " $p = q$ " pour avoir l'antisymétrie. Ou bien, les deux équations " $p^n = q$ " et " $q^n = p$ " permettent de voir que "n" vaut "1" et de déduire l'égalité.

Résultats

Cette étude a montré que la présence des deux quantificateurs engendre des difficultés de construction d'un objet mathématique, et d'articulation entre logique et mathématique.

Les ambiguïtés relevées correspondent à une difficulté liée à une pratique du quantificateur universel qui est, soit implicite, soit absent d'une part, et à l'introduction du quantificateur existentiel pour produire un objet mathématique d'autre part.

Cette étude a montré également, une insuffisance de la part d'un nombre important d'étudiants, du contrôle des aspects syntaxique et sémantique d'une structure mathématique.

Approfondissement du questionnement didactique autour d'un concept mathématique

A l'issue de ces premiers résultats, nous avons décidé d'approfondir notre étude didactique en recentrant nos analyses sur l'alternance des deux types de quantificateurs avec un mode de recueil des données plus précis. Pour cela, nous avons choisi une notion mathématique sensible et archétype d'un moment d'enseignement de l'analyse, dont la définition nécessite l'usage des deux types de quantificateurs. Il s'agit d'une des toutes premières notions rencontrées en Analyse : la notion de borne supérieure. Ainsi, nous avons mise en place une deuxième expérimentation sur un concept mathématique en observant des binômes d'étudiants dans une situation de résolution d'exercices, suivie d'un entretien.

Pour finaliser cette étude, nous avons conduit une brève étude épistémologique autour de la notion de coupure de Dedekind, et nous avons repéré quelques éléments d'analyse didactique, en particulier chez Isabelle Bloch (2000), qui montre qu'il est difficile d'échapper au jeu sur les quantificateurs universel et existentiel lorsqu'on veut explicitement faire émerger un objet majorant permettant de prouver qu'une fonction donnée est majorée.

Formalisation de la notion de borne supérieure dans le calcul des prédicats

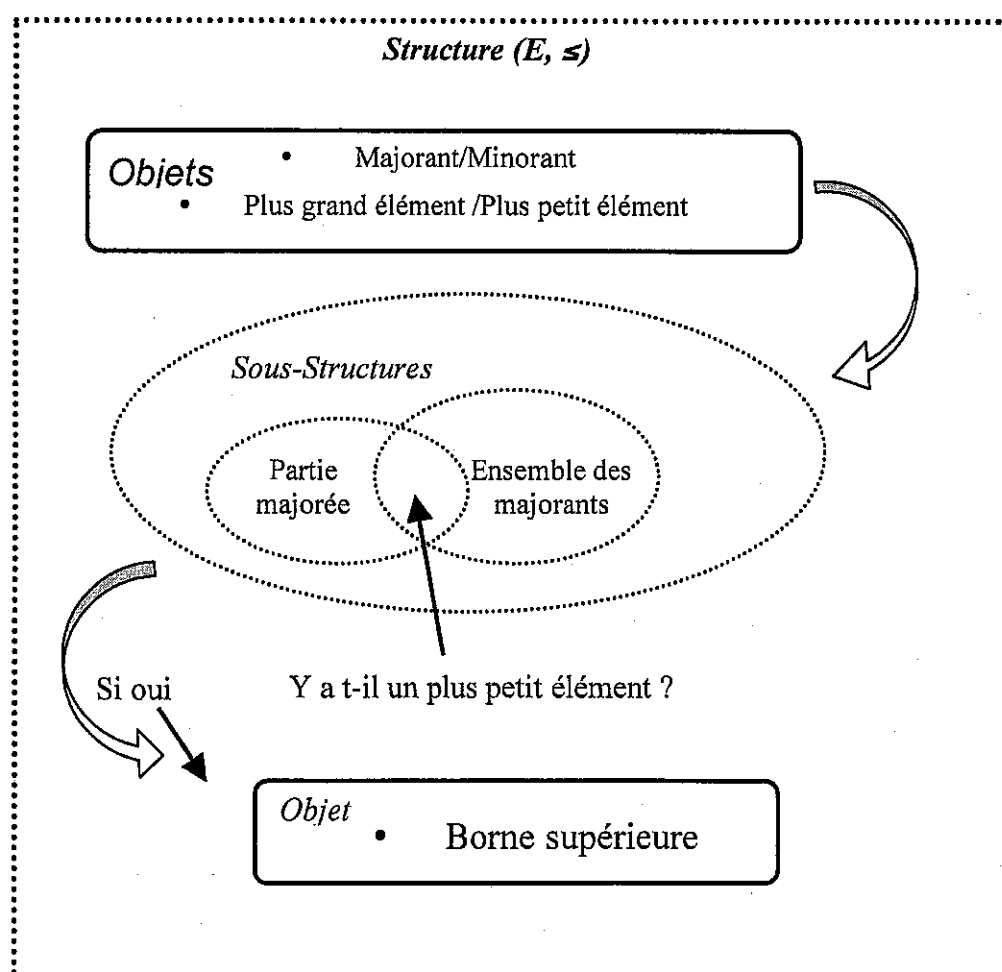
L'un des moyens pour se rendre compte de la complexité de la notion de borne supérieure est l'analyse logique de la notion de borne supérieure dans le calcul des prédicats. Nous

avons ainsi établi une formalisation et une structuration des objets et des structures mathématiques qui entrent en jeu dans la constitution du concept.

Nous avons adopté comme définition de référence celle de Schwartz (1991) qui est donnée entièrement dans un langage vernaculaire :

"On dit qu'une partie A de E admet une borne supérieure si l'ensemble de ses majorants admet un minimum, et ce minimum est appelé borne supérieure de la partie considérée. La borne supérieure est donc le plus petit majorant ; tout élément qui majore A majore aussi sa borne supérieure."

A la simple lecture de cette définition, commence à apparaître la complexité des notions en jeu. En désignant par $(E, \leq)$ un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leq$ et par A une partie de E , nous avons élaboré un cheminement vers une définition de la notion de borne supérieure présenté par le schéma suivant :



La complexité de la structuration logique de la notion de borne supérieure fait émerger la nécessité d'un formalisme opératoire. Ce que nous allons essayer de présenter dans la suite.

Formalisation des objets :

« y est un majorant de A » relation qui s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)$ où $A(x) \Leftrightarrow x \in A$, il s'agit d'une phrase ouverte en y et close en x .

« y est un plus grand élément pour A » s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $A(y) \wedge \forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)$, énoncé également ouvert. Dans le vocabulaire équivalent, cet objet est aussi désigné par l'expression « y est un maximum de A »

Formalisation des structures :

« A est majorée » s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $\exists y \forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)$.

« A admet un plus grand élément » s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : $\exists y [y \in A \wedge \forall x (A(x) \Rightarrow x \leq y)]$

Ces deux énoncés sont du type EA, ce sont deux énoncés clos³ en y et en x .

Dans le calcul des prédicats la relation « $\alpha = \sup A$ » s'exprime par l'énoncé suivant :

$$[\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq \alpha)] \wedge \forall y [(y < \alpha \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge y < x))]$$

Où nous pouvons distinguer :

$\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq \alpha)$: exprime que α est un majorant de A ;

$\exists x (A(x) \wedge y < x)$: exprime que y n'est pas un majorant de A ;

$\forall y [(y < \alpha \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge y < x))]$: exprime qu'aucun élément inférieur à α n'est un majorant de A ;

$[\forall x (A(x) \Rightarrow x \leq \alpha)] \wedge \forall y [(y < \alpha \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge y < x))]$: exprime que α est le plus petit des majorants de A .

³ Enoncé où toutes les variables sont dans le champ des quantificateurs.

Approche de la notion de borne supérieure en première année universitaire

A la suite de ce travail, nous avons mené une approche de la notion de borne supérieure en première année universitaire en analysant cinq manuels, qui servent de références aussi bien théorique que pratique pour les enseignants et les étudiants, suivant quatre entrées différentes et complémentaires qui sont les suivantes :

- Langage utilisé où nous pouvons distinguer, le langage formel, le langage mixte (muni des symboles mathématiques ou logiques) ou le langage naturel ;
- Le domaine de référence : on se situe dans une structure d'ensemble totalement ordonné, noté généralement par E , muni de la relation d'ordre générique $\leq$. Pour cela, le domaine spécifique est soit $(E, \leq)$, soit $(\mathbb{R}, \leq)$;
- Le statut des lettres apparues dans les formulations. Nous pouvons distinguer la modalité de chaque variable : explicite ou implicite ;
- La quatrième entrée permet de soulever l'apparition de l'objet *majorant* avant ou après la propriété de la structure d'être *majorée*.

D'autre part, pour cette approche, nous avons analysé des notes de cours, proposées aux étudiants dont nous admettons qu'elles servent en partie de modèle pour les enseignants chargés des cours ou des travaux dirigés, suivant les entrées précédentes et en les situant par rapport aux manuels.

Résultats

L'analyse des manuels, et des notes de cours autour du concept de la borne supérieure, a mis en relief essentiellement les points suivants :

L'objet *élément majorant* est le plus souvent défini à partir de la structure *être une partie majorée*,

Le statut des lettres est le plus souvent instable, surtout lorsqu'il s'agit de manipuler une même lettre variable,

L'existence et l'unicité des objets : *plus petit élément* et *borne supérieure* sont généralement assumées, et signalées plutôt qu'affirmées et explicitées.

Dans $\mathbb{R}$, l'objet *borne supérieure* est parfois défini avant de présenter l'axiome de la borne supérieure.

Le symbolisme logique est peu utilisé dans les manuels.

Cette analyse nous servira de référence, dans la deuxième approche didactique de notre travail, pour analyser les réponses des binômes dans une situation de résolution d'exercices.

Deuxième expérimentation

Notre deuxième expérimentation consiste à observer six binômes d'étudiants en situation de résolutions d'exercices. Cette expérimentation se déroule suivant deux étapes :

-Une première étape consiste à présenter à chaque binôme d'étudiants deux exercices à résoudre successivement suivant nos indications. Ceci nous permettra de dégager, d'une part les types d'explicitations utilisées par le binôme et, d'autre part, les difficultés rencontrées.

-La deuxième étape se décompose en deux temps :

entretien semi-directif, déroulement à partir de la première étape,

questionnement général sur l'enseignement de borne supérieure au lycée et à l'université et sur l'articulation entre la logique et les mathématiques.

L'entretien a fait apparaître plusieurs phénomènes dont nous présentons les plus importants.

Etrange définition d'un objet majorant

Le premier phénomène important concerne l'apparition d'une « étrange définition » d'un objet majorant. Suite à notre question, à savoir la définition d'un majorant, nous avons obtenu dans chacun des binômes la réponse formalisée suivante :

$$\text{« } \forall x \in A \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad x \leq M \text{ » } (1) \quad (\text{AE})$$

Dans cet énoncé, on peut remarquer d'une part l'utilisation d'un énoncé du type AE à la place d'un énoncé du type EA, et d'autre part la pratique consistant à considérer qu'affirmer l'existence introduit l'objet qui n'est pas, ici, nécessairement un majorant. Cette pratique est très présente dans les manuels et dans les notes de cours.

Difficultés dans la signification et l'usage des définitions

Le deuxième phénomène concerne l'apparition des difficultés dans la mobilisation de la définition.

Après la proposition de l'énoncé (1) (AE) par les étudiants, nous sommes intervenue en proposant l'énoncé EA correspondant :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leq M \quad (2)$$

Nous illustrons par une séquence de la transcription du binôme 1 :

1.J : Dans (1), quel que soit x appartenant à E .

2.T : Oui, on peut utiliser (1).

3.J : Non, non, quel que soit x appartenant à E , il existe M appartenant à $\mathbb{R}$.

4.T : Oui, les deux sont justes.

Il existe M appartenant à $\mathbb{R}$, quel que soit x appartenant à E , x inférieur à M .

L'écriture mathématique est différente.

Il y a une différence d'interprétation des définitions pour caractériser un majorant :

Pour l'étudiant J, il y a un rejet de l'énoncé EA et un choix de l'énoncé AE : ici, la syntaxe est porteuse de sens.

Pour l'étudiant T, les deux énoncés AE et EA gardent le même sens, bien qu'il y ait une certaine différence dans l'ordre de l'écriture des deux quantificateurs : ici, la syntaxe n'affecte pas la signification.

Nous pouvons lire plus loin dans la transcription du même binôme :

5.J : Oui, on peut ici, puisque il existe M appartenant à $\mathbb{R}$, E est inclus dans $\mathbb{R}$, et il existe M appartenant à $\mathbb{R}$.

Comme on peut le mettre à l'extérieur de E on peut le faire à l'intérieur de E .

Ici, il y a un problème d'existence qui est interprétée comme un choix. *a priori* ; dans son raisonnement, l'étudiant commence par marquer le réel M comme s'il était introduit universellement : il peut être à l'extérieur et à l'intérieur de l'intervalle.

6.T : Non, ce n'est pas un majorant, M est un majorant de E , M n'appartient pas à E .

Suivant cette réplique, il semble à nouveau y avoir dissociation entre la définition et les objets qu'elle devrait permettre de définir : la définition n'est pas perçue comme caractérisant certains objets.

7.J : Dans (1) M peut être un majorant.

Ici, l'affirmation de l'étudiant J est correcte ; par contre la formulation proposée ne joue évidemment pas son rôle de définition. En effet, l'énoncé (1) permet d'introduire un objet, qui peut être ou non un majorant de la partie considérée.

Il y a deux interprétations possibles : J veut dire que ce point M placé satisfait (1), ou bien, dans le cas où la partie est majorée, on peut choisir M de sorte qu'il vérifie (2)

On voit ici les difficultés à manipuler les définitions et les propriétés : ceci renvoie au fait de savoir ce qu'est une définition.

D'autre part, il y a une différence entre les étudiants T et J : l'étudiant T essaye de modifier la formule pour qu'elle permette de caractériser un majorant, alors que l'étudiante J accepte que la formule ne caractérise pas un majorant.

Instabilité sur le vocabulaire choisi

Certaines ambiguïtés que nous avons relevées et explicitées précédemment, correspondent au vocabulaire choisi par les étudiants. Ceci conduit à faire l'hypothèse qu'il y a un écart entre ce qui est dit par un étudiant et ce qu'il veut exprimer et expliciter. Les ambiguïtés sur le vocabulaire sont inhérentes à l'activité mathématique. De plus les expressions contenant des quantificateurs multiples génèrent de l'ambiguïté en raison même de la grammaire de la langue française. Cependant, dans notre population, les difficultés sont *a priori* renforcées par le fait que le français n'est pas la langue maternelle et qu'en outre la majorité des étudiants ont étudié les mathématiques en arabe jusqu'à la fin de l'école de base (15-16 ans).

Dans la suite, nous proposons d'étudier les difficultés liées au vocabulaire choisi par les étudiants en analysant quelques phénomènes repérés dans le binôme choisi.

8.J : $\sup$ de A plus B est inférieur ou égal à $\sup$ de A plus $\sup$ de B , donc $\sup$ de A plus $\sup$ de B est un majorant de $\sup$ de A plus B .

9.T : Et $\sup$ de A plus B est un majorant de $\sup$ de A plus $\sup$ de B .

A partir de ces deux répliques, nous pouvons formuler *a priori* ces trois hypothèses :

confusion entre l'objet borne supérieure d'un ensemble et la structure de ce même ensemble : $\sup(A+B)$ est considéré comme un ensemble $A+B$.

confusion entre un majorant et l'expression "supérieur ou égal" : traduction de "majorant" comme étant "plus grand que".

effet de la notation qui renvoie à une structure plutôt qu'à un objet. En effet, la notation *sup* est complexe et non habituelle pour désigner des objets.

Ainsi, il devient possible de comprendre qu'un étudiant, tout en disant une chose, veuille aussi dire quelque chose d'autre, non explicitement énoncé, et que son interlocuteur puisse accepter cet énoncé du fait même que ce qui est dit n'est pas explicitement signifié.

Nous pouvons aussi lire dans la suite de la même transcription :

10.Int : Bon d'accord, on va essayer de comprendre ensemble la démonstration.

Juste une petite remarque, si vous voulez montrer qu'une proposition est vraie et vous dites qu'on va démontrer par l'absurde, ça veut dire quoi ?...

11.T : Ça veut dire que c'est l'inverse.

12.J : Non, contraire.

13.T : On va trouver à la fin le contraire de ce qu'on veut démontrer.

14.Int : Bon, si vous voulez, on passe à la question suivante.

15.J : A et B sont la négation. A est la négation de B.

16.T : A est le contraire de B.

17.J : Ils sont différents.

18.Int : Est ce que vous pouvez déterminer l'intersection des deux ensembles A et B ?

19.T : L'ensemble vide, A est l'opposé de B ou B est l'opposé de A.

20.J : A est différent de B.

Dans ce bref échange, apparaît une interrogation sur le vocabulaire des oppositions (*inverse, contraire, négation, différent*).

Résultats

Les résultats obtenus confirment que la complexité de la structure logique d'un énoncé mathématique fait apparaître des difficultés dans l'usage du langage formalisé, et dans sa mise en relation avec le langage vernaculaire et avec les ostensifs graphiques, dans l'articulation des quantificateurs avec l'argument mathématique, et également dans la mobilisation des définitions et des propriétés.

A partir du moment où aucune quantification n'est mise en jeu, les étudiants s'engagent dans une démarche de preuve sans problème ; ceci conforte *a posteriori* notre troisième hypothèse de recherche selon laquelle les étudiants maîtrisent les raisonnements classiques faisant appel aux connecteurs propositionnels.

Conclusion & perspectives

Conclusion

Les résultats didactiques ont montré que le formalisme symbolique et logique ne remplit pas son rôle de clarification conceptuelle dans la population étudiée. En effet, les résultats

de la première expérimentation mettent en évidence des difficultés pour les étudiants de mobiliser de manière rigoureuse les énoncés quantifiés et en particulier ceux du type AE, d'une part, et montrent que la présence du symbolisme logique ne favorise pas la production d'un argument mathématique, d'autre part.

Egalement, dans la seconde expérimentation nous avons repéré des phénomènes didactiques et des difficultés qui sont généraux et spécifiques aux six binômes. Il s'agit principalement de la non prise en compte de l'ordre dans l'alternance des quantificateurs ; de la tendance à mobiliser prioritairement les énoncés sous la forme AE par rapport aux énoncés EA, et de la pratique courante selon laquelle l'affirmation de l'existence introduit l'objet.

L'analyse des manuels et des notes de cours montre un usage instable de la syntaxe logique concernant les questions de quantification, et laisse entrevoir que la complexité de ce concept et de ses usages est sous-estimée par les enseignants. En effet, la production par les étudiants d'une « étrange définition » de la notion de majorant nous semble en être une conséquence.

L'ensemble de ce travail illustre la nécessité de prendre davantage en compte les questions de quantification dans l'enseignement des mathématiques au niveau supérieur.

Perspectives

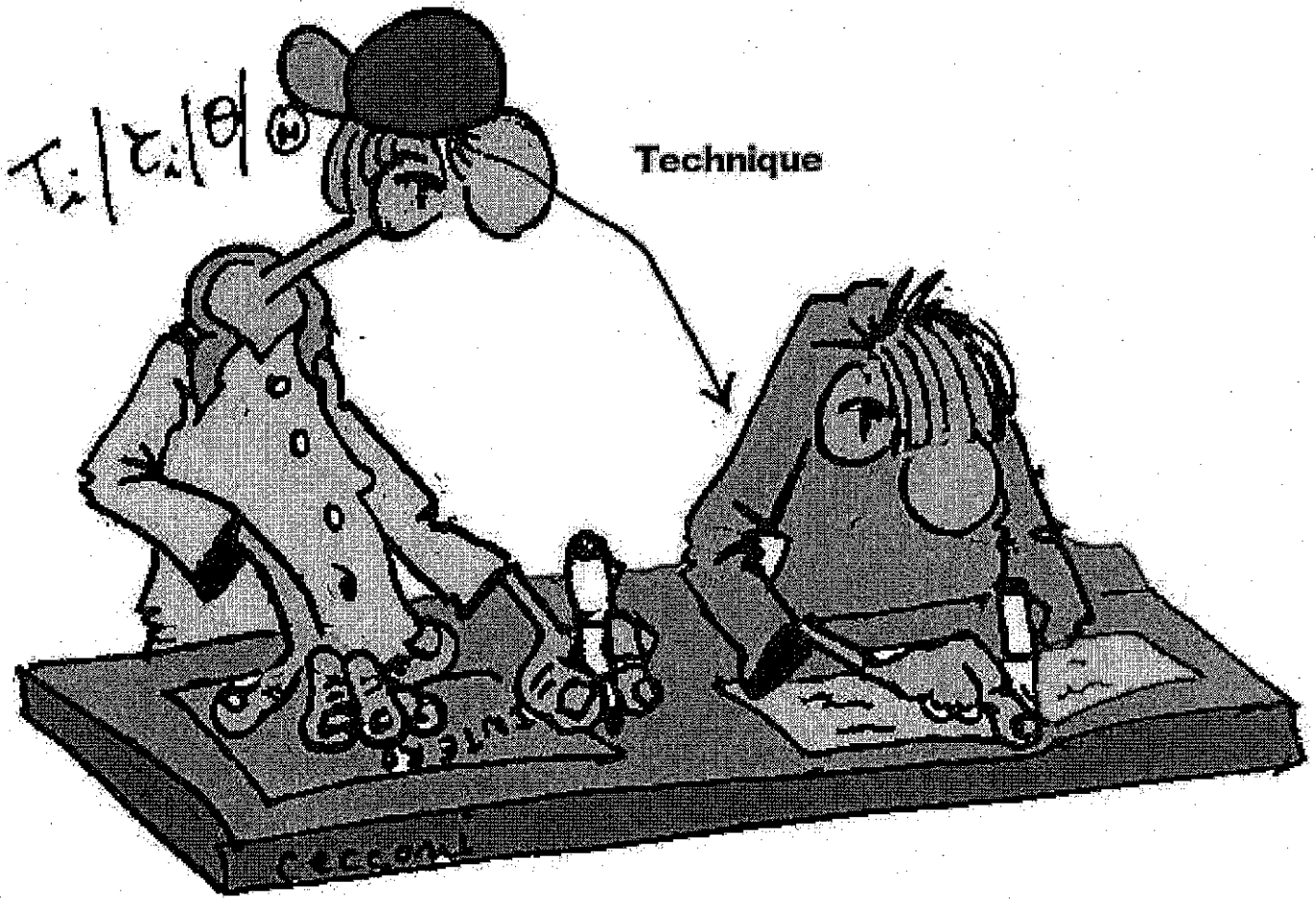
Une des pistes de recherche est d'essayer de repérer comment les modalités d'élaboration et de conceptualisation d'une notion mathématique pourraient être sensibles aux questions de quantification.

Une autre piste que nous souhaitons explorer concerne l'étude des pratiques effectives des enseignants dans l'enseignement supérieur concernant les questions de quantification, d'une part en confrontant nos analyses au regard porté par ces enseignants sur certaines productions d'étudiants, d'autre part en conduisant des observations en situation de classe - cours ou travaux dirigés - afin d'étudier comment sont gérées les questions en relation à la quantification dans l'activité mathématique.

Nous pensons cependant être en mesure de proposer un programme d'apprentissage des éléments de logique utile aux mathématiques, particulièrement la quantification, à destination des étudiants arrivant à l'université, prenant en compte explicitement la nécessité de l'articulation entre quantification et conceptualisation, et pouvoir en évaluer les effets.

Bibliographie

- BLANCHE R. (1968), *Introduction à la logique contemporaine*, Armand Colin, Paris.
- BLOCH I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.
- CHELLOUGUI F. (2004), L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite, Thèse de doctorat en co-tutelle entre Lyon1 et Tunis, soutenue à l'Université Claude Bernard Lyon1.
- CHAMBADAL L. & OVAERT J-L., (1966), *Cours de mathématiques*, Tome1 : notions fondamentales d'algèbre et d'analyse, Paris, Gauthier-Villars.
- DUBINSKY E & YIPARAKI O. (2000), On student understanding of AE and EA quantification, *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, CBMS Issues in Mathematics Education, 8, pp.239-289. American Mathematical Society: Providence.
- DURAND-GUERRIER V. (2003), Which concept of implications is the right one? From logical considerations to has didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics*, n°53, pp.5-34, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- DURAND-GUERRIER V. & ARSAC G. (2003), *Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques : Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.23, n°3, pp.295-342. La Pensée Sauvage Editions.
- GUEGAND J. & GAVINI J-P. (1995), *Analyse : prépa H.E.C ; Scientifique-1^{ère} année*, Ellipses.
- QUINE W.V.O. (1960), *Word and Object*, MIT Press, Flammarion, pour la traduction française, 1977.
- QUINE W.V.O. (1970), *Philosophy of logic*, Prentice-Hall, Traduction française Aunbier, 1975.
- SCHWARTZ L. (1991), *Analyse I, Théorie des ensembles et topologie*, Hermann



Enseigner la statistique en classe de seconde :

conditions et contraintes

Floriane Wozniak

Université de Lyon, Lyon, F-69003, France ;

Université Lyon 1, EA 1658, LIRDHIST, Villeurbanne, F-69622, France ;

IUFM de Lyon.

Lorsqu'un professeur de mathématiques conçoit et réalise la partie de son enseignement relative à la statistique, sous quelles contraintes opère-t-il ? Pourquoi les enseignements donnés semblent-ils inexorablement réduire la statistique à une simple arithmétique ? Peut-on modifier ces contraintes pour rendre possible un enseignement plus authentique au plan épistémologique ? Qu'y peuvent les professeurs et leurs organisations professionnelles ? Ce texte s'emploie à montrer comment, du triple point de vue des problématiques, des concepts, des méthodes, les outils de la théorie anthropologique du didactique permettent d'aborder ces questions. En particulier, nous montrons comment la notion d'échelle de niveaux de codétermination didactique, en fonctionnant comme une base de décomposition des assujettissements du professeur, permet de mettre au jour l'espace des contraintes auquel celui-ci est soumis dans son projet d'enseignement.

1. Un changement curriculaire

La question de la formation des citoyens à la variabilité et à la gestion de l'aléatoire s'est récemment traduite, en France, par le renouvellement du programme de statistique dans les classes de seconde (septembre 2000). Trois grandes questions ont été ainsi mises au cœur du travail statistique. La première suppose une réflexion sur le choix des « résumés numériques d'une série statistique quantitative ». La deuxième, s'articulant au fait cardinal de la variabilité, fondement de la science statistique, aborde la notion de *fluctuation d'échantillonnage*, qui fait sortir de l'univers clos des séries statistiques examinées isolément une à une, ce qui était le lot de l'ancien cours de statistique. La troisième

question est celle de la *simulation*, à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice essentiellement. Cette question, que le programme associe à celle des fluctuations d'échantillonnage, « ne doit pas faire l'objet d'un cours », mais doit donner lieu à diverses « études statistiques », dont les sujets seront « fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité » et des goûts de l'enseignant. L'élève est ainsi invité à consigner les principaux éléments de telles études dans un « cahier de statistique » où apparaîtront notamment les traitements de données et les expériences de simulation, ainsi que les « raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données ». À l'annonce de ce nouveau programme d'enseignement de la statistique la profession se révèle troublée et démunie. Les premières réactions de l'association des professeurs de mathématiques (APMEP) expriment ainsi la difficile réception de ce projet d'enseignement :

Étant donné que les futurs S n'en feront plus (et seront sans doute aptes à s'y mettre...) et que de toute façon les ES en refont en 1re, certains ne voyaient guère l'intérêt d'en faire vu qu'actuellement c'est la plupart du temps bâclé en fin d'année si c'est fait... Mais nous sommes gênés de demander qu'on supprime les stats alors qu'on revendique des maths citoyennes...

À la publication de la version définitive du nouveau programme de seconde, le 12 août 1999, l'association réclame avec une insistance certaine que soit donnée aux enseignants une formation à la statistique¹, faute de quoi il y aurait « impossibilité d'enseigner ce programme à la rentrée 2000, ce qui aurait pour conséquence de ne pas atteindre l'objectif de fournir aux futurs citoyens des outils pour comprendre le monde d'aujourd'hui ». En dépit d'une pétition qui recueillera quelque dix mille signatures, le nouveau programme entre en vigueur à partir de la rentrée 2000.

2. Du problème praxéologique du professeur à une question de recherche

Les réactions des professeurs par l'intermédiaire de leur association révèlent leur difficulté à construire une réponse au problème de l'élaboration d'un enseignement de la statistique en classe de seconde : *Comment développer un enseignement scolaire de la statistique qui*

¹ Dans un premier temps l'APMEP avait sollicité le report de la mise en application de la réforme.

apparaisse à la fois fidèle à la science statistique telle qu'elle existe hors de l'Ecole et pertinente pour la formation scolaire des jeunes générations ? Dans l'abord de cette question, nous avons choisi d'adopter un point de vue écologique : il nous semble en effet insuffisant de proposer et d'expérimenter des situations didactiques, ou même d'étudier l'économie de tels systèmes (en analysant leur fonctionnement). Nous devons, pensons-nous, comprendre les conditions de possibilité de situations didactiques adéquates, sauf à prendre le risque que de telles situations ne puissent exister de façon significative dans les classes.

La demande de formation des enseignants, clairement exprimée au travers d'une pétition, n'est en effet pas l'unique condition à un enseignement de la statistique conforme au nouveau programme. La théorie anthropologique du didactique postule que lorsque le professeur et les élèves se rencontrent dans la classe autour du savoir à enseigner – par exemple autour d'un savoir statistique –, ce qu'il peut advenir est déterminé par des conditions et des contraintes qui ne sauraient se réduire à celles identifiables immédiatement dans la classe (disponibilité de tel ou tel matériel, de tel logiciel, de telle organisation temporelle, connaissances du professeur et des élèves, etc.), même si, bien évidemment, ces contraintes et conditions-là jouent un rôle éminent dans le « travail » de détermination. C'est ainsi que le problème praxéologique du professeur se reformule en un problème de recherche : *Comment déterminer les conditions et les contraintes sous lesquelles le programme d'enseignement de la statistique de la classe de seconde peut être enseigné d'une façon authentique au plan épistémologique et favorable à la réussite d'apprentissages significatifs ?*

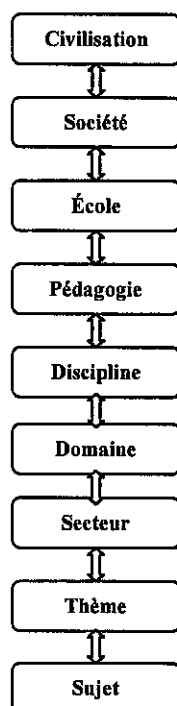
2.1 Rapports personnels et rapports institutionnels

Comme beaucoup d'activités humaines, les mathématiques sont produites, diffusées, pratiquées, enseignées au sein d'une large gamme d'institutions sociales. La didactique des mathématiques peut être regardée à cet égard comme la science qui étudie les conditions et contraintes sous lesquelles les savoirs mathématiques, et plus généralement les praxéologies auxquelles elles s'identifient, naissent, diffusent, changent, évoluent, etc. au sein des groupements humains. Dans le prolongement de ses travaux sur la transposition

didactique, Yves Chevallard (1988) a introduit la notion de *rapport institutionnel* à un objet de savoir au sein d'une institution afin de rendre compte de la pluralité, de la diversité et de la complexité des formes de connaissance que l'on a de cet objet de savoir au sein des diverses institutions où il est présent. Le rapport institutionnel à un objet de savoir condense et exprime alors ce qui se fait dans cette institution avec cet objet de savoir, comment il est mis en jeu, vit et émerge des praxéologies qui le mobilisent et l'activent dans l'institution considérée. Ainsi, par exemple, le rapport institutionnel à la notion de racine carrée au sein de la classe de mathématiques est-il différent suivant le niveau d'enseignement selon que l'on est en troisième ou en terminale S, classe où l'on étudie les nombres complexes. Le rapport institutionnel à un objet de savoir permet donc d'explicitier ce à quoi un sujet de l'institution se réfère lorsqu'on lui demande d'évoquer cet objet de savoir. Il n'est pas le rapport d'un sujet singulier mais celui que les sujets, suivant les positions qu'ils occupent au sein de l'institution, devraient avoir. Ainsi les rapports personnels à la notion de racine carrée que peuvent entretenir un élève ou son professeur au sein de la même classe de mathématiques seront évidemment distincts puisque leurs positions au sein de l'institution sont distinctes.

Le rapport personnel à un objet de savoir se définit alors comme la résultante des rapports institutionnels qu'une personne, sujet d'une pluralité d'institutions, entretient quand elle occupe une certaine position au sein de ces institutions. Comme le souligne Yves Chevallard (1988, p. 214), ces rapports institutionnels « constituent le système essentiel des conditions et contraintes sous lesquelles se forme et évolue le rapport personnel à Os [un objet de savoir] des acteurs de l'institution. » Ainsi le rapport personnel aux savoirs statistiques d'un professeur français de mathématiques s'est-il nourri des rapports institutionnels auxquels il a été soumis lorsqu'il était lui-même en position d'élève au collège puis au lycée, d'étudiant à l'université, d'élève professeur en formation dans un institut universitaire de formation des maîtres (IUFM), en position de citoyen français lecteur de journaux, etc.

2.2 Échelle des niveaux de codétermination didactique



C'est cette modélisation du professeur comme sujet – simultanément ou successivement – de différentes institutions qui nous permettra d'identifier les systèmes de contraintes qui pèsent sur lui du fait de son assujettissement à ces institutions. Comment en rendre compte ? Yves Chevallard (2002) a introduit comme outil exploratoire la notion d'*échelle des niveaux de codétermination didactique*, que nous reproduisons ici (voir figure 1). Elle fonctionne comme un filtre, une base de décomposition et offre une grille de lecture des assujettissements divers au sein de différentes institutions. C'est avec un objectif premier d'illustration des divers niveaux recensés que nous l'avons utilisée (Wozniak, 2005), sans prétention d'exhaustivité², pour étudier les conditions et contraintes auxquelles sont soumis les professeurs de mathématiques lorsqu'ils enseignent la statistique en classe de seconde.

En montrant ici comment les niveaux supérieurs de détermination (*Civilisation, Société, École, Discipline*) peuvent peser sur l'enseignement, en France, d'un domaine des mathématiques comme la statistique, nous illustrerons comment l'approche anthropologique porte le chercheur à élargir son terrain d'investigation et à regarder des objets empiriques qui ne sont pas uniquement des élèves et des professeurs travaillant dans une classe, ni même des personnes faisant des mathématiques en dehors de la classe.

² De ce point de vue, nous faisons nôtre ces propos de Bernard Lahire (2005) où nous pourrions aisément remplacer les mots *sociologue* et *sociologique* par *didacticien* et *didactique* : « Le sociologue ne peut être que résolument wébérien en réaffirmant "l'infinité inépuisable du monde sensible" ou la "diversité infinie du réel". Aucune situation, aucun objet ni aucune pratique ne sont épuisables par un nombre fini de traits de description : à partir d'autres interrogations, d'autres intérêts de connaissance, d'autres angles sociologiques, des descriptions inédites sont toujours possibles. »

3. L'étude empirique

Le premier constat lorsqu'on observe les pratiques d'enseignement de la statistique en classe de seconde est une certaine conduite d'évitement. Une enquête³ réalisée en 2001 auprès de 191 professeurs révèle que 5 % d'entre eux ont choisi de ne pas l'enseigner ; et alors que les instructions officielles préconisent environ 16 heures d'enseignement, 15 % y ont consacré moins de 7 h, 50 % entre 7 h et 13 h, enfin 35 %, seulement, lui ont consacré plus de 13 h. Nos propres observations réalisées trois ans plus tard dans deux lycées de centre ville à Marseille et Lyon confirment ces résultats. Comment peut-on expliquer ces conduites, quelles sortes de contraintes, relevant de quels niveaux de codétermination didactique permettent de les analyser ?

3.1 Civilisation et société : l'interdiction de connaître

Le niveau supérieur se réfère, comme on l'a vu, à la notion de *civilisation* que nous regarderons ici comme un ensemble de complexes praxéologiques présents et mobilisés dans un ensemble de sociétés qui, du point de vue de ces praxéologies-là, peuvent être regardées comme apparentées. La civilisation à laquelle appartient une société donnée – la société française, la société britannique, etc. – est ainsi le genre prochain par rapport auquel chacune des sociétés particulières qui en sont partie prenante marque sa différence spécifique : la distinction entre société et civilisation est en quelque sorte la distinction de l'autre au sein du même.

Alexandre Koyré (1971) a autrefois souligné la répugnance de la culture grecque antique à regarder comme quantifiable notre monde sublunaire, opposé au monde céleste. Dans le monde terrestre, note-t-il, la précision est illusoire, l'à-peu-près est la règle. La métrologie antique est ainsi peu développée et ce n'est que lentement que la mesure, comme condition de possibilité de la connaissance du monde et comme ensemble de procédés et d'instruments techniques, va se constituer. D'une façon plus générale, tout progrès dans la

³ Enquête réalisée à la demande de la Société Française de Statistique (SFdS) par six étudiants du DESS Statistique et Informatique Socio-Économiques de l'université Lyon 2, cofinancée par la SFdS, l'IREM de Rennes et l'université Lyon 2.

mesure du monde se heurte à trois obstacles solidaires : tout d'abord, un postulat d'impossibilité de la mesure (notamment quand la grandeur à mesurer est réputée non définie) ; ensuite, une succession de difficultés objectives, historiquement vécues et difficilement dépassées, touchant à la définition de la grandeur à mesurer et au système conceptuel et instrumental de mesurage ; enfin, une interprétation tout aussi traditionnelle du projet de mesurer, vu comme violence faite au monde, parce que la mesure serait contemporaine d'une volonté de chosification du mesuré. Dans son étude sur *L'idée de dénombrement jusqu'à la Révolution*, Jacqueline Hecht (1977) observe⁴ que « la mémoire collective gardera longtemps le souvenir de la malédiction attachée au dénombrement, la civilisation occidentale n'en acceptera le principe qu'avec difficulté. Au Moyen Âge chrétien saint Ambroise et saint Augustin condamneront le péché d'orgueil commis par David. »

Il existe ainsi une très ancienne tension entre les pouvoirs établis, qui veulent connaître – David les personnifie –, et la sacralisation populaire de ce qui est à connaître – la matière humaine – qui porte à voir dans le geste qui dénombre une forme d'impiété, comme Jacqueline Hecht le souligne dans sa conclusion :

Le dénombrement, procédé à première vue purement comptable et politiquement et idéologiquement neutre, apparaît en fait comme une opération extrêmement complexe et ambiguë, qui, dotée au départ d'un caractère religieux très marqué, s'est aussi de tout temps présenté comme une technique de gouvernement totalitaire et despotique ; il fallait compter les hommes pour mieux les asservir, et à cet égard les individus, malgré les dénominations si évocatrices de « feux » et d' « âmes », n'étaient guère comptés pour autre chose que des animaux. (op. cit. p. 70)

C'est là un ensemble d'obstacles que les sociétés méditerranéennes et celles qui en sont issues n'ont surmonté que peu à peu, en même temps que s'élargissait toujours davantage

⁴ Art. cit., p. 24. Le passage que nous citons ici fait référence à l'épisode où David, poussé par Yahvé lui-même en un moment de courroux, commande un recensement, contre l'avis de Joab, son chef d'état-major pour qui on ne peut compter les hommes comme on compte des troupeaux (2 Samuel, 24). On trouve cette fois qu'Israël compte 800 000 hommes de troupe, et Juda 500 000. Mais David se repent et dit à Yahvé : « C'est un grand péché que j'ai commis ! Maintenant, Yahvé, veuille pardonner cette faute à ton serviteur car j'ai commis une grande folie. » Pour punition, il doit alors choisir entre trois châtements : sept ans de famine, trois mois de défaites ou trois jours de peste. Il choisit trois jours de peste : soixante-dix mille hommes du peuple en mourront.

l'empire du mesurable. Au sein de cette civilisation, la société française se signale par sa faible *sensibilité statistique*. Daniel Schwartz (1994), l'un des pionniers de la statistique médicale en France dans la deuxième moitié du ^{xx}^e siècle, évoque à ce propos deux raisons principales. La première serait une attitude rétive face à l'incertain, regardé comme simple à-peu-près ⁵ : « Les Français ont un esprit rigoureux – ils excellent en mathématiques pures – mais ils sont pénétrés de cette logique cartésienne qui s'accommode mal de l'incertain. » La seconde raison touche au rapport que la société française établit entre le collectif et l'individuel. Pour cet auteur, en effet, c'est la « nécessité que l'on perçoive avec acuité ces deux contraires, la moyenne et la variance, le collectif et l'individuel », qui est au fondement de la pensée statistique. À cet égard, il compare les États-Unis, « qui sont unis mais restent des États » avec la France, où « le sens de l'individualité l'emporte trop sur le sens de la collectivité ». Pour objectiver ce qui pourrait apparaître ici comme un simple point de vue nous avons étudié la diversité de la diffusion des savoirs statistiques, diffusion vers la société ou diffusion à l'école, mais aussi la place allouée à la statistique au sein des mathématiques, telle qu'elle s'est constituée au cours de son histoire en France.

3.2 Société et École : la diffusion sociale des savoirs statistiques

L'organisation de la diffusion des savoirs doit en passer, dans la société française du ^{xix}^e siècle, par les contraintes qu'impose une configuration institutionnelle où l'on peut distinguer trois grandes traditions. L'institution sans doute la plus typiquement française est liée à l'organisation des agents de l'État en grands corps (ingénieurs, officiers, etc.), auxquels sont associées une ou plusieurs écoles de formation – écoles d'ingénieurs, écoles d'officiers, etc. Cette forme d'organisation ne s'emparera de la statistique que tardivement, par la création du corps des administrateurs civils de l'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) et de l'école nationale de la statistique et de l'administration économique (ENSAE) qui lui est attachée ⁶. Une seconde grande tradition

⁵ *Op. cit.*, p. 97-98.

⁶ L'INSEE est créé par une loi du 27 avril 1946. Son école d'application deviendra l'ENSAE en 1960.

est celle des universités. En France, la reconnaissance de la statistique comme savoir à enseigner s'est réalisée, là aussi, tardivement, avec la création en 1922 de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris (ISUP), officiellement placé dès sa création sous la direction scientifique des quatre facultés parisiennes – de droit, de sciences, de médecine et de lettres. Cet institut proposera des enseignements de haut niveau sur « la méthode statistique et ses applications » mais cherchera longtemps son public ⁷. Et ce n'est qu'en 1951 que la statistique sera enseignée au secondaire, dans les classes de technique économique des lycées. Mentionnons enfin une troisième tradition que nous n'évoquerons pas davantage ici : celle des sociétés savantes ou demi-savantes qui se vouent à la diffusion des connaissances en visant un public généralement bourgeois, même si d'autres segments de la population peuvent parfois être atteints ⁸.

Les différentes analyses que nous avons réalisées (Wozniak, 2005) convergent vers un fait essentiel : la faible pénétration de la statistique dans la culture française ⁹, la non-familiarité avec le maniement statistique de l'information chiffrée doivent être regardés comme des données fondamentales qui imposent de sévères contraintes sur l'enseignement général de la statistique dans la formation scolaire. Mais si la culture statistique n'a pas pénétré la culture de *l'honnête homme*, quelle forme la distribution sociale des connaissances assume-t-elle ? N'étant pas de l'ordre de ce que chacun connaît, doit connaître ou même peut connaître, la statistique va recevoir le statut de « connaissance spéciale », utile et même indispensable dans certains groupes humains constitués autour d'une activité déterminée. Non pas savoir pour tous et chacun, donc, mais savoir *pour certains*. Selon une opposition

⁷ Dans la période 1925-1939, il n'y eut que 46 diplômés, dont plus des deux tiers sont des étudiants étrangers.

⁸ De manière caractéristique, l'historien François Bédarida (1977, p. 495) peint ainsi les sociétés de statistique qui émergent en nombre dans l'Angleterre des années 1830 : « C'est le même mélange d'esprit de curiosité et de volonté d'action pratique qui au même moment a poussé à travers le pays des hommes de la classe moyenne – manufacturiers, banquiers, médecins, clergymen – à créer des sortes de sociétés savantes orientées vers l'enquête statistique. » « Possédés par la passion de la connaissance et de la réforme », note-t-il encore, « les pères fondateurs de ces sociétés – dont la plupart furent éphémères, à l'exception de celles de Londres et Manchester, toujours actives – n'étaient que rarement des statisticiens au sens moderne du terme. »

⁹ Celle-ci est criante lorsqu'on compare la très faible place réservée, par exemple, à l'illustration de l'information chiffrée dans les journaux français avec celle d'un journal américain comme *USA Today* qui dispose de son propre service de production de données et dont la simple observation du contenu fait nettement apparaître la volonté de présenter les données chiffrées comme éléments de séries statistiques au sein desquelles elles sont situées.

classique, nous distinguerons la diffusion générale des connaissances statistiques de leurs diffusions spéciales, c'est-à-dire de diffusions ciblées, officiellement motivées par les besoins d'une certaine espèce d'activités, notamment dans le cadre de formations professionnelles. Les diffusions spéciales de la statistique sont multiples, diverses et se font à des niveaux d'étude ou de formation parfois fort différents¹⁰. Une étude curriculaire de ces formations atteste d'un statut social et culturel de la statistique comme étant celui d'un savoir dont la dissémination paraît ne viser que des groupes professionnels localisés ayant des besoins supposés en la matière et n'émettant qu'un rayonnement culturel de faible ampleur¹¹. On observe ainsi qu'à mesure que l'on monte dans l'échelle tout à la fois académique et sociale des diplômes, les références « concrètes », manifestant la présence d'un univers professionnel déterminé, tendent à s'effacer.

3.3 La statistique au sein des mathématiques

Après avoir sommairement rendu compte de l'étude de la diffusion sociale des savoirs statistiques, nous aborderons à présent la question de la place et du statut de la statistique au sein des mathématiques. Comment aborder une telle étude ? Sur quels types de matériaux peut-elle être menée ? Nous mentionnerons brièvement les pistes que nous avons explorées. Les travaux des historiens des mathématiques, en montrant comment la statistique s'est constituée en domaine des mathématiques, sont évidemment une aide précieuse. Comme le souligne Grattan-Guinness (1997), c'est l'axiomatisation de Kolmogorov qui a permis aux probabilités, et dans son sillage, à la statistique, de se faire une place au sein des mathématiques¹² :

¹⁰ Pour un aperçu des aléas de la distribution sociale des savoirs statistiques au sein de formations professionnalisantes, depuis le niveau du Certificat d'Aptitude Professionnelle (CAP) jusqu'à celui du baccalauréat professionnel dans les domaines de l'agriculture, des métiers de la santé et de l'hygiène, les métiers du secteur industriel et tertiaire, voir Wozniak (2005), chapitre 4.

¹¹ La diffusion par le biais de formations professionnelles de plus haut niveau est pourtant une réalité en certains secteurs. La statistique, au travers des enseignements dits de méthodologie, est entrée dans le monde universitaire « littéraire » dans les années 1970 en France, notamment en psychologie, sociologie, linguistique.

¹² *Op. cit.*, p. 738. La référence au *rainbow* renvoie au titre de l'ouvrage.

In 1933, two years after Gödel's theorem appeared, the Soviet mathematician Andrei Kolmogorov (1903-1987) furthered the cause of axiomatization by publishing a system for probability theory. This landmark achievement placed the subject at last within the sphere of "orthodox" mathematics, for he drew upon set theory – another late arrival, but by then impeccably placed in the rainbow.

Mais la place réservée à la statistique reste singulière, comme le fait remarquer ce même auteur lorsqu'il mentionne la classification de mathématiques selon les *Mathematical Reviews* (1991, p. 721) :

[...] this taxonomy is somewhat perfunctory on probability and statistics, which are however covered in detail in Statistical Theory and Method Abstracts; and mathematical education, omitted almost entirely, is handled by the *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*.

Une recension de certains débats internes aux mathématiciens français – sur la légitimité d'intégrer la statistique comme un domaine des mathématiques – permet de rendre compte de la place minorée réservée à la statistique au sein des mathématiques. Nous l'illustrerons ici à travers des propos ¹³ d'André Weil (1906-1998) :

... sans méconnaître les services considérables que la statistique mathématique a rendus à la science (et en particulier aux sciences biologiques), il faut bien constater que les ouvrages de statistique se réduisent en définitive à des collections de recettes et de préceptes que nous voulons croire heureusement choisis, mais qui, se trouvant sous forme hautement algébrique et comportant même parfois l'emploi de logarithmes, d'exponentielles et d'intégrales, jouissent aux yeux du profane de tout le prestige de l'exactitude mathématique, alors que les soi-disant « démonstrations » dont on l'entoure, si hautement techniques qu'elles soient, n'ont le plus souvent aucun sens pour le mathématicien et consistent simplement en considérations heuristiques plus ou moins probantes.

La tardive reconnaissance institutionnelle de ce domaine des mathématiques en France explique qu'il ait fallu attendre 1970 pour que soit créé le premier Diplôme d'Étude Approfondie (DEA) de statistique. D'autres matériaux empiriques permettent d'étudier la

¹³ Parus dans un article intitulé « Calcul des probabilités, Méthode axiomatique, Intégration » qu'André Weill publie en 1940 dans la *Revue Rose*, ces propos sont rapportés par Meusnier (2004).

place réservée à la statistique au sein des mathématiques : une simple observation des préfaces d'ouvrages de statistique à destination d'un large public révèle, par exemple, la minoration quasi-systématique des savoirs mathématiques nécessaires pour comprendre les outils statistiques.

Une étude des thèmes abordés lors des journées annuelles de l'association des professeurs de mathématiques atteste du peu d'importance que cette association accorde à cet enseignement. Mais comment les professeurs de mathématiques situent-ils la statistique au sein des mathématiques ? Pour répondre à cette question, nous avons utilisé un différenciateur sémantique auprès de 41 futurs professeurs d'une même promotion de l'IUFM d'Aix-Marseille en fin de formation¹⁴. Pour quatre domaines des mathématiques (algèbre, géométrie, statistique et trigonométrie), 13 échelles à 7 niveaux étaient proposées¹⁵. Ces échelles exploraient trois dimensions : l'évaluation (mauvais/bon, laid/beau, terne/brillant, non mathématique/mathématiques, petit/grand), la puissance (faible/fort, doux/brutal, féminin/masculin) et l'activité (passif/actif, froid/chaud, détendu/tendu, lent/rapide, calme/excité).

Le graphique ci-dessous (voir figure 2) présente la moyenne des scores obtenus sur chaque échelle pour chacun des quatre domaines, sur l'ensemble de la population des professeurs stagiaires interrogés. Le premier constat qui peut être fait est la similarité de l'allure des quatre courbes, même si celle représentant la statistique se trouve au-dessous des autres courbes dans 9 cas sur 13. Ainsi, si la statistique est bien considérée comme un domaine *mathématique* ou *fort*, elle l'est bien moins que l'algèbre, la géométrie ou la trigonométrie ; elle est à peine *brillante* et sa *beauté* est incertaine...

¹⁴ Ce différenciateur a été présenté à 45 professeurs stagiaires en mai 2005 ; 41 réponses étaient exploitables.

¹⁵ Sur l'échelle mauvais/bon, un score de 1 correspond à une évaluation du type « très mauvais » alors qu'un score de 7 correspond à une évaluation du type « très bon ».

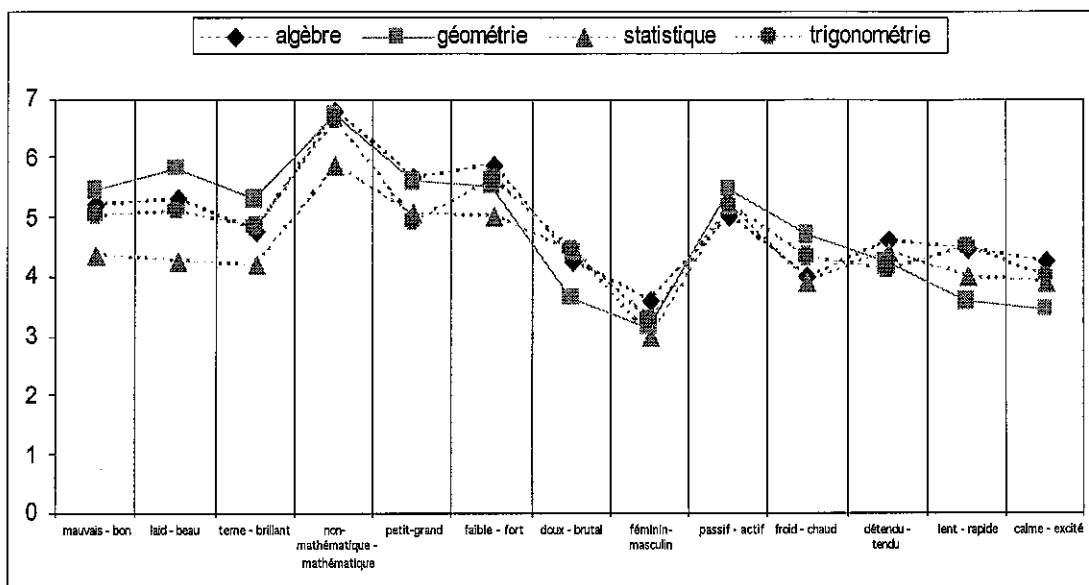


Figure 2

Le second graphique (voir figure 3) détaille les fréquences des réponses sur l'échelle laid/beau pour les quatre domaines des mathématiques considérés. La statistique est le seul domaine pour lequel les valeurs 1 et 2 ont été attribuées : près de 10 % des professeurs stagiaires interrogés voient même ce domaine des mathématiques comme « très laid ». C'est encore la statistique qui a le pourcentage le plus faible pour les scores 6 et 7 qui qualifient un domaine donné comme « très beau » : 20 % pour la statistique alors que la géométrie dépasse les 70 %, trigonométrie et algèbre étant autour de 40 %.

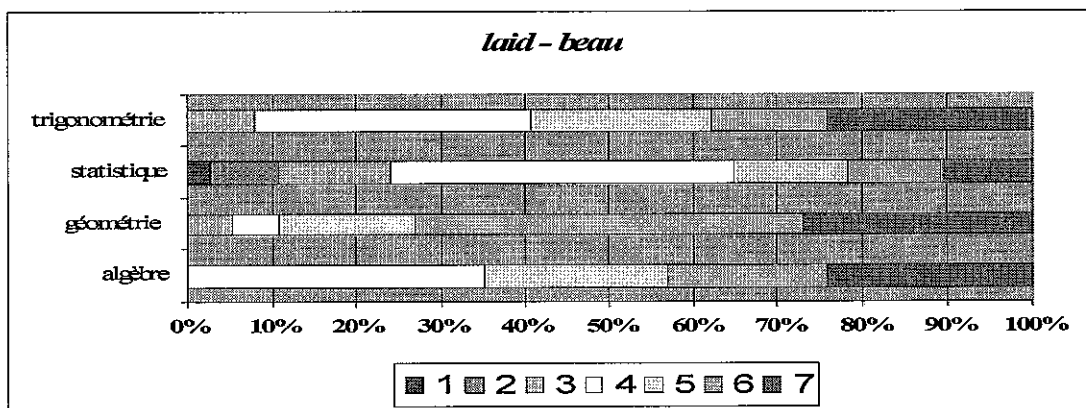


Figure 3

En guise de conclusion

La faible diffusion sociale des savoirs statistiques, leur statut péjoré et minoré sont une donnée fondamentale pour expliquer certaines conduites d'évitement des professeurs de mathématiques français. Mais les quelques exemples d'exploration des conditions et contraintes de certains niveaux supérieurs de codétermination didactiques présentés ici ne suffisent pas, à eux seuls, à expliquer les pratiques des professeurs¹⁶. Une étude plus complète devrait explorer l'ensemble des niveaux de codétermination didactiques en englobant notamment l'étude des phénomènes de transposition didactique (Wozniak, 2005). Nous avons souhaité montrer ici la diversité et la complexité de l'espace des contraintes dans lequel le professeur se trouve au moment d'élaborer son projet d'enseignement. Une telle complexité nécessite, pour appréhender les phénomènes didactiques selon une vision plus large que celle habituellement adoptée en didactique, une pluralité d'analyses et la mise en œuvre d'outils méthodologiques variés. Si nous considérons que tout enseignement doit être abordé comme ce que Marcel Mauss (1873-1950) appelait un fait social total, l'ampleur d'un tel projet d'étude conduit à faire preuve de modestie autant que de réalisme. Aussi nous concluons en reprenant à notre compte cette citation du sociologue Camille Tarot (1999, p. 663) :

Le fait social total n'est sûrement pas la totalité exhibée d'une société, car qui n'a jamais pu saisir pareille totalité, même dans la meilleure des monographies ? Il est cette propriété unique des faits qui sont l'objet même de la science de l'homme, d'être signifiants, c'est-à-dire partiels, contingents, arbitraires et cependant reliés, rattachés, dépendants toujours de quelque chose qui est en eux, à la fois manifesté et caché par eux.

¹⁶ Pour une analyse des pratiques des professeurs concernant le non-enseignement de la notion de fluctuation d'échantillonnage, voir Wozniak (2006).

Références

Bédarida, F. (1977). Statistique et société en Angleterre au xix^e siècle. *Pour une histoire de la statistique*, tome 1 (p. 493-508). Paris : Economica.

Chevallard, Y. (1988). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, LSD-IMAG. Grenoble (p. 211-236).

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. *Actes de la xi^e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). Grenoble : La pensée sauvage.

Hecht, J. (1977). L'idée de dénombrement jusqu'à la révolution. *Pour une histoire de la statistique*, tome 1 (p. 21-83). Paris : Economica.

Grattan-Guinness, I. (1997). *The Fontana History of the Mathematical Sciences : the Rainbow of Mathematics*. Londres : Fontana Press.

Koyré, A. (1971). *Études d'histoire de la pensée philosophique*. Paris : Gallimard

Lahire, B. (2005). *L'esprit sociologique*. Paris : Éditions La Découverte.

Meusnier, N. (2004). Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques. In É. Barbin, & J.-P. Lamarche (Eds), *Histoire de probabilités et de statistiques* (p. 237-273). Paris : Ellipses.

Schwartz, D. (1994). *Le jeu de la science et du hasard. La statistique et le vivant*. Paris : Champs Flammarion.

Tarot, C. (1999). *De Durkheim à Mauss, l'invention du symbolique*. Paris : Éditions La Découverte & Syros.

Wozniak, F. (2005). *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. Thèse de doctorat de l'Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France. Disponible sur l'Internet :

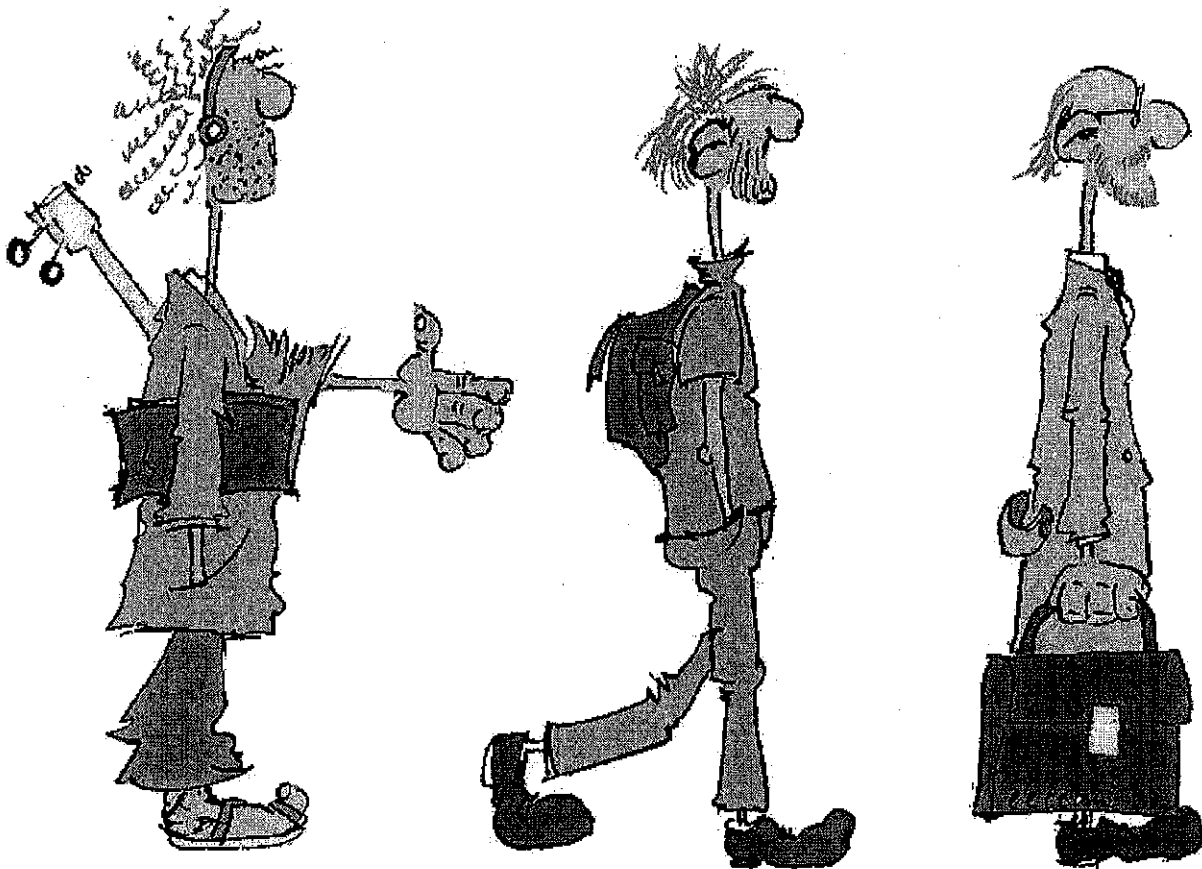
http://tel.ccsd.cnrs.fr/docs/00/06/41/60/PDF/these_wozniak_floriane.pdf

Wozniak, F. (2006). Sur l'enseignement de la fluctuation d'échantillonnage en classe de seconde en France. EMF 2006. *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. (Sherbrooke, 27-31 mai 2006). *À paraître*.

LICENCE

iufrm

HORS CLASSE



FORMATION

Les connaissances antérieures des professeurs
de mathématiques
à travers la préparation de séances de classe.
Cas de stagiaires en fin de formation initiale

Sylvie Coppé

IUFM de Lyon

UMR ICAR Equipe COAST

CNRS Université Lyon 2- INRP- ENS Lyon- ENS LSH

Dans cette communication, nous donnons des premières conclusions sur une recherche en cours portant sur la détermination de connaissances des professeurs, activées et mobilisées au moment de la préparation de séances de classe. Notre but est de déterminer comment les enseignants préparent leurs séances de classe et quels types de connaissances ils mettent en œuvre à ce moment. Actuellement, nous nous sommes limitée au cas des professeurs stagiaires.

Le but plus lointain de cette recherche est de travailler sur des questions vives et encore peu résolues comme celles portant sur la détermination de savoirs professionnels des enseignants (quels sont ces savoirs, comment les transmettre aux formés, comment donner des outils qui permettent d'appréhender le métier et lesquels ?) ou bien celles portant sur les compétences professionnelles (quelles sont –elles ? à quoi reconnaît-on qu'un enseignant est compétent ? comment se construisent –elles ? où se construisent-elles ?). Comme on peut le voir, le champ des questions est vaste et encore peu défriché.

Nous faisons une première hypothèse à savoir que le moment de préparation de séances de classe est un moment fondamental dans l'activité du professeur et que mieux connaître comment les professeurs réalisent cette tâche peut contribuer à la détermination de savoirs

professionnels de l'enseignant et ainsi, à améliorer la formation initiale (et continue). L'importance de cette tâche est bien soulignée dans le texte officiel qui définit "Les missions du professeur exerçant en collège, en lycée d'enseignement général et technologique ou en lycée professionnel" puisqu'il est indiqué :

En fin de formation initiale, la professeur est capable de concevoir, préparer, mettre en œuvre et évaluer des séquences d'enseignement qui s'inscrivent de manière cohérente dans un projet pédagogique annuel ou pluri annuel. (BO n°22 du 29 mai 1997)

Pour chaque séquence, il définit, dans le cadre de sa progression, le (ou les) objectifs à atteindre, sélectionne les contenus d'enseignement, prévoit les démarches et situations variées favorables à l'apprentissage, adaptées aux objectifs qu'il s'est fixés et à la diversité des élèves. (BO n°22 du 29 mai 1997)

On voit bien ici que l'activité de préparation est institutionnellement reconnue comme faisant partie du métier et définie de façon relativement précise, en décrivant ce sur quoi doit porter la préparation.

Nous savons par notre expérience de formatrice, qu'en France, même si nous ne disposons pas encore d'un programme national de formation initiale, cette compétence qui vise à savoir préparer des séances de classe est largement travaillée en formation, mais certainement aussi sous des formes diverses qu'il serait certainement important de déterminer.

De plus, nous faisons l'hypothèse que le moment de préparation de cours va être l'occasion, pour les professeurs, de mobiliser différentes connaissances (et différents types de connaissances). A partir du référentiel, nous pouvons donc lister un certain nombre de tâches que les professeurs auront à prendre en compte :

- adapter leurs connaissances mathématiques à un niveau de classe donné, ce qui suppose des adaptations au niveau du langage, des éléments théoriques, des retours sur leur propre savoir mathématique, etc.
- prendre connaissance des programmes et les traduire en termes d'objectifs ou de tâches pour les élèves,

- effectuer des découpages dans le savoir à enseigner pour le rendre enseignable, compte tenu des programmes et du temps d'enseignement,
- élaborer, construire, choisir des tâches pertinentes pour le savoir à enseigner et pour le niveau des élèves et organiser leur mise en oeuvre,
- élaborer des évaluations en lien avec les programmes et ce qui a été enseigné,
- prévoir un découpage de la séance, anticiper le temps passé sur chaque tâche et donc vérifier que ce qui est prévu est suffisant,
- organiser le travail des élèves, devoirs réguliers, devoirs à la maison, interrogations orales, etc.,
- rédiger des synthèses que les élèves conserveront,
- prendre en compte les connaissances antérieures des élèves, c'est-à-dire anticiper sur ce que les élèves savent déjà, sur ce qu'ils pourront faire, sur les difficultés, sur les aides à apporter,
- s'adapter au public de la classe, prendre en compte la diversité des élèves.

Ainsi l'articulation entre connaissances antérieures et connaissances nouvelles se révèle un problème important puisque les jeunes professeurs ont à acquérir des connaissances nouvelles qui ne sont plus seulement disciplinaires et qui vont constituer des connaissances professionnelles. D'autre part, ils vont devoir adapter leurs connaissances antérieures notamment mathématiques, et les transformer pour être mises au service des apprentissages des élèves. Enfin, on peut penser que ces connaissances pourront être acquises dans différents lieux et auprès de certaines personnes.

Pour le moment, nous nous sommes centrés sur les professeurs de mathématiques stagiaires. Pour cela, nous avons réalisé (en juin 2004) et analysé quatre entretiens avec des professeurs stagiaires volontaires, à la fin de leur première année de formation (après les jurys de validation et de titularisation), en utilisant la méthodologie de l'entretien d'explicitation qui vise à faire raconter comment ces professeurs ont fait pour faire cette préparation et à leur faire expliciter leurs choix.

La consigne que nous leur avons donnée était de venir avec un cours qu'ils estimaient préparé, ainsi qu'avec tous les documents qu'ils avaient utilisés. Nous avons utilisé le terme « cours » dans un sens volontairement large pour laisser toute liberté aux professeurs pour

raconter ce qu'ils font quand ils préparent ce qu'ils vont faire avec leurs élèves : ainsi, on peut penser que certains vont préparer plutôt un chapitre et d'autres plutôt une séance ou éventuellement d'autres peuvent ne rien préparer. Le terme cours peut donc désigner soit une séance en classe (d'une heure par exemple) ou bien tout un chapitre portant sur un thème d'études voire sur un secteur d'études en reprenant la classification de Chevallard, 2001 (par exemple, la géométrie dans l'espace en classe de 2nde ou bien Translations, vecteurs en 4^{ème}, etc.). Cette précision est importante puisque a priori nous ne savons pas vraiment comment chacun prépare. Nous ne voulions pas enfermer les professeurs dans une représentation trop restrictive de la notion de cours, séance ou séquence, ceci par un vocabulaire trop spécifique.

Dans d'autre cas, le terme cours peut également renvoyer au sens de cours magistral qui désigne une technique d'exposition du savoir, ou alors il peut signifier le texte du savoir que les élèves doivent conserver. Dans ce dernier cas, nous emploierons alors le terme synthèse ou trace écrite que doivent garder les élèves.

1. Références théoriques concernant savoirs et connaissances

Nous employons les termes de savoir, savoir-faire et connaissances pour les professeurs. Nous distinguons savoir et connaissance dans le sens où les connaissances sont davantage du côté des sujets et les savoirs du côté des institutions. Nous reprenons la définition de Brousseau et Centeno, 1991.

Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicites, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale. Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. (Brousseau et Centeno, 1991)

Nous reprenons aussi l'idée de Conne, 1992 qui présente un savoir comme une connaissance utile ou utilisable : "Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation."

De plus Conne, 1992 définit trois types de savoirs (que nous retrouvons dans nos classifications) qui vont de pair avec trois catégories d'utilité du savoir :

- les savoirs pragmatiques qui permettent la transformation de situations particulières avec parmi eux :
 - o les savoir faire qui permettent de transformer une situation "Savoir faire c'est, dans un cadre institutionnel donné, savoir faire quelque chose de quelque chose avec quelque instrument."
 - o les savoirs réfléchis qui permettent d'analyser comment s'est transformée la situation "il ne se contente pas de reconnaître que la situation s'est transformée, mais identifie comment elle s'est transformée."
- les savoirs savants qui permettent d'organiser et de produire d'autres savoirs.

En ce qui concerne les types de connaissances, nous croisons plusieurs classifications.

Tout d'abord, nous reprenons la classification de Shulman, 1987 sur les connaissances des professeurs dans laquelle il distingue :

- des connaissances sur les contenus à enseigner, relevant de champs disciplinaires reconnus comme pour nous les mathématiques,
- des connaissances relevant d'une pédagogie générale qui permettent d'organiser et/ou de prendre en compte la gestion de la classe,
- des connaissances relevant de la didactique (pour nous des mathématiques),
- des connaissances portant sur les programmes d'enseignement ou sur d'autres outils institutionnels comme les commentaires des programmes ou les évaluations nationales ou internationales
- des connaissances portant sur les élèves et leur caractéristiques,
- des connaissances sur le contexte de l'école ou de la classe,
- des connaissances portant sur les buts et les valeurs de l'éducation.

Notons qu'en ce qui concerne les connaissances qui relèvent de la didactique, c'est nous qui traduisons par ce terme puisque Schulman ne l'emploie pas : il désigne par "pedagogical content knowledge" des connaissances qui relèvent à la fois du contenu et de la pédagogie.

Among those categories, pedagogical content knowledge is of special interest because it identifies the distinctive bodies of knowledge for teaching. It represents the blending of content and pedagogy into an understanding of how particular topics, problems, or issues are organized, represented and adapted to the diverse interests and abilities of the learners, and presented for instruction. (Schulman, 1987)

Nous pensons qu'actuellement, compte tenu des recherches françaises, il est possible de faire cette traduction et donc, d'introduire cette catégorie qui nous semble bien recouvrir ce que Shulman indique. C'est d'ailleurs bien le sens de son article qui cherche à dépasser le clivage entre les connaissances disciplinaires et pédagogiques en introduisant ces connaissances portant sur le savoir pour l'enseignement.

Une autre classification s'intéresse davantage à l'origine de ces connaissances. Ainsi, nous avons repéré :

- des savoirs institutionnels enseignés (par exemple à l'université ou à l'IUFM), explicites avec des textes du savoir repérés,
- des savoirs construits par le sujet qui proviennent par exemple de lecture de livres de pédagogie ou de psychologie qui sont transposés, transférés, repris dans le cadre du métier et retravaillés par le sujet,
- des éléments de savoir ou des savoirs faire dont la transmission se fait souvent par oral comme les "trucs" donnés par les maîtres de stage ou d'autres collègues,
- des savoirs faire récents construits dans l'action qui peuvent rester implicites,
- des savoirs ou savoir faire d'expérience qui proviennent d'expériences réalisées soit en tant que professeur, soit en tant qu'apprenant, soit en tant qu'animateur de groupe ou des leçons particulières qui peuvent également rester implicites,
- des représentations, des croyances sur les missions du professeur, les valeurs de l'éducation ou sur d'autres valeurs.

Bien sûr, ces deux classifications ne sont pas liées par une correspondance terme à terme. Ainsi, s'il est assez facile de faire correspondre les connaissances mathématiques avec des

savoirs institutionnels, il n'est pas du tout aisé de réaliser la même correspondance avec les autres connaissances et savoirs ou savoir faire. Par exemple, on peut penser que les connaissances de type didactique peuvent provenir de savoirs institutionnels (par des écrits de recherche) ou bien de savoirs construits par le sujet après la lecture de documents, ou encore par des expériences de classe.

Un autre élément important, selon nous, est le caractère implicite ou explicite de ces connaissances ainsi que leur plus ou moins grande antériorité. Ainsi on peut penser que les professeurs, comme d'autres professionnels, apprennent sans arrêt et donc réorganisent leur système de connaissances. C'est peut-être plus particulièrement vrai pour les professeurs stagiaires qui, institutionnellement, doivent acquérir des connaissances, savoirs et savoir faire, que l'on appellera des compétences professionnelles.

Nous repérons ensuite des institutions dans lesquelles ces savoirs peuvent être présents :

- *Institution scolaire des études* dans laquelle les professeurs ont acquis leurs connaissances mathématiques : cela nous semble d'autant plus pertinent que nous avons des novices, et que, donc ils sont encore très proches de ce système,
- *Institution scolaire de préparation au concours* que nous distinguons du système scolaire car nous considérons, comme il est déclaré dans les textes, que c'est une première année de professionnalisation avec un but déclaré : ainsi, par exemple, certains étudiants peuvent déjà faire des stages dans des établissements scolaires secondaires,
- *Institution de formation* qui est constituée par l'établissement de formation mais aussi par les professeurs tuteurs ou maîtres de stages qui participent à la formation
- *Institution de l'enseignement secondaire* composée par les établissements scolaires que les professeurs rencontrent, par les classes dans lesquelles ils enseignent et par les autres professeurs qu'ils rencontrent qui sont identifiés comme des collègues de travail et non comme des formateurs,
- *D'autres institutions* dans lesquelles on peut trouver des activités d'enseignement ou d'éducation hors du milieu scolaire comme, par exemple les cours particuliers, l'animation de centres de vacances, etc.

Enfin une question de recherche importante est de savoir comment nous allons attribuer ces connaissances aux professeurs interrogés, avec quels critères. Certaines peuvent l'être sur la base de déclarations : c'est le cas des connaissances qui portent sur le programme, sur les élèves, sur le contexte de la classe. D'autres peuvent être identifiées par des actions du professeur, notamment quand il effectue des choix, c'est pourquoi nous veillons à lui faire expliciter ses critères. Enfin d'autres connaissances comme principalement les connaissances mathématiques sont attribuées a priori, ceci en fonction des expériences passées des professeurs dont on sait qu'ils ont réussi un concours difficile dans lequel les connaissances mathématiques étaient vérifiées. Cependant nous sommes bien consciente que ces connaissances ne sont pas toutes identiques pour les professeurs et surtout qu'elles peuvent être insuffisantes comme le montrent Pian, 1999 et Robert, 2000 dans une étude sur les étudiants de licence. Robert résume ainsi : "En somme les étudiants ont des connaissances atomisées, techniques, non disponibles, sans mise en relation, sans « relief » épistémologique."

2. Les travaux antérieurs sur la préparation des séances

Nous n'avons pas trouvé de travaux récents qui abordent la question de la préparation de cours. Un article ancien de Tochon, 1989 qui a pour titre "A quoi pensent les enseignants quand ils planifient leurs cours ?" se place délibérément, comme son titre l'indique, du côté de la planification et de la pédagogie par objectifs. Il vise à décrire de façon globale ce qui est fait par les professeurs et montre qu'il n'y a pas de méthode générale pour accomplir cette tâche, ni pour tous les professeurs, ni pour un même professeur qui ne planifie pas de la même façon selon le court, moyen ou long terme. Il souligne également, pour les pays concernés par un enseignement de cette planification, une grande distance entre la façon de procéder des professeurs pour préparer leurs cours et l'enseignement sur la planification qui leur a été donné, ce qui l'amène à remettre en cause cet enseignement.

Durand, 1996 reprend également des travaux anciens sur la planification et donne quelques résultats. Ainsi, il souligne que cette activité est essentiellement personnelle, qu'elle se déroule à différents moments et à différents endroits, que sa durée est très variable d'un professeur à l'autre. Elle sert à prévoir ce qui va se passer alors que le professeur n'est pas

devant les élèves et à lui fournir un certain nombre d'outils, elle a pour but de réduire l'incertitude face à ce qui va se passer dans la classe en anticipant si c'est possible les réactions des élèves. En bref, elle a des effets opérationnels et affectifs qui se doivent d'être performants, et Durand souligne que ce n'est pas toujours le cas chez les novices.

Pour ce qui est du contenu, Durand met en avant trois conclusions :

Concernant les contenus de la planification, les apports de la recherche peuvent être schématisés en trois points : une planification essentiellement organisée par rapport aux contenus enseignés, des préoccupations entretenant des rapports assez souples et inconstants avec l'apprentissage des élèves et une activité très routinière. (Durand op. cité, 1996).

Il distingue enfin sur plusieurs critères les novices et les experts. Ainsi les experts passent moins de temps à préparer leur cours que les novices, ils ont davantage de plans, de procédures accessibles et de routines, ce qui allège leur charge de travail. Enfin, les experts écrivent moins que les novices notamment en ce qui concerne leurs objectifs.

Nous reprenons ces résultats et nous les confronterons aux nôtres mais nous souhaitons avancer sur cette question en décrivant de façon plus fine comment les professeurs préparent leurs séances. Bien sûr, nous situons notre étude en France dans les années 2000 alors que l'institution de formation des maîtres a bien évolué par rapport aux années dont datent les études citées ci-dessus.

Des travaux de didactique des mathématiques prennent en compte des éléments écrits de la préparation des séances comme des observables qui seront alors utilisés pour faire des comparaisons entre ce qui était prévu et ce qui été observé en classe (voir par exemple, Lenfant, 2002 qui demande aux professeurs stagiaires choisis pour l'expérimentation de tenir un cahier de bord de leurs préparations ou bilans de classe). Roditi, 2001 reconstitue des éléments des préparations grâce à l'observation de la classe ; cependant rien ne garantit que les professeurs ont bien procédé comme il le reconstruit.

Enfin dans d'autres recherches (par exemple, Bolon, 1996, Sensevy et al, 2000) on propose aux professeurs des problèmes et ils doivent les intégrer ou non à leur préparation en justifiant leurs choix. Les questions de recherche portent alors sur les adaptations de ces problèmes à la classe et sur les effets produits sur les élèves.

3. Méthodologie

Pour le chercheur, il est difficile d'observer les moments de préparation de séances de classe pour plusieurs raisons. La première est que les professeurs n'ont pas forcément un temps et un lieu donné pour le faire, contrairement aux séances de classe. Nous savons bien par expérience, et les entretiens le confirment, que cette préparation se fait à plusieurs reprises, les professeurs y pensent à certains moments, reprennent ce qu'ils ont fait, etc. Il faudrait donc suivre un professeur pendant plusieurs jours, cela semble donc difficile.

La seconde est qu'une grande partie de ce travail se fait, en général, au domicile du professeur et il est également difficile d'aller l'observer chez lui.

Enfin, comme cette activité est en grande partie individuelle, il n'est pas aisé d'avoir des observables.

Nous avons donc choisi d'utiliser l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1994) : nous avons demandé aux professeurs volontaires de venir avec une préparation récente faite sous la forme qu'ils souhaitaient (papier, fichier informatique, manuel scolaire ou même sans aucun document) d'un cours qu'ils allaient faire très bientôt. Notre but est de leur faire raconter comment ils ont fait pour faire cette préparation, quelles ressources ils ont utilisées et de leur faire expliciter leurs choix. Il s'agit bien de faire raconter aux professeurs comment ils ont fait pour cette séance particulière, à ce moment-là, et non de leur demander une méthode générale qui pourrait provenir d'un discours appris ou de représentations générales qu'ils se font de cette tâche mais qui ne correspond pas à ce qu'ils font vraiment.

Nous avons enregistré au magnétophone et décrypté cet entretien, puis nous l'avons analysé en faisant tout d'abord un résumé de la méthode employée par chacun avec des renvois à chacun des documents écrits que nous avons photocopiés, puis nous avons déterminé les types de connaissances utilisées. Nous avons également photocopié les documents qui ont pu être utilisés à un moment, puis rejetés (notamment quand les professeurs indiquent qu'ils ont choisi entre plusieurs leçons de manuels, par exemple). Chaque entretien dure environ une heure.

Nous commençons toujours l'entretien de la même façon en faisant retrouver le moment où le professeur a préparé son cours, c'est-à-dire que nous le mettons en évocation comme le préconise la technique de l'entretien d'explicitation. Ainsi, nous savons sans le demander explicitement où se trouve le professeur quand il prépare ses cours, à quel(s) moment(s) il le fait, de quels outils il dispose. *"Je vous avais demandé de venir avec ce que vous aviez qui constituait un cours plus ou moins préparé, d'un cours que vous allez faire très prochainement. Je vais vous demander de vous replacer au moment où vous avez fait cette préparation, où c'était, quand et d'essayer de nous raconter comment ça c'est passé."*

Nous veillons particulièrement à faire expliciter les choix faits : par exemple, lorsque le professeur indique qu'il préfère telle ou telle activité ou tel manuel, nous demandons systématiquement : *"comment savais tu ? à quoi voyais-tu que tu le préférerais ? que t'es-tu dit à ce moment là ?"*

Enfin, pour tenter de déterminer l'origine des connaissances mobilisées, nous avons intercalé des questions comme : *"où as-tu appris à faire cela ?"*

Actuellement, quatre entretiens ont été faits en juin 2004 (avant la fin des cours et après le jury de validation) avec quatre stagiaires volontaires en fin de formation. Il est important de préciser qu'il est difficile d'avoir des volontaires pour ces entretiens car ce travail de préparation semble être une composante très privée du travail du professeur. C'est pourquoi, nous n'avons ni choisi la classe, ni le chapitre, nous avons accepté tous les volontaires. Enfin, pour la même raison, nous n'avons pu avoir une parité homme /femme.

- Arnaud : nombres relatifs en 6^{ème}
- Chloé : Fonctions trigonométriques en 2^{nde}
- Céline : géométrie dans l'espace en 2^{nde}
- Corinne : translations en 4^{ème}

Ainsi nous ne prétendons pas avoir un échantillon représentatif mais nous travaillons sur des études de cas.

4 . Les résumés des préparations

Comme nous l'avons dit ci-dessus, nous faisons tout d'abord un résumé du récit de cette tâche de préparation. Voici, à titre d'exemple, deux résumés que nous avons élaborés. Ces textes sont essentiellement descriptifs de façon à avoir une trame de ce qui est fait. Ainsi, nous n'employons que des verbes à la forme affirmative. Nous avons bien sûr reconstruit le discours du professeur et nous avons introduit des termes qu'il n'avait pas forcément employés. Nous avons choisi de conserver les termes "activité" ou "activité préparatoire" qui sont sans cesse employés par les professeurs, pour désigner ces sortes d'exercices proposés aux élèves dans les manuels pour introduire les notions. Ces activités devraient permettre aux élèves de rencontrer un savoir nouveau par le biais d'un problème, en s'appuyant sur des savoirs anciens qui se révèlent inadaptés ou insuffisants. Or, en général, elles ne constituent même pas toujours, selon nous, des problèmes ou même des exercices. Quand il y a un problème, il est souvent très découpé, composé de questions courtes et fermées. On peut donc dire que souvent ces activités d'introduction ne répondent pas à leur fonction première (déjà souligné par Robert et Rogalski, 2004).

Les résumés sont relativement courts (environ une demi-page) pour vraiment mettre en avant les différentes étapes. Nous notons les documents apportés en face des actions qui les concernent, cela nous permet de vérifier la cohérence de ce qui est raconté. Enfin, nous avons repéré de façon systématique :

- le(s) lieu(x)
- les ressources (nature, nombre)
- les documents apportés
- les critères énoncés
- la trace écrite.

Résumé de la préparation de Céline

Résumé de la préparation de Céline

Elle prépare tout son chapitre (habituel). Ici c'est le chapitre de géométrie dans l'espace en 2^{nde}.

Elle travaille chez elle avec les programmes et des manuels (ici elle en utilise 4 mais elle en a d'autres).

Elle consulte les programmes de la classe concernée (ici 2^{nde}) et de la classe précédente pour voir ce que les élèves savent. Elle écrit un résumé des programmes.

Ensuite, elle ouvre ses livres (elle en avait 4) et elle choisit d'abord un plan de synthèse de cours dans un livre.

Ses critères : une synthèse complète avec des définitions (ceci est habituel pour elle) dans laquelle il y a des dessins (lié à ce chapitre).

Elle choisit ensuite une activité préparatoire à chaque paragraphe de la synthèse et elle note cet ordre avec l'indication du manuel, de la page et du numéro de l'exercice ainsi qu'éventuellement quelques commentaires. Ce document constitue sa préparation écrite.

Ses critères : elle commence par un exercice qu'elle juge être de rappels des connaissances de la classe précédente puis des exercices où interviennent de nouvelles connaissances. Ses critères de choix portent essentiellement sur la forme (nombreuses questions courtes et rapides, aspect interactif).

Elle anticipe le temps qu'elle va passer sur chaque partie.

Elle découpe ensuite en séances et en parties à l'intérieur d'une même séance.

Elle fait les exercices de réinvestissement proposés surtout parce que c'est de la géométrie.

Elle prévoit un fonctionnement de type cours dialogué, elle ne prévoit pas de gestion plus précise.

Elle sait qu'elle va interroger des élèves mais elle n'anticipe pas qui.

Elle note ce qu'elle va faire écrire aux élèves.

Elle revoit cette préparation avant chaque séance pour se la remettre en tête ou pour rectifier le temps par rapport à ce qui s'est passé dans la séance précédente.

La trace écrite :

Outre les fiches photocopiables d'exercices ou de cours, la trace écrite est composée des références des exercices suivies des titres des parties qu'ils permettent d'introduire. En résumé ce sont des numéros d'exercices et des titres de paragraphes.

Ex 1 p. 260 (BELIN) : réinvestissement (photocopie)

n° 1 p. 178 (HYPERBOLE) : du patron à la perspective

→ permet d'introduire le I perspective cavalière : fiche IUFM

n° 2 p. 178 (HYPERBOLE) : sections planes de solides

→ permet d'introduire le II section d'un solide usuel par un plan (en photocopie)

....

Résumé de la préparation de Corinne

Résumé de la préparation de Corinne

Elle prépare tout le chapitre. Ici, il s'agit de la translation en 4^{ème}. Elle prend en compte le temps qu'elle a pour le faire (ici, deux semaines).

Elle travaille chez elle avec son ordinateur pour consulter un site où elle trouve des activités (Mathenligne), elle a 2 manuels de 4^{ème} et les programmes.

Elle cherche tout d'abord des activités qu'elle juge intéressantes, puis elle vérifie qu'elles sont compatibles avec le programme. En fait, chaque activité met en avant soit la définition d'une translation, soit une de ses propriétés.

Ses critères : elle veut que les élèves soient actifs, qu'ils puissent faire quelque chose.

Pour cela, les énoncés doivent être clairs et précis (habituel). Ici elle choisit ceux de mathenligne car il y a plusieurs exercices avec le même support (lié au chapitre).

Elle choisit donc 4 activités sur le site : translation de cocottes dessinées sur quadrillage (reconnaissance puis tracé), image de points du quadrillage (reconnaissance puis tracé).

Elle choisit ensuite des activités du manuel de la classe qui permettent de travailler sur l'image d'une droite, du milieu d'un segment, d'un cercle.

A l'occasion de chacune des activités, elle donnera aux élèves des propriétés et à la fin elle distribuera une fiche méthode prise sur Mathenligne.

Elle écrit ensuite son programme de la semaine, séance par séance, de façon très brève (quelques lignes) : c'est un plan succinct qui rappelle les phases de sa séance, les références des activités, la forme des synthèses et des numéros d'exercices pris dans le livre.

Elle intercale et elle prend en compte des activités qui relèvent du fonctionnement quotidien de la classe : corrections de devoirs

Elle rédige également la synthèse qu'elle fera copier aux élèves.

Elle anticipe, sans le noter, ce qu'elle va dire aux élèves pour introduire les activités, les formes de travail, l'organisation des corrections.

Elle prévoit la difficulté des activités et le temps nécessaire.

La trace écrite :

Elle est composée de plusieurs feuilles : le plan de la semaine séance par séance avec des indications précises sur ce qui sera fait y compris les corrections de devoir, le plan complet du chapitre avec tout ce qui sera fait et tout ce qui sera copié par les élèves et les fiches d'exercices.

Nous voyons là encore une forte cohérence entre ces documents et la façon dont a procédé Corinne puisqu'elle fait un choix d'activités qui constitue une grande partie de sa préparation et qu'ensuite elle découpe le temps par rapport à la semaine : *"Et quand elle est faite je répartis ça dans le temps par exemple là le chapitre sur la translation que je vais faire doit tenir sur une semaine donc j'ai regardé mes activités j'ai tout mis ça en une semaine à peu près avec les exercices associés."*

Premières conclusions

Nous constatons qu'à travers le récit des professeurs et grâce à l'entretien d'explicitation, nous pouvons reconstituer de façon assez précise les grandes étapes de leur préparation. Ainsi un des premiers résultats concernant la méthodologie est la cohérence entre leur récit et les documents apportés, ce qui nous permet de reconstruire ce qu'ils ont fait.

On peut donc voir des convergences mais aussi des différences interpersonnelles tant sur le procédé que sur la forme. Chacune de ces manières de faire nous semble assez classique mais il nous paraît important de pouvoir la décrire.

Nous pouvons voir que les préparations concernent un chapitre entier et qu'elles sont donc assez peu détaillées notamment en ce qui concerne la gestion de la classe et le travail effectif des élèves.

Enfin les traces écrites sont elles aussi très différentes dans leur forme et leur contenu. Notamment pour Arnaud, on peut dire qu'il n'a qu'une trame qu'il va adapter au cours du temps alors que Corinne ou Cécile ont des préparations beaucoup plus complètes (ce qui ne veut pas dire qu'elles ne les adapteront pas aussi dans le temps).

Enfin il y a de fortes cohérences entre le procédé et les outils utilisés et la trace finale de la préparation notamment au niveau de l'utilisation du programme.

5. Des similarités fortes

5.1 Le travail de préparation est un travail privé

Les quatre professeurs interrogés travaillent seuls chez eux. Cependant ils peuvent revenir plusieurs fois sur leur préparation notamment en fonction des réactions des élèves lors des séances précédentes.

Ils ont à leur disposition les programmes, plusieurs manuels dont celui de la classe, pour certains un ordinateur et Internet. Ceci confirme les résultats d'autres études qui soulignent bien le caractère privé des préparations et ceci explique pourquoi il est difficile de trouver des professeurs volontaires pour montrer leurs productions.

5.2 Les professeurs préparent un scénario de chapitre complet

Un premier résultat montre que les préparations faites concernent un chapitre entier. Ainsi les professeurs travaillent soit un long moment (pour certains une demi journée entière, pour d'autres en plusieurs fois) pour préparer tout le chapitre.

Par exemple, Chloe revient plusieurs fois sur ce qu'elle a fait à la fois avant le début du chapitre et en cours de réalisation. Ainsi, elle fait des adaptations locales par rapport à un premier plan, ce qui peut l'amener à modifier l'ordre des paragraphes ou à rejeter une partie. Nous avons ici l'illustration d'une préparation faite de plusieurs touches avec un souci de cohérence par rapport à l'ordre des notions présentées : *"Ben déjà quand je le reprends 1 ou 2 jours après pour moi c'est enfin je me pose pas de question enfin oui c'est clair pour moi quoi déjà puis j'ai en regardant les exercices pour voir l'ordre les exercices que je mets au milieu si je m'aperçois que ben l'exercice que j'avais prévu j'ai besoin de quelque chose qui est après c'est que pour le faire ben c'est que ça va pas donc soit je change d'exo soit je change de paragraphe et puis ça m'est arrivé sur certains chapitres de commencer mon chapitre et puis au milieu de me dire non mais là il faut que tu changes parce que ils ont pas réagi comme je pensais ou ça c'est pas déroulé de la bonne façon et il faut que je change au milieu quoi ça m'est arrivé aussi."*

Ceci fait, trois d'entre eux découpent leur préparation en un nombre de séances qu'ils estiment raisonnable, c'est-à-dire qui correspond à la pratique habituelle des professeurs ou aux contraintes de temps (notamment en fin d'année). Seul Arnaud ne fait pas ce découpage a priori, il se laisse guider par l'avancement de la classe. *"Moi je n'ai pas de prévision sur l'ensemble du chapitre. C'est plus séance après séance donc comment ça se passe donc suivant comment ça se passe à la première séance on voit si on veut avancer plus ou moins vite dans celle d'après."*

5.3 Prise en compte importante des programmes

Une première constante chez ces quatre professeurs concerne la prise en compte des programmes. Ainsi, tous lisent attentivement au moins le programme de la classe et éventuellement celui de la classe précédente. Dans l'entretien, nous avons constaté qu'ils en citaient (certains les écrivent) spontanément des éléments principaux mais pas forcément dans les mêmes termes. Tous évoquent soit les objectifs du chapitre qu'ils se construisent à partir des programmes ou bien qu'ils reprennent dans les manuels, soit des éléments de savoir mathématique.

Par exemple Chloé : *"Alors j'étais chez moi donc le chapitre qui nous intéresse c'est les fonctions trigonométriques j'étais chez moi j'ai commencé par regarder le programme ce qu'il fallait que je fasse donc avec le document d'accompagnement"*.

Tous indiquent que cette forte prise en compte des programmes est un savoir-faire acquis en formation grâce à l'insistance des formateurs. Nous retrouvons donc ici un élément de la classification de Shulman (connaissance des programmes) qui semble particulièrement mis en avant. On peut faire l'hypothèse que c'est une caractéristique des novices et que des professeurs experts ont peut être moins besoin de consulter les programmes et donc d'écrire des listes d'objectifs.

5.4 Recours massif aux manuels scolaires

Une autre constante est le recours massif aux manuels scolaires pour organiser leur plan et pour choisir des exercices. Un seul professeur utilise également des sites Internet de la même façon.

En fait, il semblerait que le travail de préparation consiste à choisir parmi quelques (voire beaucoup pour Chloé) manuels (ou Internet) un plan ou des parties de synthèse qui conviennent en fonction de critères portant majoritairement sur la forme ou sur la clarté et des activités (pas forcément dans cet ordre, la recherche d'activités pouvant précéder celle de la synthèse). On pourrait comparer ce travail à la réalisation d'un puzzle dans lequel on agence des pièces déjà fournies. L'image du puzzle nous paraît bien rendre compte de cette élaboration. Ainsi, on peut agencer les pièces d'un puzzle avec une certaine organisation, ou en ayant déjà fait des tris ou bien un peu au hasard. Cela correspond bien à ce que nous avons pu relever chez ces quatre professeurs.

Voici par exemple, Arnaud : *"Oui donc moi je regarde les plans de ce qui se fait et j'ai trouvé moi je mets d'abord mon plan suivant en regardant les différents plans que font les différents livres et donc là donc les plages du chapitre sur les nombres relatifs et le repérage."*

Ou bien Chloé : *"ensuite j'ai beaucoup de livres de 2^{nde} donc je les ai un petit peu tous regardés pour voir comment ils faisaient parce qu'en fait j'ai pas fait les fonctions trigonométriques avec les fonctions de référence donc je trouvais que j'avais fait beaucoup*

de fonctions à l'époque et donc j'ai regardé dans des livres en fait c'est tout groupé donc j'ai pris ce est qui dans les parties de livres."

Grâce à l'entretien, on peut estimer que Arnaud a des critères de choix des exercices très stricts qui font qu'il décide très vite de prendre ou non un exercice sans chercher à le modifier.

Seule Chloé complète un exercice trouvé dans un manuel par des questions trouvées dans un autre. les autres prennent les exercices tels quels.

Nous verrons dans un paragraphe suivant que pour Céline le manuel peut être aussi source d'idées pour la prise en compte des connaissances antérieures. Ainsi le manuel est également une source d'informations ou de connaissances et certains professeurs se laissent guider par leur exploration des manuels.

Deux professeurs pensent que cette pratique de recherche assez systématique dans les manuels peut provenir de l'habitude prise lors de la préparation de l'oral du concours français qui leur permet de devenir enseignant (CAPES, épreuve sur dossier) de produire un choix d'exercices commenté, comme l'indique Chloé *"Oui ben disons que pour l'oral 2 du CAPES on a besoin de livres donc moi je m'étais déjà fait une bibliothèque l'année dernière donc pour le coup ça me semblait naturel"*.

Ce point avait déjà été souligné par Lenfant, 2002 en ce qui concerne la construction de séances en l'algèbre en classe de 2nde. Elle indique que pour élaborer leur cours, les professeurs ont recours à plusieurs manuels alors qu'ils choisissent les exercices dans le manuel de la classe.

Il apparaît, comme on pouvait s'y attendre, que les manuels scolaires sont les ressources didactiques privilégiées. Notre étude a particulièrement montré que chacune de ces quatre personnes s'est appuyée en fait sur plusieurs manuels pour élaborer les différentes organisations mathématiques étudiées. Il s'agit clairement, pour nous, d'un héritage de la préparation au CAPES, en particulier celle relative à la deuxième épreuve orale pour laquelle les étudiants prennent l'habitude de rechercher dans différents manuels des exercices portant sur un thème donné. (Lenfant op.cité, 2002)

Ainsi nous voyons sur ce point apparaître le transfert d'une pratique acquise dans le cadre d'une institution ayant pour finalité la préparation et la réussite à un concours, avec une épreuve imposée, dans l'institution "Enseignement", avec la transformation de cette pratique en une compétence professionnelle. Peut-on conclure que cette pratique fortement liée aux habitudes prises pour la préparation d'une épreuve du concours irait donc à l'encontre d'un véritable questionnement sur le savoir à enseigner ? Nous restons prudente sur ce point mais la question se pose.

5.5 Peu de questionnement sur le savoir mathématique à enseigner

Une autre constante, liée à la précédente par l'omniprésence des manuels, est que les professeurs interrogés ne partent pas vraiment du savoir mathématique dans le sens où, par exemple, aucun ne se pose la question de savoir quels types de problèmes une notion mathématique permet de résoudre. Les choix faits sur les exercices sont bien sûr pilotés par les connaissances mathématiques des professeurs puisque ceux-ci savent résoudre les exercices et savent émettre un jugement mais on peut dire que ce savoir n'est pas vraiment retravaillé dans un but de transmission de connaissances. Les critères de choix portent souvent sur la forme, par exemple Arnaud *"Dans ma première idée j'avais envie de faire cette activité parce que je veux dire elle est assez concrète ça ça va leur plaire"*. D'ailleurs on peut noter la fréquence de l'emploi des termes "plaire, elle m'a plu, ça ne m'a pas plu".

On peut s'étonner de cette grande dépendance vis-à-vis des manuels, surtout dans des cas très simples. Par exemple, Arnaud reprend telle quelle cette synthèse sur les nombres relatifs alors que ses connaissances mathématiques sont certainement suffisantes pour produire une synthèse similaire.

Il existe de températures positives ($+40^{\circ}\text{C}$ sur la plage en plein été) et des températures négatives (-18°C dans le congélateur). Les dates des événements qui se sont produits avant la naissance de Jésus-Christ sont parfois notées avec le signe moins (bataille d'Alésia en -52). (Dimathème 6^{ème}, 2000)

Si l'on reprend la classification des savoirs de Shulman, on voit donc ici que les connaissances mathématiques sont utilisées pour faire des exercices, un peu comme les

élèves, mais qu'elles ne sont pas mobilisées pour questionner le savoir mathématique, pour aller chercher des idées de problèmes ou même pour bâtir les synthèses de cours. Nous voyons plusieurs raisons à cela :

- les professeurs disposent de nombreux manuels, qu'on peut penser bien faits ; ceux-ci font donc l'économie d'écrire eux-mêmes leur cours,
- les représentations des enseignants sur le savoir écrit dans les manuels les empêchent de se donner le droit de le modifier,
- l'activité mathématique est considérée dans le but de faire des exercices, ce qui correspond à l'institution Etudes (on demande de résoudre des problèmes) ou à l'institution Préparation au concours mais n'est pas envisagée pour produire des activités intéressantes pour les élèves.

Ce phénomène est intéressant puisqu'il permet de montrer que certaines pratiques au sujet de savoir peuvent se transférer d'une institution à une autre sans que leur pertinence ne soit interrogée. Et même si elle l'a été dans l'institution de formation, les professeurs ne sont pas encore capables de faire ce transfert. On peut également se demander si la formation continue, par exemple, favorisera ce changement.

5.6 Notion centrale d'activité préparatoire

On voit apparaître la notion centrale "d'activité préparatoire" ou "d'activité d'introduction" qui semble complètement intégrée chez ces quatre professeurs. Précisons que c'est bien l'idée de proposer des activités visant à introduire des savoirs nouveaux qui semble naturalisée et non sa réalisation concrète sur laquelle on pourrait discuter. Nous pensons que c'est un phénomène relativement nouveau, que nous n'aurions certainement pas eu ce résultat il y a dix ans. Ceci nous semble provenir d'au moins deux sources : la formation qui met en avant l'idée de problématisation du savoir et les manuels scolaires qui emploient ce terme pour désigner les exercices qui sont proposés avant les synthèses. Nous avons déjà abordé cette question

Ceci nous donne donc une idée générale de ce que peut être un plan de séance : activité préparatoire, synthèse, exercices d'application sans liens entre ces parties.

De plus, comme nous l'avons dit précédemment, les activités choisies sont souvent reprises telles quelles dans les manuels et ne correspondent pas toujours, selon nous, à de véritables activités dans le sens où les élèves n'ont pas vraiment de problème à chercher ou bien elles sont trop guidées.

Si nous analysons les activités choisies par les professeurs nous constatons qu'elles sont souvent constituées de tâches peu problématiques, avec de multiples questions très fermées. Par exemple, Céline choisit un QCM Vrai/ faux à partir de solides de l'espace représentés en perspective cavalière.

6. Des différences

6.1 Des écrits différents

Comme nous l'avons vu, la production écrite finale qui constitue la préparation du chapitre est très différente d'un professeur à l'autre.

Trois écrivent leur plan de cours sur papier, une sur ordinateur.

La longueur de ce plan est variable : de un tiers de page (Arnaud) à deux pages (Chloé et Céline). Enfin Corinne a différentes fiches : sa préparation n'est pas seulement faite en fonction du savoir mathématique mais également en fonction de la vie de la classe. Ce point nous interroge car nous pensons que les autres professeurs interrogés prennent eux aussi en charge la correction des devoirs et d'autres tâches quotidiennes et répétitives, mais ces éléments ne font pas partie de leur préparation ou bien ils sont tellement intégrés qu'ils n'ont pas besoin de les préciser.

6.2 Modification des exercices pris dans les manuels

Comme nous l'avons dit plus haut les exercices sont pris tels quels dans les manuels et très peu souvent modifiés. Or de nombreuses études ont montré le rôle important des variables

didactiques. Notre expérience de formatrice nous amène à penser que les professeurs ne se donnent pas le droit de modifier des exercices de manuels : ceci semble confirmé en partie ici.

Seule Chloé indique bien qu'elle modifie l'exercice choisi et pourquoi : *"Alors la formulation de la question que ce soit intelligible enfin qu'y ai pas d'ambiguïté sur la réponse qu'on peut apporter*

heu que enfin voir le but de l'activité s'il veut vraiment faire faire enfin si la façon dont l'activité se déroule a le même but que moi ce que je veux faire faire à mes élèves heu regarder si le enfin comme mon but c'est d'introduire le radian si cette activité va vraiment enfin si à la fin de cette activité je vais pouvoir dire bon ben maintenant avec tout ce qu'on a fait enfin si ce que je veux faire va pas tomber sur un cheveu comme un cheveu sur la soupe

heu si et puis regarder si quand même ils ont vraiment un travail à faire ou si c'est une petite activité pour s'amuser quoi

enfin faut quand même qu'ils aient matière à travailler et que ça soit pas trop facile enfin quelque chose et puis que ce soit assez complet"

On constate donc que la notion de variable didactique qui est certainement une notion enseignée en formation est peu (voire pas) mobilisée ni au niveau déclaratif, ni au niveau procédural.

6.3 Prise en compte des connaissances antérieures des élèves

Pour deux professeurs (Céline et Chloé), il y a une explicitation forte des savoirs anciens et nouveaux. Chez les deux autres, il n'y a pas de trace de ce questionnement. On peut se demander si c'est une caractéristique des professeurs ou bien du chapitre traité. En effet, on pourrait dire que Corinne et Arnaud font des chapitres pour lesquels le savoir mathématique leur apparaît comme complètement nouveau : les nombres relatifs et les translations.

Les cas de Céline et Chloé sont différents : pour cette dernière, même si elle le déclare, on peut constater que dans sa préparation, peu de choses indiquent qu'elle va effectivement prendre en compte les connaissances antérieures des élèves sur la trigonométrie (par

exemple par des phases de rappel ou une évaluation diagnostique ou autre). En revanche, Céline choisit une activité qu'elle nomme réinvestissement et qui porte sur des connaissances anciennes. Elle précise cependant qu'elle a trouvé l'idée en feuilletant les manuels : *"je n'ai pas eu de moi même l'idée de faire une activité de réinvestissement mais j'en ai vu une et c'est là où je me suis dit en lisant cette activité en me disant ça ce n'est pas une activité qui leur apprend quelque chose de nouveau c'est quelque chose de récapitulatif donc ça serait bien de le faire mais ce n'est pas moi qui ai eu l'idée j'ai lu un des livres parce que ce genre d'activité n'étaient que dans un seul des livres qui m'a fait prendre en compte cette activité"*.

Dans les deux cas, on peut tout de même dire qu'elles ont intégré cet élément à leurs connaissances sur les élèves ou à leurs connaissances didactiques et que cela leur permettra certainement d'avoir des interventions pertinentes dans le cadre de la classe.

Nous retrouvons là une conclusion de Robert et Rogalski, 2004 qui précisent que le travail sur les savoirs nouveaux est souvent fait sur des tâches isolées sans reprise et sans lien avec les savoirs anciens.

6.4 Anticipation du temps à passer

Toutes les études sur les enseignants ont bien montré l'importance de la prise en compte du temps d'enseignement et de l'avancée du temps didactique. On retrouve donc des remarques sur ce point dans tous les entretiens. Cependant, on constate que les professeurs anticipent plus ou moins sur le temps qu'ils vont passer sur telle ou telle partie. De plus, comme les entretiens ont eu lieu en fin d'année, on peut voir certains professeurs prendre en compte le fait que le temps est encore plus compté à ce moment. Ceci est particulièrement vrai pour Céline : *"donc c'est par rapport à cette succession de questions qui étaient des petites questions qui sont vite faites en plus parce que je ne veux pas non plus y passer 1 heure sachant que je n'ai plus beaucoup de séance aussi j'ai aussi géré là-dessus parce qu'il me reste 3 ou 4 séances avant la fin donc c'est ces petites questions successives assez rapides et récapitulatives qui m'ont plu quant à l'objectif de cette activité de réinvestissement."*

6.5 Anticipation des réactions des élèves

Ce point constitue une différence importante chez les quatre professeurs. Corinne, peut-être parce qu'elle enseigne dans un collège difficile, indique plus particulièrement des critères qui portent sur les apprentissages des élèves comme, par exemple : *"je regarde les activités qui me semblent le plus riches où les élèves peuvent plus s'investir ça explique pourquoi j'ai choisi telle activité dans tel livre et pas dans un autre"*

"Je veux que les élèves soient actifs donc j'essaye de prendre des activités dont l'énoncé est bien clair pour tout le monde on comprend ce qu'il faut faire et chacun peut se mettre dans l'activité c'est pour ça que j'ai choisi celle-ci."

Dans l'entretien, elle précise également souvent ce qu'elle va dire aux élèves car elle a le souci de leur expliquer ce qu'ils ont à faire et pourquoi. Enfin elle anticipe comment elle va gérer les différences de rythme entre les élèves (entre ceux qui ont fini assez vite et ceux qui ne comprennent pas ce qu'il faut faire). *"ce que je fais c'est que j'essaye toujours d'introduire un peu le chapitre j'aime pas l'idée de passer de la correction du DS on fait autre chose tenez l'activité débrouillez vous je préfère leur dire un peu ce qu'on fait bon on va voir la translation quelque chose de nouveau un peu de géométrie introduire comme ça leur présenter l'activité 1 alors ce que je vais faire c'est je vais leur donner la feuille en entier je pensais au départ couper en 2 leur donner d'abord cette partie après l'autre mais je me suis dit qu'avec la page en entier les élèves qui auront vite compris pourront ensuite s'occuper en commençant l'activité 2 ça éviteront qu'ils restent sans rien faire comme ça je pourrais m'occuper de ceux qui ont un peu plus de mal avec cette histoire d'image qu'on déplace."*

Pour les trois autres professeurs qui proposent des activités gérées en question/réponse et très contrôlées par le professeur, ces critères sont moins affirmés, notamment chez Céline qui évoque très peu les élèves. Notons bien que nous ne voulons pas dire du tout que ce professeur n'a pas la préoccupation de ses élèves, simplement c'est soit le registre de description de sa préparation qui n'est pas le même soit que sa gestion de classe ne l'incite pas à se poser ces questions.

Ainsi, nous faisons l'hypothèse que c'est parce que Corinne propose une activité qui amène les élèves à travailler seuls qu'elle se pose ce genre de questions alors que les autres ayant

un contrôle plus direct de la classe font l'économie de cette anticipation. Ceci montre que gestion de classe et type d'activités proposées sont étroitement liés et qu'il ne faut sous-estimer l'un par rapport à l'autre.

Les professeurs interrogés n'évoquent pas du tout les stratégies ou les erreurs des élèves, peut-être parce qu'ils sont novices, nous ne le savons pas actuellement.

6.6 Le travail quotidien de la classe

Seule Corinne indique qu'elle fait un découpage par semaine ce qui lui permet de tenir compte des activités quotidiennes de la classe comme les corrections de devoirs. C'est la seule qui le précise : *"Alors jeudi j'ai fait mon petit programme comme à chaque semaine où j'explique", "J'ai 4 séances enfin selon les semaines bref où j'explique chaque séance ce que je vais faire donc celle de jeudi on va corriger le DS"*. Elle précise que c'est auprès des professeurs du collège dans lequel elle fait son stage qu'elle a appris à gérer son temps de cette façon.

Les autres n'évoquent pas ce point mais ils le prennent certainement en compte sans l'écrire.

Conclusion

Cette étude nous a permis de produire une description fine de l'activité de préparation de cours chez des professeurs novices. Nous avons constaté que ces descriptions avaient des points de convergence (même si nous n'avons pas fait une étude statistique) mais aussi des différences inter individuelles non négligeables.

Elle nous a permis de mettre en avant le rôle central du programme et des manuels et de montrer que cette construction ressemblait davantage à celle d'un puzzle qu'à une élaboration purement personnelle. Cela nous interroge sur le rôle à donner dans la formation à la prise en compte et à l'analyse des manuels. Par exemple on peut se demander s'il faut travailler sans, avec, contre les manuels.

Un certain nombre de notions didactiques, dont on peut penser qu'elles sont travaillées en formation sous des formes diverses, n'apparaissent pas dans les résumés des professeurs. Nous allons seulement pointer quelques éléments que nous avons cités a priori au début de ce texte. Ainsi le terme "problème" n'apparaît pas dans le discours des professeurs. En revanche, celui d'activité apparaît massivement. Or nous voyons que ce n'est pas la même chose car ce qui est désigné sous le terme d'activité semble être une tâche souvent moins problématique. En conséquence, des questions liées à la dévolution n'apparaissent pas non plus puisqu'il n'y a pas de problème à résoudre et donc à dévoluer aux élèves.

De plus, nous constatons sur ces exemples qu'aucun travail n'est envisagé sur les liens entre activité préparatoire et synthèse. Ainsi les questions de contextualisation / décontextualisation, ne sont pas des éléments de connaissances didactiques mobilisées par les professeurs interrogés.

Nous pensons donc que les professeurs ont certainement constitué des connaissances relevant du disciplinaire, du didactique et de la connaissance des élèves mais elles ne sont pas suffisamment intégrées et donc pas mobilisées dans l'action. Elles restent donc souvent, pour le mieux, au niveau déclaratif.

On peut faire l'hypothèse qu'une année de formation n'est peut-être pas suffisante pour les acquérir ou bien que la pratique habituelle des professeurs non débutants n'a pas non plus vraiment encore intégré ces notions, ou encore que les maîtres de stage, professeurs experts, ne les ont pas acquises ou transmises. Il y a donc là certainement un travail important de formation des professeurs non novices.

En ce qui concerne la question des connaissances des professeurs, nous avons montré que ce moment de préparation était bien un moment où diverses connaissances sont mobilisées et s'articulent. Nous avons pu montrer :

- une connaissance importante des programmes,
- que les connaissances mathématiques étaient utilisées dans un but de résolution d'exercices mais peu pour l'élaboration d'activités intéressantes pour les élèves,
- qu'on pouvait reconnaître des éléments de connaissances didactiques au moins déclaratives

- que les connaissances portant sur les élèves étaient prises en compte de façon différente certainement en fonction du public,
- que certaines connaissances n'apparaissaient pas ici sans que l'on puisse dire qu'elles sont absentes (elles peuvent être mobilisées à d'autres moments).

En ce qui concerne l'origine de ces connaissances les professeurs mentionnent :

- la formation dispensée à l'IUFM soit concernant des éléments précis (prise en compte des programmes), soit sur des critères de choix d'activités ou sur des thèmes (passage du patron à la perspective pour Céline). Corinne cite également le mémoire professionnel dans lequel elle a travaillé la notion d'activité préparatoire.
- les maîtres de stage (cité par Corinne pour l'anticipation des procédures des élèves),
- les manuels scolaires qui permettent d'enrichir les connaissances mathématiques des professeurs par la donnée de conditions d'applications de ces connaissances.

Pour le moment nous retenons quelques idées pour la formation. La première semble être qu'un travail spécifique doit être fait en formation pour aider les professeurs novices à mobiliser davantage leurs connaissances mathématiques antérieures pour élaborer ou pour choisir des activités mathématiques riches pour les apprentissages et pour articuler celles-ci avec des connaissances sur les apprentissages des élèves et sur la gestion de classe. Ainsi, à partir de nos analyses, nous pouvons faire l'hypothèse qu'il est nécessaire de travailler ensemble la construction de tâches mathématiques problématiques pertinentes pour les apprentissages et des organisations de classe permettant de favoriser l'activité des élèves. Il semblerait que la pratique du cours dialogué soit un moyen d'éviter cette question ou de ne la prendre en compte que de façon approximative.

Ce point rejoint celui de la transposition et de la diffusion des savoirs didactiques. Quelles sont les connaissances didactiques qui semblent indispensables à enseigner aux professeurs ?

La deuxième pourrait être de considérer la formation dans la durée afin que des connaissances plus nouvelles soient approfondies, enrichies.

Enfin il est également certain qu'un travail doit être fait aussi avec les professeurs en place dans les établissements et notamment avec les maîtres de stage.

Cette étude sera complétée en interrogeant d'autres types de professeurs. Notre but final est de réaliser d'autres entretiens avec des stagiaires en fin de formation, avec des vacataires qui n'ont pas eu de formation, avec des professeurs qui ont entre 5 et 10 ans d'ancienneté et enfin avec des maîtres de stage pour faire apparaître des régularités et des différences à la fois d'un sujet à l'autre et d'un groupe à l'autre.

Bibliographie

- Altet, M. (1994). La formation professionnelle des enseignants. Paris : PUF.
- Bolon, J. (1996). Comment les enseignants tirent-ils partie des recherches en didactique des mathématiques ? Paris : Université Paris 5.
- Brousseau, G & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. Recherche en didactique des mathématiques, vol 11 n° 2. 3. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en didactique des mathématiques, vol 19 n° 2. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (2001). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. In Actes de la onzième école d'été de didactique des mathématiques. Corps Août 2001. Coordonné par J. L. Dorier. Grenoble : La pensée Sauvage.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. Recherche en didactique des mathématiques, vol 12 n° 2/3. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Durand, M. (1996). L'enseignement en milieu scolaire, Paris : PUF.
- Lenfant, A. (2002). De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. Thèse de l'université de Paris 7.
- Pian, J. (1999). Diagnostic des connaissances des étudiants de mathématiques de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. Cahier de DIDIREM, 34.
- Robert, A. (2000). Connaissances mathématiques actuelles des futurs enseignants, connaissances mathématiques (et didactiques) potentielles.... Séminaire de DIDIREM.

- Robert, A. (2001). Les recherches portant sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. Recherche en didactique des mathématiques, vol 21 n° 1, 2. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Robert, A. & Rogalski, M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. Repère IREM n° 54.
- Sensevy, G., Mercier, A & Schubauer Leoni, M. L. (2000). Vers un modèle didactique de l'action du professeur. A propos de la course à 20. Recherche en didactique des mathématiques, vol 20/3. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Shulmann, L.S. (1986). «Those who understand : knowledge growth in teaching». Educational Researcher, 15, 2, 4-14.
- Shulman, L., S. (1987). Knowledge and teaching : foundations of the new reform. Harvard Educational Review, Vol 57, 1, pp 1-22.
- Tochon, F. (1989). A quoi pensent les enseignants quand ils planifient leurs cours ? Revue Française de Pédagogie, n° 86.
- Vermersch, P. (1994). L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue. Paris : ESF Editeurs.

Analyse de l'action conjointe professeur-élèves dans le traitement d'un problème d'agrandissement de distances¹.

Francia Leutenegger & Florence Ligozat

Faculté de Psychologie et des Sciences de l'éducation

Université de Genève

Cette étude se propose de montrer un exemple du fonctionnement de l'action didactique dans le cadre de la résolution d'un problème d'agrandissement proportionnel de longueurs, en fin de cycle d'étude primaire dans l'enseignement genevois (grade 6). En référence à différents travaux de description de l'action du professeur qui se sont succédés ces dernières années (Sensevy 2001, 2002 ; Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni, 2000 ; Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, Ligozat & Perrot, 2005), nous soutenons la thèse que l'on ne peut comprendre l'action du professeur sans décrire celle des élèves. Ce constat a conduit plusieurs d'entre nous à envisager une théorisation l'activité didactique sous l'angle d'une action conjointe du professeur et des élèves, telle qu'elle peut s'actualiser dans des conditions ordinaires (Schubauer-Leoni, Ligozat, Leutenegger, Sensevy & Mercier, 2004 ; Sensevy & Mercier, sous presse). Nos recherches se concentrent donc sur l'élaboration d'un modèle de cette action conjointe, qui permet de décrire les formes de l'action humaine, spécifiée par les contraintes du didactique. Les analyses qui suivent sont l'occasion de montrer l'état d'avancement des travaux de l'Equipe Genevoise de Didactique Comparée sur l'opérationnalisation de ce modèle. D'une part, nous rappelons brièvement ses enjeux et les principaux éléments de sa structure et d'autre part, nous le faisons travailler sur des matériaux empiriques issus d'une recherche sur la place de la notion d'échelle cartographique en mathématique et en géographie dans l'articulation primaire / secondaire. Précisons que les matériaux que nous utilisons ont déjà fait l'objet

¹ Cette étude a fait l'objet d'un article proposé à la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, sous le titre (provisoire) "L'action conjointe et l'émergence de situations dans le didactique ordinaire. Le cas d'un problème d'agrandissement de distances" (Leutenegger&Ligozat, soumis).

d'une première exploration pour l'étude des connaissances antérieures des élèves dans la dynamique des apprentissages scolaires (Mercier & Le Maréchal, 2006) dans le cadre de l'appel d'offres Ecole et Sciences Cognitives (2003). Nous disposons donc d'une description approfondie des procédures de certains élèves dans leurs différentes tentatives de résolution d'un problème de proportionnalité en classe. En élargissant à présent la focale à l'analyse de l'action conjointe du professeur et des élèves, nous montrons comment le travail des élèves observés et la mobilisation de certaines techniques deviennent des éléments de participation des élèves au processus d'enseignement (au sens de Mercier, 1999). Ceci nous permet de questionner la place que cette participation vient à prendre dans le cours de l'action conjointe, résultant d'une dynamique de milieux et de topos différentiels.

1. Cadre théorique

1.1 L'étude du didactique ordinaire

De façon générale, l'élaboration d'un modèle de l'action didactique tente de répondre à la nécessité de comprendre les formes d'ingéniosité pratique (Sensevy, 2001 ; Schubauer-Leoni & Dolz, 2004) dont le didactique ordinaire est le siège. Par « didactique ordinaire », nous désignons ce qui fonctionne au quotidien dans les classes, sur la base des manuels disponibles et des constructions plus ou moins personnelles des enseignants, en dehors de toute intervention de recherche visant à promouvoir une pratique d'enseignement privilégiée. Dans ce contexte, on ne peut pas affirmer, a priori, que les pratiques ordinaires fonctionnent selon les canons épistémologiques qui sont présents dans les situations d'ingénierie didactique et ni qu'elles sont garantes de l'organisation des savoirs scolaires tels qu'ils sont prescrits par la noosphère. Il y a donc matière à observer et à comprendre de quoi est fait l'ordinaire de la classe de mathématique (dans lequel tout de même, nombre d'élèves apprennent...) pour déterminer a posteriori ce qui fait (ou ne fait pas) système d'enseignement et d'apprentissage, à la lumière des théories didactiques disponibles, telles que la théorie des situations (Brousseau, 1998) et de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991, 1992).

Sur le plan des finalités du modèle de l'action conjointe du professeur et des élèves, nous cherchons à dégager des catégories susceptibles de décrire et comprendre l'agir², en situation d'enseignement et apprentissage sur des contenus spécifiés, et donc articuler l'étude des pratiques effectives avec l'étude épistémologique des savoirs sous le couvert de différentes institutions (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005). Ce modèle comporte donc (au moins) une double ambition comparatiste, à savoir :

la mise en évidence de pratiques spécifiques et/ou génériques entre différents enjeux de savoirs, qui peuvent exister à l'interne d'une discipline mais aussi entre les disciplines et plus généralement au sein des diverses institutions, auxquelles l'apprenant (enfant ou élève selon les cas) se trouve assujéti. Il s'agit de comprendre à quelles conditions les œuvres/pratiques sociales « déjà là » se recomposent chez les sujets, dans le mouvement de transmission des savoirs.

un travail de spécification / conversion de concepts théoriques tels que les notions d'activité, action, intention, pratiques ...etc., portées actuellement dans les disciplines d'étude des dimensions du travail humain, et dont le statut émane d'autres champs disciplinaires, tels que la psychologie, sociologie, la philosophie analytique ou encore les sciences du langage. On peut citer en particulier les travaux de Bronckart (2004), Fillietaz (2002) ou encore Vernant (1997), qui, depuis un point de vue psycho-linguistique, tentent de montrer l'intérêt d'une distinction entre activité, action de la personne singulière et action collective, en remontant aux différentes significations des concepts d'activité et action, puis en les déplaçant pour les besoins de l'étude de l'activité humaine à travers les discours. L'enjeu d'un travail de conversion / spécification pour la didactique n'est pas tant dans le fait de se situer absolument, ni « d'appartenir » à un domaine de référence plutôt qu'un autre. Il se situe bien plus dans ce que le travail de spécification est susceptible de montrer, ce que des éléments de théorie plus vaste peuvent produire de neuf et la manière dont le didactique les renvoie à leurs limites. Question ouverte bien sûr, que nous n'allons pas développer ici, mais dont nous avons entamé l'étude ailleurs (Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat & Fluckiger, sous presse) pour montrer comment la dialectique entre action collective et action singulière dans l'activité, permet de théoriser la notion d'action conjointe dans le cas du didactique.

² Au sens de Bronckart (2004), qui utilise le terme « agir référent » pour désigner les chaînes de procès observables dans les formes d'intervention des humains dans le monde.

1.2 Fondements d'un modèle de l'action conjointe du professeur et des élèves

Nous allons maintenant exposer quelques concepts sur lesquels repose le modèle de l'action conjointe P-ELs, tout en précisant qu'il ne s'agit pas d'un « produit fini ». De nombreux points aveugles subsistent, et l'un des moyens de les débusquer est sans doute de mettre le modèle à l'épreuve des données empiriques, ce à quoi nous nous attelons dans la deuxième partie de ce texte.

En premier lieu, pourquoi parler de l'action « conjointe » P-ELs ? Plus qu'un partage de buts communs, c'est plutôt une interdépendance des actions que nous voulons mettre en exergue. Partant de l'activité comme un phénomène collectif, nous dirons avec Bronckart (2004) que l'action d'une personne singulière est bien une sorte de segmentation selon un processus réflexif de l'activité sociale en fonction de responsabilités, intentions et finalités ; que ce soit par une évaluation externe de l'actant par ses pairs en regard de l'effet produit, ou que ce soit par une évaluation interne de l'actant³ lui-même impliqué dans l'activité. La spécification du concept d'action en didactique réclame une double prise en compte : le fait que l'action de l'élève est contrainte (jusqu'à un certain point) par celle du professeur ; en retour, l'action du professeur est orientée par celle de l'élève, les attentes des deux parties étant sans cesse renégociées dans le contrat didactique. Ceci n'exclut pas des actions ponctuelles dérivées, concourantes et concurrentes, pour reprendre les termes de Vernant (1997) sur la collaboration, au sein du processus d'action conjointe. La métaphore du jeu, héritée de la théorie broussaldienne⁴, rend bien compte de cela, en posant que le professeur ne gagne à son jeu que si l'élève lui même gagne à son jeu sur un milieu donné. Dans ce jeu, l'élève doit faire face à une incertitude que le professeur doit réduire si l'élève s'éloigne trop des stratégies attendues, ou augmenter si l'élève se « sur-adapte »⁵ à des

³ Acculturé aux critères d'évaluation des pairs, il devient apte à se les appliquer.

⁴ Reprise dans les travaux de Sensevy & Mercier (Ed), sous presse.

⁵ En pratiquant des analogies trop rapides, l'élève ne prend en compte que des indices de surface et n'entre pas dans le jeu réellement.

enjeux trop restreints dans le contrat didactique. Il y a donc la nécessité de penser ensemble l'action de l'enseignant et de l'enseigné car elles se trouvent guidées par « des finalités conjointes », qui assurent le maintien de la relation didactique entre « trop » et « pas assez » d'incertitude dans le jeu.

Ces finalités conjointes peuvent être pensées comme une macrostructure qui contribue à faire que chacun gagne à son jeu dans les institutions didactiques. Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni (2000) ont posé quatre dimensions fondamentales de l'action conjointe : définir, dévoluer, réguler l'incertitude, instituer. Ce sont bien sûr des fonctions générales qui sont postulées comme génériques de l'activité didactique; elles coexistent à différents niveaux (grain plus ou moins fin de l'observation) de réalités des processus didactiques, allant des micro institutions qui font avancer le temps didactique de manière presque imperceptible dans une séance, aux macro systèmes de définitions qui s'opèrent par des changements de milieux pour passer d'une situation à une autre, par exemple. Ensuite, l'action didactique du professeur, plus spécifiquement, peut être caractérisée par des entités praxéologiques telles que des types de tâches et des techniques d'enseignement. Mais ce sont d'abord les manières de faire, donc des gestes techniques qui sont accessibles à l'observation. La détermination de types de tâches ne peut se faire que sur la base d'une articulation des techniques observables pour produire des niveaux de description plus large de l'activité didactique, et pour lesquels on ne dispose pas d'un mode de désignation a priori ou culturellement construit. En l'état de nos travaux, nous avons dégagé trois grandes familles de techniques qui caractérisent l'activité didactique (la construction de la référence et la gestion des territoires et des temporalités), mais dont la théorisation en terme de tâches restent encore à affiner. Nous reviendrons sur ces trois registres un peu plus loin car ils jouent un rôle central dans nos analyses.

Pour finir, un dernier concept et non des moindres sur lequel repose le modèle de l'action conjointe P-ELs est le contrat didactique décrit par un triplet de genèses.

- *La mésogenèse*, en référence à Chevallard (1992), définit la dynamique des objets (au sens large, qu'ils soient de nature mathématique ou non) qui produisent des

déplacements de « milieux⁶ ». Dès lors que les sujets établissent des rapports avec certains objets, ils se mettent non seulement à exister sous une forme singulière mais encore, la relation didactique, et en particulier l'évolution des attentes du contrat, viennent sans cesse en faire exister d'autres, à partir des premiers. Chaque objet de la mesogenèse est potentiellement un moyen de faire progresser le temps didactique en fonction des rapports que les sujets y établissent (selon les positions dissymétriques du professeur et des élèves, mais encore, entre les élèves eux-mêmes).

- *La topogenèse* décrit l'évolution du partage des responsabilités et des tâches, en fonction de certaines dispositions⁷, ou rapport au savoir des sujets didactiques. Ce partage se modifie suivant la nature de l'objet ou tâche qui vient occuper le devant de la scène dans la mesogenèse. Ainsi la dissymétrie professeur / élèves qui caractérise tout système didactique peut se voir momentanément modifiée par le jeu d'un trilogue (Schubauer-Leoni, 1997 ; Schubauer-Leoni et al, 2004), dans lequel un élève particulier peut se faire le porte-parole d'un savoir censé être connu de tous.
- *La chronogenèse* décrit la dynamique des objets sur lesquels le professeur s'appuie pour faire évoluer son projet d'enseignement et le temps didactique. Elle est donc plutôt l'affaire du professeur ; car si en certaines occasions, on peut observer que des élèves⁸ exhibent fort à propos des objets de nature à servir le projet du professeur, celui-ci n'est pas nécessairement prêt à les accueillir. Nous postulons que mésogenèse et chronogenèse ne sont pas superposables. Alors que le concept de mésogenèse comprend l'ensemble des objets et des rapports à ces objets qui s'établissent, la chronogenèse est plus restrictive aux objets qui sont directement sous la responsabilité du professeur.

Il en ressort que pour l'étude de l'action conjointe P-Els, la mésogenèse est ce que nous allons examiner prioritairement dans l'ordre des analyses, avant de remonter aux

⁶ Le terme figure entre guillemets car si l'on n'a pas affaire à des objets mathématiques, on s'éloigne de son sens d'origine tel que défini dans la théorie des situations (Brousseau, 1998).

⁷ Au sens de Sensevy (2001), ce terme incorpore la notion de schème comme le résultat d'une acculturation qui produit un usage étroitement lié à une situation qui lui a donné naissance.

⁸ Que nous qualifierons de "mésogènes" (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005).

caractéristiques des deux autres genèses. Nous réservons donc le concept de milieu (au sens de Brousseau, 1990) au domaine de l'interprétation a posteriori, lorsque l'observation révèle des configurations d'objets et de règles d'action, au sein de la mésogenèse, qui sont à même de permettre la reconstruction de certains enjeux mathématiques d'une situation pour l'élève. La prise en compte de ce triplet de genèses nous a permis, dès les premiers travaux de modélisation dans le cas de la Course à 20 (Sensevy, Mercier & Schubauer-leoni 2000), de définir trois catégories de techniques observables dans l'activité didactique.

Une typologie de techniques pour décrire l'action conjointe P-Els [Titre 2]

Nous en venons maintenant aux détails du modèle proprement dit, pour lequel un tableau récapitulatif des différentes catégories et sous-catégories figure en annexe 1.

Techniques d'action mésogénétiques

- Dénomination / désignation d'objets du dispositif (OD) ;
- Elaboration de règles d'action (RA) pour réaliser une tâche / gagner à un jeu de l'ordre du faire, du dire ou du prouver ;
- Dénomination / désignation de traits pertinents (TP) ou non pertinents (TnP) ;
- Identification de contradictions (CTRD) ou alternative (ALT) ;

Ces catégories mésogénétiques apparaissent enchâssées dans des formats de communication propres à l'interaction didactique et qui font que l'on opère des distinctions sur chacune des catégories (OD, RA, TP ou CTRD) selon que (i) la proposition émane de l'enseignant, par des gestes d'indication / prescription, (ii) que la proposition émane d'un élève, puis est reprise immédiatement par l'enseignant, ou qu'il y fait allusion plus tard sous forme d'une résonance, (iii) que la proposition émane d'un élève, mais suscitée par une question ad hoc de l'enseignant.

Techniques d'action topogénétiques

- Accompagnement de P dans les phases de transitions de l'activité des Els;
- Modulation des postures de P par rapport à une tâche (mimétisme, mise à distance, surplomb)
- Organisation, maintien ou modifications de coalitions (P+EL / Classe ou P+ Classe / EL(s))

Techniques d'action chronogénétiques

- Appel à la mémoire didactique
- Orientation d'actions possibles
- Ralentissement / accélération de l'action et du « débit » des objets
- Annonce d'indice de fin
- Déclaration d'avancées
- Relances

Les techniques d'action, respectivement topogénétiques et chronogénétiques font parties de ce que nous identifions comme la gestion des territoires et des temporalités dans les interactions didactiques. Ces techniques sont en principe déterminées à partir des éléments mésogénétiques, qui constituent une référence pour le cours de l'action conjointe P-ELs. En terme de type de tâches, la construction de la référence et la gestion des territoires et des responsabilités font partie des responsabilités que le professeur doit assumer. Par rapport à ces types de tâches, reste à approfondir comment le « conjoint » des actions du professeur et des élèves s'actualise. Pour l'heure, les trois familles de techniques que nous avons présentées ci-dessus restent encore assez centrées sur les gestes du professeur, tout en tenant compte de ce qui se passe au niveau de l'élève. Un des axes du développement du modèle est sans doute dans une caractérisation plus fine des modalités d'action des élèves dans le processus d'enseignement et apprentissage, en suivant la voie ouverte par les travaux de Mercier (1999, 2002). Quelques exemples à propos de la Course à 20 montrent que la mise en place des objets du dispositif (verbaux, graphiques, matériels) et l'élaboration de règles d'action constitutives du jeu s'associent étroitement :

OD → commence à 1 / finit à 20 / pas de 1 ou 2...etc.,

RA → on ne peut ajouter que 1 ou 2 / on ne peut pas retrancher, ou encore lorsque l'enseignante instaure un milieu pour la validation : « vous avez fait des découvertes, il va falloir les proposer »

La mise à jour de traits pertinents ou de traits non pertinent de la situation (dans les domaines du faire, du dire et du prouver) et le repérage de contradictions ou alternatives s'imbriquent également dans des règles d'action qui deviennent alors plus stratégiques ou techniques :

TP (faire) → Sur la feuille d'un El, on peut voir qu'il essaie de jouer le 17 à chaque coup

TP (dire) → Annoncer qu'il faut « mettre le 14 et le 17 » est un trait pertinent pour l'action qui peut être associé à une règle d'action si l'enseignant décide de renvoyer les élèves au jeu, pour essayer la proposition .

TP (prouver) → Déclarer que « si on met le 14, alors l'adversaire il ne peut mettre que le 15 ou le 16 et soi-même, on accède à 17 » est un trait pertinent pour la validation.

CTRD → L'élève qui dira « oui mais moi j'ai fait une partie où le 15 ça a marché », fait état d'un trait non pertinent qui vient s'ériger en contradiction par un retour dans le milieu de l'action, et que l'enseignant aura tout intérêt à utiliser pour susciter les arguments de validation.

Sur la base de ces quelques exemples, on voit déjà que ces catégories sont inclusives. L'énonciation d'un trait pertinent en fait un objet du dispositif, dont certains élèves vont s'emparer et d'autres pas, nous aurons l'occasion de le voir dans notre étude empirique. C'est ainsi qu'elles contribuent à montrer comment se construit dynamiquement la référence, soit un monde supposé partagé par les instances de la relation didactique, (même si ce n'est qu'une fiction) et c'est une des dimensions essentielles du travail du professeur.

Il ne fait aucun doute que cette catégorisation est le résultat d'un processus inductif, mais pas seulement. En travaillant sur plusieurs leçons Course à 20 (Schubauer-Leoni et al, 2004), nous avons profité de la robustesse de cette situation conçue depuis l'ingénierie, pour fixer les premiers éléments de catégorisation. Il nous appartient maintenant de les mettre à l'épreuve d'autres matériaux, et c'est ce à quoi nous nous employons. Sans détailler, précisons que pour chacun des objets étudiés, que ce soit dans le domaine du système de numération (Ligozat 2002, 2004), du dénombrement dans les petits degrés

(Schubauer-Leoni et al., sous presse) ou encore de la mesure des grandeurs (Ligozat, 2005, thèse en cours), c'est l'analyse a priori du problème, traité dans l'activité collective de la classe, qui nous permet de procéder à la catégorisation.

2. Dispositif de recherche et enjeux

2.1 Contexte de la recherche

Les données empiriques que nous allons présenter font partie d'un travail plus global sur la place de la notion d'échelle dans les enseignements de mathématique et de géographie à l'articulation entre la fin de l'enseignement primaire et le début du cycle d'orientation genevois (secondaire inférieur). Brièvement, nous rappellerons qu'il existe deux notions d'échelle en géographie :

L'échelle cartographique désigne un outil mathématique (facteur de réduction de type $1/n$) qui permet de représenter certaines propriétés (longueurs & surfaces) d'un espace réel sur une surface de papier plus petite et inversement, à partir d'une carte donnée, de remonter aux grandeurs réelles. A noter que seuls certains objets sont concernés par la transformation, tels que la distance d'une ville à une autre ou la surface d'un lac, pour autant que les grandeurs en jeu aient une taille critique. En effet, un stade peut être représenté à l'échelle (ellipse dont les diamètres sont proportionnellement plus petits) ou non (un symbole, point, ovale ou autre, défini dans la légende). La décision de représenter un objet proportionnellement à sa taille réelle dépend en partie de la taille de l'échelle choisie (plus la fraction $1/n$ est petite, plus il est difficile de représenter des petits objets) mais aussi des buts que le géographe assigne à la carte qu'il construit.

L'échelle géographique désigne un niveau d'analyse de problématiques en géographie humaine, parmi d'autres plus restreints ou plus globaux (Ex : les enjeux du développement des pistes cyclables, à l'échelle du quartier, de la ville, de la région etc.)

L'articulation entre ces deux types d'échelles au niveau de l'enseignement de la géographie est au cœur d'une problématique de thèse (Chiesa Millar, 2004, thèse en cours). Nous y avons adossé des investigations du côté des mathématiques plus spécifiquement, pour considérer comment les problèmes d'agrandissement et de réduction de grandeurs géométriques sont traités tant au niveau de la 6e primaire que de la 7e secondaire⁹, avec des enseignants respectivement généralistes et spécialistes. Le problème « Agrandissement de distances sur une carte » sur lequel nous allons nous centrer (Cf. Annexe 2), fait donc partie à l'origine d'un corpus d'étude en géographie, dont les problèmes ont été fabriqués de façon à refléter ce qui existe dans les manuels, les épreuves cantonales¹⁰ mais aussi les documents pour la formation des enseignants portant sur la proportionnalité et les échelles. Nous l'avons déplacé dans le cadre de notre étude, en mathématique, selon le principe d'une « greffe » visant à observer comment un système peut s'approprier un objet plus ou moins exogène (Schubauer-Leoni et Leutenegger 2002). D'autres types de problèmes ont été également proposés, tels que le problème d'agrandissement du puzzle, dans une version proche de celle qui est présentée dans Rationnels & Décimaux (Brousseau, 1987) mais aussi un problème de rapport d'échelles entre deux plans, tiré des Moyens d'Enseignement suisses romands de 6P.

2.2 Déroulement de la recherche

Le dispositif de recherche centré sur une séance ponctuelle se déroule en plusieurs phases, selon un processus à la fois clinique et expérimental, théorisé par Schubauer-Leoni & Leutenegger (2002).

a) La proposition du problème « Agrandissement de distances sur carte » à une enseignante de 6P, assortie d'un contrat de recherche selon lequel elle a toute latitude de modifier les

⁹ Dans le système scolaire genevois, la 6^e se trouve être la dernière année de l'enseignement primaire. Elle est assurée par des enseignants généralistes alors que la 7^e est la première année du Cycle d'Orientation secondaire où les enseignements sont dispensés par des professeurs spécialistes d'une discipline.

¹⁰ Dans le système scolaire genevois, on pratique des évaluations communes à tous les élèves de 6P du canton, avant le passage au cycle d'orientation secondaire.

données du problème, ajouter ou enlever des éléments, voire de ne pas l'utiliser du tout et faire autre chose à la place.

b) L'analyse a priori du problème sur la base de la fiche qui a été soumise à l'enseignante, permettant d'explorer les mécanismes sous-jacents de l'activité collective possible. Le chercheur convoque alors des principes de fonctionnement ou connaissances sur les systèmes d'objets et tâches qui vont générer l'activité, et ce faisant, il peut commencer à envisager des formes d'action sous le couvert des différents topos enseignant et élèves. En outre, l'analyse a priori va permettre de fabriquer des canevas d'entretiens semi dirigés à mener avec l'enseignante et les élèves.

c) La collecte des données sur le terrain comprend un entretien ante observation avec l'enseignante, une observation filmée selon deux points de vue de l'activité (groupe d'élèves contrastés¹¹ et classe entière), des entretiens post observation avec l'enseignante et avec les deux élèves plus particulièrement filmés. Les traces écrites de tous les élèves pendant la séance sont également recueillies.

d) Le dépouillement et les premières interprétations de l'activité débutent avec la fabrication des protocoles (transcription des vidéos + intégration des traces écrites apparaissant successivement) selon chaque point de vue des caméras et le découpage temporel des types d'activités, tâches, objets apparaissant dans la séance. Cette première étape d'analyse permet d'aboutir à deux synopsis, donnant des informations sur les processus qui concernent la classe en entier mais aussi un groupe d'élèves en particulier, constitué de deux élèves déclarés habituellement contrastés par l'enseignante.

e) L'analyse de l'action conjointe du professeur et des élèves peut alors être menée sur la base des synopsis et des événements dits « remarquables » dans l'activité en regard de l'analyse a priori.

¹¹ Déclarés comme plutôt « forts » ou plutôt « faibles » par l'enseignante dans l'entretien *ante* observation

2.3 Le problème « agrandissement de distances sur une carte » et ses enjeux

Le problème est aménagé pour comporter des indices de surfaces géographiques (fonds de carte) qui permettent de le proposer à des enseignants généralistes du primaire, mais aussi spécialistes de mathématiques ou de géographie au secondaire (7 CO). Précisons d'emblée que ce n'est pas une situation d'ingénierie didactique, ni un problème « modèle » censé garantir des apprentissages particuliers. Il joue un rôle de révélateur de phénomènes didactiques, autour des problèmes d'enseignement / apprentissages de la proportionnalité dans le cas de l'agrandissement.

Le problème se présente de la manière suivante (voir la fiche en Annexe 2) :

- deux cartes sont présentées ; l'une, la carte U est un agrandissement (photocopie agrandie)¹² d'une portion de la carte T dans un rapport de $\frac{4}{3}$, qui n'est pas donné,
- les échelles respectives par rapport au terrain n'apparaissent pas non plus,
- trois villes sont mises en évidence par des points, et les distances entre elles sont matérialisées par des segments prolongés par des flèches,
- les mesures des distances entre deux villes sont données sur la carte T (Sion-St Léonard $\rightarrow$ 3 cm, et Sion-Saviese $\rightarrow$ 1,5cm). Ces mesures ont été choisies pour qu'elles entretiennent un rapport $\frac{1}{2}$ entre elles. Sur la carte U la distance Sion-St Léonard devient 4 cm et la distance Sion-Saviese est l'élément à chercher. Pour les besoins du problème, la ville de Saviese a été effacée sur la carte U, afin que l'on ne puisse pas mesurer à la règle la distance représentée. Outre les représentations sur les cartes, un texte décrit le problème en reprenant toutes les données nécessaires pour le traiter.

Sur le plan mathématique, les problèmes d'échelle cartographique se réfèrent aux situations d'agrandissement et réduction de grandeurs géométriques. C'est un rapport de réduction ($\times \frac{1}{n}$) quand il s'agit de représenter des objets réels sur une carte et cela devient un

¹² Ce qui est différent du cas de deux cartes représentant la même portion de territoire à des échelles différentes (taille des lettres, systèmes iconiques de représentation qui peuvent changer, etc.)

coefficient d'agrandissement ($\times n$) quand il s'agit de trouver la taille réelle d'un objet représenté. Dans les deux cas, cela peut se modéliser par une transformation géométrique qui conserve les angles et les parallélismes, mais qui modifie les distances dans un même rapport de proportion k et les surfaces dans un rapport k^2 , soit une homothétie.

Aux niveaux scolaires où nous l'observons, c'est à dire en 6P, le problème d'agrandissement/ réduction selon une transformation homothétique, est à *reconnaître comme un problème de proportionnalité* qui met en jeu :

- la multiplication ou la division-quotition lorsqu'il s'agit d'un problème de recherche de la transformée d'une mesure en ayant recours au rapport $1/n$ donné,
- la recherche d'un facteur interne (propriétés de linéarité) ou externe (coefficient de proportionnalité) dans le cas plus général où l'on connaît une série de mesures dans un espace de départ (antécédents) et au moins une mesure dans l'espace d'arrivée (images).

Tout le problème didactique réside dans la modélisation du problème d'agrandissement/réduction homothétique par *une situation de proportionnalité identifiable par les élèves*, ce qui n'est pas une évidence comme l'a montré l'étude de Burgermeister & Coray (2005). Nous faisons l'hypothèse que cela nécessite des gestes didactiques spécifiques de la part du professeur. D'une part, il faudra sans doute montrer qu'il existe différentes manières d'agrandir un objet en prenant en compte le poids du sens commun qui englobe les cas d'agrandissements arbitraires. Par exemple, « j'ai agrandi ma maison » peut consister à construire une aile attenante pour avoir une pièce supplémentaire ou bien « j'ai agrandi mon potager » peut se faire en jouant additivement sur l'un ou l'autre des côtés en déplaçant la barrière de 1m en largeur et 3m en longueur (supposons qu'il est rectangulaire). D'autre part, il faut montrer la spécificité de l'agrandissement homothétique (sans pouvoir le nommer ainsi puisque le théorème de Thalès et les homothéties ne sont pas disponibles ni envisageables à ce niveau) en faisant des constats empiriques (c'est le même objet mais en plus grand, quelle que soit l'orientation) ou encore en faisant l'expérience de la mise en correspondance de deux séries de mesures, l'une provenant de l'objet de départ, et l'autre de l'objet agrandi, pour dégager des régularités (opérateur scalaire & additivité dans un même espace de mesure, opérateur fonction d'un espace à l'autre) qui caractérisent les suites proportionnelles. Du moins, ce sont nos hypothèses et c'est en ce sens que nous

avons proposé un problème d'agrandissement de carte à des enseignants de primaire, afin de voir quels gestes didactiques ils convoquent à cette occasion.

Citons quelques procédures parmi les plus courantes pour traiter ce type de problèmes, pour lequel la seule réponse adéquate ici est 2 cm. Par exemple, on peut recourir :

au rapport 2, commun à l'espace des mesures sur T et à l'espace des mesures sur U;

à la réduction à l'unité symétriquement dans l'espace des mesures Sion-St. Leonard et dans l'espace des mesures Sion-Saviese : "si la distance Sion-St Léonard valait 1cm, Sion-Saviese vaudrait 0,5cm donc si la distance Sion-St Léonard vaut 4 fois plus, Sion-Saviese aussi 4 fois plus et on obtient 2 cm". Cette procédure revient également à appliquer le coefficient de proportionnalité $\frac{4}{3}$, ou rapport externe entre l'espace des mesures sur T et à l'espace des mesures sur U.

- au produit en croix comme moyen mnémotechnique pour convoquer automatiquement le coefficient de proportionnalité $\frac{4}{3}$.
- à l'addition de $\frac{1}{3}$ comme étant l'accroissement entre l'espace des mesures sur T et l'espace des mesures sur U. Cette technique repose sur la propriété additive des fonctions linéaires "la somme des images (3+1) sur T est proportionnelle à la somme des antécédants (1,5+0,5) sur U".

Parmi les informations explicites, trois informations sont réellement nécessaires pour traiter le problème : la mention de l'agrandissement pour passer de T à U, les mesures des trois distances et la question portant sur la distance Sion-Saviese sur U. Par rapport à cela, les fonds de carte ne sont pas des données absolument nécessaires, pour qui sait déjà que l'on a affaire à un agrandissement proportionnel.

3. Analyse de l'action conjointe

3.1 Premier aperçu de l'activité (toute la classe) et positionnement de l'enseignante

Le tableau synoptique de l'activité (annexe 3) rend compte de l'ensemble de cette séance de 6e primaire (élèves de 11-12 ans). Face à ce synopsis, le premier constat que l'on peut faire est que sur le plan collectif, l'enseignante intervient très peu si ce n'est :

- ponctuellement à la minute 8 pour un rappel : elle indique qu'elle a repéré beaucoup de groupes qui font fausse route (il s'agit de la démarche additive classique) et donne une indication « *essayez de vous rappeler/ qu'on est en train d'étudier/ justement en ce moment/ le chapitre des/ proportions/// (...) j'en dis pas plus/// (sourit) dans les proportions les applications//* » ;
- au bout de 20 min pour proposer un prolongement au travail effectué, sous la forme d'un second problème qui met en jeu l'échelle cartographique comme moyen de déterminer une distance réelle, car certains groupes ont trouvé rapidement la distance Sion-Saviese sur la carte U ;
- pour clore la recherche aux min 33-36, en institutionnalisant la procédure du produit en croix qui est montrée au tableau noir par une élève qui a résolu le problème avec cette technique.

Tout se passe comme s'il n'y avait rien à enseigner de particulier à cette classe pour que ces élèves puissent trouver une réponse au problème d'agrandissement qui leur est posé. En tant que chercheur, ce constat est un peu déstabilisant car à travers la proposition de cette fiche, nous faisons l'hypothèse que l'enseignante allait devoir, à un moment ou à un autre, organiser/aménager le système des objets afin que les élèves identifient la situation de proportionnalité. Or, il n'en est rien : elle se contente de faire appel à la mémoire en renvoyant les élèves au chapitre des proportions, des applications.

Ce constat nous amène à deux hypothèses qui ne s'excluent pas l'une l'autre :

- *L'interprétation du contrat de recherche par l'enseignante* peut l'avoir détourné de sa tâche d'enseigner au motif que, a priori, le chercheur devrait s'intéresser plutôt à ce que font les élèves, et ce malgré la précaution que nous avons prise d'annoncer que nous venions observer les processus d'enseignement et d'apprentissage, soit comment enseignant et élèves s'y prennent pour traiter ce problème et les contenus de savoirs sous-jacents. Dans un système didactique, une dimension essentielle du travail du professeur est d'observer les élèves pour décider des actions à venir, et il ne faut pas s'étonner que depuis cette posture, le professeur pense qu'une grande part du mystère de l'apprentissage est dans l'élève. De là, à ce que le professeur attribue les mêmes préoccupations au chercheur qui vient dans sa classe, il n'y a qu'un pas. Dans cette perspective, cette enseignante peut donc avoir à cœur de laisser les élèves se débrouiller en intervenant le moins possible (même si le rappel sur le chapitre des proportions est une intervention importante, dont l'enseignante ne mesure peut-être pas la portée) pour que le chercheur y trouve son compte.
- *La temporalité de l'observation (une seule séance observée)* ne nous permet peut-être pas de saisir ce que nous cherchons, à savoir le moment où l'enseignante estimait, quant à elle, avoir quelque chose à enseigner sur les situations de proportionnalité. Le rappel qu'elle fait à la min 8, par son aspect bref, presque lapidaire, est assez révélateur du fait que des choses ont déjà été dites sur ces objets, si ce n'est toutes les choses (aux yeux de l'enseignante bien sûr) à en juger par le vide d'enseignement collectif dans cette séance.

A travers l'analyse de l'entretien préalable avec l'enseignante, nous essayons de caractériser le projet d'enseignement et, plus précisément, les indications susceptibles de donner un statut à cette séance au sein de l'organisation plus générale du travail dans cette classe et l'ordre d'apparition des enjeux de savoir concernant la proportionnalité. Nous relèverons ici quelques extraits de l'entretien en y apportant un commentaire interprétatif.

Tour de Parole 2 (ci-après TP 2) : « on est en train de faire les applications et les produits en croix »

Commentaire : Le problème posé est donc connexe à ce qui est travaillé en classe à ce moment. A noter la formulation : on est en train de "faire (...) les produits en croix",

expression qui peut évidemment faire réagir le didacticien des mathématiques un tant soit peu acculturé aux recherches réalisées sur le sujet, en particulier Bosch (1994), Comin (2002) ou Hersant (2001) pour ne citer que ces trois auteurs qui ont soulevé le problème d'une algébrisation précoce qui oblitère le travail sur les relations entre les grandeurs.

TP 17 [à propos du produit en croix] : « dans des problèmes ils savent l'appliquer// mais ils ont besoin d'aide il faut que je les guide que je ré explique/ c'est pas encore quelque chose qui est acquis // d'ailleurs c'est un chapitre qu'on// étudie plutôt en fin d'année parce que c'est difficile pour les sixième et comme// j'ai vu le problème j'ai dit ouh j'aborde maintenant les applications »

Commentaire : L'application de la technique du produit en croix n'est, selon elle, pas encore possible, et c'est bien normal, puisque ce chapitre est travaillé en principe plutôt en fin d'année. A la suite de la demande de la recherche, elle a quelque peu anticipé (on est en février) : à la vue du problème elle a sans doute préparé les élèves lors d'une ou plusieurs leçons précédentes, en abordant plus tôt que prévu le chapitre des "applications". Ce qui renforce l'hypothèse concernant l'interprétation du contrat de recherche par l'enseignante : elle a travaillé précédemment avec ses élèves et la séance est destinée à montrer au chercheur ce que les élèves savent, en principe, faire maintenant.

TP 5 : « ça m'intéresse de voir maintenant si les élèves vont pouvoir appliquer // ce qu'ils ont déjà fait dans d'autres situations sur un problème sans que je leur dise on va faire des applications »

Commentaire : Il s'agit pour l'enseignante de procéder à une forme d'évaluation : les élèves vont-ils « appliquer » les choses apprises avant. Le vide d'enseignement collectif relevé sur la base du synopsis, n'est donc pas étonnant.

TP 33 : « moi j'ai/ un petit peu lancé le produit en croix parce que c'est quand même un moyen qui est applicable à beaucoup de situations// et je trouve plus facile »

Commentaire : À propos du produit en croix, elle explique qu'il s'agit pour elle d'un moyen de résolution facile et d'un outil à large spectre. Ce qui n'est (à nouveau) pas très étonnant : classiquement, comme l'ont montré plusieurs travaux de didactique sur la

proportionnalité (voir en particulier Comin, Bosch ou Hersant, op. cit.), le produit en croix a pris le pas sur d'autres démarches possibles. A noter ce qu'elle dit juste après concernant son rapport à ce contenu mathématique ; le produit en croix est donc d'abord un outil (fiable) pour elle :

TP 35 : « moi j'avais pas mal de peine en math et je me souviens que grâce au produit en croix/ j'ai réussi à comprendre pas mal de choses/ donc c'est un peu pour ça que/ que je l'ai fait ».

TP 41 [à propos de ce qui pose habituellement problème aux élèves] : « ils vont dire je comprends pas/// donc moi souvent je leur dis// je ne suis pas là je n'existe pas parce que/ pour les épreuves de 6P je n'ai le droit à donner aucune indication aucune réponse/ donc j'essaie vraiment de les entraîner à les obliger à lire et relire parce que/ je leur dit qu'ils sont capables de le faire/ [...]

Commentaire : Concernant les difficultés que les élèves pourraient rencontrer, l'enseignante prévoit de ne pas les aider : elle se réfère au fonctionnement des évaluations (les épreuves de 6P auxquelles elle fait allusion, sont, à Genève, les seules évaluations, avec celles de fin de 2P (= CE1), communes à tous les élèves de ce degré, avant le passage au secondaire inférieur), comme pour signifier qu'elle situe cette activité parmi les réinvestissements de notions apprises.

TP 53 [à propos des difficultés des élèves] : « par contre je ne pense pas// en ayant pas abordé le produit en croix je ne sais pas comment ils peuvent se débrouiller »

Commentaire : Elle confirme ainsi deux éléments :

- 1) Il fallait (à ses yeux) travailler précédemment avec les élèves pour qu'ils puissent aborder le problème (statut de la séance par rapport à ce qui s'est passé avant).
- 2) Elle ne sait pas comment les élèves pourraient se débrouiller sans avoir abordé le produit en croix (on peut se demander si elle attribue aux élèves son propre rapport à ce contenu mathématique).

3.2 Synthèse et orientation du questionnement de recherche

Il est fort probable que cette enseignante, elle-même peu à l'aise avec les connaissances mathématiques que ce problème d'agrandissement de distance engage, a pris la précaution

d'enseigner la technique du produit en croix pour traiter les problèmes de proportionnalité en amont de l'observation, en espérant que les élèves vont mobiliser cette connaissance sans qu'elle soit obligée de s'impliquer trop fortement sous le regard de caméra. S'il est en est ainsi, on pourrait se dire que ce protocole n'est pas un bon candidat pour examiner l'action conjointe P-Els, processus qui se caractérise bien dans les cours dits "dialogués" entre le professeur et la classe. Mais que devient l'action conjointe dans le cas d'autres phases d'organisation du travail scolaire, comme les travaux de groupe ou le travail personnel de chacun ? Le protocole de cette séance nous a donc semblé intéressant pour mettre à l'épreuve notre modèle de l'action conjointe : est-il capable de rendre compte de n'importe quelle phase de la séance, y compris l'activité didactique qui se déroule dans les travaux de groupes ? Nous allons donc nous concentrer sur le groupe de Luria et Christiane, l'un des deux groupes qui a été particulièrement observé. Nous avons besoin pour cela d'un deuxième tableau synoptique (voir Annexe 3)

3.3 Premier niveau de modélisation de l'action conjointe

Nous regardons quels objets sont mobilisés par les élèves aux différentes étapes de l'activité. Du point de vue de la construction de la référence, une première strate de la mésogenèse (qui suppose dans le même temps des mouvements topogénétiques et chronogénétiques) peut en effet être décrite avec l'apparition des principaux déplacements d'objets et modifications des tâches.

1^{re} étape : Tentative d'orientation de l'action

Aux minutes 4-7 comme beaucoup d'élèves de la classe, Luria et Christiane mettent en oeuvre une première procédure, additive, qui aboutit à la solution "2,5". La procédure "+1" apparaît comme un trait non pertinent à l'enseignante (de fait elle l'est).

A la minute 8, l'enseignante fait un rappel collectif *"souvenez-vous, on est en train de travailler dans le chapitre des proportions, des applications"*. Juste avant ce rappel, Luria/Christiane est le dernier groupe visité par l'enseignante : Luria lui a demandé si leur solution était juste et l'enseignante a répondu par la négative. Du point de vue du jeu du professeur sur le jeu de l'élève, on peut penser que si —"aux yeux de l'enseignante"— même

Luria, élève réputé "fort" en mathématique, procède additivement, il est indiqué de réguler collectivement. En d'autres termes, *la procédure additive est d'autant plus importante à pointer comme trait non pertinent auprès du collectif de la classe, que le topos de l'élève de la part de qui on attend une réponse valide, est "élevé"*. Avec ce rappel, du point de vue de la construction de la référence, elle désigne un objet, "le chapitre des applications", qui devient un trait pertinent pour certains élèves. Chronogénétiquement, cette intervention opère une réorientation de l'action des élèves. Du côté de Luria et Christiane particulièrement, l'intervention de l'enseignante, individuelle et collective, les pousse à rechercher une autre procédure.

2^{ème} étape : Constat d'agrandissement par les élèves

Aux minutes 9-14, les deux élèves prennent des mesures avec la règle sur les cartes, en essayant de localiser empiriquement Savièse. Ceci aboutit à *un constat d'agrandissement entre T et U*, comme si les élèves devaient constater par eux-mêmes quelque chose qui est déjà mentionné sur leur feuille d'exercices : "U est un agrandissement de T", dit la consigne.

À la minute 15, un échange avec l'enseignante leur permet de valider le constat d'agrandissement, qui ne statue pas sur une localisation empirique possible sur la carte. En termes de construction de la référence, l'enseignante avalise le fait qu'ils ont (re)trouvé le trait pertinent ("U est un agrandissement de T"), ce qui permet aux deux élèves de poursuivre leur action en cherchant comment on a agrandi.

3^{ème} étape : Fortes présomptions sur le résultat "2cm"

Aux minutes 16-17, les élèves font des hypothèses sur l'agrandissement : a-t-on agrandi de 2 fois, de 1 fois, un petit peu plus que 1 fois ?

En arrière plan de ce cheminement, on peut faire deux hypothèses qui ne s'excluent pas :

- A la minute 14 : les élèves prennent des repères en mesurant sur la carte U et arrivent à supposer que le résultat est "2 cm"
- Un autre événement a lieu un peu plus tard, environ minute 18 : un échange avec Justine et/ou Eléonore (placées à proximité du groupe Luria/Christiane) leur

confirme que la solution est "2 cm". Vraisemblablement ce résultat diffuse dans la classe.

Dans tous les cas, le résultat supposé ("2 cm") devient un trait pertinent, qui servira de point de départ à Luria et Christiane, non plus à la recherche de la solution, mais à la recherche de la justification de cette solution. C'est donc ici une règle d'action qui est recherchée par les deux élèves, qui, associée aux traits pertinents reconnus pourrait devenir une technique de résolution de plus large portée.

4^{ème} étape¹³ : Non-institution d'une procédure inattendue et régulation par le produit en croix

Aux minutes 19-21, Luria et Christiane se livrent à différents calculs pour arriver à 2 cm. qu'ils supposent être la solution recherchée. Ils cherchent le tiers de 1,5 et notent une procédure qui met en correspondance les espaces de mesure Sion-St Léonard et Sion-Savièse. Cette procédure repose sur l'une des solutions que nous avons mises en évidence dans l'analyse *a priori*, à savoir celle qui repose sur les propriétés additives des fonctions linéaires « la somme des antécédents est proportionnelle à la somme des images » (+1/3, c'est-à-dire 2,5 + 0,5 d'un côté et 3 + 1 de l'autre), mais Luria, qui propose cette solution, ne peut évidemment pas la formuler ainsi (on verra dans la suite quel est le niveau de conceptualisation de cette écriture). Il sait seulement que "ça marche" en considérant les deux "membres" de son calcul. Cela suffit à en faire un trait pertinent pour lui (mais aussi pour Christiane dans une certaine mesure) sur la base de quoi, il interpelle l'enseignante.

Ecriture de Luria :

$1,5 : 3 = 0,5$	$3 : 3 = 1$
$1,5 + 0,5 = 2$	$3 + 1 = 4$

¹³ D'un point de vue collectif, c'est le moment où l'enseignante propose un prolongement à l'activité pour ceux qui ont terminé le problème

Aux minutes 22-25, un échange a lieu avec l'enseignante qui se penche sur l'écriture de Luria : elle leur dit ne pas comprendre la procédure de Luria et Christiane tout en admettant que la réponse "2" est correcte. Le reste de cette notation ainsi que les explications données par chacun des deux élèves, ne constituent pas des traits pertinents pour l'enseignante.

Une interruption de l'échange a lieu puis il est repris aux minutes 26-29, avec Christiane essentiellement et à propos des procédures de mesures empiriques : pour tenter de construire une référence commune, l'enseignante demande aux deux élèves de revenir à une description de leur procédure et Christiane, qui n'a fait que suivre, somme toute, les propositions de Luria, en revient à sa propre procédure, c'est-à-dire des mesures sur la carte. Ce qui est écarté par l'enseignante.

Enfin, aux minutes 30-32, l'enseignante fait appel à Ernestine (une élève déclarée "forte") pour expliquer à Luria et Christiane comment faire. On peut penser que le ralliement autour d'une référence commune s'impose car ni l'écriture de Luria, ni ses explications n'ont pu faire l'objet d'un partage de significations entre les topos enseignant et élèves, pas plus qu'entre les élèves eux-mêmes (Christiane avoue son incompréhension de la procédure de Luria). L'enseignante revient à son projet et fait appel à Ernestine chez qui elle a repéré la technique attendue, soit le produit en croix pour arriver à la solution (la réponse "2 cm"). Ernestine montre à Luria et Christiane la procédure par le produit en croix (on a donc une mise en correspondance des espaces de mesure de la carte U versus de la carte T). Luria et Christiane notent la procédure énoncée par Ernestine :

$$\begin{array}{r} T \quad 1,5 \\ U \quad \text{---} \end{array} = \frac{3}{4}$$

Aux minutes 33-35, une phase collective suit immédiatement la fin de l'activité de Luria et Christiane : Ernestine est alors appelée au tableau noir pour montrer à nouveau, et à tous, le produit en croix. Ernestine écrit classiquement la "formule" avec les différentes étapes d'écriture :

	Sion	St-L			
T	1.5	3			
U	2	4			
			1.5	6	3
			X 4	6	2
			6	-	

Cette écriture devient l'essentiel de la référence commune. On verra dans la suite ce que produit, pour Luria et Christiane, cette réduction de l'activité mathématique à la production d'une technique.

3.4 Deuxième niveau de modélisation de l'action conjointe

Pour l'heure, nous allons revenir plus précisément au modèle pour examiner finement le processus de construction mésogénétique dans le groupe de Luria et Christiane en nous appuyant sur quelques extraits du protocole. Nous allons tenter de montrer que, dans ces phases, les élèves élaborent leur propre système de référence, que l'enseignante ne reconnaît pas forcément. Ce faisant, ils élaborent une procédure mathématique et des opérations cognitives que l'enseignante ne reconnaît pas non plus. Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur trois étapes à l'aide de quelques extraits :

- TP14-13 à 16-4, où l'enseignante confirme l'agrandissement et minore la procédure empirique : des mesures empiriques à une tentative de conceptualisation de l'opération d'agrandissement
- TP 16-5 à 21-19, où CHR et LUR se construisent des « milieux » différents, dont l'un, celui de LUR s'avère robuste pour produire le résultat (2 cm) attendu
- TP 21-20 à 31-15, où CHR ne peut s'approprier la procédure de LUR, que l'ENS ne comprend pas non plus et s'en sort en convoquant une élève tiers (ERN) qui montre le produit en croix afin que LUR et CHR l'adoptent.

En profitant de ce premier extrait, nous montrerons aussi comment, techniquement, nous faisons fonctionner les catégories du modèle dans les tableaux qui présentent les types de techniques du modèle de l'action conjointe. En regard de la transcription des interactions, nous notons ce qui concerne d'une part la construction de la référence (destinée à rendre compte de la mésogenèse) et d'autre part, la gestion des territoires (destinée à rendre compte de la topogenèse) et la gestion des temporalités (destinée à rendre compte de la chronogenèse). Nous avons ici particulièrement mis l'accent sur la mésogenèse puisque c'est elle qui conduit notre analyse, c'est pourquoi les deux autres apparaissent dans la même colonne.

Extrait 1 : des mesures empiriques à une tentative de conceptualisation de l'opération d'agrandissement

min	Interactions P-ELS ou ELS - ELS	Construction de la référence	Gestions des territoires et des temporalités
8	(résumé) L'ENS a signifié à LUR + CHR que la réponse 2,5 /procédure +1 n'est pas valide	TnP (3.1)	Topo (2.3)
(...)			
15	Retour de l'ENS : Chr commence à expliquer qu'ils ont pris des mesures sur les cartes pour essayer de localiser Saviese sur U. 5. ENS : mais sur <u>cette carte là</u>/ qu'est-ce qui s'est passé <u>entre celle-ci et celle-là</u> 6. Chr : <u>ILS</u> <u>L'ONT AGRANDI</u> 7. ENS : <u>ils l'ont agrandi</u>/ donc en agrandissant// tu [penses 8. Chr : [ça veut dire que <u>un-virgule-cinq PLUS UN-VIRGULE-CINQ</u> ça aurait 9. ENS : <u>POURQUOI PLUS UN-VIRGULE-CINQ</u> 10. Chr : parce qu'<u>IL ONT AGRANDI</u>/ y avait un-virgule-cinq déjà avant 11. ENS : ouais 12. Chr : et <u>ÇA A AGRANDI</u>/ ça fait// <u>ILS ONT AGRANDI DEUX FOIS SUREMENT</u> 13. ENS : pourquoi <u>surement</u>↑ qu'est ce que tu en sais↑	OD (1.1) TP (3.3) / reprise de OD consigne TnP (3.1/EL) /SM Remis en cause par P TP (3.3) /reprise Conjecture EL? TnP (3.2) / SM Remis en cause par P	Topo (2.3) Chrono (1.4) Chrono (1.6) Topo 1.1 Chrono 1.4 Topo 1.1 Chrono 1.4

La première partie, après l'intervention collective où la réponse additive (minute 8) a été balayée par l'enseignante – trait non pertinent – est significative de la façon dont l'enseignante tente d'orienter l'action des élèves en essayant de les faire passer d'un

"milieu" empirique (là où ils en sont des prises de mesures sur la carte et l'estimation à vue de l'emplacement de Saviese : voir l'étape 2) à un "milieu" plus conceptuel où l'opération d'agrandissement est placée au cœur du débat. Cette intention de l'enseignante est d'abord tout à fait discernable dans les interactions guidées par un questionnement explicite (voir 14.15.5 "qu'est ce qui s'est passé entre celle-ci et celle-là", demande l'enseignante) qui se réfère aux objets du dispositif (OD). La réponse de Christiane indique un trait pertinent (TP) décelé sur ces objets (voir 15.6 "ils l'ont agrandi"). En termes de gestion des territoires et des temporalités, l'enseignante fait donc en sorte que cette assertion soit énoncée par l'élève, ce qui aboutit à une avancée sous forme de réorientation de l'action (chrono 1.4) et de déclaration d'avancée de la part de l'enseignante (chrono 1.6) sous couvert d'approbation de l'assertion de Christiane.

Une remise en cause du trait non pertinent (TnP) venant de Christiane (voir 15.8 "un virgule cinq plus un virgule cinq") pointe vraisemblablement (à nouveau) l'addition (?) ; un peu plus loin (voir 15.12 "ils ont agrandi deux fois sûrement"), l'enseignante remet en cause, non pas le contenu de l'hypothèse, mais la manière de la poser, c'est ce qu'on constate dans la suite de l'extrait :

14	14.	Chr : ON SAIT PAS	TP (3.3) / contrat	Topo 2.1 Chrono 1.3
	15.	ENS : ben hein// justement↓// <u>tu veux pas affirmer quelque chose que tu sais pas</u>		
	16.	Lur : ben non↓// <u>parce que sinon ça fait six/ si c'est deux fois plus grand</u>	CTRD (4.1 El) /SM non repris	(potentiellement chrono)
	17.	ENS : est-ce que celle-ci/ <u>ELLE A L'AIR DEUX FOIS PLUS GRANDE OU TROIS FOIS↑ OU DEUX-VIRGULE-TROIS FOIS PLUS GRANDE↑</u>		
	18.	Chr : ça on sait pas	TP (3.1 Ens) en résonance à CTRD	(abs. Chrono) Topo 2.4 Chrono 1.3
	19.	ENS : aahh/ <u>on sait pas donc tu peux pas l'affirmer</u>		
	20.	Chr : mais comment// quand y a// Luria il a remarqué que là// <u>IL Y AVAIT LA ROUTE// ils ont montré Saviese/ LA/ IL Y AVAIT LA PETITE ROUTE/ LA LE PETIT CHEMIN</u>	RA (2.1)	Topo 2.1
	21.	ENS : hmmm (<i>sourit</i>)		
	22.	Chr : alors on a su que	OD (1.1 /El) TnP (3.2) /SM non repris par Ens Mais TP /S Geo ?	Topo 2.2 Chrono 1.4
	23.	ENS : <u>IL Y A DES CHANGEMENTS</u>		
	24.	Chr : (<i>rit</i>)		
	25.	Lur : (<i>rit</i>)		
14	16	1. Chr : <u>le chemin ici// ALORS ON A TROUVE SAVIESE mais ON SAIT PAS ENCORE euh//</u>	TP (3.1 /El) non repris par P	(abs chrono)
		2. Lur : <u>A QUELLE DISTANCE</u>		
		3. Chr : à quelle distance↓	RA (2.1)	Topo 2.2
		4. ENS : alors je te laisse poursuivre hmm ton raisonnement (<i>s'en va</i>) (...)		

Une règle d'action (RA) est posée par l'enseignante (voir 15.15 : ne pas affirmer quelque chose dont on n'est pas sûr) mais cette règle d'action ne semble concerner que le fait que l'on a agrandi, ce qui est certes pertinent par rapport à la situation mathématique (SM) mais qui ne dit rien de plus par rapport aux objets de dispositif déjà présents dans la consigne. Mais, plus important encore, on retiendra l'intervention suivante de LUR sur la proposition de Christiane : Luria repère une *contradiction* (CTRD) forte entre ce que l'on pourrait appeler une conjecture de la part de Christiane (on a agrandi 2 fois sûrement) et les objets (mesures données) du dispositif (voir 15.16 : "ça fait six si c'est deux fois plus grand"). Ainsi a-t-il repéré que l'on n'a pas agrandi deux fois car la mesure 4 cm n'est pas le double de 3 cm pour la distance Sion-St Léonard. On a au moins ici les premiers signes d'un raisonnement proportionnel. Or, l'enseignante ne reprend pas les fondements de cette contradiction, même si on peut constater une *forme de résonance* sur la proposition de Luria, mais une résonance plus rhétorique qu'autre chose, par la répétition de "deux fois plus grande" (voir 15.17) pour aller ensuite vers la caricature ("trois fois, deux virgule trois fois"). A cet instant précis, l'enseignante essaie de contrer ce qu'elle identifie comme une assurance présomptueuse chez Christiane à moins qu'elle ne lui attribue une mauvaise connaissance des données du problème. Du reste Christiane revient alors aux mesures empiriques réalisées et aux repères qu'elle a pris (la route, le petit chemin), ce qui est écarté par l'enseignante. Ainsi, la chronogenèse ne fait état d'*aucune déclaration d'avancée* si ce n'est par la négative ou la dérision des propositions de Christiane (voir 15.23) "il y a aussi un chamois sur le chemin ?", demande l'enseignante. Elle modifie ainsi le cours de l'action (chrono 1.4) sans pour autant le contrôler en vue de construire la situation mathématique (SM).

Pourtant, si on examine les systèmes d'attribution ou les interprétations possibles, on peut considérer que Christiane émet une conjecture à même de l'entraîner vers l'identification d'une situation de proportionnalité qui existe derrière ce problème d'agrandissement de carte. Et c'est ce que fait Luria, en réfutant la proposition de Christiane, par l'absurde : "sinon ça fait six/ si c'est deux fois plus grand".

Conclusions sur l'extrait 1 : Du point de vue de la gestion des territoires, l'ensemble de cet extrait montre que l'enseignante est en *position de surplomb* (Topo 2.1) et garde la main. En

conséquence, la contradiction ne s'insère pas dans la chronogenèse, faute de remettre la balle dans le camp des élèves, grâce justement à la contradiction soulevée par Luria. L'enseignante argumente elle-même sur le trait pertinent, mais pas sur le fond de la contradiction énoncée. Les questions qui en découlent sont pour nous les suivantes et serviront à interroger la suite des événements :

- Pourquoi l'enseignante n'identifie-t-elle pas, dans la réfutation de Luria, un trait pertinent potentiel concernant la relation de proportionnalité ? La production du produit en croix est sans doute le signe attendu, ou le gage de réussite en terme d'objectif, qui masque les autres aspects de la situation.
- Comment Luria va-t-il évoluer sur la base de cette réfutation ? On peut penser que même si un élève en vient à formuler un trait pertinent, si sa proposition ne rencontre pas les conditions sociale ou contractuelles d'une validation, il ne peut rien en faire....;
- Comment Christiane peut-elle tirer parti de la réfutation de Luria et des réorientations que l'enseignante essaie d'engager ?

Extrait 2 : Où Christiane et Luria se construisent des "milieux" différents, dont l'un, celui de LUR s'avère robuste pour produire le résultat (2 cm) attendu

A la minute 16, après avoir déclaré à Luria qu'il faut faire "fois quelque chose", Christiane continue à produire des conjectures sur la transformation par agrandissement, pendant que Luria estime des ordres de grandeur :

Minute 16

(...)

7. Chr : (...) par exemple tu mets// un-virgule-cinq// donc tu l'agrandis de deux fois// par exemple// ça va pas te refaire un-virgule-cinq↑

8. Lur : si tu regardes/ c'est pas beaucoup plus grand euh// hein↓

9. Chr : c'est un tout petit peu// faut trouver↓// là ils l'ont agrH / il est tout petit// là/ ils l'ont agrandi un peu

A la minute 17, LUR associe des mesures entre elles (0,5 et 1,5) sur le mode additif tandis que CHR associe les mêmes mesures, mais sur le mode multiplicatif :

Minute 17

(...)

1. Chr : ils ont agrandi de une fois// une fois plus grande
2. Lur : un-virgule-cinq/ et zéro-virgule-cinq ↑ // oui plus grande voilà↓
3. Chr : comment on peut savoir maintenant↑ // (écrit sur sa FB opération?)
4. Lur : tu fais quoi là↑ /// (regarde l'opération que prépare Chr ?) ça fait deux hein↑

Mais, plus tard, après les minutes 18-19 où des informations extérieures sont parvenues au groupe (le résultat "2 cm" diffuse dans la classe), aux minutes 20-21, Luria construit une procédure permettant de justifier la solution "2 cm" :

20	1. Lur : euh / ouh c'est juste↑ ///(3sec) tu fais comme ça// <u>TU FAIS UN-VIRGULE-CINQ DIVISE PAR TROIS</u> 2. Chr : un-virgule-cinq divisé par trois↑ 3. Lur : <u>ZÉRO-VIRGULE-CINQ</u>// <u>trois fois</u> / (xxx) que ça marche là / on va voir si ça marche là↓ // <u>TROIS DIVISE PAR TROIS (4 SEC) UN PLUS TROIS↑ / QUATRE ↓</u> 4. Chr : xxx marqué le résultat xxx / <u>MOI J'ESSAIE DE TROUVER UN NOMBRE</u> 5. Lur : <u>C'EST DEUX</u>↓// <u>C'EST DEUX</u> 6. Chr : alors attends 7. Lur : c'est deux↓ (geste des bras marquant l'évidence) (3 sec) 8. Chr : est à deux centimètres 9. Lur : [(xxx) zéro-virgule-cinq (maître?)]// elle va nous dire / mais pourquoi vous faites ça (voix déformée pour refaire l'ens)	TP qui porte sur $1,5 : 3 = 0,5$ Conjecture +0.5 TP qui porte sur $3 : 3 = 1$ et $3+1=4$ TP / SM pour CHR TP / SM pour LUR TnP / contrat ??	
21	1. Lur : ah ouais un parce que c'est plus le tiers↓ / le tiers 2. Chr : (lève la main) Jacqueline// on a fini 3. Lur : attends/ je dois marquer moi (écrit opération FB)		

C'est ainsi que Luria dicte sa procédure à Christiane qui écrit sans comprendre vraisemblablement, où Luria veut en venir. Le trait pertinent (TP) consiste à écrire $1,5 : 3 = 0.5$ accompagné d'une conjecture (voir 20.3) : "tu fais plus zéro-virgule-cinq" (le TP porte

sur $3 : 3 = 1$ et $3 + 1 = 4$). La solution "2" devient alors un trait pertinent pour les deux élèves, mais pas pour les mêmes raisons. Par la suite, la caricature que Luria fait de l'enseignante (20.9 : "mais pourquoi vous faites ça", en imitant la voix de l'enseignante) peut paraître anecdotique mais elle montre que Luria est bien conscient que la technique qu'il vient d'esquisser sort du rapport au savoir attendu dans le cadre du contrat de cette classe. Cela atteste du fait qu'il est toujours dans l'action conjointe, même si son acte, sa manière d'arriver au résultat 2 cm, diverge des attentes de l'enseignante.

A la minute 21, Luria est tout à coup gagné par une certitude (voir 21.1: "c'est plus le tiers" dit-il) qui se traduit par une formulation ou un commentaire sur sa procédure. Christiane se charge alors d'appeler l'enseignante et Luria l'arrête car il n'a pas encore inscrit lui-même le résultat de sa procédure, ce qu'il fait. Il ne produit cette écriture, disposée en deux colonnes, qu'après ce moment de réflexion.

Ecriture de Luria :

$1,5 \cdot 3 = 0,5$	$3 : 3 = 1$
$1,5 + 0,5 = 2$	$3 + 1 = 4$

Conclusions sur l'extrait 2 : Cet épisode (et les suivants) témoignent de la manière dont Luria et Christiane travaillent ensemble à un but commun, tout en se constituant des matrices ou des milieux différents à partir des mêmes objets, chacun attribuant des formes de pertinence en fonction du problème qu'il s'est donné pour tâche de résoudre. Ainsi, Christiane a identifié un problème multiplicatif avec "faut faire fois quelque chose", ce qui est pertinent par rapport à la situation. Elle prend des mesures qu'elle tente de combiner (mesures dont on saura plus tard qu'il s'agit de la taille des lettres des noms des villes). Luria semble, quant à lui, rester assez longtemps sur des manipulations additives. Il cherche ce qu'il faut ajouter à 1,5, tout en ayant accès à un résultat estimé sur la carte, qui s'approche probablement de 2 cm. L'apport d'informations extérieures va être un déclencheur pour Luria, qui, à partir de la confirmation que la solution est "2 cm", et de l'idée de diviser par trois, peut remonter jusqu'à la manière de produire "0,5", qui complète "1,5" pour aller à "2". Ayant formulé cela, il produit une conjecture sur le symétrique de

cette opération à propos du second jeu de mesures (l'espace des mesures possibles pour représenter la distance Sion-St Léonard), ce qui aboutit à la formulation d'un second trait pertinent et produit une forme de validation pour le premier. Pour sa part, Christiane s'empare de la procédure de Luria car, d'une part, cette procédure produit le résultat escompté ("2 cm") et d'autre part, elle provient d'un élève dit "fort", généralement. Mais son commentaire "moi j'essaie de trouver un nombre" (20.4) témoigne du fait qu'elle ne tente pas d'agir dans le même milieu que Luria. Son écriture en témoigne également. Dans ce qu'elle restitue sous la dictée de LUR (voir 20.1 : "tu fais un-virgule-cinq divisé par trois"), deux erreurs apparaissent dans l'écriture et les opérations :

Ecriture de Christiane :

$$\begin{array}{l} 3 : 1,5 = 0,5 \\ 0,5 + 1,5 = 3 \\ 3 : 3 = 1 \\ 3 + 1 = 4 \end{array}$$

On a bien ici un cas d'action conjointe élève-élève, mais qui n'est pas convergente. Le cours de l'action est bien tendu vers une même finalité, à savoir trouver une technique qui permette de passer d'un espace de mesure à un autre mais la divergence se produit sur les milieux, qui se constituent dynamiquement et différenciellement pour chacun, en l'absence d'une force "instituant" et donc chronogène, produite en général par le professeur.

Extrait 3 : Où Christiane ne peut s'approprier la procédure de Luria, qui n'est pas on plus reconnue par l'enseignante. Régulation par le produit en croix.

A la minute 23, l'enseignante vient constater les avancées dans le groupe de Luria / Christiane. Christiane n'arrivant pas à expliquer pourquoi le résultat est "2" sur la base de son écriture, Luria est sommé de s'expliquer :

min	Interactions P-ELS ou ELS - ELS	Construction de la référence	Gestions des territoires et des temporalités
23	1. ENS : alors Luria// t'arriverais à réexpliquer comment tu l'as dit à Christiane 2. Lur : alors ouais// un peu/ c'est// <u>JE PENSais QUE C'ETAIT LE TIERS// LE TIERS PLUS GRAND// LE TIERS PLUS↑</u> 3. ENS : pourquoi le tiers↑ 4. Lur : bein// je-sais pas/ j'ai regardé plusieurs/ plusieurs choses (...) 12. ENS : t'as comparé// t'as comparé/ trois centimètres était quatre centimètres↑ 13. Lur : ouais 14. ENS : d'accord// et pis ensuite↑ 15. Lur : bein/ après/ j'ai essayé avec celui-là↓ (xxx) parce qu'il fallait faire plus quelque chose pour que ça arrive à quatre// c'était un/ combien ça faisait un↑/ bein c'était trois divisé par trois (5 sec) et pis après j'ai essayé avec celui-là / pis ça m'as donné deux↓ 16. ENS : (<i>regarde FE Lur air dubitatif</i>) c'est juste c'est deux centimètres// mais/ j'avoue j'ai un peu de peine à comprendre ton raisonnement	TP (3.3) /SM non repris pas P TP (3.3)/SM non reconnu par ENS	

Luria (voir 23.2) relève alors un trait pertinent (TP) par rapport à une situation mathématique (SM) que l'enseignante ne traite pas comme tel. Luria tente d'expliquer "pourquoi le tiers" en s'appuyant sur les données de la carte T. Dans un discours d'accompagnement à l'explication de Luria, l'enseignante suggère qu'il a comparé les données (voir 23.12) : "trois cm était quatre cm" (sous-entendu 3 sur l'une des cartes et 4 sur l'autre). Luria semble s'y reconnaître et approuve. Mais la tentative d'explication de Luria au tour de parole 23.15 tourne court et surtout, probablement, le "il fallait faire plus quelque chose" suivi immédiatement de "c'était trois divisé par trois", laissent l'enseignante dubitative : est-il en train de procéder additivement ? Se demande vraisemblablement l'enseignante. Comme précédemment ? Ou différemment ? A quoi correspond la division dont il parle ? Autant de questions que l'enseignante s'est peut-être posée, mais en tout état de cause auxquelles elle n'a pu répondre faute d'identifier la situation mathématique (SM) à laquelle Luria s'est confronté. Elle se contente de reconnaître que la solution est exacte, mais qu'elle ne comprend pas comment Luria y arrive.

Qu'en est-il du côté de Christiane ? Aux minutes 26-27, Christiane explique qu'elle a essayé de mesurer la taille des lettres des mots figurant sur les cartes, ce qui au demeurant, aurait pu être payant, les lettres étant agrandies bien évidemment dans les mêmes proportions¹⁵ ; mais là non plus, l'enseignante ne reconnaît pas l'intérêt de la situation de comparaison qu'a identifiée Christiane.

A la minute 27, par deux fois, on observe une résonance inattendue à la conjecture de Christiane dans l'extrait 1 ("ils ont agrandi de deux fois sûrement") qui avait donné lieu à la contradiction (CTRD) soulevée par Luria. L'enseignante pose une hypothèse au tour de parole 27.1 ("si ça mesurait....") pour ensuite mettre en défaut la réponse de Christiane, qui trouve le double de 1,5 (voir 28.2). L'enseignante revient à la charge (28.3) avec "qu'est-ce qui se passe entre trois et quatre ?".

	1. ENS : si (5 sec) ça/ ça mesurait/ euh/ trois centimètres et puis ça six centimètres↑ qu'est-ce qui se serait passé↑ 2. Chr : <u>ILS ONT AGRANDI DE TROIS/ DE TROIS// ILS ONT AGRANDI DE TROIS CENTIMETRES</u>	Résonance très tardive sur TP & CTRD de LUR à min 15 TP (3.3)/SM non repris par Ens	
28	1. ENS : là// il// y aurait quoi ici↑// un-virgule-cinq// et pis ici↑ 2. Chr : bein là/ <u>IL Y AURAIT</u> (5 sec) <u>DEUX</u> euh// trois 3. ENS : mais là on n'a pas six// on a quatre// donc qu'est-ce qui se passe entre trois et quatre (<i>pointe sur FE Lur</i>) 4. Chr : ils ont agrandi à un centimètre/ ils ont fait deux (xxxxxxxxx) 5. ENS : et pis avant tu m'as fait une multiplication// maintenant tu me fais une addition 6. Lur : attend// <u>TROIS [CENTIMETRES</u> 7. Chr : <u>[FOIS JE SAIS PAS COMBIEN CA FAIT QUATRE</u> 8. Lur : trois centimètres (4 sec) 9. ENS : moi je vous relance sur ce que je vous ai dit avant (5 sec) <u>ON EST DANS LE CHAPITRE DES PROPORTIONS</u> applications euh (5sec) alors quelle méthode on peut trouver pour// pour comparer sur trois centimètres↑ sur	TP (3.3)/SM Résonance très tardive sur TP & CTRD de LUR à min 15 TP pour la recherche du coef de prop. / non repris par ENS Reprise d'un TP /contrat	

¹⁵ Puisque l'agrandissement entre les deux cartes est le résultat d'une action de la photocopieuse.

Devant la difficulté, Christiane revient probablement à une procédure additive (voir 28.4 : "ils ont agrandi à un centimètre"). Ce que l'enseignante ne manque pas de pointer, en échos au trait non pertinent (TnP, minute 8) sensé faire partie de la référence commune depuis un bon moment déjà. CHR énonce alors ce qui pourrait devenir une situation de recherche du coefficient de proportionnalité (voir 28.7 : "fois je sais pas combien ça fait quatre"), trait pertinent (TP) que l'enseignante ne reprend pas. Elle se contente de revenir contractuellement à ce qu'elle disait à la classe à la minute 8 (voir 28.9) : "souvenez-vous, on est dans le chapitre des proportions applications".

Conclusions sur l'extrait 3 : Les hésitations de Christiane montrent combien elle "navigue à vue" en s'en remettant complètement aux attentes du contrat didactique, dès que l'enseignante est présente, alors même que, en son absence, elle se montre capable de certaines constructions personnelles tout à fait pertinentes par rapport à la situation mathématique. Parmi toutes les propositions qu'elle a énoncées (mesure empirique des distances par repérage des indices sur la carte, comparaison de la taille des lettres, recherche d'un nombre par lequel il faut multiplier), aucune n'a trouvé une reprise ou une résonance dans le discours de l'enseignante, par exemple sous forme de la constitution de séries qui aurait permis d'identifier des relations proportionnelles. Et ce, malgré leur pertinence potentielle par rapport à la situation mathématique. Faute d'avoir un espace possible pour tester ses conjectures et dégager ne serait-ce que des embryons de validation, elle ne peut que s'en remettre au contrat d'où, probablement, son retour à des procédures additives (première procédure en général chez les élèves). Sur les plans chronogénétique et topogénétique, il ne se passe pas grand chose, l'enseignante statue sur les propositions des élèves depuis une position surplombante. La chronogenèse est comme suspendue (il n'y a aucune déclaration d'avancée) aux relances et tentatives d'orientation de l'action. En réalité, les élèves sont tellement en décalage, et même au-delà des attentes de l'enseignante, que la tentative de reprise de contrôle de celle-ci, en faisant intervenir une "bonne" élève par la suite (Ernestine), pour montrer comment elle s'y est prise ne peut relever que d'une ostension déguisée. Cela montre bien l'état de la fiction didactique dans laquelle l'action P-ELS n'est conjointe que par le truchement du contrat didactique.

3.5 Incursions dans la suite du protocole

Quelques incursions dans la suite du protocole permettent de connaître l'état des réflexions de Luria et Christiane à la fin de cette phase.

Après la correction au tableau noir par Ernestine, qui montre la technique du produit en croix, Luria reste persuadé que sa première procédure est correcte même si elle n'a pas été validée.

Minute 33 :

1. Lur : n'empêche c'était juste avant (*pointe sa 1^{ère} écriture sur FB*)

$$\begin{array}{l} \text{N } 1,5 : 3 = 0,5 \quad 3 : 3 = 1 \\ 1,5 + 0,5 = 2 \quad 3 + 1 = 4 \\ \\ \text{T } 1,5 = \frac{3}{2} \\ \text{U } \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{array}$$

Christiane, quant à elle, tente, comme d'autres élèves, d'appliquer le produit en croix lors du problème suivant où il est question de rechercher la distance réelle, en km. entre deux villes situées sur la carte de la Suisse, sachant que l'échelle est 1/500 000 :

Minute 45 :

$$\begin{array}{l} \text{Sion} \quad \frac{3}{1500'000} = \frac{1}{500'000} \\ \text{Sierra} \end{array}$$

Une simple multiplication aurait suffi ici, mais Christiane, contractuellement, recherche la technique attendue précédemment. Ce n'est pas faux, mais ce faisant, qu'a-t-elle appris ? Si elle a appliqué ce qu'elle suppose attendu de l'enseignante (à juste titre en l'occurrence), le "1500000" trouvé n'a de signification que sous couvert de la technique; elle ne peut donner

sens à sa solution, et la preuve en est qu'elle peine ensuite à dire à l'enseignante quelle est la distance en kilomètres.

Un nouveau problème technique (classique) est alors traité avec l'enseignante, à savoir la conversion des unités centimètres en kilomètres à l'aide d'un tableau.

En point d'orgue, voyons maintenant ce qu'il en est de Luria plus tard, lors de sa rencontre avec le chercheur qui l'interroge deux jours plus tard sur ce qui s'est passé dans cette séance. Luria a abandonné sa procédure au profit du produit en croix.

(...)

68. Lur : ben d'abord on avait fait/ le tiers comme ça ça avait fait juste/ mais après/ euh
Jacqueline elle ne comprenait pas comment j'av/ comment on avait eu l'idée/ alors après on a dû faire le produit en croix

(...)

Et un peu plus loin :

(...)

175. Int : t'avais l'impression d'avoir appris des nouvelles choses

176. Lur : mmh/ de plus utiliser le produit en croix

177. Int : si on te donnait encore un problème comme ça/ tu penses que/ tu penserais directement le produit en croix

178. Lur : non pas directement mais si je pense réussir avec une autre manière/ je le fais peut être avec l'autre manière mais/ sinon je penserais au produit en croix/ j'essayerais

179. Int : mais il y a pas d'autre manière pour cet exercice pour arriver/ selon toi

180. Lur : mmh/ je sais pas

181. Int : (xxx)

Lorsque l'interviewer lui demande s'il a appris des choses nouvelles, sa réponse est éloquente : le produit en croix est considéré comme la technique sûre. Toutefois, il mentionne de possibles résolutions qui ne passeraient pas par cette technique, mais faute d'une reconnaissance de sa procédure (et d'une institutionnalisation), il ne peut, dit-il, savoir "si c'était juste".

En d'autres termes, quelle que soit l'ingéniosité déployée par les élèves, si le professeur n'organise pas les conditions de reprise, résonance et validation sur les traits pertinents identifiés ou proposés par les élèves, les enjeux d'enseignement restent portés par le contrat et les enjeux d'apprentissage sont effleurés quasi-marginalement, voire clandestinement par

les élèves. En tout état de cause, ils restent sans échos et ont de fortes chances de sombrer rapidement dans l'oubli, comme en témoigne Luria dans l'entretien final. Ce constat n'a évidemment rien d'étonnant, mais confirme une fois de plus le statut socio-cognitif des apprentissages des élèves.

3.6 Conclusion par rapport aux phénomènes construits

Cette observation n'est pas très éloignée des phénomènes mis en évidence par d'autres travaux en didactique des mathématiques, notamment ceux de E. Comin ou de M. Hersant concernant la tendance à une algébrisation précoce (et ici non contrôlée). Chez cette enseignante, on observe, de fait, qu'elle ne fournit pas les conditions à l'élaboration de situations : ce sont en premier lieu des tâches et leurs techniques afférentes qui sont proposées aux élèves. Nonobstant, l'observation atteste que ces derniers ont essayé de s'enseigner à eux-mêmes (au sens de Mercier) en se confrontant à des situations mathématiques pertinentes... potentiellement. Cela dit, pour tempérer quelque peu le propos, on ne dispose ici que d'une observation ponctuelle : on sait par l'entretien avec l'enseignante que cette séance en suit d'autres où le thème de la proportionnalité a été abordé et où un enseignement a eu lieu. On l'a signalé, cette séance a surtout un statut d'évaluation pour l'enseignante. Ce qui pose le problème d'un dispositif de recherche qui isole une séance parmi d'autres : l'avenir réside sans doute dans des dispositifs de plus longue durée qui permettent d'examiner les connexités entre les objets d'enseignement/apprentissage.

4. Conclusion par rapport à l'usage du modèle de l'action conjointe P-Els

On pourrait se demander pourquoi nous ne pouvions pas nous contenter du premier niveau d'analyse puisque celui-ci permet de décrire l'essentiel de l'activité : avec ce premier niveau, on sait déjà, par exemple, que l'enseignante ne reconnaît pas la démarche de Luria ou encore que son rapport aux situations de proportionnalité est vraisemblablement

entièrement canalisé par l'usage du produit en croix. On a vu aussi que son seul argument pour contrer la procédure additive consiste à renvoyer, contractuellement, les élèves au chapitre en cours. Du côté des élèves, on sait aussi que Luria met en œuvre une procédure pertinente et on peut encore penser que Christiane ne fait que suivre. Pourtant, une loupe plus puissante est nécessaire pour comprendre, en l'occurrence dans ce groupe d'élèves (puisque le cours dialogué des parties collectives est très réduit, compte tenu du statut de cette leçon), qui, du professeur ou des élèves, porte les objets de la mésogenèse et qui les fait avancer. Cette forme de "dissection" de l'activité montre que chacun des deux élèves opère sur un milieu différent, mais que tous les deux retrouvent les enjeux de la situation mathématique, sous des formes contrastées. On l'a repéré de façon évidente pour Luria dès le premier niveau de l'analyse ; mais pour Christiane, le premier niveau ne suffit pas et ne prépare pas à cette découverte. Il faut, pour se rendre compte que Christiane retrouve les enjeux de la situation, examiner les objets précis sur lesquels porte l'action de l'élève, ce qui constitue des traits pertinents pour elle, quelles sont les contradictions repérées et quelles sont les règles d'action énoncées.

C'est à cet usage qu'il devient primordial de comprendre quel est le jeu du professeur sur le jeu de l'élève : c'est bien parce que le modèle permet un repérage aussi fin, que l'on peut mettre en relation l'action conjointe du professeur à propos des situations mathématiques auxquelles se confrontent (de fait) chacun des élèves et le parti qu'en tire (ou non) le professeur. Entre les actions engagées par les deux élèves observés, il y a une bifurcation dans la mésogenèse, qui n'est pas très éloignée du sens que donne Margolinas (2004) à ce terme, mais nous précisons qu'ici, les bifurcations observées permettent potentiellement, soulignons-le, aux élèves de retrouver les enjeux de la situation mathématique.

Bibliographie

- Bosch, M. (1994). Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnnot (Ed.), *Actes du colloque ARDM Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à G. Brousseau et G. Vergnaud* (pp. 305-312). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bronckart, J.-P. (Ed.) (2004). *Agir et discours en situation de travail*. Cahiers de la Section des sciences de l'éducation, Université de Genève, FPSE, no 103
- Brousseau, G., (1987). Module 8 : Similitudes, In *Rationnels et décimaux*, (pp137-157). Publication de l'IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9/3, 309-336.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage éditions.
- Burgermeister, P-F. & Coray, M., (2005) *Les contrôles de validité en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive*. Mémoire de DEA, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, Université de Genève.
- Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspective apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 12 /1, pp73-112
- Chiesa-Millar, V. (2004). *Le travail sur les échelles : un révélateur de pratiques d'enseignement de la géographie à la fin du primaire et au début du secondaire*. Canevas de thèse, FPSE, Université de Genève.
- Chiesa Millar, V., Ligozat, F., Leutenegger, F. & Schubauer-Leoni, M.L. (à paraître) Processus didactiques : l'articulation des gestes de l'enseignant et des élèves. In S. Canelas Trevisi (Ed.) *Langage, objets enseignés et travail enseignant en didactique du français* (ouvrage à paraître aux Éditions de l'Université de Grenoble)

- Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22, 2/3, 135-183.
- Hersant, M. (2001). Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Ed.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée sauvage. [CD-ROM des Séminaires]
- Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, 58, pp 5-41.
- Fillietaz, L., (2002). *La parole en action. Eléments de pragmatique psychosociale*. Quebec : Nota Bene.
- Mercier, A. & Le Marechal, J.-F (Coord.) (2006). *L'intervention et le devenir des connaissances antérieures des élèves dans la dynamique des apprentissages scolaires*. Rapport de recherche final dans le cadre de l'appel d'offre Ecole et Sciences Cognitives 2003, Projet n°AF14.
- Leutenegger, F. & Schubauer-Leoni, M.L. (2002). Les élèves et leur rapport au contrat didactique : une perspective de didactique comparée. In A. Terrisse (Ed.), *Les didactiques scientifiques et technologiques. Les dossiers des sciences de l'éducation* No.8, 73-86. Toulouse : Presses Universitaires du Mirail.
- Ligozat, F. (2002). *Analyse didactique des interactions dans une leçon sur les "grands nombres", suivie d'un essai de catégorisation de l'action enseignante en milieu ordinaire*. Mémoire de DEA en Sciences de l'Education, Université de Genève, FAPSE.
- Ligozat, F. (2004). Gestes didactiques et discursifs des professeurs : quel statut dans le déroulement temporel d'une séance de mathématiques? In E. Nonnon, M.-J. Perrin-Glorian & D. Tissoires (Ed.). [CD-ROM]. *Actes du congrès « Faut-il parler pour apprendre ? »*, Arras 24-26 mars 2004.
- Ligozat, F. (2005). *Contribution à la construction d'un modèle de l'action conjointe du professeur et des élèves à propos de l'enseignement de la mesure à l'école primaire. Etude comparée dans les contextes institutionnels français et suisses romands*. Canevas de thèse, FPSE, Université de Genève.
- Margolinas, C., (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. Note d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Provence : Aix-Marseille.

- Mercier, A. (1999) La participation des élèves à l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol 18/3, pp.279-310.
- Mercier, A (2002). L'observation du travail des élèves : quels en sont les objets élémentaires et comment peut-on les produire ? In P. Venturini, C. Amade-Escot & A. Terrisse. *Etudes des pratiques effectives : l'approche des didactiques*. (pp. 147-174) Grenoble : La pensée Sauvage
- Porcheron, J.-L. (1999). Production et critique d'arguments dans une situation de proportionnalité. In J. Douaire & C. Huber (Ed.), *Vrai ? Faux ? ... On en débat : de l'argument vers la preuve en mathématiques au cycle 3* (pp. 155- 170). ERMEF. Paris : INRP
- Schubauer-Leoni M.-L. & Dolz, J. (2004). Comprendre l'action et l'ingéniosité didactique de l'enseignant : une composante essentielle de la transformation de l'école. In J-P. Bronckart & M. Gather-Turler (Ed.), *Transformer l'Ecole* (Coll. Raisons éducatives : pp 147-168). Bruxelles : De Boeck Université.
- Schubauer-Leoni, M.-L., Ligozat, F. Leutenegger, F, Sensevy, G. & Mercier, M. (2004). *Capire l'azione dell'insegnante per interpretare l'attività dell'allievo in classe*. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Ed.) *La Didattica della matematica : una scienza per la scuola*. (pp.49-63) Bologna : Pitagora Editrice.
- Schubauer-Leoni, M.-L., & Leutenegger, F. (2005). Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue Suisse des Sciences de l'Education*, 27, 2005/3, 407-429.
- Schubauer-Leoni, M.L., Leutenegger, F., Ligozat, F & Fluckiger, A. (sous presse) Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves: les phénomènes didactiques qu'il peut/doit traiter. In G. Sensevy & A. Mercier, (Ed.) *Agir ensemble. Eléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves* (ouvrage à paraître aux Presses Universitaires de Rennes)
- Sensevy, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur, In J.-M. Baudoin et J. Friedrich (Ed.) *Théories de l'action et éducation*, (Coll. Raisons Educatives : pp. 203-224), Bruxelles : De Boeck Université.
- Sensevy, G. (2002). Des catégories pour l'analyse comparée de l'action du professeur : un essai de mise à l'épreuve. In P. Venturini, C. Amade-Escot & A. Terrisse (Ed.). *Etude des pratiques effectives : l'approche des didactiques*. (pp25-46). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/3, 263-304.

Sensevy, G., Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.-L., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005) An attempt to model the teacher's action in the mathematics class, *Educational Studies in Mathematics*, 59 (1,2,3). [Special issue]

Sensevy, G. & Mercier, A. (Ed.) (sous presse) *Agir ensemble. Eléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves* (ouvrage à paraître aux Presses Universitaires de Rennes)

Vernant, D. (1997) *Du discours à l'action*. Paris : PUF

Annexe 1 : Tableau des catégories de l'action conjointe P-Els (d'après Schubauer-Leoni, Leutenegger, Ligozat & Flückiger, sous presse)

Structures fondamentales de l'action conjointe					
DEFINIR / REGULER & GERER L'INCERTITUDE / DEVOLUER / INSTITUER					
Types de tâches		Types de gestes et techniques d'action			
Question des territoires et des temporalités	Construction de la référence, indication	Dénomination, organisation de l'action conjointe et de l'interaction Intégration des objets Analyse de l'action	I. Métagénèse	1-Dénomination/désignation des objets du dispositif 1.1-Ostension (éléments verbaux, gestuels, matériels, graphiques) de la part de P 1.2-Diffusion de désignations produites par un ou plusieurs Els 2-Elaboration d'une règle d'action pour entrer dans la situation/la tâche et pour la traiter (à propos du faire du dire du prouver) 2.1-indication/prescription de la part de P 2.2-co-construction (P en coopération avec un ou plus Els) 3-Dénomination/désignation de traits pertinents (à propos du faire du dire du prouver) 3.1-identification et dénomination de TP - de la part de P - de la part de El(s) → reprise/non reprise par P 3.2-questions d'un E relative à un TP → reprise/non reprise par P 3.3-questions de P → réponse d'un E comportant un TP → reprise/non reprise par P 4-Repérage d'une contradiction (à propos du faire du dire du prouver) 4.1-identification et dénomination - de la part de P - de la part de El(s) → reprise/non reprise par P 4.2-Résonance sur une proposition contradictoire - provenant de El(s) → reprise / non reprise par P	
			II Topogénèse	1-gestion des phases de l'activité des Els 1.1-Position d'accompagnement et de transition -gestion individuelle (P avec E) -gestion collective (P avec Classe) 1.2 Suspension de l'action par P (E1 ou Classe sans P) 2-Gestion des positions topogénétiques de P (à propos du faire du dire du prouver) 2.1-Postulation mimétique (P au niveau de E ou Cl) 2.2-Mise à distance, retrait (Els, Cl travail sans intervention de P) 2.3-Surplomb topogénétique (P statue, évalue la pertinence du faire du dire du prouver) 2.4-Coalition (P instaure/ « joueavec » coalition entre E contre Cl ou Cl contre un E, ...)	
			III Chronogénèse	Gestion des temporalités : temps didactique de P / Temps d'apprentissage de la classe 1.1- Appel à la mémoire didactique (MD) de la classe initié par P 1.2- Diffusion par P d'un élément de MD évoqué par un ou plus Els 1.3- Anticipation / finalisation d'actions possibles : - par P - par Els / Cl relativement à une diffusion à la charge de P 1.4- ralentissement /accélération de l'action - par P - par Els / Cl → reprise / pas reprise par P 1.5- Orientation de l'action - en fonction d'éléments nouveaux repérés par P - en fonction d'el Nouveaux repérés par El(s) diffusés /pas diffusés par P 1.6- Repérage d'indicas de fin d'activité - par P - par El(s) diffusés /pas diffusés par P 1.7- Déclarations d'avancées - par P dans un but d'institutionnalisation - par un ou plus E → reprise par P relance de la part de P à l'égard de un E ou la Cl entière	
			Instruments verbaux et non verbaux Usage des pronoms, marqueurs oraux, notations, dynamique du dialogue		

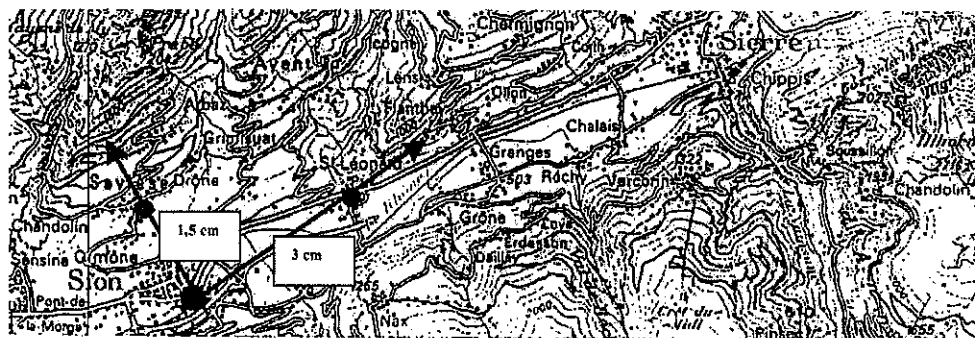
Annexe 2

La fiche du problème « agrandissement de distances sur carte »

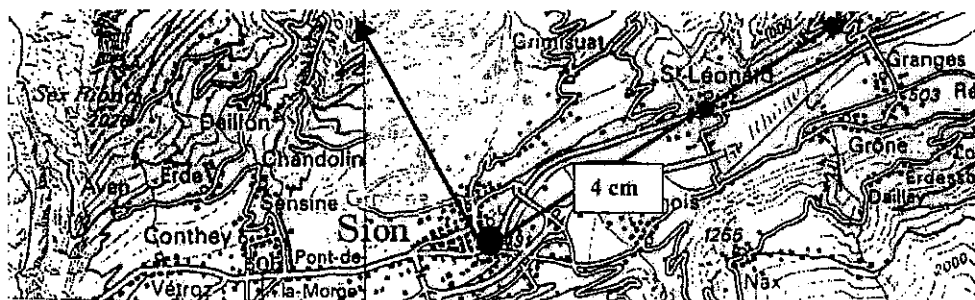
L'extrait de carte **U** est un agrandissement de l'extrait de carte **T**.

Sur l'extrait de carte **T** Sion est situé à 1,5 cm de Savièse et à 3 cm de St. Léonard :

Extrait de carte **T**



Extrait de carte **U**



Combien de cm séparent Sion de Savièse sur l'extrait de carte **U** en sachant que St. Léonard est à 4 cm de Sion sur cette carte ?

Sur l'extrait de carte **U** Savièse est à cm de Sion.

Annexe 3

Synopsis de l'activité (1) toute la classe 6P

Min	Evénements	
1-2	Lecture consigne sur la fiche	
3-7	Recherche dist. Sion-Savièse sur la carte U (tous les groupes)	
→8	<u>Rappel fait par ENS</u> sur « le chapitre des proportions »	
9-18	Recherche dist. Sion-Savièse sur la carte U (tous les groupes)	
→ 19-20	<u>Prolongement proposé par ENS</u> : « A l'aide de ta carte de la Suisse, trouve combien de km séparent Sion de Sierre »	
21-32	Dist. Sion-Savièse sur la carte U	Dist. Sion-Sierre sur la carte Suisse
33-36	Correction dist. Sion-Savièse sur la carte T « le produit en croix »	
37-46	Recherche dist. Sion-Sierre sur la carte Suisse (correction dans les groupes)	

(2) groupe LUR + CHR élèves de 6P

Min	Evénements gr LUR+CHR
1-2	Collectif : lecture consigne
3-7	Recherche d'une correspondance entre T et U $\Rightarrow$ flèche +1 entre les deux cartes $\Rightarrow$ "2.5" sur la carte U.
8	Echange avec l'ENS : réponse fausse (Collectif : le "chapitre des proportions")
9-14	Prise de mesures et essai de localisation de Savièse sur la carte U $\Rightarrow$ constat d'agrandissement $\Rightarrow$ repérage empirique de Savièse
15	Echange avec l'ENS : confirmation de l'agrandissement
16-17	Essai de détermination d'un agrandissement possible $\Rightarrow$ faire "fois quelque chose", $\times 2$, $\times 1$, $\times 0.75$
18	Echange avec JUS ou ELE ?
19-21	Calculs pour arriver à "2 cm" $\Rightarrow 1.5: 3=0.5$ et $1.5+0.5=2$ $3:3=1$ et $1+3=4$ (Collectif : annonce d'une 2 ^{ème} question, prolongement sur carte Suisse)
22-25	Echange avec l'ENS : validation du résultat "2 cm" mais incompréhension de la procédure de LUR (+ 1/3).
26-29	Echange avec l'ENS : retour sur les procédures empiriques (avec CHR)
30-32	Echange avec ENS : appel à ERN $\Rightarrow$ procédure du produit en croix
33-35	Correction collective au TN : procédure "produit en croix" par ERN

Etude des pratiques de professeurs « néo-titulaires » dans des collèges ZEP

Plusieurs études de cas

Lalina Coulange,

IUFM de Créteil et DIDIREM (Paris 7)

Merci à Charlotte, Laurent, Michel, Sébastien et Serge de nous avoir ouvert la porte de leurs classes...

1. A l'origine...

1.1 Un projet de recherche et une formation au sein de l'IUFM de Créteil

L'équipe de recherche de l'IUFM de Créteil (pilotée par D. Butlen) travaille depuis plusieurs années à l'étude des pratiques de professeurs débutants en ZEP, avec une orientation récente sur la formation au travers de scénarios de formation ou les dispositifs d'accompagnement des enseignants (Butlen 2004, Butlen et al. 2006).

Les travaux concernant le second degré, plus précisément les professeurs de collège ont débuté assez récemment : en septembre 2004. Ils font suite à l'intervention conjointe de deux personnes de l'équipe de Créteil (J-F. Chesné et moi-même) dans la formation disciplinaire des professeurs néo-titulaires de mathématiques en collège, dans le cadre du dispositif de formation continue « Entrée dans le Métier », mis en place sur l'Académie de Créteil. La plupart des enseignants qui participent à ce dispositif enseignent en ZEP.¹

1.2 Les questions initiales

Les premières questions qui ont émergé dans ce contexte prolongent celles posées au sein des recherches sur les pratiques des professeurs des écoles enseignant en ZEP, conduites par notre équipe de recherche depuis plusieurs années (Peltier et al. 2004).

Suite à l'absence de résultats spécifiques concernant les pratiques d'enseignants de collège en ZEP, nous nous posons des questions relatives aux pratiques « ordinaires » des professeurs dans les classes concernées, notamment :

¹ il s'agit pour beaucoup d'entre eux, d'un public désigné de professeurs qui bénéficient de deux heures de décharge, pour bénéficier du dispositif « Entrée dans le Métier ».

- Quelles contraintes institutionnelles (liées au programme, au fonctionnement de l'établissement), ou internes au fonctionnement des classes (régulations de l'activité enseignante) pèsent sur l'enseignement des mathématiques en collège ZEP ?

- Quelles marges de manœuvre sont laissées aux professeurs de mathématiques dans ce contexte ? Comment les professeurs investissent-ils ou non ces espaces de liberté ?

Sur ces questions, nous faisons et testerons l'hypothèse que certains des résultats sur les pratiques ordinaires en ZEP établis au sein de notre équipe sont transposables dans le second degré. Précisons cependant que nous ne cherchons des éléments de réponse à ces questions qu'à travers l'étude des pratiques de professeurs débutants et de leur évolution (sur l'année 2004-2005, voire sur les années suivantes). Ce qui nous conduit également à analyser sous un jour dynamique les pratiques observées : en nous interrogeant sur leur caractère transitoire ou stabilisé, au travers d'une mise en regard avec les apports éventuels de la formation initiale voire de la formation continue.

Comment les pratiques des professeurs débutants évoluent-elles ou se stabilisent-elles lors de leurs premières années d'exercice en collège ZEP ? Comment caractériser des aspects *transitoires* (ou à l'opposé *stabilisés*) de ces pratiques ? Quels seraient les déterminants de ces pratiques (relevant des apports de formation initiale et continue, des contraintes externes ou internes qui pèsent sur ces pratiques) ?

1.3. A partir de la complexité des pratiques enseignantes...

Deux des points de vue théoriques issus de la didactique des mathématiques qui visent explicitement l'étude des pratiques enseignantes prennent comme point de départ la *complexité* qui caractériserait ces pratiques professionnelles : mettant en avant le caractère multidimensionnel et dynamique de ces pratiques ou l'implication de connaissances de natures diverses qu'elles sous-entendent.

« les pratiques enseignantes sont des pratiques complexes, non réductibles à des unités séparées, comme la préparation mathématique, ou le déroulement, etc., vraisemblablement non décomposables en mises en fonctionnement de connaissances isolées disciplinaires, didactiques, pédagogiques, etc., car des recompositions de tous ordres s'opèrent constamment (la préparation d'une séance influence grandement son déroulement, mais il s'ajoute toujours en classe des éléments non prévisibles, qui pourront à leur tour influencer les séances suivantes). » (Robert 2001).

Les deux points de vue en question sont : la double approche didactique et ergonomique à laquelle fait référence la citation ci-dessus, et le modèle de la structuration du milieu développé à partir de la théorie des situations didactiques.

La double approche développée par Robert et Rogalski (2002, 2005) met en avant cinq composantes des pratiques enseignantes pour en démêler la complexité :

- les composantes personnelles, sociales et institutionnelles qui jouent un rôle déterminant pour ces pratiques : elles permettent en quelque sorte d'étudier une partie des contraintes qui pèsent sur ces pratiques soit du point de vue du métier d'enseignant (composantes sociales et institutionnelles), soit par la prise en compte de singularités liées à l'individu concerné (conceptions liées à l'enseignement, au savoir mathématique, etc.)
- les composantes médiatives et cognitives qui « *renseignent sur l'organisation de la séance prévue par l'enseignant, et ses actions pendant le déroulement de la séance* » (op. cité, p. 509). La composante cognitive serait celle qui résulte du projet préalable d'enseignement du professeur, tandis que la composante médiative est relative aux modes d'interaction entre l'enseignant et ses élèves au sein de la classe.

Le modèle de la structuration du milieu tel qu'il a été développé par C. Margolinas (2002, 2004) décompose l'activité du professeur en interaction avec un milieu décomposé suivant cinq niveaux, résumés dans le schéma ci-dessous :

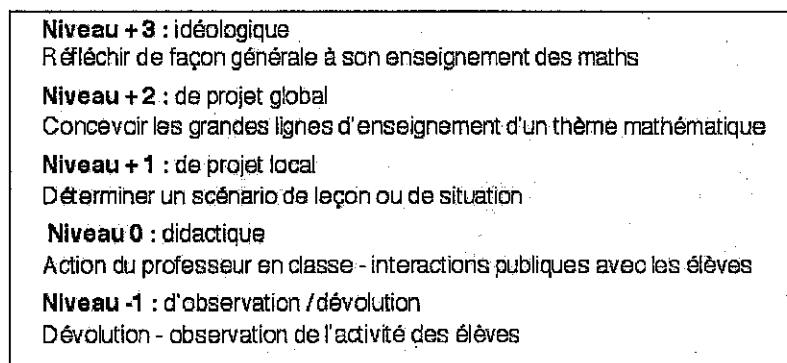


Figure 1 : schéma simplifié du modèle de la structuration du milieu « du point de vue du professeur »

Sans l'exposer en détail, rappelons que ce modèle est dynamique. A chaque niveau, le professeur interagit avec le milieu qui résulte conjointement des niveaux inférieur et supérieur. Par exemple, en situation de projet local (Niveau +1) lorsqu'il projette sa leçon, le professeur interagit avec ce qu'il imagine de son projet plus global d'enseignement (Niveau 2 : comment cette leçon s'inscrit-elle dans les grandes lignes du thème mathématique abordé ?) et ce qu'il anticipe de son déroulement en classe (Niveau 0 : quels

seront ses actions, ses interactions avec les élèves, etc. ?). De même, en situation didactique, le professeur interagit avec son projet local d'enseignement (Niveau +1) et ce qui résulte de ses observations de l'activité des élèves (Niveau -1).

Des rapprochements peuvent être faits entre ces deux points de vue :

- Les composantes personnelle et institutionnelle de la double approche peuvent être rapprochées des niveaux surdidactiques du modèle de structuration du milieu. Notamment, le niveau idéologique qui touche de près les conceptions de l'enseignant sur l'enseignement des mathématiques, voire sur l'enseignement en général me paraît assez proche de la composante personnelle. Une partie de la composante institutionnelle, relative aux pratiques officielles d'enseignement des mathématiques, prescrites par les programmes ou au savoir à enseigner, joue un rôle déterminant dans l'élaboration par le professeur d'un projet global, voire local d'enseignement.
- Les composantes cognitive et médiative peuvent quand à elles, être associées aux niveaux didactique et adidactique. Par exemple, les aides apportées par l'enseignant en situation de classe, afin d'assurer la dévolution de la situation d'apprentissage au niveau -1, sont rattachables à la composante dite médiative de ses pratiques.
- La composante sociale semble plus « diffuse » au sein des niveaux du modèle des milieux du professeur : une partie de cette composante ayant trait à des contraintes externes spécifiques de l'établissement par exemple et relevant a priori plutôt des niveaux surdidactiques ; tandis qu'une partie relative à des contraintes plus internes, liées aux élèves par exemple, se rapprocheraient des niveaux de situation didactique et d'observation/dévolution.

Cependant, si de tels rapprochements sont possibles, le grain d'analyse des pratiques enseignantes suggéré par chacune de ces approches ou au travers des utilisations qui en sont faites, paraît différent. Le modèle de la structuration du milieu est essentiellement utilisé pour des analyses de « grain fin », prenant comme point de départ une situation didactique. Tandis que la double approche permet des études de « grain plus large », ou du moins, vise davantage explicitement à rendre compte d'éléments stabilisés dans les pratiques observées. Précisément, la double approche permet de dégager des logiques d'action, à partir de la combinaison des composantes cognitive et médiative (Robert et Rogalski 2002). Ceci nous conduit à réinterroger le modèle de la structuration du milieu du point de vue du professeur,

ou du moins les analyses *verticales* souvent descendantes (Margolinas 2002, Coulange 2002), parfois ascendantes (Margolinas et al. 2005) effectuées au sein de ce modèle, référées à une situation didactique. Ces logiques d'action qui émergent à la fois par et dans l'activité du professeur suggèrent en quelque sorte une analyse plus horizontale des niveaux didactique et d'observation/dévolution : sans remontée « obligée » dans les niveaux surdidactiques, tout en restant cohérente avec ces niveaux.

1.4. Hypothèses de recherche

En nous appuyant sur ces éléments de cadrage théorique, nous avançons trois principales hypothèses de recherche sur la spécificité des pratiques d'enseignants débutants, relatives à leur caractère potentiellement transitoire ou stabilisé :

- La première de ces hypothèses a émergé dans le travail de Chesné (2006) : elle s'inspire métaphoriquement des thèses de Ochanine (1978). Chesné suppose que le passage par une ou plusieurs *caricatures professionnelles* est fréquent pour un enseignant dans le processus de construction de son identité professionnelle. Le professeur novice mettrait l'accent sur certains gestes professionnels au détriment d'autres pendant une période plus ou moins longue.

- Une deuxième hypothèse, non sans lien avec la première, est formulée sur les composantes des pratiques enseignantes de la double approche (Chesné 2006). Les *composantes institutionnelles, personnelles ou sociales* des pratiques d'un enseignant débutant s'avèreraient tour à tour « sur » ou « sous-déterminantes ». Tandis que les *composantes médiative et cognitive* seraient « sur » ou « sous-déterminées », tendant vers des logiques d'action plus ou moins enfermantes.

- Enfin, la troisième hypothèse s'appuie sur le point de vue de la structuration du milieu : les *niveaux* qui caractérisent l'activité du professeur débutant pourraient être particulièrement « sur » ou « sous-développés » (Margolinas et Rivière 2005).

Plusieurs questions découlent directement de ces trois hypothèses de recherche. Par exemple, relativement à la dernière des hypothèses citées : quels niveaux du milieu visant à modéliser l'activité d'un enseignant, peuvent s'avérer « sur » ou « sous-développés » lors de ses premières années d'exercice ? Observe-t-on des régularités ou des variabilités d'un professeur débutant à l'autre ? Pour quelles raisons ?

1.5. Méthodologie

L'ensemble de cette recherche s'appuie sur un corpus complexe de données, recueillies suivant trois principaux axes de recherche qui font écho aux questions initiales :

1- *Explorer la diversité des pratiques d'enseignants débutants* : provenant de différents IUFM, enseignant dans des établissements différents.

2- *En amont des pratiques d'enseignants débutants, le rôle de la formation initiale* : quels sont les apports filtrés des contenus de formation initiale pour les pratiques d'enseignants débutants ?

3- *En aval des pratiques d'enseignants débutants, le rôle de la formation continue* : quelle analyse peut-on faire d'un épisode de formation continue auprès de deux enseignants débutants ?

Notre intervention s'appuie en fait essentiellement sur l'étude des données relatives aux deux premiers axes évoqués ci-dessus : l'axe 3 faisant l'objet du mémoire de master de Chesné (2006).

2. Vers l'étude des pratiques d'enseignants débutants

Une partie du dispositif mis en place s'appuie sur l'élaboration et la mise en œuvre d'une séquence d'enseignement des fractions en sixième par 4 enseignants volontaires : dont 3 enseignent dans des établissements ZEP différents.

Les préparations des séances concernées sont collectives, et filmées. Les films concernant les discussions des professeurs débutants lors de l'élaboration du projet d'enseignement visaient à nous renseigner sur le travail de préparation « hors classe », dimension généralement privée du métier d'enseignant.

Nous avons également filmé les réalisations de plusieurs séances concernées (correspondant à l'amorce de la séquence) dans trois classes de sixième différentes sous la responsabilité de deux enseignants provenant de deux IUFM distincts, et enseignant a priori dans des contextes différents : l'un surnommé Sébastien, enseigne dans un établissement « non ZEP » et l'autre surnommé Michel, dans une ZEP sensible.

Notre objectif premier à travers ce corpus de données filmiques était d'explorer la diversité des pratiques d'enseignants débutants. Une partie de leurs choix étant contraints par un

scénario de séquence commun relativement détaillé, nous souhaitons notamment étudier des éléments de variabilité subsistant dans la pratique de deux enseignants, tout en la reliant à des facteurs éventuellement déterminants de cette variabilité : la formation initiale, le profil de l'établissement, etc.

Le tableau ci-dessous synthétise le corpus de données ainsi recueillies :

<i>Préparations collectives de la séquence d'enseignement des fractions par le groupe de 4 enseignants volontaires</i>	Films de deux réunions de préparation collective	Février – Mars 2005
<i>Séances de classe dans une sixième « non ZEP » - Sébastien</i>	Films des deux premières séances de la séquence prévue dans la classe de sixième de Sébastien	Avril 2005
<i>Séances de classe dans deux sixième ZEP – Michel</i>	Films des deux premières séances de la séquence dans la classe de sixième A de Michel Film de la première séance dans la classe de sixième B de Michel	Avril 2005

Tableau 2 : Corpus de données recueillis en 2005 – séquence d'enseignement autour des fractions

2.1 Une séquence commune d'enseignement des fractions en sixième : « les robots »

Précisons quelques éléments relatifs à la séquence d'enseignement envisagée par le petit groupe de professeurs volontaires. Un des enseignants a assisté à la présentation d'une séquence intitulée « les robots » destinée à enseigner les fractions, dans un stage de formation continue sur l'articulation école-collège, et souhaite la mettre en œuvre dans sa classe. La séquence en question s'inspire en fait d'une suite de situations proposée par une édition ancienne du manuel ERMEL CM (1982) intitulé « les automates ». Elle est reprise sous diverses formes dans différentes ressources destinées à l'enseignement de l'école élémentaire (Cerquetti-Aberkane 1992, site TFM : <http://www.uvp5.univ-paris5.fr/tfm/>, etc.).

Le point de départ de cette séquence reste toujours le même (quelle que soit la ressource envisagée) : il s'agit du partage d'un segment en un nombre donné de segments de longueur identique à l'aide d'un instrument constitué d'un réseau de droites parallèles surnommé « guide-âne » (utilisation qui repose implicitement sur le théorème de Thalès).

L'utilisation de cet instrument rend dès lors possible la représentation de parcours de robots ou d'automates, faisant des bonds ou des pas de même longueur, sur la droite numérique.

Ce passage du partage d'un segment unité à la représentation sur la droite numérique peut être rattaché au passage de la « fraction unité » à la « fraction quotient » préconisé par les programmes dans l'articulation école-collège.

A titre d'exemple, voici la représentation du parcours d'un robot qui atteindrait la graduation 4 en 3 bonds.

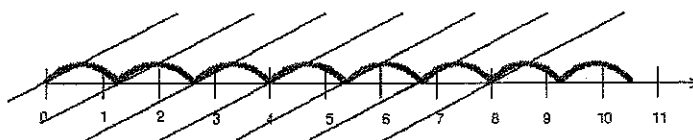


Figure 3 : Parcours d'un robot qui atteint 4 en 3 bonds

Notons qu'un des points forts de la séquence envisageable est dès lors de faire le lien entre des représentations de parcours identiques et l'équivalence des fractions correspondantes.

Par exemple le parcours représenté ci-dessus d'un robot atteignant 4 en 3 bonds, sera identique à celui du robot qui atteint 8 en 6 bonds, qui permet d'illustrer l'égalité $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$.

Etude des pratiques de deux enseignants débutants : Michel et Sébastien

2.1.1 Divergences : projet didactique local explicité lors de l'entretien

Lors des séances de préparation collective, les interventions de Michel et de Sébastien renvoyant pour la plupart à l'élaboration du projet didactique local sont particulièrement contrastées.

Sébastien évoque à plusieurs reprises les difficultés potentielles des élèves que l'utilisation du guide-âne pour parcourir la droite graduée ou que l'interprétation des parcours sur la droite numérique risquent de provoquer. Il insiste sur le fait de proposer aux élèves des parcours « simples » en début de première séance (ne nécessitant pas l'usage du guide-âne : « atteindre 8 en 8 bonds », « atteindre 8 en 4 bonds ») avant de passer à des parcours plus complexes, et de compléter tous les tableaux de proportionnalité correspondant à chacun de ces parcours.

Tandis que Michel déclare à de nombreuses reprises vouloir confronter ses élèves au problème mathématique sous-jacent plus rapidement : il prévoit par exemple de les inviter directement à raisonner sur un nombre restreint de tableaux représentant des parcours plus complexes sur la droite graduée.

Ces différences peuvent paraître déroutantes au vu des contextes dans lesquels les deux professeurs enseignent : rappelons que Sébastien enseigne dans l'établissement « non-ZEP »² et Michel est le professeur débutant qui enseigne dans la ZEP la plus sensible. Ces différences se retrouvent dans certains des choix faits dans l'élaboration de documents qui servent de supports aux séances concernées (assez fidèles à leurs interventions pendant les séances de préparation) et dans la gestion de ces séances.

2.1.2 Différences : réalisation de ce projet local, en situation didactique

Nous ne chercherons pas ici à rentrer dans le détail des analyses des séances filmées, mais à pointer des éléments révélateurs des pratiques contrastées de Michel et Sébastien.

Lors de la première séance, explications données par Sébastien à l'oral sur l'utilisation du guide-âne pour partager un segment puis pour « parcourir régulièrement la droite graduée » sont assez brèves : il semble chercher à ce que les élèves découvrent par eux-mêmes le fonctionnement. Devant les incompréhensions qui subsistent pour de nombreux élèves, pendant une grande partie de la séance, il s'enferme dans des explications individualisées.

Lors de la deuxième séance, après un retour assez long sur la représentation des parcours sur la droite numérique au tableau, il demande aux élèves de compléter tous les tableaux correspondant aux parcours représentés sur la droite graduée. On constate dès lors, à nouveau une perte de vitesse dans le déroulement de la séance : Sébastien circule à nouveau assez longuement dans les rangs pour s'assurer de l'accomplissement de cette partie de l'activité par une majorité d'élèves. Le nombre de tableaux à compléter étant par ailleurs assez important, la phase qui devait permettre de pointer les relations de proportionnalité au sein des différents tableaux est dès lors repoussée à la séance suivante.

Les séances de Michel dans sa première classe de sixième se démarquent assez nettement de celles observées chez Sébastien. D'emblée, après avoir interrogé quelques élèves sur la technique de partage d'un segment en parties de longueurs égales avec le guide-âne, il se lance assez rapidement dans une monstration de l'utilisation du guide-âne à partir d'un exemple en utilisant le rétro-projecteur. Dans la suite de cette séance, les élèves éprouvant

² Précisons cependant que même s'il n'est pas classé ZEP, l'établissement en question traverse une phase critique en 2004-2005 : vandalisme répétés par les élèves, changement de principal en cours d'année, etc.

néanmoins des difficultés à représenter les parcours des « robots » sur la droite graduée, il enverra un élève au rétro-projecteur montrer à nouveau comment utiliser le guide-âne dans la seconde partie de l'activité. Lors de la deuxième séance, en utilisant le prétexte de l'absence d'une élève absente au cours précédent, Michel revient assez longuement sur la représentation des parcours sur la droite graduée en interrogeant les élèves. Il fait ensuite compléter le tableau correspondant à un des parcours représentés. En mode collectif, il explore avec les élèves les propriétés de linéarité additive et multiplicative qui apparaissent au sein tableau ainsi complété.

Les pratiques enseignantes contrastées données à voir par ces deux enseignants révèlent selon nous des composantes médiative et cognitive quasi-opposées :

- On constate chez Sébastien, une propension à se réfugier dans des aides individualisées pour s'assurer de l'accomplissement des tâches par tous les élèves. Les phases correspondant à un processus d'institutionnalisation des savoirs en jeu sont souvent repoussées, voire abandonnées.
- La pratique de Michel apparaît plus intermédiaire entre le « cours dialogué » (avec des moments d'ostension déguisée ou assumée, une importance accordée aux phases collectives) et « l'expérience cruciale » (lorsqu'il cherche à faire rentrer les élèves plus avant dans une activité spécifique, pour en faire émerger le savoir en jeu).

Et pourtant il subsiste différents points communs entre les pratiques de ces deux professeurs, qui pourraient être spécifiques de leur qualité d'enseignants « néo-titulaires ».

2.1.3. Ressemblances : aménagement du milieu matériel et projet didactique global

Un premier point commun est leur difficulté apparente dans l'aménagement du milieu matériel de la première situation d'enseignement « les robots » autour des fractions. Les documents distribués aux élèves, destinés à être utilisés pour représenter les parcours sur des droites graduées présentent des défaillances surprenantes : droites graduées avec des graduations resserrées, elles-mêmes tassées en bas d'une feuille A4 (voire en annexe : le « document élève » de Sébastien). Ces documents rendent la tâche principale de la première

séance, quasi-impossible à accomplir (la représentation des parcours de « robots », nécessitant l'usage du guide-âne).

On peut s'interroger sur l'origine potentielle de ces difficultés : les spécificités de la séquence « les robots » concernée, issue de la culture de l'école élémentaire, en sont-elles la cause ? Ou bien s'agit-il d'une spécificité des pratiques d'enseignants débutants ?

Sur la base des séances de préparations collectives, se dégage un deuxième point commun : la quasi-absence de propos relatifs au projet didactique global, concernant le thème des fractions dans lequel s'intègre la séquence prévue. Le discours de Michel et de Sébastien se focalise sur l'élaboration du projet didactique local en réfléchissant à des éléments des situations didactiques qui en découlent, mais sans se préoccuper du moins explicitement de l'enseignement du thème des fractions.

Ce deuxième point commun pourrait en partie être considéré comme un effet du contexte dans lequel sont recueillis leurs propos. Cependant d'autres travaux ont déjà constaté l'insuffisance de cette partie de la situation du professeur, correspondant à la construction d'un thème mathématique, qu'il soit professeur stagiaire (Margolinas et Rivière 2005) ou plus chevronné (Margolinas et al. 2005).

D'autre part, une enseignante que nous surnommerons Charlotte par la suite, se détache de ses collègues néo-titulaires sur ce point : lors des séances de préparation, elle intervient à plusieurs reprises pour tenter de rattacher leur élaboration de séquence à une réflexion épistémologique, liée à la construction du thème d'enseignement concerné. Notamment, elle tente à un moment de repositionner les séances envisagées par rapport au savoir officiel à enseigner autour des fractions ; elle relit à voix haute le passage du document d'accompagnement concerné et le commente : « Représenter la fraction sur la droite graduée, c'est pour aller vers la fraction quotient, c'est pour voir $\frac{5}{7}$ comme 5 divisé par 7. Et ça c'est à nous de le faire... ».

Cette remarque nous conduit à aborder la troisième partie de notre exposé, Charlotte étant au centre de l'étude concernée.

3. Formation initiale et pratiques d'enseignants débutants

Cette partie fait écho au deuxième axe de recherche évoqué : *en amont des pratiques de professeurs débutants, le rôle de la formation initiale*. Il s'agissait pour nous de fixer une

des variables, susceptibles de jouer un rôle dans la détermination des pratiques d'un enseignant débutant, afin d'en déterminer des effets éventuels.

Les deux professeurs néo-titulaires concernés par ce volet de notre travail, surnommés Charlotte et Serge proviennent du même institut de formation initiale : l'IUFM d'Aix-Marseille. De fait, ils ont reçu une formation initiale disciplinaire, tout à fait spécifique : s'appuyant explicitement sur une approche issue de la didactique des mathématiques, la théorie anthropologique du didactique, développée par Chevallard et son équipe.

Précisons que cette particularité ne correspond pas à un choix fait *a priori*.³ Ceci dit, *a posteriori*, cela nous a semblé particulièrement enrichissant. D'une part, parce que c'est une des formations initiales dont les contenus sont les plus « lisibles » de l'extérieur : les formateurs-chercheurs s'appuyant sur l'approche anthropologique du didactique pour élaborer la formation initiale, ayant fait plusieurs interventions afin de présenter les dispositifs concernés, les choix qui les sous-tendent et les argumenter (Chevallard 1999, Chevallard et Cirade 2006, Matheron et Noirfalise 2005). D'autre part parce que nous sommes familière de cette approche dans l'analyse des pratiques enseignantes, et que pour des raisons déjà mises en avant dans nos travaux antérieurs (Coulange 2001, 2002), il est intéressant de l'articuler avec les deux points de vue issus de la didactique des mathématiques d'ores et déjà cités.

Le recueil de données s'est organisé comme indiqué ci-dessous :

- Entretien préalable et croisé avec les *deux* professeurs débutants (filmé, le 29/01/2005). L'entretien qui s'est déroulé en présence de deux chercheurs, s'appuyait sur une grille de questions en trois temps principaux : description objective des contenus de leur formation initiale (nous disposons de l'intégralité de leurs documents de formation initiale), ressenti personnel et subjectif de cette formation initiale en position de professeur-stagiaire PLC2 (comment ont-ils vécu sur le moment la formation proposée ?), ressenti personnel et subjectif des apports et du réinvestissement des contenus de formation initiale dans leur pratique actuelle d'enseignants débutants en ZEP.
- Observation de deux séances « ordinaires » d'enseignement (mars-avril 2005) sur la symétrie axiale dans les classes de sixième des deux professeurs. Précisons que nous

³ Il s'est tout simplement trouvé que deux des enseignants volontaires pour le dispositif d'observation que nous décrivons ci-après, ont tous les deux reçu leur formation initiale à Marseille.

n'étions pas particulièrement attachée à ce thème mathématique plus qu'à un autre : il s'agissait juste pour nous d'aller observer des séances élaborées et mises en œuvre par ces deux enseignants, autour d'un thème commun, sur une période donnée de l'année. Les séances en classe ont été filmées. Chaque séance est précédée et suivie d'un entretien bref « à chaud » avec le professeur, également filmé.

- Entretien avec un des deux enseignants (avril 2005) : Charlotte, après la séquence d'enseignement sur la symétrie axiale, suite à un contrôle donné à ses élèves à ce sujet.⁴

L'étude du corpus complexe de données ainsi élaboré nous est apparu d'emblée très prometteuse. Nous allons développer quelques aspects des analyses effectuées. Dans un premier temps, nous nous penchons sur l'entretien préalable, relatif à la formation initiale.

3.1 Du point de vue des rapports déclarés à la formation initiale

Lors de cet entretien, les propos de ces deux jeunes enseignants paraissent refléter des rapports à la formation initiale de l'IUFM de Marseille, assez proches. Charlotte et Serge semblent être d'accord sur un bon nombre des points évoqués au fil de nos questions.

3.1.1. Ressemblances : un ressenti « douloureux » mais une adhésion globale

Par exemple, lorsqu'on aborde le deuxième temps de l'entretien (consacré à ce qu'ils ont éprouvé pendant leur année formation initiale), ils commencent tous deux, par mettre en avant un ressenti plutôt « douloureux » lié à :

- un fort sentiment de culpabilité : « *on se sentait coupable de ne pas y arriver* » (Charlotte), « *si cela ne marche pas, c'était de notre faute* » (Serge)
- l'impression que la formation leur suggérait un « modèle inatteignable » de pratiques enseignantes : « *Il y avait une telle distance entre ce qu'on nous montrait et ce qu'on attendait de nous* » (Charlotte)

⁴ Ce type d'entretien avec Serge n'a pas été possible au vu des contraintes de calendrier de part et d'autre...

Malgré tout, Charlotte et Serge éprouvent une adhésion globale au projet de leur formation initiale : Charlotte évoque une « *année incroyablement enrichissante* » et Serge met l'accent sur le fait qu'ils se voyaient « *progresser au fur et à mesure de l'année* ».

Cette adhésion se teinte parfois d'une admiration sincère pour les formateurs-chercheurs, responsables de cette formation. Ainsi, à un moment de l'entretien, ils évoquent ensemble avec une certaine émotion une Activité d'Etude et de Recherche (ou AER) autour des puissances : « la population des bactéries » qui leur a été présentée par Y. Chevallard, dans un séminaire adressé aux professeurs stagiaires.

Mais si une première lecture de cet entretien préalable laisse à penser que Charlotte et Serge ont des rapports déclarés à la formation initiale relativement semblables, une étude plus approfondie révèle des divergences.

3.1.2. Divergences : adhésion totale ou en retrait...

Des divergences tendent à montrer que l'adhésion de Charlotte aux contenus de la formation initiale reçue est totale, tandis que Serge serait plus en retrait, sur plusieurs des points abordés pendant l'interview.

Voici quelques exemples qui illustrent notre propos.

- A une question relative à l'utilisation d'outils théoriques dans leur pratique quotidienne d'enseignants (pendant l'année de stage), Charlotte répond : « *c'était valorisant, on pouvait analyser de manière professionnelle une séance* », tandis que Serge déclare : « *on se sentait obligé, de toute façon* ».

- Lorsqu'ils sont interrogés sur les apports de la formation initiale disciplinaire relativement à des aspects spécifiques de « gestion de classe » : Serge répond sur un ton légèrement dubitatif : « *Tout ce qui était gestion dans la classe, c'était très peu développé. C'est comme si tout était joué à partir du scénario...* ». Tandis que Charlotte, poursuit d'un ton convaincu : « *C'est vrai. A partir du moment, où les élèves rentrent dans l'activité en général, j'ai tendance à penser que c'est vrai...* »

Mais ces différences sont si subtiles que les deux enseignants « néo-titulaires » interviewés, ont parfois l'impression de suivre un fil de pensée identique, alors que de fait, leurs propos divergent. L'extrait de dialogue suivant, venu en réponse à une question relative aux

relations des professeurs stagiaires avec les professeurs chevronnés⁵ illustre bien ce phénomène qui se produit à plusieurs reprises lors de l'entretien :

« **Serge** : on nous faisait effectivement ressentir un côté négatif par rapport aux anciens profs. Ils en sont restés là, en quelque sorte...

Charlotte : Moi, je l'ai un peu vécu comme une réalité...

Serge : Oui, c'était presque ça, voire on nous disait même presque de porter la bonne parole, d'aller parler au PCP. [Professeur Conseiller Pédagogique = équivalent de « conseiller tuteur » dans d'autres académies]

Charlotte : Il faut dire qu'on ressentait quand même un mépris pour l'IUFM. Je crois que ma PCP a changé au final. Au début, elle était très très fermée mais après... »

Ce type d'épisodes révèle bien que les rapports aux contenus de la formation initiale, déclarés par ces deux enseignants, ne sont pas aussi proches qu'une première lecture pouvait le laisser croire. Ces rapports différents augurent-ils de pratiques enseignantes différentes au sein de la classe ?

3.2 Etude des pratiques de deux enseignants débutants : Serge et Charlotte

Nous allons maintenant présenter l'étude du corpus constitué du reste des données filmiques (concernant à la fois les séances de classe, les entretiens à chaud et l'entretien de Charlotte, postérieur aux séances observées), visant à cerner les pratiques effectives de ces deux néo-titulaires.

Dans un premier temps, nous allons exposer une partie de nos résultats en lien avec la construction du thème de la symétrie axiale de Serge et de Charlotte, en nous positionnant donc au niveau du projet didactique global.

⁵ Cette question vient suite à plusieurs oppositions entre « vieux professeurs » et « élèves professeurs », formulées par Charlotte et Serge, qui nous semblent faire écho à un désir des formateurs d'amener les élèves-professeurs à s'inscrire en rupture avec les pratiques enseignantes existantes, ou du moins de ne pas laisser les enseignants débutants considérer ces pratiques comme normatives.

3.2.1 Au niveau du projet didactique global : le thème de la symétrie axiale

Avant toute chose, précisons que ces deux professeurs n'ont pas positionné le sujet d'étude « médiatrice », vis-à-vis du thème de la symétrie axiale, de la même manière :

- Serge a introduit au préalable la médiatrice en la définissant comme un lieu géométrique (ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment), en même temps que le cercle (lui même défini comme ensemble de points équidistants d'un point). Ce qui signifie qu'au sein des organisations mathématiques envisagées par Serge autour de la symétrie axiale, les savoirs relatifs à la médiatrice seront pour une part « anciens ».

- Tandis que Charlotte souhaite introduire la médiatrice, à l'occasion du thème d'étude autour de la symétrie axiale. Ce qui signifie qu'au sein des organisations mathématiques envisagées dans ce thème, les savoirs relatifs à la médiatrice seront « nouveaux ».

Ceci aura bien entendu une incidence sur la construction du thème de la symétrie axiale.

3.2.1.a Construction du thème de la symétrie axiale (Serge)

L'ensemble du projet didactique global élaboré et partiellement mis en œuvre par Serge dans sa classe au cours des deux séances de classe observées, repose sur un fil conducteur que nous avons surnommé « la symétrie axiale : des points aux figures ».

En effet, si l'on en croit ses propos lors de l'entretien « à chaud » avant la première séance, le premier type de tâches introduit dans le cadre de ce thème d'étude par ce professeur a été la construction du symétrique d'un point donné, sur feuille quadrillée. Les tâches correspondantes auraient été accomplies par les élèves, en mettant en jeu deux techniques : « par pliage », puis par repérage sur le quadrillage en utilisant la technologie relative à la propriété de conservation des longueurs (avec retour éventuel au pliage pour les élèves en difficulté), qui aurait été explicitée à cette occasion.

Serge aurait dès lors organisé une première rencontre avec le type de tâches problématique : « construction du symétrique d'un point » sur feuille blanche, qui lui aurait permis d'introduire la technique de construction outillée par la médiatrice. Lors de l'entretien, il n'explique pas ce qui a permis de justifier l'introduction de cette technique : s'est-il appuyé sur un discours technologico-théorique se référant à la fois à la propriété de conservation des longueurs et à la définition de la médiatrice comme lieu géométrique ?

Si tel a été le cas, il n'y fait guère allusion à l'occasion de la première séance de classe observée qui comporte pourtant une situation de rappel de cette technique. C'est précisément lors de cette séance, qu'il envisage le passage à la construction du symétrique d'une figure sur feuille blanche (type de tâches exploré brièvement au tableau, puis à accomplir à travers le tracé du symétrique de trois figures données, avec un axe de symétrie donné). L'adaptation de la technique de tracé outillé par la médiatrice pour accomplir ce nouveau type de tâches repose sur la propriété de conservation de l'alignement des points. Mais cet argument technologico-théorique n'est mis en avant par Serge à aucun moment, lors de la séance filmée.

Il escompte faire constater à partir d'un exemple l'invariance d'une figure donnée par symétrie pour introduire la notion d'axe de symétrie. Ce qui lui permet d'enchaîner avec le type de tâches longuement travaillé lors de la deuxième séance : repérer et tracer les axes de symétrie de figures usuelles sur quadrillage. La technique mise en avant par Serge pour accomplir ce type de tâches reste relativement floue : la technique attendue est sans doute le repérage sur quadrillage, mais il autorise les élèves à revenir au pliage s'ils éprouvent des difficultés.

L'ensemble du projet didactique global élaboré par Serge autour de la symétrie axiale, met en avant une organisation mathématique centrée sur la *praxis* : agglomérant les types de tâches et les techniques, voire les types de tâches (les techniques restant parfois floues), en explicitant peu les technologies et les théories sous-jacentes. En cela, on peut considérer que les organisations mathématiques mises à l'étude par ce professeur sont incomplètes (au sens de Bolea, Bosch et Gascon 2001). Serge a construit son thème d'étude autour de la symétrie axiale, en juxtaposant les types de tâches sans lien apparent, ou en passant d'un type de tâches à l'autre en suivant la logique évoquée « des points aux figures » : qui implique un premier type de tâches exploré, comme sous-tâche du type de tâches suivant. Notons que ces caractéristiques des organisations mathématiques enseignées par Serge s'accompagnent de la recherche apparente d'exhaustivité dans les tâches effectivement données à accomplir aux élèves : par exemple, le nombre de figures usuelles sur papier quadrillé pour lequel il s'agit de trouver les axes de symétrie est très important (à tel point qu'en nous montrant la feuille concernée, l'enseignant précisera que les élèves ne sont pas « obligés de tout faire »).

3.2.1.b Construction du thème de la symétrie axiale (Charlotte)

Lors de l'entretien « à chaud » avant la première séance, Charlotte évoque qu'elle a d'ores et déjà travaillé avec ses élèves un premier type de tâches (qu'elle considère comme une reprise du travail effectué à l'école primaire) : « vérifier si deux figures données (sur feuille blanche) sont symétriques », par la technique de pliage. Elle a également fait émerger un discours technologico-théorique accompagnant cette technique du type : deux figures sont symétriques si elles sont superposables (sous-entendu : « par pliage »).

C'est ce même argument technologico-théorique (rappelé par les élèves en début de séance), qui lui permettra de justifier la technique de tracé d'une figure symétrique à une autre figure donnée sur feuille blanche « par pliage », deuxième type de tâches envisagé, qui fait l'objet de la première séance de classe observée.⁶

Elle envisage dès lors d'amorcer la transition vers une nouvelle organisation mathématique reposant sur une technologie et une théorie liées à la propriété de conservation des longueurs. Lors de l'entretien, elle déclare vouloir faire émerger cette propriété sur la base du travail effectué au préalable : tracé de la figure symétrique « par pliage », mais ne précise pas vraiment comment elle compte s'y prendre.

Le nouveau type de tâches qu'elle espère ainsi introduire est : le codage de l'égalité de longueurs de côtés de figures symétriques, qui nécessite le repérage des côtés symétriques deux à deux.

Un peu comme Serge, elle aborde la notion d'axe de symétrie en faisant remarquer aux élèves l'invariance d'une figure « par pliage » suivant un axe de symétrie.

Elle poursuit en introduisant la médiatrice comme axe de symétrie d'un segment : le bloc technologico-théorique relatif à la propriété de conservation des longueurs lui permettant de justifier aisément que la médiatrice passe par le milieu du segment considéré.

Charlotte met dès lors une nouvelle organisation mathématique à l'étude, qui repose à nouveau sur un bloc technologico-théorique associé au « pliage ». Celle-ci est relative au type de tâches : repérer les axes de symétrie des figures usuelles par pliage.

⁶ Type de tâches qui n'est d'ailleurs pas sans poser de difficultés matérielles avec les supports envisagés par l'enseignante : les élèves sont censés dans un premier temps tracer le dessin de l'autre côté de la feuille blanche par transparence après avoir plié, puis déplier, puis repasser à nouveau par transparence le dessin correspondant effectivement au symétrique de la figure initiale.

Lors de la deuxième séance de classe filmée, revenant sur le travail effectué par les élèves à ce sujet, elle cherche à faire retrouver les médiatrices des segments correspondant à certains des axes de symétrie des figures usuelles, en réinvestissant la définition de la médiatrice.

Au sein du projet didactique global élaboré par Charlotte autour de la symétrie axiale, règne un équilibre apparent entre la *praxis* et le *logos* : les techniques relatives aux types de tâches en jeu sont justifiées ou accompagnées d'un discours technologique, ou théorique, les organisations de savoir enseigné paraissent complètes.

Cependant, certains des éléments technologico-théoriques prévus autour de la symétrie axiale semblent difficilement devoir émerger des types de tâches envisagés par Charlotte : par exemple, on voit mal comment la propriété de conservation des longueurs peut émerger du travail effectué autour du tracé d'une figure symétrique à une autre, « par pliage ».

Une particularité de ce projet réside par ailleurs dans l'enchevêtrement de deux organisations mathématiques globales : une organisation élaborée autour d'un noyau technologico-théorique de bas niveau, lié au « pliage », et une organisation s'appuyant sur un *logos* de plus haut niveau, lié à la propriété de conservation de longueurs de la symétrie axiale.

Voyons maintenant comment ces deux enseignants mettent en œuvre leur projet didactique global : à travers la réalisation du projet didactique local de la situation didactique et d'observation.

3.2.2 Aux niveaux du projet local, de la situation didactique et d'observation

Nous ne retiendrons de ces niveaux que des éléments qui nous apparaissent marquants ou significatifs, par rapport aux pratiques des deux enseignants observés.

3.2.2.a. Réalisation du projet local de la situation didactique et d'observation ***(Serge)***

Lors de la première séance filmée dans la classe de Serge, il se produit un malentendu qui concerne simultanément les trois niveaux du modèle de la structuration du milieu.

Lorsque l'enseignant demande en situation didactique à ses élèves de construire les figures symétriques de trois figures données (un rectangle, une flèche, et un cercle), par rapport à

un axe oblique donné à la règle et à l'équerre, de nombreuses difficultés de « bas niveau » surgissent : relatives au tracé de la perpendiculaire à l'axe de symétrie qui devient verticale, horizontale ou perpendiculaire à la figure plutôt qu'à l'axe, ou relatives à la mesure... Ces difficultés sont d'ailleurs sans doute encouragées par l'exemple donné au tableau par Serge : l'axe de symétrie y étant représenté par une ligne verticale.

Quoiqu'il en soit, bien qu'observées par l'enseignant, ces difficultés sont masquées par son projet local d'enseignement, centré sur le passage « des points aux figures ».

D'où une intervention en situation didactique qui paraît décalée par rapport à l'activité réelle des élèves, évoquant des difficultés ne correspondant pas aux difficultés effectives de la plupart des enfants :

« Alors, ce qui se passe, c'est une fois que vous avez fait le symétrique des points. Ce que vous avez fait, c'est comme on a dit... qu'on fait le symétrique des extrémités et après, il va falloir réussir à retrouver notre forme finale... ça c'est une difficulté... (...) ce qu'il y a c'est quand on a beaucoup de points, c'est pas forcément facile... On lève les yeux, 5 mn d'attention, merci... allez, un petit peu de concentration... Ce que vous devez faire en réalité, ce qui vous intéresse pas, c'est finalement, c'est les points, ce qui vous intéresserait c'est le segment de l'autre. Pour bien savoir quel segment vous devez tracer, pour savoir quel segment tracer quand vous avez plein de points de dessinés, vous repérez le segment qui vous intéresse, par exemple, sur votre flèche, vous repérez un des grands côtés. Vous repérez les deux points qui en sont les extrémités, puis vous regardez quels sont les points symétriques des extrémités, puis vous pouvez tracer votre segment... repérez bien quel segment va avec quelle extrémité, par rapport à leur image... »

Les deux séances observées dans la classe de Serge présentent une structure quasi-identique : dans un premier temps assez bref, Serge gère une première phase collective qui semble intermédiaire entre un rappel de ce qui a été fait la fois précédente (accompagné de l'évaluation de productions d'élèves) et la consigne d'une nouvelle activité ; les élèves s'investissent ensuite à sa demande dans l'accomplissement d'une ou plusieurs tâches ; l'enseignant passe dans les rangs aider individuellement chaque élève, n'intervenant collectivement que très rarement ou brièvement, face à des difficultés répétées de la part des élèves (comme c'est le cas dans l'épisode décrit ci-dessus) ; en fin d'heure, les feuilles sur lesquelles les élèves ont travaillé sont ramassées par l'enseignant. Si ces deux séances sont révélatrices des composantes cognitive et médiative qui façonnent les pratiques de ce jeune professeur, Serge semble accorder une grande importance à l'accomplissement des tâches par ses élèves, aux aides individualisées, etc. Notons que ceci paraît cohérent avec le projet didactique global de cet enseignant, centré sur les types de tâches et les techniques, plus que sur les savoirs mis en jeu au travers de la *praxis* correspondante.

- Une autre caractéristique des pratiques enseignantes de Serge est apparue au niveau du projet didactique local, et de la situation didactique. Il s'agit de tâches incongrues que l'enseignant donne à accomplir aux élèves à la fin des deux séances filmées : tracer le symétrique d'un robot *Goldorak*, trouver des heures symétriques (par rapport à un axe vertical ou horizontal sur un écran de réveil digital. Ces tâches sont qualifiées « d'incongrues » dans le sens où elles ne semblent pas partie prenante du projet didactique global de l'enseignant (elles ne s'inscrivent d'ailleurs pas en directe continuité des activités qui les ont précédées), mais plutôt destinées à motiver les élèves au travers de supports ou de contenus ludiques. Nous reviendrons plus loin sur cette particularité.

3.2.2.b. Réalisation du projet local de la situation didactique et d'observation (Charlotte)

De la première séance filmée dans la classe de Charlotte, nous retenons un épisode que l'analyse de son projet didactique global pouvait laisser supposer. Cet épisode correspond au moment, où l'enseignante tente de s'appuyer sur le tracé de figures symétriques à des figures données par pliage, pour faire constater la propriété de conservation des longueurs de la symétrie axiale. De fait, il n'y a aucune raison pour que ce savoir émerge de l'organisation mathématique mise à l'étude. Dès lors, cela donne lieu à un effet Jourdain assez spectaculaire en situation didactique. Charlotte interprète des réponses d'élèves du type « les figures ont les mêmes côtés », « les côtés sont égaux », en termes d'égalités de longueurs des côtés des figures :

« **Charlotte** : Oui, Et le triangle symétrique de celui qu'on a tracé, qu'est-ce qu'on peut en dire par rapport au triangle initial ?

Elève : Ils sont parallèles

Charlotte : Ils sont pas parallèles, non... Regardez ce côté là du triangle, et celui là ? Ils ne sont pas parallèles

Elève : ils ont les mêmes côtés.

Charlotte : ils ont les mêmes côtés et qu'est-ce qu'on peut dire pour être plus précis.... Qu'est-ce qu'on peut dire de ces côtés, Randa ?

Randa : c'est un triangle isocèle...

Charlotte : Non, ce n'est pas un triangle isocèle... Par contre ce que dit Mike, c'était intéressant.

Elève : ils sont superposés

Charlotte : ils se superposent, Mike ?

Mike : ils sont égaux...

Charlotte : Ils sont égaux, alors je vous demande de coder la figure, de coder les côtés qui sont égaux. »

- Un autre fait marquant se produit lors de la deuxième séance filmée dans la classe de Charlotte : il s'agit d'une confusion faite autour de la médiatrice ; suite à une introduction trop précoce au sein de figures, les élèves ne l'associent pas clairement à l'objet segment.

Après avoir reconnu les médiatrices du rectangle, du carré, Charlotte (parlant de l'axe de symétrie du triangle isocèle) : elle est perpendiculaire par rapport à ce côté... et puis ? Elle passe au milieu... Pourquoi ce n'est pas une médiatrice ? C'est effectivement la médiatrice de ce côté là...

Elève : Oui, mais en haut, il y a pas de côté en haut...

Charlotte : Mais on a besoin que d'un côté pour avoir une médiatrice... c'est la médiatrice d'un segment...

3.3. Points communs et différences entre Charlotte et Serge

3.3.1. Des points communs ...

Au final, l'étude des pratiques enseignantes de ces deux professeurs néo-titulaires révèle quelques points communs :

- Charlotte et Serge n'éludent, ni ne délèguent l'élaboration d'un projet didactique global. Si sur le fond, les deux projets diffèrent sensiblement, il n'en demeure pas moins, que ces deux enseignants accordent une importance non négligeable à la construction du thème d'enseignement autour de la symétrie axiale, qui permette un contrôle épistémologique du projet didactique local qui s'y intègre, et d'assurer la continuité d'une situation didactique à l'autre. Ce qui, comme nous l'avons évoqué auparavant, n'est pas chose courante de la part d'enseignants débutants, voire chevronnés.

- Par contre, ces deux professeurs « néo-titulaires » éprouvent visiblement des difficultés à penser le passage d'une géométrie dessinée ou « naturelle » à une géométrie des propriétés ou « axiomatique naturelle » (Houdement et Kuzniak 1996). Plusieurs des incidents à résonnance plus ou moins fortes au sein des classes de sixième de Charlotte et Serge (Roditi 2003, Comiti et al. 1995) peuvent être interprétés de cette façon. Le malentendu entre Serge et ces élèves (interprétation erronée des difficultés d'élèves dans le tracé de figures symétriques à la règle et à l'équerre) lors de la première séance observée dans sa classe en est un exemple. Ces deux jeunes enseignants semblent de manière générale sous-estimer les difficultés relatives aux obstacles de la géométrie dessinée, et à l'entrée dans une géométrie plus théorique, au début du collège. Tous deux effectuent ainsi fréquemment des dessins à main levée au tableau (comme si le rapport entre ces dessins avec ceux

représentés sur leur feuille allaient de soi pour les élèves), représentant des figures dans des positions prototypiques (verticales ou horizontales) qu'ils font parfois compléter à la règle par des élèves envoyés au tableau.

3.3.2. ... Mais que de différences !

Nonobstant les points communs cités ci-dessus, les pratiques observées de la part de ces deux professeurs se démarquent nettement.

Serge met en œuvre un enseignement centré sur les aspects pratico-techniques des organisations mathématiques mises à l'étude. Au delà du fait que le thème d'enseignement fait pour une part, appel à des savoirs anciens (sur la médiatrice) qu'il ne juge peut-être pas utile de mettre sur le devant de la scène didactique, ceci peut être expliqué de diverses façons :

- Cela peut provenir d'un malentendu avec les contenus de la formation initiale reçue par ce professeur débutant. Comme si ce qu'il avait retenu de cette formation, était l'attention portée aux types de tâches dont il est possible de faire la liste exhaustive et à l'accomplissement de ces tâches par les élèves en élaborant les techniques nécessaires, mais qu'il oubliait les savoirs mis en jeu par les technologies et des théories qui légitiment ces techniques.
- On peut également interpréter certains des aspects de la pratique enseignante donnée à voir par Serge, comme relevant d'une *adolescence* professionnelle (Bossard 2001). Par exemple, son choix de proposer des tâches ludiques aux élèves, un peu décrochées de son projet didactique global, révèle selon nous, un « mouvement d'oscillation » par rapport à une formation initiale qui insiste sur une réflexion de type scientifique à avoir sur sa pratique enseignante. L'attention qu'il porte au travail des élèves qui se traduit tant par les aides individualisées répétées, que par le fait de ramasser et de corriger systématiquement leurs productions en fin d'heure procède peut-être d'un mouvement identique. Serge chercherait en quelque sorte à réintégrer la dimension élève dans sa pratique professionnelle, dimension sous-estimée à ses yeux, dans les contenus de sa formation initiale.⁷ Lors du premier entretien, il déclare d'ailleurs à ce sujet que la formation est plus « centrée sur le travail du professeur » que « sur les élèves », « on oublie l'élève ».

⁷ De fait, on peut estimer que les contenus de formation initiale directement inspirés de la théorie anthropologique du didactique, mettent en avant « l'élève générique », plus que « comme individu singulier ».

- Enfin, les pratiques de Serge sont à mettre en rapport avec le contexte d'enseignement en ZEP dans lesquelles elles ont été observées. L'individualisation du travail des élèves, l'absence de phase de synthèse et d'institutionnalisation (qui rend les savoirs en jeu implicites, voire « invisibles »), la recherche de supports ludiques sont autant de traits caractéristiques des pratiques observées dans des écoles élémentaires REP par des chercheurs en didactique des mathématiques comme Peltier et al. (2004).

Les pratiques de Charlotte apparaissent d'emblée comme relevant d'une pratique enseignante plus nuancée : alternant des phases collectives susceptibles de relever de la mise en commun de questionnements, de procédures ou bien de synthèse et d'institutionnalisation et des phases de individuelles, sans structure récurrente flagrante d'une séance à l'autre, etc. Ce professeur débutant a par ailleurs une capacité étonnante d'analyse de sa propre pratique. Lors de l'entretien « post-séquence », Charlotte se révèle capable de pointer précisément l'origine de certaines des difficultés rencontrées, par elle-même en position d'enseignante: *« A partir de là, je me suis dit qu'il fallait faire le lien entre les observations, les constructions et trouver d'autres exploitations des propriétés, des observations faites... c'est encore fouilli, ça se voit... C'est encore un des trucs où je me sens pas à l'aise »,* ou par les élèves : *« Je voulais retravailler avant sur la médiatrice, avant les figures... pour éviter les confusions la médiatrice du carré : en fait c'est la médiatrice des deux côtés, du coup, ils ont eu des problèmes de repérage de la médiatrice par rapport au segment ... »*

Ceci pourrait faire écho à un apport de la formation initiale, qu'elle met en avant à plusieurs reprises lors du premier entretien : *« On pouvait regarder de manière professionnelle une séance ».*

4. En guise de conclusion...

Il nous est difficile de rédiger une conclusion relative à l'ensemble de cette recherche qui combine de nombreuses dimensions, tant dans le corpus de données recueillies, que dans les analyses qui peuvent en être faites. Nous choisissons dans un premier temps de revenir sur nos hypothèses de recherche initiales.

- L'étude des pratiques des quatre professeurs débutants considérés dans les deux volets expérimentaux décrits, révèle que deux des niveaux du modèle de structuration du milieu « n'iraient pas de soi » et seraient dès lors « sous-développés » dans l'activité d'un enseignant débutant. Il s'agit des niveaux correspondant à l'élaboration du projet didactique global (+2), et d'observation (-1). En effet, deux des néo-titulaires observés ne semblent pas

questionner la construction du thème mathématique en jeu dans leur enseignement, ni même faire de choix réfléchis à ce sujet. Cette remarque fait écho à d'autres travaux concernant les enseignants débutants (Margolinas et Rivière 2005). Si les deux derniers enseignants évoqués font visiblement exception à la règle, c'est sans doute à mettre en rapport avec la spécificité de la formation initiale reçue, inspirée de la théorie anthropologique qui met l'accent sur l'épistémologie du savoir à enseigner et le « temps long » d'enseignement (à travers notamment la notion de Parcours d'Etude et de Recherche). Quant aux difficultés communes de ces professeurs, relatives à l'observation des élèves en situation d'apprentissage, elle n'est pas non plus tout à fait nouvelle et ne concerne pas forcément spécifiquement les enseignants débutants (Margolinas et al. 2005). Cependant, on peut considérer avoir assisté à un « effet grossissant » de ce phénomène dans la classe d'un de ces jeunes enseignants, pour lequel le malentendu qui en résulte en situation didactique était profondément ancré (traversant les trois niveaux d'observation, de situation didactique et de projet didactique local).

- Du point de vue de la structuration du milieu, nous nous interrogeons également sur les difficultés apparentes des différents professeurs observés dans l'aménagement d'un milieu matériel, pertinent pour favoriser l'action et l'apprentissage de leurs élèves : que ce soit en ce qui concerne la séquence autour des fractions, à travers l'utilisation du guide-âne, ou ce qui concerne les séances portant sur la symétrie axiale, à travers le passage délicat d'une géométrie du dessin à la géométrie des propriétés. Si c'est une spécificité des pratiques d'enseignants débutants, elle est sans doute accentuée par le fait que toutes nos observations portent sur le niveau de la sixième.⁸

- Du point de vue des cinq composantes de la double approche ergonomique et didactique, la composante personnelle nous est apparue surdéterminante dans le cas d'au moins un de ces professeurs : ce serait elle qui éclairerait le mouvement d'oscillation constaté dans la pratique de cet enseignant, que nous avons interprété comme une adolescence professionnelle.

- Enfin, exception faite de l'une d'entre eux, les pratiques des professeurs néo-titulaires nous ont semblé révéler à la fois des niveaux de projet local et de situation didactique surdéveloppés, des composantes médiative et cognitive surdéterminées... qui pourraient d'ores et déjà contribuer à façonner des logiques d'action « enfermantes », ou si nous

⁸ Ce qui est clairement une des limites de la recherche à ne pas négliger !

reprenons le propos de Chesné (2006) au confinement dans des caricatures professionnelles.

Dans un deuxième temps, nous nous posons la question : « et les ZEP dans tout ça ? ». Il est parfois difficile de démêler ce qui relève précisément du contexte ZEP dans cette recherche. Ceci dit, à l'instar de nos collègues qui se sont penchés sur le premier degré (Peltier et al. 2004), nous faisons l'hypothèse que nos observations sur les pratiques de professeurs néo-titulaires en ZEP/REP jouent le rôle de loupe, vis-à-vis des pratiques de débutants en contexte plus ordinaire. Notamment, nous pensons que les logiques d'action s'avèreraient davantage enfermantes dans ce contexte : les enseignants perdant plus rapidement une part de leur marge de manœuvre apparente en collègue ZEP.

Enfin, si à travers l'axe intitulé « *en amont des pratiques d'enseignants débutants, le rôle de la formation initiale* », il nous a semblé rejoindre les résultats de travaux déjà anciens concernant les effets différenciés des formations d'enseignants (Masselot 2000, Vergnes 2001), nous croyons également contribuer à l'amorce de l'étude d'effets différenciateurs des formations...

Bibliographie

CERQUETTI-ABERKANE F (1992), *Enseigner les mathématiques à l'école*, Hachette Education.

BOSSARD D. (2001), Soizic : une « adolescence professionnelle » interminable, Clinique de la formation des enseignants, Pratiques et logiques institutionnelles, *Connexions n°75-1*, Erès.

BUTLEN D. (2004), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles. Note de synthèse*, Habilitation à Diriger des recherches, Sciences de l'Education, Université Paris 8.

BUTLEN D., COULANGE L., PEZARD M., MASSELOT P., SAYAC N., CHESNE J.F (2006), *De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement de professeurs enseignant les mathématiques, affectés en première nomination dans des établissements de REP*, Rapport intermédiaire de recherche de l'équipe « Pratiques des enseignants et des élèves en mathématiques » de l'IUFM de Créteil.

CHESNE J.F. (2006) La formation des pratiques chez les enseignants du second degré : des passages obligés ? Mémoire de master, Université Paris 7.

- CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.19.2, pp. 221–266, la Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD Y. ET CIRADE G. (2006), Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques, exposé Corfem.
- COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C. (1995), Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classes et modélisation de phénomène didactiques in Arsac et al. (coord.) *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 92–113, La Pensée Sauvage.
- COULANGE L. (2001), Enseigner les systèmes d'équations en Troisième, Une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 21.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 305-353.
- COULANGE L. (2002), Analyse de l'activité du professeur à propos de l'enseignement des systèmes d'équations en Troisième, in Dorier (éd.), *Actes de la XI Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, pp. 197-206.
- ERMEL (1982), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire CM : Tome 2*, Hatier.
- HOUEMENT C., KUZNIAK A. (1996), Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16.3, La Pensée Sauvage, pp. 289-322.
- MARGOLINAS C. (2002), Situations, Milieux, Connaissances, Analyse de l'activité du professeur, in Dorier (éd.), *Actes de la XI Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, pp. 141-156.
- MARGOLINAS C. (2004), *Points de vue de l'élève et du professeur, Essai de développement de la théorie des situations didactiques. Note de synthèse*, Habilitation à Diriger des recherches, Sciences de l'Education, Université de Provence.
- MARGOLINAS C. ET RIVIERE O. (2005) La préparation de séance : un élément du travail du professeur, *Petit x* 69, pp. 32-57.
- MARGOLINAS C., COULANGE L., BESSOT A. (2005), What can the teacher learn in the classroom ?, *Special issue of Educational Studies in Mathematics : Teaching situations as object of research: empirical studies within theoretical perspectives*.
- MASSELOT P. (2000), *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école, une étude de cas*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

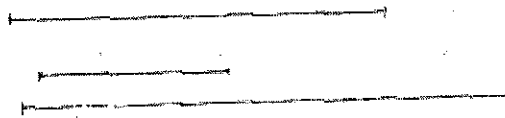
- MATHERON Y. ET NOIRFALISE R. (2005) Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques, quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique, *Petit x* 70, 30-47.
- OCHANINE D. (1978), Le rôle des images opératives dans la régulation des activités de travail, *Psychologie et Educativ*, Vol.2, 63-72.
- PELTIER-BARBIER M.-L. (ED), BUTLEN D., MASSELOT P., NGONO B., PEZARD M., ROBERT A., VERGNES D. (2004), *Dur pour les élèves, Dur pour les enseignants, Dur d'enseigner en ZEP*, La Pensée Sauvage.
- ROBERT A. (2001), Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 21.1.2, pp 57-80.
- ROBERT A. ET ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2, n°4, pp. 505-528.
- ROBERT A. ET ROGALSKI J. (2005), A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class, *Educational Studies in Mathematics* volume 59,1 pp. 269-298.
- RODITI E. (2003), Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23.2, La Pensée Sauvage,. 183-216.
- VERGNES D. (2001) Les effets d'un stage de formation en géométrie, *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/1-2, pp 99-122.

Annexe : document élève élaboré par Sébastien

des automates

achève à Portage

Portage chaque segment, en vous servant du guide, on
5 parties



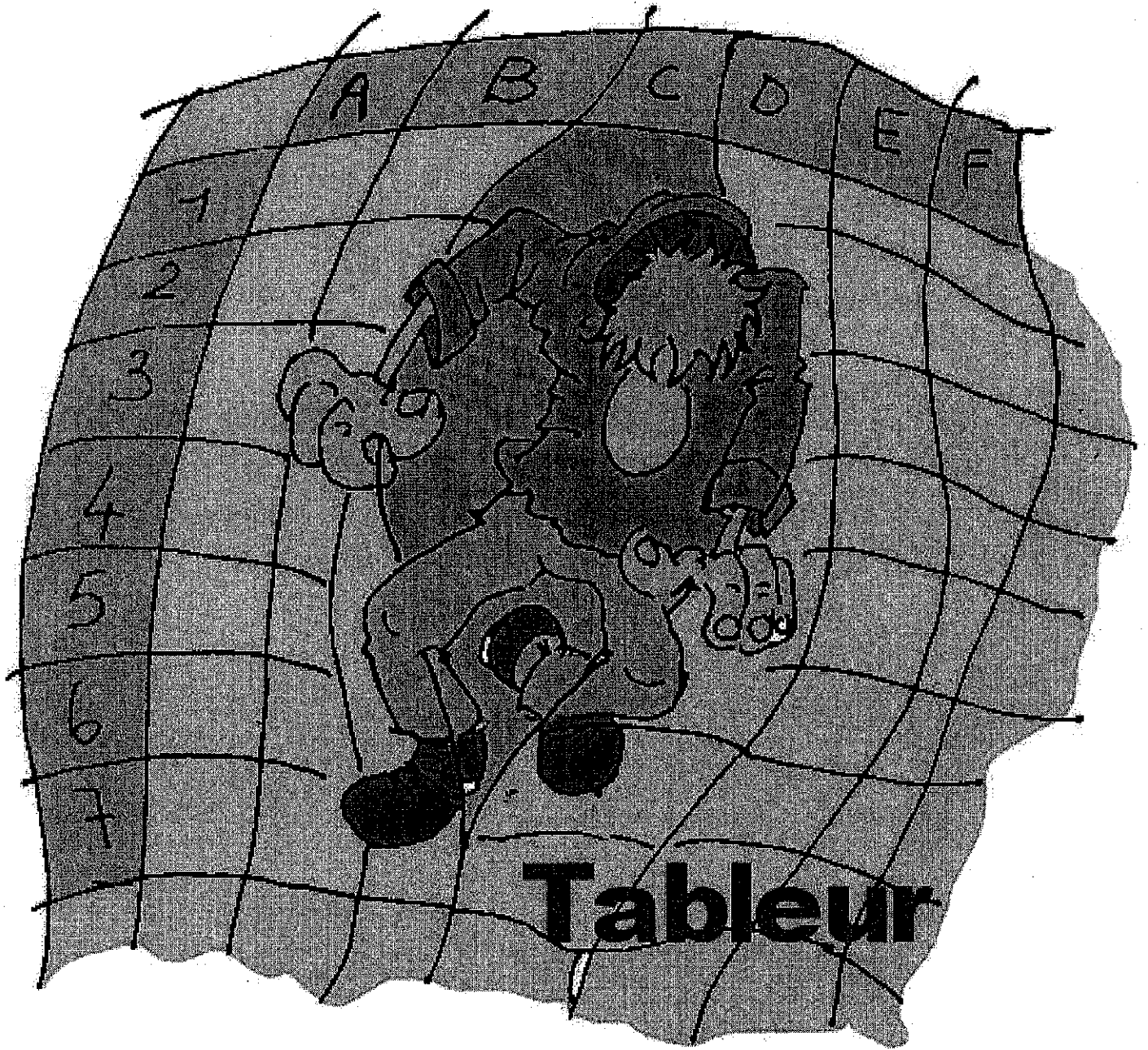
Robots

5 robots se déplacent sur une piste qu'on a graduée

- Raki atteint la graduation 5 en 5 pas
- Gollo atteint 8 en 4 pas
- Astus atteint 7 en 3 pas
- Nono atteint 5 en 3 pas
- Xax atteint 8 en 7 pas
- Beuzi atteint 3 en 4 pas

La longueur d'un pas reste identique pendant son parcours.
Représenter le trajet de ces robots de manière très précise.
Chaque robot doit passer la ligne d'arrivée située à la
graduation 15.

Raki	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Gollo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Astus	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nono	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Xax	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Beuzi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16



Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs

Mariam HASPEKIAN
IUFM de Créteil et DIDIREM

1. Introduction et Questionnement Initial

La recherche présentée ici correspond à notre travail de thèse, mené sous la direction de Michèle Artigue. Ce travail s'inscrit dans un contexte, a priori bouillonnant, où l'intégration du tableur et, plus généralement, les relations mathématiques/ informatique dans l'enseignement sont loin d'être stabilisées et restent une question vive. Il y a en effet actuellement une volonté institutionnelle d'intégrer les TIC¹ dans les pratiques éducatives en France. Cette volonté se traduit, en mathématiques, par l'incitation forte à utiliser Internet et divers logiciels : géométrie dynamique, calcul symbolique, tableur... Ce dernier pose des questions didactiques auxquelles on a peu de réponses. Face à ces questions, le travail réalisé s'est construit le long d'une histoire dont nous donnons ici un aperçu global.

A l'origine de la recherche, il y a un double constat « paradoxal » :

- le tableur est officiellement présent, dans les programmes de mathématiques, dès 1998 en collège, puis s'est étendu au lycée (notamment en 1^{er} L où il peut même faire l'objet d'évaluations au baccalauréat),
- il est aussi largement présent dans les ressources destinées aux enseignants: on trouve de plus en plus d'activités tableur en mathématiques pour les élèves dans les manuels, publications IREM, réseaux CNDP, bulletins APMEP, sites Internet académiques, sites enseignants,...)

et cependant, force est de constater qu'il est peu, voire pas, présent dans les classes.

¹Technologies de l'Information et de la Communication

Pourquoi ces contrastes ? Quels problèmes d'intégration le tableur pose-t-il ? Des questions tant théoriques que pratiques se soulèvent :

- Que sait-on de ses potentialités pour enseigner les mathématiques et des conditions nécessaires à l'actualisation de ces potentialités ? Et quelles sont les caractéristiques de ces ressources offertes aux enseignants ?
- On peut également se demander quelles sont pratiques des enseignants qui intègrent réellement le tableur.

Face à ces multiples questions, l'idée a été de recenser d'abord ce qui existe en termes de recherche.

2. Le Tableur et les Recherches Didactiques

Quelles questions les didacticiens ont-ils déjà soulevées ? Dans quelles perspectives se placent les recherches ? A quelles problématiques renvoient-elles ?

Des travaux français mais aussi internationaux ont déjà été menés sur le tableur pour l'enseignement des mathématiques, par exemple Ainley et al. (2003), Arzarello et al. (2001), Capponi (2000), Dettori et al. (1995) ou encore Rojano et Sutherland (1997). Les cadres sont différents mais dans l'ensemble ces travaux se placent tous au collège, concernent tous la transition arithmétique-algèbre, et même si leurs approches diffèrent, elles donnent toutes au tableur un rôle positif en jouant sur des points délicats répertoriés en didactique de l'algèbre (voir les travaux de Drouhard, 1992 ; Vergnaud 1989 ; Vergnaud et al., 1987 ; Sfard, 1991 ou encore, pour une vue d'ensemble, Bednarz, Kieran, Lee 1996 ou Chick et al. 2001). Les recherches sur le tableur reprennent ici ces difficultés de l'algèbre à savoir :

- sa position par rapport à l'arithmétique analysée en didactique parfois en termes de « transitions », parfois en termes de « ruptures » (discontinuités ou fausses continuités,
- ou la difficulté des rapports sémantique/ syntaxique.

Par rapport à ces difficultés bien repérées en papier-crayon, ces recherches nous disent que le tableur a des potentialités idéales pour favoriser l'apprentissage de l'algèbre par :

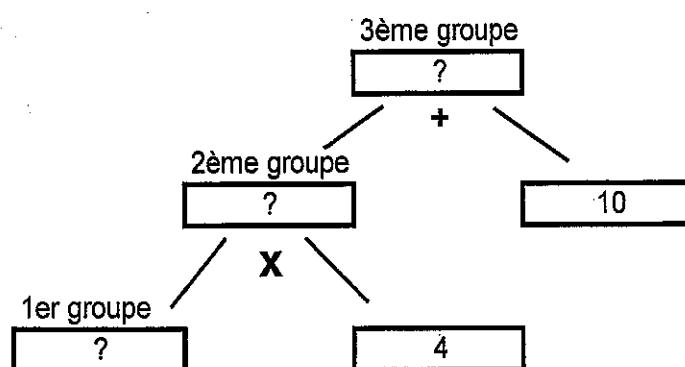
- les nouvelles possibilités qu'il offre (calculatoires, de représentation, d'interactivité, d'articulation de divers langages),
- et aussi par ses contraintes d'utilisation (contraintes dans le symbolisme, dans l'organisation de la feuille).

Donnons un exemple : celui des techniques de résolution.

Pour Rojano et Sutherland (1997), la technique que favorise le tableur, appelée « essai/erreur » serait une technique intermédiaire entre les procédures arithmétiques des élèves et une résolution algébrique. L'usage du tableur aiderait donc à passer de l'un à l'autre, à entrer dans la pensée algébrique.

Examinons ces différentes méthodes sur un même problème qu'elles citent (Rojano & Sutherland, 1997) :

3 groupes d'enfants se partagent 100 chocolats. Le deuxième groupe reçoit 4 fois le nombre de chocolats du premier. Le troisième groupe reçoit 10 chocolats de plus que le deuxième groupe. Combien de chocolats chacun des 3 groupes reçoit-il ?



Avec la méthode arithmétique

Ici, un raisonnement arithmétique par analyse/synthèse classique, qui part des données connues pour calculer l'inconnue, ne fonctionne pas. Néanmoins, les élèves peuvent appliquer d'autres démarches arithmétiques telle que celle de procéder par essai/erreur, en partant soit d'une valeur arbitraire, soit d'un partage égal à partir du nombre total de chocolats (partager 100 en trois) et ajuster. Le tâtonnement peut être plus ou moins contrôlé et se faire sur les trois groupes ou bien sur un seul, mais il est guidé toujours par deux contraintes : les relations données dans l'énoncé entre les nombres de chocolats des groupes doivent être vérifiées, et le nombre total de chocolats obtenus doit être 100. Nous avons montré dans la thèse que cette démarche occupe elle-même, par certaines caractéristiques, une position intermédiaire entre arithmétique et algèbre (Haspekian, 2005).

Avec la méthode algébrique

La solution algébrique conduit à résoudre soit une équation, soit un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} y = 4x \\ z = y + 10 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

où x , y , z sont les nombres de chocolats respectifs des 3 groupes. On arrive ici, par exemple par substitution, à l'équation : $x + 4x + (4x + 10) = 100$, dont la résolution (phase de synthèse) donne la solution : $x = 10$, $y = 40$ et $z = 50$ ²

Avec la méthode tableur

Voici une feuille de calculs correspondant à une résolution possible en environnement tableur :

	A	B	C	D
1	groupe 1	groupe 2	groupe 3	total
2		=4*A2	=B2+10	=A2+B2+C2

On notera que les trois inconnues sont bien explicitement présentes. L'élève teste des valeurs en A2, les formules réactualisent alors les résultats des formules de B2, C2 et D2. Il fait des « essais » jusqu'à obtenir 100 en D2.

Nous constatons que « groupe2=4*A2 » ressemble fortement à « $y=4x$ » de la méthode algébrique. De même pour le groupe 3 : « groupe 3= B2+10 » ressemble fortement à « $z=y+10$ » de la résolution algébrique. Ainsi, la résolution tableur met-elle en jeu les équations intermédiaires intervenant dans la résolution algébrique. L'équation finale n'est pas obtenue, mais, déjà, toutes les relations intermédiaires entre les données sont présentes. D'autre part, la méthode ressemble fortement à celle de l'essai/erreur que peuvent effectuer spontanément les élèves, avec la particularité qu'ici les calculs sont automatisés, et organisés. On peut dire, concernant les démarches de résolution, que le tableur donne *une organisation algébrique à une résolution de type arithmétique*. L'outil rapproche ainsi

² Dans l'enseignement, vu l'organisation des progressions institutionnelles, on tend à éviter, dans un tel cas, l'écriture d'un système, en choisissant une quantité inconnue et en exprimant directement les autres quantités en jeu en fonction de celle-ci. Mais divers travaux montrent bien la force du contrat didactique dans une telle mathématisation, s'opposant aux tendances spontanées des élèves consistant à introduire autant d'inconnues que de quantités inconnues.

d'avantage encore l'essai erreur de l'algèbre en rendant plus algébriques certaines des caractéristiques arithmétiques de la méthode (voir la comparaison des démarches dans Haspekian 2005, p.91)

Ce n'est pas le seul exemple, par bien d'autres caractéristiques, le tableur est présenté comme occupant cette position intermédiaire entre arithmétique et algèbre (cf Capponi, 2000 ou Rojano&Sutherland, 2001)

En conclusion, nous nous trouvons face à des potentialités très intéressantes a priori, mais au vu desquelles non seulement ces recherches renforcent la question « pourquoi une si faible utilisation dans l'enseignement des mathématiques ? », mais nous laissent plutôt démunis quant aux situations qu'elles donnent dans le sens où rien n'est dit de leur mise en oeuvre concrète, de la façon de les orchestrer avec des élèves.

Par exemple, dans la tâche précédente, il apparaissait que « $gpe2=4*A2$ » ressemblait effectivement à l'équation « $y=4x$ » nous amenant à penser que l'élève entre dans l'algèbre, mais, concrètement, comment faire pour qu'un élève de 5e (12ans) en arrive à écrire cette formule dans le tableur, n'aurait-il pas besoin d'avoir déjà compris, comme prérequis, ce qu'est une formule (càd ce qu'on vise)?! Finalement, la question qui se pose est : « *comment mêler* les potentialités de l'outil et les mathématiques? ». Dans quel sens aller ? Suivant quelle(s) progression(s) ? Et quel est le rôle de l'enseignant?

Ces questions résonnent avec l'approche instrumentale utilisée en didactique ces dernières années à propos des CAS³, outils qui, comme le tableur, n'ont pas été initialement conçus pour l'enseignement.

3. Une Approche Instrumentale en Didactique des Mathématiques

Les travaux sur les calculatrices symboliques (voir par exemple Artigue, 2001 ; Lagrange, 2000 ; Trouche 1997 ou Trouche 2003) ont conduit au développement d'une approche instrumentale des questions d'intégration technologique à l'enseignement des mathématiques (cf. Guin et Trouche, 2002 pour une vision synthétique). Cette approche

³ Calculatrices Symboliques

repose entre autres sur les travaux de P.Rabardel (voir par exemple Rabardel, 1999) et souligne particulièrement le rôle non neutre des instruments sur les conceptualisations. Pour penser et analyser les modalités de cette influence, P.Rabardel utilise les notions de :

- médiation instrumentale,
- genèse instrumentale (processus progressif d'appropriation, influençant les représentations construites par les contraintes de l'instrument et le champ des actions possibles qui peuvent ouvrir de nouvelles modalités d'organisation de l'action mais aussi supprimer des activités en elles-mêmes formatrices),
- schèmes sociaux d'utilisation (structures permettant l'organisation de l'action du sujet).

Cette approche distingue l'artefact (le dispositif matériel ou symbolique) de l'instrument à proprement parler qui est, pour un sujet donné, une partie de l'artefact à laquelle s'ajoutent des schèmes d'utilisation. Un même artefact peut ainsi conduire à différents instruments pour différents sujets.

Enfin, P.Rabardel souligne l'importance de replacer l'instrument dans un système d'instruments déjà constitués pour le sujet. L'introduction d'un nouvel artefact conduit en effet à la recomposition des systèmes d'instruments déjà en place qui, à leur tour, rétroagissent sur le projet didactique. En introduisant un nouvel artefact, l'enseignant doit donc être attentif aux genèses instrumentales des élèves en tenant compte également de l'impact de l'outil sur les autres instruments déjà travaillés.

3.1 Le cas du tableur

Les questions auxquelles l'approche instrumentale nous sensibilise s'appliquent tout à fait au cas du tableur. Pour tenir compte de l'aspect instrumental, il nous faut donc analyser le tableur en considérant les aspects qu'elle met en avant, aspects qui nous donnent une nouvelle ouverture par rapport aux travaux pré-cités. Par exemple la question de la place des « techniques tableur » par rapport aux techniques « papier/crayon » plus traditionnelles ne se pose plus seulement en termes de : « *l'apprentissage de l'un est là pour remédier aux insuffisances de l'autre* » mais aussi en terme de « *transmission des éléments d'une dialectique technique/conceptuel* » inscrite dans une certaine culture mathématique qui se trouve être instrumentée (Rabardel, 1999).

Dans le cas du tableur, l'approche instrumentale nous permet de montrer une complexité dans l'articulation entre connaissances algébriques et connaissances tableur. Ainsi, trouve-t-on :

- des changements dans les techniques, dans les objets usuels,
- de nouveaux objets que le tableur introduit lui-même,
- enfin, en examinant les activités présentées dans les articles de recherches, nous observons qu'il existe des implicites « instrumentaux » au niveau de la tâche à effectuer.

Ayant évoqué précédemment les techniques avec l'étude de l'essai/erreur, nous allons donc illustrer cette complexité en montrant un exemple d'implicite dans les activités analysées, et un exemple d'objet modifié.

Commençons par les implicites.

3.2 Des implicites

C'est en cherchant à étudier les progressions, entre connaissances algébriques et connaissances tableur, mises en place dans les activités de recherche, que notre attention a été attirée par un certain nombre d'implicites. Nous présentons ici un exemple relevé dans Arzarello et al. (2000) qui propose une activité destinée à montrer l'intérêt du tableur pour le passage à l'algèbre en regard d'un travail comparable en papier crayon.

Proposé pour des élèves de 5^e/4^e, l'énoncé donné est le suivant :

Trouver une formule générale pour nommer un nombre impair.

Avec cet énoncé, ce que nous savons est que le professeur donne une première colonne d'entiers successifs avec, comme première tâche, de désigner/ nommer cette colonne (nommer la colonne « n » par exemple). L'enseignant vise alors la construction par les élèves, après un travail d'essais permis par le tableur, l'expression « $2n+1$ » comme titre pour la colonne B.

	A	B
1	0	
2	1	
3	2	
4	3	
5	...	

La tâche est donc transformée en :

A partir des nombres de la colonne A, trouver une formule qui génère des nombres impairs dans la colonne B.

L'élève peut réaliser une suite d'opérations sur les nombres de la colonne A, en cliquant sur une case de A : par exemple réaliser $A_3 + 1$, en cliquant sur A_3 , pour réaliser l'opération $2 + 1$ et obtenir l'impair 3, ou encore $2 * A_3 + 1$ pour obtenir l'impair 5. Le tableur recevra une formule correspondant à ces opérations, alors que l'élève peut rester dans le numérique si le passage par le symbolique n'est pas perçu. L'élève bénéficie d'un retour dans le numérique qui lui permet de vérifier si le résultat affiché est un nombre impair.

L'énoncé précise bien de trouver une formule générale, ce qui exclut une résolution telle que :

	A	B
1	0	
2	1	=A2
3	2	=A2 + A3
4	3	
5	...	

L'élève doit comprendre que la formule ne change pas à chaque ligne, qu'une seule formule doit être éditée puis recopiée vers le bas. La fonctionnalité de recopie est donc ici essentielle pour arriver au but visé de l'exercice : écrire une formule de type $2n+1$. Mais comment l'élève comprend-il que c'est la même formule qui doit être recopiée, au moment où il est en train d'apprendre la notion de formule, d'autant plus que, sur le plan purement syntaxique, le tableur n'affiche pas la même formule ? Nous pouvons faire l'hypothèse que ce n'est donc pas le terme « formule » de l'énoncé qui va l'aider, mais « l'obligation » d'utiliser la fonctionnalité de recopie. C'est le passage par cette contrainte liée au tableur, qui, selon nous, peut mener l'élève à la formule voulue. Comment est créée cette contrainte ? L'expression « formule générale » de l'énoncé ne semble pas *a priori* suffisante, à moins que ce ne soit un effet du contrat didactique, celui-ci ayant déjà initié un lien entre cette expression et la recopie. Ou bien est-ce la place de l'exercice dans la progression adoptée par l'enseignant qui a donné aux élèves l'habitude de recopier une suite d'opérations ? L'article ne le précise pas.

Cependant, même en supposant que l'élève respecte la contrainte d'utiliser la recopie vers le bas, l'exercice peut ne pas atteindre son but puisqu'une résolution possible peut encore être :

	A	B
1	0	=A1+A2
2	1	
3	2	
4	3	
5	...	

Où la formule « =A1+A2 » recopiée vers le bas fournit bien une solution.

Il faut donc aussi ajouter à la contrainte de la recopie, celle d'éditer dans la colonne B une formule n'utilisant, de la colonne A, que la cellule de la ligne correspondante (c'est à dire n'utiliser dans la formule en B1 que la cellule A1), contrainte pourtant absente du libellé de l'exercice. Là encore, les mêmes questions se posent alors : qu'est-ce qui contraint l'élève à agir dans le sens prévu, comment est créée cette contrainte ? Quelle est l'action de l'enseignant ? Tout cela reste implicite, en particulier les fonctionnalités du tableur supposées acquises par l'élève pour que l'activité souhaitée soit l'activité effective :

- L'utilisation de la recopie vers le bas pour éditer les formules des lignes autres que la première
- L'utilisation, dans la formule, des cellules de la ligne correspondante et non des lignes suivantes ou précédentes (formule de type fonctionnel et non séquentiel)

Ces pré-requis, situés au niveau des fonctionnalités du tableur, ne sont pas explicites dans l'énoncé de l'exercice, et pourtant ils sont nécessaires pour que la tâche soit bien dévolue, bien comprise.

3.3 Des nouveaux objets ou des objets anciens modifiés

Ici, la question posée à l'élève précise qu'on cherche un lien entre deux colonnes de nombres. Ainsi, la variable est « matérialisée », ou « concrétisée » par cette colonne. C'est la présence d'une colonne de nombres et non d'un nombre unique sur lequel agir qui est pertinente ici. C'est donc l'objet « variable-colonne » du tableur (autre exemple de nouvel objet que nous avons décrit dans la thèse) qui est l'objet pertinent sous-jacent, la formule étant un lien entre deux variables-colonne. Mais c'est ici de l'objet « formule » que nous parlons. Quel sens donne l'élève à cette « variable-colonne » ? Quelles conséquences cela a-t-il sur l'apprentissage de la notion de variable ? Comment se fait la liaison avec la « variable-lettre » de l'environnement papier-crayon ?

En effet, dans l'exemple de la tâche précédente, on voit que l'objet « formule » dans le tableur diffère de l'objet « formule » en papier-crayon, c'est pourquoi nous avons parlé de « formule-tableur ». En effet, comprendre la notion de formule, c'est saisir un certain invariant opératoire qui est, dans l'écriture papier, reflété par un invariant syntaxique. Or, dans le langage du tableur, l'invariance opératoire de la formule ne se traduit pas par une invariance syntaxique : la syntaxe même de la formule varie à chaque ligne du fait de

l'utilisation de références relatives. La bonne formule « $2n+1$ », qu'attendait l'enseignant dans l'exemple précédent, s'écrit après recopie vers le bas « $2*A2+1$ », puis « $2*A3+1$ », etc. Comment l'invariant prend-il alors sens pour l'élève ? Quel rôle joue le *geste de recopie* dans la reconnaissance de cet invariant ? En quoi le geste de « tirer » donne-t-il aux élèves le sens que nous avons en tête à savoir celui de « recopie » d'une formule ? Est-il suffisant ? Est-ce, finalement, la connaissance préalable de ce qu'est une formule qui induit l'usage de la recopie ou bien l'usage répété de la recopie qui donne peu à peu sens à la notion de formule ? Le texte fourni ne nous permet pas de répondre mais l'on saisit bien, ici, l'imbrication des deux et toute l'importance de l'instrumentalisation, qui restait dans l'exemple précédent implicite.

En conclusion, intégré à la classe, le tableur peut être moteur d'un certain travail mathématique. Ses caractéristiques peuvent *a priori* aider à construire un pont entre arithmétique et algèbre comme nous l'avons vu par exemple à travers la technique de l'essai/erreur. Cependant, le tableur introduit de nouveaux éléments susceptibles d'engendrer une certaine complexité qui peut s'ajouter aux difficultés usuelles de l'algèbre :

- par exemple dans l'appréhension différente des concepts (de « variable », de « formule »,...);
- ou dans le symbolisme (avec notamment une plus grande densité d'écriture des variables et des formules)
- enfin, on a vu que la tâche donnée aux élèves ne suffit pas, à elle seule, à ce que l'activité effective soit celle qui est visée, il y a des implicites au niveau des genèses instrumentales susceptibles de créer des malentendus.

Ainsi, l'analyse instrumentale pointe-t-elle, derrière une apparente facilité d'utilisation, le rôle non neutre du tableur à travers une certaine « *distance* » qu'il crée au niveau des objets et techniques emblématiques de l'algèbre. Le besoin d'accompagner les genèses instrumentales et ces changements dans les objets, techniques et finalement les organisations mathématiques viables avec le tableur, pose la question des **progressions** dans lesquelles ces changements vont intervenir. Comment associer la mise en place des objets usuels de l'algèbre et des objets tableur ? Par exemple, comment, quand, l'enseignant incorpore-t-il à l'apprentissage la fonctionnalité de recopie dont on vient de voir

l'importance ? Pour comprendre mieux les phénomènes en jeu, ces questions nous conduisent à chercher l'écho du terrain.

4 . Une Expérimentation Exploratoire

Nous avons mené une expérimentation où l'objectif était de tester l'utilisation du tableur pour l'apprentissage de l'algèbre (quelles sont les difficultés/stratégies des élèves/enseignants ?) et de comprendre les problèmes soulevés par les genèses instrumentales dans ce domaine.

Nous avons expérimenté une séquence en fin de 5e avec des élèves n'ayant pas spécifiquement reçu d'apprentissage en algèbre. Cinq séances ont été effectuées, étalées sur une durée d'un trimestre. Voici quelques exemples de résultats.

Nous pouvons dire, en premier lieu, que les élèves ont globalement progressé, et à leur rythme, au vu des difficultés néanmoins observées (voir Haspekian, 2005), nous avons été amenée à faire l'hypothèse qu'introduire à la fois un nouvel environnement et de nouveaux savoirs mathématiques semble accroître les difficultés : si le tableur semble, théoriquement, bien adapté à l'apprentissage de l'algèbre, il ne semble pas pour autant pertinent d'initier élèves à cet outil *en commençant par* l'apprentissage de l'algèbre, ce que les précédentes recherches n'avaient pas mentionné.

Versant enseignant: le principal phénomène que l'on a pu observer est le manque de repères didactiques pour ces séances qui s'est manifesté tout le long de l'expérimentation :

- au niveau de l'utilisation du tableur par les élèves (on découvrait des stratégies totalement imprévues),
- au niveau du temps. Notamment, ce qui a le plus étonné a été le temps pris pour initier (ou ré initier) à la fonctionnalité de recopie.

Par exemple, la première séance qui consistait à une prise en main (voir le lien entre cellules, la réactualisation des résultats et entrevoir la recopie d'une formule) a duré deux fois plus de temps que ce que l'enseignante avait prévu : ses élèves ayant déjà vu le tableur en technologie au premier trimestre, elle a pensé que l'activité ne présenterait pas de difficultés et durerait 20mn. C'est aussi ce que lui a dit l'enseignant de technologie qui ne voyait en cette séance que des rappels de ce qu'il avait fait au premier trimestre. Or l'activité a pris l'heure, et les élèves semblaient n'avoir aucun souvenir ni des formules, ni de la recopie. Ceci questionne ce qui a été fait en technologie : quels types de genèses instrumentales ont-ils eu lieu ? Celles-ci reposaient-elles vraiment sur les mêmes

connaissances que celles en jeu en mathématiques ? Et même s'il y a des correspondances possibles, les transferts du cours de technologie vers celui de mathématiques sont-ils facilement réalisables par les élèves ? Et même s'ils le sont, que reste-t-il après environ un trimestre de coupure ?

Un autre résultat versant enseignant est celui d'une plus grande facilité ressentie dans l'intégration des logiciels de géométrie dynamique que du tableur, comme s'ils étaient plus « proches » du papier-crayon. Nous retrouvons là cette idée de « distance » qui reste à préciser. Ceci s'est manifesté au niveau du vocabulaire, et du retour papier en général, c'est à dire des liens avec le travail papier. En effet, on a par exemple un problème de vocabulaire dès qu'on veut introduire quelque connaissance tableur de façon plus institutionnelle. Quels liens peut-on établir concernant la « cellule » : va-t-on la relier au concept de « variable » ? La même question se pose pour la « colonne » : est-ce un ensemble de plusieurs variables ou bien une autre représentation de la même ? Qu'en est-il de la recopie : est-ce une formule ? etc. Dans les logiciels de géométrie dynamique, le lexique paraît déjà plus proche du vocabulaire traditionnel.

Au-delà du vocabulaire, c'est l'ensemble même des objets algébriques valorisés qui se trouve être modifié. On passe, en papier-crayon (pour l'institution collège, en France et dans les programmes actuels), d'une algèbre d'équations et d'inconnues où l'on met en avant sa fonction d'outil de résolution de problèmes, à, dans le tableur, une algèbre de variables et de formules, dans leur aspect fonctionnel, où l'on voit plus l'algèbre comme outil de généralisation, etc... :

« Valeurs » de l'algèbre :	Environnement papier crayon, au collège	Environnement tableur
Objets centraux	inconnues, équations	variables, formules
Fonction de l'algèbre	outil de résolution de problèmes	outil de généralisation
Démarche globale de résolution	démarches « algorithmisées », application de règles algébriques	démarches arithmétiques d'essai-erreur
Nature des solutions	solutions exactes	solutions exactes ou approchées

Au contraire, en géométrie, prenons l'objet central de «figure» par exemple. Les logiciels de géométrie dynamique ont, nous semble-t-il, non pas éloigné l'objet de sa conception mais rendu sa représentation plus conforme au concept de «figure» en permettant de réaliser, mieux qu'en papier crayon, la distinction dessin/figure (on se réfère là aux travaux autour du logiciel Cabri-géomètre, voir par exemple Laborde et Capponi, 1994).

Au final, l'approche instrumentale montrait une articulation complexe entre algèbre et tableur ; des mathématiques différentes apparaissaient et l'expérimentation confirme que *la difficulté d'intégrer le tableur consiste principalement en la difficulté de construire un enseignement qui conjugue ces savoirs aux savoirs traditionnels*.

A nouveau des questions surgissent alors : les nombreuses ressources offertes aux enseignants prennent-elles en compte ces problèmes, dans quelle mesure aident-elles les enseignants ?

5. Une analyse des ressources sur Educnet

Avec le cadre théorique précédent, nous avons bâti une grille d'analyse des ressources tenant compte de leurs caractéristiques mathématiques mais aussi de leur prise en compte ou non des questions d'instrumentation.

Le corpus choisi a été celui des ressources collège de base Educnet du Ministère de l'Education Nationale, car portant un certain caractère institutionnel et reflétant par là, à travers la façon dont elles accompagnent l'enseignant, la vision qu'a l'institution de cette question de l'intégration du tableur.

Un premier résultat fort imprévisible concerne le domaine mathématique mis en jeu :

Domaine	Effectif	%
Statistiques	16	28
Arithmétique	8	14
Gestion Données	9	15
Géométrie	2	4
Fonctions/Analyse	14	25
Algèbre	7	12
Autre Domaine	1	2
Total	57	100

Sur 57 ressources, 7 seulement s'intéressent à l'algèbre. Le couple «Statistiques/Gestion de Données» majoritaire n'est pas surprenant, le tableur leur étant particulièrement bien adapté. Mais le faible «score» de l'algèbre surprend au regard non seulement des recherches mais aussi des *programmes de 4e ET de 3e* (par comparaison, le domaine « Fonctions/ Analyse, uniquement présent dans les programmes de 3e, arrive en deuxième position).

L'idée de distance dont nous avons parlé peut peut-être expliquer pourquoi tant de ressources tableur concernent les statistiques : non seulement la pression des valeurs institutionnelles y est sans doute plus faible qu'en algèbre, mais pour les statistiques, les caractéristiques du tableur sont aussi sans doute plus proches du papier crayon qu'elles ne le sont en algèbre, de par l'origine même du tableur. Les auteurs des ressources semblent donc préférer légitimer l'outil dans un domaine où il présente une moindre distance au papier crayon qu'il ne le fait en algèbre.

Examinons plus précisément les **thèmes mathématiques** visés:

Thème	Effectif	%
Optimisation/Approximation	13	23
Exploration Numérique/ Graphique., Conjectures	14	25
Algorithme, PGCD	8	14
Représentation de données	10	18
Conjectures, Formules	6	11
Résolution Équation	2	4
Introduction Algèbre	0	0
Autres thèmes	3	5
Total	56	100,00

C'est encore plus surprenant concernant les thèmes associés à l'algèbre: *aucune ressource de cette base ne vise l'utilisation du tableur pour entrer dans l'algèbre !* D'ailleurs, la technique de l'essai/erreur n'est exploitée que dans 4 ressources! Il y a donc un décalage entre les potentialités *a priori* et les potentialités utilisées.

Nous constatons également des insuffisances : à part les consignes «élèves», la ressource ne renseigne quasiment rien (fonctionnalités tableur mises en jeu, idée du scénario, prérequis, objectifs, aussi bien mathématiques que tableur,...) sont bien souvent

absents. Plus d'un tiers des ressources analysées (en 2003) ne fournit *aucun accompagnement*, et devient donc difficilement exploitable pour un enseignant non expert.

Par ailleurs, quand des indications existent, elles sont majoritairement *côté mathématiques uniquement* ou bien mal évaluées créant les mêmes types d'implicites que ceux vus en théorie (par exemple, dans certaines ressources, on peut lire : « *Aucun prérequis nécessaire* » et l'on s'aperçoit que les élèves doivent faire *implicitement* l'usage de la poignée de recopie, savoir éditer une formule,...).

En conséquence, du point de vue des ressources offertes aux enseignants, nous ne retirons que très peu d'éléments permettant de prendre en charge les difficultés mises en évidence. Qu'en est-il d'un point de vue plus « interne » aux enseignants ? Il s'agit à présent de s'intéresser **aux conceptions** des enseignants en y recherchant ce qui contribuerait aux résistances ou à l'adhésion des enseignants de mathématiques au tableur, en allant chercher au-delà des motifs traditionnellement évoqués (peur de changer ses habitudes, de paraître incompetent, refus de fournir les efforts nécessaires, manque de formation,...)

6. Du côté des pratiques

Les travaux analysant les pratiques enseignantes motivent notre volonté de dépasser ces discours en soulignant que si les actions des enseignants répondent à des raisons qui ne sont pas nécessairement des arguments de contenus (relatifs aux savoirs) ni d'apprentissage (relatifs aux élèves) mais parfois des arguments relatifs à l'enseignant vu comme individu, exerçant un métier, avec ses contraintes, ses marges de manoeuvre et son histoire personnelle. La double approche d'A. Robert et J.Rogalski modélise l'étude de ces pratiques autour de cinq composantes dont **une** qui est la composante personnelle, liée aux conceptions des enseignants sur les mathématiques, leur enseignement et apprentissage. Nous faisons l'hypothèse que cette composante joue un rôle crucial dans l'adhésion ou non des enseignants au tableur et aux TIC en général. A ce propos, que nous apprennent les enseignants qui intègrent le tableur ? Par ailleurs, la double approche souligne aussi que les pratiques enseignantes sont cohérentes et stables très vite, il est donc intéressant de regarder les stagiaires qui seront les futurs enseignants.

Nous avons alors réalisé un questionnaire et des entretiens auprès de stagiaires PLC2 et d'enseignants experts (en désignant par « experts » des enseignants qui intègrent le tableur

dans leurs classes et font des formations initiale et/ ou continue sur cet outil). Dans le cas des stagiaires, nous avons mené des entretiens groupés pour que ces derniers échangent, débattent, ce qui fait davantage ressortir leurs opinions. Pour les experts, nous avons mené des entretiens individuels reprenant les mêmes questions et ajoutant une partie sur leurs pratiques. Des régularités se dégagent dans les deux cas et se manifestent aux niveaux :

- des conceptions générales sur l'utilisation de l'outil informatique,
- des conceptions plus précises concernant le tableur et son usage pour l'enseignement des mathématiques, notamment pour l'apprentissage de l'algèbre (nous l'avons vu concernant les choix et opinions sur les exercices proposés dans le questionnaire),
- des pratiques « TICE » des formateurs.

Dans ce texte, nous ne présentons qu'une rapide synthèse de quelques traits communs d'une part aux enseignants novices, d'autre part aux enseignants experts.

Donnons d'abord la parole aux stagiaires par quelques extraits déjà riches d'informations.

Nous constatons d'abord une volonté d'utiliser l'informatique, la difficulté ne se situant pas dans l'usage de l'outil en lui-même mais dans l'usage de l'outil *pour* faire apprendre des mathématiques. Les stagiaires sont en effet globalement « pour » mais pour des raisons autres que ce que l'on croit au départ, révélant un clivage mathématiques/informatique, lequel se traduit par des suggestions, par des peurs aussi. On comprend peu à peu, ce qu'ils mettent derrière « utiliser l'informatique » : quelque chose d'assez vague qui ne signifie **pas nettement faire des mathématiques**, ni avancer dans les apprentissages au programme, comme le montrent les quelques extraits suivants (issus de groupes divers) :

B : *« Ca dépend du temps qui me reste sur mon cours de maths. Pour terminer le programme. »*

N : *« moi je veux bien mais si je veux finir mon programme, je peux pas avoir le temps de faire de l'informatique »*

R : *« Faut que j'avance dans ma progression, (...), ça sert à rien de greffer quelque chose qui me ralentirait »*

Ce petit clivage mathématiques/informatique évoqué devient au fil des entretiens une franche rupture :

N : *« quand on veut respecter les programmes à côté, ben on est parfois réticent à faire de l'informatique »*

C : « *j'me sens pas assez à l'aise pour préparer mes cours en parallèle avec ça* »

H : « *quoi qu'il arrive, ça réduit pas les séances. L'info c'est en plus. Je veux dire ça me permet pas d'enlever des choses* »

Pourquoi sont-ils alors volontaires pour en faire ? Les raisons évoquées sont loin d'être en lien avec les mathématiques :

C : « *c'est bien, c'est marrant, c'est ludique* »

R : « *il faut être dans son temps* »

H : « *c'est une « sortie », pour moi, c'est comme le professeur de musique qui emmène ses élèves à l'auditorium* »

L'utilisation d'outils informatiques n'est donc pas nettement motivée par les potentialités épistémiques de ces outils, potentialités qu'ils ont d'ailleurs du mal à voir comme tout enseignant démarrant dans le métier, nous le constatons dans leurs réponses aux questions où il s'agissait de choisir une activité tableur parmi plusieurs proposées.

La rupture se traduit, dans différents groupes à travers des suggestions :

Cl : « *L'informatique, ça devrait être une matière en soi ! (...) il devrait y avoir des cours d'informatique* »

N : « *ça serait bon de nous donner, dans notre emploi du temps, un espace réservé à ça* »

D'autres encore expriment des craintes :

E : « *en fait, le problème c'est que ça va dériver en : "on va devenir les profs d'informatique" et ça c'est le danger* »

C : « *il faut pas que l'informatique mange les mathématiques* »

A : « *il faut pas que l'informatique devienne l'outil central, et les maths un satellite de l'informatique* »

R : « *oui, parce qu'il faut pas exagérer, on est quand même là pour faire des maths!* »

Pour synthétiser, nous pouvons noter :

- 1) une évolution sensible des stagiaires par rapport aux opinions exprimées il y a dix ans sur l'utilisation de l'informatique en général : les stagiaires sont globalement très favorables à l'introduction de l'informatique dans les programmes,
- 2) une position généralement très critique envers les enseignants déjà « installés » dans le métier. Les stagiaires se placent un peu « au-dessus » de ces postures, ils veulent s'en distancier,

- 3) mais présentant finalement une image assez stable quant aux conceptions qui ressortent autour des mathématiques : nous voyons nettement que dès qu'il s'agit de mathématiques, les stagiaires sont « touchés » et les questions de légitimité de l'informatique se posent bien toujours,
- 4) ces conceptions sont caractérisées par un clivage mathématiques/ informatique et des pratiques de juxtaposition plutôt que d'intégration réelle, montrant ainsi que l'outil n'a pas une véritable valeur épistémique (il n'a tout au plus qu'une valeur pour les calculs qu'il permet d'effectuer, mais cette valeur seule se traduit par une utilisation peu économique de l'outil, vu le coût que nécessite son intégration, et reste donc, à elle seule, insuffisante à l'imposer).

En conclusion, il nous semble, en comparant les réponses concernant respectivement les usages personnels et les usages par les élèves, que les conceptions jouent un rôle non négligeable. En effet, les stagiaires utilisent l'informatique pour leur usage personnel et professionnel (préparer des fiches, calculer des moyennes, éditer des lettres, ...). La résistance n'est pas dans l'usage de l'outil en lui-même mais dans l'usage de l'outil pour faire apprendre des mathématiques. Elle ne se réduit pas aux discours habituels (à savoir des peurs, le manque de formation, le temps, les problèmes matériels).

Du côté « experts »: on trouve des convergences également et qui sont absolument le contraire de ce qu'on vient de lister:

Jeunes stagiaires PLC2	Enseignants « experts » (TIC)
■ Difficultés à voir les potentialités	■ Repérage très tôt des potentialités
■ Clivage maths/ info	■ Intégration harmonieuse
⇒ Pratiques de juxtaposition	⇒ Avancée dans les maths
⇒ Perte de temps	⇒ Pas de perte de temps

Par exemple des discours **des formateurs**, se dégage le fait qu'ils ont su très tôt repérer les potentialités, peut-être grâce à un phénomène «déclenchant» particulier dans leur vie, qui semble leur avoir donné une certaine sensibilité aux outils dès le début :

N : *« j'ai compris très vite que ça apportait au moins quelque chose de plus »*

E : *« Je me suis rendu compte très tôt de la richesse des situations »*

D : « Je me suis très vite rendu compte qu'au niveau de mon métier ça allait pouvoir me servir. (...) Cabri, ça a été lumineux dès le départ »

S : « Les ordinateurs, je m'en suis procuré bien avant qu'on en ait en France, j'ai été en Angleterre (...) ça me semblait évident qu'il fallait utiliser les outils »

Par rapport au clivage mathématiques/ informatique et aux pratiques de juxtaposition précédemment évoquées, on a, là encore, au **contraire** une intégration harmonieuse:

S : « non c'est terminé le 'j'apprends le solfège et dans trois ans je pourrai toucher à mon instrument' »

On le voit, il n'y a pas de « séparation ». Par conséquent, il n'y a pas de perte de temps, l'informatique ne venant pas « en plus »:

N : « l'informatique c'est pas 'en plus' c'est 'à la place de' »

Ma : « j'ai toujours trouvé que c'était un gain de temps. Je l'ai jamais considéré comme 'je fais une séance informatique en plus' »

Mo : « je trouve le temps parce que c'est pas en plus ! »

Quels sont les éléments qui leur permettent de réussir ? **Dans** les pratiques, c'est l'importance de la prise en compte non d'un outil mais d'un **système d'instruments** qui se dégage. Deux caractéristiques paraissent fondamentalement contribuer à leur réussite à intégrer le tableur :

1. un **jeu** « **ancien/ nouveau** » à la fois au niveau des contenus et au niveau des instruments,
2. un certain art de savoir mêler ces deux jeux ce qui leur **procure un fonctionnement** économique à la fois sur la gestion de classe en séance informatique et sur les genèses instrumentales.

En effet, des activités utilisées par les formateurs et de l'intégration du tableur qu'ils décrivent, il se dégage un art subtil de la combinaison des outils et des contenus mathématiques. Par exemple, les experts disent avoir une « Façon de faire des révisions en apportant quelque chose en plus », d'autres utilisent les « mêmes notions présentées dans deux environnements différents », ou encore font un « Retravail à la main après une séance info », l'une d'elle dit par exemple qu'elle « combine papier-caculatrice-tableur » dans la même séance et ajoute « je fais des liens sans arrêt, sans arrêt ... ». L'intégration du tableur peut alors être découpée en différentes parties (qui ne correspondent pas nécessairement à des phases successives) dans lesquelles les experts jouent ainsi sur un « savant » dosage

d'ancien et de nouveau tout à la fois sur le plan des contenus mathématiques et sur celui des outils :

1. Une partie d'initiation d'un outil nouveau bien souvent mêlée à des connaissances « anciennes » sur d'autres outils et à des connaissances anciennes en mathématiques
2. Une partie de travail sur des mathématiques connues, sans apport de nouveau dans les connaissances mathématiques mais plutôt dans les genèses instrumentales (l'accent est mis sur l'instrumentalisation)
3. Une partie de travail de mathématiques connues et nouvelles, (l'accent est mis sur l'instrumentation) avec parfois du nouveau dans l'instrumentalisation

Le « dosage » de chacune de ces parties est sans doute une clé de l'intégration du tableur chez ces enseignants. Malheureusement, il est impossible de saisir cette clé à partir de la seule donnée des activités demandées, il nous manque par exemple la prise en compte des autres outils informatiques, la façon de les agencer avec le tableur, l'articulation avec les séances ordinaires et le travail papier, l'importance en temps de chaque phase,....

Cette orchestration d'un système d'instruments est donc une base de travail servant à intégrer le tableur. Ce dernier étant perçu comme plus complexe, ils le font rencontrer à leurs élèves après d'autres logiciels, obtenant ainsi :

- **un gain** de temps sur la gestion de classe dans ce type de séance (découverte de la salle informatique, mise en place du contrat, etc...)
- **un gain** de temps sur les genèses instrumentales avec tableur: une partie de ces genèses étant prise en charge avec d'autres outils (manipulation du matériel, de l'ordinateur, des fichiers,...)

Si l'importance du système d'instruments mis en place comme base de travail servant à intégrer le tableur s'avère être une condition à la réussite de cette intégration, comme suggéré ci-dessus, (mais il faudrait une étude à plus grande échelle pour confirmer ceci), nous comprenons alors la faible intégration du tableur par les enseignants : il faudrait qu'ils aient déjà intégré d'autres outils informatiques, ce qui restreint encore considérablement le nombre d'enseignants susceptibles d'intégrer (et de réussir à intégrer) le tableur.

En voulant situer les « profils » des stagiaires relativement à ceux des experts, nous avons déterminé quatre degrés différents **d'intervention** de l'outil informatique dans l'enseignement des mathématiques, ces degrés constituent simplement des marqueurs grossiers parmi une variété possible :

- intégration nulle (niveau N0), profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques avec l'idée de mathématiques pures, rigoureuses, exactes, figées en un bel édifice déductif de vérités... L'informatique, par une approche plus expérimentale des mathématiques, serait perçue comme véhiculant une représentation conflictuelle avec cette idée,
- intégration parallèle (niveau N1) de l'informatique en tant que discipline, profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques avec l'idée d'accepter de « faire de l'informatique » pour faire découvrir et utiliser des outils modernes qui font partie de notre société, mais avec lesquels on discerne mal comment on peut faire faire des mathématiques aux élèves,
- intégration ponctuelle de l'outil informatique (niveau N2) pour les calculs ou tourné vers des mathématiques expérimentales, profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques avec l'idée d'utiliser les outils informatiques parce qu'ils sont stimulants, motivants pour les élèves et ont des capacités de calculs. On exploite ici les potentialités pragmatiques de la technologie : obtenir des résultats facilement, éviter les calculs longs et fastidieux du papier crayon, construire des figures propres, aborder des situations plus complexes,
- degré 3 (N3) ou intégration harmonieuse de l'outil informatique dans la progression des contenus d'enseignement des mathématiques, profil correspondant : une conception de l'enseignement des mathématiques intégrant une dialectique « technique/ conceptuel » à travers l'utilisation d'outils informatiques vus à la fois comme outils de calculs, stimulants, motivants pour les élèves (c'est à dire comme N2), mais aussi comme outil d'apprentissage et de découverte de notions mathématiques, d'expérimentation, recherche et conjecture. On intègre donc aussi le potentiel épistémique de la technologie.

Nous arrivons au terme de notre tour d'horizon. Quels résultats avons-nous vu se constituer au fil de cet itinéraire?

7. Conclusion

Nous avons vu que l'approche instrumentale, en soulignant l'importance du rôle des genèses instrumentales, dévoile une complexité dans l'étroite articulation entre connaissances algébriques et connaissances tableur, que nous avons associée à une idée de

“distance” entre environnement : **au niveau des objets, démarches et symbolisations dans le tableur, par rapport aux objets, démarches et symbolisations usuels en algèbre.**

On peut supposer qu'un enseignant **non expert de l'outil** peut pressentir une complexité et se montrer *réticent à créer de nouvelles organisations qui, comme le montre l'expérimentation, ne vont pas de soi.*

L'expérimentation affirme aussi, par comparaison aux logiciels de géométrie dynamique qui ont été évoqués, l'hypothèse d'un lien entre une certaine notion de «force d'instrumentation» ou «distance» et les difficultés d'intégration du tableur. Si on veut pouvoir comparer, on peut dire que plus fort est le besoin d'instrumentation lié à l'outil, i.e. **plus grande est sa « distance » par rapport aux habitudes scolaires en cours, et plus difficile est son intégration.**

Par ailleurs, l'expérimentation précise cette vague idée de distance en ajoutant aux éléments déjà vus (qui étaient de « type » transposition informatique sur les objets, les démarches et les symbolisations) de nouveaux tels que le « **design** » i.e. le fait qu'il soit conçu ou non pour l'enseignement, ce qui peut être un critère, le vocabulaire en jeu, ou encore les écarts entre les valeurs mathématiques portées par chaque univers, tableur ou papier- crayon, qui **peuvent être aussi** une gêne comme on l'a vu dans l'expérimentation, l'enseignant *voyant d'abord les écarts avec son système de valeurs.*

Face à ces difficultés, nous avons regardé l'enseignant à travers deux prismes: l'un externe (les ressources) et l'autre interne (ses propres ressources internes).

Notre double enquête auprès des enseignants a identifié les difficultés manifestes chez les non experts à voir les **potentialités de l'outil**, à concevoir des organisations qu'ils n'ont finalement jamais vu vivre.

Elle montre en même temps un nouveau critère pour caractériser la distance : une dimension épistémologique intervient également dans la distance que présente le tableur. Il s'agit de «l'épistémologie embarquée par l'outil» dans le sens : quelle **légitimité, cette fois** non plus institutionnelle mais épistémologique, perçoit-on de l'outil?

- **Du côté des ressources,**

De l'analyse des ressources, il ressort qu'un enseignant non expert peut difficilement tirer bénéfice de ces ressources. Par conséquent, on peut dire en conclusion qu'il se trouve assez

mal armé *pour gérer un chemin conjuguant tableur et apprentissages visés*, et on comprend alors mieux les problèmes d'intégration du tableur.

Ces problèmes sont certainement variables suivant l'outil en question, et nous avons tenté de « mesurer » cette variabilité grâce à **la notion** de distance, laquelle pose aussi la question de la nécessité d'une « distance minimale ». En effet, elle crée des difficultés d'intégration mais c'est aussi parce qu'il y a une certaine distance qu'il peut y avoir enrichissement.

Alors, pour aller vers des solutions, on peut travailler dans trois directions :

- **au niveau des ressources** qui nécessitent une prise en compte minimale de cette dimension instrumentale.
- Nos quatre profils posent aussi la **question des formations**. Comment faire évoluer les pratiques et atteindre le niveau 3 si c'est **ce rapport à l'informatique** que vise l'institution? La solution peut passer par des moyens de gérer les genèses instrumentales, en **intégrant dans** les contenus de formation l'importance des systèmes d'instrument et la prise en compte de leur **orchestration**,
- **et au niveau des outils** eux-mêmes avec la **notion** de «distance» qui peut peut-être nous aider à réfléchir quant aux outils futurs mais qui reste à creuser pour développer les **critères** qui la caractérisent.

Le travail aussi bien pratique que théorique est donc à poursuivre...

Références

Ainley, J., Bills, L. and Wilson, K. (2003). Designing Tasks for Purposeful Algebra *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.

http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_ainley_cerme3.pdf

Artigue, M. (2001), Learning mathematics in a CAS environment : the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7 (3): 245-274

Arzarello, F., Bazzini, L. and Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, T. Assude, A. Bell and R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra*, vol.22, 61-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

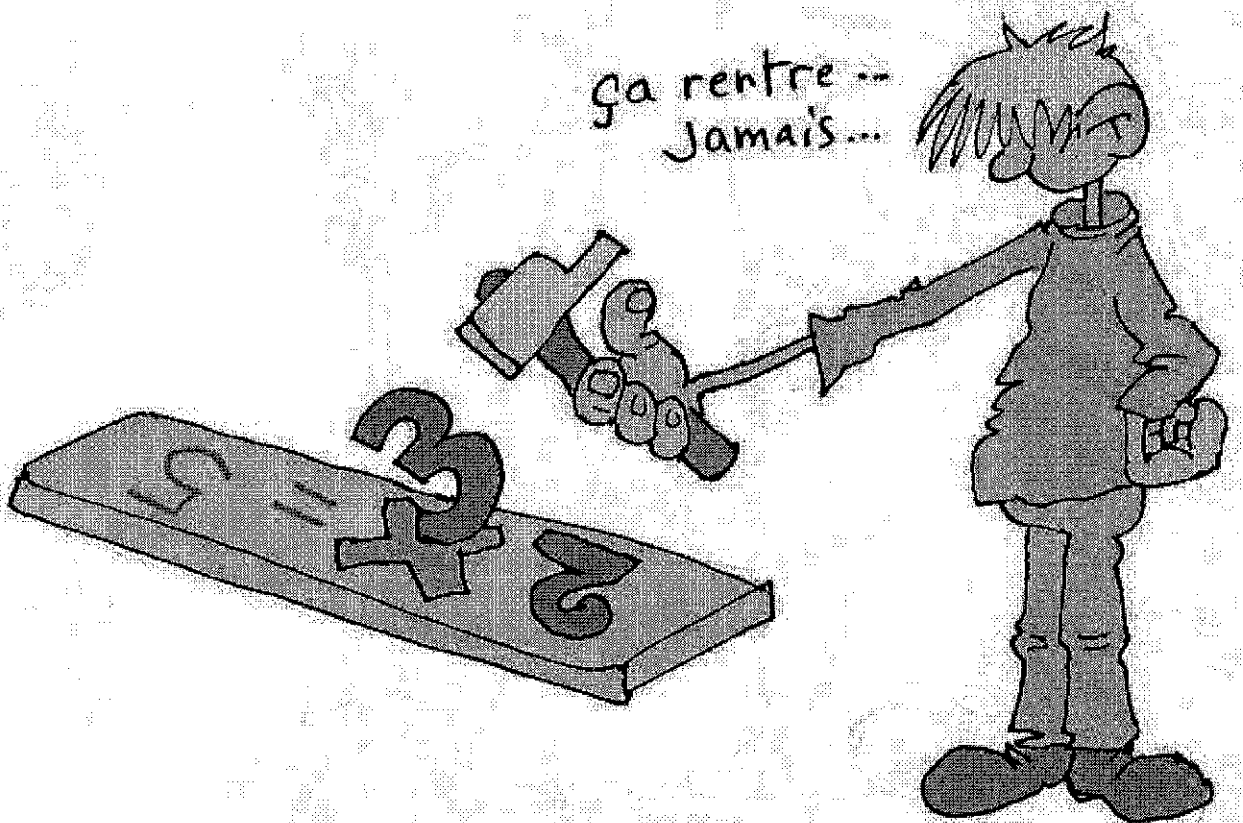
- Capponi, B. (2000). Tableur, arithmétique et algèbre. *L'algèbre au lycée et au collège*, Actes des journées de formation de formateurs 4-5juin1999 (pp.58-66). IREM de Montpellier.
- Bednarz, N., Kieran, C. and Lee, L. (Eds.), (1996), *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. & Vincent, J. (Eds), (2001). The Future of the Teaching and the Learning of Algebra, *Proceedings of the 12th ICMI Study* University of Melbourne, Australia.
- Dettori, G., Garuti, R., Lemut, E. and Netchitailova, L. (1995). An Analysis of the Relationship between Spreadsheet and Algebra, in L. Burton and B. Jaworski (Eds.) *Technology in Mathematics Teaching - a bridge between teaching and learning*, Bromley: Chartwell-Bratt pp. 261-274.
- Drouhard, J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Université de Paris 7.
- Guin, D. & Trouche, L. Eds (2002) *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : *La Pensée Sauvage*
- Haspekian, M. (2005). *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques, Etude du cas des tableurs*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot, Paris 7, 2005.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 14 (1-2), La Pensée Sauvage (Eds.), pp. 165-210.
- Lagrange, J.B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics* 43 (1) : 1-30
- Rojano, T. and Sutherland, R. (1997). Pupils' strategies and the Cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets. *Proceedings of the 21st International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4 (pp. 72-79). Lathi, Finland.
- Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Université d'été*, IUFM Caen, pp203-213
- Rojano, T & Sutherland, R. (2001) Algebraic reasoning with spreadsheets. International Seminar, Cambridge.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.
- Trouche, L. (1997). *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un "environnement calculatrice", étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de Doctorat, Université Montpellier II, IREM de Montpellier.

- Trouche, L. (2003). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Edition de l'IREM, Université Montpellier II.*
- Vergnaud, G., Cortès, A., et Favre-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du Colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp.259-288, La Pensée Sauvage (Eds.).
- Vergnaud G. (1989/90) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x n°22* (pp.51-69) IREM de Grenoble.



Boucher les trous qu'il disait

ça rentre --
Jamais...



Un programme double :

**« Bouchons les trous » un environnement informatisé
pour le travail de mise en équations algébriques**

et

Esquisse d'une didactique du sens commun

Sophie René de Cotret, Université de Montréal,
Professeur invité INRP, UMR ADEF

Ce titre, un peu lourd il faut le reconnaître, témoigne du parti pris dans ce texte de répondre à la question posée lors de l'invitation au séminaire: Sur quoi travaillez-vous en ce moment ?

La première partie de cet article sera ainsi consacrée à la présentation de l'environnement informatisé « Bouchons les trous » destiné au travail de mise en équations algébriques. Cet environnement a d'abord été créé pour répondre à un besoin d'observation des connaissances en jeu dans la validation de l'équation traduisant un problème écrit. Puis, au fur et à mesure de ses mises à l'essai en classe, il a été modifié pour mieux répondre à certains besoins d'enseignement et d'expérimentation. Le principal intérêt de *Bouchons les trous* est d'offrir un environnement pour travailler le lien entre le libellé d'un problème et l'équation associée. Nous présenterons dans ce texte quelques aperçus de la façon dont l'environnement permet un tel travail. Il s'agira du même coup de décrire les différentes potentialités de l'environnement.

Dans un tout autre ordre d'idée, et en complément de programme, nous esquisserons les grandes lignes d'un domaine de recherche en émergence que nous avons appelé la didactique du sens commun ; il s'agit principalement d'étudier la dynamique entre le savoir scolaire appris et le savoir de sens commun en situation quotidienne ou non didactique. Cet

objet d'étude nous a conduits à développer deux voies de recherche que nous présenterons en seconde partie de cet article. Une première voie cherche à développer une « clochette de vigilance » au sein du sens commun, de sorte que ce dernier puisse éventuellement consulter le savoir scolaire appris. Une seconde voie vise à mettre sur pied quelques assises théoriques pour fonder et outiller l'étude de cette dynamique.

« Bouchons les trous »¹ un environnement informatisé pour le travail de mise en équations algébriques.

Quelques éléments de problématique

- Un problème de recherche

Entrons directement dans le cœur du sujet. Pouvez-vous rédiger une équation qui traduit le problème suivant :

Un groupe d'élèves part en excursion. Le coût exigé par élève est de 6,50 \$. À la dernière minute, 4 filles et 2 garçons décident de ne pas y aller. Les autres doivent donc payer chacun 1,50 \$ de plus. Combien d'élèves ont participé à cette excursion?

Il est fort probable que vous puissiez rédiger une telle équation. Combien seriez-vous prêts à parier sur la validité de votre équation, c'est-à-dire sur le fait que votre équation traduit bien le problème et que sa résolution permettra de fournir une bonne réponse à la question posée ? On supposera que vous souhaitez parier gros ! Et sans doute à juste titre. En effet, vous avez possiblement écrit l'équation suivante : $x \times 6,50 = (x-6) \times (6,50 + 1,50)$, auquel cas, vous auriez gagné votre pari. Il en aurait été de même avec l'équation : $(x + 6) \times 6,50 = x \times (6,50 + 1,50)$, où le x désigne cette fois le nombre d'élèves ayant participé à l'excursion plutôt que le nombre d'élèves initialement prévu. D'autres équations auraient encore pu être possibles. Maintenant, pourriez-vous fournir quelques arguments susceptibles de convaincre un élève ou un collègue que votre équation traduit bien la situation présentée dans

¹ L'environnement *Bouchons les trous* a été conçu par S. René de Cotret et réalisé grâce au soutien financier du FCAR - Québec, dans le cadre d'une subvention de recherche dont la chercheuse principale est Gisèle Lemoyne, Université de Montréal.

ce problème ? En d'autres termes, comment pourriez-vous établir la validité de cette équation autrement qu'en montrant que le résultat auquel elle conduit est bel et bien la réponse cherchée. La tâche s'avère ici beaucoup plus difficile. Et pourtant, si vous avez accepté de parier gros, c'est que vous êtes convaincus de la validité de votre équation et que vous avez des connaissances qui vous conduisent à cette conviction. Quelles sont ces connaissances ?

L'exercice précédent montre qu'il est beaucoup plus facile de produire une équation valide que de produire des arguments qui puissent rendre compte de sa validité. Le problème est celui de l'identification des connaissances et des savoirs qui servent à la validation lors de la mise en équations.

Depuis quelques années, nos recherches (René de Cotret, 2000) visent l'identification des connaissances qui permettent de valider l'équation algébrique produite pour représenter un problème écrit, de même que les connaissances en jeu dans le travail même de mise en équations.

Notre hypothèse de départ proposait que, à moins que la réussite ne soit le fruit du hasard, il devrait y avoir des connaissances, pouvant varier selon les situations proposées, utilisées par les élèves pour valider leur travail de mise en équations.

Ces connaissances ne sont pas uniquement de nature mathématique mais également de nature linguistique. « (...) *les problèmes de mise en équations mobilisent des opérations discursives de désignation d'objet et d'expression de relations à l'aide de mots comme à l'aide de symboles. Ces opérations sont beaucoup plus fines que celles habituellement mobilisées dans la lecture courante d'un texte ou dans la manipulation calculatoire d'équations.* » (Didierjean et al. 1997, p. 36). Si l'on tente d'identifier les savoirs mathématiques qui permettent de rendre compte de ce travail de mise en équations, on s'aperçoit qu'il y en a très peu, sinon une forme d'heuristique que l'on retrouve tant dans des textes mathématiques que dans des manuels scolaires : identifier l'inconnue, traduire le problème par une équation, résoudre l'équation, vérifier que la réponse obtenue a du sens dans le problème posé. Le travail de mise en équations à proprement parler se rapporterait aux deux premières étapes. Mais, comment peut-on savoir si l'équation produite traduit bien le problème donné ?

Cette absence de savoir pose dès lors un problème de recherche. Jusqu'à présent, nos études (René de Cotret, 1997, 2000), ne nous ont pas permis d'identifier de savoir, qu'il soit mathématique ou autre, qui permette de rendre compte de ce travail de validation de la mise en équations. Il semble que de nouveaux outils d'observation doivent être développés pour appréhender ces connaissances. C'est dans ce sens que l'environnement *Bouchons les trous* a été conçu : il s'agissait pour nous de créer un outil qui nous permettrait d'observer et d'étudier les connaissances en jeu dans la validation de la mise en équations.

- Un problème d'enseignement

« *L'algèbre (et sans doute toutes les mathématiques) tire en partie sa force de la possibilité qu'elle offre de travailler sans revenir à chaque instant à la compréhension du pourquoi d'une transformation algébrique.* » (GÉCO, 1997, p.41). Cette affirmation emporte sûrement l'assentiment de tous. En effet, une fois l'équation ou le système d'équations posé, le travail de transformation algébrique peut se faire, somme toute, automatiquement, sans y penser. Mais qu'en est-il de la *mise en équations*, laquelle, dans le contexte de la résolution de problème, doit nécessairement précéder les transformations algébriques ? La mise en équations ne peut compter sur une procédure systématisée ou un algorithme qui aurait fait ses preuves et dont le fonctionnement pourrait être garanti par la théorie qui le supporte. Il n'y a pas plus de technique pour mettre en équations que de théorie ou de savoir qui pourrait supporter cette technique. Dans la mise en équations, la compréhension est donc sollicitée jusqu'à ce que l'équation soit posée, l'importance du contrôle sémantique ayant d'ailleurs été mise en évidence dans plusieurs recherches (Lemoyne et al, 1993, Drouhard et al, 1995).

L'enseignement de la mise en équations pose alors problème, entre autres, puisqu'il apparaît difficile de décrire ou d'institutionnaliser une technique pour opérer le type de tâches qu'est la mise en équations de problèmes écrits. « *Enseigner la mise en équation est une difficulté à laquelle se heurtent les enseignants dans leurs classes et les manuels scolaires fournissent peu d'éléments pour leur venir en aide.* » (Combier, 1996, p.67). Ainsi, face aux difficultés et au peu de ressources disponibles pour l'enseignement de la mise en équations, tant en ce qui a trait aux séquences d'enseignement proposées dans les manuels scolaires qu'aux savoirs didactiques et mathématiques permettant de rendre compte de cette activité, nous avons adapté l'environnement *Bouchons les trous* pour qu'il puisse outiller l'enseignement de la mise en équations algébriques de problèmes écrits.

Cet environnement a donc été d'abord conçu comme un outil d'observation des connaissances en jeu dans le travail de mise en équations. Mais, il s'est rapidement révélé présenter un intérêt pour l'enseignement et a donc été modifié au fur et à mesure des mises à l'essai pour l'adapter aux besoins des enseignants. Il est disponible sur le site Internet (<http://www.gricea.umontreal.ca>).

Le projet de l'environnement *Bouchons les trous*

Le projet de *Bouchons les trous* est d'offrir un environnement qui puisse faire travailler et parler les élèves de manière ciblée sur le lien entre le libellé d'un problème et l'équation qui y est associée. À cette fin, il apparaît utile d'engager les élèves non seulement dans l'étude du passage du problème à l'équation, passage le plus souvent travaillé en classe, mais aussi dans celui de l'équation au problème, beaucoup plus rarement exploité. Afin de mieux saisir ce que les élèves injectent dans l'équation lors de la mise en équations, il peut s'avérer pertinent d'observer ce qu'ils en retirent pour le traduire en langage naturel. Nous avons donc conçu l'environnement informatique *Bouchons les trous* qui demande aux élèves de compléter le libellé d'un problème à partir d'une équation représentant ce problème, ou inversement.

Cette tâche a été inspirée par le test de closure (Taylor 1953) qui vise, entre autres, à évaluer la compréhension d'un texte à partir d'un texte « troué ». Plus précisément, ce test consiste à retirer de manière systématique un mot sur 5 par exemple, dans un texte, et à les remplacer par un petit tiret. Le lecteur doit alors combler ces espaces par les mots manquants. Une tâche similaire est apparue prometteuse pour étudier la mise en équations. C'est ainsi que j'ai conçu l'environnement *Bouchons les trous* tout d'abord comme outil de recherche pour l'observation du travail de mise en équations, puis comme outil d'enseignement.

Deux versions d'une même tâche de complétion sont proposées à l'élève dans l'environnement *Bouchons les trous* : compléter le libellé d'un problème lacunaire à partir d'une ou plusieurs équations associées, ou compléter une ou plusieurs équations lacunaires à partir d'un libellé de problème.

Voici un exemple d'item *Bouchons les trous* tel qu'il se présente à l'élève. Dans cet exemple, à partir de l'étude de l'équation associée $x + (x + 25) + (x + 25 - 35) = 318$, l'élève doit compléter le libellé du problème pour que ce dernier corresponde à l'équation proposée.

Bouchons les trous

PROBLÈME 5 (id: 614)



Lisez attentivement l'énoncé

Énoncé:

Comment peux-tu partager 318\$ entre 3 personnes de telle sorte que la deuxième reçoive 25\$ de plus que la première et que la troisième reçoive [] de moins que la deuxième?

Équation associée:

$$x + (x+25) + (x+25-35) = 318$$



Pensez-vous qu'il s'agit d'un problème: ☐ facile ☐ moyen ☐ difficile



Complétez-le en étudiant l'équation associée.



Lorsque vous aurez terminé [cliquez sur ce bouton](#)

La tâche du professeur consiste, pour sa part, à choisir un problème et une ou plusieurs équations associées puis à décider où se situeront les « trous », dans le libellé ou dans les équations, de même que le nombre de trous (1 ou 2). La figure ci-dessous illustre la façon dont l'enseignant insère un item dans l'environnement.

Bouchons les trous

Vous pouvez



Corriger votre énoncé et/ou l'expression associée et [mettre à jour](#) vos corrections.

Votre énoncé de problème:

Comment peux-tu partager 318\$ entre trois personnes de telle sorte que la deuxième reçoive 25\$ de plus que la première et que la troisième reçoive 35\$ de moins que la deuxième?

L'équation associée:

$$x + (x+25) + (x+25-35) = 318$$



Indiquer le premier trou de l'énoncé en copiant la partie de l'énoncé à supprimer et en la collant dans la boîte de texte ci-dessous.

1er trou 35\$

[Enregistrer le 1er trou](#)

Bien que cet environnement s'inspire du test de closure, le choix du retrait des éléments ne se fait pas au hasard. Il apparaît plus efficace, pour travailler le lien libellé / équation, de retirer des éléments informationnels (relations, inconnues) (Gagatsis 1982). Lorsque le trou est dans l'équation, il s'agit presque nécessairement d'éléments informationnels, l'équation ayant justement l'avantage d'avoir épuré de son contexte le libellé du problème et ainsi de le transformer en un énoncé calculable.

- Un type de tâches dans l'environnement *Bouchons les trous*

Résoudre un item « Bouchons » ne veut pas dire résoudre le problème de cet item. En effet, un item Bouchons est constitué d'un libellé de problème et d'une (ou plusieurs) équation qui représente le problème, l'une de ces deux composantes étant « trouée ». Résoudre un tel item consiste à boucher les trous pour assurer la correspondance entre le libellé et l'équation. Ce type de tâches (Chevallard, 1992, 1999) diffère grandement de la tâche habituelle qui demande de mettre en équations puis de résoudre les équations pour répondre au problème. Dans un item *Bouchons*, il n'est pas nécessaire de résoudre le problème, il suffit de boucher le trou. Ainsi, même si la question du problème est banale, la tâche de boucher le trou peut garder toute sa pertinence parce que c'est la représentation du problème qui est en jeu et non sa résolution. Le travail avec *Bouchons* oblige ainsi à travailler autrement la mise en équations. Il cible assez bien, semble-t-il, le lien de modélisation qui existe entre le libellé et l'équation correspondante tout en libérant du poids de la résolution de l'équation produite. On pourrait même aller jusqu'à enlever la question du problème, et l'item garderait tout son sens et son intérêt puisque l'équation modélise l'histoire du problème et ne se soucie guère de la question qu'il pose.

Afin de bien marquer ces distinctions, il est essentiel d'identifier les différents éléments d'un item *Bouchons*. Ainsi, un tel item est composé d'un problème et d'une ou plusieurs équations associées. Le problème est lui-même composé d'une histoire, le libellé du problème, et d'une question.

- Une technique spécifique à la tâche des items *Bouchons*

Le type de tâches en jeu dans l'environnement *Bouchons* appelle une technique de mise en correspondance terme à terme, spécifique au travail sur ces items. En effet, pour identifier ce qui a été retiré de l'énoncé ou de l'équation, les élèves effectuent souvent une

correspondance terme à terme entre les données de l'énoncé et celles de l'équation. Ils évitent ainsi le travail, plus coûteux, d'interprétation du lien entre le libellé et l'équation. Lorsqu'une donnée apparaît dans une seule des deux expressions, c'est alors elle qui doit permettre de boucher le trou. Une telle procédure peut, selon le cas, être tout à fait efficace bien qu'elle ne mette pas vraiment en jeu de connaissances algébriques.

PROBLÈME 5 (id: 614)



Lisez attentivement l'énoncé

Énoncé:

Comment peux-tu partager 318\$ entre 3 personnes de telle sorte que la deuxième reçoive 25\$ de plus que la première et que la troisième reçoive de moins que la deuxième?

Équation associée:

$$x + (x+25) + (x+25-35) = 318$$



Pensez-vous qu'il s'agit d'un problème: ☐ facile ☐ moyen ☐ difficile



Complétez-le en étudiant l'équation associée.



Lorsque vous aurez terminé [cliquez sur ce bouton](#)

La mise en œuvre de la technique de mise en correspondance permettra par exemple de compléter correctement et très facilement l'item ci-haut. En effet, puisque la seule donnée de l'équation qui n'apparaît pas dans le libellé du problème est 35, c'est celle qui devrait permettre de « boucher » le trou. Et, dans le problème en jeu, cette procédure conduit effectivement à la bonne réponse. Cette technique de base peut être efficace, comme dans l'exemple ci-dessus, toutefois elle présente peu d'intérêt puisqu'elle ne met pas en jeu de connaissances algébriques et soustrait l'élève au travail d'étude du lien entre le libellé et l'équation, en termes de modélisation.

Toutefois, le professeur, par les valeurs des variables didactiques qu'il choisira, pourra faire en sorte de déjouer ce type de procédure. Il pourra ainsi chercher à modifier la hiérarchie des stratégies de résolutions mises en œuvre par les élèves en forçant l'utilisation de stratégies plus évoluées ou plus riches, amenant ainsi éventuellement l'élève à reconsidérer le lien libellé / équation en termes de modélisation algébrique.

Les premiers aperçus de l'environnement que nous présentons visent à montrer comment, par le jeu sur quelques variables, il est possible de déstabiliser cette technique, de manière à faire entrer les élèves dans un travail plus algébrique pour l'étude du lien libellé / équation.

Premier aperçu: Dans une classe d'élèves forts de 2^e secondaire (13-14 ans)

Une expérimentation avec l'environnement *Bouchons les trous* a été effectuée en 2001-2002, auprès d'une classe d'élèves forts de 2^e secondaire (13-14 ans) à Montréal, dans le cadre d'un projet de recherche réalisé en collaboration avec G. Lemoyne et L. Coulange². Il s'agissait, entre autres, d'étudier les libertés et les contraintes inhérentes à l'utilisation de l'environnement, par quelques enseignants et leurs élèves, pour l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problème en algèbre.

Nous utiliserons des productions issues des observations réalisées dans le cadre de cette recherche pour donner un aperçu de quelques potentialités de l'environnement. Nous verrons ainsi comment le choix de certaines valeurs de variables permet d'enrichir la rétroaction du milieu, conduisant par là les élèves à invalider la technique de base de mise en correspondance spécifique à *Bouchons* pour entrer éventuellement dans un travail plus algébrique.

Trois valeurs de variables seront présentées : la correspondance complète entre les données du problème et des équations, la contradiction entre le contexte et la valeur suggérée par la technique de base et l'absence de correspondance entre les données du problème et celles de l'équation.

Bien entendu, même si les choix de l'enseignant visent à déstabiliser l'utilisation de la technique de base, cela ne garantit pas que tous les élèves seront sensibles à ces choix (René de Cotret, 1999). Ainsi, les rétroactions potentielles organisées par le professeur ne constituent-elles pas nécessairement des rétroactions pour les élèves.

² À ce sujet, voir : Coulange, L. & René de Cotret, S. (2004) et Lemoyne, G., Coulange, L. & René de Cotret, S. (2002).

- Correspondance complète entre les données du problème et de l'équation

Dans l'item *Bouchons les trous* suivant, l'utilisation de la technique de mise en correspondance ne permet pas de reconnaître une donnée « isolée », c'est-à-dire présente dans une seule des deux expressions. En effet, toutes les données numériques de l'équation trouvent leur correspondant dans le libellé du problème.

Bouchons les trous

PROBLÈME 3 (id: 137)



Lisez attentivement l'énoncé

Énoncé:

Linda dispose d'un certain nombre de rayons pour ranger ses livres. Si elle en met 7 par rayon il lui en reste 1 et si elle en met 6 par rayon il lui en reste 5. Combien de livres a-t-elle?

Équation associée:

$$7x + 1 = 6x + 5$$



Pensez-vous qu'il s'agit d'un problème: ☐ facile ☐ moyen ☐ difficile



Complétez-le en étudiant l'équation associée.



Lorsque vous aurez terminé [cliquez sur ce bouton](#)

Les élèves sont donc forcés de s'engager dans une étude plus fine du lien libellé / équation. Certains produiront une bonne réponse, d'autres pas. C'est le cas de l'élève suivant qui, se fiant semble-t-il surtout à l'histoire, s'est vraisemblablement dit que si on met plus de livres par rayon il peut manquer de livres, et si on en met moins, alors il reste des livres³. Cette interprétation montre une entrée dans l'étude des relations en jeu dans le problème, toutefois elle ne témoigne pas d'une prise en compte de l'équation.

Énoncé 137 (v1):

Linda dispose d'un certain nombre de rayons pour ranger ses livres. Si elle en met 7 par rayon il lui en reste 1 et si elle en met 6 par rayon il lui en restera 5. Combien de livres a-t-elle?

³ L'environnement *Bouchons les trous* enregistre à la fois les réponses des élèves et l'heure à laquelle elles ont été enregistrées par les élèves.

Réponse de l'élève: Linda dispose d'un certain nombre de rayons pour ranger ses livres. Si elle en met 7 par rayon il lui en **manque** 1 et si elle en met 6 par rayon il lui en **reste** 5. Combien de livres a-t-elle?

Équation associée:

$$7x + 1 = 6x + 5$$

Date / heure: 2002-02-27 10:14:15

Un autre élève, confronté au fait que toutes les données sont présentes à la fois dans le problème et l'équation, n'abandonne pas pour autant sa technique mais tente plutôt, semble-t-il, de l'adapter en mettant en correspondance les opérations du libellé avec celles de l'équation. En effet, puisque toutes les données *numériques* sont présentes tant dans le libellé que dans l'équation, l'élève a pu se rabattre sur le fait que les opérations, elles, ne trouvaient pas toutes leur correspondant et choisir de les prendre en compte pour combler le trou. Il a ainsi pu écrire « ajoute » dans chacun des trous du libellé en correspondance avec les opérations « + » des équations, dans une forme de traduction littérale. Pour cet élève, on peut penser que le coût d'un changement de procédure était plus grand que celui de « l'adaptation » de la technique de base dont il a en quelque sorte forcé l'utilisation.

Énoncé 137 (v1):

Linda dispose d'un certain nombre de rayons pour ranger ses livres. Si elle en met 7 par rayon il lui en reste 1 et si elle en met 6 par rayon il lui en restera 5. Combien de livres a-t-elle?

Réponse de l'élève:

Linda dispose d'un certain nombre de rayons pour ranger ses livres. Si elle en met 7 par rayon il lui en **ajoute** 1 et si elle en met 6 par rayon il lui en **ajoute** 5. Combien de livres a-t-elle?

Équation associée:

$$7x + 1 = 6x + 5$$

Date / heure: 2002-02-27 14:26:12

Avec ce problème, la technique de mise en correspondance est rendue caduque par le fait que toutes les données sont en correspondance entre le libellé et l'équation. Le trou

correspond à une opération implicite (reste). Notons que le fait d'avoir 2 trous est déjà une façon de déstabiliser cette technique puisqu'il y a alors à tout le moins deux possibilités.

- Le contexte invalide la donnée mise en évidence par la technique de correspondance

Bouchons les trous

Soit le problème suivant :

Regardons ce que les mêmes élèves forts de 2^e secondaire ont fait face à ce problème.

PROBLÈME 5 (id: 131)



Lisez attentivement l'énoncé

Énoncé:

4) Dans une basse-cour, il y a seulement des poules et des lapins. En tout il y a 15 têtes et pattes. Trouve le nombre de poules et celui de lapins.

Équations associées:

$$x + 2y = 21$$

$$x + y = 15$$



Pensez-vous qu'il s'agit d'un problème: ☐ facile ☐ moyen ☐ difficile



Complétez-le en étudiant l'équation associée.



Lorsque vous aurez terminé [cliquez sur ce bouton](#)

E1⁴. : *x*, c'est le nombre de pattes... Non, c'est des poules et des lapins, *x* et *y*, le nombre de têtes de poules et nombre de têtes de lapins, ça donne 15. Eh, il est [dur], celui-là ! (...) Ben... Dans une basse-cour, il y a seulement des poules et des lapins. 15 têtes et 21 pattes... ça peut juste être un nombre pair de pattes !

On peut assez assurément induire que le fait que l'élève E1 dise qu'il y a 21 pattes signifie qu'il a utilisé la technique de correspondance, puisque 21 est le seul nombre qui n'a pas de correspondant dans l'énoncé (outre le 2 qui, de toute évidence, ne peut faire l'affaire). Mais, l'élève invalidera cette proposition puisque « ça peut juste être un nombre pair de pattes. ». C'est la connaissance du contexte⁵ qui conduira cet élève à invalider la proposition initiale.

E1 : En tout il y a 15 têtes !

E2 : Ouais

E1 : Le *x* c'est le nombre de têtes. Et puis il y a deux fois plus de nombre de têtes que... euh... deux fois plus de nombres de pattes que de têtes... Donc 21, tu le divises...

Plus loin:

S : ça se pourrait-tu qu'il y ait 21 pattes...

E1 : Non ! Faut que ce soit un nombre pair... Les poules ont deux pattes puis les lapins en ont quatre.

À ce moment, les élèves semblent un peu exaspérés. Cet item a créé des remous dans la classe... Par la suite le chercheur intervient pour tenter de maintenir l'investissement des élèves dans la tâche et que se poursuive la négociation du contrat.

S : L'autre, ok... Si on voulait... Si je te demandais : es-tu capable de faire une équation qui représenterait le nombre total de pattes... de poules et de lapins.

E1 : Ben, je ferais mettons, $4x$ plus $2y$ égale...

S : Ok, c'est ça. Là, c'est ça nous autres, l'équation qu'on a...

⁴ E1 indique l'élève 1 du binôme, E2 l'élève 2 du même binôme et S une des chercheurs.

⁵ Soulignons que la connaissance du contexte est un élément important pour juger de l'adéquation du modèle au système : « On ne peut construire un modèle cognitif de complexité donnée d'un système que si l'on possède une information **qualitativement adéquate** et quantitativement suffisante du système » (Walliser 1977, p. 189, c'est nous qui soulignons).

E1 : Non, c'est x plus $2y$...

L'élève a fourni une expression correcte ($4x + 2y$), mais qui présente de manière inverse les inconnues par rapport à l'équation ($2x + 4y = 42$) qui a servi à produire celle proposée dans l'item *Bouchons* ($x + 2y = 21$). Le chercheur tente donc de lui faire voir cette inversion...

S : D'après toi, est-ce que $4x$ plus $2y$ est-ce que ... ça pourrait être $2x$ plus $4y$ égale ?

Plus loin (...)

E1 : Donc attends, ce serait le double de ça !

S : Ah... ça se pourrait-tu ça ?

E1 : Mh, mh... Le double de 21. 42 pattes !

L'élève en vient donc, par l'analyse du lien de modélisation équation / libellé, à trouver le bon nombre de pattes. Cette analyse est venue à la rescousse de la technique de base, laquelle a produit un résultat jugé aberrant à la lumière de la connaissance du contexte.

Ainsi, afin que la donnée isolée par la technique de mise en correspondance ne permette pas de combler correctement le trou, un « pas de transformation » a été introduit dans l'item. En effet, l'équation de base, $2x + 4y = 42$, a été transformée en une équation équivalente, $x + 2y = 21$, en divisant chacun des membres de l'équation par deux. Cette division constitue un « pas de transformation »⁶. De ce fait, la donnée isolée 21 ne correspond pas à la donnée manquante du libellé. Et c'est alors le contexte qui permet d'invalidiser cette donnée.

Le pas de transformation introduit dans l'item *Bouchons*, c'est-à-dire le passage de l'équation $2x + 4y = 42$ à l'équation transformée $x + 2y = 21$, combiné à la connaissance du contexte (un nombre pair de pattes), invalide la technique de base et entraîne ces élèves vers une autre étude de lien équation / libellé, non sans difficulté faut-il le dire. On arrive ainsi à faire en sorte de déjouer la technique de base de mise en correspondance pour solliciter une stratégie plus riche sur le plan des connaissances algébriques en jeu.

⁶ Nous considérons comme un « pas de transformation » le fait de proposer des équations qui ont subi des transformations par rapport aux équations du système de base, c'est-à-dire celles qui sont le plus près possible du libellé du problème, qui en donnent la traduction la plus « littérale » possible.

- Un élève nous déjoue...

Un élève ayant eu recours à la technique de mise en correspondance obtient lui aussi la donnée 21 mais, celle-ci ne lui apparaît en rien aberrante, puisqu'il l'interprète, à notre grande surprise et de manière tout à fait correcte, comme 21 paires de pattes !

- L'absence de correspondance entre les données du libellé et celles de l'équation

Dans l'exemple suivant, l'introduction de pas de transformation fait en sorte que très peu de données se trouvent en correspondance entre le libellé et l'équation. L'utilisation de la technique de mise en correspondance ne conduit donc, de ce fait, qu'à donner l'embarras du choix.

PROBLÈME 13 (Id: 138)



Lisez attentivement l'énoncé

Énoncé:

Dans une tirelire, il y a des pièces de 5¢, des pièces de 10¢ et des pièces de 25¢. Il y a deux 10¢ de plus qu'il y a de 25¢ et de 5¢ réunis et il y a deux fois plus de 5¢ qu'il y a de 25¢. Si la somme d'argent contenue dans la tirelire est 5,40\$, combien y a-t-il de pièces de 5¢ ?

Équation associée:

$$10x + \boxed{} + 30x + 20 = 540$$



Pensez-vous qu'il s'agit d'un problème: ☐ facile ☐ moyen ☐ difficile



Complétez-le en étudiant l'équation associée.



Lorsque vous aurez terminé [cliquez sur ce bouton](#)

Dans le problème de cet item, on retrouve les données suivantes : 5¢ ; 10¢ ; 25¢ ; deux 10¢ de plus ; deux fois plus et 5,40 \$. Dans l'équation, figurent les données : 10, 30, 20 et 540. Si le 540 et le 5,40 \$ peuvent assez évidemment correspondre, il n'est pas certain que le 10 corresponde à 10 ¢. Quant au 30 et au 20, ils semblent, de prime abord, ne correspondre à rien. Il apparaît donc de manière frappante, voire brutale, que la technique de mise en correspondance ne permet pas de compléter l'item. Les élèves devront donc vraiment chercher à interpréter comment l'équation proposée pourrait modéliser le problème posé. En fait, il semble ici qu'il soit plus difficile de boucher le trou que de poser l'équation ! Lors de l'expérimentation, les élèves pouvaient avoir accès à l'indice suivant: $(5 \times 2x) + ??? + 10 \times (x + 2x) + 20 = 540$, qui rend la technique de base un peu plus utile, mais ne garantit pas son succès.

Ces exemples illustrent de manière succincte comment le jeu des variables permet de déstabiliser la technique de base pour engager davantage dans une étude du lien de modélisation équation / libellé, étude que l'on cherche à cibler par l'environnement *Bouchons les trous*.

Un outil pertinent pour l'enseignement

Pour terminer l'aperçu de cette première expérimentation, laissons la parole à l'enseignant des élèves que nous avons observés. Selon cet enseignement, l'environnement constitue un outil pertinent pour l'enseignement de la mise en équations parce qu'il offre une des seules façons de faire des allers-retours entre le libellé et l'équation. *« C'est la seule façon peut-être d'essayer de passer du problème à l'équation, de l'équation au problème, du problème à l'équation... »*

De plus, cet enseignant anticipe que le travail avec *Bouchons* pourrait permettre aux élèves de développer une technique pour mettre en équation en se faisant eux-mêmes des problèmes à trous.

« Puis même quand on révise une équation qu'on a posée, je pense pas qu'on y aille morceaux par morceaux... On regarde plus en bloc (...) Ben peut-être quand on va leur demander de poser une équation, ils vont s'en... Ils vont dire, ben, j'ai un quart... Puis là, je sais pas quoi faire avec le double ici... Ben ce sera le trou dans mon équation. Je vais commencer par ce que je sais. »

Deuxième aperçu⁷ : Une nouvelle tâche proposée à des élèves en difficulté d'apprentissage: la composition d'items *Bouchons*

Les élèves présentant des difficultés d'apprentissage sont souvent perçus ou décrits comme se décourageant facilement, donnant une réponse rapide ou encore abandonnant rapidement la tâche et attendant alors que l'enseignant leur dise comment faire (Brousseau, 1984, 1980 ; Lemoyne, 1989 ; Perrin-Glorian, 1993). Bien que ces constatations puissent être justes, elles ne disent rien sur les causes ou les conditions favorisant de tels comportements.

⁷ Cette deuxième mise à l'essai a été réalisée dans le cadre du mémoire de maîtrise d'Annie Fiola, voir Fiola, 2005 et René de Cotret & Fiola, (sous presse).

Ainsi, diverses études (Mercier, 1995, Favre, 1997, 1999, Giroux & René de Cotret, 2001) montrent que parfois, face à des groupes faibles, les enseignants cherchent à orienter les élèves vers la bonne solution ou à diminuer le défi. Pour cela, ils pourront par exemple guider les élèves pas à pas vers la solution du problème par une série de questions, ou encore leur fournir rapidement, voire d'entrée de jeu, les outils nécessaires et suffisants à l'accomplissement de la tâche ou à la résolution du problème. Ce type d'interventions a pour objectif, entre autres, d'éviter à l'élève d'être confronté de nouveau à l'échec et de le conduire à une réussite. Toutefois, ces interventions peuvent avoir pour effet d'enlever tout défi à l'élève puisqu'il n'a qu'à suivre le chemin tracé par l'enseignant ou encore à utiliser la procédure ou l'algorithme fourni. Il peut en résulter un désengagement de la part de l'élève. Ainsi, là où on souhaitait motiver et encourager l'élève par une réussite en lui fournissant les outils de celle-ci, il peut arriver qu'on le désengage, ou le démobilise en le privant du défi de la confrontation avec le problème, confrontation par laquelle se construira le sens des savoirs en jeu.

Dans le cadre d'une recherche de maîtrise (Fiola, 2005, René de Cotret & Fiola, sous presse) nous avons choisi de proposer un défi de taille à une classe d'élèves en difficulté d'apprentissage : celui de se transformer, l'espace d'un cours, en enseignant de mathématiques. Et le cours portait sur la mise en équations en algèbre, sujet où les difficultés sont nombreuses. C'est par l'entremise de l'environnement informatisé *Bouchons les trous* que les élèves devaient travailler la mise en équations en algèbre. Toutefois, dans cette expérimentation, la tâche principale des élèves n'était pas de compléter des items *Bouchons*, mais plutôt, comme enseignant, d'en concevoir trois, un facile, un moyen et un difficile. Ils envoyaient par la suite leurs items à d'autres élèves de la classe qui devaient les résoudre. Nous présentons un aperçu de ce type de tâches à travers quelques résultats issus de cette expérimentation.

La classe ayant participé à cette étude comprend vingt élèves de deuxième secondaire (13-14 ans) en difficulté d'apprentissage (cheminement particulier⁸). L'expérimentation s'est déroulée sur trois périodes de cours de 75 minutes.

⁸ Les élèves qui présentent un retard d'un à deux ans en langue maternelle et en mathématiques sont considérés en difficulté d'apprentissage. Ils bénéficient d'un cheminement dans lequel certaines matières sont

Lors de la première période, les élèves ont pu se familiariser avec le dispositif informatique en complétant neuf items *Bouchons* et en attribuant à chacun d'eux un degré de difficulté (facile, moyen ou difficile).

C'est à la deuxième période que la tâche de composition d'items s'est amorcée. Les élèves, en binôme, ont été invités à jouer le rôle d'enseignant en procédant, cette fois-ci, à la création de trois items *Bouchons*, un facile, un moyen et un difficile. Dans la modalité de composition, les élèves doivent, tout comme l'enseignant, rédiger le libellé, la ou les équations, puis choisir les trous.

Bouchons les trous

Enregistrez l'énoncé du problème et l'équation associée



Commencez par rédiger l'énoncé de votre problème

ex: Marie et Julie ont ensemble 15 billes. Marie a 3 billes de plus que Julie. Combien de billes ont-elles chacune?



et les équations associées. * Si vous n'utilisez qu'une seule équation, laissez les autres champs vides.

ex: $x + (x+3) = 15$

1ère équation:	
2e équation:	
3e équation:	
4e équation:	

Continuez

Afin d'outiller la composition des items, les élèves avaient accès à quelques exemples de libellés et d'équations sans qu'ils ne soient toutefois appariés.

C'est à la troisième et dernière période qu'ont eu lieu les échanges des problèmes fabriqués entre les binômes. Chaque binôme devait se prononcer sur le degré de difficulté des items créés par leur équipe-professeur associée.

Notre analyse se limitera ici à la deuxième période d'expérimentation, celle où les élèves ont composé des items *Bouchons*. Elle portera principalement sur les techniques utilisées

retirées de l'horaire afin de pouvoir consacrer un plus grand nombre de périodes au français et aux mathématiques.

par les élèves pour faire varier le degré de difficulté de leurs items renvoyant par là, en quelque sorte, aux variables didactiques sur lesquelles ils sont intervenus.

- Quelques techniques utilisées par les élèves pour la tâche de composition d'items

L'analyse des éléments que les élèves ont pris en compte pour faire varier le degré de difficulté montre qu'ils ont développé des techniques que nous pourrions analyser en termes de jeu sur les variables suivantes : la nature du trou, la structure connectée ou déconnectée du problème et l'inclusion d'un pas de transformation. Voyons un exemple de chacun de ces cas.

- *Complexifier la nature du trou*

Pour concevoir son item facile, l'équipe D a choisi de retirer de l'équation une simple donnée, le 13.

Énoncé 108 (Enregistré par Mélissa MaximeB):

Mélissa se dispute pour des billes, elle en a 13 en tout avec sa sœur marjo, Mélissa en a 7 de plus que Marjo. Combien de billes ont-elles chacune ?

L'équation associée:

$$x + (x+7) = \boxed{13}$$

Commentaire: *Ceci est très Niaisux*

Équipe D, item facile

Puis, pour son item moyen elle retire du libellé en plus d'une donnée, 700, l'opérateur « de plus ». Cette équipe avait d'abord choisi de retirer le mot « ensemble », puis elle a changé pour « 700 », puis encore pour « 700 » et « de plus ». Il semble donc que ces changements témoignent du fait que les élèves voient peu à peu les éléments et les relations à prendre en compte pour faire des trous augmentant le degré de difficulté. Ils portent leur attention sur le lien équation / libellé pour les guider dans le choix des trous et retirent des éléments informationnels.

Énoncé 103 (Enregistré par Mélissa MaximeB):

Stephane et Daniel on ensemble 4500 pieces de 1¢. Daniel a 700 1¢
de plus que stéphane. Combien de billes ont-ils chacun?

L'équation associée:

$$x + (x + 700) = 4500$$

Équipe D, item moyen

Il est intéressant de remarquer que le libellé du problème porte sur des pièces de 1 ¢ et que la question, elle, porte sur un nombre de billes. Un tel type de glissement entre les éléments en jeu dans le libellé et dans la question du problème est survenu à quelques reprises et pourrait indiquer que les élèves sont surtout concentrés sur les relations en jeu. Ils savent bien que, d'une certaine façon, le fait qu'il s'agisse de billes ou de cents ne change rien à l'affaire.

- Modifier la structure du problème : connecté ou déconnecté

Bednarz et al. (1992, 1994) ont développé une caractérisation des problèmes selon le type de relations en jeu. Cette catégorisation conduit à représenter les problèmes par des schémas connectés ou déconnectés. Les problèmes suivants, accompagnés de leur schéma respectif, mettent bien en évidence cette catégorisation.

1- En récompense de son travail, Bernard a reçu le double du montant d'Alain et Claude a reçu 2 \$ de plus que Bernard. Si Alain a obtenu 90 \$, combien d'argent ont-ils reçu ensemble ?

2- Daniel, Émilie et François ont ensemble 452 billes. Émilie en a le double de Daniel et François en a 2 de plus qu'Émilie. Combien de billes ont-ils chacun?

Schéma du problème 1 :
Problème connecté

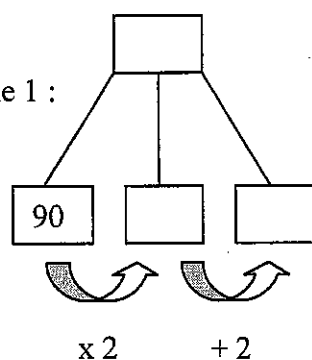
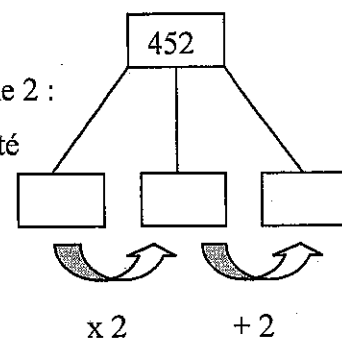


Schéma du problème 2 :
Problème déconnecté



Il est facile de résoudre le premier problème en partant simplement de la donnée « 90 » et en effectuant les unes à la suite des autres les opérations prescrites par les relations du problème (90×2 , puis ce résultat $+ 2$, puis la somme des trois nombres) comme en témoigne l'équation associée suivante : $90 + (90 \times 2) + [(90 \times 2) + 2] = x$. Ce problème est dit connecté. On peut partir d'une des données fournies pour effectuer les unes après les autres les opérations afin d'aboutir au résultat. Avec le problème 2, une telle façon de procéder n'est plus possible. Ce problème est alors dit déconnecté et il demandera d'opérer sur une donnée inconnue tel que l'indique l'équation associée : $x + 2x + (2x + 2) = 452$. En

général, les problèmes déconnectés font davantage appel à un raisonnement de nature algébrique et les connectés à un raisonnement de nature arithmétique. Ainsi, un problème déconnecté risque davantage de conduire à une équation où des opérations devront être effectuées sur l'inconnue, alors qu'à un problème connecté correspondra plus probablement une équation pour laquelle l'inconnue apparaît seulement au résultat.

Bien que les élèves ne pensent certainement pas en ces termes, dans certains cas, on peut observer qu'ils proposent un problème connecté pour leur item facile et un déconnecté pour le difficile. C'est le cas par exemple de l'équipe A qui a proposé l'item facile suivant.

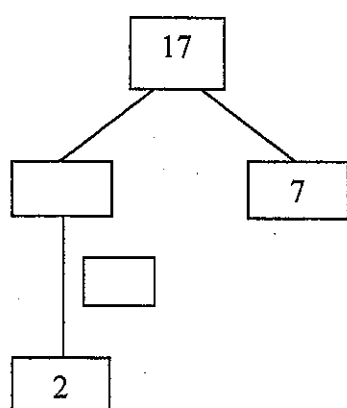
Énoncé 117 (Enregistré par Charles Gabriel):

Un petit nerd va se chercher des livres à la bibliothèque, il se prend $\boxed{2}$ série de roman et 7 BD. En tout il prend 17 livres. Combien a-t-il de roman?

Les équations associées:

$$2x+7=17$$

Équipe A, item facile



Comme l'indique le schéma ci-contre, le problème de cet item est connecté. Il est effectivement possible, partant de 17, de soustraire 7 pour obtenir 10. Puis, en faisant ensuite 10 divisé par 2 on obtient le résultat manquant, 5. Il est à noter toutefois que 5 (qui représente le nombre de romans par série) n'est pas le résultat recherché dans le problème de l'item. La question demande simplement combien y a-t-il de roman, ce qui se calcule très facilement en retirant les 7 BD du total de livres.

Mais, bien que la question soit plutôt banale, l'item demeure intéressant puisque ce n'est pas la question qui est modélisée par l'équation, mais bien « l'histoire » relatée par le libellé. Pour son item difficile, cette équipe a conçu un problème déconnecté.

Énoncé 128 (Enregistré par Charles Gabriel):

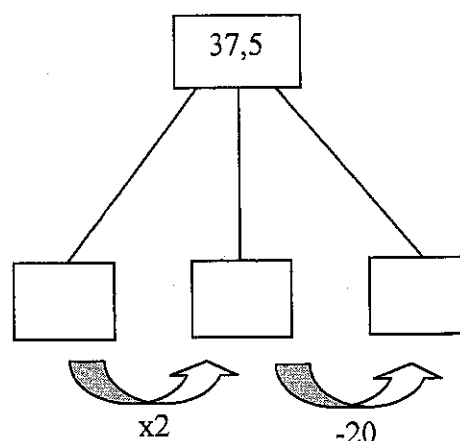
Ga, Bri et El reçoit une allocation chaque semaine selon leur travail scolaire. Bri reçoit le double de Ga et El reçoit 20\$ de moins que Bri. combien reçoit Ga?

Les équations associées:

$$h+2h+(2h-20)=37,5$$

Équipe A, item difficile

Ce problème ne peut être résolu par une simple succession d'opérations à partir d'une des données du problème, il est donc déconnecté. Les élèves ont produit une bonne équation associée $h + 2h + (2h - 20) = 37,5$ plus complexe que celle de l'item facile et, rappelons qu'il s'agit d'élèves en difficulté qui ont normalement deux ans de retard sur le cheminement normal des autres élèves de leur âge. Soulignons qu'ils ont omis, dans le libellé, d'indiquer que les trois enfants avaient ensemble 37,50 \$, ce qui peut toutefois se déduire à partir de l'équation.



- Un pas de transformation

Une troisième technique observée pour complexifier les items est l'introduction d'un pas de transformation. Bien qu'une seule équipe, l'équipe F, ait eu recours à une telle technique, nous avons tout de même choisi de présenter leurs productions. Les élèves de cette équipe ont travaillé de façon acharnée à la conception de cet item avec la ferme intention de le faire très difficile comme en témoigne leur commentaire : « *Vraiment difficile hahahaha* ». Voici leur item.

Énoncé 123 (Enregistré par Maxime J Jonathan):

Dans une ferme nous avons des poules et des vaches. nous avons 120 pattes en tout. le nombre de pattes de poules est égale au 11eme des pattes de vaches fois 4. combien a t-il de poules et de vaches en tout dans cette ferme???

L'équation associée:

$$a: 11 \times \boxed{4} = 32$$

Commentaire: *vraiment difficile hahahaha*

Les équations de base traduisant ce problème sont les suivantes :

$$x + y = 120$$

$$x = y/11 \times 4$$

Toutefois, l'équation associée proposée dans l'item est différente puisqu'elle résulte de pas de transformation. Pour concevoir leur item, les élèves ont d'abord posé un problème qu'ils ont résolu puis, partant des résultats obtenus (88 et 32), ils en ont modifié le libellé et ont

rédigé une équation qui ne correspond pas directement à l'énoncé du problème. Pour illustrer un peu leur cheminement, voyons un extrait de la discussion qu'ils ont eue lors de la conception de l'item.

213- F1 : Ouais tcheck 32 divisé par 4 ça donne 8 mais c'est de la façon que je le dis... de la façon qu'on doit le dire ... le nombre de poules plus le nombre plus petit...le nombre de pattes de poules...

214- F2 : S'il y a 16 poules...

215- F1 : Le nombre de pattes de poules est égal ... est égal au 11^e ...

216- F2 : Au 11^e. Ha ! Ha !

217- F1 : 88 divisé par ... Le nombre de pattes de poules est égal au 11^e des pattes de vaches fois 4.

218- F2 : Ha ! Ha ! Ha !

219- F1 : Ha ! Ha ! Ha ! On l'a man...

220- F2 : Ha ! Ha ! Ha !

221- F1 : Le nombre de pattes de poules.

222- F2 : Le nombre de pattes de poules.

223- F1 : Est égal...est égal...

224- F2 : Ha ! Ha ! Ha !

225- F1 : Est égal au 11^e des pattes de vaches... comment ça s'écrit 11^e ? Attends ... le nombre de pattes de poules est égal au 11^e des pattes de vaches... au 11^e des pattes de vaches...multiplié par 4.

226- F1 : Yo, on a trouvé le problème le plus difficile au monde !

Les élèves de cette équipe interviennent sur des variables tout à fait pertinentes pour modifier le degré de difficulté des items qu'ils composent ou, à tout le moins, celui des problèmes inclus dans leurs items. Ainsi, bien que leur problème soit difficile, l'item produit par ces élèves s'avère plutôt facile à résoudre avec la technique de mise en correspondance. L'analyse a priori des items *Bouchons* est difficile à faire parce qu'il faut arriver à considérer l'item dans son ensemble et non seulement le problème qu'il contient. Ces quelques analyses conduisent à penser que les élèves ont des connaissances sur les aspects sensibles de la mise en équations et ils arrivent bien à les mettre en scène pour leurs collègues. La composition d'items *Bouchons* les a amenés à mettre en œuvre des

techniques qui travaillent le lien entre l'équation et le libellé pour produire ces items et, souvent aussi, pour les résoudre.

- Deux cas surprenants...

Parmi les items produits par les élèves de cette classe de cheminement particulier, deux se démarquent. Un premier par la simplicité, voire la banalité, du problème qu'il présente, sans pour autant que l'item, lui, ne soit banal et, un autre, par la complexité de l'équation produite pour des élèves de ce niveau scolaire et de surcroît en difficulté.

- *La couleur du cheval blanc de Napoléon...*

Énoncé 98 (Enregistré par Yannick Julio):

Martin et Joe collectionnent des billes. Si Martin a 5 fois plus de billes que Joe et leur total est de 130 billes, combien ont-ils de billes ensemble?

L'équation associée:

$$x + 5x = 130$$

Équipe B, item facile

Dans cet item, le problème demande en quelque sorte la couleur du cheval blanc de Napoléon, puisque la réponse à la question est incluse dans le libellé du problème. Toutefois, on peut considérer qu'il s'agit d'un item tout à fait pertinent, la tâche étant de compléter l'item de manière à ce que l'équation représente bien le libellé du problème et non de répondre à la question du problème de l'item.

- *Une équation à deux inconnues !*

Énoncé 110 (Enregistré par Charles Gabriel):

À un magasin d'article d'ordinateur, on a reçu une commande de 3 boîtes de clavier, 2 boîtes d'écran, une boîte de 9 souris. S'il y a 53 objets au total, combien a-t-il de claviers et d'écrans par boîtes?

Les équations associées:

$$2a + 3b + 9 = 53$$

Commentaire: moyen

Indice: 3 boîtes de clavier

Équipe A, item moyen

L'équipe A a produit une équation à deux inconnues qui traduit bien le problème, et ce type d'équations, bien que possible en deuxième secondaire, n'est traité ni dans les manuels ni

dans les programmes⁹. Il n'y a toutefois pas de problème à poser une équation à plusieurs inconnues, qui ici conduit même à plusieurs solutions, bien qu'en principe les élèves n'aient jamais travaillé cela, dès lors que la résolution n'est pas demandée. Cette particularité de l'environnement permet un travail que la résolution de problème ne permettrait pas.

-Un outil pertinent pour l'apprentissage

La composition d'items *Bouchons* semble avoir permis aux élèves de mettre en œuvre des connaissances utiles au travail de mise en équations et de travailler le lien équation / libellé comme en témoigne les techniques développées. Ce travail apparaît pertinent pour l'apprentissage de la résolution de problèmes écrits tel que l'illustre le témoignage suivant, recueilli auprès d'une élève de la classe de cheminement particulier.

INTERVIEWEUR: *Je veux juste savoir si toi, ça c'est bien personnel, est-ce que tu penses que le fait d'avoir fait ces problèmes-là ça pourrait t'aider par exemple dans ton examen de la semaine prochaine ?*

ÉLÈVE : *Ah! C'est sûr parce que je sais plus comment... moi j'ai fait un problème, je sais comment on fait un problème, comme à cette heure je sais comment on fait un problème. Fait que quand je vais voir le problème je vais pouvoir savoir par où commencer puis comment le déchiffrer, comme la formule mettons.*

Parce qu'elle a composé des items *Bouchons*, cette élève sent qu'elle pourra mieux comprendre comment les problèmes qu'on lui pose sont construits, elle pense qu'elle pourra les décomposer et comprendre comment ils ont été constitués.

⁹ Une telle modélisation à deux inconnues peut parfois être plus facile qu'avec une seule lorsqu'elle se rapproche davantage d'une traduction directe du libellé et, en conséquence, évite un travail de substitution implicite que peut exiger la rédaction d'une équation à une seule inconnue (Pichette, 2006).

Conclusion

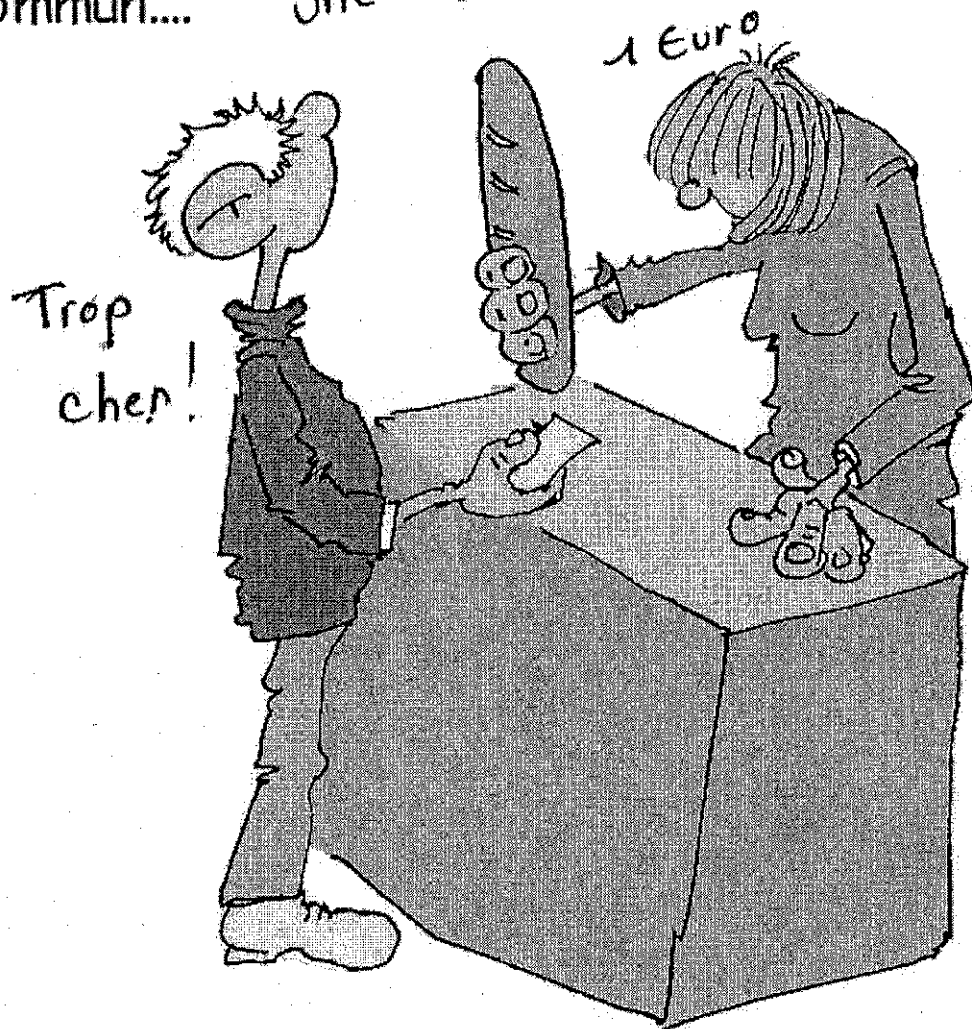
À l'issue de ces diverses expérimentations avec l'environnement Bouchons il est possible de conclure que cet environnement est un outil pour l'enseignement et l'apprentissage qui permet de travailler le lien de modélisation équation / libellé. Il répond ainsi à un besoin d'outil pour l'enseignement de la mise en équations. Il est aussi actuellement utilisé¹⁰ pour travailler le passage arithmétique / algèbre notamment par l'introduction d'égalités conditionnelles qui se transformeront peu à peu, au fil des problèmes, en équations.

L'intérêt que l'environnement présente pour l'enseignement l'a en quelque sorte détourné de sa fonction première, celle de l'observation des connaissances en jeu dans la validation des équations lors de la mise en équations de problèmes écrits. Ce travail reste donc à faire.

¹⁰ Il s'agit d'une expérimentation menée en 2006 dans deux collèges de Marseille en collaboration avec Alain Mercier, Marie-Christine de Redon et Karine Million.

Esquisse d'une didactique
du sens
commun....

une baguette



Sens commun
Intuitif et immédiat
lié à l'action
développé par la culture

Une bande annonce :

Esquisse d'une didactique du sens commun¹¹

Cette bande annonce, contrairement à l'usage, ne présente pas les meilleurs extraits d'un film qui sera « prochainement sur nos écrans ». La raison en est fort simple, le tournage n'est pas commencé et le scénario subit encore quelques modifications ! Elle décrit, plus simplement, deux projets de recherche sur un sujet qui en est à ses premiers balbutiements, la didactique du sens commun. C'est donc une étude exploratoire et en chantier qui est soumise à la communauté, en toute humilité.

Le champ du didactique s'intéresse à la transmission des savoirs disciplinaires. Nous voulons étendre ce champ pour y étudier, au-delà de l'enseignement et l'apprentissage de savoirs, leur utilisation citoyenne et identifier ce qui y contribue ou, au contraire, l'inhibe. On pourrait poser le problème en termes de transposition didactique (Chevallard 1991) laquelle étudie les différentes transformations de savoir, depuis le savoir savant jusqu'au savoir appris (Bosch, Chevallard & Gascon, 2005). Nous souhaitons en quelque sorte poursuivre l'étude jusqu'au savoir utilisé, non seulement en contexte scolaire, mais aussi en contexte quotidien. Car, l'enseignement ne vise-t-il pas à former des citoyens autonomes et responsables et non seulement des élèves savants (MEQ 2004). Ainsi, *l'utilisation citoyenne* des savoirs appris pourrait-elle aussi concerner le didactique.

L'étude exploratoire que nous voulons mener se situe ainsi dans le sillon des recherches sur l'utilisation des savoirs dans des situations non seulement a-didactiques, mais aussi non didactiques, notamment des situations quotidiennes. Il semble que souvent les savoirs mis en œuvre dans les situations du quotidien ne soient pas les savoirs appris en classe, mais les savoirs de sens commun : des savoirs immédiats et intuitifs, des *prêts-à-penser*. On pourrait certes tenter de revoir l'enseignement, de manière à ce que les savoirs appris soient plus versatiles dans leur mise en œuvre non didactique ou quotidienne. Notre proposition est

¹¹ Cette recherche a été développée avec Réal Larose, département de didactique, Université de Montréal.

autre, nous voulons tenter d'enseigner au sens commun à consulter le savoir scolaire appris. C'est donc en termes de sens commun que nous avons choisi de poser le problème.

1. Le sens commun

Plusieurs chercheurs en sciences sociales ont travaillé à définir le sens commun. La définition suivante regroupe un ensemble d'éléments assez consensuels : « ... le « *sens commun* » est un savoir intuitif et immédiat sur ce qui est raisonnable de faire, un savoir qui est culturellement acquis au cours de l'éducation ou de la pratique quotidienne. » (Gueorguieva, 2002, p.1). Voyons rapidement quelques caractéristiques de cette définition.

Le sens commun est **un savoir**. À cet égard, dans sa description d'un modèle ordinaire du sens commun, Gonseth (1993) souligne que le sens commun est un ensemble d'énoncés disponibles à un lieu et à une époque donnés. De même, que ce soit en ethnométhodologie (Schmidt 1990) ou en sociologie (Jodelet 2003, Moscovici 2003), le sens commun est décrit comme une connaissance ou un savoir en œuvre dans l'action quotidienne.

Le sens commun est un savoir **intuitif et immédiat**. Gonseth (1993) le caractérise par le fait d'être nourri de recettes, de « prêts-à-penser » qu'il compare à des proverbes. Ces *prêts-à-penser* s'adaptent au contexte et peuvent ainsi facilement être contradictoires. Ce caractère dichotomique est aussi un attribut du sens commun. Dans telle situation, on dira que « les contraires s'attirent » et, dans une autre, on référera plutôt au fait que « qui se ressemble s'assemble ».

Le savoir de sens commun permet d'agir rapidement, il ne s'encombre pas de la lenteur d'une rationalité (Berthoz, 2004), il est **lié à l'action**, plutôt qu'à la réflexion, même si, parfois, on parlera de raisonnement de sens commun. Ce savoir porte sur ce qui est raisonnable de faire, tel un ensemble de prescriptions pour la conduite au quotidien. Geertz (1983) souligne le caractère pratique du sens commun.

Le sens commun se développe par la **culture** et il lui est relatif, il s'agit d'un ensemble de représentations sociales. Son processus d'acquisition se confond avec celui de la socialisation (Sylvestre 2004). Pour Jodelet (2003) la représentation sociale : « ... *est une forme de connaissance socialement élaborée et partagée, ayant une visée pratique et concourant à la construction d'une réalité commune à un ensemble social.* » (p. 53). Cette forme de connaissance, ajoute-t-elle, est également désignée comme « savoir de sens commun ».

« ... le sens commun pratique persiste toujours sous le savoir objectif – pour le savant aussi, le soleil se lève et se couche... » (Guenancia et Sylvestre 2004, p.6). On peut penser que c'est simplement le côté commode de cette assertion de sens commun (le soleil se lève et se couche) qui fait en sorte que le savant l'utilisera en priorité sur son savoir scientifique (il sait bien que c'est la terre qui tourne sur elle-même). Soit ! Mais il arrive aussi que, dans certains cas, des connaissances apprises, qui seraient pourtant utiles à un geste réfléchi, ne soient pas sollicitées et que ce soient celles de sens commun, parfois moins pertinentes, voire fausses ou douteuses, qui soient mobilisées pour l'action. Ainsi, il semble que le savoir de sens commun soit souvent le régisseur de nos actions quotidiennes. Dans certains cas, ce savoir s'avère tout à fait pertinent pour l'action engagée. (Au cours de son évolution, le répertoire de savoirs de sens commun incorpore d'ailleurs des éléments du corpus de savoirs savants. Il est, par exemple, maintenant de sens commun de considérer que la terre est ronde.) Mais, dans d'autres cas, il conduit à des conclusions erronées comme l'illustre l'exemple suivant.

- Sens commun VS savoir scolaire

Pour attirer la clientèle, un marchand offre un rabais de 20% sur toute sa marchandise. Si la taxe est de 15%, est-il plus avantageux pour vous que celle-ci soit appliquée avant ou après le rabais? Nous avons soumis ce problème à 88 élèves québécois du secondaire et du collégial âgés de 14 à 18 ans. Parmi eux, 80 élèves ont donné une mauvaise réponse (avant ou après, alors que cela ne fait pas de différence) dont 55 en précisant, à notre demande, qu'ils étaient certains de l'exactitude de leur réponse. Une fois la solution donnée, les élèves s'y sont ralliés assez facilement, après un certain étonnement, tout de même, faut-il le mentionner. On peut se demander pourquoi ils n'ont pas utilisé les savoirs dont ils disposaient et qui les auraient conduits facilement à la bonne réponse. D'autant plus qu'un seul exemple aurait suffi à invalider les deux mauvaises réponses.

Comme d'autres (Bronner 2003, Kahneman & Tversky 1972, Legardez 2004, Trésarrieu 2001, Viennot 1996,), nous avons constaté que l'utilisation tout à fait adéquate d'un savoir dans une situation donnée (didactique ou ciblée) ne garantit pas qu'on le mobilisera en temps opportun dans une autre situation, notamment non didactique. *« Or, on constate que des savoirs scolaires sont bien enseignés et appris, mais qu'ils restent souvent des savoirs pour l'école et qu'ils sont peu « exportés » vers les savoirs sociaux « citoyens ». Il semble que ces deux genres de savoirs appartiennent à deux mondes qui coexistent sans que des savoirs scolaires interfèrent rapidement et directement avec les savoirs du jeune citoyen »* (Legardez, 2004, p. 660). Ainsi, bien que l'enseignement cherche à ce que les savoirs scolaires que les élèves apprennent puissent être exportés dans leur action quotidienne, il n'y parvient pas toujours, comme le conclut Legardez.

Face à cette conclusion, nous proposons d'inverser le point de vue, de prendre l'autre bout de la lorgnette, en demandant aux savoirs du citoyen de partir à la recherche de savoirs scolaires. En d'autres termes, nous cherchons un moyen de faire en sorte que ce soit le sens commun qui « importe » les savoirs scolaires appris. Le problème « revisité » pourrait s'énoncer comme suit : comment faire en sorte que, dans le cours de leur action citoyenne (de sens commun), les élèves consultent leur répertoire de savoirs scolaires ?

C'est dans le cadre de l'étude de cette question que nous avons développé deux projets de recherche. Nous pensons qu'il est possible « d'enseigner » au sens commun à freiner son action pour éventuellement consulter les savoirs scientifiques appris. Un tel enseignement aurait pour but, en quelque sorte, de munir le sens commun d'une « clochette de vigilance » que le sujet pourrait faire résonner à la porte de son savoir scientifique. Plus spécifiquement, nous voulons, dans un premier projet, évaluer l'impact et la pertinence d'une stratégie « socio-didactique » visant l'introduction d'un réflexe de vigilance dans le sens commun. Nous voulons, de plus, développer des outils pour documenter la dynamique entre les savoirs de sens commun et les savoirs scolaires appris. Il s'agit du second projet que nous décrirons.

2. Une stratégie pour introduire un réflexe de vigilance dans le sens commun.

Ce premier projet¹² vise deux buts : un but *utopique* qui est de faire en sorte que le sens commun consulte l'esprit scientifique, qu'il importe le savoir scolaire appris, et un but *pratique*, qui serait que la personne, dans son rôle de citoyen, se munisse d'une « clochette de vigilance », qu'elle introduise un doute, une hésitation, par rapport à la validité de son action. En d'autres termes, nous voulons développer une stratégie pour entraîner le sens commun à s'arrêter rapidement.

Nous ne pouvons évidemment pas dénaturer le sens commun, il est un savoir d'action, pratique, immédiat, instinctif. La stratégie devra prendre en compte ces caractéristiques. Serait-il possible que le sens commun ait pour action immédiate de s'arrêter rapidement, de suspendre son jugement ?

- Le programme d'entraînement proposé :

Nous voulons introduire un nouveau *prêt-à-penser* dans le répertoire de sens commun des élèves : « Je peux être victime d'une illusion cognitive ». À terme, nous souhaitons que ce *prêt-à-penser* conduise les élèves à se munir d'une « clochette de vigilance », d'un détecteur d'illusion cognitive (Piatelli-Palmarini, 1995, Bronner, 2003). Comme nous voulons nous adresser au sens commun pour lui enseigner un savoir, notre stratégie aura recours à deux leviers : un levier didactique pour l'enseignement d'un savoir et un levier « social » pour tenter d'inscrire ce savoir dans le répertoire des savoirs de sens commun.

Quatre présupposés sous-tendent notre recherche : 1) Les savoirs scolaires visés sont effectivement appris et sus par les sujets étudiés. Pour assurer autant que possible cette condition, nous avons choisi de restreindre l'étude à quelques savoirs mathématiques

¹² Ce projet, en collaboration avec Réal Larose, Université de Montréal, bénéficie d'une subvention du CRSH-Canada. Pour un compte-rendu d'une première phase de cette recherche, le lecteur pourra se référer à René de Cotret & Larose, 2006.

enseignés dans les premières années de la scolarité obligatoire. 2) Il est possible de mettre en relation le savoir scolaire et le savoir de sens commun, de penser à une importation. 3) S'arrêter peut conduire à une réflexion. 4) Le répertoire de sens commun peut évoluer, comme en témoigne, par exemple, l'acception maintenant assez généralisée d'un système héliocentrique.

- De la prise de conscience du piège des illusions cognitives...

La stratégie didactique que nous proposons vise l'apprentissage d'un premier savoir, l'existence d'illusions cognitives puis, la prise de conscience que « je » suis victime de ces illusions et, enfin, qu'il pourrait en être autrement. À terme, nous espérons que cela conduise au développement d'une attitude de vigilance au sein de la communauté étudiée.

Pour réaliser ces apprentissages, nous avons prévu de tendre des pièges au sens commun, c'est-à-dire de soumettre des problèmes qui déclenchent des mauvaises réponses jugées bonnes avec certitude¹³ et, pour lesquels, les sujets ont par ailleurs les connaissances qui leur auraient permis de répondre correctement. En présentant le raisonnement juste nous espérons déclencher chez les sujets une prise de conscience du fait qu'ils sont victimes d'illusions cognitives. Et il faudra un levier social pour faire en sorte que cette prise de conscience collective se constitue en savoir de sens commun.

- ... à l'acquisition d'un nouveau savoir de sens commun

Il faudra profiter de cette prise de conscience collective pour fournir aux élèves les moyens de transformer cette expérience en savoir de sens commun. Le fait de proposer le questionnaire à toute une école secondaire en début d'année scolaire devrait notamment concourir à provoquer cet effet collectif. Pour nourrir davantage le processus d'inscription dans le sens commun, nous proposerons aux élèves de repérer des illusions cognitives dans leur entourage, qu'elles soient effectives ou potentielles. Si une telle vigilance face aux illusions cognitives arrive à devenir un projet de toute l'école, alors les mécanismes de pression sociale positive et de facilitation sociale (Zajonc, 1965) devraient pouvoir jouer

¹³ Précisons que, dans le questionnaire, nous intercalons des leurres parmi les pièges, c'est-à-dire des problèmes qui devraient facilement être résolus correctement et qui entraînent la certitude. Le but est de repérer si certains sujets en viennent à inscrire de manière systématique qu'ils doutent de leur réponse, peu importe le problème.

leur rôle dans les apprentissages de sens commun visés. Car, tel que le dit Sylvestre : « *On peut ainsi considérer que le processus d'apprentissage et de transmission du sens commun se confond avec celui de la socialisation, c'est-à-dire avec l'intégration progressive des individus à une collectivité, à ses croyances, à ses règles (...)* » (Sylvestre, 2004p. 130).

Vers la fin de l'année scolaire, nous demanderons aux élèves de répondre à un 2^e questionnaire constitué de pièges et de leurres. Pour évaluer l'impact de la stratégie, nous comparerons, pour chacun des élèves, ses taux de méprise grave (mauvaise réponse avec certitude de sa justesse) au premier et au second questionnaire ; une baisse étant un indice d'un réflexe de vigilance.

3. Étude de la dynamique entre les savoirs de sens commun et les savoirs scolaires appris¹⁴

Ce second projet vise à outiller l'étude de la dynamique entre les savoirs de sens communs et les savoirs scolaires appris. Plusieurs recherches visant à prendre en compte les connaissances de sens commun dans l'apprentissage du savoir savant ont été menées, notamment en didactique des mathématiques et des sciences. Souvent, elles se sont consacrées à l'étude des conceptions inadéquates ou « *misconceptions* » des élèves en regard de savoirs donnés. Des situations d'apprentissage visant à mettre en oeuvre et à faire évoluer des connaissances qu'on pourrait associer à des connaissances de sens commun ont ainsi été développées. Toutefois, comme nous l'avons vu, il semble que la pratique quotidienne, dans bien des cas, continue à s'appuyer sur des savoirs de sens commun plutôt que sur ces savoirs savants pourtant appris.

Il est alors légitime de se demander quels sont ces savoirs de sens commun qui prennent le pas sur les savoirs scolaires appris ? S'agit-il de conceptions inadéquates déjà travaillées qui persistent et refont simplement surface ou s'agit-il d'autres types de savoirs ? Peut-on les identifier ? Sont-ils de la même nature que le savoir qu'ils outrepassent (par exemple, un

¹⁴ Cette recherche bénéficie d'une subvention Initiative de Développement de la Recherche du CRSH-Canada. Les co-chercheurs sont : Réal Larose et Marc-André Éthier de l'Université de Montréal, et Suzanne Vincent de l'Université Laval.

objet, pour être mû, doit avoir un moteur, ce qui conduit à dire qu'une fois lâchée d'un véhicule en mouvement, une balle tombera verticalement) ou sont-ils de nature plus générale (relevant par exemple de paralogismes formels ou informels) ?

L'objectif de cette seconde recherche est donc de dégager des orientations conceptuelles et méthodologiques qui permettront d'appréhender dans sa complexité le phénomène de la « mainmise » du savoir de sens commun sur le savoir scolaire appris, ce savoir de sens commun étant une source postulée de l'inutilisation ou de la sous-utilisation des savoirs scolaires appris.

Parce qu'ils offrent un cadre conceptuel pour l'étude du sens commun, les résultats de recherches en sociologie, et plus particulièrement de celles qui ont trait aux représentations sociales, apparaissent indispensables pour problématiser les questions précédentes dans toute leur complexité.

Bien sûr, il existe déjà des travaux didactiques qui font appel aux représentations sociales. Toutefois, ces travaux, à notre connaissance, procèdent toujours à partir des savoirs savants visés, l'étude des représentations sociales venant s'ajouter à l'analyse didactique du savoir en jeu. De même, lorsque, pour l'étude des représentations sociales, on s'intéresse aux savoirs savants, c'est pour mieux comprendre ces représentations, lesquelles demeurent l'objet d'étude. L'évolution des représentations sociales du SIDA, décrite par Jodelet (2003), en est un bon exemple.

La perspective que nous souhaitons développer se situe donc au confluent de celles de la didactique et des représentations sociales. Nous ne voulons privilégier *a priori* ni l'étude du savoir scolaire ni celle du savoir de sens commun. Notre objet d'étude serait plutôt la dynamique de ces savoirs.

Nous pensons que cette dynamique pourrait se donner à voir dans l'étude de journaux étudiants, c'est-à-dire les journaux rédigés principalement par et pour les élèves, afin de rendre compte de leurs préoccupations, des activités de l'école, de leurs opinions, etc. Ainsi, à partir d'un modèle du sens commun issu notamment des travaux de Gonseth (1993), nous analyserons des journaux étudiants d'élèves du secondaire afin d'identifier d'une part, les savoirs de sens commun en jeu dans leurs écrits et, d'autre part, les savoirs

scolaires qui y sont mobilisés. Nous proposerons par la suite une description de la dynamique entre ces deux types de savoirs selon les types de textes produits par les élèves. Ces journaux constitueront donc le matériau de base pour amorcer cette étude.

Plusieurs raisons ont motivé ce choix. D'une part, le fait de prendre des journaux nous permet d'analyser le sens commun dans une expression relativement « quotidienne » et donc, bien que ce soit à l'école, il ne s'agit pas d'une tâche scolaire proprement dite. D'autre part, le fait que les journaux soient rédigés par des élèves d'un ordre scolaire donné (par exemple le secondaire) nous permet d'avoir une bonne idée des savoirs scolaires normalement appris par les rédacteurs et donc d'observer s'ils sont utilisés ou non. Enfin, le choix de nous dédier à l'examen de journaux étudiants nous semble d'autant plus approprié que les représentations sociales se profilent, notamment, au sein des discours élaborés dans les communautés de vie (Doise 2000, Bataille 2000).

L'intérêt du développement d'un tel cadre serait d'outiller l'étude la dynamique entre les savoirs de sens commun et les savoirs scolaires appris, dans l'action quotidienne. Cette étude pourrait éventuellement fournir des pistes pour favoriser l'utilisation citoyenne des savoirs scolaires appris et, ainsi, les sortir de la « connaissance inutile » décrite par Revel (1988) « *Construite pour fonctionner grâce à la connaissance, notre civilisation est-elle viable si elle refuse de s'en servir?* »

4. Maman les petits bateaux...

Pour conclure, une illustration de l'étonnante dynamique entre des savoirs de sens commun et des savoirs scolaires appris tout récemment.

Dans un collège de Marseille, des élèves de 4^e participent à un atelier de mathématique sur une base volontaire à condition, toutefois, de s'engager à y rester toute l'année. En septembre 2005, pour initier un travail sur la modélisation, l'enseignante a demandé à ces élèves: pourquoi les bateaux flottent-ils ? Parmi les réponses obtenues, une suggérait que les bateaux flottent parce qu'on y introduit une substance flottante. C'est dans ce contexte

que les élèves ont travaillé pendant plusieurs mois sur les boîtes flottantes (Chevallard 1989). À l'issue de ce travail, ils en sont arrivés à constater que, pour une boîte cubique dans un matériau donné, l'enfoncement est constant. Cette constatation a conclu les séances d'atelier sur les boîtes flottantes. À cette occasion, la question de savoir pourquoi les bateaux flottent a été reposée. Voyons un extrait de l'échange qui a alors eu lieu en classe.

8 h 52

Prof : Vous avez maintenant une meilleure idée de pourquoi les gros bateaux flottent ?

E : **Il y a du métal autour de quelque chose qui flotte ou fait flotter dedans.**

E : **Les ingénieurs calculent pour plus grand.**

Quelques minutes plus tôt, il y avait eu cet échange :

8 h 40

Prof : On a réfléchi sur une grande quantité de boîtes sans avoir à les fabriquer. On a travaillé et réfléchi sur le modèle. En quoi c'est avantageux ?

E : Ça enlève du travail

E : Oui, ça enlève du temps. **Mais c'est la pratique qui prouve plus que la théorie.** Si on le met dans l'eau et qu'il coule !...

P : Les fabricants de bateaux, ils doivent être de quel côté ? Théorique ou pratique ?

E : Des deux !

Ainsi, lorsqu'on leur redemande pourquoi les bateaux flottent, on s'aperçoit que ces élèves ne mettent pas nécessairement à contribution les savoirs nouvellement appris pour produire leur réponse, ils n'exploitent pas le lien entre la théorie et ses incidences sur la pratique. Et, si les élèves disent qu'on est mieux de vérifier en pratique, c'est peut-être qu'une expérience de sens commun antérieure les a conduits, sagement, à cette forme de vigilance « pratique »...

Bibliographie

- Bachelard, G. (1938) : *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, Paris,
- Bataille, M. (2000) : Représentation, implicitation, implication : des représentations sociales aux représentations professionnelles. In C. Garnier et M. Rouquette (Éds.), *Représentations sociales et éducation* (p.165-189). Montréal : Éditions Nouvelles.
- Bednarz, N. & Janvier, B. (1994) : The emergence and development of algebra in a problem solving context : a problem analysis. In : J.P. Ponte et J.F. Matos (Eds), *Proceeding of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol II, pp. 64-71, Lisbonne Portugal.
- Bernarz, N., Janvier, B., Mary, C. & Lepage, A. (1992) : L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique. In : *Actes du Colloque sur l'émergence de l'algèbre, Cahiers du CIRADE*, pp. 17-31.
- Berthoz, A. (2004) : Cité dans : Tous dupés ... pour notre bien ! In : *Science et vie*, no 1044, septembre, pp.54-59.
- Bosch, M. Chevallard, Y., & Gascon, J. (2005) : Science or magic ? The use of models and theories in didactics of mathematics. Proceedings of CERME 4, European research in mathematics education, 10 pages.
- Bronner, G. (2003) : *Biais cognitif et niveau d'étude*, Texte de référence présenté et discuté au Séminaire du Centre d'Études Sociologiques de la Sorbonne (CESS), 19p.
- Brousseau, G. (1980) : L'échec et le contrat, *Recherches*, 41, pp.177-182.
- Brousseau, G. (1984) : Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *III^e Ecole d'Été de Didactique des mathématiques*, Orléans, pp. 93-102.
- Chevallard, Y. (1989) : *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publication de l'IREM d'Aix-Marseille no 16, 344 p.
- Chevallard, Y. (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique ". *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19, no 2, pp. 221-266.
- Chevallard, Y. (1991) : *La transposition didactique*. Deuxième édition, La Pensée Sauvage, Grenoble

- Combiér, G., Ladevèze, A. et Lévy, G. (1996) : Construction et expérimentation de situations : la mise en équation en 4°. *Les débuts de l'algèbre au collège*, pp. 59-104. Paris, INRP.
- Conne, F. (1992) : Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12/2.3, pp.221-270
- Coulange, L. & René de Cotret, S. (2004) : Utilisation d'un environnement informatique d'enseignement/apprentissage de la mise en équation par un professeur. *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre* (SFIDA), volume V 2001-2003, pp. XIX-26 à XIX-35. (C.E.)
- Didierjean, G., Dupuis, C., Duval, R., Egret, M.-A., Dremer, D., Robert, G., Wenner, B. et Ziegler, M. (1996-1997) : À propos de Charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues. *Petit X*, 44, pp. 35 à 48
- Doise, W. (2000) : Les droits de l'homme comme représentations sociales de contrats d'interdépendance. In C. Garnier et M.-L. Rouquette (Dir.), *Représentations sociales et éducation* (p. 191-210). Montréal: Éditions Nouvelles.
- Drouhard, J.-P., Léonard, F., Maurel, M. Pécal, M., Sackur, C. (1995) : Calculateurs aveugles, dénotation et entretiens "faire faux". In J.-P. Drouhard et M. Maurel (Eds.) *Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre. Documents des Séminaires SFIDA-1 à SFIDA-4 1993-1995*, IUFM de Nice.
- Favre, J.-M. (1999) : Le mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant ? In G. Lemoyne, F. Conne (Éds), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 235-261. Montréal, Presses de l'Université de Montréal.
- Favre, J.-M. (1997) : *L'échec, le temps, la multiplication*, mémoire de licence, Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation.
- Fiola, A. (2005) : *Étude de l'impact d'une approche didactique invitant des élèves en difficulté d'apprentissage à jouer le rôle d'enseignant lors d'activités de mise en équation algébrique*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 160 pages.
- Gagatsis, A. (1982) : *Discrimination des scores au test de Closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques*. Thèse présentée à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg et publiée par l'institut de recherche mathématique avancée (IRMA), avril 1982, 326 pages.
- Géco (Sackur, C., Drouhard, J.-P., Maurel, M. et Pécal, M.) (1997) : Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères-IREM*, 28, pp. 37-68.

- Geertz, C. (1983) : Common Sense as a Cultural System, In : *Local Knowledge: Further Essays in Interpretative Anthropology*. Basic Books, New York, pp.72-96.
- Giroux, J. & René de Cotret, S. (2001) : Le temps didactique en classe de doubleurs. In G. Lemoyne & C. Lessard (Eds.) *L'éducation au tournant du nouveau millénaire*. Les publications de la faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal, pp. 41-71.
- Gonseth, M.A. (1993) : L'ordinaire et son ombre. In : *Si... Regards sur le sens commun*. Jacques Haunard & Roland Kaehr Eds. Musée d'ethnographie, Neuchâtel, pp.25-50.
- Gueorguieva, V. (2002) : « Sept thèses sur le sens commun », *Altérités* [En ligne]. No 3 janvier. <http://www.fas.umontreal.ca/anthro/varia/alterites/n3/gueorguieva.html>
- Guenancia, P. et Sylvestre, J.P. (2004) : *Le sens commun : théories et pratiques*, Actes du Colloque de Dijon, Centre de recherches Gaston Bachelard sur l'Imaginaire et la Rationalité, Éditions universitaires de Dijon, Collection Écritures, 202p.
- Jodelet, D. (2003) : *Les représentations sociales*, PUF, Paris, 447p.
- Kahneman, D. & Tversky, A. (1972) : Subjective Probability: A Judgement of Representativeness, In *Cognitive Psychology*, vol. 3, Academic Press, pp. 430-454.
- Legardez, A. (2004) : L'utilisation de l'analyse des représentations sociales dans une perspective didactique. L'exemple de questions économiques, In *Revue des sciences de l'éducation*, Vol XXX, no 3, pp.647-665.
- Lemoyne, G., Conne, F. & Brun, J. (1993) : Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif à l'algèbre, In *Recherches en didactique des mathématiques*, 13/3, pp.333-384.
- Lemoyne, G., Coulange, L. & René de Cotret, S. (2002) : La dynamique du couple représentation-interprétation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, *L'Année des Sciences de l'Éducation*, pp. 151-179. (D.A.)
- Lemoyne, G. (1989) : La peur de ne pas savoir la réponse : les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques, *Repères*, (12), pp. 79-101.
- MEQ (2004) : Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle.
- Mercier, A. (1995) : Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématique, In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, et A. Tiberghien (Éds.),

- Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble, Editions La Pensée Sauvage, pp. 145-169.
- Moscovici, S. (2003) : Des représentations collectives aux représentations sociales : éléments pour une histoire, In D. Jodelet Dir : *Les représentations sociales*, PUF, Paris, pp.79-103.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1993) : Questions didactiques à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles », *Recherches en didactique des mathématiques*, 13, (1.2), pp. 5-118.
- Piatelli-Palmarini, M. (1995) : *La réforme du jugement ou Comment ne plus se tromper*, Paris, Odile Jacob, 263p
- Pichette, J. (2006) : Implicit and explicit linear system use in the solving of algebraic word problems by 14 to 15 year-old students, Thèse de doctorat, Université de Montréal.
- René de Cotret, S. & Larose, R. (2006) : La didactique du sens commun : pour un retour dans la cité... In D. Tanguay Ed., *Raisonnement mathématique et formation citoyenne*, Actes du colloque du GDM 2005, UQAM, pp. 47-59.
- René de Cotret, S. & Fiola, A. (Sous presse) : Une adaptation de l'environnement informatisé *Bouchons les trous* pour des élèves en difficulté d'apprentissage, In J. Giroux & D. Gauthier (Eds), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*, Éditions Bande Didactique, Montréal, 25 pages.
- René de Cotret, S. (1997) : *Combien pariez-vous sur votre équation? À propos de la validation en algèbre*, Séminaire au Groupe interuniversitaire de discussion en didactique des mathématiques, Montréal, février.
- René de Cotret, S. (2000) : Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits, *Neuvième Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre (SFIDA)*, Nice, pp. IX-23 à IX-37.
- René de Cotret, S. (1999) : Proposition d'une perspective "bio-cognitive" pour l'étude de relations didactiques, In G. Lemoyne et F. Conne, (Éds), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Presses de l'Université de Montréal, co-éditeur De Boeck, Montréal, pp. 103-120.
- Revel, J.F. (1988) : *La connaissance inutile*, Grasset, Paris, 408p.
- Rouchier, A. (1991) : *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation*, Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, 73p.

- Schmidt, A. (1990) : *Ethnométhodologie : Regards sur un terrain interdit*, Thèse de sociologie de l'Université de Paris 8 [<http://www.ai.univ-paris8.fr/corpus/alexand/index.htm>]
- Sylvestre, J.P. (2004) : Culture, imaginaire social et sens commun, In P. Guenancia et J.P. Sylvestre, *Le sens commun : théories et pratiques. Actes du Colloque de Dijon. Centre de recherches Gaston Bachelard sur l'Imaginaire et la Rationalité*, Éditions universitaires de Dijon, Collection Écritures, 202p.
- Taylor, W.L. (1953) : « Cloze procedure : A New Tool for Measuring readability. », *Journalism Quarterly*, vol 30, pp 415-433.
- Trésarrieu, J. (2001) : *Mécanique et sens commun. Un obstacle dans l'enseignement des Sciences Physiques en seconde*, Mémoire professionnel, Académie de Caen.
- Vergnaud, G. (1996) : Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, in R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds), *Actes de la VIII^e école et université d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand, pp. 174-185.
- Viennot, L. (1996) : *Raisonnement en physique. La part du sens commun*, Pratiques Pédagogiques, Éditions De Boeck, Bruxelles, 245p.
- Walliser, B. (1977) : *Systèmes et modèles. Introduction critique à l'analyse de systèmes*, Éditions du Seuil, Paris, 248 p.
- Zajonc, R.B. (1965) : Social facilitation, In *Science*, 149, pp. 269-274

Les représentations des praticiens de l'usage des technologies dans l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire en Angleterre

Kenneth Ruthven

University of Cambridge

1. La réalité internationale de l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques au secondaire

Partout, l'école se trouve face à un impératif politique qui vise une informatisation de la scolarité. Pour illustrer, j'ai choisi un extrait du plan pour « l'amélioration des écoles » que le nouveau gouvernement britannique a publié dès son arrivée au pouvoir en 1997. Mais ces sentiments ne sont pas particuliers à cet endroit ou à cette occasion; des textes comparables sont promulgués par les gouvernements partout dans le monde:

« Le monde des affaires a été transformé par les nouvelles technologies... Mais l'effet sur l'éducation reste marginal. On ne peut pas préparer nos enfants au monde de demain avec les technologies d'hier... Nous sommes décidés à créer une société où, dans dix ans, les technologies de l'information et de la communication (TIC) auront imprégné tous les aspects de l'éducation. » (Department for Education and Employment, 1997)

Quels sont les résultats de cette politique, et de ses homologues dans d'autres pays ? Depuis plusieurs années, le TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) examine l'enseignement mathématique au niveau du collège. Les résultats les plus récents datent de 2003 (Mullis et al., 2004). Ils proviennent d'échantillons représentatifs tirés de 46 systèmes éducatifs. Les réponses des enseignants donnent quelques indices

simples de l'intégration dans chaque système des technologies au collège, relatifs aux points suivants de référence :

Reconnaissance curriculaire: Le curriculum national fait référence à l'usage de la technologie.

Formation professionnelle: L'enseignant a participé pendant les deux années précédentes à quelque formation liée à l'usage de la technologie.

Accessibilité locale: L'accès à la technologie est possible pour la classe Grade 8 en question.

Utilisation régulière: La technologie est utilisée dans à peu près la moitié des cours ou plus avec la classe Grade 8 en question.

Dans les Tables I et II, la distribution de chaque indice à travers les systèmes est évoquée par le quartile inférieur, la médiane et le quartile supérieur (des valeurs qui correspondent à la proportion d'étudiants dans un système dont le professeur affirme la formation professionnelle, l'accessibilité locale ou l'utilisation régulière). Les résultats pour l'Angleterre servent à la situer dans ces distributions.

Table I : L'intégration des ordinateurs dans l'enseignement des mathématiques

	Distribution des systèmes			Angleterre
	<i>Quart_sup</i>	<i>Médiane</i>	<i>Quart_sup</i>	
Le curriculum fait référence	Non	Non	Oui	Oui
L'enseignant est formé	23%	43%	53%	63%
L'accès est possible	12%	29%	48%	66%
L'utilisation est régulière	1%	2%	3%	5%

On voit (Table I) que la référence aux ordinateurs n'apparaît pas dans la majorité des curriculums. On voit aussi que les indices de formation récente et d'accessibilité locale sont très variables, et qu'elles restent minoritaires dans la plupart des systèmes. Mais la faiblesse du degré d'utilisation régulière des ordinateurs en classe est encore plus frappante.

Table II : L'intégration des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques

	Distribution des systèmes			Angleterre
	<i>Quart_inf</i>	<i>Médiane</i>	<i>Quart_sup</i>	
Le curriculum fait référence	Non	Oui	Oui	Oui
L'usage est permis aux élèves	63%	84%	97%	100%
L'utilisation est régulière	11%	28%	60%	51%

On remarque que l'équipe TIMSS n'a pas traité la calculatrice (Table II) de la même façon que l'ordinateur, ce qui signale déjà son statut différent. En comparant directement les situations des technologies, on trouve que la calculatrice est nettement plus intégrée que l'ordinateur. La plupart des systèmes ont un curriculum national qui fait référence aux calculatrices, et l'utilisation régulière des calculatrices est bien supérieure à celle des ordinateurs, bien qu'elle reste très variable à travers les systèmes. En fait, la calculatrice se révèle comme la technologie la plus appropriée à la situation actuelle de l'enseignement.

2. L'Angleterre comme cas aigu de l'énigme internationale de l'intégration des TIC

Les tables déjà présentées montrent que la situation de l'Angleterre est assez favorable. À part l'utilisation régulière des calculatrices, tous ces indices placent l'Angleterre dans le premier quartile des systèmes. Le curriculum fait référence et aux calculatrices et aux ordinateurs, et presque les deux tiers des enseignants ont récemment participé à une formation pertinente. L'usage des calculatrices est accepté partout, et l'accès aux ordinateurs est possible pour les deux tiers de classes. Mais l'utilisation des ordinateurs reste très rare, bien qu'elle soit plus élevée que dans la plupart des autres pays. En fait l'Angleterre se révèle comme cas aigu de l'énigme internationale de l'intégration des TIC.

Cette situation est encore plus surprenante si on considère l'histoire (en bref) des TIC dans l'enseignement des mathématiques en Angleterre. Dès 1971, une série très répandue

de manuels scolaires de mathématiques a incorporé des chapitres sur l'ordinateur et la programmation. Dès 1981, le gouvernement a commencé un grand investissement dans l'usage des ordinateurs en classe. Depuis 1989, un curriculum national fait référence aux ordinateurs et aux calculatrices. Depuis 1997, l'investissement officiel dans le dispositif et la formation TIC s'intensifie. Tout au long de cette période, les activités TIC ont été diffusées par les agences officielles et les associations professionnelles impliqués dans l'enseignement des mathématiques (Ruthven, inédit).

Quel est l'impact de ces initiatives selon l'inspection nationale? La plupart des départements de mathématiques ont un accès acceptable en termes de matériel et de logiciel. Mais malgré un investissement important, l'usage des TIC reste sous-développé. Selon les inspecteurs, les facteurs critiques pour un développement adéquat sont la présence d'un usager sûr de lui et enthousiaste au sein du département, et les prévisions explicites de l'usage des TIC dans le programme départemental d'études (Office for Standards in Education [OfStEd], 2004).

Les TIC dans le Curriculum National et le Cadre National pour l'Enseignement des Mathématiques en Angleterre

L'étude TIMSS reconnaît l'influence d'un curriculum national qui fait référence à l'usage des TIC, et les inspecteurs anglais signalent l'importance d'une traduction plus locale des normes curriculaires en plans praticables. Pour mieux comprendre ce contexte institutionnel, il faut considérer le traitement des TIC dans le curriculum anglais. Le Curriculum National [National Curriculum] a été renouvelé en 1999 (Department for Education and Employment/Qualifications and Curriculum Authority [DfEE/QCA], 1999) et élaboré en 2001 pour établir un Cadre National pour l'Enseignement des Mathématiques [National Framework for the Teaching of Mathematics] (Department for Education and Skills [DfES], 2001).

Dans la définition de « l'ampleur des études » officiellement attendue, l'usage des TIC figure (en dernière place) dans la liste schématique d'activités que les élèves sont censés rencontrer dans leurs cours de mathématiques:

« des tâches qui visent l'usage des TIC appropriées (par exemple, les tableurs, les bases de données, les logiciels géométriques ou graphiques),

employant les calculatrices d'une manière correcte et efficace, et sachant quand il n'est pas approprié d'utiliser une technologie. » (DfEE/QCA, 1999)

On note que l'usage des calculatrices est spécifié, mais que les autres formes de TIC sont seulement suggérées. En plus, une caractéristique très particulière du traitement des nouvelles technologies est l'insistance explicite sur un usage « correct et efficace », et l'évocation de situations où leur utilisation n'est pas appropriée. Cette façon de parler transmet l'impression que, bien qu'il faille prendre conscience des nouvelles technologies, il faut aussi y faire attention.

Cette impression est renforcée par le contenu du programme. Certaines « opportunités TIC » sont signalées aux marges, littéralement, du document pour montrer qu'elles ne sont pas obligatoires. L'essentiel du programme se réduit aux quatre usages requis des TIC :

« Employer les outils TIC dans un processus systématique d'essai et d'affinement ['trial and improvement'] des solutions approximatives aux équations où il manque une méthode analytique simple. »

« Créer des graphes de fonction [de plusieurs types] par le moyen d'un tableur ou traceur ainsi que par papier crayon. »

« Trouver des lieux par raisonnement et par l'usage des TIC pour produire des formes et des chemins. »

« Produire, par papier crayon et TIC, [plusieurs types de] graphiques et diagrammes pour des données. » (DfEE/QCA, 1999)

Le sous-entendu de certaines de ces phrases est que les méthodes TIC servent comme recours ultérieur, peut-être même comme recours à moins de raisonnement.

En même temps, il y a un manque d'attention aux questions d'instrumentation. Sur ce point le traitement des calculatrices dans le Curriculum National est exceptionnel parce qu'il y a une reconnaissance officielle des « méthodes calculatrices », une reconnaissance qui manque à l'égard d'autres formes de TIC. Réduites à l'essentiel, les prévisions pour les calculatrices sont qu'il faut enseigner aux élèves à :

« Faire entrer... les calculs... en employant les parenthèses... [et en adaptant] les mesures... »

« Utiliser les touches fonctions... [et] la touche constante... »

« Interpréter les restitutions affichées par la calculatrice. »

« Savoir qu'il ne faut pas arrondir [les valeurs] pendant les étapes intermédiaires... » (DfEE, 1999)

Cette attention différentielle aux questions d'instrumentation se révèle encore dans le traitement des technologies dans l'élaboration officielle du Curriculum National par le Cadre National pour l'Enseignement des Mathématiques. Dans ce dernier document, chaque outil manuel a son paragraphe: ici l'exemple du rapporteur (Figure 1) :

« Se servir d'un rapporteur de 180° ou de 360° pour mesurer et dessiner les angles, y compris les angles réflexes, au degré le plus proche. Reconnaître qu'on peut mesurer un angle comme une rotation ou dans le sens des aiguilles d'une montre [clockwise] ou dans le sens inverse [anticlockwise], et que la direction choisie détermine quelle sera la ligne zéro et s'il faut se servir de la graduation intérieure ou extérieure. » (DfES, 2001)

Cette reconnaissance officielle des éléments spéciaux de technique requis pour l'usage des technologies manuelles et des calculatrices n'a pas d'équivalent pour l'usage d'autres TIC. En particulier, malgré ses références aux possibilités d'employer un logiciel de géométrie dynamique, et ses clichés d'écran de figures dynamiques, le document ignore les besoins instrumentaux; par exemple, les techniques équivalentes nécessaires pour mesurer les angles avec un logiciel de géométrie dynamique (dont on verra ensuite et l'importance et la particularité).

À noter aussi, une différence analogue dans le statut des technologies anciennes et nouvelles dans les épreuves nationales (obligatoires à la fin de la quatrième, de la seconde, de la première, et de la terminale) qui servent à évaluer et les élèves et leurs institutions. En bref, les instruments manuels sont permis dans toute épreuve nationale, les calculatrices dans certaines, les ordinateurs dans aucune.

L'effet cumulatif de toutes les nuances qu'on a noté est de limiter le statut curriculaire des technologies nouvelles et de les positionner plutôt comme outils pédagogiques. Les conseils officiels aux enseignants mettent l'accent sur les TIC comme aides pédagogiques pour assurer un enseignement efficace, un apprentissage habile, un travail adroit en classe. Sous la rubrique de « Pourquoi devrais-je utiliser les TIC? » les questions suivantes sont posées:

« Est-ce que l'usage des TIC aidera à enseigner les faits, les compétences et les concepts mathématiques plus efficacement? Est-ce que l'usage des TIC

aidera à augmenter les connaissances des élèves, leur donner la possibilité de s'entraîner et de renforcer quelques compétences mathématiques, ou améliorer leur compréhension mathématique? Est-ce que l'usage des TIC aidera les élèves à calculer, à produire des tabulations et des graphes, ou à résoudre des problèmes? Est-ce que l'usage des TIC aidera les élèves à organiser, à présenter, et à raffiner leurs travaux, et à communiquer leurs résultats? » (DfES, 2003).

En fait, dans ces conditions systémiques d'approbation restreinte de l'usage des TIC en mathématiques par l'ensemble des organismes officiels, et d'élaboration limitée de ses aspects curriculaires, l'incidence minimale d'utilisation régulière des TIC constatée par l'étude TIMMS est moins surprenante. Cette situation explique aussi l'influence des conditions plus locales, aux niveaux départemental et individuel déjà notés par les inspecteurs. C'est dans ces circonstances que notre équipe de recherche à Cambridge s'est intéressée aux idées des enseignants sur l'usage réussi des TIC.

3. Les discours des praticiens sur l'usage scolaire réussi des TIC

Jusqu'à présent, peu d'études ont visé l'usage des technologies nouvelles dans les classes standards par les enseignants ordinaires (Lagrange, Artigue, Laborde & Trouche, 2003). Mais, surtout dans les conditions qu'on vient de remarquer, « si la technologie doit trouver sa place dans la pratique scolaire elle doit être examinée dans le contexte de la vie de classe comme elle est vécue par les enseignants » (Kerr, 1991). Certainement, les conclusions principales des études antérieures, typiquement des enseignants impliqués dans le pilotage des innovations, sont que leurs usages des TIC sont formés par les avis personnels et professionnels (Noss & Hoyles, 1996), les pratiques et les routines existantes (Miller & Olson, 1994), les sous-cultures des écoles et des matières scolaires (Goodson & Mangan, 1995), et l'interaction des perspectives individuelles et institutionnelles (Windschitl & Sahl, 2002).

C'est dans ce cadre que notre équipe à Cambridge a conduit une série d'études des discours et des pratiques des enseignants (Ruthven & Hennessy, 2002, 2003; Ruthven, Hennessy & Brindley, 2004; Ruthven, Hennessy & Deane, 2004, 2005a, 2005b, 2005c; Hennessy, Ruthven & Brindley, 2005; Hennessy, Deane & Ruthven, 2005, à paraître; Deane, Ruthven & Hennessy, 2006; Deane, Hennessy & Ruthven, à paraître). Les influences principales sur la démarche des études qu'on va discuter ici sont les suivantes: l'idée théorique de représentation sociale, concernant le discours et la pensée collective (Moscovici, 1990); l'étude naturaliste de l'enseignement qui traite les idées des participants comme source de concepts potentiels (Brown & McIntyre, 1993); et le dispositif méthodologique de la « grounded theory » (Strauss & Corbin, 1994).

Nous avons conduit une première étude en 2000 dans les départements de Mathématiques, de Sciences, et d'Anglais dans les collèges de la région qui adhéraient à un partenariat général de recherche avec notre université. Des entretiens en « focus group » ont servi à susciter des enseignants des exemples de ce qu'ils considéraient des usages scolaires réussis des TIC dans leur pratique actuelle, et leurs raisons pour choisir ces exemples. En fait, l'étude a demandé en quels termes les enseignants valorisent l'usage des TIC. Pour simplifier l'exposition, on ne discutera que des Mathématiques et des Sciences.

Plusieurs thèmes sont communs aux départements (Ruthven, Hennessy & Brindley, 2004).

D'abord, l'usage des TIC est valorisé pour **augmenter la variété et l'attrait de l'activité de classe** : c'est à dire pour y introduire « un changement », « la variété », « quelque chose de différent » et « une autre dimension »; pour la rendre moins « laborieuse », « ennuyeuse et répétitive », pour enlever « la corvée » et « la monotonie »; pour lui apporter l'impression de « bricoler » avec « un jouet motivant »; pour la rendre plus « intéressante », « marrante », « ludique » et « excitante ».

L'usage des TIC est aussi valorisé pour **effectuer les processus de travail et améliorer la production** : c'est à dire pour rendre « très, très facile » des aspects routines du travail en classe; pour améliorer « l'allure et l'exactitude » du travail fait par les élèves; pour permettre aux élèves « d'arriver aux résultats nettement meilleurs » et de « faire beaucoup plus de travail »; et pour servir à « économiser le temps », et à « garder le rythme » des leçons.

Ensuite, l'usage des TIC est valorisé pour **surmonter les difficultés des élèves et bâtir leur assurance**: c'est à dire pour aider les élèves à « contourner les difficultés à écrire » et résoudre « les problèmes de motivation stylo au papier » ; à « répondre correctement après avoir fait une faute » parce qu'il « suffit de cliquer et on repart » ; à trouver satisfaction à produire « du travail qui est bien présenté » ; et à « se sentir plus positif vis à vis d'eux-mêmes et de leur travail » et devenir « plus disposés à essayer ».

Finalement, l'usage des TIC est valorisé pour **focaliser sur l'enjeu global et accentuer les caractéristiques importantes**: c'est à dire pour permettre aux élèves « d'accéder à un point supérieur pour apprendre » et « voir ce qui se passe effectivement », au lieu de « s'embourber dans leur travail » où « les erreurs risquent de voiler l'essentiel » ; et pour rendre « les explications plus claires et visuelles », y compris les présentations dynamiques où « cela se tient mieux à cause de l'immédiateté », permettant aux élèves de « visualiser les processus qui sont en route ».

Il est évident comment ces thèmes concernant l'usage réussi des TIC sont ancrés dans des représentations déjà bien implantées de la motivation des élèves et de l'apprentissage en classe (voir, par exemple, Brown & McIntyre, 1993). En fait, les enseignants positionnent les TIC comme aides à la réalisation de certaines valeurs pédagogiques classiques, qui sont communes aux matières et assez générales. Mais deux thèmes additionnels sont distinctifs ou aux Mathématiques ou aux Sciences.

En Mathématiques, mais pas en Sciences, l'usage des TIC est valorisé pour **soutenir les processus de vérification, de tâtonnement et d'affinement**: c'est-à-dire pour soutenir les tâches structurées qui offrent aux élèves « des rétroactions immédiates sur leur progrès » « qui permet aux gosses de vérifier leur travail » ; les tâches « d'identifier la règle » ou il faut « choisir les entrées différentes pour voir les restitutions » et employer la machine pour « vérifier la règle » ; la résolution des problèmes par 'trial and improvement' ; et « l'investigation [mathématique] » ou « si quelque chose ne marche pas, on peut essayer quelque chose d'autre ».

En Sciences, mais pas en Mathématiques, l'usage des TIC est valorisé pour **élargir les référents de l'activité et augmenter son actualité**: c'est à dire pour accéder à « une abondance d'information », qui est « plus moderne et courante », et « toutes sortes de choses étranges et extraordinaires » ; aux « institutions mondialement connues », ce qui fait « un buzz non négligeable », et qui aide à « développer une compréhension plus large de

l'enjeu scientifique » ; au « vrai de vrai en action » pour « le faire rentrer en classe qu'il s'anime » ; et à « la science qui se fait d'une façon technologique à la pointe du progrès » qui « ressemble à la vie réelle ».

En fait, ces contrastes dans les valorisations des technologies nouvelles sont des échos de différences plus larges dans les discours des matières scolaires, tels qu'on les observe dans les textes officiels du curriculum. Une représentation méthodique des Sciences contraste avec l'accent en Mathématiques sur « faire et surveiller les décisions », « essayer et évaluer une variété d'approches » et « suivre des options personnelles et réfléchir sur elles ». Également, une représentation asociale des Mathématiques contraste avec l'accent des Sciences sur « les avantages et les inconvénients des développements scientifiques et technologiques » et « l'influence des applications des sciences sur la qualité de la vie ».

En somme, l'usage actuel des TIC en Angleterre est largement conforme aux discours établis. Mais cela ne veut pas dire que rien ne change. Cet usage admet une rééquilibration des pratiques existantes. Par exemple, les enseignants des mathématiques suggèrent que, en créant des conditions en classe favorables à la conduite réussie des « investigations mathématiques », surtout avec les élèves moins doués, l'usage des TIC rend cette forme d'activité plus faisable. Bien que cet usage des TIC aide les enseignants simplement à réaliser une forme de pratique établie, ils considèrent qu'il leur permet d'employer cette pratique plus couramment (Ruthven & Hennessy, 2002).

4. Les modèles des praticiens pour l'usage de la géométrie dynamique

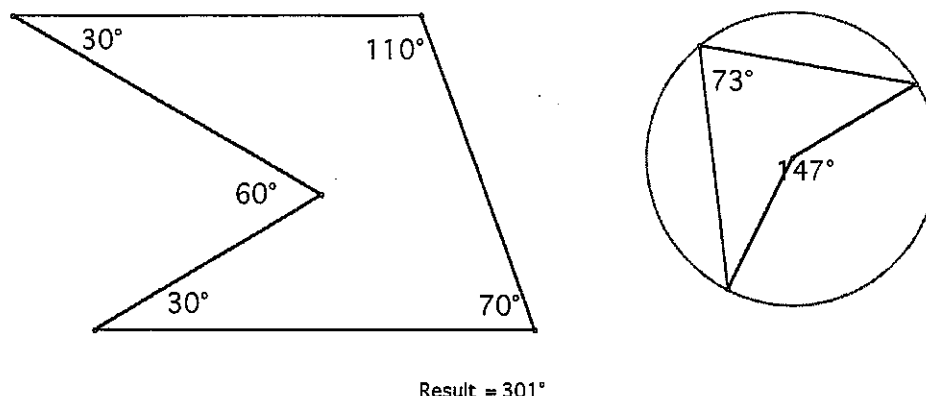
Pour examiner plus directement les usages bien vus dans la profession, nous avons conduit une deuxième étude (2003/04) dans des départements de Mathématiques et de Sciences recommandés par des inspecteurs et des formateurs. Certains exemples des pratiques proposées par les enseignants dans les « focus groups » ont été étudiés en détail par les observations de cours, suivis par les entretiens. Une des pratiques choisies était l'usage de la géométrie dynamique, soulignée dans la moitié des départements de mathématiques.

Selon les inspecteurs anglais, l'usage des logiciels de géométrie dynamique [LGD] reste très rare (OfStEd, 2004), bien qu'il soit recommandé par un rapport professionnel sur l'enseignement de la géométrie (RS/JMC, 2001), et encouragé par le Cadre National déjà discuté. Quoique la géométrie dynamique admette des usages variés (Arzarello et al., 2002; Hölzl, 2001; Laborde, 2001), le lignage manifestement Euclidien des LGD décourage peut-être son usage au sein d'un curriculum anglais qui s'éloigne depuis longtemps de cette tradition, pour « traiter la géométrie... comme une science plutôt expérimentale que déductive » (Bell et al., 1983: p. 226). Un fait révélateur de cette orientation est que le Curriculum National ne parle pas de « la Géométrie », mais de « la Forme, l'Espace et les Mesures ». L'esprit empirique des leçons anglaises est remarqué par Kaiser (2002) dans son ethnographie comparative de l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires; elle note, en particulier, une forte tendance à la validation par le contrôle des exemples.

Selon les rapports des enseignants l'objectif archétypique de l'usage de la géométrie dynamique est d'établir les propriétés angulaires des figures. Pour analyser cet usage nous avons étudié plus directement les pratiques des enseignants qui (selon leurs contributions aux « focus groups ») poursuivaient des approches contrastées (Ruthven, Hennessy & Deane, 2005b&c). Nous avons observé des leçons traitant, en particulier, la somme des angles d'un polygone, et les propriétés des angles au centre et à la circonférence d'un cercle. Les contrastes principaux d'approche apparaissent essentiellement à propos du thème « **gérer l'expérience des élèves du logiciel** », qui se réduit à deux sous-thèmes reliés.

D'abord, il y a des différences importantes d'approche à **impliquer les élèves dans l'utilisation du logiciel**. Dans la première approche, ce n'est que l'enseignant qui emploie le logiciel en démonstration, parce que les élèves « prendraient trop de temps à le maîtriser » et que « il leur offre une latitude énorme pour faire des erreurs ». En plus « le curriculum n'exige pas un tel degré d'investigation ». Donc « le coût-bénéfice ne paye pas ». Dans la deuxième approche, par contre c'est plutôt les élèves qui travaillent (typiquement en binôme) avec le logiciel, employant des figures préparées qui « structurent le travail pour qu'ils n'aient qu'à faire bouger les points » parce que « c'est un logiciel assez difficile ». De temps en temps, quand même, les élèves font « la construction très simple » « pour voir que le logiciel marche d'une façon géométrique ».

Figure 1 : Figures typiques pour l'étude des propriétés angulaires des figures, manifestant des anomalies apparentes



Ensuite, les approches sont différentes à propos **du maniement des anomalies apparentes de l'opération mathématique** du logiciel. Ces anomalies se présentent, par exemple, quand les valeurs arrondies ne conviennent pas aux rapports arithmétiques attendus ; ou quand la mesure restituée correspond à l'angle externe du polygone, pas à l'angle interne (et réflexe) attendu (Figure 1). Dans la première approche, l'enseignant fait attention à ne pas mettre en jeu ces situations. Par exemple, pour éviter les problèmes d'angle réflexe, il assure un déplacement du polygone qui garde une forme convexe. Également, avec les angles du cercle, il fait attention à déplacer la figure sans créer d'angle réflexe au centre, et à n'arrêter le déplacement que dans les positions où la mesure de cet angle est un nombre entier pair, « pour qu'ils voient la règle plus facilement ». Par contre, la deuxième approche exploite ces situations irrégulières pour stimuler un esprit critique de la part des élèves, et une instrumentation plus souple: « Il faut qu'ils apprennent qu'on ne peut pas supposer que ce qui est affiché est exactement ce qu'on veut. Il faut l'interroger ».

Ces approches contrastées constituent des réponses différentes aux demandes instrumentales (Guin, Ruthven and Trouche, 2005). C'est dans l'intention de *minimiser* ces demandes aux élèves que l'enseignant prend toute la responsabilité pour l'usage de l'outil, reste tacite sur son opération, et fait arranger les anomalies. C'est dans l'intention d'*optimiser*, surtout du point de vue épistémique, les demandes instrumentales aux élèves, que l'enseignant structure l'usage de l'outil par les élèves, y compris pour les exposer à certaines anomalies apparentes, considérées productives pour la mathématisation.

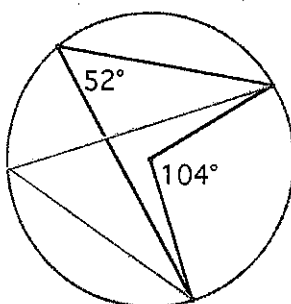
Un thème commun est d' **employer le logiciel pour assurer un travail accessible et efficace**. Ce thème comprend des sous-thèmes qui font des échos des idées identifiées par

la première étude : d'effectuer les processus de travail et améliorer la production, et ensuite de surmonter les difficultés des élèves, et de focaliser sur l'enjeu global. Par exemple, un enseignant note, en comparaison avec le travail fait avec les instruments manuels, comment « l'ordinateur mesure plus justement » et on « n'est plus obligé de redessiner les figures multiples ». Donc, l'usage du LGD « rend plus facile le dessin pour les gosses qui le trouvent dur » et « ils peuvent se concentrer sur l'apprentissage de comment correspondent et s'additionnent les angles ». En même temps, selon cet enseignant, certains élèves ont des ennuis de manipulation physique : « il est dur de ramasser les points... et cela complique les choses... et fait tout ralentir ». Pour un autre enseignant, « parce que... tout risque de dégénérer à cause des lignes et des points involontaires partout », il faut « essayer de faire comprendre [aux élèves], dès le début, comment effacer quelque chose » et assurer que « après avoir fait quelque chose dont on n'a plus besoin, on l'efface et le simplifie avant d'avancer à autre chose ».

Bien sûr, un thème commun important est de **montrer les propriétés géométriques par le déplacement des figures**, ce qui constitue un moyen spécifique à la géométrie dynamique de réaliser l'objectif, manifesté dans la première étude, de **focaliser sur l'enjeu global et accentuer les caractéristiques importantes**.

La logique du déplacement dépend en partie de la situation mathématique en question. Une des techniques observées est d'**utiliser le déplacement comme moyen d'examiner l'invariabilité dynamique**. Cette technique est caractéristique du traitement de l'angle à la circonférence, où l'attention continue au mouvement et à la mesure affichée de l'angle pendant un « déplacement autour... fait voir [aux élèves] que l'angle ne change pas ». Des actions des enseignants plutôt que de leurs explications, il est à remarquer aussi qu'ils arrivent à recréer pendant le cours l'apparence de la forme établie de la figure statique, en ajoutant à la figure dynamique un deuxième angle à la circonférence ; par exemple, en proposant une activité où une valeur est prédite pour l'angle sans mesure, et l'angle mesuré est ensuite déplacé pour la tester (Figure 2).

Figure 2 : Figure typique pour l'étude des propriétés des angles d'un cercle, montrant le doublement de l'angle à la circonférence



Toutefois, la technique la plus courante est d'utiliser le déplacement comme moyen d'examiner des exemples multiples. Dans les leçons sur les propriétés des angles du cercle, le déplacement entre positions discrètes, sans attention au mouvement, sert à produire des exemples d'un angle au centre du cercle, plus ou moins grand, et de l'angle associé à la circonférence. Dans les leçons sur la somme des angles d'un polygone, le déplacement d'une figure dynamique sert à générer plusieurs exemples du polygone en jeu, normalement sans attention portée sur le mouvement entre positions discrètes. Pourtant, l'idée est introduite du déplacement comme moyen de prendre un échantillon d'exemples d'un domaine géométrique : « ne prendre que quatre [exemples] au hasard » pour « montrer que [le résultat] est vrai, et il n'est pas possible que cela soit arrivé par accident ». Cette logique est appliquée d'abord au triangle et ensuite aux polygones successifs de côtés plus nombreux.

Le sous-thème final, celui de médier les propriétés géométriques par les mesures arithmétiques, est encore quelque chose que les enseignants n'ont pas signalé dans leurs explications, mais qu'ils ont manifesté systématiquement dans les leçons observées, dans la mesure où l'analyse des propriétés des angles se fait toujours par attention aux régularités arithmétiques dans leurs mesures numériques. Il s'agit ou de noter qu'une mesure restituée ne change pas de valeur malgré la variation de la figure, ou d'observer la régularité arithmétique dans une série accumulée de données qui associe deux variables : à chaque nombre de côtés du polygone, la somme des angles intérieurs ; à chaque mesure d'angle au centre du cercle, la mesure d'angle à la circonférence. Les formes classiques de raisonnement géométrique par moyens visuo-spatiaux et logico-déductifs n'apparaissent guère. Cet accent reflète la tendance non seulement empirique mais arithmétique des mathématiques scolaires anglaises. Les problèmes numériques –notamment de la chasse

aux angles— sont saillants dans les textes et les épreuves. L'induction depuis les régularités arithmétiques est courante comme approche à l'investigation mathématique.

Donc, dans cette deuxième étude, comme à la première, on voit la forte influence des cultures scolaires établies, mathématique et pédagogique, sur la représentation et l'exploitation d'une technologie nouvelle.

Le défi systémique à l'intégration des technologies

Il est important de rappeler que la pratique exposée dans la section précédente s'est produite par des moyens informels. En particulier, elle s'est développée hors de tout projet officiel prêt à poser des alternatives plus radicales, les modifications plus profondes, et de les rendre légitimes. Il est instructif quand même de situer cette pratique par rapport au modèle de Laborde (2001) de l'évolution chez les enseignants des tâches de géométrie dynamique au cours d'un projet de développement. Ce modèle propose une évolution cumulative où l'utilisation du logiciel sert progressivement:

- à faciliter les aspects matériels des tâches familières
- à aider l'analyse mathématique des tâches familières
- à modifier l'essentiel des tâches familières
- à créer des tâches qui ne se posent pas autrement.

Dans la pratique anglaise, le logiciel sert surtout à faciliter la production et la mesure des figures, et le déplacement à aider l'identification des régularités arithmétiques dans les mesures, sans avancer vers une analyse plus classique des rapports géométriques dans la figure. Il faut donc conclure que cet usage reste largement au premier rang du modèle, et arrive à peine au deuxième rang. L'exploitation des anomalies apparentes pour stimuler la mathématisation n'est pas un type de tâche qui figure dans le modèle d'origine, mais la fonction du logiciel même reste toujours à l'équivalent du premier, ou à peine au deuxième, rang.

On peut imaginer des approfondissements —en termes du modèle— de la pratique anglaise observée. Par exemple, au deuxième rang, l'usage du logiciel facilite l'analyse de la triangulation des polygones (Figure 3) par une approche expérimentale qui peut devenir

systématique. Egalement, au troisième rang, l'idée de déplacer un point d'un polygone quasi-général permet une analyse par récurrence de la triangulation (Figure 4). Et, au quatrième rang, l'usage du logiciel est essentiel pour l'analyse des propriétés des figures dynamiques de construction cachée, et la construction d'une figure avec une propriété spécifiée (par exemple, un polygone dynamique dont les côtés ne se croisent jamais) (Figure 5). Ces exemples spéculatifs illustrent les possibilités de fortifier les aspects visuo-spatiaux et logico-déductifs du raisonnement géométrique qui manquent dans la pratique observée (Ruthven, 2005).

Figure 3 : Analyse par expérimentation de la triangulation des polygones

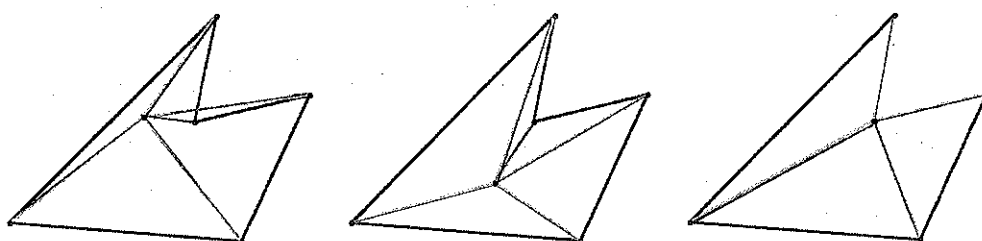


Figure 4 : Analyse par récurrence de la triangulation des polygones

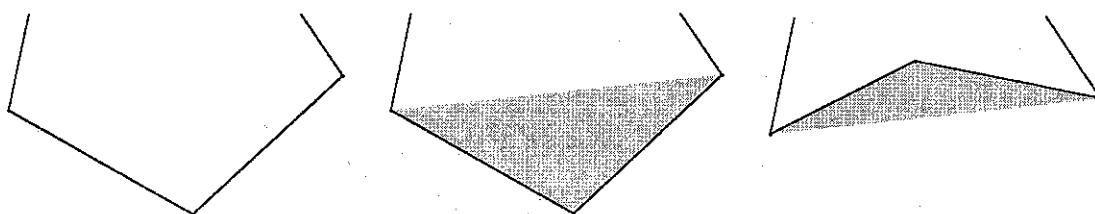
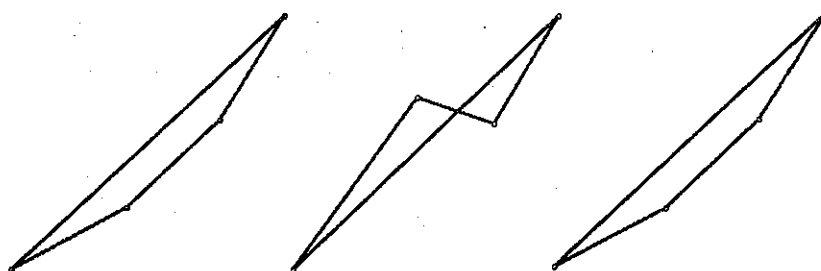


Figure 5 : Classement de figures, et construction d'un polygone dynamique dont les côtés ne se croisent jamais



Une variante du modèle des degrés d'intégration de la géométrie dynamique convient mieux à la situation anglaise. Ce modèle suggère qu'il y a un changement fondamental impliqué dans chaque passage d'un rang à l'autre de l'utilisation du logiciel :

- pour les tâches et les approches *déjà reconnues par le curriculum*, avec les aspects instrumentaux *minimisés*.

Les aspects instrumentaux sont à valoriser.

- pour les tâches et les approches *déjà reconnues par le curriculum*, avec les aspects instrumentaux *optimisés*.

Les normes curriculaires sont à renégocier.

- pour les tâches et les approches *classiques, pertinentes au curriculum mais pas reconnues*, où l'usage du logiciel les rend plus accessibles mais reste *facultatif*.

Les innovations mathématiques sont à réaliser.

- pour les tâches et les approches *essentiellement neuves*, où l'usage du logiciel est *indispensable*.

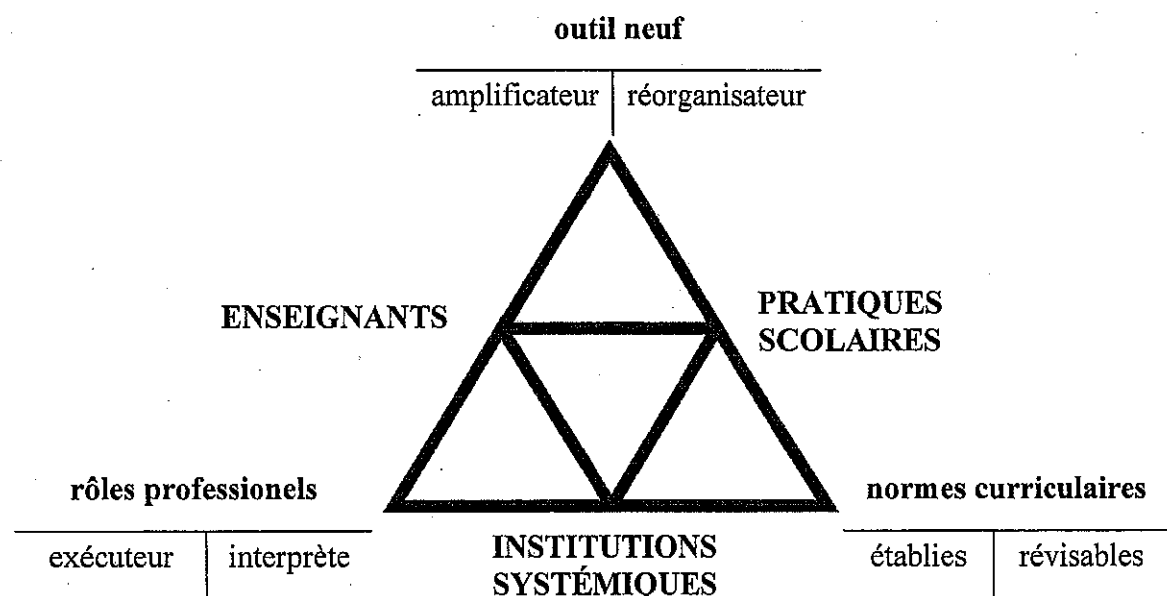
Retournons brièvement au cas de la calculatrice pour faire un bilan équivalent. On peut observer d'abord que les fonctions de la calculatrice s'accordent bien avec l'orientation arithmétique qui caractérise les mathématiques scolaires anglaises. Bien que son usage rencontre une réserve, surtout en face de la forte valorisation du calcul mental et écrit, il permet un travail mathématique plus efficace et adroit dans des situations où ces compétences ne sont pas essentielles. Vu l'attention et l'analyse particulière que le curriculum anglais accorde à la calculatrice, on peut constater que ses aspects instrumentaux sont plus reconnus et valorisés. Également, l'acceptation, même avec réserve, de la technique de 'trial and improvement', fortement associée avec l'usage d'une calculatrice, marque une légère renégociation des normes curriculaires. Certainement, on peut envisager une intégration plus profonde, y compris des innovations mathématiques (voir Ruthven 1999, 2001), mais il faut constater que, comparée aux autres outils mathématiques, l'intégration curriculaire de la calculatrice est plus forte.

On voit, alors, que ce modèle adapté des degrés d'intégration des TIC sert à discerner des aspects importants qui présentent des différences dans le cas de la calculatrice et celui de la géométrie dynamique. Ce modèle implique des aspects importants de l'enjeu de

l'intégration des technologies qui figurent dans l'analyse d'Artigue (2002) d'une série de projets pour développer l'usage éducatif des systèmes de calcul formel, intégrés dans des calculatrices symboliques en particulier. L'essentiel de cette analyse est qu'un enseignement cohérent et efficace des mathématiques instrumentées par les nouvelles technologies nécessite un renouvellement du cadre didactique et théorique; et que la création d'un tel cadre dépend non seulement d'une adaptation des connaissances de la culture mathématique établie, mais d'une fusion entre ces connaissances et celles d'une culture informatique émergente.

Un sommaire peut se faire sous une forme adaptée de système d'activité (Cole & Engeström, 1993). La triade psychologique (qui constitue la partie supérieure de Figure 6) évoque l'interaction entre un sujet (ici, les enseignants) et un objet (ici, les pratiques scolaires), médiée par un moyen (ici, l'outil neuf). Plus concrètement, le modèle proposé par Laborde, et l'élaboration de ses rangs initiaux avancée ici, illustrent que la médiation de la géométrie dynamique admet une gamme de possibilités, entre des usages comme amplificateur marginal de pratiques scolaires établies, jusqu'aux usages où l'outil sert de réorganisateur intégral pour créer des pratiques essentiellement neuves. On peut même suggérer que, où des usages amplificateurs prédominent –ce qui est l'état actuel anglais– il vaudrait peut-être mieux parler en termes des pratiques scolaires déjà constituées qui médient entre les enseignants et l'outil neuf.

**Figure 6: La formation socioculturelle des usages
d'un outil neuf dans un système éducatif**



Mais il ne faut pas ignorer que le façonnement des usages de technologies nouvelles reflète l'encadrement socioculturel de cette triade psychologique dans un système d'activité plus large (qui nécessite l'inclusion de la partie inférieure de Figure 6). Cela implique la médiation du rapport entre une communauté (représentée ici par les institutions systémiques) et les enseignants par les rôles professionnels, et la médiation du rapport entre les communautés et les pratiques scolaires par les normes curriculaires. L'état actuel anglais, décrit dans cet article, reflète une communauté où les enseignants sont considérés comme des exécuteurs d'un curriculum établi et reçu, chargés d'améliorer sa « livraison », plutôt que comme des interprètes d'un curriculum plus négociable et révisable, chargés de son adaptation et d'une innovation continue, toujours conscients des perspectives mathématiques plus larges. Également, l'analyse d'Artigue signale l'ampleur et la complexité du travail mathématique et de renégociation institutionnelle nécessaire à renouveler l'infrastructure didactique pour réaliser une intégration forte d'un outil neuf dans les pratiques scolaires et les normes curriculaires.

Références

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3) 245-274.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002) A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (3) 66-72.
- Bell, A. W., Costello, J., & Küchemann, D. (1983). *A Review of Research in Mathematical Education – Part A: Research on Learning and Teaching*. (NFER-Nelson, Windsor).
- Brown, S. & McIntyre, D. (1993) *Making Sense of Teaching*. (Open University Press, Buckingham).
- Cole, M. & Engeström, Y. (1993). A cultural-historical approach to distributed cognition. Dans G. Salomon (Ed.), *Distributed Cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 1-46). (Cambridge University Press, Cambridge).
- Department for Education and Employment [DfEE] (1997). *Excellence in Schools* (DfEE,

London).

Department for Education and Employment/Qualifications and Curriculum Authority [DfEE/QCA] (1999). *Mathematics: The National Curriculum for England*. (DfEE/QCA, London).

Department for Education and Employment [DfEE] (2001). *Key Stage 3 National Strategy: Framework for teaching mathematics*. (DfEE, London).

Department for Education and Skills [DfES] (2003). *Integrating ICT into mathematics in Key Stage 3*. (DfES, London).

*Deaney, R., Hennessy, S., & Ruthven, K. (à paraître). Teachers' strategies for making effective use of datalogging in secondary science lessons. *School Science Review*.

*Deaney, R., Ruthven, K., & Hennessy, S. (2006). Teachers' developing 'practical theories' of the contribution of information and communication technologies to subject teaching and learning: an analysis of cases from English secondary schools. *British Educational Research Journal* 32 (3).

Goodson, I., & Mangan, J. M. (1995). Subject cultures and the introduction of classroom computers. *British Educational Research Journal* 21 (5) 613-628.

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.) (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. (Springer, New York).

*Hennessy, S., Deaney, R., & Ruthven, K. (2005). Emerging teacher strategies for mediating technology-integrated instructional conversations: a socio-cultural perspective. *The Curriculum Journal* 16 (3) 265-292.

*Hennessy, S., Ruthven, K., & Brindley, S. (2005). Teacher perspectives on integrating ICT into subject teaching: Commitment, constraints, caution and change. *Journal of Curriculum Studies*. 37 (2) 155-192.

*Hennessy, S., Deaney, R., & Ruthven, K. (à paraître). Situated pedagogy for integrating use of multimedia simulation into secondary science teaching. *International Journal of Science Education*.

Hölzl, R. (2002). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations – a case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6 (3) 63-86.

Hoyles, C., Foxman, D., & Küchemann, D. (2001). *A comparative study of geometry*

- curricula*. (Institute of Education, London).
- Kaiser, G. (2002). Educational philosophies and their influence on mathematics education – an ethnographic study in English and German mathematics classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 34 (6) 241-257.
- Kerr, S. (1991). Lever and fulcrum: Educational technology in teachers' thought and practice. *Teachers College Record* 93 (1) 114-136.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6 (3) 283-317.
- Lagrange, J-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. Dans A. Bishop et al. (Eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education*, pp. 237-269.
- Miller, L., & Olson, J. (1994). Putting the computer in its place: a study of teaching with technology. *Journal of Curriculum Studies* 26 (2), 121-141.
- Moscovici, S. (1990). Social psychology and developmental psychology: continuing the conversation. Dans G. Duveen, & B. Lloyd (Eds.), *Social Representations and the Development of Knowledge* (pp. 164-185). (Cambridge University Press, Cambridge).
- Mullis, I., Martin, M., Gonzalez, E., & Chrostowski, S. (2004). *TIMMS 2003 International Mathematics Report*. (TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College).
- Noss, R. & Hoyles, C. (1996). A window on teachers. Dans *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers* (pp. 184-202). (Kluwer, Dordrecht).
- Office for Standards in Education [OfStEd] (2004) *ICT in schools – the impact of government initiatives: Secondary mathematics* (OfStEd, London).
- Royal Society/Joint Mathematical Council [RS/JMC] (2001). *Teaching and learning geometry 11-19*. (Royal Society, London).
- Ruthven, K. (1999). Constructing a calculator-aware number curriculum: the challenges of systematic design and systemic reform. Dans O. Zaslavsky (Ed.) *Proceedings of the 23rd. Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1 pp. 56-71). (Technion-Israel Institute of Technology, Haifa).

- Ruthven, K. (2001). Towards a new numeracy: the English experience of a 'calculator-aware' number curriculum. Dans J. Anghileri (Ed.) *Principles and Practice in Arithmetic Teaching* (pp. 165-188). (Open University Press, Buckingham).
- *Ruthven, K. (2005). Expanding current practice in using dynamic geometry to teach about angle properties. *Micromath* 21 (2) 26-30.
- Réproduit dans D. Wright (Ed.) (2005) *Moving on with Dynamic Geometry* (pp. 133-137). (Association of Teachers of Mathematics, Derby).
- Ruthven, K. (inédit). A systemic history of information technologies in English secondary school mathematics.
- *Ruthven, K., & Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics* 49 (1) 47-88.
- *Ruthven, K., & Hennessy, S. (2003). Successful ICT use in secondary mathematics – a teacher perspective. *Micromath* 19 (2) 20-24.
- Réproduit dans J.-A. Edwards & D. Wright (Eds.) (2005) *Integrating ICT into the mathematics classroom* (pp. 21-25). (Association of Teachers of Mathematics, Derby).
- *Ruthven, K., Hennessy, S., & Brindley, S. (2004). Teacher representations of the successful use of computer-based tools and resources in secondary-school English, Mathematics and Science. *Teaching and Teacher Education* 20 (3) 259-275.
- *Ruthven, K., Hennessy, S., & Deane, R. (2005a). Incorporating Internet resources into classroom practice: Pedagogical perspectives and strategies of secondary-school subject teachers. *Computers and Education* 44 (1) 1-34.
- *Ruthven, K., Hennessy, S., & Deane, R. (2005b). Incorporating dynamic geometry systems into secondary mathematics education: Didactical perspectives and practices of teachers. Dans D. Wright (Ed.) (2005). *Moving on with Dynamic Geometry* (pp. 138-158). (Association of Teachers of Mathematics, Derby).
- *Ruthven, K., Hennessy, S., & Deane, R. (2005c). Current practice in using dynamic geometry to teach about angle properties. *Micromath* 21 (1) 9-13.
- Réproduit dans D. Wright (Ed.) (2005) *Moving on with Dynamic Geometry* (pp. 128-132). (Association of Teachers of Mathematics, Derby).

Strauss, A, & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: an overview. Dans N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 273-285). (Sage, London).

Windschitl, M., & Sahl, K. (2002). Tracing teachers' use of technology in a laptop computer school: The interplay of teacher beliefs, social dynamics and institutional culture. *American Educational Research Journal* 39 (1) 165-205.

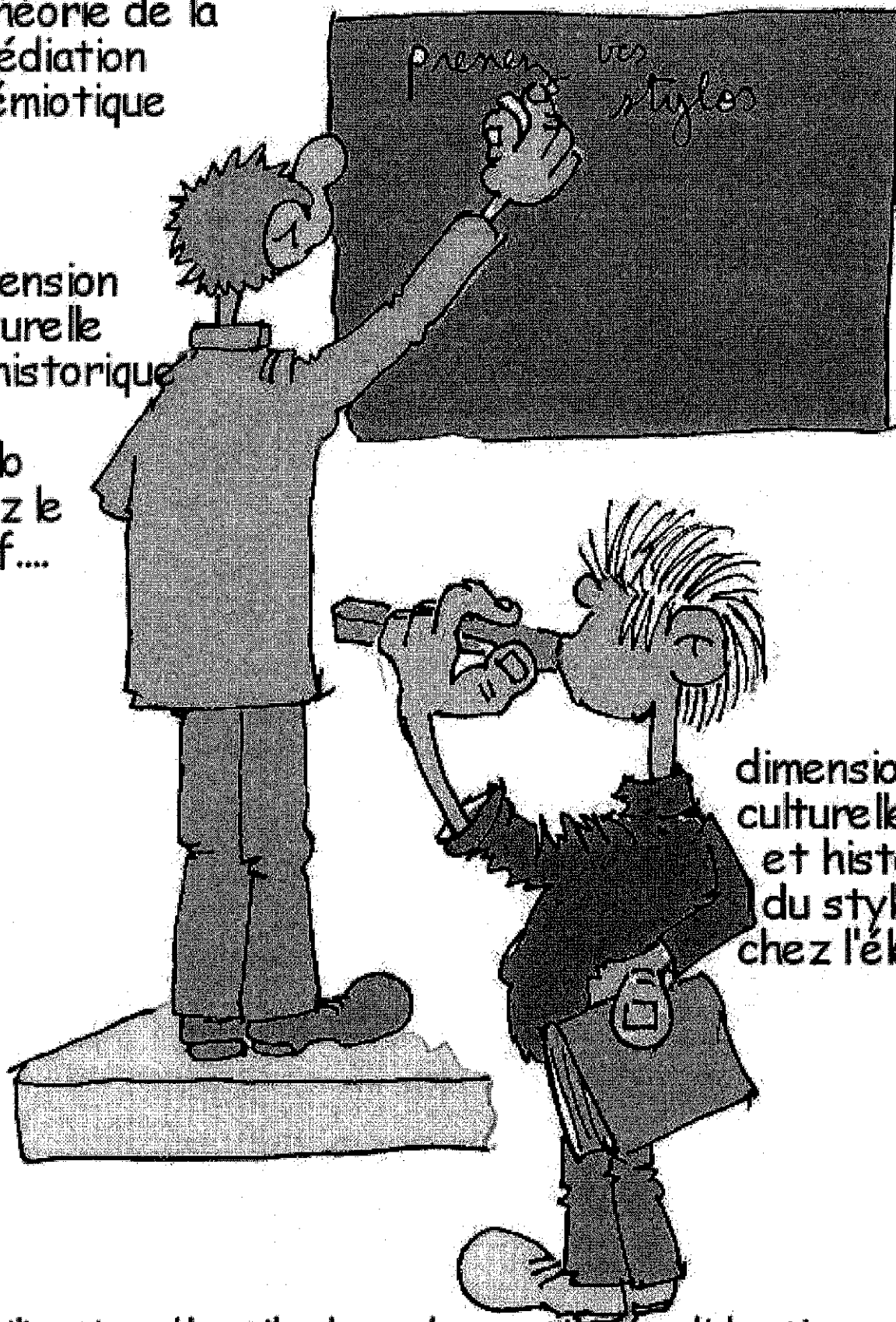
* Toutes ces publications sont téléchargeables de <http://www.educ.cam.ac.uk/istl/pub.html>.

University of Cambridge
Faculty of Education
184 Hills Road
Cambridge, CB2 2PQ
UK

kr18@cam.ac.uk

Théorie de la
médiation
sémiotique

Dimension
culturelle
et historique
du
stylé
chez le
prof....



dimension
culturelle
et historique
du stylé
chez l'élève

Utilisation d'outils dans des activités didactiques

Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction

Rossana Falcade

Université de Modena et Reggio Emilia

1. Introduction

Ce texte présente la thèse de doctorat intitulée «Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction» (Falcade, 2006)¹.

Cette thèse a été conduite en cotutelle Italie-France, entre l'Université Joseph Fourier de Grenoble et l'Università degli studi di Torino, sous la direction de Colette Laborde, de Maria Alessandra Mariotti et, pour l'Université de Turin, de Ferdinando Arzarello.

Bien évidemment notre présentation ne permettra pas de tout expliciter d'un travail commencé avant la thèse (Falcade, 2001, 2002 ; Falcade, Laborde et Mariotti 2003 et à paraître).

Nous chercherons ici à présenter des éléments marquants de cette étude, tout en sachant que si cette opération permet de réduire la complexité, elle comporte aussi le risque d'une certaine banalisation.

2. Le point de départ de notre recherche

On pourrait définir le processus de médiation sémiotique (noté MS) comme le processus par lequel des signes sont susceptibles de fonctionner comme médiateurs dans la construction d'autres signes.

¹ Je voudrais remercier, en particulier, Cécile Ouvrier-Buffet pour ses suggestions et sa disponibilité à relire ce texte.

Cette notion, inspirée de la psychologie de Vygotsky (Vygotsky, 1931/1978, 1934/1997), nous a semblé très importante dans le cadre de l'enseignement actuel des mathématiques, confronté au problème d'une utilisation efficace, c'est-à-dire didactiquement pertinente, des nouvelles technologies. En effet, la notion de MS peut jouer le rôle simultané d'outil d'analyse et de construction d'ingénierie.

C'est pour cette raison que nous avons décidé de l'étudier le processus de médiation sémiotique (PMS) dans notre thèse.

3. Théorie de la médiation sémiotique (TMS)

En se fondant principalement sur les travaux de psychologie cognitive développés par Vygotsky (Vygotsky, 1931/1978, 1934/1997) et, notamment, sur cette notion de processus de médiation sémiotique (PMS), Bartolini-Bussi et Mariotti ont développé un paradigme didactique appelé Théorie de la médiation sémiotique (TMS) (Bartolini Bussi, 1998 ; Bartolini Bussi et Mariotti, 1998, 1999 et 2006 ; Bartolini Bussi et al, 1995 ; Bartolini Bussi, Mariotti et Ferri (à paraître); Bartolini Bussi, Boni et Ferri (à paraître b) ; Mariotti, 2000, 2002, 2003).

Ce paradigme s'appuie sur l'hypothèse psychologique que le fonctionnement cognitif est profondément affecté par l'utilisation d'outils. L'émergence, l'évolution et l'internalisation de certains signes, socialement partagés et fabriqués à partir de l'usage d'outils culturellement significatifs, apparaissent comme centrales dans le processus d'enseignement apprentissage.

La TMS accorde donc une grande importance :

- au langage et à l'usage de signes ;
- aux dynamiques sociales, qui relient étroitement le plan intersubjectif avec le plan intra-subjectif;
- à l'utilisation d'outils, impliqués dans des activités didactiques à finalités spécifiques ;
- à la dimension culturelle et historique des outils impliqués.

Ainsi, puisque notre objectif premier était celui d'étudier le PMS, nous avons choisi de placer notre recherche au sein de ce cadre théorique.

4. Processus de médiation sémiotique (PMS) et Théorie de la médiation sémiotique (TMS)

Dans la TMS, les signifiés mathématiques sont les produits issus d'une certaine culture (qui utilise elle-même des artefacts) et d'une expérience phénoménologique.

Par conséquent, en utilisant une métaphore (Figure n°1), on pourrait affirmer que le monde des mathématiques peut trouver un correspondant dans le monde de l'artefact.

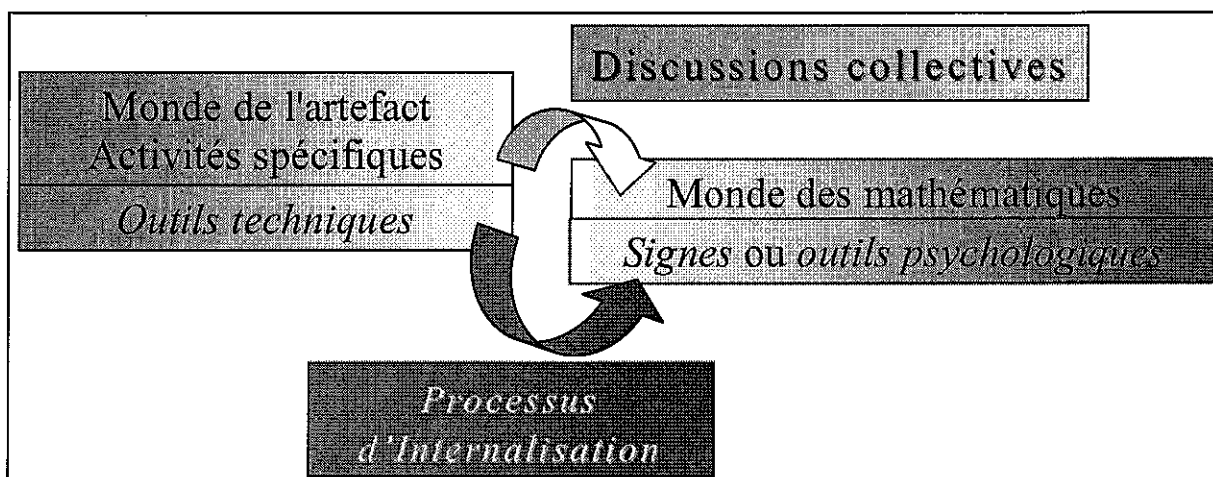


Figure n°1

Au sein d'activités spécifiques, socialement significatives, organisées dans le monde de l'artefact, les élèves peuvent mobiliser certains outils, qui de leur point de vue, sont là pour accomplir une tâche. En utilisant une expression Vygotskyenne, ,ces outils fonctionnent alors comme *outils techniques* du coté des élèves.

En revanche, du côté de l'enseignant, ces mêmes outils peuvent être engagés dans une stratégie didactique bien précise et devenir *signes* ou *outils psychologiques* au sens de Vygotsky, et participer ainsi à la construction de certains signifiés mathématiques.

Le principal objectif didactique du paradigme théorique de la TMS réside justement dans l'obtention de ce changement de signification d'*outils techniques* en *signes* susceptibles de renvoyer aux signifiés mathématiques visés. Ce changement de signification participe à ce que Vygotsky appelle *processus d'internalisation*.

En fait, ce processus est défini comme :

- « la reconstruction interne d'une opération externe »

- « la transformation d'un processus inter-personnel en un processus intra-personnel » (Vygotsky, 1931/1978)

La mise en place d'un espace intersubjectif dans lequel l'émergence, la négociation et l'internalisation des signifiés peuvent s'effectuer apparaît alors fondamentale au PMS.

Cet espace métaphorique revêt un rôle primordial dans la TMS et caractérise effectivement les moments de discussion collectives, où la mise en relation du monde de l'artefact avec le monde des mathématiques est centrale.

Soulignons que c'est dans l'usage tout particulier qu'en fait l'enseignant que réside la possibilité pour un outil de fonctionner comme instrument de médiation sémiotique (TMS).

Le rôle de l'enseignant est crucial :

- il organise les tâches avec l'artefact ;
- il orchestre les discussions collectives.

5. Articulation « Théorie des situations didactiques (TSD)/ Théorie de la médiation sémiotique (TMS) »

Lors de notre recherche, nous avons eu recours à un deuxième cadre théorique, celui de la Théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau, 1998), pour caractériser les conditions didactiques selon lesquelles organiser et étudier a posteriori le PMS.

Rappelons que les hypothèses psychologiques et didactiques sous-jacentes à ces deux cadres théoriques sont très différentes. Dans la TSD (Brousseau, 1998), les connaissances visées sont censées se construire comme connaissances nécessaires à la résolution d'une situation problème. En revanche, dans la TMS, les connaissances visées sont censées se construire en tant que signifiés, par un processus d'internalisation se mettant en place à la suite d'activités spécifiques conduites avec l'artefact ainsi que dans des discussions collectives orchestrées par l'enseignant.

Nous avons donc fait l'hypothèse qu'il existe une articulation possible et didactiquement pertinente entre TMS et TSD (première hypothèse de travail).

Le paragraphe suivant est consacré à la recherche des raisons qui, d'une part fondent une telle hypothèse, et d'autre part nous ont amené à bâtir cette articulation.

5.1 Pourquoi cette articulation ?

Plusieurs raisons nous ont conduit à considérer comme viable et didactiquement opportune cette articulation.

D'une part, nous constatons que la TSD est fortement opérationnelle pour construire et analyser des séquences d'enseignement. En particulier, elle a élaboré depuis une trentaine d'années des outils très efficaces d'analyse et de modélisation des interactions Elève-Situation.

D'autre part, nous observons que la TMS a une valence théorique générale et une longue pratique d'utilisation dans l'enseignement des mathématiques en Italie. Elle est très développée en ce qui concerne la mise en place et l'analyse du PMS et, au sein de ce processus, des discussions collectives orchestrées par l'enseignant.

Cependant, la TMS nous donne relativement peu d'outils pour la prise en compte des interactions Elève-Situation. D'une manière générale, les domaines d'opérationnalité de ces deux cadres théoriques ne sont pas les mêmes.

Construire une articulation entre ces deux cadres théoriques a également été motivé par la spécificité suivante : le type de savoir que nous envisageons enseigner et, plus particulièrement, le statut de son insertion et son fonctionnement dans le paysage mathématique déjà construit ou en cours de construction chez les élèves.

Nous envisageons la construction du signifié² de « fonction » dans son sens général : il n'est pas question de le réduire aux « fonctions numériques ».

Pour les fonctions, un grand nombre de représentations existent au lycée. De plus, elle présente des enjeux d'apprentissage importants (« variable », « graphe », etc.) ainsi qu'une dimension historique forte.

Ainsi, si l'on s'interroge sur le statut de la notion de fonction, on s'aperçoit que cette notion s'avère centrale transversale. et revêt différents registres de représentation. A juste titre, étiquetée par Robert et Robinet (Robert, 1998 ; Robert et Robinet, 1996) comme « généralisatrice, unificatrice et porteuse d'un nouveau formalisme ».

Ce n'est pas un hasard si les analyses épistémologiques conduites autour de cette notion (à l'image d'autres notions de ce type) montrent que son passage dans la genèse historique,

² Pour simplifier le discours nous utilisons ici le mot « signifié » au singulier mais, en réalité, pour nous, il s'agit toujours de la construction d'une pluralité de signifiés différents inter-reliés.

pour utiliser une expression de Dorier (Dorier et al, 1997) « a été très lent, sinueux et compliqué ».

Ainsi, il nous semble qu'il n'existe pas une suite de situations fondamentales qui, seule, peut faire émerger cette notion, dans toute sa complexité, dans un temps raisonnable et de façon opérationnelle, en tant que connaissance nécessaire à la résolution d'un problème.

En revanche, à l'intérieur de cette notion, on trouve des éléments susceptibles de bien jouer le rôle de « concepts en acte » (Vergnaud, 1991) dans la solution d'une situation-problème.

Le processus de médiation sémiotique peut justement soutenir le passage du niveau « outil implicite de solution » (Douady, 1986) au niveau « objet explicite » par la mise en place, en particulier, de discussions collectives orchestrées par l'enseignant, avec un contrat didactique spécifique.

Les raisons que nous venons d'évoquer brièvement expliquent pourquoi nous avons supposé possible et didactiquement pertinent l'articulation entre ces deux cadres théoriques. Nous voulons cependant souligner que la place de ces deux cadres théoriques n'est pas « symétrique » : la TMS a guidé globalement la mise en place et l'analyse du PMS. La TSD est intervenue donc, de manière « orthogonale » à la TMS, à deux niveaux :

- d'une part, lors de la conception de la séquence, en permettant une analyse *a priori* de certaines tâches et de l'artefact en tant que composant du milieu ;
- d'autre part, lors de l'analyse *a posteriori*, en fournissant des outils d'analyse et de modélisation de ce même PMS, complémentaires aux outils fournis par la TMS.

5.2 Questionnement

A partir de notre hypothèse de travail, nous avons questionné l'articulation TMS/TSD tout au long de notre recherche. En fait, chaque cadre théorique nous semble pouvoir fournir un regard complémentaire par rapport à l'étude du PMS.

Nous aurions pu aborder la présentation de notre thèse par d'autres perspectives, cependant nous avons choisi de l'introduire par un questionnement concernant plus spécialement cette articulation.

Nous nous sommes posé alors les questions de recherche suivantes :

Q1 : Quelle articulation possible ?

Grâce à cette articulation...

Q2 :... quels apports pour l'étude du fonctionnement prévu/effectif d'un artefact impliqué dans le PMS ?

Q3 :... quels apports pour la modélisation de l'enseignant lors de l'orchestration des discussions collectives conçues en fonction du PMS ?

Q4 :... quels apports pour la modélisation plus en général de ce PMS ? Quels mécanismes liés au PMS permet-elle d'identifier ?

La présentation (brève) de la séquence expérimentale et du rôle attendu/effectif joué par l'artefact permettront d'apporter des éléments de réponse respectivement à la première et à la deuxième question.

Certains éléments de notre analyse de l'action de l'enseignant permettront de répondre à notre troisième question.

En ce qui concerne notre dernière question, plus générale, nous aborderons très brièvement notre analyse des signes. En fait, cette analyse, reprenant aussi des éléments de la sémiotique peircienne, a permis d'intégrer l'articulation TMS/TSD pour apporter des réponses à la quatrième question.

5.3 La séquence expérimentale

Afin d'étudier le PMS nous avons élaboré une ingénierie didactique.

Elle a conduit à la conception et à la réalisation effective d'une séquence expérimentale.

Nous n'aborderons dans ce texte que très brièvement la construction de cette séquence expérimentale. Cependant, lors de notre travail de thèse, nous avons dégagé un certain nombre de critères de constructibilité basés en particulier sur l'articulation TMS/TSD. Cela nous permet d'affirmer que la séquence actualise, voire, implémente ces critères et, par conséquent, constitue en elle-même un théorème d'existence « constructif » de l'articulation possible entre TSD et TMS.

Cela permet aussi, et nous le verrons par la suite, d'apporter des éléments de réponse à notre première question (Q1).

Notre analyse des racines historico-épistémologiques et cognitives des notions de « variable », « fonction » et « graphe de fonction », ainsi que des difficultés et obstacles liés à cet apprentissage, ont conduit à l'identification de deux autres hypothèses de travail fondamentales.

La première affirme qu'il est nécessaire de fonder l'apprentissage de la notion de « fonction », telle qu'elle l'a été historiquement, sur le signifié de co-variation, c'est-à-dire sur le signifié de « fonction » comme de relation particulière, asymétrique, entre deux variations corrélées, une dépendante de l'autre (deuxième hypothèse de travail).

En corollaire à notre première hypothèse de travail, nous postulons que ce signifié co-variationnel de « fonction » est aussi fondamental pour la construction du signifié de « graphe de fonction » car il permet d'accéder à une *interprétation dynamique du « graphe de fonction »*

(corollaire de la deuxième hypothèse de travail).

Pour interpréter le « graphe » en termes dynamiques et co-variationnels, comme l'explique Laborde (Laborde, 1999), il faut avoir à l'esprit la dissymétrie des variables et pouvoir considérer la

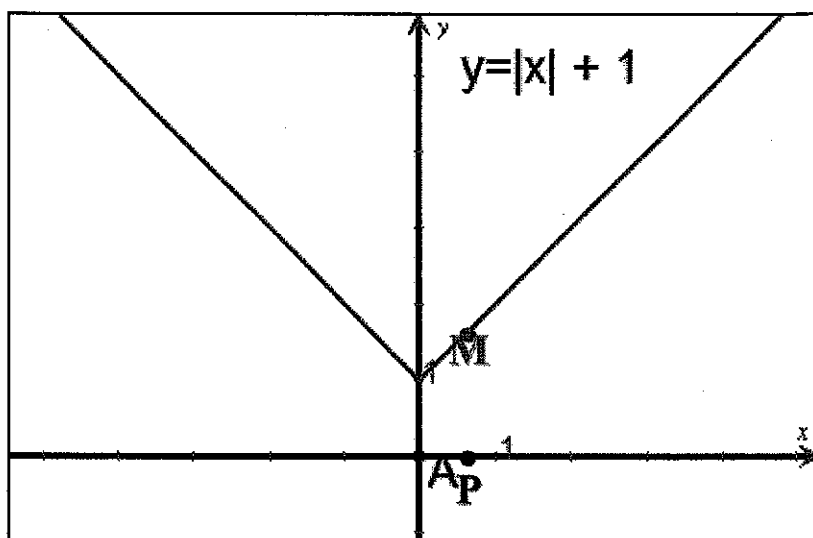


Figure n°2

courbe représentative (Figure n°2) comme la trajectoire d'un point M qui bouge, représentant la variable dépendante, en fonction de la variation d'un autre point P variable sur l'axe des abscisses, qui représente la variable indépendante. Cette interprétation complexe requiert la réintroduction du temps et la prise en compte de deux variations inter-reliées.

Malheureusement, cette interprétation reste souvent négligée dans les textes scolaires. Elle ne peut pas être expérimentée concrètement et demeure comme une sorte d'expérience mentale, peu souvent socialement partagée.

Parallèlement, il faut aussi observer que, dans l'institution scolaire, en opposition avec notre première hypothèse, cet aspect de « fonction » comme co-variation est souvent négligé au profit d'une approche quantitative, presque exclusivement numérique ou algébrique.

Nous considérons que le signifié co-variationnel des « fonctions », réinvesti dans la notion de graphe, permettrait de fonder l'apprentissage du graphe sur le rôle dissymétrique des variables et de réintroduire une sorte de lien temporel entre les variations des variables indépendante et dépendante.

Pour cette raison, nous avons proposé une approche alternative et nous avons conçu une séquence expérimentale d'un certain point de vue, radicalement différente de ce que présentent les curricula français et italiens.

En particulier, nous avons bâti la construction des signifiés de « fonction » et de « graphe de fonction » à partir des fonctions géométriques, dans un environnement de géométrie dynamique (EGD), tel que Cabri-géomètre. Ce choix correspond à notre deuxième hypothèse de travail.

En offrant une modélisation des objets géométriques à l'écran en tant qu'objets variables, cette approche nous semble pouvoir soutenir une appréhension dynamique et co-variationnelle des notions visées. Ainsi, par exemple, des points qui bougent librement peuvent effectivement fonctionner comme des signes des « variables indépendantes », alors qu'un point ne bougeant que de façon indirecte (en déplaçant les points dont il dépend), peut fonctionner comme un signe de la « variable dépendante ».

5.4 Le dispositif expérimental

Le dispositif expérimental a été modifié, de façon interactive, au fur et à mesure de ses réalisations. Cela nous a permis d'aboutir à une dernière séquence en Italie de 22 séances environ. Nous allons relater cette séquence dans le présent article.

La classe étudiée est une classe de niveau scolaire analogue à une classe de seconde où les (treize) élèves avaient déjà une certaine familiarité avec Cabri et avaient déjà participé à d'autres expérimentations se situant dans le paradigme de la TMS. L'enseignante italienne, qui a accepté de réaliser cette séquence, collabore depuis dix ans avec Mariotti et est une enseignante expérimentée dans la gestion des discussions collectives, toujours selon le paradigme de la TMS.

Ces conditions ont garanti la présence d'un contrat didactique bien établi et, étant donné le nombre réduit d'élèves, une implication fortement facilitée dans les discussions collectives. Lors de la dernière expérimentation, nous avons demandé aux élèves de prendre part à une organisation des activités « cyclique » synthétisable de la manière suivante (Figure n°3) :

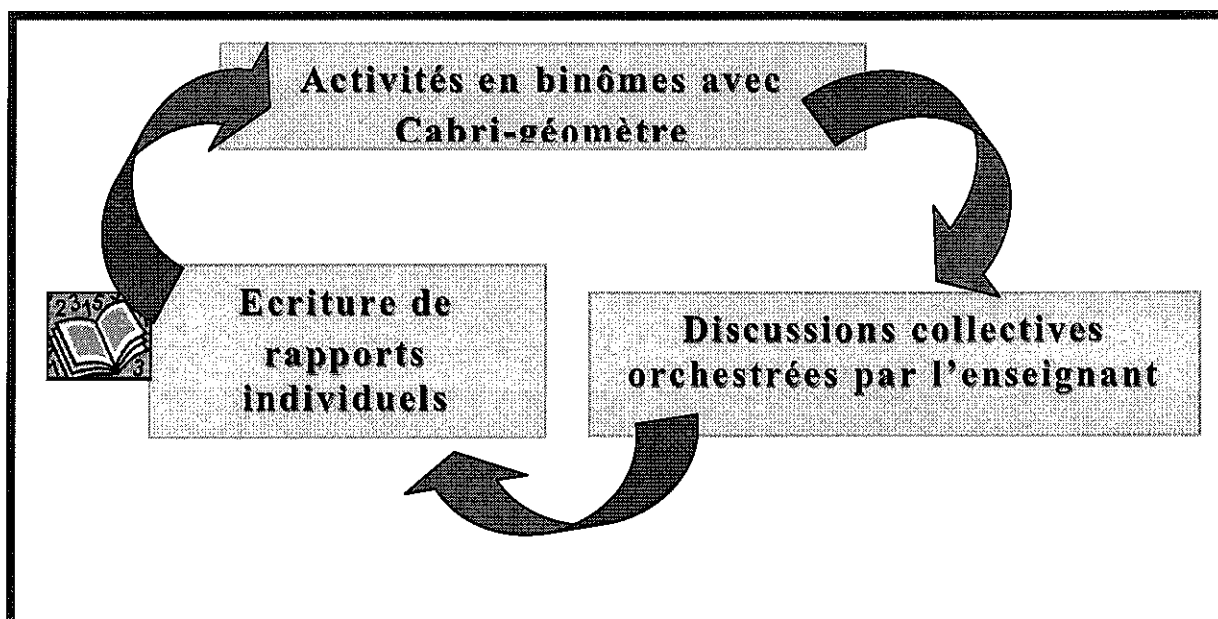


Figure n°3

En particulier, à chaque séance, après avoir travaillé en binômes dans Cabri, et avoir rempli une fiche de travail concernant l'activité avec Cabri, les élèves ont pris part à une discussion collective, puis ont rédigé à la maison un rapport individuel.

Les élèves avaient pour consigne d'écrire et justifier ce qu'ils avaient vécu et compris, ainsi que leurs doutes et questions.

Selon les termes du contrat didactique, tout ce qui était écrit devait être ponctuellement justifié et devenait l'objet des discussions ultérieures.

Nous voulons souligner la complexité et la dimension temporelle importante de cette dernière séquence. Toutes ces conditions expérimentales finalement très particulières, permettent de garantir, d'une part, la mise en place d'un processus (le PMS) qui nécessite du long terme et, d'autre part, une analyse fiable même du bref segment expérimental présenté de manière plus approfondie lors de notre thèse.

5.5 Organisation générale de la séquence

La séquence était organisée en trois parties :

- I. La première partie portait sur la construction de la notion et de la définition de « fonction », à partir des « fonctions géométriques » (mais non limitée à celles-ci) et de l'idée de trajectoire dans Cabri. En effet, puisque dans Cabri le domaine et l'ensemble image d'une « fonction » (géométrique) sont représentés en tant que

trajectoires de points corrélés qui bougent, cette notion de trajectoire, qui est à la fois « une succession de positions d'un point qui bouge dans le temps » et « un objet en soi », peut conduire à la construction d'un signifié de fonction, qui incorpore une relation asymétrique de co-variation entre, à la fois, des points qui bougent et des ensembles corrélés.

II. La deuxième partie portait sur la lecture, l'interprétation et l'implémentation dans Cabri d'un extrait du texte "**Introductio in analysin Infinitorum, Tomus secundus**" d'Euler.

Dans ce texte, ce mathématicien introduit l'idée de graphe comme moyen permettant de

représenter

« géométriquement »

(en termes modernes

nous pourrions dire

« par une fonction

géométrique ») une

fonction numérique

donnée.

Plus précisément

(Figure n°4), dans

Cabri, étant donné un

seul axe horizontale et

un point fixé sur cet

axe, l'origine, A, le graphe d'une fonction numérique f , selon Euler, peut être construit comme trajectoire d'un point M qui est l'extrémité d'un segment de longueur $f(x)$ et dont l'autre extrémité est un point variable P de l'axe des abscisses qui est à la distance x de l'origine.

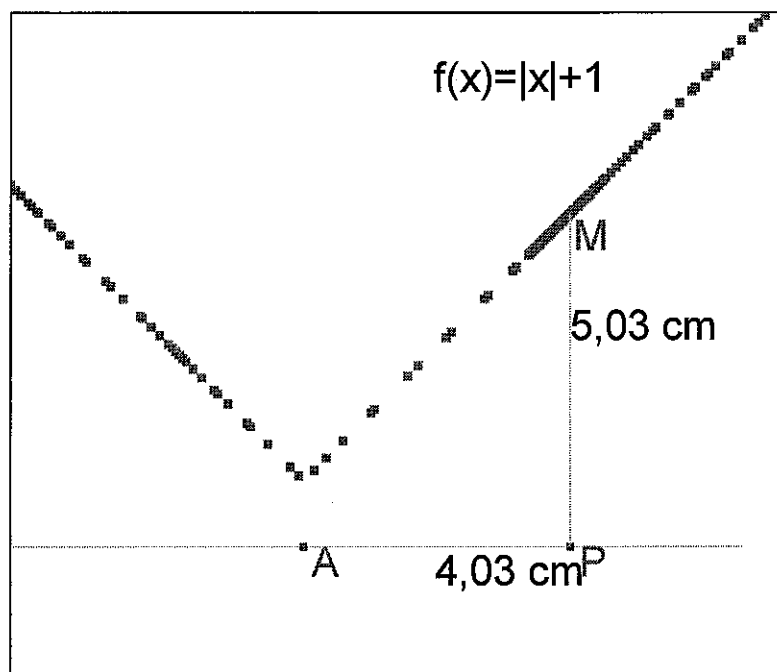


Figure n° 4

III. En fin, la troisième partie de la séquence expérimentale concernait la résolution de problèmes d'interprétation du graphe et de modélisation à l'aide de graphes de fonction.

5.6 L'articulation TMS/TDS dans la séquence expérimentale

L'articulation TMS/TSD a conduit à l'organisation d'un processus d'enseignement-apprentissage, modélisé à la fois comme processus d'adaptation à un milieu didactique organisé, porteur de déséquilibres et comme processus de construction de signifiés.

Cette double approche a trouvé son instanciation tant au niveau microscopique, dans la conception des tâches diverses, au sein de chaque séance, qu'au niveau macroscopique, dans l'organisation et l'enchaînement global des séances diverses au sein de la séquence expérimentale.

En particulier, du point de vue de la TSD, les notions de « milieu » et de « variable didactique » nous ont servi pour concevoir des tâches, comportant, souvent, des moments adidactiques, à partir desquelles le travail de semiosis (c'est-à-dire de production, partage et réélaboration conséquente de certains signes) orchestré par l'enseignante, surtout lors des moments de discussions collectives, a été possible.

Nous présenterons deux exemples de cette articulation.

Le premier exemple nous permettra de montrer comment l'articulation TMS/TSD a fonctionné au niveau microscopique, c'est-à-dire, dans la conception d'une tâche au sein d'une séance.

Le deuxième exemple, quant à lui, permettra d'illustrer comment cette articulation au niveau macroscopique a joué, c'est-à-dire dans l'organisation globale de la séquence.

5.6.1 Exemple d'articulation au niveau microscopique : séance 1, question 5

Ce premier exemple est tiré de la première séance et porte sur la cinquième question posée aux élèves.

Lors de cette première séance les élèves doivent explorer puis reconstruire une macro-construction inconnue, déjà préenregistrée sur leur écran, appelée « Effet1 ».

Cette macro implémente dans Cabri une « fonction » f qui à un triplet de points (A, B, P) du plan, associe un point $H=f(A, B, P)$ du plan qui est la projection orthogonale de P sur la droite (A, B) .

La situation créée met donc en jeu quatre points variables, les trois points A, B et P indépendants et le point H dépendant des trois autres.

Le choix de faire varier les points A, B et P dans tout le plan est dû à notre souci de faire apparaître par contraste, la trajectoire de H comme contrainte. Les traces des déplacements

de **A**, **B** et **P** sont quelconques dans tout le plan, erratiques, alors que celle de **H** se détache comme une forme bien déterminée, cercle ou ligne droite.

Ce choix permet d'amplifier du point de vue visuel le comportement dissymétrique des points « variables indépendantes », « versus » point « variable dépendante ».

Ainsi, par exemple, les élèves peuvent observer que (Figure n°5) s'ils déplacent le point **A** partout dans le plan, le point **H** bouge aussi et se déplace sur un cercle. En revanche s'ils cherchent à déplacer le point **H** directement, en le prenant avec la souris, ce point ne bouge pas.

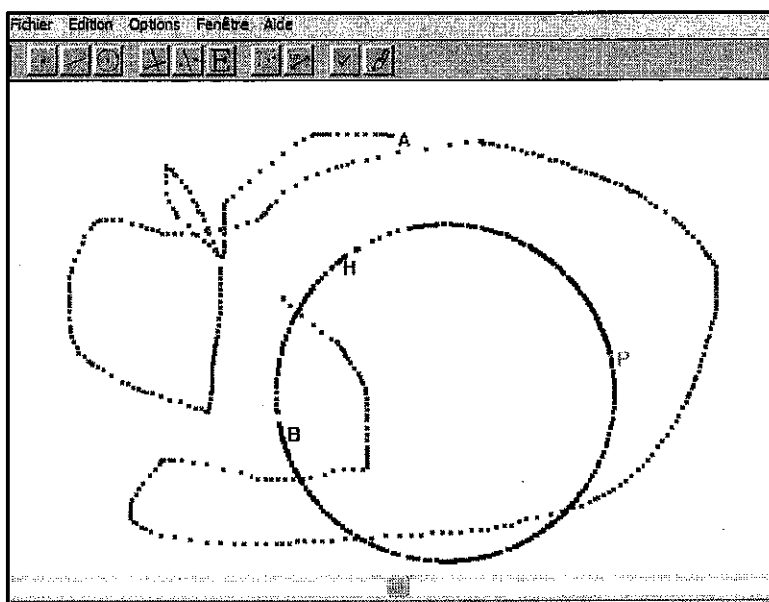


Figure n°5

Lors de la résolution des quatre premières questions, les élèves ont déjà exploré le comportement dissymétrique de différents points. Ils ont déjà étudié et décrit, en termes géométriques, les trajectoires suivies par ces points et ils ont aussi reconstruit par eux-mêmes (c'est-à-dire sans utiliser la macro « Effet1 ») une des constructions géométriques sous-jacente à la macro « Effet1 » donnée.

A la suite de ces activités la question cinq est la suivante :

*« Comment déplacer **P** pour que le point **H** ne bouge pas ? Utilisez l'outil Trace pour vous aider et décrivez ci-dessous ce que vous avez fait et obtenu. »*

La TSD est intervenue dans la conception de cette question et a permis deux apports fondamentaux.

Tout d'abord, elle a guidé la conception de cette question grâce à la notion didactique de « variable didactique ».

En fait, cette question fait jouer la variable didactique « nature de la fonction à une variable mobilisée », en proposant aux élèves la « fonction » qui à **P** associe **H** et qui est non

« injective ». Nous n'avons pas ici la place d'étudier les autres questions posées, mais il faut savoir que les élèves y ont travaillé avec des « fonctions à une variable injectives ». La question posée, donc, par l'opposition à d'autres questions mobilisant des « fonctions injectives », permet d'aborder le signifié de « fonction constante ».

Même si cette question a été construite à partir d'un outil issu de la TSD, c'est-à-dire la notion de « variable didactique », elle ne problématise pas vraiment le fait qu'il existe des positions de **P** pour lesquelles **H** ne bouge pas : sa formulation semble suggérer, déjà, un tel constat.

Ce qui est problématique pour les élèves est l'identification des moyens par lesquels obtenir le fait que **H** reste effectivement immobile. En outre, pour passer d'une pure conjecture sur la trajectoire de **P** à suivre (Figure n°6, à gauche), à une certitude expérimentale, il est nécessaire de chercher une validation par Cabri. Il faut concevoir la trajectoire de **P** comme une droite perpendiculaire à la droite (**AB**), la construire (donc mobiliser des connaissances géométriques opportunes) ; éventuellement activer l'outil de Cabri « Redéfinition d'un

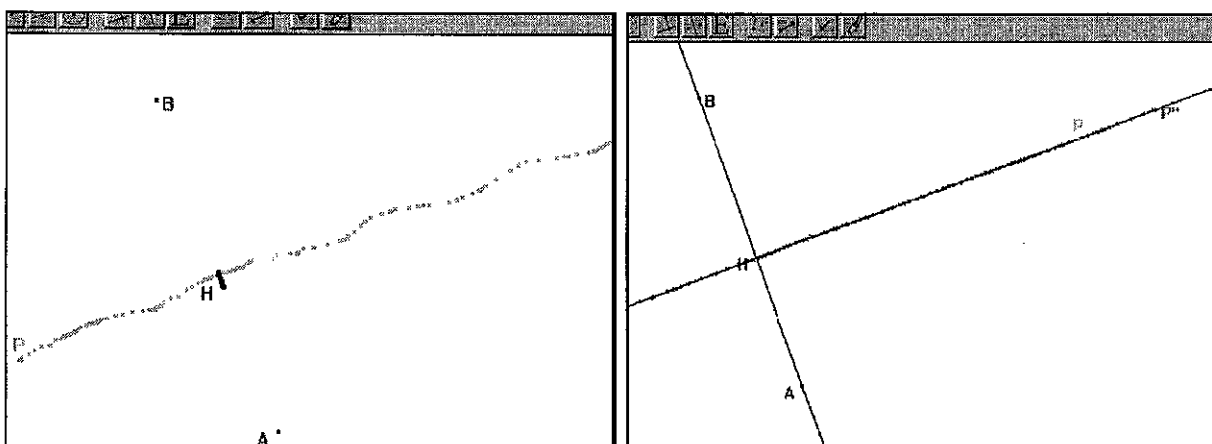


Figure n°6

objet » pour redéfinir **P** comme appartenant à cette droite et, par le déplacement de **P** sur cette droite (c'est-à-dire par une rétroaction opportune de Cabri), vérifier que **H** ne bouge effectivement pas (Figure n°6, à droite).

Cette tâche permet donc l'entrée dans un milieu adidactique organisé au sens de la TSD. Là, en guidant l'organisation d'un milieu adidactique susceptible de mobiliser la construction de certaines connaissances, nous situons le deuxième apport fondamental de la TSD à la construction de cette tâche.

Cependant, et là nous pouvons voir l'articulation TMS/TSD, les connaissances géométriques, outil de résolution de ce problème (TSD), ne sont pas en cause en tant que

connaissances visées ; ces connaissances sont en fait supposées être déjà présentes chez des élèves de Seconde.

En revanche, l'objectif principal de cette activité réside dans la possibilité, lors de la discussion collective consécutive, de travailler sur :

- la co-variation entre les points « variables indépendantes » et le point « variable dépendante »
- le double statut de la « trajectoire »,
- la co-variation entre le « domaine » et « l'image »,
- les signifiés de « domaine » et « restriction du domaine »,
- les signifiés « d'image » (ponctuelle/globale)
- le signifié de « fonction constante ».

Ainsi, la raison didactique de cette tâche réside dans la TMS, où des connaissances construites en interaction avec l'artefact serviront comme éléments sur lesquels articuler un travail spécifique sur les signes et les signifiés visés, lors de la discussion collective consécutive.

5.6.2 Exemple d'articulation au niveau macroscopique : la séance 5

Voici les questions posées lors de la séance cinq :

1a) Comment représenteriez-vous **par une formule** la fonction numérique g qui à chaque nombre réel x associe son carré augmenté de 5 ?

1b) En utilisant la "Calculatrice" de Cabri, complétez le "Tableau des valeurs" de la fonction g suivant :

x	$g(x)$
-2	
-1,3	
0	
1,78	
2,651	
3	

En général, un tableau de valeurs ne permet pas de représenter complètement une fonction numérique, c'est-à-dire de représenter **toutes** les valeurs de x réel et de son image.

Nous voulons trouver une méthode pour représenter géométriquement dans Cabri la variation de l'image d'un nombre x quand x varie.

2a) D'abord, comment pouvez-vous représenter géométriquement dans Cabri **un nombre réel x qui varie de -2 à 3** ? Décrivez ci-dessous en détail ce que vous avez fait en Cabri.

2b) En suite, comment pouvez-vous représenter géométriquement dans Cabri **la variation d'un nombre réel x qui varie de -2 à 3 et, en même temps, la variation de son image par la fonction g** ? Illustrez et décrivez en détail ci-dessous la méthode que vous avez inventée.

La séance cinq n'était pas prévue dans nos premières réalisations de la séquence expérimentale en France et en Italie en 2001. Les élèves, après avoir rencontré les fonctions numériques, étaient alors d'emblée confrontés à la tâche d'interpréter le texte d'Euler à l'aide de Cabri. Rappelons que ce texte est censé fonctionner comme médiateur sémiotique pour la construction du signifié de « graphe de fonction », puisqu'il propose et décrit une méthode pour représenter une fonction numérique par l'intermédiaire d'une fonction géométrique. Rappelons aussi que, dans les implémentations habituelles du paradigme théorique de la TMS, l'arrivée d'un outil de médiation sémiotique n'est pas systématiquement problématisée.

En revanche, lors de la dernière réalisation de la séquence expérimentale, nous avons décidé d'insérer aussi cette nouvelle séance. Comme on peut le lire, elle demande de représenter une fonction numérique donnée par une expression algébrique et par une table de valeurs. Ensuite, elle demande aux élèves de trouver eux-mêmes une méthode susceptible de représenter dynamiquement, par une fonction géométrique adéquate, la variation conjointe des deux variables numériques, l'une dépendant de l'autre, associées à la fonction donnée.

Ce choix, dû spécifiquement à l'interaction entre TdS et TMS, a eu justement pour objectif, d'abord, de focaliser l'attention des élèves sur l'existence de plusieurs représentations sémiotiques d'une fonction numérique et, ensuite, de problématiser l'arrivée du texte d'Euler, qui, au problème de « comment représenter dynamiquement et géométriquement une fonction numérique », propose une solution efficace. L'introduction de cette séance est issue directement de l'hypothèse élaborée par Brousseau (Brousseau, 1996), concernant la nécessité de dévoluer aux élèves la responsabilité face aux connaissances à construire. En fait, le travail préalable sur la recherche d'une méthode de représentation géométrique et dynamique d'une fonction numérique dans Cabri (séance cinq), doit permettre aux élèves de s'emparer puis de prendre en charge la question à laquelle le texte d'Euler, introduit lors de la séance consécutive, répond. Le travail demandé par cette séance correspond donc partiellement à l'élaboration de ce que Brousseau appelle

« la stratégie de base », tandis que la méthode d'Euler serait une des « stratégies optimales ».

Observons en outre que la réponse à la question 2a) est correcte si la représentation fournie permet de voir tout nombre réel x qui varie dans son domaine. En revanche, la deuxième représentation requise est correcte (réponse à la question 2b) si elle permet de visualiser la variation de tous les nombres du domaine et en même temps la variation des images correspondantes. Ainsi, dans cette deuxième question, la co-variation joue le rôle de critère pour valider ou invalider les méthodes proposées.

5.7 Articulation TMS/TSD et rôle de l'artefact (Q2)

Venons maintenant brièvement aux apports de l'articulation TMS/TSD pour l'étude du rôle de l'artefact, impliqué dans le PMS (question de recherche n°2).

En fait, cette articulation relève de manière particulière du rôle attribué à Cabri-géomètre.

Comme nous l'avons aperçu lors de l'exemple précédent, mais cela est vrai pour la séquence entière, cet artefact a été impliqué selon une double perspective:

- en tant que composante fondamentale du milieu organisé ;
- et en tant qu'instrument de médiation sémiotique.

Par exemple d'une part, Cabri permet soit de valider la résolution de la tâche soit de répéter les essais.

Cette première perspective permet donc de prendre en compte les connaissances outils de solution de problèmes, mobilisées par les tâches posées, susceptibles d'être construites par les élèves.

D'autre part, toujours dans l'exemple précédent, la tâche cinq permettait de mobiliser les outils de Cabri *Déplacement* (*direct* et *indirect*) + *Trace*, auxquels nous avons relié, dans notre analyse épistémologique de l'artefact, la possibilité de construire les signifiés de « trajectoire », de « co-variation point variable indépendante-point variable dépendante » et de « co-variation domaine-image ».

Cette deuxième perspective permet donc l'identification et l'exploitation du potentiel sémiotique des outils disponibles.

Il s'agit donc de deux perspectives complémentaires non exclusives :

- l'une, permettant d'organiser des rétroactions opportunes de Cabri, au sein de chaque séance, et par conséquent de mieux saisir le rôle et l'effet potentiel de l'artefact dans la résolution de certains problèmes,

- l'autre de mieux guider l'orchestration des discussions collectives vers l'actualisation de ce potentiel.

5.8 Articulation TMS/TSD dans la modélisation du rôle de l'enseignant lors de l'orchestration des discussions collectives (Q3)

Par rapport à notre troisième question de recherche, celle concernant l'analyse de l'action de l'enseignant, nous avons élaboré une méthodologie d'analyse spécifique.

Cette analyse intègre plusieurs outils (outils qui ont conduit à la constitution de deux grandes familles de catégories d'actions) et se développe à deux niveaux.

Les outils intégrés dérivent de :

- la TSD (Brousseau, 1996) (« milieu », « contrat ») ;
- les recherches de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni sur l'activité professorale (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000) ;
- les recherches de Comiti, Grenier et Margolinas sur les phénomènes de « résonance » (Comiti et Grenier, 1993, 1997 ; Comiti, Grenier et Margolinas, 1995) ;
- les recherches de Bartolini-Bussi et Mariotti sur l'orchestration des « discussions mathématiques » (Bartolini Bussi, 1998 ; Bartolini Bussi et Mariotti, 2006)

Des travaux précédents, nous avons extrait deux grandes familles de catégories d'analyse.

La première famille porte particulièrement sur la TSD et relève, en général, de la modélisation de l'action professorale. En fait elle s'appuie fortement (en les réinterprétant) sur des éléments des recherches de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000).

Par rapport à cette famille, nous avons cherché à identifier différentes actions :

- des actions à *dominante mésogénétique*, c'est-à-dire des actions qui concernent plus particulièrement la fabrication et l'agencement du milieu (autrement dit la production des objets des milieux et l'organisation des rapports à ces objets) ;
- des actions à *dominante topogénétique*, c'est-à-dire des actions qui portent plus particulièrement sur la production et la gestion des positions occupées par les différents acteurs de la relation didactique ;
- des actions à *dominante chronogénétique*, c'est-à-dire des actions qui concernent plus particulièrement la gestion de l'avancée du temps didactique.

La deuxième grande famille, issue de la TMS, relève plus spécifiquement de la modélisation de l'action professorale lors des « discussions mathématiques » (Bartolini Bussi, 1998 ; Bartolini Bussi et Mariotti, 2006).

Par rapport à cette deuxième famille, nous avons cherché à identifier :

- les actions de type langagier (« reflet », « paraphrase », ...) car, rappelons-le, la TMS accorde une place centrale aux signes langagiers ;
- la dialectique signifiés personnels / signifiés socialement partagés (rappelons que cette dialectique intervient dans le « processus d'internalisation ») ;
- les mouvements de généralisation/ spécification : ces mouvements caractérisent souvent les allers-retours entre le monde de l'artefact et le monde des mathématiques.

Ces deux grandes familles d'analyses parfois se recoupent, parfois se chevauchent, parfois sont complémentaires dans leur apport à la modélisation de l'enseignant et du PMS.

Comme annoncé, notre méthodologie s'est aussi développée selon deux niveaux d'analyse :

- un niveau à *dominante descriptive*, en restant les plus proches possibles de la sémantique de l'action ;
- un niveau à *dominante interprétative*, utilisant des catégories plus proprement didactiques pour chercher à interpréter ce qui se passe.

Nous parlons toujours de caractère « dominante » car, dans le deux cas, il s'agit toujours d'interpréter les événements. Cependant, dans le deuxième niveau, le degré d'interprétation didactique est plus important : il est majeur.

5.8.1 Exemple d'analyse d'un extrait de la première discussion collective

Nous présentons maintenant un petit extrait issu de la première discussion collective. En amorçant brièvement le type d'analyse conduite, nous chercherons à montrer comment nous avons fait fonctionner les catégories d'actions évoquées précédemment et quels sont les résultats que nous avons pu en obtenir.

Cet extrait relève de la séance dont nous avons présenté la question cinq et se situe après une trentaine de minutes de discussion collective.

Pendant ces trente premières minutes, les élèves ont déjà revisité collectivement les trois premières questions et, par cela, ils ont déjà étudié ensemble le comportement dissymétrique des différents points à l'écran, **A**, **B**, **P**, et **H**. Ils ont déjà caractérisé

géométriquement la trajectoire de ces points et ils ont reconstruit collectivement les constructions géométriques différentes sous-jacentes à la macro « Effet1 ».

Lors de ces reconstructions, ils se sont aperçus que, pour construire **H**, sans utiliser la macro « Effet1 », il est nécessaire de considérer, dès le départ, les trois points **A**, **B** et **P** simultanément à l'écran. Pour cette raison, Marco intervient et dit :

130. MARCO : *H est en fonction des trois points !*

131. P : *H est en fonction des trois points... Oh ! Quelle phrase magique !... H est en fonction des trois points... Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P. Et alors qu'est cette chose qui faisait apparaître le point H, pour nous ?*

132. MARCO : *Deux cercles et une droite.*

133. P : *Si je la fais. Et sinon, au début, juste au début ?*

134. IGOR : *La Macro.*

135. P : *La Macro. Donc nous avons un correspondant de la fonction dans Cabri qui sont les Macros. Toutes celles-ci sont des Macros, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux le voir comme une fonction?*

136. Plusieurs voix : *Oui*

137. P : *Car, qu'est-ce qu'il prend ?*

138. FILIPPO : *Il prend les deux extrémités du segment*

139. P : *Et il me donne ?*

140. FILIPPO : *Et il trouve le troisième point qui est le centre du segment, c'est-à-dire qu'il est équidistant des sommets du segment.*

141. P : *Et il me donne le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si je vais voir... en somme dans Cabri, nous avons les Macro et nous disons que celle-là peut être une idée de notre fonction... Et quand en revanche c'est nous qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?*

142. FILIPPO : *C'est la construction.*

143. P : *C'est la construction.*

Au niveau à dominante descriptive, nous avons considéré la première partie de l'intervention de l'enseignante (131) « *H est en fonction des trois points... Oh ! Quelle*

phrase magique !... H est en fonction des trois points... » comme une action de *reflet*. En fait, elle répète l'intervention de Marco.

De même, toujours au niveau descriptif, un peu plus loin, nous avons interprété la deuxième partie de l'intervention de l'enseignante (131) «... *Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P* » comme une action de *paraphrase* avec *glissement de signifié*. En fait, l'enseignante reprend l'intervention de Marco et en modifie subtilement le sens : par l'introduction des expressions « *résultat d'une relation* » et « *les trois points initiaux* », elle réinterprète l'expression « *être en fonction de* » et réoriente la correspondance entre objets initiaux et objet final ³.

En faisant ainsi, elle pivote sur cette expression « *être en fonction de* » pour la relier au signifié de fonction que nous avons appelé de *machine à input/output*.

Ces deux actions (le *reflet* et le *paraphrase*), issues de la TMS, sont donc des actions à *dominante mésogénétique* puisqu'elles contribuent à modifier le milieu commun en voie de construction.

En revanche, au niveau à *dominante interprétative*, nous avons considéré toute l'intervention de l'enseignante (131) comme une action de *résonance forte*. Pour la troisième fois, des élèves utilisaient l'expression « *être en fonction de* » (en particulier, juste au début de la discussion collective, Marco même l'avait déjà employée). Cependant l'enseignante reprend, avec emphase, l'intervention de l'élève et, en faisant levier, oriente la suite de la discussion collective vers l'établissement d'un lien interprétatif entre macro et fonction (141-143). Elle estime visiblement que le moment propice pour un tel établissement est bien arrivé.

Il faut souligner que cette action de *résonance forte*, issue, à la différence des actions précédentes, de la TSD, est une action à *dominante chronogénétique*.

Cet exemple montre alors comme ces deux familles de catégories d'analyse amènent des regards complémentaires par rapport à notre objectif de modéliser l'action professorale lors de la mise en place du PMS.

³ Observons en fait que dans l'expression « *H est en fonction de A,B,P* » l'ordre est renversé : on cite, d'abord, H et, ensuite, A, B, P).

Il montre aussi le cas où les domaines d'application de ces deux catégories d'analyse, l'une issue de la TMS, l'autre de la TSD, se superposent partiellement, bien que le degré d'interprétation didactique pour la catégorie issue de la TSD est, cette fois-ci, majeur.

Cependant, nous avons pu aussi observer le cas où une famille de catégories d'analyse prend en compte des actions que l'autre ne considère pas (au moins en termes d'actions). C'est le cas, par exemple, de la catégorie des actions à *dominante topogénétiques*, issue de la TSD, dont nous avons pas pu trouver une catégorie d'actions homologue (ou au moins voisine) dans le TMS.

Toujours dans l'extrait présenté ci-dessus, observons, en fait, l'utilisation que l'enseignante fait des pronoms personnels.

Dans l'intervention (131) elle utilise le « nous » (... *Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P. Et alors qu'est cette chose qui faisait apparaître le point H, pour nous ?*).

Dans l'intervention (133), elle parle à la première personne (*Si je la fais. Et sinon, au début, juste au début ?*)

Dans l'intervention (135) elle utilise d'abord le « nous » et puis le « je » (135. *P : ... Donc nous avons un correspondant de la fonction dans Cabri qui sont les Macros. Toutes celles-ci sont des Macros, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux le voir comme une fonction?*)

Au contraire, dans (141) elle utilise d'abord le « je » et puis le « nous » (141 : *P : Et il me donne le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si je vais voir... en somme dans Cabri, nous avons les Macro et nous disons que celle-là peut être une idée de notre fonction... Et quand en revanche c'est nous qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?*)

Au niveau à *dominante interprétative*, en réélaborant des catégories d'analyse issues des travaux de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000), nous avons considéré les parties des interventions (131) (135) et (141) où l'enseignante utilise la première personne plurielle comme étant des actions de *réduction topogénétique*. En fait l'enseignante, par ces interventions, réduit la distance topogénétique entre sa propre position de prof et la position de ses élèves et parle au nom de toute la classe.

Nous avons vu que, dans l'intervention (133), à la fin de l'intervention (135) et au début de l'intervention (141), elle arrive même à annuler cette distance topogénétique par des actions de *fusion topogénétique*. Dans le « je » qu'elle emploie, toute la classe est implicitement

représentée. Par ces actions, peut-être de façon non totalement consciente, elle contraint alors les élèves à s'identifier avec son propre discours et les conduit vers l'établissement d'un lien interprétatif explicite entre macro et fonction (141-143).

Il est important de souligner que cette catégorie d'actions, que nous avons dérivé de la TSD et que nous n'avions pas dans la TMS (au moins dans cette forme), nous a servi pour modéliser un aspect crucial de la TMS, qui est la gestion de la part de l'enseignant de l'espace intersubjectif et de la dialectique entre signifiés personnels et signifiés socialement partagés en voie de construction.

5.8.2 Résultats issus de notre méthodologie

La méthodologie d'analyse des actions de l'enseignant, basée sur l'articulation TMS/TSD, que nous avons vue appliquée dans ce petit extrait, a permis de :

- repérer des actions topogénétiques susceptibles de modéliser la gestion délicate de l'enseignant entre plans inter-subjectif et intra-subjectif ;
- mettre en évidence des actions chronogénétiques permettant d'interpréter les intentions de l'enseignant dans sa gestion de l'avancée du temps didactique lors de la mise en place du PMS ;
- mettre en lumière des actions mésogénétiques génériques ayant un rôle dans le PMS ;
- d'identifier *ex novo* des actions mésogénétiques spécifiques du travail de sémiosis.

Cette méthodologie n'est pas seulement une méthodologie d'analyse. Elle s'est en fait révélée valide pour la modélisation de l'action professorale et du PMS. Elle constitue donc, en soi-même, un résultat de cette thèse.

Cependant, soulignons que son domaine de validité est dépendant de conditions expérimentales particulières et du type de contrat mis en place dans cette classe. On pourra alors dire que notre méthodologie a plutôt une valence théorique.

5.9 Articulation TMS/TSD dans la modélisation du processus de MS (Q4)

Nous n'avons pas la place ici pour détailler l'analyse issue de l'articulation TDS/TMS, menée lors de notre thèse. Nous en rappelons seulement les résultats principaux⁴.

⁴ Pour cela, nous renvoyons le lecteur intéressé à la lecture intégrale du manuscrit de notre thèse, déchargeable du site <http://tel.archives-ouvertes.fr/>.

A partir de cette analyse, nous avons pu interpréter la métaphore de la (re)définition d'un espace intersubjectif (TMS) en termes de processus de co-construction du milieu commun (TSD).

En outre, cette analyse a permis de faire ressortir le contrat didactique (TSD) spécifique au PMS (TMS) existante dans la classe. Elle a conduit à repérer un certain nombre de règles fondamentales et à mettre en évidence l'existence d'une certaine « symétrie » et circularité des rôles : les élèves manifestent une réelle coresponsabilité avec l'enseignante dans la co-construction du milieu commun. Cette condition s'est révélée constitutive du bon fonctionnement du PMS.

Ainsi, autrement dit, par un outil didactique issu de la TSD (la notion de « contrat didactique ») nous avons pu mieux modéliser les conditions favorables à la mise en place de ce PMS (TMS).

6. Quelques éléments d'analyse des signes

Articuler les deux cadres théoriques n'a pas été suffisant pour l'étude du PMS du point de vue de l'évolution des signes.

Pour cela, nous avons dû développer une méthodologie d'analyse spécifique en intégrant des éléments issus de la TMS avec des éléments de la sémiotique peircienne. Cette analyse a été ensuite traduite dans l'environnement Atlas.ti⁵.

Notre travail a conduit à l'identification et à la caractérisation de typologies de signes différents. Ce texte les évoque seulement :

- signes simples (*signes-artefact*, c'est-à-dire signes issus du monde de l'artefact, *signes-mathématiques*, c'est-à-dire signes issus du monde des mathématiques, et *signes-pivot*, c'est-à-dire signes potentiellement polysémiques sur lesquels l'enseignant joue pour établir le lien entre le monde de l'artefact et le monde des mathématiques)
- signes complexes (*caractérisations*, *définitions*, *interprétations* et *instanciations*)

⁵ Atlas.ti est un logiciel utilisé surtout dans les sciences humaines qui permet une analyse qualitative de textes, images, signaux graphiques, etc. Dans cet environnement il est possible de définir des codes et puis de les associer à des parties du texte à analyser. Cet logiciel permet aussi de regrouper ces codes en familles, de faire des recherches (« queris »), de mener des analyses croisées et de construire des réseaux sémiotiques.

A partir de cette classification, nous avons pu élaborer, à l'aide du logiciel Atlas.ti, des représentations possibles des réseaux sémiotiques des signes socialement partagés lors des discussions collectives.

Ces représentations différentes ont ensuite permis d'inférer les types de signifiés en voie de construction dans la classe.

Ainsi par exemple, nous avons pu construire une représentation du réseau sémiotique des signes associés à la variable dépendante (Figure n° 7).

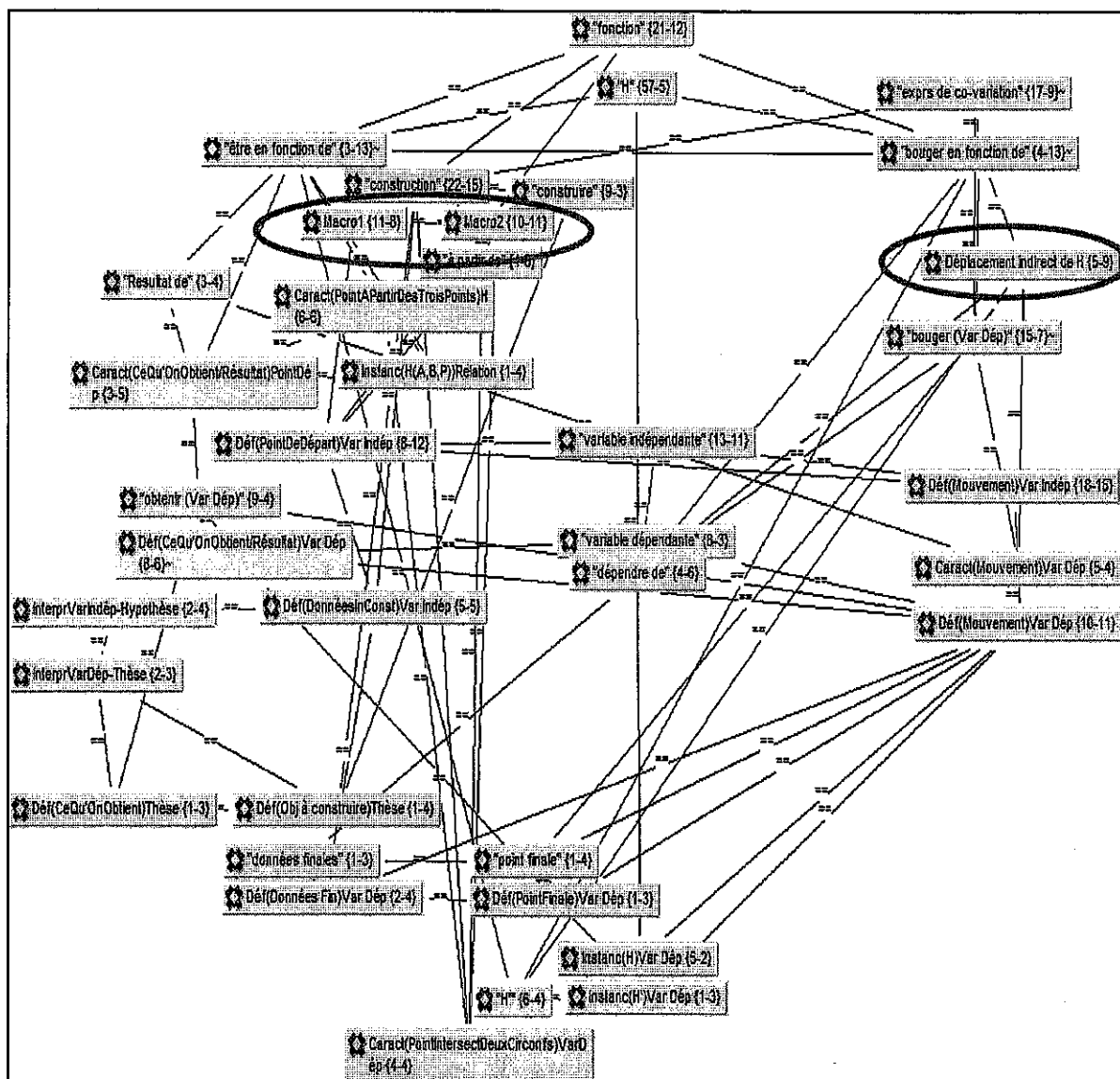


Figure n°7

Par cette représentation nous avons pu mettre en évidence un développement bi-axial, lié respectivement aux outils *Macro* et *Déplacement indirect* et, par cela, d'inférer l'existence et l'évolution de deux grandes familles de signifiés de variable dépendante. On peut en fait observer le développement du signifié de « variable dépendante » comme objet final d'un

processus déterminé d'Input/Output (Figure n°7, à gauche). De plus, (Figure n°7, à droite), on voit se développer le signifié de « variable dépendante » comme le point qui bouge indirectement en fonction des points dont il dépend, c'est-à-dire comme élément variable d'une relation « asymétrique » de co-variation.

7. Articulation TMS/TSD + analyse des signes : apports dans la modélisation du PMS (Q4)

L'intégration de notre analyse des signes avec notre analyse issue de l'articulation TMS/TSD a apporté ainsi d'autres éléments de réponse à notre quatrième question de recherche (Q4). Non seulement elle a permis d'inférer les signifiés socialement partagés en voie de construction dans la classe et de relier ces signifiés aux outils de l'artefact mobilisés, mais elle a aussi permis d'identifier et de caractériser certains mécanismes liés au PMS comme, par exemple, le processus que nous avons appelé *d'Icônisation*.

Sans détailler ultérieurement, ce processus, qui consiste en la transformation de *signes-artefact* particuliers de l'activité en *icônes*, au sens de Peirce, d'objets mathématiques, s'est révélé très important dans le processus plus général de médiation sémiotique.

En outre, notre analyse a permis aussi de repérer des liens entre la structure du discours et le processus de *sémiosis*⁶ et de mettre en évidence des phénomènes que nous avons appelés de *mélange sémiotique*⁷.

8. Conclusions et perspectives

Dans ce texte, nous avons voulu montrer (parfois simplement évoquer) quelques apports de l'articulation TMS/TSD.

Nous avons cherché à rappeler les résultats issus de notre thèse relativement à :

⁶ Elle a, par exemple, montré que le développement du signifié de fonction comme « relation de co-variation » était associé à l'utilisation de gérondifs et phrases conditionnelles, tandis que le développement du signifié de fonction comme « machine à Input/Output » était fortement relié à un certain format du discours composé d'une affirmation portant sur les variables indépendantes et d'une question analogue subséquente sur la variable dépendante.

⁷ En synthétisant, nous pouvons dire que ces phénomènes correspondent à un discours où des signes issus du monde de l'artefact se mélangent avec des signes issus du monde des mathématiques. Ces mélanges ont été considérés comme des indicateurs d'un apprentissage en cours et de la mise en place et de la complexification du réseau sémiotique disponible.

- à l'organisation du PMS (en montrant comment cette articulation a joué tant au niveau micro que au niveau macro)
- au fonctionnement de l'artefact impliqué dans un PMS ;
- à la modélisation de l'action professorale lors de l'orchestration d'une discussion collective ;
- aux mécanismes liés à la médiation sémiotique en général.

Bien évidemment ce travail ne s'arrête pas là. Il ouvre à de multiples perspectives.

Il serait intéressant, par exemple, de relire des travaux qui ont été faits, soit dans la TSD soit dans la TMS, à la lumière de cette articulation TMS/TSD.

On pourrait aussi renverser le rapport qui existe dans cette thèse entre les deux cadres théoriques et étudier l'apport d'une analyse en termes de TMS, dans une étude réalisée principalement dans le cadre de la TSD.

Il serait aussi très intéressant d'approfondir les points de tension entre TSD et TMS et de questionner les relations entre institutionnalisation et PMS et les relations entre une analyse en termes de TMS et une analyse en termes de « dialectique outil/objet ».

Plus généralement, il serait nécessaire ou, au moins très pertinent, de rechercher d'autres conditions permettant l'instauration du type de contrat didactique spécifique à ce PMS et d'étendre l'analyse des réseaux sémiotiques aux travaux écrits individuels des élèves pour étudier l'incidence spécifique dans ces réseaux nouveaux, des signes élaborés collectivement.

Enfin, à partir de cette double manière de concevoir l'intégration d'un artefact dans un processus d'enseignement-apprentissage, il serait intéressant d'étendre ce type d'étude :

- pour d'autres artefacts (en particulier de géométrie dynamique),
- pour d'autres signifiés mathématiques, fondés sur l'idée de variation, comme celui de tangente et de dérivée.

Bibliographie

- Bartolini Bussi, M. G. : 1998, 'Verbal interaction in mathematics classroom : a Vygotskian analysis', in H. Steinbring et al. (éds.), *Language and communication in mathematics classroom*, NCTM, Reston, Virginia, pp. 65-84.
- Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. : 1998, 'From drawing to construction : teacher's mediation within the Cabri environment', *Proceedings of the 22nd International*

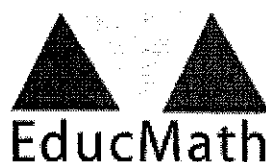
- Conference Psychology of Mathematics Education*, Vol. I, pp. 180-95. Stellenbosh, South Africa.
- Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. : 1999, 'Semiotic mediation : from history to mathematics classroom', *For the Learning of Mathematics*, vol. 19(2), pp. 27-35.
- Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. : 2006, 'Semiotic mediation in the mathematics classroom'. In L. English & al. (Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, LEA.
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. et Ferri, F. : 1995b, *Interazione sociale e conoscenza a scuola : la discussione matematica*. Rapport technique n°21. Centro Documentazione Educativa, Comune di Modena.
- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A. et Ferri, F. : (à paraître a), 'Semiotic mediation in the Primary School : Durer's glass', in Hoffmann H.; Lenhard J.; Seeger F. (éds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte)*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. et Ferri, F. (à paraître b), 'Construction problems in primary school : A case from the geometry of circle', in P. Boero (éd.), *Theorems in School : From history and epistemology to cognitive and educational issues*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Brousseau G. : 1998, *Théorie des situations didactiques*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Comiti, C. et Grenier, D. : 1993, 'L'observation, outil de recherche pour la modélisation de phénomènes didactiques', *Cahier n°3 du séminaire Recherche/Réflexion/Interaction, année 1993*, Publication de l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Grenoble, pp. 55-72d.
- Comiti, C. et Grenier, D. : 1997, 'Régulations didactiques et changements de contrats'. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17.3, pp. 81-102, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Comiti, C., Grenier, D. et Margolinas, C. : 1995, 'Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situations de classes et modélisation de phénomènes didactiques' in ARSAC et al. (éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 92-113, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Dorier, J. L. et al. : 1997, *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

- Douady, R. : 1986, 'Jeux de cadre et dialectique outil-objet', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7.2, pp. 5-31, La Pensée Sauvage, Grenoble
- Falcade, R. : 2001, *L'environnement Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction*, Mémoire de DEA, UJF, Grenoble.
- Falcade, R. : 2002, 'Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe de fonction', *Petit x*, Vol. 58, pp. 47-81.
- Falcade, R. : 2006, 'Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction', Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble.
- Falcade, R, Laborde, C. & Mariotti, M.A. : à paraître, 'Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation', *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer, Dordrecht.
- Laborde, C. :1999. 'Core geometrical knowledge for using the modelling power of Geometry with Cabri-geometry'. *Teaching Mathematics and its Applications*, 18(4), 166-171.
- Mariotti, M. A. : 2000, Introduction to proof : the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* Vol. 44, (1&2) , pp. 25-53, Kluwer, Dordrecht.
- Mariotti, M. A. : 2002, 'Influence of technologies advances on students' math learning', in L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (éds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 695-723.
- Mariotti, M. A. : 2003, 'Introduire les élèves à une théorie. La médiation du logiciel Cabri', *Actes du Séminaire national de didactique de mathématiques*, Vol. 1, pp. 173-186, Paris.
- Mariotti, M.A, Laborde, C. & Falcade, R. : 2003, 'Function and Graph in a DGS environment, (In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*. Vol. 3 (pp. 237 – 244). University of Hawai'i, Honolulu, HI, USA: CRDG, College of Education.
- Robert, A. : 1998, 'Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18.2, pp. 139-189, La Pensée Sauvage, Grenoble.

- Robert, A. et Robinet, J. : 1996, 'Prise en compte du "méta" in didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 16.2, pp. 145-175, La Pensée Sauvage, Grenoble,
- Sensevy, G, Mercier, A. et Schubauer-Leoni, M.L. : 2000, 'Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20.3, pp. 263-304, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Vergnaud, G. : 1991, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique des mathématiques*, 10/2.3, Grenoble, La Pensée Sauvage Editeurs pp. 133-169.
- Vygotsky, L. S. : 1931/1978, *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. : 1934/1997, *Pensée et langage*. 3^e édition, La Dispute, Paris.

Présentation du site web EducMath <http://educmath.inrp.fr>

Luc.Trouche@inrp.fr



Le site EducMath, développé par l'INRP dans le cadre d'un large partenariat (ADIREM, APMEP, ARDM, CultureMath et SMF), sera en ligne à partir de septembre 2006. Il est conçu en interaction avec un comité scientifique regroupant des mathématiciens, des didacticiens, des enseignants et des chercheurs, de France ou d'ailleurs : pour répondre aux questions posées par l'enseignement des mathématiques aujourd'hui, des points de vue divers sont nécessaires. La présentation au séminaire, à ce moment où de nombreuses pistes sont ouvertes, est l'occasion de recueillir avis et suggestions de la communauté de didactique des mathématiques.

Pour le moment, le site est construit autour d'un ensemble de fonctionnalités essentielles : un espace de débat sur des questions vives, un espace de propositions de panoramas ou de synthèses, un espace de propositions de lectures, un espace de comptes-rendus de recherches et un espace de propositions de formation. EducMath voudrait être à la fois un lieu de mise à disposition de ressources (fonctionnalité essentielle pour les pays où ces ressources ne sont pas facilement accessibles) et un lieu de création collaborative de nouvelles ressources (par exemple une discussion en ligne de premières versions d'articles). EducMath se veut complémentaire des sites existants, comme le site de l'ARDM, qui s'adressent à des communautés plus spécifiques. Le succès de ce projet suppose une réelle interaction entre différents partenaires de l'enseignement et de la recherche. Cette interaction n'est pas naturelle, elle est à construire !

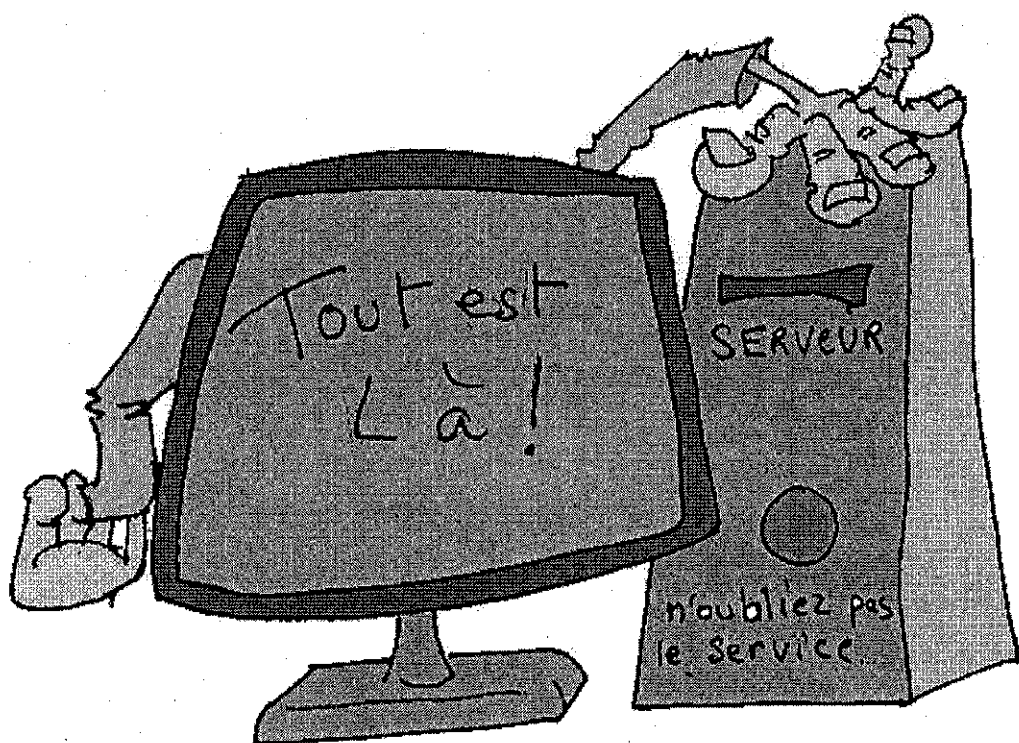
Au-delà d'une simple discussion sur l'état actuel du site, la présentation propose deux pistes de réflexion :

- sur les rapports entre *conception* et *usages* : le développement du site suppose une évaluation continue des usages et des besoins des communautés concernées, c'est un point de vue de conception dans l'usage (Rabardel et Pastré 2005) ;
- sur la conception des documents pour la recherche : la publication d'articles ou d'études provisoires, qui s'enrichissent des contributions des lecteurs du site,

suppose une évolution des modes d'écriture, d'échanges et de publication dans la communauté des didacticiens et au-delà. C'est une discussion qui pourra se poursuivre dans le cadre de la prochaine école d'été (thème « document »).

La présentation s'achève par un appel à contribution des didacticiens dans les différentes entrées du site. La contribution des didacticiens est essentielle, elle suppose l'investissement réel de membres de la communauté à différents niveaux (participation aux forums, proposition d'enrichissement des ressources existantes, proposition de notes de lecture...) : c'est une condition de développement du site, mais c'est aussi un atout pour la communauté, son ouverture et son enrichissement au contact d'autres communautés de recherche ou professionnelles.

Rabardel P., Pastré P. (eds.), 2005 *Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activités- développement*, Toulouse : Octarès.



Notre site web

<http://iremp7.math.jussieu.fr>

**IREM Université Paris 7- Denis Diderot
Case 7018
2 place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05**

TITRE :

ACTES DU SEMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. ANNEE 2006

AUTEUR (S) :

Ghislaine Gueudet et Yves Matheron (EDS)

RESUMÉ :

Ces actes recouvrent presque tous les textes correspondant aux communications faites lors des trois séances du Séminaire National de Didactique des Mathématiques, organisé par l'Association de Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

Ces séances se sont tenues à Paris les 20 et 21 janvier, 24 et 25 mars et 20 et 21 octobre 2006.

MOTS CLES :

Didactique des mathématiques

Théorie anthropologique

Théorie des situations

Structuration du milieu

Médiation sémiotique

Transition arithmétique-algèbre

Approche instrumentale

Action conjointe professeur/élèves

Didactique du sens commun

Pratiques des enseignants

Formation des enseignants

Statistique

Intégration des technologies

Quantificateurs

Tableurs

Logiciels de géométrie dynamique

ZEP

Éditeur : IREM

Université Paris 7- Denis Diderot

Directeur responsable

de la publication : R.CORI

Case 7018 – 2 place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : mars 2007

ISBN : 2-86612-284-4