

CAHIER DE DIDIREM

**MEMOIRE DE MASTER DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES
PARCOURS RECHERCHE**

La racine carrée en troisième.

Des enseignements aux apprentissages.

Anne Dumail

dirigée par Aline Robert.

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ PARIS7-DENIS DIDEROT

MEMOIRE DE MASTER DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
PARCOURS RECHERCHE

La racine carrée en troisième.
Des enseignements aux apprentissages.

Anne Dumail
dirigée par Aline Robert.

Sommaire

1 introduction, cadre théorique et problématique

2 la notion « racine carrée » et son enseignement

- 2-1 Teresa Assude met en évidence l'arrêt de la transposition didactique associée à la notion « racine carrée »
- 2-2 le vide didactique institutionnel décrit par A.Bronner : la racine carrée, un nombre « pas comme les autres »
- 2-3 l'enseignement de la notion « racine carrée » aujourd'hui

3 présentation du travail et méthodologie

- 3-1 contexte et données recueillies
- 3-2 quelles analyses ?
- 3-3 éléments contextualisés de méthodologie
 - 3-3-a *méthodologie pour l'analyse des tâches*
 - 3-3-b *méthodologie pour l'analyse des déroulements*
 - 3-3-c *méthodologie liée aux évaluations*

4 analyses et résultats

- 4-1 choix du professeur a priori

- 4-2 tâches proposées en classe et au contrôle
 - 4-2-a *tâches 1, 2 et 3*
 - 4-2-b *présentation de l'ensemble*
 - 4-2-c *commentaires*
- 4-3 déroulements réels avec choix du professeur a posteriori
- 4-4 résultats des élèves aux évaluations et mises en relation

5 conclusion de notre recherche

6 les limites et les perspectives

- 6-1 les limites
 - 6-1-a *limites liées à ce que nous n'avons pas analysé*
 - 6-1-b *limites au sein même de nos analyses*
- 6-2 les perspectives

7 bibliographie

8 les annexes

1 Introduction, cadre théorique et problématique

En tant qu'enseignante, je me suis naturellement souvent interrogée sur mon aptitude à permettre aux élèves d'acquérir des connaissances et de les utiliser. Or, c'est principalement en corrigeant ses copies qu'un professeur peut se rendre compte si ses objectifs sont ou non atteints. Souvent, j'ai pu constater des différences importantes entre les résultats attendus et les résultats réels des élèves lors des évaluations en classe : écarts observés de mon point de vue (étonnement par exemple de voir tel exercice « raté » ou tel autre « réussi » alors que j'avais l'impression d'avoir mieux préparé au premier), ou du point de vue d'un élève (« j'ai compris en classe, j'ai travaillé à la maison ; pourquoi est-ce que je n'ai pas réussi ? »). Dès lors, il était légitime de s'interroger, en tant que chercheur, sur ce qui conditionne la réussite ou l'échec lors des contrôles, seule approximation des apprentissages dont nous disposons. Certes, nous savons que des facteurs « extra-mathématiques », par exemple psychologiques, affectifs ou socioculturels, peuvent intervenir, mais nous avons peu de moyens d'agir dessus et nous choisissons ici de ne pas les étudier. Par contre, en tant que professeur, dans le cadre des instructions officielles, nous décidons du contenu et des méthodes de travail proposés en classe. Notre questionnement didactique se centre alors naturellement sur les liens possibles à établir entre ce qui est fait en classe et les apprentissages des élèves. Parmi les thèmes mathématiques possibles pour tester ces liens, nous avons choisi la racine carrée, notion qui fit l'objet, à l'issue d'un travail en master de didactique des mathématiques parcours professionnel, d'un dossier à l'usage des formateurs auquel nous ferons parfois référence. Le travail autour des radicaux tel qu'il est présenté en collège suscite en effet de nombreuses difficultés : difficultés pour les élèves, révélées par des erreurs résistantes, mais aussi difficultés pour les enseignants, qui s'interrogent, sur ce chapitre plus encore que sur les autres, sur un équilibre satisfaisant à trouver entre travail du sens et travail de la technique. Il s'agit ainsi ici d'essayer de déterminer ce qui permet au sujet « élève », au centre de notre recherche, d'acquérir des connaissances mathématiques.

Nous choisissons pour cela de nous inscrire dans le cadre général de « la théorie de l'activité », développée par A.Robert et J.Rogalski à l'articulation des théories constructivistes et socioconstructivistes de Piaget et Vygotsky et des travaux de G.Vergnaud sur le développement et l'apprentissage en relation avec l'enseignement des mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que les apprentissages des élèves résultent en grande partie de leurs activités mathématiques. Nous entendons par activités tout ce que le sujet « élève » développe pour réaliser ce qui lui est demandé : ce qu'il fait ou qu'il décide de ne pas faire, ce qu'il pense, ce qu'il dit, écrit, ses interactions avec autrui (professeur ou autres élèves). Les activités nous servent ainsi d'intermédiaire entre enseignement et apprentissage : les caractériser permettrait donc d'apporter des éléments de réponse au questionnement décrit plus haut. Mais ces activités ne sont pas des données brutes et le problème est alors de trouver un moyen pour y avoir accès, au moins partiellement. Nous disposons pour cela de ce que nous pouvons voir de la classe, directement ou en reconstituant (les films, les fiches du

professeur, les productions d'élèves...). Parmi ces observables, nous avons besoin de dégager les variables susceptibles d'influencer les apprentissages. C'est le cadre théorique choisi qui nous permet de retenir le couple « tâches/déroulements ». Nous entendons par « tâches » ce qui est à faire par l'élève, proposées par l'enseignant via les énoncés d'exercices qu'il donne, et par « déroulements » les conditions de travail qu'il organise réellement autour de la réalisation des tâches qu'il a prescrites. Nous cherchons ici à tester la relation entre ces variables retenues et les apprentissages. Comme l'échec ou la réussite des élèves lors des évaluations en classe est ici notre seule approche disponible des apprentissages, c'est dans cette recherche le lien entre activités possibles des élèves et résultats au contrôle que nous chercherons à établir et à décrire. Nous nous plaçons en cela dans la même perspective que les travaux de J.Horoks, F.Cissé et M.Corlay sur les triangles semblables en classe de seconde. Nous nous posons au départ des questions similaires aux leurs :

Dans quelle mesure les tâches proposées en classe et les déroulements associés influencent-ils les résultats aux évaluations ? Plus précisément, les exercices des évaluations identiques ou proches de ceux travaillés en détail pendant les cours sont-ils nécessairement réussis juste après ces séances ? et trois mois plus tard ? Qu'en est-il des tâches nécessitant une adaptation, nouvelle pour les élèves, dans la mise en fonctionnement des connaissances ?

De plus, les élèves d'une même classe ne développent pas forcément les mêmes activités. Y a-t-il un lien à établir, et de quelle nature, entre ces différences et les connaissances mathématiques acquises ? En d'autres termes, quels éléments de différenciation liés aux spécificités des différents sujets « élèves » peut-on dégager de notre analyse ?

Nous cherchons en particulier à établir si les hypothèses formulées dans les travaux déjà cités (effet des répétitions, gradation des difficultés des adaptations...), peuvent l'être aussi à l'issue de nos analyses.

Néanmoins, notre étude porte sur l'enseignement des racines carrées en troisième et, contrairement au chapitre « triangles semblables » en seconde, celui consacré aux radicaux en troisième n'est ni isolé, ni indépendant du reste du programme. Nous nous intéresserons ainsi plus particulièrement au mélange entre connaissances anciennes et nouvelles et nous demanderons en quoi et jusqu'à quel point la maîtrise des premières influence l'acquisition des secondes.

Il convient donc d'abord de présenter un peu mieux la notion « racine carrée » et son enseignement. Puis, nous décrirons ce que nous avons décidé d'analyser et comment nous comptons le faire : nous détaillerons pour cela les éléments de méthodologie associés au cadre théorique choisi, mais adaptés au contexte de notre étude. Nous pourrons alors présenter nos analyses et les premiers résultats obtenus. Enfin, nous essaierons de faire des hypothèses concernant notre questionnement initial et de les situer dans la famille existante de travaux du même type.

2 La notion de racine carrée, son enseignement

2-1 Teresa Assude met en évidence l'arrêt de la transposition didactique associée à la notion « racine carrée »

Précisons tout d'abord quels sont les caractères mathématiques de la notion de racine carrée sur laquelle nous avons choisi de travailler.

Le « savoir savant » actuel concerne la fonction « racine carrée », définie comme la bijection réciproque sur l'ensemble des réels positifs de la fonction carrée : ceci justifie l'existence du nombre « racine carrée ». Le vocabulaire « racine carrée de », selon le contexte, peut ainsi désigner des objets mathématiques de nature différente : un nombre, qui peut être irrationnel (racine carrée de 2) ou une transformation (prendre la racine carrée de ...). Or, les formalisations associées (ensemble de nombres et fonctions) ne sont pas explicitées au niveau du collège, au sein duquel la notion « racine carrée » est pourtant introduite. Les travaux de Teresa Assude nous aident à diagnostiquer et expliquer le problème de la racine carrée dans les programmes. Elle étudie la transposition didactique relative à cette notion et met en évidence trois périodes, dont nous résumons rapidement les caractéristiques ici :

- Première période : avant la réforme ou période « classique » (jusqu'en 1970)

La racine carrée est une opération (la cinquième) et un algorithme est utilisé pour l'extraire. Pour avoir une idée de la nature du nombre obtenu, on considère le résultat obtenu : écriture décimale ou développement décimal, illimité ou non.

Les tâches prescrites sont : simplifier les écritures, écrire le dénominateur d'un quotient sans radical (c'est alors utile car il n'y a pas de calculatrice).

- Deuxième période : pendant la réforme ou période « moderne » (de 1970 à 1978)

La racine carrée est une fonction, définie comme la fonction inverse de la fonction carrée sur l'ensemble des réels positifs. $\sqrt{a}$ (pour a positif) est un nombre réel. L'ensemble des nombres réels est construit à partir des nombres décimaux et des développements décimaux illimités. L'approximation fait partie des tâches prescrites.

- Troisième période : après la réforme ou période « contemporaine » (de 1978 à 1992, date à laquelle T.Assude a soutenu sa thèse).

Des retours en arrière entraînent des problèmes pour donner le statut de nombre aux racines carrées (en particulier, on n'étudie plus les réels au collège). Ce sont des « objets indéterminés » avec lesquels on fait des opérations et il est parfois difficile de motiver les tâches prescrites auparavant (supprimer par exemple le radical au dénominateur d'un quotient).

Il y a « arrêt de la transposition didactique » entre savoir savant et savoir enseigné. L'outil « fonction » est absent des programmes de collège : la racine carrée n'est plus une opération mais ne peut donc pas non plus devenir une fonction.

Depuis, les problèmes persistent : aujourd'hui encore, en troisième, les nombres s'écrivant avec des radicaux n'ont pas de statut fixe : on fait travailler les élèves avec alors même que rien ne permet à ce niveau de justifier ni leur existence, ni a fortiori les opérations qu'ils font avec. Certes, le chapitre intitulé « calcul avec les radicaux » prévoit de faire travailler les élèves dans la continuité, en prolongeant les règles de calcul connues jusqu'alors à ces « nouveaux nombres », mais ces derniers manquent de statut : on ne sait pas qui ils sont exactement et surtout on ne peut pas les situer parmi les nombres déjà connus puisqu'aucune formalisation sur les ensembles de nombres n'est prévue au collège.

2-2 Le vide didactique institutionnel décrit par A.Bronner : la racine carrée, un nombre « pas comme les autres »

A.Bronner emploie cette expression « vide didactique institutionnel » à propos de la négociation du passage des décimaux ou des rationnels aux réels. Pendant la période des mathématiques modernes (c'est la deuxième mise en évidence par T.Assude), un plan d'enseignement précis et une signification précise étaient proposés pour la notion de nombre réel. Ce n'est plus le cas aujourd'hui : il y a une « crise d'identité » à propos de cet objet. Les ensembles de nombres sont absents des programmes de collège et l'ensemble des réels s'obtient en seconde comme ensemble de tous les nombres rencontrés précédemment. Le chapitre consacré aux « racines carrées » pourrait être l'occasion de clarifier quelque peu cette situation au niveau du collège. Or, si on s'en tient aux instructions officielles, rien ne semble proposé pour aller dans ce sens. Cela n'empêche pas certains enseignants d'y consacrer quand même un peu de temps, mais l'enseignement proposé sera très différent selon leur « position relativement à l'objet nombre réel ». A.Bronner distingue ainsi quatre types de positions d'enseignants (conformité stricte aux programmes officiels, ouverture vers les nouveaux nombres, ouverture vers les nombres non décimaux et ouverture vers les nombres irrationnels) : il sera intéressant de situer celle du professeur que nous avons filmé.

2-3 L'enseignement de la notion « racine carrée » aujourd'hui

Au collège, le symbole « $\sqrt{\quad}$ » apparaît en quatrième lors du chapitre consacré à la propriété de Pythagore : il s'agit de repérer et d'utiliser la touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice, permettant de donner une valeur exacte ou approchée d'une longueur connaissant son carré. Aucun développement n'est prévu sur la notion même de racine carrée. C'est en classe de troisième qu'au sein de la partie « travaux numériques » des programmes un chapitre est consacré aux « calculs élémentaires avec les radicaux ». La colonne « contenus » des textes officiels présente deux points : « racine carrée d'un nombre positif » et « produit et quotient de deux radicaux » tandis que dans la colonne « commentaires », on peut lire :

« - savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a .

- sur des exemples numériques, ou a est un nombre positif, utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a$
 $\sqrt{a^2} = a$.

- déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$ ou a désigne un nombre positif.

- sur des exemples numériques, ou a et b sont deux nombres positifs, utiliser les égalités
 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ».

Par ailleurs, on peut lister les autres parties du programme dans lesquelles les racines carrées sont susceptibles d'intervenir :

- Dans la partie « travaux géométriques », il peut s'agir d'exprimer une valeur exacte de longueur avec un radical après application de la propriété de Pythagore, de donner comme en quatrième une valeur décimale approchée de cette longueur grâce à la calculatrice, de calculer avec des radicaux pour pouvoir appliquer les réciproques ou les contraposées des propriétés de Thalès ou Pythagore, d'écrire des relations trigonométriques avec des longueurs exprimées à l'aide de radicaux ou encore de connaître et de savoir utiliser la formule donnant la distance entre deux points dans un repère orthonormé du plan.

- Dans la partie « travaux numériques », outre le chapitre décrit plus haut qui leur est spécifiquement consacré, les racines carrées peuvent intervenir dans les paragraphes « équations et inéquations du premier degré » et « écritures littérales et identités remarquables ». Nous verrons, qu'en pratique, les élèves calculent dans ce dernier cas avec les radicaux « presque comme avec les x », dans un jeu permanent mais implicite entre cadre numérique et cadre algébrique.

- Dans la partie « organisation et gestion de données-fonctions », les coefficients des fonctions linéaires et affines peuvent s'écrire avec des radicaux et on peut aussi trouver des racines carrées dans les problèmes de proportionnalité ou de traitement usuel sur les grandeurs.

Ainsi, le chapitre intitulé « calculs avec les radicaux » est loin d'être indépendant du reste du programme. Une fois ces « nouveaux nombres s'écrivant avec des radicaux » introduits, par un principe de prolongement implicite, les élèves font avec eux tout ce qu'ils faisaient avec les nombres connus jusqu'alors. Ils sont amenés à manipuler des racines carrées à de nombreuses reprises pendant l'année de troisième. La question légitime que peut alors se poser un enseignant concerne la part à accorder au travail du sens par rapport au travail de la technique. Est-ce préjudiciable à la construction des connaissances mathématiques que les élèves calculent avec les racines carrées sans avoir vraiment compris qui elles sont ? Compte tenu du temps imparti, des orientations différentes envisagées par les élèves d'une même classe, des sujets proposés au brevet des collèges, quel niveau de conceptualisation sur la notion « racine carrée » est-il raisonnable et souhaitable d'atteindre en fin de collège ? Le peu de réponses apportées par les textes officiels laissent au professeur une liberté très grande

dans l'organisation de son enseignement sur ce thème. Or, dans le cadre théorique choisi, les variables « tâches/déroulements » retenues pour reconstituer les activités mathématiques des élèves dépendent justement des choix de l'enseignant. Notre travail de recherche didactique consiste ici à tester une nouvelle fois, après d'autres études portant sur des notions différentes, les liens entre ces variables et les apprentissages. D'un point de vue « enseignant », les résultats éventuels seraient alors très utiles, compte tenue de la marge de manœuvre importante laissée par les programmes, afin de décider quels énoncés proposer aux élèves, accompagnés de quels types de déroulements, pour optimiser les apprentissages.

3 Présentation du travail et méthodologie

3-1 contexte et données recueillies

Nous avons choisi de suivre, dans une classe de 3^{ème} de 26 élèves, l'intégralité du travail sur les racines carrées, ce qui correspond à environ deux semaines de cours.

Nous disposons de sept vidéos, correspondant chacune à une séance de 55 minutes en classe entière, filmées « sur pied » (donc sans présence humaine inhabituelle), couvrant l'introduction de la notion de racine carrée, le cours et les exercices faits ou corrigés en classe.

Le professeur nous a fourni les énoncés des exercices distribués aux élèves (3 fiches données en annexe), ainsi que les textes de l'interrogation en cours de chapitre, du contrôle en fin de chapitre et du brevet blanc qui eut lieu deux mois après (textes également donnés en annexe). Nous disposons également des copies corrigées des élèves pour ces trois évaluations. De plus, le professeur nous a donné ses fiches de préparation, en particulier le texte du cours qu'elle fait écrire aux élèves sur leur cahier de leçons. Enfin, nous avons pu à maintes reprises discuter avec le professeur, et de ses objectifs, et de l'idée qu'elle se faisait de cette classe de troisième.

3-2 quelles analyses ?

Il s'agit ici d'analyser les résultats de trois évaluations en rapport avec ce qui a été fait en classe, sur la notion « racine carrée ».

Ce sont des sept séances filmées que nous extrayons les données nécessaires pour approcher ce qui est fait en classe : conformément au cadre théorique choisi, ce sont les tâches proposées et les déroulements associés que nous analysons pour essayer de reconstituer les activités possibles des élèves.

Quant aux devoirs en classe, nous analysons d'abord les énoncés et donc les tâches prescrites, puis les productions d'élèves correspondantes pour enfin, quand nous le pouvons,

mettre en relation les résultats obtenus avec les activités possibles reconstituées précédemment.

L'idée directrice reste de chercher à savoir, via les réussites ou échecs aux évaluations, si les élèves ont appris, ce qu'ils ont appris, et en quoi, le plus précisément possible, ce qu'ils ont fait (ou pas) en classe a influencé la qualité de ces apprentissages.

3-3 éléments contextualisés de méthodologie

Nous allons maintenant expliquer comment nous avons analysé les variables retenues (les tâches et les déroulements) pour décrire l'enseignement proposé, puis comment nous avons tenté de mettre en relation les évaluations (interrogation, contrôle et brevet blanc), tant du point de vue des énoncés prescrits que des productions d'élèves correspondantes, avec ce qui précède.

3-3-a méthodologie pour l'analyse des tâches

Nous avons utilisé les mêmes outils pour analyser les tâches proposées en classe et celles proposées en évaluation.

Dans un premier temps, nous avons listé les connaissances mathématiques, anciennes ou nouvelles, nécessaires pour effectuer les tâches prescrites :

- Connaissances anciennes et nouvelles en jeu :

Connaissances anciennes utilisées dans la mise en fonctionnement des connaissances sur « racines carrées » :

Ces connaissances sont plus ou moins anciennes, vues en début de troisième ou dans une classe antérieure au collège.

- Connaissances géométriques :

Théorèmes de Pythagore, de Thalès et calcul de distance dans un repère orthonormé.

- Connaissances numériques :

En arithmétique : notion de divisibilité, décomposition d'un nombre sous la forme d'un produit, repérage des carrés d'entiers.

Organisation de calculs avec des nombres relatifs, des nombres en écriture fractionnaire, des puissances, priorités opératoires et gestion des parenthèses.

Notions sur les différentes familles de nombres (entiers, décimaux, non décimaux), notion de valeur exacte ou approchée, d'arrondi à une précision donnée.

- Connaissances algébriques :

Ce sont ici des connaissances anciennes qui seront prolongées implicitement à ces « nouveaux nombres » s'écrivant avec des radicaux.

Factorisations du type $ka+kb = k(a+b)$

Développements à partir d'expressions du type $k(a+b)$, $(a+b)(c+d)$ (distributivité simple et double) et utilisation des identités remarquables.

Commutativité et associativité de la multiplication et de l'addition.

Conventions et formalisme algébrique (suppression du signe « x » par exemple)

Gestion des parenthèses dans un calcul algébrique.

Travail sur les égalités et équations du premier degré à une inconnue

Connaissances nouvelles présentées dans le cours et mises en fonctionnement dans les exercices :

Nous utiliserons par la suite les abréviations D1, D'1, P1a ou b, P2a ou b quand nous y ferons référence. Notons, qu'en comparaison avec les connaissances anciennes décrites plus haut, elles sont très peu nombreuses.

D1 : pour $a \geq 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$

C'est une conséquence en « langage mathématique » de la définition donnée « en français » (« la racine carrée d'un nombre positif est le nombre positif dont le carré est égal au premier nombre donné ») avec a jouant le rôle du nombre positif de départ. Cette définition pose problème en classe de troisième car elle n'est pas rigoureusement justifiable (problème de l'unicité).

D2 : pour $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$

Ici, a^2 joue le rôle du premier nombre positif de la définition précédente.

P1 : pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Cette propriété peut être utilisée dans les deux sens : de gauche à droite (P1a) ou de droite à gauche (P1b)

P2 : pour $a \geq 0$ et $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Comme pour P1, on distinguera P2a de gauche à droite et P2b de droite à gauche.

es différents types d'adaptation des connaissances dans la mise en fonctionnement des connaissances sur « racine carrée » :

Nous cherchons à déterminer ce que doit faire un élève pour réaliser les tâches mathématiques demandées. Il est pour cela confronté selon les cas à différents niveaux de difficulté : appliquer une connaissance nouvelle peut nécessiter une simple reconnaissance ou bien un travail préalable plus ou moins complexe, utilisant éventuellement des connaissances anciennes. C'est ce travail préalable que nous appelons adaptation.

Nous avons choisi de regarder précisément les adaptations correspondantes à chaque application de connaissances dans les énoncés dont nous disposons car nous pensons, et nous cherchons à tester une nouvelle fois, que l'élève apprend justement grâce à leur diversité. Nous pourrions lors de l'analyse des résultats des évaluations mesurer la pertinence de ce choix.

Pour la résolution d'une tâche complexe (c'est-à-dire ni simple o ni isolée), nous distinguons six types d'adaptations correspondant à six niveaux de mise en fonctionnement des connaissances. Nous utiliserons par la suite les dénominations abrégées A1, A3, A4, A5, A6 et « fausse A1 » données dans la description qui suit.

A1 : reconnaissances des modalités d'application des notions, théorèmes, méthodes, formules...

Cela peut par exemple consister à utiliser dans un calcul, soit dans un sens soit dans l'autre, les propriétés concernant le produit et le quotient de deux racines carrées, ou encore les conséquences immédiates de la définition : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$ pour a positif.

A3 : mélange de plusieurs cadres ou notions.

Il s'agit ici essentiellement du mélange avec des connaissances anciennes dans la mise en fonctionnement des connaissances sur « racine carrée ». Ces connaissances anciennes, listées précédemment, sont utilisées dans les cadres géométrique, algébrique et/ou numérique, avec des passages de l'un à l'autre plus ou moins à la charge des élèves.

On observe par ailleurs un jeu permanent, souvent implicite, entre cadre numérique et cadre algébrique (par exemple quand on développe ou qu'on factorise des expressions numériques comportant des radicaux). On peut conjecturer que ce mélange de cadres, presque totalement passé sous silence dans l'enseignement de la notion « racine carrée », peut être source de difficultés pour les élèves : nous vérifierons ultérieurement, lors de l'analyse des résultats des élèves, si nos conclusions vont dans le sens de cette conjecture.

De plus, les consignes de l'interrogation jouent parfois sur les registres « langue naturelle » et « mathématique » : Par exemple, la consigne de l'exercice 1 « trouver l'intrus parmi ces

nombres » doit être traduite en « langue mathématique » par « déterminer le nombre qui n'est pas égal aux autres ».

A4 : introduction d'étapes, organisation des calculs ou des raisonnements.

Il peut s'agir soit d'étapes prévues, soit d'étapes à imaginer.

Étapes prévues :

Pour exécuter la tâche « mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ » à partir d'une expression de la forme « $c\sqrt{d} + e\sqrt{f} + g\sqrt{h}$ », il faut organiser les calculs grâce à trois grandes étapes décrites dans l'analyse a priori de la tâche 1 (décomposer en produits avec un facteur b commun, transformer chaque terme de la somme en un $a\sqrt{b}$ puis factoriser pour obtenir le résultat souhaité). Notons cependant que la façon dont est traitée cette tâche, tant par son algorithmisation que sa répétition, minimise les adaptations nécessaires.

Étapes imaginées :

Dans l'exercice 1 de l'interrogation, pour trouver l'intrus, il faut par exemple transformer les écritures de A, B, C, D, E et F sous une forme qui permette de les comparer (nous verrons que les « = ... » pré-écrits par le professeur limitent la difficulté de cette adaptation : cette étape n'est plus tout à fait à la charge des élèves).

Dans l'exercice 4 de la même interrogation, pour prouver que A est un nombre entier, il faut penser à transformer l'écriture de la consigne (là aussi, le professeur, par le « A = ... », aide les élèves à s'engager dans cette voie).

Dans l'exercice 1, pour montrer que si $A = 4\sqrt{5}$ et $B = 3\sqrt{5}$ alors $A \neq B$ ou dans l'exercice 5, que $L = \sqrt{150} - \sqrt{100} - \sqrt{50}$ n'est pas nul, un raisonnement organisé est nécessaire, même si les justifications ne sont pas explicitement demandées.

A5 : utilisation des questions précédentes dans un problème.

Dans les exercices faisant intervenir le calcul littéral, on peut par exemple utiliser l'expression développée et réduite trouvée dans une question précédente pour substituer à x une valeur numérique comportant un radical.

Dans les exercices de géométrie, il peut arriver qu'on utilise la longueur d'un segment trouvée précédemment pour en trouver une autre ou pour montrer qu'un triangle est rectangle par la réciproque de la propriété de Pythagore : on a alors besoin de valeurs exactes et donc de garder les écritures s'écrivant avec des radicaux des longueurs et de travailler avec.

A6 : nécessité de faire des choix

Dans les exercices de « simplification » correspondant à la tâche1, l'élève doit par exemple choisir la décomposition sous le radical, menant à une écriture de la forme $a\sqrt{b}$ (avec a et b entiers et b le plus petit possible). Et là, une seule décomposition donne le résultat attendu.

Cela peut aussi être le choix de l'expression littérale la plus appropriée (entre celle de la consigne, celle développée et réduite et celle factorisée) pour substituer à x une valeur numérique. Tous les choix conduisent au résultat, mais, dans le cas d'une valeur numérique écrite avec un radical, l'utilisation de l'expression développée permet en général des calculs plus simples et rapides.

Il peut aussi s'agir de choisir les transformations d'écritures à effectuer ou pas, dans les expressions avec radicaux, pour permettre de répondre aux questions posées ou de donner un résultat.

De même, par exemple, pour transformer « $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ », on peut choisir d'utiliser « $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ » (on obtient alors $\sqrt{16} = 4$) ou « $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ » (on obtient alors $\sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 = 4$).

« Fausse A1 » : prolongement des propriétés et conventions connues aux nouveaux nombres s'écrivant avec des radicaux.

Devant les difficultés rencontrées pour intégrer le niveau de mise en fonctionnement suivant dans une des familles d'adaptations existantes (A1, A3 ?), nous avons choisi d'en créer une nouvelle, qui reste contextualisée, très liée à la notion « racine carrée ». Sa fréquence nous a néanmoins incités à l'explicitier. Nous verrons en analysant les résultats des évaluations, devant les difficultés éventuelles qu'elle suscite, si nous avons eu raison.

On a en effet besoin dans les tâches proposées ici de prolonger des règles et des conventions vues jusque là pour des nombres « connus » à ces « nouveaux nombres » : ainsi, on utilise par exemple avec les racines carrées les règles de calcul sur les puissances, l'associativité et la commutativité de la multiplication. On supprime également souvent le signe « fois », on applique les identités remarquables, les différents types de développement ou factorisation vus depuis la 5^{ème} : tout se passe comme si on faisait avec les radicaux ce qu'on avait l'habitude de faire avec les « x » des expressions littérales, au sein d'un cadre qu'on pourrait qualifier de « pseudo-algébrique ». On calculerait ainsi avec les radicaux tantôt comme avec les nombres « connus », tantôt comme avec des « nombres généralisés ». Nous essaierons par la suite de voir si c'est une cause des difficultés des élèves, et de mesurer si cela a un impact sur la conception qu'ils se font des racines carrées.

- Traitement des données brutes :

Nous décrivons ici succinctement à quelles données et avec quelle organisation nous avons appliqué les éléments de méthodologie décrits.

A partir des fiches d'exercices 10, 11 et 12 données par l'enseignante, nous avons choisi d'analyser a priori les tâches proposées en classe, grâce à des tableaux récapitulant les connaissances anciennes et nouvelles en jeu ainsi que leur niveau de mise en fonctionnement. Nous avons procédé de même pour les tâches proposées en évaluation à partir des textes de l'interrogation, du contrôle et du brevet blanc ; les consignes de l'interrogation entraînant des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances beaucoup plus divers, nous avons commenté plus en détail les tâches associées.

De plus, nous avons recomposé certaines données brutes recueillies en isolant trois tâches particulières, proposées très souvent, notées tâche 1, tâche 2 et tâche 3 ; nous les avons analysées a priori séparément. Ce choix s'explique d'une part d'un point de vue pratique, devant le caractère répétitif de certains énoncés, par la facilité de se référer à ce travail dans les tableaux d'analyses. D'autre part, les trois devoirs étudiés étant distincts dans le temps, nous avons pu comparer les réussites aux questions proposant les tâches 1, 2 et 3 et ainsi tenter d'évaluer les apprentissages à court, moyen et long terme. Enfin, nous étions curieux de distinguer les énoncés dans lesquels ces tâches étaient l'objet de l'exercice de ceux dans lesquels elles étaient un outil pour répondre à la question posée, et de comparer les productions d'élèves correspondantes.

3-3-b méthodologie pour l'analyse des déroulements

- Indicateurs choisis pour l'analyse

Nous allons préciser ce que nous regardons pour analyser les déroulements en classe et qui, associé à l'analyse des tâches, permettra de reconstituer les activités possibles des élèves. Il y aurait beaucoup d'autres indicateurs éventuels mais nous ne les avons pas retenus, soit par manque de données, soit par manque de temps, soit parce qu'ils ne nous semblaient rien apporter à nos analyses.

- Formes de travail en classe : travail individuel ou collectif, temps de recherche laissé en classe par exemple.
- Utilisation du tableau par le professeur et/ou les élèves.
- Interventions, commentaires du professeur et nature des aides éventuelles.
- Répartition des temps de parole professeur/élèves.
- Organisation du chapitre : nature et temps imparti pour les phases d'introduction de la notion, d'institutionnalisation dans le cours des connaissances nouvelles, de recherche et de correction d'exercices faits en classe ou à la maison.
- Place accordée aux démonstrations dans le cours et/ou dans les exercices.
- En liaison avec la notion « racine carrée » étudiée, nous prêterons une attention particulière aux commentaires concernant les ensembles de nombres (entiers, décimaux, rationnels...) et la place parmi eux des nombres s'écrivant avec un radical

- Traitement des données brutes :

Nous avons fait le choix dans ce mémoire de ne pas donner, bien que nous l'ayons reconstitué, un scénario précis du déroulement de chaque séance : en effet, pour les indicateurs choisis décrits plus hauts, les observations sont quasi-identiques d'une séance à l'autre. Une telle description, si elle avait eu l'avantage de mettre en évidence cette stabilité, aurait été très ennuyeuse à lire car très répétitive. Lorsque nous décrirons les déroulements en 4-3, nous nous contenterons donc de donner les principales caractéristiques observées, éventuellement assorties d'exemples, pour les indicateurs que nous avons retenus. Nous gardons néanmoins la possibilité de retours ponctuels aux vidéos pour éclairer nos analyses sur des points précis.

3-3-c méthodologie liée aux évaluations

- Pour analyser les résultats :

Nous avons choisi de présenter d'abord dans un même tableau général les résultats à l'interrogation, au contrôle et au brevet blanc ; nous avons utilisé des fonds colorés pour repérer les questions ayant pour objet les tâches 1, 2 ou 3. Nous avons essayé d'utiliser des codes chiffres valables pour l'ensemble des exercices, en vert quand l'élève a réussi et en rouge quand il a échoué. Ce tableau nous paraissait intéressant par la double lecture que nous pouvons en faire :

- Une lecture horizontale pour étudier l'évolution des résultats d'un élève, sur une même tâche grâce aux fonds colorés et déterminer éventuellement les domaines dans lesquels il réussit ou échoue régulièrement.
- Une lecture verticale pour voir rapidement grâce aux codes rouge ou vert si une question a été globalement réussie, puis pour analyser plus précisément les résultats de la classe à cette question.

Dans l'analyse des résultats qui suit ce tableau récapitulatif, nous ferons souvent d'autres tableaux, plus petits mais concernant une seule tâche ou un seul exercice, pour affiner nos commentaires. Ils distingueront presque toujours deux groupes d'élèves (g.A et g.B), dont nous justifierons à ce moment-là l'existence.

- Pour mettre en relation résultats aux évaluations et tâches et déroulements en classe :

Les analyses des tâches prescrites ont été faites a priori grâce aux outils décrits en 3-3-a. Reste à expliquer comment nous avons organisé la comparaison avec les tâches proposées en classe.

Nous avons cherché à mettre en relation tâches en classe et en évaluation essentiellement grâce à deux types d'analyses :

- Nous avons comparé les analyses a priori des énoncés traités en cours avec celles des exercices posés en évaluation et nous avons essayé de trouver pour chaque tâche proposée en devoir la tâche la plus proche possible travaillée en classe. Nous avons

ensuite comparé les adaptations nécessaires pour s'y ramener, tant du point de vue de leur diversité que de leur difficulté.

- A partir des résultats des élèves et de leurs erreurs, nous avons eu recours « à la demande » aux vidéos pour voir comment avaient été traitées en classe les tâches correspondantes. Ainsi, il arrive souvent que la tâche prescrite ne se confonde pas exactement avec la tâche effective de l'élève : interventions et aides du professeur, découpages en sous-tâches simples et isolées empêchant le travail de l'adaptation prévu a priori, peuvent profondément transformer une consigne. En outre, nous pouvons essayer d'observer si des différences de comportement existent entre élèves pendant les cours : prises de parole, questions posées au professeur, nombre de fois où ils sont interrogés pour corriger un exercice ...peuvent peut-être aider à comprendre la disparité des résultats.

4 analyses et résultats

4-1 choix du professeur a priori

Comme nous l'avons expliqué en décrivant le cadre théorique de ce travail, les activités des élèves nous intéressent comme intermédiaire entre enseignement du professeur et apprentissages mathématiques des élèves. Nous avons de plus pris le parti d'approcher ces activités par l'analyse des couples énoncés/déroulements en classe et énoncés/productions lors des évaluations. Or, les énoncés sont proposés par le professeur et les déroulements dépendent des pratiques de ce dernier. Il était donc primordial de préciser ses choix a priori, tant du côté du contenu mathématique que du côté de l'organisation du travail en classe.

L'organisation du travail, nous a expliqué le professeur, est la même que pour les autres chapitres : activités d'introduction (attention, activités pour le professeur n'a pas le sens donné dans notre cadre théorique !) puis cours entrecoupé d'exercices faits en classe ou cherchés à la maison et corrigés en classe. L'interrogation, à la cinquième séance, porte uniquement sur ce chapitre et dure 40 minutes. Le contrôle, après la dernière séance filmée, dure 1 heure et porte également sur la trigonométrie, notion étudiée juste avant les racines carrées. Quant au brevet blanc deux mois plus tard, il est commun à toutes les classes de troisième du collège et porte sur les parties du programme traitées par tous à cette date.

Le professeur a choisi d'introduire la notion « racine carrée » par des « manipulations de la machine à calculer » (photocopie distribuée aux élèves donnée en annexe). La calculatrice sert de validation mathématique pour « justifier » l'existence ou non de la racine carrée d'un nombre et donc la définition et ses conséquences D1 et D2 mais aussi les propriétés P1 et P2 relatives au produit, au quotient de racines carrées et les « non-propriétés » relatives à leur somme et leur différence. Lors de la description du déroulement réel, nous aurons davantage d'éléments pour analyser la façon dont ce choix est présenté aux élèves. A la fin de ces activités introductives (feuille photocopieée remplie et collée sur le cahier de leçons), les

élèves auront déjà écrit toutes les connaissances nouvelles D1, D2, P1 et P2 associées à la notion. Le reste du cours prévu (donné en annexe) consiste à faire des remarques, donner des exemples et surtout des méthodes ou techniques qu'il faudra, selon les dires du professeur, savoir reproduire pour faire les exercices. Une remarque retient plus particulièrement notre attention car elle permet de déterminer quels liens l'enseignante souhaite a priori créer entre les différentes familles de nombres connues et ces « nouveaux nombres » s'écrivant avec des radicaux :

« lorsqu'on cherche la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait, on trouve un nombre « qui ne se termine jamais » : ce nombre n'est ni un entier, ni un décimal, ni un rationnel : c'est un irrationnel.

exemple : $\sqrt{5} \approx 2,236067978$ il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est égal à 5, on doit se contenter de donner une valeur approchée : $\sqrt{5} \approx 2,236$ (par défaut à 0,001 près) »

En reprenant la typologie des positions définies par A.Bronner dans son étude sur « les rapports d'enseignants de troisième et seconde aux objets nombres réels et racines carrées », nous pouvons a priori qualifier la position de cette enseignante d' « ouverte aux nouveaux nombres ». Cependant, il sera intéressant de regarder les commentaires oraux lors du déroulement réel : la remarque précédente, qui doit être écrite dans les cahiers de leçons, ne suffit pas en effet pour que les élèves différentient les non-décimaux rationnels des irrationnels

4 2 tâches proposées en classe et au contrôle

4-2-a tâches 1, 2 et 3

Nous avons choisi, pour des raisons détaillées en 3-3-a lors de la présentation des éléments de méthodologie, d'introduire un intermédiaire entre les données brutes et nos analyses. Nous avons ainsi recomposé les énoncés des fiches d'exercices et des évaluations en isolant trois tâches, dont voici les analyses a priori :

- Analyse a priori de la tâche 1 : « écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b le plus petit possible »

Variantes possibles rencontrées : « simplifier », « écrire le plus simplement possible » ou « donner l'écriture la plus simple possible » (mais il faudra être attentif aux cas éventuels dans lesquels le résultat ne peut pas s'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$).

Etape 1 : décomposer le nombre sous le radical comme un produit dont un des facteurs est le carré d'un entier le plus grand possible.

Pour cela, des adaptations sont nécessaires avant d'appliquer, dans les étapes ultérieures, les connaissances nouvelles sur « racines carrées ». Tout d'abord, l'élève doit « choisir le bon

b », c'est à dire choisir la décomposition qui mènera au résultat avec b le plus petit possible, les autres décompositions ne conduisant pas à l'expression attendue. Ici, l'élève a ainsi un choix à effectuer, donc une adaptation de type A6, mais qui dépend également de la bonne utilisation de connaissances anciennes puisqu'il faut savoir décomposer un nombre sous la forme d'un produit, reconnaître des carrés d'entiers, et comprendre la qualification associée à b « le plus petit possible » au sens de la divisibilité. L'adaptation de type A3 associée est renforcée dans le cas où le nombre proposé sous le radical est grand, écrit à l'aide de puissances ou sous forme de fraction.

Exemple : possibilités pour décomposer 48 :

2×24 n'aboutira pas car ni 2 ni 24 ne sont des carrés d'entiers.

4×12 : 4 est le carré de 2 mais cette décomposition amènerait à $2\sqrt{12}$ donc le b choisi n'est pas le plus petit possible.

3×16 conduit au résultat souhaité.

Etape 2 : écrire le nombre proposé sous la forme $a\sqrt{b}$ souhaitée

Si le nombre est donné sous la forme $\sqrt{N}$, cette étape nécessite de reconnaître les modalités d'application (type d'adaptation A1) de la propriété P1a sur la racine carrée d'un produit, pour écrire $\sqrt{N} = \sqrt{c \times b} = \sqrt{c} \times \sqrt{b}$ puis de la conséquence de la définition D'1 pour écrire $\sqrt{c} = \sqrt{a^2} = a$. On obtient alors $\sqrt{N} = a \times \sqrt{b}$ ou $\sqrt{b} \times a$, auquel cas il faut utiliser la commutativité dans l'ensemble des réels (adaptation de type « fausse A1 » pour prolonger la commutativité dans l'ensemble des nombres déjà connus) pour se ramener à $a \times \sqrt{b}$. Il suffit ensuite de supprimer le signe « fois » entre les nombres a et $\sqrt{b}$, ce qui relève encore d'une adaptation de type « fausse A1 » puisque les écritures avec signe « fois » sous-entendu entre deux lettres ou un nombre et une lettre ont été vues en 5^{ème}. Il s'agit de prolonger cette convention connue aux « nouveaux nombres » s'écrivant avec des radicaux. Nous pensions avant ce travail que ceci semblait naturel aux élèves et ne constituait pas une source de difficultés. Nous aurons l'occasion lors de l'analyse des résultats de discuter cette opinion a priori.

Si le nombre est donné sous la forme $k\sqrt{N}$, des adaptations « fausse A1 » interviennent encore : il faut cette fois rajouter le signe « fois » omis entre k et $\sqrt{N}$, utiliser éventuellement la commutativité dans l'ensemble des réels et de toute façon l'associativité.

$$\text{Exemple : } 3\sqrt{48} = 3 \sqrt{16 \times 3} = 3 \times (\sqrt{16} \times \sqrt{3}) = 3 \times (4 \times \sqrt{3}) = (3 \times 4) \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ ou } 3 \sqrt{3 \times 16} = 3 \times (\sqrt{3} \times \sqrt{16}) = 3 \times (\sqrt{3} \times 4) = (3 \times 4) \times \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Or, ce travail se fait généralement avec des « x » en place de « $\sqrt{3}$ » : $\sqrt{3}$ a quasiment ici un statut de nombre généralisé. Le jeu entre cadre numérique et algébrique est bien présent, quoiqu'implicite. Ce qui précède posera certainement un problème aux élèves qui ne maîtrisaient déjà pas un calcul algébrique du type $4(x \times 3) = 12x$. On peut cette fois conjecturer que, même pour les autres, ce ne sera pas une évidence de calculer ainsi avec les radicaux.

Etape 3 : si une somme algébrique de racines carrées était donnée dans l'expression de départ.

On retrouve les caractéristiques de l'étape 1 avec la difficulté supplémentaire de faire intervenir le même b dans les décompositions sous les radicaux. Parfois, un des termes de la somme proposée est déjà écrit avec le bon b sous le radical ; d'autres fois, le b est donné dans la consigne. Le choix à la charge de l'élève décrit dans l'étape 1 est alors réduit voire inexistant. L'étape 2 pour chacun des termes permet ensuite d'obtenir une expression du type $a_1\sqrt{b} + a_2\sqrt{b} + a_3\sqrt{b}$. A partir de là, l'élève doit factoriser (le facteur commun étant $\sqrt{b}$, on a encore une adaptation « fausse A1 » et un jeu de cadres numérique/algébrique puisqu'on agit avec le nombre $\sqrt{b}$ comme avec une lettre en calcul algébrique). On peut conjecturer que ce genre de calcul n'aide pas à considérer les racines carrées de nombres comme des nombres : l'ambiguïté du statut de $\sqrt{2}$ que nous évoquions au début de ce travail n'est pas levée mais plutôt amplifiée. Notons que si $a_i = -$ ou $+$, la factorisation est plus difficile pour les élèves puisqu'il faut expliciter le coefficient devant le radical (on retrouve là une difficulté bien connue en didactique de l'algèbre). Reste enfin à calculer $a_1 + a_2 + a_3$, ce qui nécessite l'intervention de la connaissance ancienne « somme de relatifs » (adaptation A3).

Une dernière difficulté résulte de l'enchaînement de ces étapes de calcul (adaptation du type A4) et de leur présentation globale : même si il maîtrise chaque étape, l'élève doit être attentif à écrire des suites d'égalités mathématiquement correctes.

- **Analyse a priori de la tâche2 : calculer la valeur d'une expression littérale pour $x = +\sqrt{a}$ ou $-\sqrt{a}$.**

Première déclinaison possible : l'expression donnée dans la consigne est celle développée et réduite (presque toujours un polynôme de degré 2) et c'est la seule écriture qui intervienne dans l'exercice.

Il s'agit ici de substituer à x une valeur numérique avec un radical et d'effectuer les calculs. Prenons par exemple $A = mx^2 + nx + p$, à calculer pour $x = \sqrt{a}$. L'élève devra d'abord utiliser D1 (adaptation de type A1) pour écrire mx^2 sans radical puis se servir de la commutativité et de l'associativité de l'addition, connues implicitement mais qu'on doit prolonger à ces nouveaux nombres s'écrivant avec un radical (type d'adaptation « fausse A1 ») pour calculer $ma + p$. Les élèves travailleront probablement alors « comme avec des x ». Il y a encore ici un jeu implicite entre cadre algébrique et cadre numérique : une expression littérale est donnée (l'élève a donc tendance à se placer dans le cadre algébrique) mais le résultat attendu est un nombre (on doit donc répondre dans le cadre numérique). De plus, $\sqrt{a}$ se comporte dans les calculs « presque comme un x ». On travaillerait ainsi avec des objets « nombres » dans un cadre numérique mais avec les règles du calcul littéral importées du cadre algébrique. On dira désormais dans ce cas que le travail s'effectue dans un cadre « pseudo-algébrique ».

Deuxième déclinaison possible : on donne une expression littérale A qu'on demande de développer (première question de l'exercice), éventuellement de factoriser (deuxième

question) puis la troisième question consiste à demander de calculer A pour $x =$ une valeur numérique s'écrivant avec des radicaux.

Ici, l'élève doit tout d'abord faire un choix entre les deux ou trois expressions disponibles : celle de la consigne, celle développée et réduite et éventuellement celle factorisée.

On a donc typiquement une adaptation de type A6, présente dans tous les exercices du même genre même si les valeurs numériques données ne s'écrivent pas avec des radicaux : ici aussi, chacun des choix mène au résultat mais, avec l'expression développée, les calculs sont généralement plus simples et rapides. On peut penser que cette adaptation liée au choix est surtout valable les premières fois, l'habitude ensuite étant prise d'opter pour l'expression développée quand la valeur numérique donnée s'écrit avec un radical. Si pour travailler une écriture de A autre que celle de la consigne est choisie, l'élève devra utiliser un résultat obtenu dans une question précédente (type d'adaptation A5 décrite dans la partie méthodologie).

Si l'expression développée est choisie, on retrouve la première déclinaison de la tâche et ses adaptations.

Si l'expression de départ ou l'expression factorisée est choisie, le calcul s'effectue encore dans le cadre « pseudo-algébrique » décrit plus haut : il faut alors utiliser les méthodes de développement, éventuellement les identités remarquables, vues dans les chapitres consacrés au calcul littéral, même si l'étape de réduction est un peu différente (deux « sortes » de termes ici : les « avec » et les « sans radicaux », trois en calcul littéral pour un polynôme de degré 2 : les « en x^2 », les « en x » et les « sans x »). Il faudra là encore faire comme si ce qui a été étudié pour les nombres connus se prolongeait naturellement à ces « nouveaux nombres » (type d'adaptation « fausse A1 » décrite dans la partie méthodologie) : nous pensions avant ce travail que cette adaptation n'était pas source de difficultés pour les élèves, nous écrirons ce qu'il en est a posteriori, après analyse des productions des élèves en 4-4.

Remarquons enfin que si la forme du résultat attendu est donnée dans la consigne, le travail dans le cadre pseudo-algébrique décrit nécessite des mises en fonctionnement moins difficiles : les erreurs du type « $a+b\sqrt{c}=(a+b)\sqrt{c}$ » sont par exemple évitées.

- Analyse a priori de la tâche 3 : calcul de la valeur exacte de la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle connaissant les valeurs exactes des longueurs des deux autres.

Etape 1 :

L'élève doit reconnaître les données nécessaires à l'application de la propriété de Pythagore (adaptation de type A1), à savoir :

-un triangle rectangle : donné sous forme de texte ou de figure dans la consigne. Il faudra peut-être isoler ce triangle d'une figure complexe, utiliser une question précédente dans laquelle on a montré que le triangle était rectangle, lire le codage « angle droit » sur un croquis ou une figure donnée ou encore imaginer l'étape « montrer que le triangle est rectangle ». Chacune de ces adaptations éventuelles (A3, A4, A5) ajoute un degré

supplémentaire de difficulté à la mise en fonctionnement de la connaissance « application de la propriété de Pythagore ».

-deux longueurs de côtés connues (données dans l'énoncé, calculées dans une question précédente -ce qui ajoute une adaptation A5-ou inscrites sur un croquis sur lequel on a le droit de lire des indications), que nous noterons a et b , et une longueur inconnue que nous noterons AB .

Etape 2 :

L'élève doit alors identifier l'hypoténuse du triangle rectangle pour remplacer, dans l'égalité conclusion du théorème, les deux longueurs connues par les valeurs numériques données. La connaissance « propriété de Pythagore » étant ancienne (vue en quatrième), on peut penser que, si c'est l'hypoténuse qui est recherchée, cette étape est une tâche simple (les changements de cadres, géométrique, numérique ou algébrique sont tellement habituels que l'adaptation A3 correspondante n'est plus censée poser de difficultés). L'élève obtient alors une égalité du type : $AB^2 = a^2 + b^2 = c$ avec c nombre positif.

Par contre, si c'est un des côtés de l'angle droit qui est recherché, l'élève obtient :

$AB^2 + a^2 = b^2$. Il doit alors isoler la longueur inconnue en travaillant sur cette égalité pour écrire :

$AB^2 = b^2 - a^2 = c$ avec c nombre positif.

Les mélanges de cadres géométrique/numérique/algébrique paraissent dans ce cas plus difficiles à gérer, même si, en quatrième, cette situation est abondamment travaillée.

Remarquons que si les longueurs connues étaient données sous forme fractionnaire, ou écrites avec des puissances ou des radicaux, d'autres adaptations du type A3 seraient nécessaires pour effectuer le calcul $b^2 \pm a^2$. Dans les énoncés que nous analysons, ces données seront toujours des nombres entiers.

Etape 3 : passage de $AB^2 = c$ (c positif) à $AB = \sqrt{c}$

C'est ici que les connaissances sur les racines carrées sont censées intervenir. Plus exactement, c'est la définition en langue naturelle qu'on applique : AB est le nombre positif dont le carré est égal à c , donc AB est égal à la racine carrée de c . Sauf qu'il y a des implicites : il faudrait dire que c est positif et que AB est positif car c'est une longueur. Or, ce passage de $AB^2 = c$ à $AB = \sqrt{c}$ est vu dès la quatrième par l'intermédiaire de la touche

« $\sqrt{\quad}$ » de la calculatrice, avant que la définition de la racine carrée d'un nombre soit donnée.

Etape 4 : donner le résultat exact

Ici, l'élève doit utiliser soit des procédures de calcul mental, soit la calculatrice, pour déterminer s'il existe ou non une valeur décimale exacte du résultat (ce qui suppose un mélange avec des connaissances anciennes sur les ensembles de nombres, et donc une

adaptation de type A3). Si oui, il peut la donner, précédée d'un signe « = ». Sinon, il doit garder comme résultat l'écriture avec un radical. Dans ce dernier cas, il peut choisir ou pas (adaptation de type A6) de mettre quand c'est possible le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ (avec les

adaptations associées décrites dans les étapes 1 et 2 de l'analyse a priori de la tâche1).

4-2-b présentation de l'ensemble

- Tâches en classe :

Les énoncés proposés en classe hors évaluation sont tous dans les fiches d'exercices 10, 11 et 12 distribuées par le professeur (données en annexe). Nous avons analysé a priori les tâches associées dans des tableaux faisant intervenir les connaissances anciennes et nouvelles ainsi que les niveaux de mise en fonctionnement de ces connaissances. Ces tableaux font souvent référence aux tâches 1 et 2, analysées a priori dans le paragraphe précédent (nous l'écrirons dans ce cas en caractère gras et souligné en pointillés). Voici ce que nous obtenons :

Fiche 10 :	Connaissances anciennes	Connaissances nouvelles	Niveau de mise en fonctionnement
Ex1	Reconnaissance de carrés d'entiers et de décimaux	D' 1	Application simple et isolée
Ex2	Reconnaissance de carrés d'entiers à partir de nombres relatifs, en écriture fractionnaire ou s'écrivant à l'aide de puissances	Aucune	A3 : mélange avec les connaissances anciennes sur les fractions ou les puissances.
Ex3	Reconnaissance de carrés de nombres entiers, décimaux, en écriture fractionnaire ou écrits avec des puissances, sous la forme d'un produit de facteurs.	D' 1 pour $\sqrt{25}$ aucune pour les autres nombres proposés	A3 : mélange avec les connaissances anciennes sur les fractions ou les puissances
Ex4	Carrés d'entiers (reconnaissance et calcul)	Définition en langue naturelle de la racine carrée d'un nombre	- Travail en « langue naturelle » avec des formulations du type « a pour carré », « est le carré ». - garder $\sqrt{9}$ pour « racine carrée de 9 » mais écrire 3 pour « racine carrée de 9 »
Ex5	Carré d'un nombre écrit sous forme fractionnaire, de puissance de 10 ou de produit d'un entier par une puissance de 10 (calcul et/ou reconnaissance)	D'1 ou P 2a puis D'1 D'1 ou P 1a puis D'1	A6 dans la mise en fonctionnement de D'1 (soit avec a = fraction/produit d'un nombre par une puissance de 10, soit utilisation d'abord de P 2a/P1a puis deux fois de D'1 avec a = entier/puissance de 10)
Ex6	Reconnaissance de carrés des premiers nombres entiers, égalités littérales, « un nombre et son opposé ont le même carré », « un carré est toujours positif ».	A priori aucune mais on peut faire le lien avec la définition et la résolution de $x^2=a$	Application simple et isolée
Ex7	Egalités littérales, fractions.	Définition de la racine carrée en « langue naturelle »	Transformer le point de vue de la définition de la leçon en « langue naturelle »: il s'agit ici de trouver un nombre connaissant sa racine carrée, donc d'élever au carré.
Ex8	Transformations d'écriture à	D 1, D'1 et P 1a et b.	-A1 pour utiliser D 1, D'1 et P 2.

	partir de nombres décimaux, de puissances de 10 et/ou de produit des uns par les autres. Reconnaissance de carrés des premiers entiers.		-A3 car mélange avec les connaissances anciennes décrites dans la première colonne.
Ex9	Reconnaissance de carrés d'entiers, dans a) de tête, dans c) nécessitant la calculatrice) ou de carrés de fractions (dans b)), leur numérateur et dénominateur étant des carrés d'entiers de 3 à 11.	Définition en langue naturelle de la racine carrée, éventuellement P2a pour le b).	Application simple et isolée pour a) et b) Choisir d'adapter la définition en langage naturel de la racine carrée à une fraction ou appliquer la propriété relative au quotient de radicaux .
Ex10	Décomposition d'un entier sous la forme d'un produit. Commutativité et associativité dans la gestion des calculs.	P 1a, éventuellement P 1b D 1 et/ou D'1	-Choisir (A6) entre transformer chaque facteur ou appliquer P1 tout de suite, la mention « sans calculatrice » incitant plutôt à la première solution (outre les multiplications à poser, les carrés d'entiers sont ensuite trop grands pour être reconnus). -« fausse A1 » pour appliquer l'associativité et la commutativité dans l'ensemble des réels (en particulier aux racines carrées).
Ex11	Calcul fractionnaire. Eventuellement, décomposition d'un entier sous la forme d'un produit et reconnaissance de carrés d'entiers.	P 2a et/ou b, éventuellement P1a associée à D'1.	-A1 pour appliquer P 2 -« fausse a1 » pour éventuellement simplifier une fraction par un nombre s'écrivant avec un radical.
Ex12	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 1 , étapes 1 et 2 : aucune adaptation supplémentaire n'est nécessaire pour se ramener à cette tâche 1.		
Ex13 de a) à f)	Eventuellement produit de nombres décimaux	P 1b	A1 pour appliquer P 1b
Ex13 g) et h)	Conventions liées à la suppression du signe « fois ».	P 1b et D'1 dans le sens $a=\sqrt{a^2}$	-A1 pour appliquer P 1b et D'1, faire le lien entre carré et racine carrée pour écrire dans le sens inhabituel $4=\sqrt{16}$. -« fausse A1 » pour rétablir le signe « fois » et utiliser $a\sqrt{b}=a \times \sqrt{b}$
Ex14	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 1 , étapes 1 et 2, aucune adaptation supplémentaire n'est nécessaire pour se ramener à la tâche 1		
Ex15	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 2 , première déclinaison possible (pas de choix d'expression), aucune adaptation supplémentaire n'est nécessaire pour se ramener à la tâche 2.		
Ex16 et 17	Non traités, ni en classe, ni à la maison.		

Fiche 11 :	Connaissances anciennes	Connaissances nouvelles	Niveau de mise en fonctionnement
Ex1à4	Décomposition sous forme d'un produit, reconnaissance de carrés d'entiers, fractions, décimaux, commutativité et associativité de la multiplication.	P1a et b, P2a et b, D 1 et D'1	-A1 pour appliquer D1, P 1 et P 2. -choix (A6) de transformer d'abord chaque facteur ou d'écrire avec un seul radical et de transformer ensuite. -mélange avec les connaissances

			anciennes (A3) sur les simplifications de fractions. -« fausse A1 » pour gérer l'associativité et la commutativité dans l'ensemble des nombres réels.
Ex 5 et 6	Décimaux, fractions, décomposition d'un nombre sous la forme d'un produit de facteurs, reconnaissance des carrés des premiers entiers.	P 1a et/ou b P 2a et/ou b D 1 et/ou D'1	-A1 pour appliquer D 1, P 1 et P 2. -choix (A6) de transformer d'abord numérateur et dénominateur puis de simplifier l'écriture fractionnaire obtenue ou d'écrire le nombre dans un premier temps avec un seul radical.
Ex 7	Ecritures fractionnaires (en particulier propriété des quotients égaux), développement avec distributivité simple du type $k(a+b)$	P 1, D 1.	-« fausse A1 » pour distribuer ou utiliser la propriété des quotients égaux avec des radicaux.
Ex 8	Se reporter à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étape 3, dernière étape de factorisation avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b}$.		
Ex 9	Se reporter à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étape 3, dernière étape de factorisation avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ ou $a\sqrt{b} + c\sqrt{d} + e$ (pour le dernier, gestion des parenthèses afin de s'y ramener).		
Ex 10	Se reporter à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3, avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b}$.		
Ex 11	Se reporter à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3, avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b}$.		
Ex12a), ex13b) et ex14b)	Commutativité, associativité de la multiplication, conventions liées à la suppression du signe « fois », décomposition d'un entier sous la forme d'un produit de facteurs.	P 1a et/ou b D 1 et/ou D'1	-« fausse A1 » pour utiliser la commutativité et l'associativité dans l'ensemble des réels et rétablir le signe « fois » sous-entendu entre un entier et une racine carrée (écrire $a\sqrt{b}=ax\sqrt{b}$).
Ex 12b)	Se reporter à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3, avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b}$.		
Ex 13a)	Mélange d'un travail type <u>tâche 1</u> avec une transformation de produit (voir ex12a, 13b et 14b) : toutes les connaissances anciennes et/ou nouvelles correspondantes ainsi que les adaptations associées sont valables. De plus, priorité de la multiplication sur l'addition connue, à prolonger (« fausse A1 ») aux calculs avec les radicaux.		
Ex 14a)	Se reporter à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3, avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b}$.		
Ex 15	Se reporter à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3, avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b}$.		
Ex 16 à 20.	Identités remarquables 1, 2 et 3	D 1, P 1b, éventuellement D'1	-A1 pour appliquer D 1, D'1 et P 1b. -« fausse A1 » pour gérer des développements et réductions d'expressions s'écrivant avec des radicaux.
Ex 21	Développements et réductions d'expressions numériques utilisant la double distributivité $(a+b)(c+d)$.	D 1, P 1b, éventuellement D'1.	-A1 pour appliquer D 1, D'1 et P 1b. -« fausse A1 » pour gérer des développements et réductions d'expressions s'écrivant avec des radicaux.
Ex 22	-développements du type $(a+b)(c+d)$. -calcul fractionnaire.	D 1, P 1b, éventuellement D'1.	-A1 pour appliquer D 1, D'1 et P 1b. -A3 et « fausse A1 » pour gérer les développements avec les racines carrées en mélangeant avec la connaissance ancienne « calcul fractionnaire ».
Ex 23	Développements et réductions d'expressions avec des identités remarquables et de la distributivité simple du type $k(a+b)$.	D 1, P 1b, éventuellement D'1	-introduction d'étapes (adaptation A4) : développer et réduire les expressions données pour déterminer celles qui sont égales. -A1 pour appliquer D 1, D'1 et P 1b.

			-« fausse A1 » pour gérer des développements et réductions d'expressions s'écrivant avec des radicaux.
Ex 24	Identités remarquables, développements du type $k(a+b)$	D 1, éventuellement P 1b et D'1	-A1 pour appliquer D 1, P 1b et D'1 -Introduction d'étapes (adaptation A4) : développer et réduire les expressions données pour répondre à la question posée. -« fausse A1 » pour appliquer identités remarquables et développements.
Ex 25, 26	Non traités, ni en classe, ni à la maison.		

Fiche 12 :

	Connaissances anciennes	Connaissances nouvelles	Niveau de mise en fonctionnement
Ex1 A,B,E,F,H,I,M et N	se reporter à l'analyse a priori de la tâche 1 , étapes 1, 2 et 3 avec un résultat attendu du type $a\sqrt{b}$ (aucune autre adaptation nécessaire dans la mise en fonctionnement des connaissances)		
Ex1 K,L,O et P	se reporter à l'analyse a priori de la tâche 1 , étapes 1, 2 et 3 mais avec un résultat attendu qui n'est pas du type $a\sqrt{b}$: on obtient des résultats sous la forme $a+b\sqrt{c}$, $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, ou $a+b\sqrt{c}+d\sqrt{e}$ (a, b, c, d et e entiers).		
Ex1 C,D,G et J	Les expressions données sont littérales : -Pour C et G, mêmes étapes 1, 2 et 3 que celles décrites dans l'analyse a priori de la tâche 1 mais le résultat est littéral, du type $ab\sqrt{c}$, avec a et c entiers ($129b\sqrt{3}$ et $15a\sqrt{2}$). -Pour D et J, les radicandes sont tous des carrés d'entiers : il suffit d'appliquer D'1 pour trouver un résultat littéral mais sans radical (4b et 2a).		
Ex2	Développements avec identités remarquables 1, 2 ou 3 ou du type $(a+b)(c+d)$	D 1, P 1b, éventuellement D'1	-A1 pour appliquer D 1, D'1 et P 1b. -« fausse A1 » pour gérer des développements et réductions d'expressions s'écrivant avec des radicaux.
Ex3-1)	identités remarquables 2 et 3 dans le sens des développements.	D 1, P 1b, éventuellement D'1	-A1 pour appliquer D 1, D'1 et P 1b. -« fausse A1 » pour gérer des développements et réductions d'expressions s'écrivant avec des radicaux.
Ex3-2a)b) et début du c)	Factorisations et développement d'expressions littérales (les racines carrées n'interviennent pas).		
Ex3-2 fin du c)	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 2 , deuxième déclinaison (avec choix de l'expression).		
Ex4, 5 et 6 (pour $x=-\sqrt{2}$)	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 2 , première déclinaison (sans choix de l'expression). Pour $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, mélange avec la connaissance ancienne « fraction » et utilisation de la connaissance nouvelle P 2.		
Ex6 pour $x=3\sqrt{2}$	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 2 , première déclinaison (sans choix de l'expression) mais le « 3 » devant le radical nécessite des adaptations supplémentaires : pour calculer $(3\sqrt{2})^2$, l'élève peut choisir d'écrire $3^2 \times (\sqrt{2})^2$ ou de revenir à la définition du carré en calculant $3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$.		
Ex6 pour $x=\sqrt{2}+3$	Variante de la tâche 2 : utilisation, en plus de ce qui est décrit dans la première déclinaison de l'analyse a priori de cette tâche, de l'identité remarquable 1 pour développer $(\sqrt{2}+3)^2$ et de la distributivité simple pour développer $6(\sqrt{2}+3)$, avec l'adaptation « fausse A1 » associée dans ces calculs-là.		
Ex7	L'expression littérale de départ est une fraction rationnelle (polynôme de degré 1 au numérateur, de degré 2 sans terme de degré 1 au dénominateur) : on retrouve donc le travail décrit dans l'analyse a priori de la tâche 2 , première déclinaison, avec un dénominateur entier		

	à gérer (A3 : mélange avec les connaissances anciennes liées au calcul fractionnaire). Pour $x=3\sqrt{5}$, se reporter à l'ex6 pour $x=3\sqrt{2}$.		
Ex8	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 2 , première déclinaison (sans choix de l'expression) mais avec une expression de départ donnée sous forme développée d'un polynôme de degré 4 : les calculs de $(\sqrt{3})^4$ et $(-\sqrt{3})^4$ demandent d'appliquer deux fois de suite D1 ou d'écrire le produit de facteurs correspondant et d'appliquer P 1b.		
Ex 9	résolution d'équations et travail associé sur les égalités, reconnaissance de carrés d'entiers, puissances de 10.	« résolution de $x^2=a$ selon le signe de a », vue dans la leçon.	A3 : mélange avec les connaissances anciennes « travail sur les égalités » pour ramener les équations $ax^2=b$, $(ax)^2 = b$, $x^2+a=b$, $(x+a)^2=b$ aux équations de la leçon.
Ex10-1et2	Développements et factorisations d'expressions littérales (les racines carrées n'interviennent pas).		
Ex10-3	Se reporter à l'analyse a priori de la tâche 2 , deuxième déclinaison (avec choix de l'expression) : -pour $x=\sqrt{2}$, aucun changement par rapport à la tâche décrite en 4-2-b. -pour $x=\sqrt{3}+1$, utilisation de l'identité remarquable 1 pour développer $(\sqrt{3}+1)^2$ et de la distributivité simple pour développer $19(\sqrt{3}+1)$, avec l'adaptation « fausse A1 » associée dans ces calculs-là.		
Ex 11 et 12	Non traités, ni en classe, ni à la maison.		

• Tâches proposées lors des évaluations :

Nous disposons de trois évaluations. Nous retenons bien sûr les tâches se rapportant aux racines carrées mais aussi, dans quelques cas précis, les tâches issues d'énoncés similaires dont la réalisation ne fait pas intervenir de radicaux : les comparaisons des productions d'élèves correspondantes peuvent en effet apporter un éclairage intéressant pour comprendre la cause des erreurs commises (par exemple, nous regardons ce que les élèves savent faire à partir d'expressions littérales en remplaçant par des valeurs numériques s'écrivant ou non avec des radicaux). Comme pour les exercices en classe, nous avons présenté dans un tableau les connaissances anciennes, nouvelles et les mises en fonctionnement associées en faisant référence, en caractère gras souligné en pointillés, aux tâches 1, 2 et 3 déjà analysées a priori en 4-2-a. Voici ce que nous obtenons :

Interrogation	Connaissances anciennes	Connaissances nouvelles	Niveaux de mise en fonctionnement
Ex1	Décomposition d'un entier sous forme de produit de facteurs, reconnaissance de carrés d'entiers, associativité et commutativité de la multiplication, factorisations du type $ka+kb=k(a+b)$.	D1et/ou D'1, P1a et/ou b et éventuellement P 2a.	-adaptation A1 pour l'application de D 1, P 1 et P 2. -adaptation « fausse A1 » pour utiliser la commutativité, l'associativité, la distributivité avec les racines carrées. -adaptation A4 car il faut, pour répondre à la question posée, transformer les écritures données et donc introduire une étape.

			-adaptation A6 car il faut choisir la forme sous laquelle transformer ces écritures.
Ex2	Identique à l'ex10 de la fiche 11. Se référer à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3.		
Ex3	-pour $\sqrt{3}+\sqrt{3}$, factorisation du type $ka+kb=k(a+b)$ avec l'adaptation « fausse A1 » associée. -pour $\sqrt{27}$, se référer à l'étape 1 de l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u>. -pour $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$, utilisation de D1 (si on transforme en $(\sqrt{3})^2$) ou de P1b puis D'1 (si on transforme en $\sqrt{3 \times 3} = \sqrt{9}$). -pour $\frac{\sqrt{75}}{5}$, se référer aux étapes 1 et 2 de l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u>, mais avec un coefficient fractionnaire égal à $\frac{1}{5}$ puis utilisation des connaissances sur les simplifications d'écritures fractionnaires (et donc adaptation A3 mélange avec une connaissance ancienne). -pour les deux dernières expressions, utilisation des identités remarquables 1 et 3 dans le sens du développement (et donc adaptation « fausse A1 » associée) avec mise en fonctionnement (adaptation A1) de D1 et P1.		
Ex4	On se ramène à la <u>tâche 1</u>, étapes 1, 2 et 3 avec un résultat attendu particulier entier, après plusieurs étapes : -il faut transformer A pour répondre à la question posée (adaptation A4 liée à l'introduction d'une étape). -il faut savoir ce qu'est un nombre entier (et donc mélanger des connaissances anciennes arithmétiques aux connaissances nouvelles – adaptation A3-). -il faut calculer $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$: différents choix (adaptation A6) sont possibles pour cela, utilisant P1a et/ou b et D1 et/ou D'1 : on les détaillera dans l'analyse des résultats des élèves.		
Ex5	Il faut déjà (adaptation A4) introduire l'étape « transformation des expressions proposées », puis : -pour N et U, se référer à la <u>tâche 1</u>, étapes 1, 2 et 3 avec un résultat entier. -pour L, se référer à la <u>tâche 1</u>, étapes 1,2 et 3 mais le résultat ne s'écrit pas sous la forme habituelle $a\sqrt{b}$: on obtient un résultat du type $a+b\sqrt{c}+d\sqrt{e}$ (avec a, b, c, d et e entiers). -pour S, se référer à la <u>tâche 1</u>, étapes 1, 2 et 3 après avoir soit supprimer les parenthèses, soit calculer à l'intérieur (et donc effectuer des adaptations A3 et « fausse A1 » pour prolonger la connaissance ancienne « gestion des parenthèses dans un calcul » aux racines carrées). Enfin, pour justifier que L n'est pas nul, une étape et des calculs (adaptation A4) sont nécessaires, très difficiles au niveau troisième.		

Contrôle	Connaissances	Connaissances nouvelles	Niveaux de mise en fonctionnement
----------	---------------	-------------------------	-----------------------------------

	anciennes		
Ex1	Se référer à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3 avec des résultats attendus sous la forme $a\sqrt{b}$.		
Ex2-1)	Développement d'une expression littérale utilisant la distributivité simple puis réduction : les racines carrées n'interviennent pas.		
Ex2-2)	Se référer à l'analyse a priori de la <u>tâche 2</u> , deuxième déclinaison (choix entre deux expressions pour travailler).		
Ex3-2)	Se référer à l'analyse a priori de la <u>tâche 3</u> (l'hypoténuse est cherchée) mais une adaptation préalable est nécessaire : isoler dans la figure donnée la sous-figure « triangle RST » et utiliser le codage « angle droit » pour savoir qu'il est rectangle en R.		
Ex3-3)	-théorème de Thalès. -équation du type $\left\langle \frac{a}{b} = \frac{x}{c} \right\rangle$	D1 et P1 si on choisit d'écrire le résultat sans radical au dénominateur.	-A5 car on utilise la valeur de ST trouvée en 2) et le parallélisme de (RS) et (MN) démontré en 1). -A6 car on choisit de garder la valeur exacte de ST s'écrivant avec un radical quand on remplace après application du théorème de Thalès. -A6 encore car on choisit de donner le résultat avec ou sans radical au dénominateur. -« fausse A1 » associée à A3 pour appliquer les règles de calcul connues aux racines carrées.

Brevet blanc	Connaissances anciennes	Connaissances nouvelles	Niveaux de mises en fonctionnement
Partie 1, ex1-1)	Se référer à l'analyse a priori de la <u>tâche 1</u> , étapes 1, 2 et 3, avec un résultat attendu de la forme $a\sqrt{b}$.		
Partie 1, ex1-2)	Identité remarquable 1 dans le sens du développement et associativité de la multiplication.	D1	-A1 pour l'application de D1. -« fausse A1 » associée à A3 pour utiliser l'identité remarquable et l'associativité avec les « nouveaux nombres » s'écrivant avec des radicaux.
Partie 1, ex2-1)	Développement d'une expression littérale utilisant l'identité remarquable 1 et la double distributivité. Les racines carrées n'interviennent pas.		
Partie 1, ex2-4)	Se référer à l'analyse a priori de la <u>tâche 2</u> , deuxième déclinaison (ici, choix parmi trois expressions).		
Partie 2, ex2-2)	calcul de distance dans un repère orthonormé et calculs associés avec les nombres relatifs.	Aucune	Mélange avec les connaissances anciennes décrites dans la première colonne pour calculer sous le radical donc adaptation A3

Partie 2, ex2-3)	-réciproque de la propriété de Pythagore. -définition du carré ou utilisation de $(ab)^2=a^2b^2$.	D1 (ou éventuellement P1)	-adaptation A5 car il faut utiliser la question précédente pour avoir la valeur exacte de AB. -« fausse A1 » associée à A3 pour prolonger les règles de calcul sur les puissances ou la définition du carré aux nombres s'écrivant avec des radicaux.
Partie 2, ex2-4)	Théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse.	Aucune	-A5 car on a besoin de la valeur exacte de AB trouvée dans le 2) pour calculer le rayon du cercle. -A6 car on choisit ici de donner la valeur exacte du résultat « $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ».
Problème 2)	Se référer à l'analyse a priori de la tâche 3 (un des côtés de l'angle droit est cherché). Si on choisit d'écrire le résultat sous la forme « $a\sqrt{b}$ », se référer ensuite à la tâche 1 , étapes 1 et 2.		

4-2-c commentaires

- Au sujet des énoncés proposés en classe dans les fiches 10, 11 et 12 :
 - 50 exercices en tout sont faits en classe ou à la maison et corrigés en classe. Parmi eux, 10 énoncés proposent la tâche 1 (avec les adaptations A1, A3, A4, A6 et « fausse A1 » associées, intervenant comme nous l'avons expliqué dans l'analyse a priori en 4-2-a), 7 énoncés la tâche 2 (avec les adaptations A1, A3, A5, A6 et « fausse A1 » associées) et aucun la tâche 3. Nous ferons p. 28, 29 et 30 des commentaires spécifiques au sujet des tâches.1, 2 et 3.
 - Voici un récapitulatif des connaissances nouvelles et de la nature et la fréquence des adaptations nécessaires dans les 33 autres exercices, indépendants de ces 3 tâches :

Connaissance(s) nouvelle(s) intervenant	Nombre d'exercices concernés (sur 33 au total)
D1 et/ou D'1	28
P1	25
P2	9

Adaptations nécessaires	Nombre d'exercices concernés
-------------------------	------------------------------

	(sur 33 au total)
A1	22
A3	14
A6	10
« fausse A1 »	24

Ce dernier tableau met en évidence la fréquence importante de l'adaptation « fausse A1 », légitimant une nouvelle fois la décision prise de la distinguer et de regarder dans les analyses ultérieures comment les élèves parviennent à la gérer. Nous remarquons par contre que les adaptations A4 et A5 sont ici absentes. Les exercices proposés sont souvent courts, avec une consigne unique : ils ne nécessitent donc ni d'utiliser des questions précédentes (A5), ni d'introduire des étapes ou d'organiser des raisonnements (A4). Les tâches correspondantes apparaissent ainsi « isolées » et nous nous demanderons dans nos conclusions quelles ont pu être les conséquences sur les apprentissages de cet isolement, ce « cloisonnement » : associé aux répétitions observées, est-il possible qu'il ait accru le rôle de la mémoire et rendu difficile l'acquisition à long terme des connaissances ? Nous chercherons par la suite, en analysant les résultats des élèves de chaque groupe et leur évolution, à « tester » cette conjecture.

- Pour faciliter la mise en relation ultérieure des résultats aux évaluations avec ce qui a été fait en classe, nous synthétisons également ici les données relatives aux énoncés demandant de développer des expressions numériques avec des radicaux :

11 exercices, avec au total 50 expressions à développer, sont proposés : pour 13 d'entre elles, on peut appliquer l'identité remarquable « carré d'une somme », pour 13 autres l'identité « carré d'une différence » et 12 écritures se transforment encore grâce à la troisième identité remarquable. Les 12 expressions restantes se développent grâce à la distributivité (simple pour 2 d'entre elles, double pour les 10 autres). Notons ici que même les connaissances anciennes à prolonger aux racines carrées (adaptation « fausse A1 ») sont très cloisonnées puisque chaque expression proposée ne fait appel qu'à un seul de ces types de développement (soit l'identité remarquable 1, soit la 2, soit la 3, soit la distributivité simple, soit la double mais jamais ensemble).

- Au sujet des adaptations nécessaires lors des évaluations (hors énoncés correspondant strictement aux tâches 1, 2 ou 3, commentés plus précisément dans les pages suivantes) :

Adaptation nécessaire	Nombre de questions concernées (sur 10 au total)
-----------------------	--

A1	5
A3	5
A4	3
A5	3
A6	4
« fausse A1 »	6

Les adaptations A4 et A5 font ici leur apparition : en classe, en dehors des tâches 1, 2 et 3, elles n'étaient pas nécessaires (voir page précédente) : il semblerait que les tâches proposées en évaluation fassent ainsi appel à un plus large spectre d'adaptations pour appliquer les connaissances nouvelles sur les radicaux. Il sera donc intéressant lors de l'analyse des productions de regarder en détail si ces adaptations non travaillées en classe sont sources de difficultés et, si c'est le cas, quels sont les élèves, et avec quelles procédures, qui parviennent à les surmonter.

• Au sujet des énoncés de l'interrogation :

- Tous se situent dans le cadre numérique.
- Dans les exercices 1 et 4, les signes « = » déjà écrits par le professeur sur la feuille d'interrogation incitent à transformer les écritures données, limitant ainsi la difficulté de l'adaptation A4 (introduction d'une étape, qui n'est donc plus vraiment imaginée, pour répondre à la question posée). L'adaptation A6 liée au choix de mettre les nombres sous une même forme est par conséquent également limitée : on aurait pu choisir, pour trouver l'intrus, de mettre toutes les expressions données au carré ou encore de montrer qu'elles sont 2 à 2 égales sans référence à une seule écriture mais les signes « = » pré-écrits n'encouragent pas ces initiatives.
- On peut de plus penser que, par effet de contrat dû aux répétitions de la tâche 1 dans les exercices faits en classe, le choix de la forme sous laquelle on va exprimer les nombres donnés va se porter sur « $a\sqrt{b}$ » plutôt que, par exemple, sur « $\sqrt{a}$ » :

l'adaptation A6 associée à ce choix serait alors réduite.

- Dans l'exercice 1, la consigne est inhabituelle : l'élève doit transformer « chercher l'intrus » en « quel est le nombre qui n'est pas égal aux autres ». Ce n'est d'ailleurs pas la seule possibilité : dans un contexte extra-mathématique, on pourrait choisir d'autres critères et répondre par exemple E car c'est le seul avec un trait de fraction ou C car c'est le seul avec un signe « fois » !
- Toujours dans l'exercice 1, aucune justification n'est attendue pour affirmer que « $3\sqrt{5} \neq 4\sqrt{5}$ » ; on peut pourtant s'interroger sur la légitimité requise pour donner à

cette assertion un statut d'évidence.

- Dans l'exercice 5, aucune justification n'est demandée non plus pour prouver que $L \neq 0$. Or, la transformation habituelle conduit à « $5\sqrt{6}-5\sqrt{2}-10$ » et il est difficile pour un

élève de troisième de montrer que ce nombre est non nul (c'est néanmoins possible : le plus simple est de raisonner par l'absurde). Il est implicitement admis ici que, si L était nul, la transformation habituelle type tâche 1 conduirait forcément à 0.

- Au sujet de la tâche 1 :

Elle est presque toujours prescrite uniquement dans le cadre numérique : seules 3 expressions de l'exercice 1 de la fiche 12 transformées en classe sont littérales mais les niveaux de mises en fonctionnement restent les mêmes que dans les cas habituels.

Lorsque nous décrivons les déroulements réels et les choix a posteriori du professeur en 4-3, nous pourrions confronter l'analyse a priori faite en 4-2-a à la façon dont la tâche est présentée en classe. Nous verrons ainsi dans quelle mesure la tâche prescrite initiale a évolué, suite aux interventions de l'enseignante.

Nous recensons ici les exercices dans lesquels une ou plusieurs des étapes de tâche 1 décrite en 4-2-a interviennent, même si le résultat attendu ne s'écrit pas $a\sqrt{b}$ (l'énoncé associé parle alors de « simplification d'écritures »). Nous envisagerons lors de l'analyse des résultats les conséquences éventuelles sur les apprentissages de ces variations de consigne.

- en classe :

Sur les 31 expressions du même type (somme algébrique de radicaux) transformées en classe avec la méthode détaillée dans l'analyse a priori de la tâche 1 :

- 25 donnent un résultat sous la forme $a\sqrt{b}$.
- 2 donnent un résultat littéral qui s'écrit sans radical (D et J de l'exercice 1 de la fiche 12).
- 4 donnent des résultats de formes différentes : $a+b\sqrt{c}$ (K et P de l'exercice 1 de la fiche 12), $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ (L du même exercice) ou $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}+e$ (O du même exercice)

- en évaluation :

La tâche 1 est omniprésente dans l'interrogation puisqu'elle intervient comme objet dans l'exercice 2 et comme outil dans les exercices 1, 3, 4 et 5.

Dans le contrôle, elle fait l'objet d'un exercice (le premier).

Au brevet blanc, elle fait également l'objet d'une question (la première de l'exercice 1 de la partie numérique).

- Au sujet de la tâche 2 :

Le travail demandé se situe à la fois dans les cadres numérique et algébrique : une expression littérale est donnée, sur laquelle il est parfois demandé de travailler dans les premières questions, dans le cadre algébrique. Il s'agit ensuite, en substituant un nombre à une lettre, d'effectuer un calcul avec des radicaux dans le cadre numérique. Or, pour mener à bien à la fois la substitution et le calcul, ce sont les règles et conventions apprises lors des chapitres consacrés au calcul littéral que les élèves sont amenés à utiliser : nous essaierons de déterminer, quand nous analyserons les résultats aux évaluations, dans quelle mesure ce va et vient fréquent entre cadre numérique et cadre algébrique peut poser des problèmes aux élèves.

- En classe :

Elle intervient strictement comme nous l'avons décrite à 10 reprises, dont 2 dans la deuxième déclinaison possible (c'est-à-dire avec choix possible de l'expression avec laquelle travailler). De plus, des tâches proches sont également proposées : à 5 reprises (dont 2 correspondent à la deuxième déclinaison) pour des nombres s'écrivant avec des radicaux mais sous une autre forme que $\pm\sqrt{a}$ (avec a entier) et à 6 reprises (dont 3 pour la deuxième déclinaison) pour des nombres s'écrivant sans radicaux (entiers ou fractions).

- En évaluation :

La tâche 2 n'est pas proposée dans l'interrogation.

Elle fait l'objet de la question 2 de l'exercice 2 du contrôle.

Enfin, elle est présente au brevet blanc dans la question 4 de l'exercice 2 de la partie numérique.

Dans l'analyse des résultats, il sera par ailleurs intéressant de comparer les productions des élèves quand $x = \sqrt{a}$ et quand $x = a$ (les taux de réussite mais aussi les procédures utilisées). En effet, même pour $x =$ entier donné, il est probable que des élèves se placent toujours dans le cadre « pseudo-algébrique », alors que le cadre numérique suffirait (ils développent même si des calculs préliminaires à l'intérieur des parenthèses sont possibles). De même, quand il y a recours à l'expression « consigne », on pourra comparer les productions avec celles correspondant au développement littéral « classique » : retrouve-t-on les mêmes erreurs ? Il faudra alors être très attentif pour tenter de distinguer les erreurs dues à des difficultés de l'élève à travailler dans le cadre algébrique (la notion « racine carrée » serait alors juste un révélateur de ces difficultés) de celles intrinsèquement liées à la notion étudiée (en particulier

dues au statut donné à la racine carrée d'un nombre), et pour analyser les liens éventuels entre ces deux types d'erreurs.

- Au sujet de la tâche 3 :

Les consignes associées se situent cette fois dans le cadre géométrique : la longueur d'un des côtés d'un triangle rectangle est recherchée. Pour la trouver, il faut appliquer le théorème de Pythagore et résoudre une équation du second degré à une inconnue : le cadre algébrique intervient alors. Les calculs annexes nécessaires, avec ou sans radicaux, se situent eux dans le cadre numérique.

- En classe :

Elle n'est évoquée que lors de l'introduction de la notion, quand l'enseignante rappelle à quel moment le symbole radical a été rencontré en classe de quatrième. Par la suite, elle n'est ni l'objet, ni l'outil d'un exercice traité en classe.

- En évaluation :

Elle ne fait l'objet d'aucune question dans l'interrogation, qui se situe entièrement dans le cadre numérique.

Elle intervient dans la question 2 de l'exercice 3 du contrôle pour calculer la longueur de l'hypoténuse dans un triangle rectangle.

Elle est enfin présente au brevet blanc dans le problème pour calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle.

En outre, même si nous ne les avons pas étudiés, nous savons qu'elle intervient dans un « devoir maison » au cours d'un exercice type « brevet des collèges ».

4-3 déroulements réels avec choix du professeur a posteriori

Nous reprenons ici les indicateurs que nous avons choisis et exposés dans la partie consacrée aux éléments de méthodologie (3-2) pour décrire les déroulements réels associés aux tâches déjà analysées a priori. En outre, nous complétons les éléments donnés en 4-1 (choix du professeur a priori) : nous les confrontons à ce qui s'est réellement passé dans la classe et les enrichissons grâce, par exemple, à la mention d'interventions orales de l'enseignante devant les réactions des élèves lors de l'exécution des tâches qui nous intéressent.

-Il y a très peu de phases de travail autonome en classe. Quand c'est le cas, ce sont davantage des actions, souvent répétées, que des activités mathématiques. Ainsi, « taper sur la calculatrice » lors du remplissage de la fiche introductive est certes une action effectuée par

tous les élèves mais on peut penser, qu'avec ce qui est proposé, tous ne sont pas aptes à la transformer pour engendrer les connaissances mathématiques visées.

-Il n'y a jamais de travail collectif.

-Le tableau est uniquement utilisé par le professeur : il sert de modèle, pour noter soit le cours, soit une correction d'exercice.

-Les corrections d'exercices cherchés à la maison sont rapides et aucune explication supplémentaire ne les accompagne : les élèves ne sont interrogés qu'oralement et lisent alors la production écrite sur leur cahier, puis le professeur écrit le résultat au tableau. Il n'y a aucun questionnement approfondi sur les erreurs éventuellement commises.

-L'enseignante parle beaucoup, les élèves posent peu de questions ; quand ils en posent, les réponses données marquent toujours un retour à la méthode ou la technique vue dans la leçon. De plus, la notion « racine carrée » fait intervenir, tant dans son explication que dans ses utilisations, de nombreuses connaissances anciennes (elles ont été listées en 3-3-a). Or, il n'y a pas de retour autres que des rappels de règles très contextualisés sur ces connaissances anciennes, pas même d'explicitation des difficultés éventuelles, comme si ce n'était pas elles qui devaient poser problème ici. L'enseignante ne propose pas, pendant les séances filmées, d'aides constructives susceptibles de permettre un mélange harmonieux de l'ancien et du nouveau (des contraintes institutionnelles d'horaires et de programmes ne lui en laissent peut-être pas la possibilité). Ainsi, on peut penser que certaines de ses explications n'ont aucune chance d'être comprises par une partie des élèves puisque leurs difficultés se situent ailleurs. Ceci peut participer à expliquer la stabilité constatée des groupes A et B.

Conformément à ce qui était prévu, décrit en 4-1, les répétitions sont nombreuses : les exercices des fiches portant sur un même thème, utilisant une même méthode, sont quasiment tous faits, et leur correction s'accompagne toujours des mêmes commentaires, donnés dans le même ordre (par exemple pour les exercices dans lesquels la tâche 1 intervient). Cette pédagogie entraîne ainsi intensivement à la technique, avec des démarches algorithmiques devenues des automatismes, engendrées par des répétitions de tâches nécessitant des niveaux identiques de mise en fonctionnement des connaissances. S'il semble évident que cette organisation du travail permet un réel « entraînement » sur des exercices « standard » (du type de ceux proposés au brevet des collèges), on peut s'interroger au sujet de l'absence de variété des adaptations travaillées et de ses conséquences éventuelles sur la construction du sens de la notion « racine carrée ». En particulier, quand des adaptations s'avèrent nécessaires pour se ramener à un des automatismes créés, par exemple dans les exercices proposés en interrogation, on peut se demander si les élèves sont suffisamment préparés. Nous regarderons avec attention les résultats associés à ces consignes.

-Place des démonstrations dans le cours et des justifications de transformations d'écritures:

- Revenons aux choix du professeur a priori exposés en 4-1 : nous avons alors noté que la calculatrice servait de validation à toutes les connaissances nouvelles D1, P1 et P2 et nous

nous étions interrogés sur les commentaires éventuels accompagnant cette forme de validation. Les vidéos nous montrent que rien n'est dit sur le passage des tableaux d'exemples aux identités écrites avec a et b . Le sens du mot « conclusion », qui suit immédiatement chaque tableau sur la photocopie, n'est pas précisé : or, il s'agit ici de la conclusion d'une observation et non d'une démonstration. L'enseignante dit d'ailleurs souvent, avant de noter ces identités au tableau et de demander aux élèves de les écrire sur leur feuille, « on regarde », « on observe », « on a vu que ». L'insuffisance des tests numériques pour démontrer une identité est passée sous silence. La différence entre les premiers et troisièmes tableaux et le second (voir annexe 7, feuille photocopiée) n'est pas explicitée : dans ce dernier, les tests numériques constituent une preuve rigoureuse des conclusions associées « $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ » alors que ce n'est bien sûr pas le cas des conclusions des deux autres.

Aucune remarque non plus n'est faite sur les quantificateurs (« quels que soient a et b » ou « il existe a et b tels que » n'est pas noté, l'enseignante fait juste écrire les conditions sur les signes de a et b). De même, juste après l'écriture dans la leçon de la définition de la racine carrée, donnée dans le registre « langue naturelle », l'enseignante explique en remarque que la racine de -3 n'existe pas, non pas en y faisant appel, mais en disant et en notant : « comme on l'a vu dans le tableau, $\sqrt{-3}$ n'existe pas ». On peut penser, qu'étant donné la pression pour

finir les programmes, l'hétérogénéité de la classe et le peu de possibilités offertes par les textes officiels pour justifier définition et propriétés de la racine carrée, le professeur choisit de ne pas s'y attarder.

- En outre, même si les énoncés sont similaires, la tâche 1 telle que nous l'avons analysée a priori ne se confond pas exactement avec celle que les élèves ont à effectuer en classe : le travail correspondant est présenté dans la première partie du troisième paragraphe de la leçon, intitulé « simplification de racines carrées » (leçon donnée en annexe). L'enseignante y décrit une méthode de « décomposition du radicande en produit de facteurs premiers » pour « faire apparaître et sortir les carrés parfaits ». Elle propose sur des exemples une présentation en deux colonnes pour la décomposition en produit de nombres premiers, puis « sort les carrés » sans faire référence ni à la propriété P1a relative à la racine carrée d'un produit, ni à la conséquence D'1 de la définition pour passer de $\sqrt{a^2}$ à a . D'ailleurs, la propriété P1a est

présentée après puisqu'elle fait l'objet de la deuxième partie du même paragraphe dans la leçon (les conclusions des tableaux numériques introductifs sont reprises une à une, avec des exemples et des formulations « en langue naturelle »). Il semble ainsi que le professeur ait choisi ici de privilégier l'aspect « technique » de la tâche 1, sans expliciter les liens avec les nouvelles connaissances utilisées et donc sans amorcer une quelconque justification des transformations d'écritures effectuées. Le recours aux vidéos montre que, dans les premiers exercices proposant cette tâche, les élèves cherchent bien à décomposer en produit de facteurs mais, comme nous l'avons détaillé lors de l'étape 1 de l'analyse a priori, toutes les décompositions ne mènent pas au résultat : ainsi, soit ils ne font pas apparaître de carrés, soit le b obtenu n'est pas le plus petit possible. A l'oral, l'enseignante explique alors que la

présentation en deux colonnes vue dans la leçon permet d'arriver « à coup sûr » au résultat attendu, et déconseille de « tenter des décompositions sans utiliser cette présentation au brouillon » : elle limite voire supprime alors la difficulté de l'adaptation (type A6) du choix de la décomposition sous le radical et n'encourage ni l'anticipation mentale des calculs, ni les démarches essais/erreurs. Nous verrons lors de l'analyse des résultats quelles sont les conséquences de ces choix.

-Commentaires sur les ensembles de nombres :

Les déroulements réels sont là aussi conformes aux choix du professeur a priori décrits en 4-1. Aucun commentaire n'est ajouté à la remarque sur l'irrationalité de $\sqrt{5}$. En outre, certaines

cases des trois tableaux de l'introduction ne peuvent être remplies par des valeurs décimales exactes. Dans ce cas, l'enseignante fait écrire un arrondi au millième, quelquefois-mais pas toujours-suivi de trois points de suspension : elle dit alors « l'écran de la calculatrice affiche plusieurs décimales, on peut imaginer qu'il y en a d'autres donc on met des pointillés ». On voit mal comment ce commentaire et la remarque sur $\sqrt{5}$ pourraient à eux seuls permettre aux

élèves de construire ou d'unifier des connaissances sur les ensemble de nombres, en particulier sur les réels, en y associant les nombres s'écrivant avec des radicaux.

-L'organisation du chapitre est conforme à ce que le professeur avait prévu et que nous avons décrit en 4-1. La chronologie et le temps imparti à chaque phase sont les suivants :

L'introduction de la notion « racine carrée » fait l'objet d'une séance, au cours de laquelle les élèves remplissent grâce à la calculatrice la feuille photocopiée distribuée par le professeur (donnée en annexe). Cette feuille est collée sur le cahier et constitue le paragraphe 1 « introduction » du chapitre intitulé « les racines carrées », simplement complétée par la remarque sur l'irrationalité de $\sqrt{5}$. A la fin de la première séance, les élèves ont donc vu et

écrit sous forme d'identités toutes les connaissances nouvelles D1, D'1, P1 et P2 relatives à la définition (premier tableau et sa conclusion), aux propriétés des produits et quotients (troisième tableau et ses conclusions), et même aux non-propriétés des sommes et différences (deuxième tableau et ses conclusions).

Les six séances suivantes sont consacrées à l'écriture du reste du cours (reprises des conclusions des tableaux avec des exemples, des remarques et surtout des « méthodes »), en alternance régulière avec la résolution des exercices des fiches 10, 11 et 12.

4-4 résultats des élèves aux évaluations et mises en relation

Interrogation, contrôle et brevet blanc : cf tableau général page suivante

		Interrogation					contrôle				brevet blanc					problème			
											activités numériques						activités géométriques		
		Ex1	Ex2	Ex3	Ex4	Ex5						Ex1.1	Ex1.2	Ex2.1	Ex2.2			Ex2.3	Ex2.4
1	Abri, arrivée en cours d'année.	A	A	A	A	A	A												
2	Hadi, g.B	4	1	4	2	6	1												
3	Thom, g.B	2a	5	3b	0	6	1												
4	Pier, g.A	1	1'	4	1	2	1												
5	Roma, g.A	1	1	1	1	1	1												
6	Anis, g.B	3	5	6	0	0	1												
7	Joha, g.B	4	0	4	3	6	1												
8	Fato, g.B	2a	3	6	0	6	6												
9	Merv, g.B	3	4	6	3	0	4												
10	Paul, g.A	3	1	1	1	2	A												
11	Luçi, g.A	1	1	1	1	1	2												
12	Cami, g.B	1	1	3b	0	2	1												
13	Vale, g.A	2b	1	1	1	2	2												
14	Rach, g.B	3	1	3a	3	6	3												
15	Kevi, g.B	3	1	1	3	6	1												
16	Zaki, g.A	1	1	3a	0	2	1												
17	Tuan, g.A	2b	1	3b	1	2	1												
18	Kari, g.B	2a	3	3a	1	2	3et5												
19	Clar, g.A	2d	1	3a	3	2	1												
20	Anto, g.A	2b	1	1	3	1	1												
21	Pier, g.A	2b	1	1	1	6	1												
22	Elie, g.A	1	1	1	2	1	1												
23	Davi, g.A	4	1	1	2	6	1												
24	Fant, g.B	2c	1	1	0	2	1												
25	Mari, g.B	2a	1	3a	2	2	1												
26	Umut, g.B	2d	1	4	1	6	1												
27	Ihab, g.A	1	1	1	1	2	A												

Légendes ci-après

Légendes du tableau :

Légende des couleurs :

Fond jaune : consigne dans lesquelles la tâche 1 est l'objet de la question

Fond rose : consigne dans lesquelles la tâche 2 est l'objet de la question

Fond bleu : consigne dans lesquelles la tâche 3 est l'objet de la question

Fond gris : les racines carrées n'interviennent pas mais, par comparaison, les productions des élèves pour ces consignes nous intéressent.

Code écrit en vert : réponses exactes (les 1)

Code écrit en rouge : réponses avec erreurs (les 3, 4, 5 et 6)

Code écrit en noir : rien de ce qui est écrit et qui nous intéresse n'est faux (les 0 et 2)

Légende des codages :

Globalement :

0 : non abordé.

A : absent(e) lors de cette évaluation.

1 : réponse exacte, justifiée si nécessaire.

2 : réponse incomplète ou comportant des erreurs auxquelles nous ne nous intéressons pas dans notre analyse (rien n'est faux concernant les radicaux dans ce qui est écrit)

3, 4, 5 : erreurs répertoriées

6 : autre type d'erreurs.

Plus précisément (codes autres que A, 0 ou 1) :

Interrogation, exercice 1 :

2 : l'intrus attendu E est donné mais la justification est considérée incomplète donc l'élève n'obtient pas le maximum des points. Tout ce qui est écrit est juste. Voici les différentes possibilités :

2a : $A=B=C=D=F=4\sqrt{5}$, E non transformé.

2b : $A=B=C=D=F=4\sqrt{5}$, E transformé sous une autre forme que $3\sqrt{5}$.

2c : $A=B=D=F=4\sqrt{5}$, E et C transformés sous une autre forme.

2d : aucune transformation.

3 : l'intrus attendu E est donné mais les transformations comportent des erreurs.

4 : l'intrus donné est C.

Codages communs à l'exercice 2 de l'interrogation, à l'exercice 1 du contrôle et à l'exercice 1.1 des activités numériques du brevet blanc, dans lesquels on étudie la tâche 1 (fond jaune) :

1' : une erreur isolée mais système compris.

2 : calculs avec les radicaux justes mais erreur(s) de signe ou de calcul dans la factorisation finale.

3 : erreur due au problème « des coefficients devant » (par exemple $a\sqrt{m \times n^2} = a + n\sqrt{m}$ à la place de $a \times n\sqrt{m}$). Code possible dans l'interrogation uniquement pour le I et le J.

4 : bonne décomposition sous le radical mais erreur(s) « pour sortir le carré » (souvent $\sqrt{a^2b} = a^2\sqrt{b}$ au lieu de $a\sqrt{b}$).

5 : pas de b commun trouvé (non valable pour le brevet blanc ou le H de l'interrogation, dans lesquels le b est donné).

6 : autres erreurs.

Interrogation, exercice 3 :

3 : tout est juste sauf d) dont 3a : 0 trouvé en d) et 3b : 3 trouvé en d).

4 : erreur en f (0 trouvé)

6 : 3 erreurs ou plus

Interrogation, exercice 4 :

2 : essais justes non aboutis

3 : essais avec erreurs.

Interrogation, exercice 5 :

2 : tout ce qui est écrit est juste mais des transformations sont « non abouties ».

6 : il y a des erreurs dans les transformations proposées.

Codages communs à l'exercice 2.2 du contrôle et à l'exercice 2a des activités numériques du contrôle, dans lesquels on étudie la tâche 2 (fond rose pour $x=\sqrt{2}$ et $x=-\sqrt{3}$ et gris pour $x=-1$ et $x=7$) :

1 : juste à partir de l'expression développée.

1' : juste à partir de l'expression de la consigne.

1'' : juste à partir de l'expression développée factorisée.

1''' : juste à partir de l'expression développée fausse.

4 : faux à partir de l'expression développée.

4' : faux à partir de l'expression de la consigne.

4'' : faux à partir de l'expression factorisée.

Codages communs à l'exercice 3.2 du contrôle et au 2) du problème du brevet blanc, dans lesquels on étudie la tâche 3 (fond bleu) :

1' : dans le problème, transforment le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$

2 : donnent une valeur approchée.

3 : donnent comme réponse le carré de la valeur exacte (du type $ST^2=4+1=5$ $ST^2=5^2=25$ $ST^2=\sqrt{25}=5$).

4 : longueurs dont on a besoin mesurées ou problème d'échelle.

5 : propriété de Pythagore appliquée mais erreur sur l'hypoténuse.

6 : autres erreurs.

Contrôle, exercice 3.3 :

2 : pensent à utiliser la propriété de Thalès mais ne parviennent pas à remplacer toutes les données connues par leur valeur (en particulier $ST=\sqrt{5}$).

4 : utilisent la propriété de Thalès mais échouent en résolvant l'équation associée.

6 : ne pensent pas à utiliser la propriété de Thalès mais utilisent celle de Thalès ou la trigonométrie.

Brevet blanc, activités numériques, exercice 1.2 :

$$3 : (5 + \sqrt{5})^2 = 5^2 + \sqrt{5}^2 = 25 + 5 = 30$$

$$4 : (5 + \sqrt{5})^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times \sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 25 + 10\sqrt{5} + 5 = 40\sqrt{5}$$

5 : identité remarquable appliquée ou retour à la définition du carré mais erreur(s) autres que 4.

6 : autre(s) erreur(s) : pas d'identité remarquable appliquée ou de retour à la définition du carré.

Brevet blanc, activités géométriques, exercice 2.2 :

4 : formule de calcul de distance dans un repère orthonormé fausse.

5 : essaient d'utiliser la propriété de Pythagore avec des longueurs « intuitées » alors qu'on ne sait pas encore que le triangle est rectangle.

6 : bonne formule mais erreur(s) de calcul sans lien apparent avec les racines carrées.

Brevet blanc, activités géométriques, exercice 2.3 :

4 : valeurs numériques mesurées pour appliquer la propriété de Pythagore.

6 : bonne formule mais erreur(s) de calcul sans lien apparent avec les racines carrées.

Brevet blanc, activités géométriques, exercice 2.4 :

2 : la réponse donnée est « la moitié de l'hypoténuse » mais cette longueur n'est pas calculée.

4 : la valeur donnée pour le rayon est fausse, certainement mesurée sur la figure.

Précisions sur les raisons, déjà évoquées dans la partie 3-méthodologie de ce travail, pour lesquelles nous avons choisi de distinguer deux groupes :

Sur les 17 questions portant sur les radicaux recensées dans les évaluations :

- 13 élèves ont donné entre 9 et 17 bonnes réponses.
- 13 élèves ont donné entre 0 et 8 bonnes réponses.

Nous avons choisi de préciser les résultats au sein de ces 2 groupes d'élèves : groupe des « bons élèves » (g.A) et groupe des « élèves ayant des difficultés » (g.B). Cette classification g.A/g.B est bien sur ponctuelle, uniquement établie par rapport aux résultats des exercices portant sur les racines carrées dans nos 3 paquets de copies. Ce choix s'est imposé à la lecture du tableau recensant les résultats des élèves, essentiellement pour 2 raisons :

- Parmi les tâches non réussies, les codages distinguent de façon a priori étonnante les élèves du g.A, qui écrivent rarement des assertions ou calculs mathématiquement faux, préférant laisser une réponse non aboutie, de ceux du g.B qui, eux, commettent souvent des erreurs, « s'arrangeant » avec les mathématiques pour parvenir au résultat souhaité. Tout se passe comme si, pour les élèves du g.B, « la fin justifiait les moyens » : la production d'un résultat semble ainsi leur préoccupation principale. Ces différences apparentes de rapport au savoir entre les élèves nous intéressent et nous y reviendrons dans la suite de nos analyses.

- De plus, comme nous étudions 3 évaluations en classe à des moments différents de l'année scolaire, il était intéressant d'observer les évolutions éventuelles dans le temps, élève

par élève. Or, il apparaît à la lecture horizontale du tableau une permanence des bonnes ou mauvaises réponses ; les groupes décrits plus hauts semblent très stables : une partie des élèves, ceux du g.B, progressent peu ou pas. L'autre, ceux du g.A, obtenait déjà de bonnes réponses dans les premières évaluations. Le passage d'un groupe à l'autre, des « mauvais » aux « bons », paraît bloqué. Ceci pose évidemment question. La composition de cette classe de 3^{ème}, très hétérogène tant par le niveau scolaire que par l'attitude face au travail, explique en partie ce phénomène. Nous pouvons tout de même nous interroger sur l'incidence de la pédagogie mise en œuvre par l'enseignante : ses caractéristiques (aides, répétitions...) sont-elles, en partie, responsables de la stabilité observée du g.B ? Permet-elle à ces élèves de repérer ce qu'ils doivent changer pour réussir ?

En analysant plus en détail les procédures des élèves sur les copies, nous essaierons d'apporter quelques éléments de réponse aux questions mises en évidence par ce classement.

Nous allons analyser tout d'abord les résultats des exercices des évaluations proposant les tâches 1, 2 et 3 puis nous nous intéresserons à tous les autres.

Tâche 1

Nous allons commencer par regarder les exercices se rapportant à la tâche 1 décrite en 4-2-a), en mettant en relation les consignes de l'interrogation, du contrôle et du brevet blanc avec celles des exercices déjà travaillés en classe.

Trois exercices portent directement sur ce thème : nous choisissons d'analyser ensemble, dans un premier temps, les résultats de ceux pour lesquels la tâche 1 est l'objet de l'exercice. Nous verrons ensuite ceux où cette même tâche est un outil pour répondre à la question posée.

Tâche 1 « objet » (en jaune dans le tableau récapitulatif des résultats) :

Dans l'exercice 2 de l'interrogation, l'exercice 1 du contrôle et le 1) de l'exercice 1, partie 1, du brevet blanc, les consignes sont respectivement : « écrire le plus simplement possible », « donner les résultats sous la forme $a\sqrt{b}$ (b est un nombre entier) », et « montrer que A peut s'écrire $a\sqrt{5}$, ou a est un nombre entier ». Les expressions proposées par les consignes sont toutes des sommes algébriques de radicaux et nous nous référerons souvent à l'analyse a priori faite en 4-2-a).

Exercice 2 de l'interrogation :

La consigne et les expressions proposées de l'exercice 2 de l'interrogation sont exactement identiques à celles de l'exercice 10 de la fiche 11 donnée par l'enseignante : les

élèves sont donc ici amenés à refaire, sans aucune adaptation nouvelle, un exercice déjà corrigé en classe. Les résultats sont les suivants :

Exercice 2 de l'interrogation	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)
N'ont pas abordé l'exercice.	0	1	1
Ont réussi l'exercice.	12	7	19
Ont échoué.	1	5	6

Une grande majorité d'élèves a réussi cet exercice. Néanmoins, on aurait pu dans ce cas s'attendre à mieux encore : un élève du g.A et 6 élèves du g.B ont échoué. Ceci nous engage à aller voir dans quelles conditions cet exercice a été traité en classe. La vidéo indique que le a) a été cherché en classe à la fin de la séance 3 (avec un temps de recherche inférieur à 1 minute) : les résultats du a) et b) ont été donnés oralement (rien n'a été écrit au tableau) et les élèves devaient finir cet exercice pour la fois suivante. Au début de la séance 4, le professeur corrige, en disant : « on applique les mêmes règles[...]on remarque[...]on fait apparaître[...]on décompose[...]on sort la racine carrée[...]ça donne[...]c'est toujours pareil ». Les résultats de a) et b) sont redonnés à l'oral puis le c) et le d) sont corrigés rapidement au tableau par le professeur, qui conclut par un sondage (« aucune erreur ? »), avant de demander de prendre le cahier de leçons. Ici, des compétences calculatoires techniques sont certes travaillées, mais contribuent-elles à des apprentissages sur la racine carrée ? Le lien de cette tâche avec la propriété P 1 du produit n'est jamais explicité : Au mieux, les élèves le font tout seuls. Au pire, ils ne le font pas du tout. Est-ce un obstacle à la réussite de cet exercice ? Pas forcément (les résultats sont bons), mais quand il s'agira, dans un cas un peu différent, d'adapter cette technique, les élèves appliquant strictement la « recette » risquent d'être perdus : ils n'auront aucun moyen immédiat pour se ramener au cas qu'ils savent traiter et il sera alors intéressant d'observer comment ils réagissent. Par ailleurs, on peut penser que les élèves n'ayant pas réussi cet exercice à la maison n'ont aucune raison, s'ils ne l'ont pas repris depuis, de le réussir lors de l'interrogation après la correction en classe proposée, simple validation des bonnes réponses.

Regardons plus précisément les erreurs commises et situons les dans la démarche associée à la tâche 1 décrite dans l'analyse a priori faite en 4-2-a) (tableau page suivante):

- Erreur codée « 5 » :

C'est ici le choix du b commun, et donc des décompositions sous les radicaux, qui posent problème. L'adaptation de type A6 ainsi que la bonne utilisation des connaissances anciennes

« décomposition sous forme d'un produit de facteurs, reconnaissance d'un carré d'entier » décrites dans l'analyse a priori de la tâche 1 sont sources de. Difficulté

- *Erreur codée 3 :*

On peut se référer ici à la partie « si le nombre est donné sous la forme $k\sqrt{N}$ » de l'étape 2 dans l'analyse de la tâche 1. Ce sont les adaptations A3 et « fausse A1 », liées au jeu implicite entre cadre numérique et algébrique (on fait avec $\sqrt{N}$ ce qu'on fait d'habitude avec x), au prolongement des conventions (signe « fois » sous-entendu) et des règles de calcul connues (commutativité, associativité) à ces nouveaux nombres s'écrivant avec des radicaux qui semblent poser problème. Nous avons un premier élément de réponse à une question que nous nous sommes plusieurs fois posés : non, l'adaptation « fausse A1 » n'est pas toujours évidente, elle peut être source de difficultés et d'erreurs.

- *Erreur codée 4 :*

L'élève a fait $\sqrt{a^2b}=a^2\sqrt{b}$ au lieu de $a\sqrt{b}$. Nous avons ici une amorce de réponse à une question que nous nous posons plus haut : ne pas lier l'exécution de cette tâche, ni à la propriété P1 (produit de radicaux), ni à D'1 ($\sqrt{a^2}=a$) pose certainement problème à cet élève. Tout se passe comme s'il n'avait pas retenu (au sens de mémoriser) une des étapes, un des « ingrédients » de la « recette », se retrouvant incapable, puisqu'il ne sait pas la justifier, de la retrouver.

Code éventuel dans le tableau récapitulant les résultats	Description succincte de l'erreur	(g.A_g.B) sur (13_13) présents.	Nombre d'élèves au total (sur 26 présents)
1'	Erreur isolée ne remettant pas en cause la maîtrise la compétence requise	(1_0)	1
5	Echouent pour toutes les expressions sauf H, la seule dans laquelle le « b » est donné dès le départ.	.(0_2)	2
3	Echouent pour I et J, expressions dans lesquelles les $\sqrt{\quad}$ sont précédées de coefficients numériques autres que +ou-1.	(0_2)	2
4	Bonnes décompositions sous les radicaux mais erreur « pour sortir le carré »	(0_1)	1

Exercice 1 du contrôle :

Les expressions proposées exactes n'ont pas été transformées en classe mais des écritures très proches l'ont été et tous les radicandes ont déjà été décomposés. De plus, les résultats attendus sont tous de la forme $a\sqrt{b}$. Voici les résultats :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 11 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 24 présents)
N'ont pas abordé l'exercice	0	0	0
Ont réussi l'exercice	9	9	18
Ont échoué	2	4	6

Ainsi, par rapport à l'interrogation, il semble que les élèves du g.B aient progressé : tous ceux qui avaient alors réussi réussissent encore et 2 parmi ceux qui avaient échoué lors de l'interrogation réussissent ici.

Il n'en est pas de même pour les élèves du g.A puisqu'ils sont ici 2 à échouer alors qu'on en comptait un seul lors du contrôle : celui-là a cette fois réussi et ce sont 2 élèves qui avaient réussi lors de l'interrogation qui échouent ici.

Pour la description et une première analyse des erreurs, nous reprenons les mêmes codes que pour le tableau précédent des erreurs de l'exercice 2 de l'interrogation, avec les codes 2 et 6 en supplément :

Code éventuel dans le tableau récapitulatif les résultats	Description succincte de l'erreur	(g.A_g.B) sur (11_13) présents	Nombre d'élèves au total (sur 24 présents)
2	Calculs avec les radicaux justes mais erreur(s) de signe ou de calcul dans la factorisation finale.	(2_0)	2
5	Pas de « b commun » trouvé pour au moins une des 3 expressions proposées.	(0_1)	1
3	Echouent pour B et C, expressions dans lesquelles les $\sqrt{\quad}$ sont précédées de coefficients numériques autres que +ou-1.	(0_1)	1
4	Bonnes décompositions sous les radicaux mais erreur « pour sortir le carré »	(0_1)	1
6	Autres erreurs	(0_1)	1

Ainsi, les 2 élèves du g.A qui ont cette fois échoué n'ont pas commis d'erreurs directement liées aux radicaux puisque c'est dans la factorisation finale, et seulement pour une des trois expressions proposées, qu'ils se sont trompés.

Quant aux élèves du g.B, ceux qui avaient échoué lors de l'interrogation et qui ont réussi ici avaient échoué alors pour la même raison (code 5) : ils n'étaient pas parvenus à trouver un « b commun » pour décomposer les radicandes. On peut penser que les répétitions de cette même tâche effectuées depuis, avec l'automatisation associée et la présentation en deux colonnes, ont atteint leurs objectifs pour ces deux élèves : à moyen terme, ils sont capables d'effectuer ce type de transformation qui leur posait problème à court terme. Par contre, Mervette (copie 9) échoue ici pour la même raison qu'à l'interrogation (code « 4 ») : il ne parvient toujours pas à « sortir le carré » et écrit encore $\sqrt{a^2b}=a^2\sqrt{b}$. L'interprétation que nous avons alors faite reste valable : le travail effectué depuis et le temps passé n'ont pas permis de surmonter cette erreur. Quant à ceux (Fatoumatah, copie 8 et Karim, copie 18) qui ne parvenaient pas à gérer un coefficient devant le radical autre que +ou-1 (erreur codée « 3 »), l'un échoue ici pour la même raison (Karim) tandis que l'autre (Fatoumatah) commet en plus d'autres erreurs difficilement interprétables. A moyen terme, seul un type d'erreur a ainsi été résorbé. Il sera intéressant de regarder l'évolution à long terme, au brevet blanc, pour ces élèves en particulier.

Exercice 1.1) de la partie numérique du brevet blanc :

Le niveau de mise en fonctionnement est ici clairement plus facile que dans ce qui a été traité en classe, mais aussi que dans l'interrogation ou le contrôle : les radicandes sont très simples à décomposer ($500=5 \times 100$ et $20=5 \times 4$), le « b » commun est fourni par le terme $-2\sqrt{5}$ et la consigne donne même la forme du résultat attendu $a\sqrt{5}$. Voici les résultats :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)
N'ont pas abordé l'exercice	0	3	3
Ont réussi l'exercice	13	7	20
Ont échoué	0	3	3

Regardons maintenant plus précisément les erreurs, en utilisant les mêmes codes que dans les deux exercices précédents. Notons néanmoins que le code erreur « 5 » est ici impossible puisque la consigne donne le « b commun » (c'est 5).

Code éventuel dans le tableau récapitulatif des résultats	Description succincte de l'erreur	(g.A_g.B) sur (13_13) présents	Nombre d'élèves au total (sur 26 présents)
---	--------------------------------------	--------------------------------------	--

6	Autres erreurs	(0_2)	2
4	Bonnes décompositions sous les radicaux mais erreur « pour sortir le carré »	(0_1)	1

« Logiquement », les élèves du g.A réussissent tous. Les résultats pour ceux du g.B apparaissent plus surprenants : aucun n'a progressé depuis l'interrogation ou le contrôle. Merv (copie 9), qui décomposait bien sous les radicaux mais ne parvenait pas à « sortir le carré » (code « 4 ») dans l'interrogation et le contrôle, n'écrit même plus correctement les décompositions des radicandes. Fato (copie 8) échoue encore pour des raisons non identifiées. Quant à Ani (copie 6), elle commet ici l'erreur « 4 » pour la première fois. Trois autres élèves (Joha, copie 7, Rach, copie 14 et Kari, copie 18) n'abordent même plus la question alors que, par exemple, Joha l'avait réussie lors du contrôle. Tout se passe donc comme si certains élèves de ce groupe régressaient, alors que les adaptations nécessaires sont plus simples. Pour eux, et en ce qui concerne cette tâche, l'enseignement proposé n'a pas permis les apprentissages souhaités. Les répétitions seraient donc « efficaces » (pour réussir mais réussir ne signifie pas forcément avoir appris) à moyen terme, quand la mémoire peut encore jouer un rôle, mais inutiles à long terme. La présentation par l'enseignante de cette tâche, réduite à des automatismes et non justifiée, peut en partie expliquer ce phénomène. Se pose alors le problème de la transformation des connaissances fragiles (celles acquises « à court terme » mais qui ne le sont plus « à long terme ») en connaissances mathématiques solides. Nous constatons ici, que, pour certains élèves, ce passage ne s'effectue pas « tout seul ». Nous nous demanderons donc par la suite ce qui pourrait le favoriser.

tâche 1 « outil » :

Regardons maintenant les exercices dans lesquels la tâche 1 intervient comme outil pour répondre à la question posée :

interrogation exercice 1

Dans cet exercice ainsi que dans le 3 de la même interrogation, la consigne n'est plus « écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ ». Cependant, avec des adaptations diverses (voir analyses a priori des textes des évaluations), on peut se ramener à cette tâche pour plusieurs des expressions proposées, et certaines écritures similaires ont même été transformées comme cela en classe. C'est pour cette raison que nous avons choisi de placer les analyses des résultats de ces 2 exercices dans cette partie de notre exposé. Voici les résultats relevés pour l'exercice 1 :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)
N'ont pas abordé	0	0	0

l'exercice.			
Ont réussi l'exercice.	6	1	7
N'ont pas obtenu le maximum des points.	7	12	19

Cet exercice semble avoir posé des problèmes aux élèves puisque plus des $\frac{3}{4}$ d'entre eux n'ont pas obtenu le maximum des points, alors que tous l'ont abordé.

Regardons donc quelles ont été les erreurs commises (tableau ci-dessous) :

Ce sont les expressions $C=2\sqrt{2} \times \sqrt{10}$ et $E=\sqrt{\frac{90}{2}}$ que les élèves ont le plus de mal à transformer.

	(g.A_g.B) sur (7_12) élèves concernés.	Nombre total d'élèves (sur 19 élèves concernés)
A, B, C et F sont transformés sous la forme $4\sqrt{5}$ mais E n'est pas transformé ; l'intrus E est donné (justification considérée incomplète) Codé 2a dans le tableau des résultats	(0_4)	4
A, B, C et F sont transformés sous la forme $4\sqrt{5}$ et E est transformé sous une autre forme que $3\sqrt{5}$ (ce qui est écrit est juste) ; l'intrus E est donné (justification considérée incomplète) Codé 2b	(4_0)	4
A, B et F sont transformés sous la forme $4\sqrt{5}$ mais C et E sont transformés sous une autre forme que $4\sqrt{5}$ et $3\sqrt{5}$; l'intrus E est donné (justification considérée incomplète) Codé 2c	(0_1)	1
L'intrus E est donné mais il n'y a aucune transformation d'écriture apparente. Codé 2d	(1_1)	2

L'intrus E est donné mais les transformations comportent des erreurs ou sont très incomplètes. Codé 3	(1_4)	5
L'intrus C est donné. Codé 4	(1_2)	3

Comparons les expressions proposées ici avec celles à partir desquelles les élèves ont travaillé en classe :

Dans l'interrogation	En classe
$A=2\sqrt{20}$	-expression à transformer seule dans la fiche 10 ex 14c, par exemple $2\sqrt{50}$, $4\sqrt{45}$, $5\sqrt{27}$...avec la consigne « écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, b étant un entier le plus petit possible. -correspond aux premières étapes de transformation d'un des termes des nombreuses sommes algébriques données avec la même consigne.
$B=\sqrt{80}$	rencontrée exactement dans l'ex 12 de la fiche 10, avec la consigne « mettre sous la forme $a\sqrt{b}$... »
$C=2\sqrt{2} \times \sqrt{10}$	-dans l'ex 13 de la fiche 10, des produits de radicaux, éventuellement précédés d'un coefficient entier, sont donnés mais avec la consigne « écrire avec un seul radical » (par exemple $g=4\sqrt{14} \times \sqrt{3}$). -dans la fiche 11, ex 12a, 13b et 14b, on trouve aussi des produits de radicaux cette fois avec la consigne « écris le plus simplement possible » mais avec 3 facteurs du type « $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} \times e\sqrt{f}$ ».
$D=4\sqrt{5}$	Expressions du même type rencontrées de nombreuses fois, mais correspondant au résultat des exercices dont la consigne était « écrire sous la forme $a\sqrt{b}$.
$E=\sqrt{\frac{90}{2}}$	-ex 11 de la fiche 10 : une seule expression « racine carrée d'un quotient » et pas « quotient de racines carrées » : $\sqrt{\frac{198}{22}}$ avec la consigne « donner l'écriture la plus simple possible » mais donne $\sqrt{9}=3$. -ex 5 de la fiche 11 ($\sqrt{\frac{1}{9}}$ ou $\sqrt{\frac{9}{49}}$), précédées de la consigne « écrire sans radical au dénominateur » mais donnent des nombres sans radicaux $1/3$ et $3/7$. -ex 2 et 4 de la fiche 11 mais au sein d'un produit de racines carrées : en outre, aucun quotient sous les radicaux ne donnent, comme E dans l'interrogation, un résultat entier.
$F=7\sqrt{5}-3\sqrt{5}$	-Expressions du même type, mais avec au moins 3 termes, rencontrées dans l'ex 8 de la fiche 11 à 4 reprises exactement dans les mêmes conditions (facteur commun apparent s'écrivant avec un radical), précédées de la consigne « écrire le plus simplement possible »..

-transformations finales dans les nombreuses sommes algébriques avec des radicaux, avec la même consigne.

Ce que nous observions apparaît cohérent avec le tableau comparatif ci-dessus : A, B, D et F posent peu de problèmes en interrogation (davantage cependant que les 4 expressions de l'exercice 2, mais qui, elles, sont accompagnées d'un énoncé classique type « tâche 1 ») et des expressions semblables ont été largement transformées en classe tandis que E et C, sources de « non abordé » ou d'erreurs dans l'interrogation, ne correspondent exactement à aucune transformation d'expression travaillée en classe.

Notons enfin que la réponse correspondant au code « 2a » n'apporte pas le maximum des points : et pourtant, ces 4 élèves du g.A ont transformé E correctement, souvent en $\sqrt{45}$. La forme qu'ils ont choisie permet aussi bien que $3\sqrt{5}$ de conclure, par exemple en comparant directement avec $\sqrt{80}$. Si leur réponse n'est pas considérée complète, c'est qu'ils ont failli à la règle, implicite, de transformer sous la forme $a\sqrt{b}$. Cette remarque met en avant la force du contrat entre l'enseignante de cette classe et ses élèves, et l'importance qu'il revêt pour elle.

Plus encore que les difficultés inhérentes à cette consigne particulière (emploi du terme de vocabulaire « intrus », nécessité de transformer ces expressions sous une même forme pour les comparer), il semble ici que ce soit le caractère inhabituel des écritures proposées qui pose problème : ce qui est travaillé exactement en classe est réussi alors que les écritures avec quotient ou signe « fois », peu transformées avec la méthode habituelle associée à la tâche 1 en classe, sont elles sources d'échec.

Interrogation exercice 3 :

Les adaptations liées au choix des transformations d'écriture sont ici réduites puisqu'il s'agit de cocher un résultat parmi 5 déjà proposés.

Voici les résultats observés :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents).	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)
Ont tout juste	9	2	11
Ont fait au moins une erreur.	4	11	15

Regardons plus en détail les erreurs :

	(g.A_g.B) sur (4_11) élève3ves concernés	Nombre total d'élèves (sur 15 concernés)
Codé 3 : tout est juste sauf pour $\frac{\sqrt{75}}{5}$	(3_5) dont :	8 dont :

dont :		
-codé 3a : ont coché « 0 ».	(2_3)	5
-codé 3b : ont trouvé « 3 ».	(1_2)	3
Codé 4 : tout est juste sauf pour $(\sqrt{3}+1)^2-4$: la réponse « 0 » est ici cochée.	(1_3)	4
Codé 6 : 2 erreurs ou plus.	(0_3)	3

Comparons les expressions proposées avec celles qui ont été transformées en classe :

Dans l'exercice 3 de l'interrogation	En classe
$\sqrt{3} + \sqrt{3}$	Travaillé dans l'exercice 8 de la fiche 12 mais avec plus de termes et des coefficients devant les radicaux non tous égaux à 1 (par exemple « $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-7\sqrt{3}$ » Ce qui est demandé ici reste a priori plus simple.
$\sqrt{27}$	Transformé exactement sous la forme $3\sqrt{3}$ dans l'ex 14 de la fiche 10.
$\sqrt{3} \times \sqrt{3}$	Conséquence immédiate de la définition, travaillée dans la leçon et au sein de nombreux exercices.
$\frac{\sqrt{75}}{5}$	Aucune écriture fractionnaire avec un numérateur écrit sous forme de radical et un dénominateur entier n'est transformée en classe. L'expression qui se rapproche le plus serait, dans l'ex 14 de la fiche 10, « $\frac{2}{3}\sqrt{180}$ », rencontrée à une seule reprise et non présentée sous la forme « $\frac{2\sqrt{180}}{3}$ »
$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$	De nombreuses expressions avec radicaux sont développées grâce à la troisième identité remarquable dont, exactement dans les mêmes conditions : -ex 17 de la fiche 11 : $(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$. -ex 23 de la fiche 11 et 2 de la fiche 12 : $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$ -ex 2 de la fiche 12: $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$, soit exactement la même que celle de l'interrogation.
$(\sqrt{3}+1)^2-4$	Rien de similaire n'a été fait en classe : seules des expressions type « première identité remarquable » ont été développées à de nombreuses reprises, dont exactement dans les mêmes conditions : -dans l'ex 16 de la fiche 11 : $(\sqrt{2}+1)^2$ -dans l'ex 24 de la fiche 11 : $(\sqrt{2}+3)^2$ -dans l'ex 2 de la fiche 12 : $(\sqrt{3}+2)^2$.

Comme dans l'exercice précédent, les expressions déjà travaillées en classe posent beaucoup moins de problèmes :

- Une expression du type « $\frac{\sqrt{75}}{5}$ » n'a jamais été travaillée en classe et 8 élèves parmi les 15 qui n'ont pas obtenu tous les points échouent à cause d'elle. Les résultats auraient peut-être été différents si l'énoncé avait proposé $\frac{1}{5}\sqrt{75}$, expression pourtant égale mais se rapprochant davantage de la seule travaillée en classe (voir tableau ci-dessus). Nous interprétons facilement le résultat « 3 », trouvé par 3 élèves, comme un calcul erroné du type « $\frac{\sqrt{25 \times 3}}{5} - \frac{5 \times 3}{5} = 3$ ». Par contre, le résultat « 0 » trouvé par 8 élèves, en l'absence de trace écrite puisqu'il s'agissait ici de mettre des croix, est plus difficile à expliquer et nous laisse perplexes.

- 4 élèves parmi les 15 qui n'ont pas réussi se sont eux trompés pour l'expression « $(\sqrt{3}+1)^2-4$ ». Le tableau comparatif ci-dessus montre que rien de semblable n'a été fait en classe. De plus, les nombres choisis incitaient à « oublier » l'identité remarquable dans le premier terme pour écrire « $(\sqrt{3})^2+1^2-4=3+1-4=0$ » et c'est justement le résultat « 0 » qu'ont coché les 4 élèves concernés.

Ici encore, la proximité des expressions de départ avec celles travaillées en classe semble un gage de réussite.

Interrogation exercice 4 :

Cette fois, l'expression donnée dans la consigne est presque - et nous nous attarderons sur ce « presque » - semblable à celles transformées en classe avec la consigne « simplifier » ou « mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ ». C'est pour cela que nous analysons les résultats de cet exercice dans la partie consacrée à la tâche 1.

Voici les résultats :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)
N'ont pas abordé l'exercice.	1	5	6
Ont réussi l'exercice.	8	2	10
N'ont pas obtenu le maximum des points.	4	6	10

Décrivons plus précisément les erreurs commises :

	(g.A_g.B) (sur (4_6) élèves concernés).	Nombre total d'élèves (sur 10 concernés)
Essais justes non aboutis Codé 2	(2_3)	5
Transformation de A avec erreur(s) Codé 3	(2_3)	5

Cette expression ressemble à celles travaillées en classe, à un détail près : son premier terme « $\sqrt{8}\sqrt{2}$ ». C'est donc ce calcul-là que nous allons regarder en priorité sur les copies des élèves. Nous avons distingué deux stratégies possibles pour transformer $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$:

- S1 : utilisation de la propriété « du produit de racines carrées », que nous avons appelé P1b quand nous avons listé les connaissances nouvelles en jeu : $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$
- S2 : $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times (\sqrt{2})^2 = 2 \times 2 = 4$: utilisation de P1a (racine carrée d'un produit), puis de D1 (avec des variantes possibles).

Regardons si nous pouvons établir des liens entre la stratégie choisie et la réussite des élèves :

- Stratégie de ceux qui ont réussi :

	Nombre d'élèves du gA	Nombre d'élèves du g.B	Nombre total d'élèves
Stratégie S1	7	2	9
Stratégie S2	1	0	1

- Stratégie de ceux qui ont fait des essais justes non aboutis :

	Nombre d'élèves du gA	Nombre d'élèves du gB	Nombre total d'élèves
Stratégie S1	2	0	2
Stratégie S2	0	2	2
Au regard des productions, on ne peut pas savoir quelle stratégie a été choisie.	0	1	1

- Stratégie de ceux qui ont transformé A avec des erreurs :

	Nombre d'élèves du gA	Nombre d'élèves du gB	Nombre total d'élèves
Stratégie S1	1	0	1
Stratégie S2	1	1	2
Au regard des productions, on ne peut pas savoir quelle stratégie a été choisie.	0	2	2

Ces trois tableaux indiquent que :

- Globalement, les élèves du g.A choisissent plutôt la stratégie S1 et ils réussissent.
- Ceux du g.B choisissent plutôt la stratégie S2 et ils échouent.

Il semble donc que le choix de la stratégie conditionne la réussite, avec cependant une restriction : ce sont les élèves du g.A qui choisissent S1 mais réussissent-ils parce qu'ils ont choisi cette stratégie ou pour d'autres raisons qui les font appartenir à ce groupe ? (ce sont des « bons » élèves, qui ont répondu correctement à plus de la moitié des questions). Nous pouvons ainsi nous demander si, si on avait imposé la stratégie S2 à ces mêmes élèves, ils n'auraient pas encore réussi. Le choix de S1 ne serait alors ici que le signe d'une capacité d'anticipation, d'une « vision » des calculs plus simples à effectuer, d'une possibilité de se dégager des effets de contrat : les élèves du g.A se rendraient tout de suite compte que « $8 \times 2 = 16 = 4^2$ » tandis que ceux du g.B resteraient dépendants des méthodes de transformation type tâche 1 martelées en classe, cherchant avant tout à décomposer le radicande 8 en nombres premiers, comme dans la leçon.

Comparons maintenant cet énoncé avec les tâches prescrite et réellement travaillées en classe. Nous essaierons en particulier d'identifier ce qui, dans les déroulements réels, a pu encourager une des deux stratégies décrites ci-dessus pour le calcul de $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$.

Nous pouvons axer notre comparaison sur les points suivants :

- *La consigne :*

Elle est peut-être responsable du fort taux de « non abordé » dans le g.B. Elle est inhabituelle, donne un but à atteindre mais sans donner les moyens immédiats pour le faire. L'énoncé ne demande ni de « calculer », ni de « transformer », ni d'« écrire le plus simplement possible », ni d'« écrire sans radical », ni de « mettre sous la forme de ... » (ce qui se trouve entre guillemets est tiré de consignes d'exercices traitées en classe), même si la première ligne commencée par l'enseignante sur la photocopie, « $A=...$ », incite à transformer l'expression. Par effet de contrat, on peut penser que les élèves vont se lancer dans la tâche 1 : l'expression donnée ressemble en effet un peu -mais pas tout à fait- à celles à partir desquelles ils ont travaillé en classe.

- *La forme de l'expression donnée dans la consigne :*

Aucune somme algébrique dont un des termes est le produit de deux radicaux n'a été transformée en classe. Dans la fiche 11, on trouve des produits ou des sommes (exercices 12, 13 et 14), mais jamais les deux dans la même expression.

- *La transformation de $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$:*

L'exercice 10 de la fiche 10 demandait d'« écrire sans radical » des nombres écrits sous la forme d'un produit de radicaux, avec des radicandes entiers mais plus grands que 8 et 2 (par exemple $\sqrt{14} \times \sqrt{56}$). Nous avons recherché dans les vidéos comment avait été traité cet exercice en classe : la correction proposait de décomposer les radicandes puis de tenter des regroupements astucieux, en appliquant P1 et D1 mais sans le dire, par exemple en écrivant $\sqrt{14} \times \sqrt{56} = \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 7 \times 2 \times 2 = 28$. Encore une fois, on retrouve le conseil de l'enseignante de « décomposer au maximum sous le radicande » pour « être sûr d'arriver au résultat ». Les initiatives pour anticiper un calcul et jauger sa difficulté avant de se lancer ne sont pas encouragées, bien au contraire : un élève, du g.A, propose : « $\sqrt{14} \times \sqrt{56} = \sqrt{7} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{8} = 7 \times \sqrt{16} = 7 \times 4 = 28$ » et l'enseignante répond « c'est pareil mais en faisant comme au tableau, tu es sûr d'arriver toujours au résultat, quelle que soit ton expression de départ ». Ainsi, pour transformer $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$, ce qui est fait en classe encourage plutôt à opter pour la stratégie S2, alors qu'il semble que S1 soit ici plus simple et en tout cas moins source d'erreurs pour les élèves. Les tableaux d'analyse des productions montrent en effet que ceux qui ont réussi ou qui ont fait des transformations justes non abouties ont choisi S1 (sauf un élève qui a réussi grâce à S2). Dans ce cas précis, ce qui est fait en classe semble ainsi plutôt faire obstacle à la réussite de l'exercice de l'interrogation. De plus, tout se passe comme si seuls les élèves du g.A étaient capables de rompre le contrat « tâche 1 et on décompose sous

le radical au maximum » pour prendre des initiatives heureuses les conduisant à la solution ; la très grande majorité des élèves du g.B, elle, ne parvient pas à s'affranchir de ce qui a été fait en classe et se retrouve ainsi « bloquée » par des effets de contrat. Reste à déterminer si cette propriété des élèves du g.A, décrits comme capables d'anticiper, de « voir » les calculs les plus simples à effectuer, est une caractérisation possible des « bons élèves » et à estimer dans quelle mesure l'enseignement proposé ici favorise ce clivage, ne permettant pas aux « moins bons » d'acquérir les qualités des « meilleurs ». Pour apporter des réponses satisfaisantes, il faudrait avoir accès au travail personnel des élèves et en particulier comprendre en quoi l'enseignement proposé peut l'influencer.

- *La transformation des autres termes $-2\sqrt{75}$ et $5\sqrt{12}$:*

Dans l'exercice 14 de la fiche 10, la tâche 1 était prescrite (avec la consigne « écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, b étant un entier le plus petit possible ») pour $\sqrt{75}$ et $\sqrt{12}$. Dans les exercices 10 et 11 de la fiche 11, elle l'était à nouveau (avec la consigne « écrire le plus simplement possible ») pour les expressions $d=5\sqrt{12}+3\sqrt{48}-2\sqrt{75}$ et $b=\sqrt{12}+4\sqrt{75}-5\sqrt{48}$, comportant toutes deux $\sqrt{12}$ et $\sqrt{75}$, et même précédés des coefficients numériques 5 et -2 identiques pour le d. Si l'élève comprend qu'il doit l'effectuer, on peut penser que ce travail, très bien préparé en classe, ne sera pas source de difficultés. L'analyse des productions confirme cette conjecture puisque tous ceux qui ont abordé l'exercice ont correctement transformé $-2\sqrt{75}$ et $5\sqrt{12}$; c'est plutôt la transformation de $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ qui a posé problème.

- *La forme et la nature du résultat obtenu : un entier.*

L'exercice 1 de la fiche 12, avec la consigne « simplifier le plus possible l'écriture des nombres suivants », propose des sommes algébriques de radicaux s'écrivant sans radicaux à deux reprises (D et J) mais c'est à partir d'expressions littérales et tous les radicandes sont directement des carrés d'entiers (par exemple $D=b\sqrt{4}+b\sqrt{36}+b\sqrt{64}=4b$). Dans le même exercice, dans les expressions K, O et P, un des termes s'écrit sans radical (le radicande est un carré parfait) mais les nombres obtenus ne sont pas des entiers (par exemple $K=5\sqrt{54}+3\sqrt{64}+2\sqrt{6}=17\sqrt{6}+24$). Ainsi, parmi les expressions à partir desquelles les élèves ont travaillé la tâche 1 en classe, la grande majorité s'écrit $a\sqrt{b}$ et aucune en tout cas ne donne de valeur numérique entière, comme dans cet exercice.

Ainsi, dans cet exercice, le bénéfice des nombreuses transformations effectuées en classe n'est plus si évident : au contraire, les élèves doivent être capables de se détacher de ce qui a été fait en classe, d'oublier les règles du contrat implicite construit entre eux et leur professeur (« on décompose en premier le radicande », « on va obtenir un résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ ») pour réussir. Et pour cela, les répétitions importantes de la même tâche, avec les mêmes niveaux de mises en fonctionnement en classe, peuvent devenir des handicaps.

Interrogation exercice 5 :

Voici les résultats relevés :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents).	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents).	Nombre total d'élèves (sur 26 présents).
N'ont pas abordé l'exercice.	0	2	2
Ont réussi l'exercice.	4	0	4
N'ont pas obtenu le maximum des points (des erreurs et/ou des réponses incomplètes)	9	11	20

Aucun élève du g.B et seuls quatre élèves du g.A ont réussi : cet exercice a posé problème. Il est donc nécessaire de regarder plus en détail les copies des 20 élèves qui ont abordé l'exercice mais n'ont pas obtenu le maximum de points.

Précisons les erreurs parmi les quatre expressions proposées :

	(g.A_g.B) sur (9_11) concernés.	Total (sur 20 concernés)
Tout est juste ($N = U = S = 0$) sauf L	(6_0) dont :	6 dont :
Détails pour L :		
aucune trace	(3_0)	3
Essais non aboutis	(3_0)	3
transformation fausse	(0_0)	0
Ont trouvé $N = U = 0$ indépendamment du reste.	(9_4)	13

N'ont pas abouti à l'expression attendue pour L (indépendamment du reste)	(8_11) dont :	19 dont :
Détails pour L :		
Aucune trace	(3_2)	5
Essais non aboutis	(4_2)	6
Transformation fausse	(1_7)	8
N'ont pas trouvé $S = 0$ (indépendamment du reste) ; détails pour S :	(3_10) dont :	13 dont :
Aucune trace	(0_6)	6
Essais non aboutis	(0_1)	1
Transformation fausse	(3_3)	6
Erreur(s) pour N (tous ceux qui ont abordé l'exercice ont transformé N)	(0_4)	4
N'ont pas transformé U comme attendu	(0_6) dont :	6 dont :
Détails pour U :		
Aucune trace	(0_3)	3
Transformation fausse	(0_3)	3
Ont transformé L comme attendu	(5_0)	5

Les 9 élèves du g.A qui n'ont pas obtenu le maximum des points ont tous trouvé $N=U=0$. Parmi eux, 3 ont échoué à cause de S (tous l'ont abordé et ont donné un résultat mais il y a des erreurs de calcul) et 8 à cause de L (un seul a fait une erreur, les 7 autres n'ont rien écrit ou n'ont pas abouti).

Aucun des 11 élèves du g.B ayant abordé l'exercice n'a donné le résultat attendu pour L (7 ont fait des erreurs, 4 n'ont rien écrit ou n'ont pas abouti). Un seul élève de ce groupe a trouvé $S=0$ (3 ont écrit des erreurs, 7 n'ont rien écrit ou n'ont pas abouti). Quant à N et U, ils sont respectivement 4 et 6 à ne pas avoir dans ce groupe trouvé le résultat attendu.

Ainsi, pour les élèves des deux groupes, c'est l'expression L, très discriminatoire, qui a posé le plus de problème : seuls 5 élèves, tous du g.A, ont obtenu le résultat attendu. Parmi eux, 4 ont réussi intégralement l'exercice et une seule a fait une erreur de calcul pour S.

Néanmoins, les élèves des deux groupes n'ont pas réagi de façon identique devant la difficulté posée par L : ceux du g.B ont voulu à tout prix retrouver un cas connu (type tâche 1) et ont écrit des erreurs pour que « ça marche » (erreur que nous avons déjà apparentée au phénomène « la fin justifie les moyens » pour les élèves de ce groupe) tandis que ceux du g.A n'ont rien écrit ou ont laissé leurs calculs inaboutis (on peut supposer qu'eux aussi ont cherché mentalement ou au brouillon à se ramener à un cas connu mais les mathématiques ont été plus « fortes » que le contrat et ils n'ont rien écrit d'incorrect). La question du type de rapport au savoir des élèves est une nouvelle fois posée.

La principale difficulté rencontrée pour L est l'impossibilité de « b commun » pour mettre sous la forme habituelle $a\sqrt{b}$, difficulté aggravée par la possibilité de décomposer en produits avec un facteur commun mais sans faire apparaître de carrés! Ainsi, on trouve « $\sqrt{30 \times 5} - \sqrt{20 \times 5} - \sqrt{10 \times 5}$ » sur 5 copies, et les transformations « $\sqrt{3 \times 50} - \sqrt{2 \times 50} - \sqrt{50}$ », « $\sqrt{2 \times 75} - \sqrt{2 \times 50} - \sqrt{2 \times 25}$ », « $\sqrt{5 \times 5 \times 3} - \sqrt{4 \times 5 \times 5} - \sqrt{5 \times 5 \times 2}$ », « $\sqrt{2 \times 3 \times 25} - \sqrt{2 \times 2 \times 25} - \sqrt{2 \times 25}$ », « $\sqrt{6 \times 25} - \sqrt{4 \times 25} - \sqrt{2 \times 25}$ » chacune sur une copie, suivies ou non de calculs faux.

Nous allons maintenant comparer cette expression L avec ce qui a été fait en classe :

On peut rapprocher l'expression L de cet exercice de l'expression O de l'exercice 1 de la fiche 12.

Interrogation, exercice 5	Fiche 12, exercice 1
$L = \sqrt{150} - \sqrt{100} - \sqrt{50}$	$O = 5\sqrt{25} + 2\sqrt{125} + \sqrt{75}$

Dans les deux cas, il s'agit en effet d'une somme algébrique de trois termes s'écrivant avec des radicaux et on arrive à une expression du type $a + b\sqrt{c} + d\sqrt{e}$ ($L = -10 + 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}$ et $O = 25 + 10\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$) : un des radicandes est un carré parfait, les deux autres se décomposent comme expliqué dans l'analyse de la tâche 1, mais sans facteur commun.

Quelques différences tout de même sont à noter entre ce qui a été fait en classe et ce qui est demandé ici :

- La consigne de l'exercice 1 de la fiche 12 est « simplifier... », celle de l'interrogation est « trouver les nombres égaux à 0 » : encore une fois, la transformation d'écriture était la tâche prescrite en classe, objet de l'exercice, elle n'est qu'un outil dans l'interrogation pour répondre à la question posée. De plus, les nombres choisis sous les radicandes, les signes et ce « zéro » auquel fait allusion la consigne pourrait inciter les

élèves à écrire $L=150-100-50=0$. Or, cette tentation n'a fait échouer qu'un seul élève du g.B. On peut penser que le « piège » classique « $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ » n'a pas fait davantage de victimes car les élèves l'ont traité en classe, en particulier dans des exemples de la leçon. On peut aussi penser que les élèves sont tellement habitués à effectuer la tâche 1 qu'ils n'imaginent même plus possible une expression de départ ne permettant pas d'appliquer ce qu'ils ont « appris ». Dans cette situation précise, tout se passe comme si la répétition, très marquée, de la tâche 1 conduisant au résultat « $a\sqrt{b}$ », occultait tous les autres cas, pourtant traités eux aussi en classe, et devenait un obstacle pour résoudre certains exercices dans lesquels les expressions ne peuvent pas s'écrire sous la forme « $a\sqrt{b}$ ». Rappelons ici que, sur les 31 expressions du même type (somme algébrique de radicaux) transformées en classe, 25 donnent un résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, 2 donnent un résultat littéral sans radical, et 4 donnent d'autres résultats dont un seul, le « O » évoqué ci-dessus, s'écrit sous la forme $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}+e$. Les productions d'élèves reproduites précédemment attestent de leur volonté de se ramener à tout prix au cas le plus souvent traité en classe.

- En outre, les coefficients devant les radicaux de l'expression O la plus proche traitée en classe sont positifs, égaux à 5, 2 et 1 alors que dans l'interrogation, ils valent + ou - 1. On peut penser que ce qui est proposé en évaluation est plus facile puisque une des étapes de la tâche 1 (la gestion du coefficient devant le radical quand on sort le carré) nécessitant des adaptations et source on l'a vu de nombreuses erreurs (codées « 3 » dans les colonnes sur fond jaune du tableau récapitulatif des résultats page 33). Cette conjecture est d'autant plus tentante à formuler que la forme obtenue ne nécessite pas de factorisation finale et donc que les coefficients + ou - 1 ne génèrent pas ici de difficulté supplémentaire. En ce qui concerne la transformation d'expression (et en faisant alors abstraction de son caractère tantôt objet, tantôt outil), ce qui est demandé dans le L de l'interrogation apparaît ainsi plus facile que ce qui a été traité en classe avec l'expression O. Comment se fait-il alors que seuls 5 élèves, du g.A, aient mené à bien cette transformation ? Avec les seules données auxquelles nous ayons accès, la seule explication satisfaisante possible semble donc être la rareté de ce type de résultat obtenu en classe (1 parmi 31 contre 25 pour la forme $a\sqrt{b}$).

Nous aurions pu faire un travail similaire de comparaison pour les trois autres expressions proposées dans cet exercice mais nous avons choisi de centrer nos analyses sur L, car elle était celle que les élèves avaient le plus de difficultés à transformer correctement.

Ainsi, comme dans l'exercice 4 de la même interrogation, il semble ici que la répétition en classe de la même tâche, donnant des résultats qui s'écrivent $a\sqrt{b}$, puisse être un facteur « bloquant » à la réussite de transformations d'expressions qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme. Certes, certains de ces cas ont été travaillés en classe mais quelque peu « noyés »

au milieu du cas « habituel » et le retour aux vidéos montre que l'attention des élèves n'a jamais été attirée sur eux.

Tâche 2 (en rose dans le tableau général des résultats) :

Rappelons qu'il s'agit de substituer le nombre + ou - $\sqrt{a}$ (a entier) dans une expression littérale).

Contrôle ex2 2) :

Voici les résultats observés accompagnés de quelques informations sur les procédures utilisées, pour $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{3}$ (mais aussi $x=-1$, pour, comme nous l'avons déjà expliqué, essayer de comprendre dans quelle mesure les erreurs commises sont liées aux racines carrées) :

<u>Pour $x=\sqrt{2}$</u>	<u>Nombre d'élèves du</u> <u>g.A (sur 11)</u>	<u>Nombre d'élèves du</u> <u>g.B (sur 13)</u>	<u>Nombre total</u> <u>d'élèves (sur 24)</u>
Non abordé	0	3	3
Juste :	11	2	13
A partir de l'expression « consigne »	1	0	1
A partir de l'expression développée	9	1	10
cohérent avec l'expression développée fausse	1	1	2
Faux :	0	8	8
A partir de l'expression développée	0	0	0
A partir de l'expression « consigne ».	0	8	8

<u>Pour $x = -\sqrt{2}$</u>	<u>Nombre d'élèves du</u> <u>g.A (sur 11)</u>	<u>Nombre d'élèves du</u> <u>g.B (sur 13)</u>	<u>Nombre total</u> <u>d'élèves (sur 24)</u>
Non abordé	0	3	3
Juste :	10	2	12
A partir de l'expression « consigne »	1	0	1
A partir de l'expression développée	8	1	9
Cohérent avec l'expression développée fausse	1	1	2
Faux	1	8	9
A partir de l'expression développée	1	0	1
A partir de l'expression « consigne »	0	8	8
<u>Pour $x = -1$</u>	<u>Nombre d'élèves du</u> <u>g.A (sur 11)</u>	<u>Nombre d'élèves du</u> <u>g.B (sur 13)</u>	<u>Nombre total</u> <u>d'élèves (sur 24)</u>
Non abordé	0	2	2
Juste :	9	2	11
A partir de l'expression « consigne »	0	0	0
A partir de l'expression développée	8	1	9
Cohérent avec l'expression développée fausse	1	1	2
Faux :	2	9	11
A partir de l'expression développée	2	0	2
A partir de l'expression	0	9	9

« consigne »			
--------------	--	--	--

Cet exercice apparaît très discriminatoire : 12 élèves (dont 10 du g.A) ont travaillé à partir de l'expression développée et tous ont réussi. 9 élèves (dont 8 du g.B) ont eux travaillé à partir de l'expression « consigne » et un seul (celui du g.A) a réussi. C'est donc le choix de l'expression dans laquelle substituer $\sqrt{2}$ qui semble ici source d'erreur, c'est-à-dire l'adaptation de type A6 décrite dans l'analyse a priori de la tâche 2 (deuxième déclinaison) faite en 4-2-a. Cependant, comme nous l'avons souligné alors, le choix de travailler avec l'expression « consigne », s'il génère des difficultés supplémentaires, peut néanmoins conduire au résultat attendu (le seul élève du g.A s'étant engagé dans cette voie a réussi). Ainsi, le tableau ci-dessus se lit à deux niveaux : celui du choix de l'expression avec laquelle travailler et celui de la gestion du développement d'une expression numérique comportant des radicaux. Nous allons détailler ces deux lectures et tenter d'interpréter nos observations, d'abord pour le g.B puis pour le g.A, en comparant avec ce qui a été proposé et réellement fait en classe.

Pour le g.B :

- Les élèves du g.B ne choisissent pas l'expression la plus simple pour travailler.

Regardons dans les fiches données en classe les exercices les plus proches. Parmi les huit exercices dans lesquels la tâche 2 est prescrite (au total, 21 substitutions de valeurs numériques, dont 15 s'écrivant avec des radicaux, dans une expression littérale donnée), deux seulement proposent un choix possible entre plusieurs expressions : les exercices 3 et 10 de la fiche 12 (au total 5 substitutions dont 3 avec des racines carrées), dans lesquels une écriture est donnée (celle que nous appelons « consigne ») et deux autres, une développée et une factorisée, font l'objet d'une question précédente. Le choix lors du contrôle se fait ainsi entre deux expressions (la « consigne » et la développée) alors qu'il se faisait entre trois dans les exercices traités en classe. On peut donc considérer l'exercice du contrôle plus facile, du moins concernant l'adaptation A6 « choix ». Et pourtant, dans ce g.B, pour $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{3}$, 3 élèves n'ont pas traité la question, 8 ont échoué à partir de l'écriture donnée dans la consigne et seuls 2 ont écrit un calcul cohérent, à partir de l'expression développée (pour -1, un élève de plus a abordé la question mais a échoué, toujours à partir de l'expression « consigne »). On peut penser que, parmi la grande quantité d'exercices du même genre faits ou corrigés en classe, la faible proportion de ceux dans lesquels un choix intervient est en partie responsable du non-choix massif (utilisation de l'écriture « consigne ») du g.B lors du contrôle. En outre, en visionnant les vidéos concernées, on constate que ces deux exercices sont comme « noyés » parmi les autres : la nécessité de faire un choix parmi plusieurs expressions est totalement passée sous silence, ils sont corrigés très vite (à chaque fois par un élève du g.A qui lit sa production, l'enseignante écrivant juste le résultat au tableau), il n'y a aucune question, aucun commentaire un peu plus général, aucune aide autre que des remarques sur la « technique » et aucune mention d'une autre possibilité pour parvenir au même résultat. Dans les deux cas, que les calculs soient faits à partir de l'expression développée semble ainsi une

évidence. Les résultats lors du contrôle montrent que c'est loin d'être le cas, en tout cas pour une petite moitié de la classe.

- Les élèves du g.B échouent lorsqu'il s'agit de mettre en fonctionnement les connaissances anciennes « distributivité du type $k(a+b)=ka+kb$ » et « réduction du résultat obtenu » avec une expression numérique s'écrivant avec des radicaux.

Pour mieux cerner les raisons de cette difficulté, on peut regarder les productions des 8 élèves du g.B concernés à la première question de l'exercice (fond gris dans le tableau récapitulatif des résultats), qui propose de développer l'expression littérale A donnée dans la consigne : 5 d'entre eux avaient alors réussi. Il semble donc que, pour eux, ce ne soit pas les connaissances anciennes concernées qui posent problème en elles-mêmes mais plutôt leur prolongement implicite à des expressions non littérales s'écrivant avec des radicaux. Ce serait le mélange nécessaire avec la mise en fonctionnement des connaissances nouvelles sur les radicaux (ici D1) qui serait donc source des difficultés constatées. Pour ces élèves du g.B, la substitution de $-\sqrt{3}$ donne exactement les mêmes résultats : on peut donc penser que le signe « moins » n'est pas la source de l'échec ici. Or, en classe, les développements à partir d'expressions s'écrivant avec des radicaux ont été largement travaillés : dans la fiche 11, exercices 16 à 24 et dans la fiche 12 exercice 2, 48 expressions numériques avec des radicaux sont au total développées en classe, dont 2 seulement avec la distributivité « simple » vue en cinquième (les autres font appel aux identités remarquables et/ou à la double distributivité). Ce que devraient faire les élèves qui ont choisi l'expression « consigne » dans le contrôle est donc soit identique, soit plus facile que ce qu'ils ont déjà corrigé en classe, à une différence près : en classe, les expressions avec radicaux à développer sont directement données dans les consignes tandis qu'en contrôle une première substitution est nécessaire à partir de l'expression littérale. Il est possible que ce soit cette étape qui ait causé certains des échecs constatés : remplacer la lettre x par $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{3}$ en rétablissant les signes multipliés implicites aux places adéquates ne va peut-être pas de soi pour tous. De plus, en regardant le tableau général des résultats, on constate que la même question, cette fois pour $x=-1$, a été moins bien réussie encore. En particulier, les élèves qui avaient réussi le développement à partir de l'expression littérale et échoué en remplaçant x par $\sqrt{2}$ dans l'expression « consigne » ont également échoué en remplaçant x par -1 dans cette même expression. Regardons plus en détail les erreurs commises :

Cami (copie 12) a écrit pour $\sqrt{2}$: « $A=4 \times \sqrt{2}(\sqrt{2}+3)-10\sqrt{2}+5$ $A=4\sqrt{2}+\sqrt{5}-10\sqrt{10}$ $A=4\sqrt{2}+\sqrt{5}-10\sqrt{2} \times 5$ $A=4\sqrt{2}+\sqrt{5}-20\sqrt{5}$ $A=4\sqrt{2}-19\sqrt{5}$ » (elle remplace bien au début mais fait comme si le radical concernait aussi l'addition qui le suit : $\sqrt{2}+3=\sqrt{5}$ et met un signe « plus » au lieu d'un « fois » avant la parenthèse), puis pour $-\sqrt{3}$: « $A=4(-\sqrt{3})(-\sqrt{3}+3)-10(-\sqrt{3})+5...$ » (mêmes erreurs ensuite que pour $\sqrt{2}$) et enfin pour -1 : « $A=4-1(-1+3)-10-1+5$ $A=3 \times 2-9+5...$ ».

De même, Merv (copie 9) a correctement remplacé x par $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{3}$ (il a fait ensuite des erreurs difficilement interprétables) mais a écrit pour -1 « $-10x=-10-1$ ».

Joha (copie 7), elle, remplace bien pour $\sqrt{2}$ (mais elle n'applique pas correctement la distributivité), écrit « $-10(-1)=-11$ » pour -1 et « $4x=4-\sqrt{3}$ » pour $-\sqrt{3}$

Quant à Ani (copie 6), elle écrit : « $A=4-\sqrt{3}(-\sqrt{3}+3)-10-\sqrt{3}+5$ $A=-4\sqrt{3}x(-3\sqrt{3})-10\sqrt{3}+5$ $A=-7\sqrt{3}-10\sqrt{3}+5$ $A=-12\sqrt{3}$ », production attestant d'énormes difficultés pour reconstituer les signes opératoires et, une fois la décision prise, pour faire l'opération qui a été notée, sans confondre addition et multiplication.

Mari (copie 25) écrit elle « $A=4x(-\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+3)\dots$ », explicitant un signe « plus » au lieu d'un « fois » avant la parenthèse.

Ainsi, les sources d'erreurs paraissent, y compris sur une même copie, multiples, liées ou pas aux radicaux. Ce que nous avons suggéré concernant l'étape « remplacer x par la valeur numérique donnée » est parfois confirmé à la lecture des copies, en particulier pour les valeurs négatives -1 et $-\sqrt{3}$. Cependant, c'est surtout au moment d'effectuer les calculs notés que les difficultés apparaissent, difficultés observées pour les trois valeurs -1 , $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{3}$ proposées. Tout se passe comme si l'explicitation des signes opératoires était le fruit du hasard. Ce serait ainsi le formalisme et les conventions habituellement utilisés en calcul littéral qui poseraient problème ici. Tant qu'on reste dans le cadre littéral, les élèves gèrent leurs calculs globalement avec succès mais, dès qu'on passe dans le cadre numérique, ils peinent : les racines carrées, du fait de leur statut « hybride » au collège entre nombre et lettre-nombre généralisé (on leur enseigne que c'est un nombre mais ils calculent, développent, réduisent avec les radicaux presque comme ils le font avec les « x » en calcul littéral), seraient alors juste des révélateurs d'un problème plus vaste, déjà présent dans le cadre numérique, et accentué dans le jeu implicite mais permanent entre cadre numérique et algébrique.

Pour le g.A :

Les élèves du g.A, eux, ont tous réussi la substitution de $\sqrt{2}$, mais seul un d'entre eux a travaillé à partir de l'expression « consigne » : certes, il a réussi et nous sommes alors tentés de dire que les élèves du g.A, contrairement à ceux du g.B, savent gérer les développements d'expressions numériques avec des radicaux. Cependant, il faut être prudent : la faible proportion d'entre eux ayant choisi cette voie rend les conclusions générales sur ce point difficiles. Par contre, à la lecture des tableaux ci-dessus, il semble acquis que ces élèves réussissent à choisir l'expression avec laquelle les calculs seront les plus simples (ici, l'expression développée) : sur un précédent exercice, nous avons déjà noté la capacité des élèves de ce groupe à anticiper les calculs. En revenant à ce qui a été fait en classe, déjà décrit lors de l'analyse des résultats du g.B, on peut penser que les élèves du g.A avaient déjà réussi les exercices du même type faits alors. Le peu d'explication donnée et l'absence de la moindre remarque ou tentative de généralisation sur le choix de l'expression en fonction de la valeur numérique proposée ne les a probablement donc pas handicapés. Ce n'était pas source de difficulté pour eux lors de la correction en classe. Ici encore, on peut s'interroger sur le rôle du travail personnel : ont-ils, chez eux ou individuellement en classe, essayé d'utiliser les

autres expressions avant de faire leur choix ? Rien ne nous permet ici de le savoir. La substitution de $-\sqrt{3}$ ne semble pas, pour le g.A non plus, modifier grand-chose : un seul élève, Zakia (copie 13), a échoué, à partir de l'expression développée. Au regard de sa copie, on peut facilement conclure qu'il ne s'agit pas d'un problème de signe mais d'une erreur d'inattention (oubli du carré). Le signe « moins », si il est on le verra une cause d'erreurs, n'est donc pas la seule. Par contre, les résultats obtenus pour la substitution de -1 sont de prime abord plus surprenants puisque deux élèves du g.A, Lucie (copie 11) et Antoine (copie 20), échouent, la première à partir de l'expression développée, le second à partir de l'expression « consigne », alors qu'ils avaient tous deux réussi à partir des mêmes expressions et pour $\sqrt{2}$ et pour $-\sqrt{3}$. L'examen attentif de leur production montre qu'il s'agit simplement d'erreurs numériques de calcul. Ainsi, substituer $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{3}$ n'est pas plus difficile que substituer -1 : la mise en fonctionnement de connaissances nouvelles sur les radicaux et le mélange avec les connaissances anciennes vues en calcul littéral ne semblent poser aucun problème particulier à ces élèves.

Résultats, analyses et évolutions éventuelles pour la même tâche 2, lors du brevet blanc partie numérique ex2 4) :

Ici, le choix se fait parmi 3 expressions (une « consigne », une développée et une factorisée) au lieu de 2 dans le contrôle, comme dans la fiche 12, exercices 3 et 10, mais avec une expression de départ plus simple. La forme du résultat à obtenir est par ailleurs donnée, ce qui n'était le cas ni en classe, ni au contrôle.

Voici les résultats relevés pour $x = -\sqrt{3}$ (puis $x = 7$, toujours dans le but de comprendre quelle est la part de responsabilité des racines carrées dans les erreurs observées). :

<i>Pour $x = -\sqrt{3}$</i>	<i>Nombre d'élèves du g.A (sur 13)</i>	<i>Nombre d'élèves du g.B (sur 13)</i>	<i>Nombre total d'élèves (sur 26)</i>
Non abordé	1	4	5
Juste :	10	4	14
A partir de l'expression développée	9	3	12
A partir de l'expression « consigne »	0	1	1
A partir de l'expression	0	0	0

factorisée			
Cohérent à partir de l'expression développée fausse	1	0	1
Faux :	2	5	7
A partir de l'expression développée	1	2	3
A partir de l'expression « consigne »	0	1	1
A partir de l'expression factorisée	1	2	3
<i>Pour $x = 7$</i>	<i>Nombre d'élèves du g.A (sur 13)</i>	<i>Nombre d'élèves du g.B (sur 13)</i>	<i>Nombre total d'élèves (sur 26)</i>
Non abordé	1	3	4
Juste :	12	4	16
A partir de l'expression développée	10	4	14
A partir de l'expression « consigne »	0	0	0
A partir de l'expression factorisée	2	0	2
Cohérent à partir de l'expression développée fausse	0	0	0
Faux	0	6	6
A partir de l'expression développée	0	2	2
A partir de l'expression « consigne »	0	2	2
A partir de l'expression	0	2	2

factorisée			
------------	--	--	--

Les résultats pour le g.A sont sensiblement les mêmes que lors du contrôle : les taux de réussite et les choix sont comparables. Quelques remarques cependant :

- Pour la substitution de $-\sqrt{3}$: Zaki qui avait échoué par inattention (oubli du carré) lors du contrôle, n'a pas abordé la question lors du brevet blanc. Anto (copie 20), qui avait réussi lors du contrôle à partir de l'expression « consigne », a cette fois réussi à partir de l'expression développée. Luci (copie 11), a elle choisi de travailler avec l'expression factorisée : pour $x = 7$, elle réussit mais échoue pour $-\sqrt{3}$ par « oubli » de la convention de suppression du signe multiplié. Elle écrit : « $F=(2 \times (-\sqrt{3})+3)(-\sqrt{3}+10)$ $F=-2\sqrt{3}+3-\sqrt{3}+10$ $F=13-1\sqrt{3}$ ». Comme elle réussit par ailleurs avec 7 (« $F=(14+3)(17)$ $F=17 \times 17$ $F=289$ »), on peut penser que c'est la présence des radicaux qui lui pose problème : elle ne parvient pas à rendre explicite le signe « multiplié » entre les deux expressions entre parenthèses s'écrivant avec des radicaux et met à sa place un signe « plus » (et pourtant, elle substitue correctement à l'intérieur de chaque parenthèse). Peut-être est-ce dû au problème de l'adaptation « fausse A1 », que nous avons détaillé en 3-3-a : cette élève n'arrive pas à prolonger une des règles de simplifications d'écritures vue en cinquième à ces nouveaux nombres s'écrivant avec des radicaux. Il n'est pas du tout certain que le problème vienne des racines carrées, il faudrait observer ce que la même élève fait avec par exemple des sommes et produits de valeurs s'exprimant avec le nombre pi. Quant à l'élève (Pier, copie 21) qui a échoué avec l'expression développée alors qu'il avait réussi lors du contrôle, son erreur n'est sans doute pas significative (il a substitué $\sqrt{3}$ à la place de $-\sqrt{3}$).
- Cette fois, les résultats pour substituer le nombre entier sont meilleurs que ceux pour substituer le nombre s'écrivant avec des radicaux (aucun échec contre 2). On peut penser que la proximité dans le temps de la leçon sur les radicaux a joué en faveur du contrôle. De plus, les possibilités d'erreurs de calcul (c'était la cause des deux échecs au contrôle pour -1) sont ici moindres du fait du signe positif de la valeur 7.
- La mention dans la consigne du brevet blanc de la forme du résultat à obtenir semble n'avoir rien changé pour les élèves du g.A.

Par contre, pour les élèves du g.B, les résultats du brevet blanc sont sensiblement meilleurs que ceux du contrôle et les choix d'expressions ont évolué : ainsi, 5 élèves (contre 1 au contrôle) décident de substituer à partir de l'expression développée, 2 à partir de l'expression factorisée (choix impossible lors du contrôle) et seulement 2 (contre 8 lors du contrôle) à partir de l'expression « consigne ». Au total, 4 réussissent (contre 2 lors du contrôle) dont 3 à partir de l'expression développée. On peut penser que, depuis le contrôle, les élèves ont retenu qu'avec des nombres s'écrivant avec des radicaux, l'expression consigne n'était pas la plus adaptée. Pour en savoir plus, il faudrait avoir filmé la correction en classe de ce contrôle, ce qui n'est pas le cas. Nous disposons néanmoins de quelques informations à ce sujet : lors de nos discussions, l'enseignante nous a expliqué qu'elle relevait et notait les corrections prises

par ceux ayant obtenu les moins bonnes notes. De plus, sur la copie de contrôle de chaque élève ayant travaillé avec l'écriture « consigne », elle a noté en rouge « il fallait utiliser l'expression développée ». Peut-être est-ce en partie là que le changement de stratégie entre contrôle et brevet blanc s'est joué. Notons en outre que l'expression développée n'est pas donnée dans la consigne tandis que les élèves peuvent vérifier l'exactitude de leur écriture factorisée grâce à l'équation produit proposée à la question 3 : peut-être que ceux ayant choisi l'expression factorisée savaient que celle « consigne » entraînait des calculs compliqués mais ont préféré, par manque de confiance en leurs performances en mathématiques, ne pas utiliser un résultat dont ils doutaient. Dans la même perspective, on peut penser que la précision de la consigne sur la forme $a-b\sqrt{3}$ du résultat attendu a rassuré certains élèves et leur a permis de mener à bien leur calcul sans inquiétude quant à la forme « bizarre » de leur réponse ; elle a aussi permis d'éviter les erreurs de réduction du type « $a-b\sqrt{3}=(a-b)\sqrt{3}$ ». Notons que ceux (Fato, copie 8 et Merv, copie 9) ayant opté pour l'expression factorisée échouent, tant pour $-\sqrt{3}$ que pour 7. Ils sont ramenés à un développement du type double distributivité avec une expression numérique écrite à l'aide de radicaux ($(-2\sqrt{3}+3)(-\sqrt{3}+10)$), travaillé en classe dans la fiche 11, exercices 21,22 et la fiche 12, exercice 2, au total à partir de 9 expressions. Nous pouvons difficilement conclure ici sur une difficulté liée ou pas aux radicaux car le développement littéral demandé à la question 1, auquel les 2 élèves concernés ont échoué, présentait davantage de difficultés (une identité remarquable et surtout un signe négatif devant le second terme auquel appliquer la double distributivité). L'examen des copies ne permet pas d'affirmer si ces élèves auraient réussi le développement $(2x+3)(x+10)$ alors qu'ils ont échoué pour $(-2\sqrt{3}+3)(-\sqrt{3}+10)$. De plus, comme observé lors du contrôle, avant même de développer, il faut réécrire l'expression pour $x=-\sqrt{3}$ et être capable de passer de $(2x+3)(x+10)$ à $(-2\sqrt{3}+3)(-\sqrt{3}+10)$.

Or, Merv (copie 9) écrit « $(2x+3)(x+10)=(2-\sqrt{3}+3)(-\sqrt{3}+10)=(-1\sqrt{3})(-10\sqrt{3})=-11\sqrt{3}$ ». C'est donc bien cette étape de substitution qui lui pose dans un premier temps problème : on retrouve la confusion entre signe « plus » et « multiplié », et à l'intérieur, et entre les parenthèses, déjà observée lors du contrôle. Le même élève, pour $x=7$, a écrit « $(2x+3)(x+10)=(2x7+3)(7+10)=(14+3)(17)=17+17=34$ » : les calculs à l'intérieur des parenthèses sont ici bien gérés mais le signe implicite entre elles est faussement explicité par un « plus ». Comme nous l'avons observé lors de l'analyse du contrôle, les causes d'erreurs sont bien multiples, pas uniquement liées aux radicaux.

Quant à Fato (copie 8), elle écrit pour $x=7$ « $F=(2x7^2+3)(7^2+10)=(2x49+3)(49+10)$ » sans finir son calcul, et pour $x=\sqrt{3}$ (elle oublie le signe « moins ») « $F=(2x(\sqrt{3})^2+3)((\sqrt{3})^2+10)$ » et ne va pas au-delà. C'est donc encore à l'étape « substitution » que les difficultés surviennent : cette élève a substitué dans les deux cas non pas le nombre proposé mais son carré. On peut penser qu'elle a retenu que, pour des valeurs numériques s'écrivant avec des radicaux, il était plus simple en remplaçant d'avoir des carrés et qu'elle les a donc rajoutés, prolongeant son erreur également aux valeurs sans radicaux.

Ainsi, malgré leur échec à cette question, les deux élèves ayant choisi de travailler avec l'expression factorisée auraient peut-être réussi à développer et réduire $(-2\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+10)$. Ils n'ont pas réussi à se ramener à cette tâche, bien préparée en classe : c'est lors de l'étape de substitution qu'ils ont écrit leurs premières erreurs.

C'est donc le passage d'une écriture littérale à une écriture numérique (une fois les substitutions effectuées) qui poserait problème ici, les élèves ne sachant plus s'ils doivent calculer avec les règles du cadre numérique ou avec celles du cadre algébrique. Nous serons alors amenés à réfléchir au rôle des radicaux (sources ou révélateurs de difficultés ?) dans ce phénomène.

Tâche 3 (sur fond bleu dans le tableau général des résultats)

Cette tâche n'a pas été travaillée en classe pendant les sept séances consacrées aux radicaux que nous avons filmées. En tout début de chapitre, l'enseignante a seulement rappelé que c'est à cette occasion, au moment du chapitre traitant de la propriété de Pythagore, que les élèves ont rencontré pour la première fois, en quatrième, le symbole « $\sqrt{\quad}$ ». Il est probable, qu'en devoir maison, les élèves aient eu à la travailler, par exemple dans des exercices issus des sujets du brevet des collèges. Notons que les mêmes énoncés auraient pu être posés en quatrième, soit en choisissant des valeurs telles que le résultat soit un nombre décimal exact, soit en demandant un résultat approché à une précision donnée. Or, dans les deux exercices auxquels nous nous intéressons ici (extraits du contrôle et du brevet blanc), une valeur exacte est demandée et les nombres choisis obligent pour cela à écrire la réponse avec un radical. Ce sont donc les erreurs lors des étapes 3 et 4 (« passage de $AB^2=c$ (c positif) à $AB=\sqrt{c}$ » et « forme à donner au résultat ») de l'analyse a priori de la tâche 3 faite en 4-2-a que nous allons plus particulièrement étudier.

Contrôle ex 3 2) : recherche de la valeur exacte de l'hypoténuse dans un triangle rectangle :

Voici les résultats relevés :

Nombre d'élèves du g.A (sur 11 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 24 présents)

N'ont pas abordé l'exercice.	0	6	6
Ont réussi l'exercice.	11	1	12
N'ont pas obtenu le maximum des points	0	6	6

Regardons quelles ont été les erreurs commises (tableau commun aux erreurs du contrôle et du brevet blanc) :

	Contrôle (g.A_g.B), au total	Brevet blanc (g.A_g.B), au total
2 : donne une valeur approchée	(0_3).....3	(0_2).....2
3 : donne a à la place de $\sqrt{a}$	(0_3).....3	(1_0).....1
4 : seulement dans le problème : erreur liée à l'échelle (les valeurs numériques de la figure à l'échelle $\frac{1}{2}$ et non celles de l'énoncé sont utilisées)		(1_3).....4
5 : seulement dans le problème : la propriété de Pythagore est bien appliquée mais l'hypoténuse n'est pas identifiée		(0_3).....3
6 : un résultat faux est donné mais sans justification (valeur mesurée ?)	(0_0).....0	(0_1).....1

Les résultats de cet exercice sont très différents suivant les groupes : les élèves du g.A présents réussissent tous tandis qu'un seul dans le g.B donne le résultat attendu. Les autres se partagent équitablement entre « n'ont pas abordé l'exercice » et « n'ont pas obtenu le maximum des points ».

Essayons tout d'abord de comprendre les causes de ce fort taux de « non abordés » : il est peut-être lié aux adaptations « isoler une sous-figure dans la figure donnée » et « utiliser le codage » pour pouvoir appliquer la propriété de Pythagore. La figure donnée est une configuration classique de Thalès type « papillon », la question précédente a permis de conclure au parallélisme de deux droites mais il n'y a pas assez de données pour calculer la longueur demandée avec la propriété de Thalès. La reconnaissance des modalités d'application du théorème de Pythagore n'est ainsi pas évidente dans cet exercice.

Quant aux 6 élèves n'ayant pas obtenu le maximum des points, ils se partagent équitablement (voir tableau des erreurs ci-dessus) entre deux types de productions : l'une, codée « 2 », consiste à donner une valeur approchée décimale en place de la valeur exacte s'écrivant avec un radical ; l'autre, codée « 3 », se caractérise par l'écriture de a à la place de $\sqrt{a}$ comme résultat. Or, ces deux erreurs ont lieu dans les dernières étapes, 3 et 4, décrites en 4-2-a dans l'analyse a priori de la tâche 3, les seules faisant intervenir des connaissances sur les racines carrées. On peut ainsi penser que ce sont bien les radicaux qui sont ici sources d'erreurs :

- *Erreur codée « 2 »* : on peut penser que l'élève écrit ce qu'il lit sur l'écran de sa calculatrice par habitude : c'est ce qu'on lui demandait en quatrième. Il ne prête pas attention à la mention « valeur exacte » de la consigne ou ne la comprend pas et donne une valeur approchée. Cette question de distinction valeur exacte/approchée a été très peu travaillée en classe pendant les séances filmées. De plus, quand elle l'a été lors du remplissage des tableaux de la fiche d'introduction de la notion (paragraphe 1 de la leçon donnée en annexe), le professeur a choisi d'écrire les valeurs approchées au millième dans les cases correspondant à des nombres non décimaux. Ceci participe certainement au sens que donnent certains élèves à $\sqrt{5}$ par exemple : c'est une étape de calcul, une transformation, mais pas un résultat possible pour une longueur, ni même peut-être un nombre. On peut rapprocher ce phénomène de celui observé dans les cadres numérique et algébrique : là aussi, il est difficile de considérer $\sqrt{5}$ comme un nombre puisque les élèves travaillent avec presque comme ils le font avec des lettres en calcul algébrique. Rien donc dans l'enseignement proposé ne semble pouvoir aider les élèves à surmonter ce type de difficulté : la question des ensembles de nombres et de l'appartenance de $\sqrt{5}$ à un de ces ensembles n'est pas suffisamment traitée pour combler le « vide didactique » décrit par A.Bronner.
- *Erreur codée « 3 »* : il y a ici un problème pour passer de $ST^2=5$ à $ST=\sqrt{5}$
On lit dans les copies : « $ST^2=5$ donc $ST=\sqrt{5^2}=5$ ». On peut penser qu'il s'agit là d'une confusion entre « carré » et « racine carrée », peut-être due à une incompréhension de la définition donnée « en langue naturelle » de la racine carrée. Il est possible que les élèves se souviennent de la nécessité de « prendre la racine » mais, pour éviter un résultat avec un radical qui ne les satisfait pas, transforment la réalité mathématique pour trouver un entier.

Brevet blanc problème : recherche de la valeur exacte d'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle :

Voici les résultats relevés :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)

N'ont pas abordé l'exercice.	0	4	4
Ont réussi l'exercice.	11	2	13
N'ont pas obtenu le maximum des points.	2	7	9

Dans cette question, l'adaptation liée à la reconnaissance des modalités d'application de la propriété de Pythagore présente moins de difficultés : on a en effet en ce début de problème une seule figure décrite dans l'énoncé comme un triangle rectangle, avec le sommet de l'angle droit précisé. Peut-être est-ce pour cela que le nombre de « non abordé » dans le g.B baisse, alors même qu'on est dans le problème du brevet blanc et que le manque de temps inhérent à l'entraînement pour cette épreuve pourrait se faire sentir. Par contre, ce n'est plus la longueur de l'hypoténuse mais celle d'un des côtés de l'angle droit qui est recherchée : l'étape 2 décrite dans l'analyse a priori de la tâche 3 en 4-2-a est donc plus difficile : il faut isoler la longueur inconnue et donc utiliser des connaissances anciennes sur les égalités : cette étape mène ainsi probablement 3 élèves du g.B à l'erreur (codée « 5 » p.64 et dans le tableau récapitulant les résultats p.33). Il faut néanmoins rester prudent dans nos interprétations car 2 de ces 3 élèves n'avaient pas abordé l'exercice du contrôle et un avait fait un autre type d'erreur. En outre, juste avant cette question, une figure est demandée à l'échelle $\frac{1}{2}$: certains élèves (1 dans le g.A et 3 dans le g.B) prennent alors les moitiés des nombres donnés dans l'énoncé et gardent ces résultats pour faire leur calcul, commettant l'erreur codée « 4 ». Enfin, les erreurs codées « 2 » et « 3 » lors du contrôle sont toujours présentes : 2 élèves du g.B donnent une valeur approchée tandis qu'un élève du g.A confond a et $\sqrt{a}$. Là aussi, devant la répartition aléatoire de ces erreurs, il convient d'être prudent : les adaptations nécessaires pour réussir ces deux exercices sont en fait assez différentes et rendent difficiles les comparaisons de résultats pour un élève donné.

Notons enfin la possibilité de transformer le résultat obtenu $\sqrt{675}$ en $15\sqrt{3}$ (étapes 1 et 2 de la tâche 1) : alors que la forme du résultat souhaité n'était pas indiquée dans la consigne (qui demandait juste une valeur exacte), 2 élèves du g.A ont effectué cette transformation (codé « 1' » dans le tableau récapitulatif des résultats). Nous les avons signalés car il nous semble que c'est une des conséquences de la répétition en classe de la tâche 1 : pour ces élèves, mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ fait maintenant partie du contrat, c'est devenu un réflexe.

Exercices indépendants des tâches 1, 2 et 3 :

Contrôle ex3 3) mélange avec la connaissance ancienne « théorème de Thalès » :

Voici les résultats relevés :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 11 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 24 présents)
N'ont pas abordé l'exercice.	1	8	9
Ont réussi l'exercice.	6	0	6
N'ont pas obtenu le maximum des points.	4	5	9

Cet exercice se caractérise par une forte proportion d'échecs et de « non abordés » : seuls 6 élèves, soit le quart de la classe, parviennent au résultat attendu. Lors des analyses a priori des tâches proposées en évaluation, nous avons souligné la difficulté des adaptations nécessaires ici pour réussir, et ceci alors même qu'aucune connaissance nouvelle sur les racines carrées n'est en jeu. Il s'agit d'appliquer la propriété de Thalès dans une configuration classique, après utilisation de la question 1 dans laquelle le parallélisme a été prouvé. Jusqu'ici, c'est un énoncé classique sur la configuration de Thalès vue en troisième. Cependant, une valeur exacte est demandée (c'est souligné dans la consigne). Et elle ne peut être trouvée qu'en remplaçant dans l'égalité obtenue la longueur ST par sa valeur exacte. Deux problèmes se posent alors : dans la question 3), qui demande de calculer ST, le résultat n'est pas donné. Or, 3 élèves avaient déjà, on l'a vu, donné une valeur approchée de ST et 9 n'avaient soit rien trouvé, soit écrit un résultat faux. Ceux-là ne parviendront dans le meilleur des cas, en écrivant des calculs justes, qu'à donner aussi une valeur approchée de MN. En outre, les 12 élèves restant (soit la moitié des présents ce jour là) devront remplacer ST par $\sqrt{5}$ dans leur égalité de quotients et calculer ensuite avec cette valeur inhabituelle jusqu'à obtenir MN : seule la moitié d'entre eux, tous dans le g.A, y parviendront.

Regardons plus en détail les erreurs page suivante :

	(g.A_g.B) sur (4_5) élèves concernés.	Nombre total d'élèves sur 9 élèves concernés.
Code « 2 » : utilisent la propriété de Thalès mais n'aboutissent à aucun résultat (soit ne remplacent aucune longueur par sa valeur numérique, soit les remplacent toutes sauf ST)	(1_2)	3
Code « 4 » : pensent à utiliser la propriété de Thalès, remplacent mais obtiennent un résultat faux, approché ou non.	(1_1)	2
Code « 6 » : n'appliquent pas la propriété de Thalès dont : essaient avec celle de Pythagore essaient avec les relations trigonométriques	(2_2) dont :	4 dont :
	(1_2)	3
	(1_0)	1

Commentons plus en détail chaque erreur identifiée :

- *Erreur codée « 2 »* : Ces 3 élèves échouent lors de la phase dans laquelle on remplace les longueurs connues par leur valeur numérique. 2 parmi eux remplacent TM et RS (données de la figure, soit directement, soit grâce à un codage) mais laissent ST alors même qu'ils avaient trouvé sa valeur exacte $\sqrt{5}$ dans la question précédente : tout se passe comme si $\sqrt{5}$ n'était « pas assez » un nombre pour qu'on puisse le substituer puis calculer avec. Si une valeur décimale de ST avait été trouvée, il est probable que ces élèves auraient terminé leurs calculs. Là, ils sont conscients du problème de la « valeur exacte », puisqu'ils ne remplacent pas par une valeur approchée, mais restent bloqués à ce stade, comme s'il leur manquait une donnée.

- *Erreur codée « 4 »* : 2 élèves ne parviennent pas à résoudre l'équation « $\frac{MN}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ». Leurs erreurs peuvent venir d'un manque de connaissances sur les équations du type « $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$ » ou de la gêne occasionnée par la présence de $\sqrt{5}$ dans ce genre de calculs : il s'agirait dans ce cas de

difficultés liées à l'adaptation « fausse A1 » décrite en 3-2, les élèves n'étant pas capables de reproduire une résolution d'équation connue si des radicaux interviennent.

- *Erreur codée « 6 »* : 4 élèves n'utilisent pas la propriété de Thalès : 3 essaient avec celle de Pythagore, comme à la question précédente (mais ne parviennent pas au résultat car il manque la donnée numérique de TN), 1 essaie avec les relations trigonométriques (il utilise les angles alternes/internes mais se trompe sur l'angle intermédiaire trouvé donc se trompe aussi lorsqu'il utilise une valeur connue du cosinus ; sa production est cependant très intéressante). Ces élèves ont tous choisi de travailler avec des propriétés s'appliquant dans le triangle rectangle TNM, peut-être par analogie avec la question précédente : les modalités d'application sont correctement reconnues mais il est impossible de parvenir au résultat exact par ces voies. On peut penser que Pythagore reste pour eux LE théorème de géométrie associée aux radicaux : ils n'ont jamais en classe, à notre connaissance, utilisé les racines carrées dans la mise en fonctionnement de la propriété de Thalès.

Ainsi, avec des nombres s'écrivant avec des radicaux, appliquer la propriété de Thalès semble plus difficile qu'appliquer celle de Pythagore. Ceci ne nous surprend pas et peut s'expliquer par l'habitude d'associer en classe deux connaissances : tant au moment, en quatrième, de la première rencontre avec les racines carrées, qu'après dans les problèmes « classiques » des annales du brevet des collèges, c'est le théorème de Pythagore, pas celui de Thalès, qui est classiquement associé au travail avec des radicaux. Ceci nous laisse penser que la proximité, du point de vue des contenus, avec ce qui est fait en classe est ici un facteur de - relative- réussite. Ce résultat nous intéresse car il apporte des éléments de réponse à certaines des questions posées au début de ce travail.

brevet blanc partie numérique exercice 1 2) : développer $(5 + \sqrt{5})^2$

Voici les résultats relevés :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents)	Nombres d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)
N'ont pas abordé la question.	0	2	2
Ont réussi.	12	3	15
Ont échoué.	1	8	9

Regardons quelles ont été les erreurs commises :

	(g.A_g.B) sur (13_13) présents.	Nombre total d'élèves (sur 26 présents).
Codé 3 : $(5 + \sqrt{5})^2 = 5^2 + \sqrt{5^2} = 25 + 5 = 30$	(1_1)	2
Codé 4 : $(5 + \sqrt{5})^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times \sqrt{5} + \sqrt{5^2} = 20 + 10\sqrt{5} + 5 = 25 + 10\sqrt{5} + 5 = 40\sqrt{5}$	(0_2)	2
Codé 5 : identité remarquable appliquée ou retour à la définition du carré mais erreur de calcul	(0_3)	3
Codé 6 : aucune trace d'utilisation d'une identité remarquable ni d'un retour à la définition du carré (hors erreur codée 3).	(0_2)	2

Comparons avec les tâches proposées en classe :

Les développements à partir d'expressions s'écrivant avec des radicaux ont été travaillés à maintes reprises en classe : dans la fiche 11, exercices 16 à 24 et la fiche 12, exercices 2 et 3. Parmi les 50 expressions proposées, 38 utilisent une identité remarquable dont 13 la première, c'est-à-dire celle à utiliser ici. L'expression proposée au brevet blanc fait partie de celles demandant le moins d'adaptations : un seul des termes s'écrit avec un radical, ce qui évite d'avoir à mettre en fonctionnement P2 dans le double produit, et ce radical n'est précédé d'aucun coefficient, ce qui minimise les risques d'erreurs quand on l'élève au carré. On peut par exemple la rapprocher du e) de l'exercice 2 de la fiche 12 : $(\sqrt{5}+3)^2$ et il y en a 3 autres exactement du même type au sein des fiches 11 et 12. Ainsi, cet exercice a été répété, dans des cas similaires et des cas plus difficiles, et pourtant 9 élèves échouent et 2 n'abordent pas l'exercice.

Parmi eux, un seul élève du g.A, Luci (copie 11) échoue avec l'erreur codée 3 : elle égale le carré de la somme à la somme des carrés. Pourtant, le tableau récapitulatif montre qu'elle sait, dans un cadre littéral, appliquer cette identité remarquable puisqu'elle réussit les développements y faisant appel. Ce serait ainsi la présence des radicaux, et donc le fait de prolonger la validité de cette identité remarquable à ces nombres, qui poserait problème ici. C'est la même élève qui, quand elle utilise l'expression factorisée pour substituer $-\sqrt{3}$ dans l'exercice 2 de ce brevet blanc, explicite un signe « plus » au lieu d'un « fois » entre les deux facteurs entre parenthèses, erreur qu'elle ne fait pas si les facteurs sont des expressions littérales ou des nombres entiers. Ceci semble aller dans le sens de ce que nous avons

conjecturé alors : cette élève a des difficultés avec l'adaptation « fausse A1 », qui permet de prolonger les règles et conventions vues avant aux « nouveaux nombres » s'écrivant avec des radicaux. Comme nous l'avions suggéré, il faudrait observer ce qu'elle fait avec des nombres irrationnels mais ne s'écrivant pas avec des radicaux (par exemple π) pour conclure ou non au rôle des racines carrées dans les difficultés qu'elle rencontre ; il s'agit peut-être d'un problème plus vaste de représentation des ensembles de nombres, peu étudiés on l'a dit en collège (on peut se référer ici au « vide didactique » décrit par A.Bronner, dont nous avons décrit les caractéristiques dans la partie 2 consacrée à la notion « racine carrée » et à son enseignement).

Quant aux élèves du g.B, ils sont nombreux à échouer à cet exercice pourtant on l'a dit abondamment préparé en classe. Une explication possible peut se trouver dans l'éloignement dans le temps entre le chapitre consacré aux radicaux et le brevet blanc. En outre, parmi les 8 qui ont échoué, certains auraient probablement échoué aussi s'il s'était agi de développer $(x+5)^2$ mais, les développements littéraux proposés dans les évaluations étant tous plus difficiles, nous ne pouvons avoir aucune certitude. Restent les 3 élèves dont on a répertorié les erreurs, « classiques » : un qui, comme Lucie dans le g.A, a écrit $(5+\sqrt{5})^2=30$. Lui aussi a réussi les développements littéraux proposés donc nous pouvons interpréter son erreur de la même façon. Les 2 autres ont bien appliqué la première identité remarquable mais c'est dans la réduction de leur résultat qu'ils ont échoué. Eux aussi ont pourtant réussi le développement de l'exercice 2 comportant $(2x+3)^2$: il semble donc que ce soit là encore la manifestation du phénomène dû à l'adaptation « fausse A1 » décrit précédemment. Ces élèves ne parviennent pas à calculer avec des radicaux, en dehors éventuellement de la tâche 1 qu'ils sont capables d'effectuer de façon mécanique. Ils n'auraient pas écrit $25x^2 + 10x + 5=35x$ (les colonnes grisées du tableau l'attestent) mais écrivent $25 + 10\sqrt{5} + 5=35\sqrt{5}$. Tout se passe comme si ces élèves n'avaient pas intégré la règle implicite « je calcule avec les racines carrées presque comme avec les x , je ne mélange pas les termes avec et les termes sans », formulée souvent par les collégiens quand on les interroge sur leurs méthodes. Ceci pose évidemment encore la question de la nature de $\sqrt{5}$: c'est un nombre mais pour réussir à calculer avec, il faut emprunter les règles habituellement utilisées en calcul littéral !

Brevet blanc partie 2 exercice 2 2) : calcul d'une distance dans un repère orthonormé :

Voici les résultats relevés :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents)	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents)	Nombre total d'élèves (sur 26 présents)
N'ont pas abordé l'exercice.	0	8	8

Ont réussi l'exercice.	10	2	12
Ont échoué.	3	3	6

Regardons plus précisément les erreurs commises :

	(g.A_g.B) sur (13_13) présents.	Nombre total d'élèves (sur 26 présents).
Codé 4 : formule de calcul de distance dans un repère orthonormé fausse.	(1_2)	3
Codé 5 : essai d'utiliser la propriété de Pythagore avec des longueurs « intuitées » alors qu'on ne sait pas si le triangle est rectangle.	(2_0)	2
Codé 6 : bonne formule mais erreur(s) de calcul sans lien apparent avec les racines carrées.	(0_1)	1

Nous n'avons fait aucune analyse détaillée pour cet exercice puisqu'aucune des erreurs commises n'a apparemment de lien direct avec les racines carrées. Nous pouvons juste dire que la différence entre résultats des élèves du g.A et du g.B est encore bien là.

Brevet blanc partie 2 exercice 2 3) : application de la réciproque de la propriété de Pythagore avec des longueurs s'écrivant avec des radicaux :

Voici les résultats relevés :

	Nombre d'élèves du g.A (sur 13 présents).	Nombre d'élèves du g.B (sur 13 présents).	Nombre total d'élèves (sur 26 présents).
N'ont pas abordé l'exercice.	1	11	12
Ont réussi l'exercice.	12	0	12
N'ont pas obtenu le maximum des points	0	2	2

Cet exercice est marqué par un taux exceptionnellement haut de « non abordés » dans le g.B. Peut-être est-ce dû au stress et au manque de temps lors du brevet blanc. Nous étions curieux de voir comment les élèves géraient les calculs du type $(a\sqrt{b})^2 = a^2b$: nous savons juste que 12 réussissent mais n'avons aucun moyen ici de savoir pourquoi les 12 autres échouent (les 3 erreurs relevées ne viennent pas de ce calcul).

Regardons quelles ont été les trois erreurs commises :

	(g.A_g.B) sur (0_3) élèves concernés.	Nombre total d'élèves (sur 3 élèves concernés).
Codé 4 : Valeurs numériques mesurées pour appliquer la réciproque de la propriété de Pythagore.	(0_1)	1
Codé 6 : bonne formule mais erreur(s) de calcul sans lien apparent avec les racines carrées	(0_2)	2

Il faudrait pouvoir comparer ces résultats (et surtout le nombre de « non abordé ») avec ceux d'un énoncé similaire dans lequel la réciproque de la propriété de Pythagore permettrait de conclure, mais avec des nombres s'écrivant sans radicaux : n'ayant pas cette possibilité, il paraît difficile de poursuivre pour cet exercice nos analyses.

5 Conclusion

Revenons maintenant à notre problématique initiale sur les liens entre enseignement et apprentissages et essayons de rassembler les éléments de réponse apportés par nos analyses à chacune des questions que nous nous étions posés dans l'introduction.

Nous pouvons désormais affirmer que les tâches proposées en classe et les déroulements associés ont une influence sur les résultats des élèves aux évaluations, et donc sur leurs apprentissages (via « l'approximation » décidée au préalable). Essayons de décrire ce lien le plus précisément possible, en considérant successivement la nature, la difficulté et la fréquence des adaptations travaillées en classe par rapport à celles demandées en devoir.

Commençons par nous intéresser à l'influence de la *nature des adaptations* proposées. Nous pouvons dire, de façon globale et un peu simpliste, que, oui, les élèves réussissent ce qu'ils ont travaillé en classe : ainsi, les transformations d'expressions sous la forme $a\sqrt{b}$ (que nous avons regroupées sous la dénomination « tâche 1 ») et, dans une moindre mesure, les substitutions de $\pm \sqrt{a}$ dans des écritures littérales (regroupées sous la dénomination « tâche 2 »), atteignent des taux de réussite tout à fait honorables. Néanmoins, il nous faut très vite nuancer ce propos : les élèves réussissent en évaluation si les énoncés proposés sont exactement semblables à ceux qu'ils ont déjà traités, avec des niveaux de mises en fonctionnement identiques. Et certains des exercices de l'interrogation ont ainsi donné des résultats mitigés : quand la tâche 1 intervient en tant qu'outil de résolution et n'est plus objet de l'exercice, ou quand les expressions proposées dans les consignes ne sont pas exactement du type de celles travaillées en classe (à cause de la présence d'un trait de fraction, d'un des termes des sommes algébriques habituelles écrit sous la forme d'un produit ou d'un résultat qui ne s'écrit pas $a\sqrt{b}$ par exemple), certains élèves ont des difficultés.

Regardons maintenant les résultats que nous avons obtenus en rapport avec la *difficulté des adaptations* proposées. Pour l'application d'une même propriété, un niveau de mise en fonctionnement plus élevé en évaluation qu'en classe est assez naturellement source d'échec : il est difficile pour les élèves de surmonter la difficulté accrue. De façon plus étonnante, travailler une adaptation considérée difficile en classe ne garantit pas du tout que les élèves parviendront à le refaire en contrôle : ainsi, et même si ce n'est pas arrivé très souvent, les élèves ont transformé en classe des expressions autrement que sous la forme $a\sqrt{b}$ ($a+b\sqrt{c}$ ou $a+b\sqrt{c}+d\sqrt{e}$ par exemple) mais très peu y arrivent quand c'est nécessaire dans les exercices 4 et 5 de l'interrogation. Nous devons toutefois rester prudents : il est en effet difficile de savoir si c'est la fréquence importante des résultats de la forme « $a\sqrt{b}$ » dans ce qui a été travaillé, ou bien le surcroît de difficulté pour transformer les expressions ne donnant pas un résultat de

cette forme, qui explique dans ce cas les taux d'échec élevés. Il est probable que les deux y participent. En outre, en ce qui concerne la tâche 2, la difficulté de l'adaptation « choix de l'expression la plus appropriée pour substituer » est partiellement surmontée au contrôle tandis que celle liée à la gestion d'un calcul numérique avec des radicaux ne l'est pas. Nous ferons ultérieurement le point sur la part de responsabilité du mélange avec certaines connaissances anciennes dans les échecs des élèves.

Rassemblons enfin nos conclusions liées à la *fréquence des adaptations* proposées. Nous pouvons également maintenant faire l'hypothèse que la répétition d'une même tâche en classe accroît encore la réussite lors des évaluations, toujours à la condition que la tâche proposée nécessite les mêmes adaptations. Dans le cas contraire, si les niveaux de mise en fonctionnement varient, avoir répété la tâche à de nombreuses reprises n'est d'aucun recours pour surmonter les difficultés posées par les nouvelles adaptations nécessaires. Et il arrive même que l'effet inverse se produise et que les répétitions, en plus d'être inefficaces, soient nuisibles à la réussite de certains exercices. Ainsi, certaines productions d'élèves laissent penser que la répétition de la tâche 1 en classe a pu être un obstacle à la réussite en devoir. Les élèves, conditionnés par le contrat entre eux et l'enseignante, contrat implicite mais très fort qui demande d'écrire toute expression avec des radicaux sous la forme $a\sqrt{b}$, sont désarçonnés quand cette transformation s'avère impossible. Ils ne parviennent pas à se détacher des habitudes prises et leurs tentatives de décomposition sous les radicaux (avec la présentation en deux colonnes vue dans la leçon associée) attestent de leur volonté de se ramener au cas qu'ils ont tant de fois traité. Quelques élèves du g.A cependant, en minorité, surmontent alors ce réflexe et réussissent. La majorité d'entre eux laissent leur réponse inachevée, réalisant le caractère impossible de leur démarche mais n'arrivant pas, la plupart du temps, à envisager une autre. Les élèves du g.B, eux, sont souvent amenés à écrire des assertions fausses : ils font davantage confiance pour valider leur réponse aux habitudes prises qu'aux mathématiques et « s'arrangent » pour parvenir à un résultat qui leur convienne. Tout se passe ainsi comme si, pour appartenir au g.A et mieux encore réussir à adapter les connaissances différemment d'en classe, il fallait paradoxalement pouvoir « oublier » les méthodes apprises en classe, garder l'esprit ouvert aux initiatives, faire preuve d'une capacité d'anticipation des calculs. Or, ces conditions paraissent difficilement compatibles avec l'application systématique d'une démarche dont les étapes sont à l'avance figées et n'ont pas ou peu été justifiées.

Nous nous étions également demandé quel était le rôle du facteur temps dans l'acquisition des connaissances. Au regard de nos analyses, il n'y a pas d'évolution majeure sur le court, moyen ou long terme : ceux qui réussissaient/échouaient à court terme réussissent/échouent encore à moyen et à long terme. Cependant, nous avons observé au cours de notre étude quelques phénomènes particuliers intéressants. Si les erreurs persistent, leurs causes évoluent, elles, au cours du temps : d'erreurs identifiées spécifiques dans la mise en fonctionnement des connaissances nouvelles à court terme, on passe à moyen et surtout à long terme, à une grande proportion d'abstention (ou, dans une moindre proportion, à des erreurs plus difficilement identifiables). Certains élèves n'essaient même plus : soit ils savent « en

automate », soit non. Bien que nous n'ayons pas accès à leurs brouillons, il semblerait que la phase de recherche soit très réduite voire inexistante. Or, nous l'avons souligné à plusieurs reprises dans cette étude, les interventions de l'enseignante visent, en partie au moins, à rassurer les élèves : elle propose en effet, en particulier pour la première étape de la tâche 1, d'effectuer des transformations avec lesquelles on est sûr d'arriver au résultat souhaité. Elle décourage donc de fait les démarches du type « essais/erreurs », les initiatives permettant d'arriver plus vite ou de façon plus astucieuse au même résultat. Il semble raisonnable de faire alors l'hypothèse d'un lien entre l'automatisation systématique recherchée des tâches, reposant au moins autant sur la mémoire que sur une réelle compréhension des étapes, et l'évolution constatée à long terme vers un nombre croissant d'erreurs et de questions non abordées. Ainsi, pour la tâche 1, les élèves du g.B progressent entre l'interrogation et le contrôle, très proche dans le temps de ce qui a été fait en classe, mais obtiennent de moins bons résultats lors du brevet blanc, alors que les adaptations y sont clairement plus simples (Cela nous amène à nous poser une nouvelle question : si une connaissance semblait acquise à un moment donnée mais ne l'est plus deux mois plus tard, qu'a-t-on approché grâce au contrôle : les apprentissages ou les qualités de mémorisation à court terme des élèves ?). Nous pouvons peut-être parler ici de « connaissances fragiles », de « pré-connaissances » ou encore d'« apprentissages transitoires » qu'il faudrait « transformer », à la manière d'un essai au rugby, pour qu'elles trouvent leur place, consolidées, dans un réseau plus large de connaissances. Pour cela, on peut imaginer qu'il faudrait par exemple ne pas restreindre les exercices sur les racines carrées à des techniques, proposer des énoncés autres, des discours peut-être différents, en liaison avec la « zone proximale de développement » de chaque élève. Les résultats que nous obtenons laissent en tout cas penser que le découpage, le caractère isolé et la répétition des tâches proposées en classe favorisent la perte des « connaissances fragiles » évoquées : elles ne sont accrochées à rien et, à long terme, ne peuvent se transformer en connaissances. Cette interprétation peut participer à expliquer le phénomène de régression dans le temps constaté pour certains élèves du g.B. Evitons cependant de généraliser ce résultat à toutes les adaptations travaillées : pour une des adaptations proposées, le temps semble en effet avoir joué un rôle favorable. Il s'agit du choix de l'expression développée pour substituer un nombre s'écrivant avec un radical dans une écriture littérale : sur ce point précis, les élèves du g.B ont réellement progressé, et pourtant, ils ne réussissent toujours pas l'exercice associé, car ils ne parviennent pas à gérer la suite des calculs.

Cette dernière remarque nous mène naturellement à examiner le rôle des connaissances anciennes dans les réussites et échecs constatés. En raison des analyses qui précèdent, nous allons en particulier faire le point sur la question des ensembles de nombres et celle du calcul algébrique.

Nous avons évoqué, dans la partie 2 consacrée à la notion « racine carrée » et son enseignement, le statut particulier des nombres s'écrivant avec un radical. Le symbole $\sqrt{\quad}$, tel qu'il a été vu en quatrième sur la calculatrice, privilégie l'aspect transformation (on prend la racine carrée d'un nombre). Et cette première approche peut inciter les élèves à considérer qu'un nombre s'écrivant avec un radical n'est pas un résultat mais plutôt une étape dans une

suite de transformations d'écritures. Dans ce que nous avons observé, ceci ne semble pas faire obstacle à la réussite des exercices présentés dans le cadre numérique. Par contre, dans le cadre géométrique, des difficultés apparaissent : problème pour donner une longueur de segment avec un radical, questions liées aux valeurs exactes ou approchées à utiliser dans les calculs intermédiaires pour avoir un résultat final exact, attestent des difficultés à considérer $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{2}$, par exemple, comme des nombres « comme les autres ». Et rien dans les programmes n'est véritablement proposé pour remédier à cela. De plus, dans la gestion des calculs, les élèves travaillent avec les racines carrées presque comme ils avaient l'habitude de le faire jusque là avec les « x » : on peut faire l'hypothèse que ceci n'aide pas les à considérer comme des nombres.

On en vient alors à la question, largement décrite dans nos analyses, du jeu implicite entre cadre numérique et cadre algébrique : ce sont les connaissances anciennes apprises dans un cadre algébrique, souvent dans les chapitres traitant du calcul littéral, qu'il faut utiliser ici pour calculer correctement avec les racines carrées. Nous avons qualifié dans notre étude le cadre associé de « pseudo-algébrique » (pas de lettres mais une gestion des calculs comme s'il y en avait). Cependant, ce ne sont pas strictement des connaissances anciennes puisqu'elles ont été vues pour des nombres autres que les racines carrées : il faut donc prolonger à cette nouvelle catégorie de nombres s'écrivant avec des radicaux, non identifiée précisément, les conventions, le formalisme algébrique, la distributivité de l'addition sur la multiplication, la commutativité et l'associativité de ces opérations, les identités remarquables... Néanmoins, ce problème, identifié dès le départ comme obstacle à la justification mathématiquement correcte des propriétés liées au produit et au quotient des racines carrées et même au tout début de la définition, ne nous en semblait pas vraiment un du point de vue des élèves. Suite à nos analyses, nous avons moins de certitudes. C'est en effet quand il faut faire face à cette adaptation, que nous avons appelé « fausse A1 », que les erreurs sont les plus nombreuses : en particulier, la ré-explicitation du signe « fois » supprimé est source de nombreuses difficultés. Les copies attestent, dans les calculs avec les radicaux, de confusions fréquentes entre addition et multiplication. Cependant, même si elles sont moins nombreuses, ces difficultés persistent si on demande dans le même exercice (essentiellement ceux dans lesquels la tâche 2 est proposée) à ces élèves de travailler avec des nombres sans radical. Ce sont ces observations qui nous poussent à qualifier la notion « racine carrée » davantage de « révélatrice de difficultés » que de « créatrice de difficultés ». Le problème se situerait à une échelle plus grande, dans le jeu permanent mais implicite entre cadre numérique et algébrique au sein duquel on fait travailler les élèves au collège.

Il nous reste à conclure sur les éléments de différenciation mis en évidence par nos analyses. Nous avons différencié les résultats en créant les g.A et B, observé une stabilité étonnante des résultats de ces groupes dans le temps, peut-être liée, nous l'avons dit, à certaines caractéristiques de l'enseignement proposé (pas d'aide constructive pour le mélange avec les connaissances anciennes par exemple). Nous avons aussi dégagé un lien entre la nature et la difficulté des adaptations et les résultats au sein de chaque groupe : moins ces adaptations ont été travaillées en classe (ou plus elles sont difficiles), plus les différences se

creusent entre les groupes. Nous avons de plus caractérisé grâce aux copies des comportements propres à chaque groupe : laisser inabouti (g.A) ou écrire des choses fausses (g.B), prendre des initiatives (g.A) ou chercher à se ramener à tout prix à un automatisme (g.B). Nous avons enfin mis en relation ces différences de comportement avec le rapport au savoir des élèves. Les élèves du g.B, nous l'avons noté à plusieurs reprises dans nos analyses, font souvent des erreurs du type « la fin justifie les moyens » : leur rapport au savoir semble moins lié à des apprentissages qu'à des productions de résultats. Pour ces élèves-là, le caractère parfois négatif des répétitions, évoqué page 75, serait alors renforcé.

Nous devons cependant faire attention : nous avons cherché dans ce travail à établir des liens entre les résultats et les activités possibles des élèves. Or, nous disposons des données nécessaires pour différencier les résultats (et nous l'avons fait) mais nous n'avons pas assez d'informations pour différencier les activités (en particulier, rappelons le, les activités à la maison). Nous pouvons tenter des conjectures sur des rapprochements possibles entre ce qu'ont pu faire/dire/penser (ou pas) les élèves des groupes A et B et les réussites ou échecs au sein de chacun de ces groupes mais il nous est difficile de donner sur ce point des résultats. Ceci nous amène à envisager les limites de notre recherche.

6 limites et perspectives

6-1 limites (et déjà quelques perspectives de travail proposées)

6-1-a Limites liées à ce que nous n'avons pas analysé

Parmi les données que nous avons recueillies, nous n'avons pas tout analysé. Par exemple, nous n'avons pas transcrit les vidéos réalisées : nous n'avons donc pas étudié de façon analytique les discours de l'enseignante, les interactions professeur/élèves et les indicateurs langagiers correspondants.

Il existe aussi des données relatives à la classe de troisième observée que nous n'avons pas recueillies (par choix nécessaire de restreindre notre étude, par manque de temps, parce que c'était difficile matériellement...). Ainsi, nous n'avons pas regardé les évaluations « devoir maison » dans lesquelles intervient la notion « racine carrée » : peut-être des adaptations non travaillées en classe y étaient-elles abordées. Cela pourrait alors expliquer en partie les différences importantes de performance entre les élèves le jour des évaluations en classe (mais cette analyse aussi aurait eu ses limites : sont-ils bons parce qu'ils travaillent à la maison ou y travaillent-ils car ils sont bons ?). En outre, pour apporter des réponses aux questions concernant les facteurs de différenciation, il aurait fallu analyser les activités possibles de façon individuelle, élève par élève, ce qui aurait demandé d'autres données : des points de vue différents pour les vidéos, des entretiens en tête à tête avec les élèves par exemple. Nous n'avons pas non plus pris en compte ce qui se passe (ou pas) à la maison, hors évaluation notée : le temps que les élèves passent à faire leurs exercices ou apprendre leurs leçons, la façon dont ils révisent en vue d'un contrôle... Il pourrait être ainsi intéressant d'étudier les relations entre les activités possibles des élèves en classe, reconstituées grâce aux tâches et aux déroulements, et la forme de travail personnel à la maison, accompagné ou non, des élèves de cette classe. En particulier, nous n'avons que très peu d'informations - et nous ne les avons pas utilisées dans ce travail - sur le type d'aide éventuellement apporté à l'élève en dehors de la classe (aide de l'entourage proche ou même cours particuliers), susceptible d'avoir une influence sur les apprentissages.

Enfin, nous avons observé UN professeur, UNE année, dans UNE classe et sur UN chapitre : notre travail peut certes alimenter des analyses étudiant elles aussi les relations entre enseignement et apprentissages mais il reste partiel. Les conclusions obtenues ne sont que des contributions nouvelles, apportées à un faisceau d'hypothèses déjà émises lors de travaux du même type. Il faudrait s'engager dans une étude d'une toute autre envergure (plusieurs classes avec des professeurs différents sur plusieurs années) pour nous permettre éventuellement un accès à un plus grand niveau de généralité.

6-1-b limites au sein même de notre analyse

Si l'« approximation » de l'enseignement proposé par les tâches et les déroulements, via la reconstitution des activités possibles des élèves, apparaît satisfaisante au sein du cadre théorique choisi, l'« approximation » des apprentissages par la réussite aux devoirs en classe pose elle davantage problème, et ce pour plusieurs raisons :

D'une part, nous n'avons pas choisi les textes de ces devoirs donc nous n'avons pas non plus choisi ni la difficulté, ni la diversité des adaptations associées. Nous aurions pu faire passer une évaluation supplémentaire aux élèves, dont nous aurions construit les consignes sur le modèle des tests proposés dans le dossier bleu sur « racine carrée », pour tester plus exactement le niveau de mise en fonctionnement atteint des connaissances concernant les radicaux.

D'autre part, et même si nous avons fait passer ce test supplémentaire, réussir à un devoir en classe ne signifie pas forcément avoir appris. Quand il y a échec, les erreurs trouvées font ici penser que les contrôles sont assez informatifs. Mais quand un élève réussit ? A-t-il appris ?, à long terme ?, à court terme ? si oui, qu'a-t-il appris ? Quels liens établir entre la capacité à reproduire un automatisme, avec des adaptations éventuelles, et ce que nous avons choisi d'appeler apprentissages, composés certes d'une part de savoir-faire, mais aussi accompagnés d'une certaine conceptualisation de la notion étudiée ? Ces questions sont étroitement liées à la notion « racine carrée » choisie : le problème posé en introduction d'un juste équilibre entre travail du sens et de la technique n'est toujours pas résolu et les textes officiels sont insuffisants pour répondre à la question à laquelle nous revenons toujours : quel est le degré de conceptualisation associé à la notion « racine carrée » qu'il est souhaitable d'atteindre en fin de collège ?

6-2 alternatives et perspectives

6-2-a alternatives

L'enseignante est ici clairement animée d'un souci d'efficacité : elle nous a d'ailleurs expliqué vouloir faire en sorte que la majorité de ses élèves réussissent des exercices dits « classiques » de troisième. Cependant, rappelons les contraintes auxquelles elle doit faire face : la préparation au brevet des collèges, les orientations très différentes (voie générale, technique, professionnelle) envisagées par les élèves de la classe (et donc la forme à donner à une préparation éventuelle à une classe de seconde de lycée général), la pression du temps et des programmes (on ne peut guère envisager de passer plus de sept séances sur la notion « racine carrée » en troisième) rendent difficile l'organisation d'un enseignement favorable à tous.

Nous pouvons tout de même proposer des alternatives pour travailler avec les radicaux en troisième au sein des programmes existants : activités d'introduction, justification des propriétés et des méthodes, variété des adaptations proposées... De nombreuses pistes sont données dans le dossier sur « racine carrée » à l'usage des formateurs. Devant les difficultés rencontrées pour prolonger des règles et conventions connues, nous pourrions envisager de dire aux élèves quelque chose comme « nous allons faire avec les racines carrées ce que nous avons l'habitude de faire avec les nombres avec lesquels nous avons travaillé jusqu'alors », et d'explicitier au moins une fois chaque règle ou convention ancienne utilisée avec les racines carrées.

Nous pouvons également nous poser la question des possibilités offertes par des textes officiels un peu différents. Nous attendons donc avec impatience les nouveaux programmes de troisième qui entreront en vigueur à la rentrée 2008 pour observer les modifications éventuelles. En particulier, permettront-ils de rétablir une transposition didactique satisfaisante entre savoir savant et savoir enseigné ? Aideront-ils à combler le vide didactique institutionnel décrit par A.Bronner ? Permettront-ils aux professeurs, sans être « hors programme », de consacrer une partie du temps d'enseignement aux différents ensembles de nombres ?

6-2-b perspectives

Plusieurs pistes de recherche, parfois déjà évoquées au fil de nos analyses, peuvent être envisagées pour poursuivre ce travail.

Les questions liées à la calculatrice, éventuellement aux logiciels, n'ont été que très peu prises en compte dans notre étude : nous pourrions nous demander dans quelle mesure leur usage serait susceptible d'aider à donner un statut aux nombres s'écrivant avec des radicaux. Cela pourrait alors questionner tous les résultats énoncés dans la conclusion.

En préparant ce travail, nous avons également souvent eu envie d'étudier comment les cours portant sur les radicaux se passaient « avant » (du point de vue des contenus, des déroulements associés et des apprentissages obtenus), avec les anciens programmes dont nous avons parlé dans le paragraphe 2 consacré à la notion « racine carrée » et son enseignement. Dans la pratique, cela apparaîtrait néanmoins difficile.

On l'a évoqué en décrivant les limites de notre travail, cette étude n'a concerné qu'un seul enseignant. Or, la notion traitée « racine carrée », du fait du peu de précisions apportées par les textes officiels actuels, offre une grande marge de manœuvre aux professeurs. Il serait par

conséquent intéressant de regarder les choix de contenus faits par d'autres et de comparer les apprentissages obtenus via l'analyse des résultats des évaluations. Nous pourrions également tenter de déterminer les effets d'une organisation différente du travail dans la classe, avec un choix identique de contenus, en nous demandant en quoi, par exemple, varier les formes de travail en classe, favoriser les interactions entre élèves modifierait les apprentissages. Cependant, nous ne pourrions trouver un profil de classe exactement similaire et notre travail éventuel aurait donc lui-aussi des limites.

Ce sont les informations et les résultats sur le travail personnel des élèves qui nous ont le plus manqué dans cette étude. Logiquement, nous aurions donc envie d'analyser cet intermédiaire dont nous n'avons pas pu tenir compte : dans quelle mesure l'enseignement proposé influence-t-il le travail personnel ? Quelle est la nature exacte des liens entre travail personnel et apprentissages ?

Par ailleurs, comme on l'a souvent observé ici, il arrive que les interventions et répétitions du professeur puissent ne pas toucher certains élèves, qui ne peuvent alors progresser. Il faudrait être capable de repérer les « zones proximales de développement » de chaque élève, en tenir compte dans l'enseignement proposé et ainsi mieux cibler les interventions, aides, rappels ou commentaires, du professeur. Ce travail a juste été amorcé ici, quand par exemple nous avons évoqué, pour certains élèves, le problème du passage des « pré-connaissances » ou des « connaissances fragiles », aux connaissances mathématiques visées. Nous avons alors discuté, entre sens et technique, raisonnement et mémorisation, des conséquences d'un trop grand isolement des tâches. Nous avons parlé de la possibilité d'insérer les connaissances nouvelles dans un réseau plus large, permettant de retenir les « connaissances fragiles », de « transformer » les apprentissages transitoires. Il serait intéressant de voir, dans le contexte particulier de la notion racine carrée, ce qu'un travail plus approfondi sur ces thèmes pourrait apporter.

En outre, nous n'avons pas eu assez de temps pour analyser la notion racine carrée comme nous l'aurions souhaité : à la lecture du document IREM « mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée » (M.Pariès, N.Pouyanne, A.Robert, E.Roditi, M.Rogalski), nous avons eu envie de réfléchir à quel type de notions (extensions de concept, RAP (réponse à un problème) ou FUG (formalisatrices, unificatrices, généralisatrices) nous aurions apparenté la racine carrée. La définition actuelle semble pencher plutôt du côté de la deuxième (réponse au problème « quel est le nombre positif dont le carré est... ?) mais l'étude de T.Assude sur l'évolution des curricula montre que cela n'a pas toujours été le cas. De plus, sur la notion « racine carrée », travailler davantage, en liaison par exemple avec l'épistémologie ou la sémiotique, la question de l'écriture symbolique est une perspective intéressante. Ainsi, dans « la révolution symbolique », M.Serfati réfléchit sur le statut de l'interprétation des écritures symboliques (procédures ou résultats ?), évoque la

« capacité opératoire d'une écriture » ou encore les « assemblages à deux places » qui représentent les « quatre opérations », alors que l'extraction de racines est historiquement représentée par un « assemblage à une place » (la définition aujourd'hui donnée est elle à deux places). Grâce à tous ces éléments, nous pourrions discuter le caractère spécifique (ou non) des difficultés rencontrées sur la notion « racine carrée ».

Enfin, nous avons ébauché dans la conclusion un petit lien entre deux connaissances didactiques, l'une du côté de l'épistémologie, l'autre de la didactique de l'algèbre : la réelle ambiguïté du statut des nombres s'écrivant avec des radicaux (et n'ayant pas d'autre écriture possible exacte à ce niveau), entre nombre et nombre généralisé, serait à mettre en relation avec l'arrêt de la transposition didactique concernant la notion « racine carrée », phénomène décrit par T.Assude dont nous avons parlé dans la partie 2 de ce travail. Les théories et résultats obtenus en didactique de l'algèbre pourraient alors, en nous aidant à mieux étudier la confusion et les ruptures, ignorées par l'enseignement, entre travail dans le cadre numérique et dans le cadre algébrique au collège, nous donner accès à un point de vue un peu différent pour étudier les problèmes liés au manque de statut des racines carrées. Nous n'avons pas eu le temps de « creuser cette idée » mais nous souhaiterions éventuellement approfondir la piste de recherche ainsi ouverte.

7 Bibliographie

- Assude T. (1989) Racines carrées : conceptions et mises en situation d'élèves de quatrième et troisième, *revue Petit x* n° 20 pp. 5 à 33.
- Assude T. (1992) Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet « racine carrée » et analyse du curriculum, *thèse* (université de Grenoble).
- Bernard D. (2002) nombres et calculs au collège : instituer une cohérence, *Repères IREM* n°47, pp 5-16.
- Bessot A. Une étude du contrat didactique à propos de racine carrée, *revue petit x*, n° 36
- Bronner A. (1997) Les rapports d'enseignants de troisième et seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.17, n°3, pp 55-80.
- Cissé F. (2006) Un dossier sur « racine carrée » à l'usage des formateurs (collège/lycée) *document pour la formation des enseignants* (université Paris 7 – Denis Diderot)
- Corlay M. et Cissé F. (2006) déroulement des cours et apprentissages (sur le chapitre des triangles semblables) *mémoire de master de didactique des mathématiques parcours recherche*, dirigé par A. Robert.
- Douady R. (1984) jeux de cadres et dialectique outil-objet, *thèse d'état* (université Paris 7).
- Horoks J. (2004) des tâches aux activités des élèves sur les triangles semblables en classe de seconde : une comparaison entre ce qui est fait en classe et ce qui est fait lors des évaluations, *cahier didirem* n° 47.
- Horoks J (2006) Les triangles semblables en classe de seconde : des enseignements aux apprentissages. Etude de cas. *Thèse dirigée par A. Robert*.
- Pariès M., Pouyanne N., Robert A., Roditi E., Rogalski M. (2007) Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée – quelques exemples. *Document pour la formation des enseignants* (université Paris 7 – Denis Diderot)
- Picot M. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, on ne peut pas le faire. *Repères IREM* n°49, pp 5-15.
- Robert.A. (1992) Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques. *RDM* n°12.1, pp 33-58.
- Robert A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe. *Revue Petit x*, n° 62, pp 61-71.
- Robert A. et Rogalski J. à paraître
- Roditi E (1996) La racine carrée en troisième Etude d'une activité *document de travail pour la formation des enseignants* (université Paris 7 – Denis Diderot)

Serfati M.(2005) La révolution symbolique – La constitution de l'écriture symbolique mathématique
éditions PETRA, collection « transphilosophiques »

8 Les annexes

Annexe 1 : fiche d'exercices 10

Annexe 2 : fiche d'exercice 11

Annexe 3 : fiche d'exercice 12

Annexe 4 : le sujet de l'interrogation

Annexe 5 : le sujet du contrôle

Annexe 6 : le sujet du brevet blanc (extraits)

Annexe 7 : le cours

fiche 10 - Annexe 1

1. Donner une autre écriture de :
- a) $\sqrt{9}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{0}$.
- b) $\sqrt{400}$; $\sqrt{1600}$; $\sqrt{10000}$; $\sqrt{8100}$.
- c) $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,04}$; $\sqrt{0,25}$; $\sqrt{0,64}$.

2. Parmi les nombres ci-dessous, lesquels ne sont pas le carré d'un entier ?
- 4; 40; 400; 10^3 ; 121; $\frac{27}{3}$; -25; 9^6 .

3. Les nombres suivants sont-ils des carrés ? Si oui, de quel nombre ?
- 0; 4; -4; $3 + 2 \times 6,5$; 1,21;
 $1,21 \times 10^8$; 9×10^{-6} ; 100; 10;
 $\sqrt{25}$; $-\sqrt{36}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{3}{4}$; $2^2 \times 3^4$.

4. Complète : ... est le carré de 5
 36 est le carré de ...
 64 a pour carré ...
 ... est la racine carrée de 9
 ... est la racine carrée de 7.

5. Complète ($x > 0$) :

x	$\frac{25}{16}$			$\frac{3}{4}$				9×10^4
x^2		$\frac{81}{16}$					$\frac{25}{16}$	
$\sqrt{x}$			$\frac{2}{3}$		10^2	$\sqrt{7}$		

6. Trouve, si possible, tous les nombres x tels que :
- $x^2 = 25$; $x^2 = 49$; $x^2 = 81$; $x^2 = 0$; $x^2 = 1$;
 $x^2 = -4$; $x^4 = 81$.

7. Trouve, si possible, tous les nombres x tels que :
- $\sqrt{x} = 11$; $\sqrt{x} = 9$; $\sqrt{x} = 0$;
 $\sqrt{x} = -1$; $\sqrt{x} = \frac{9}{4}$; $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$.

8. Sachant que $\sqrt{144} = 12$, calcule :
- $\sqrt{1,44}$; $\sqrt{0,0144}$; $\sqrt{14400}$; $\sqrt{144 \times 10^8}$.

9. Calcule :
- $\sqrt{16}$; $\sqrt{0,16}$; $\sqrt{1600}$;
 $\sqrt{1,6 \times 10^7}$; $\sqrt{16 \times 10^{-4}}$.

10. Quelle est la racine carrée de :
- a) 16; 25; 36; 81; 100; 0; 121 ?
 b) $\frac{9}{4}$; $\frac{25}{16}$; $\frac{81}{64}$; $\frac{121}{100}$?
 c) 961; 7 225; 4 489 ?

11. Sans calculatrice, écrire les nombres suivants sans radical.

$$a = \sqrt{14 \times \sqrt{56}} \quad b = \sqrt{27 \times \sqrt{12}} \quad c = \sqrt{24 \times \sqrt{54}}$$

$$d = \sqrt{15 \times \sqrt{60}} \quad e = \sqrt{28 \times \sqrt{63}} \quad f = \sqrt{45 \times \sqrt{20}}$$

12. Sans calculatrice, donner l'écriture la plus simple possible des nombres suivants.

$$a = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} \quad b = \sqrt{\frac{198}{22}} \quad c = \frac{\sqrt{140}}{\sqrt{315}}$$

$$d = \frac{2\sqrt{98}}{\sqrt{18}} \quad e = \frac{\sqrt{108}}{2\sqrt{27}} \quad f = \frac{\sqrt{152}}{\sqrt{38}}$$

13. Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

$$a = \sqrt{80} \quad b = \sqrt{48} \quad c = \sqrt{72} \quad d = \sqrt{84}$$

$$e = \sqrt{56} \quad f = \sqrt{60} \quad g = \sqrt{90} \quad h = \sqrt{52}$$

$$i = \sqrt{98} \quad j = \sqrt{24} \quad k = \sqrt{20} \quad l = \sqrt{18}$$

14. Écrire les nombres suivants avec un seul radical.

$$a = \sqrt{3 \times \sqrt{5}} \quad b = \sqrt{2 \times \sqrt{7}}$$

$$c = \sqrt{5 \times \sqrt{7}} \quad d = \sqrt{0,2 \times \sqrt{3}}$$

$$e = \sqrt{0,5 \times \sqrt{0,3}} \quad f = \sqrt{1,3 \times \sqrt{0,7}}$$

$$g = 4\sqrt{14 \times \sqrt{3}} \quad h = 5\sqrt{2 \times 3 \sqrt{13}}$$

15. Écris sous la forme $a\sqrt{b}$, b étant un entier le plus petit possible

- A) a) $\sqrt{50}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{288}$; $\sqrt{72}$;
 b) $\sqrt{300}$; $\sqrt{160}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{162}$; $\sqrt{32}$;
 c) $\sqrt{243}$; $\sqrt{1445}$; $\sqrt{392}$.

- B) a) $\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{27}$;
 $\sqrt{98}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{108}$.
 b) $\sqrt{120}$; $\sqrt{360}$; $\sqrt{200}$;
 $\sqrt{1000}$; $\sqrt{7500}$; $\sqrt{8000}$.

- C) $2\sqrt{50}$; $5\sqrt{27}$; $3\sqrt{12}$;
 $4\sqrt{45}$; $4\sqrt{32}$; $\frac{2}{3}\sqrt{180}$.

16. On donne $A = 9x^2 + 3x - 1$.
 a. Calculer A pour $x = \sqrt{3}$.

17. Un triangle a un côté qui mesure 7 cm et la hauteur correspondante mesure 4 cm.
 Quelle est, à 1 mm près, la mesure du côté d'un carré qui a une aire égale à celle du triangle ?

18. Un jardin rectangulaire dont la longueur est le triple de la largeur a une aire de 196 m^2 .
 Quelles sont les dimensions de ce jardin ?

Ecrire sous la forme la plus simple possible

① $\sqrt{5} \times \sqrt{80}$; $\sqrt{45} \times \sqrt{20}$; $\sqrt{40} \times \sqrt{360}$;
 $\sqrt{21} \times \sqrt{84}$; $\sqrt{48} \times \sqrt{75}$; $\sqrt{12,1} \times \sqrt{0,9}$.

② $\sqrt{\frac{20}{11}} \times \sqrt{\frac{44}{5}}$; $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{3}{10}} \times \sqrt{6}$;
 $\sqrt{\frac{30}{7}} \times \sqrt{\frac{21}{40}}$; $\sqrt{\frac{3}{50}} \times \sqrt{\frac{8}{27}}$; $\sqrt{\frac{15}{14}} \times \sqrt{\frac{35}{6}}$.

③ $\sqrt{24} \times \sqrt{72} \times \sqrt{3}$; $\sqrt{7,5} \times \sqrt{90} \times \sqrt{0,03}$.

④ $\sqrt{45} \times \sqrt{\frac{26}{30}} \times \sqrt{\frac{27}{13}}$; $\sqrt{\frac{6,3}{72}} \times \sqrt{\frac{18}{2,8}}$.

Ecrire sans radical au dénominateur

⑤ $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{0,9}}{\sqrt{10}}$; $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{9}{49}}$.

⑥ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$; $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{162}}$; $\frac{\sqrt{0,12}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{\frac{7}{50}} \times \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{35}}$.

⑦ $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{-3}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

⑧ Écris le plus simplement possible : (8 a - 15)

$a = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$

$b = 2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7}$

$c = -\sqrt{8} + 10\sqrt{8} - 2\sqrt{8} - 7\sqrt{8}$

$d = \frac{3}{4}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

⑨ $a = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$

$b = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$

$c = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}$

$d = (3 + 5\sqrt{2}) - (6\sqrt{2} + 7)$.

⑩ $a = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{32}$

$b = \sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{245} + \sqrt{5}$

$c = 2\sqrt{50} + 3\sqrt{162} - 5\sqrt{8}$

$d = 5\sqrt{12} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{75}$.

⑪ a) $5\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 17\sqrt{32}$;

b) $\sqrt{12} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{48}$.

⑫ a) $3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{15}$;

b) $3\sqrt{5} - 7\sqrt{15} + 2\sqrt{60}$

⑬ a) $7\sqrt{6} - 2\sqrt{96} \times \sqrt{24}$;

b) $4\sqrt{3} \times 7\sqrt{6} \times 2\sqrt{8}$.

⑭ a) $2\sqrt{3} - \sqrt{300} + 3\sqrt{12}$;

b) $3\sqrt{125} \times 2\sqrt{21} \times \sqrt{35}$.

⑮ $a = 3\sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{72} - 2\sqrt{128}$

$b = 4\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75}$

$c = 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$

$d = 3\sqrt{80} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$

$e = 5\sqrt{54} - 3\sqrt{24} + 2\sqrt{6}$

$f = 3\sqrt{125} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20} - 2\sqrt{80}$

$g = \sqrt{363} - 5\sqrt{3} + \sqrt{108} - 3\sqrt{12}$.

Développe et réduis (exercices 16 à 22).

⑯ a) $(\sqrt{2} + 1)^2$; $(\sqrt{3} - 1)^2$; $(\sqrt{5} + 2)^2$;

b) $(\sqrt{7} - 3)^2$; $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$; $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$.

⑰ $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$; $(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)$;
 $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{7})$.

⑱ $(2\sqrt{3} + 5)^2$; $(2\sqrt{7} - 3)^2$;
 $(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)$.

⑲ $(3\sqrt{2} + 4)^2$; $(3\sqrt{2} - 4)^2$;
 $(3\sqrt{2} - 4)(3\sqrt{2} + 4)$.

⑳ $(5\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$; $(3\sqrt{2} - 5\sqrt{7})^2$;
 $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$.

㉑ $(1 - \sqrt{2})(5\sqrt{2} + 3)$;
 $(\sqrt{2} - 5\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$;
 $(2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) - (4 - \sqrt{2})(3 - 5\sqrt{2})$.

㉒ $(\frac{3}{4}\sqrt{2} + 5)(\frac{2}{3}\sqrt{2} - 3)$;
 $(\frac{3}{5}\sqrt{3} + 2\sqrt{5})(7\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{5})$.

㉓ Parmi les quatre nombres suivants, quels sont ceux qui sont égaux ?

$A = (\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$; $B = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$;

$C = -2$; $D = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) + 2$.

㉔ Est-il vrai qu'un seul des quatre nombres A, B, C et D peut s'écrire sans radical ?

$A = (3 + \sqrt{2})^2$;

$B = (3 - \sqrt{2})^2$;

$C = \sqrt{2}(3 + \sqrt{2})$;

$D = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$.

㉕ Une bouteille cylindrique de 12 cm de hauteur a une capacité de 1 l. Quel est le diamètre de sa base ?

㉖ Quelle est la longueur du côté d'un carré ayant la même aire qu'un disque de 1 m de rayon ? Quelle est alors la longueur de la dia-

Ex1) Retrouver l'intrus parmi les six nombres suivants

$$A = 2\sqrt{20} =$$

$$B = \sqrt{80} =$$

$$C = 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} =$$

L'intrus est ----

$$D = 4\sqrt{5} =$$

$$E = \sqrt{\frac{90}{2}} =$$

$$F = 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} =$$

Ex2) Ecrire le plus simplement possible :

$$G = \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{32} =$$

$$H = \sqrt{20} + \sqrt{125} - \sqrt{245} + \sqrt{5} =$$

$$I = 2\sqrt{50} + 3\sqrt{162} - 5\sqrt{8} =$$

$$J = 5\sqrt{12} + 3\sqrt{48} - 2\sqrt{75} =$$

Ex3) Dans chaque ligne, cocher d'une croix la bonne réponse :

est égal à ↗	0	3	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{3} + \sqrt{3}$					
$\sqrt{27}$					
$\sqrt{3} \times \sqrt{3}$					
$\frac{\sqrt{75}}{5}$					
$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$					
$(\sqrt{3} + 1)^2 - 4$					

Ex4) Prouver que A est un nombre entier

A

sachant que $A = \sqrt{8} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{75} + 5\sqrt{12}$

A = ----

Ex5) Trouver les nombres égaux à zéro parmi :

$$N = \sqrt{45} - \sqrt{20} + \sqrt{5}$$

$$L = \sqrt{150} - \sqrt{100} - \sqrt{50}$$

$$U = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{18}$$

$$S = \sqrt{108} - (3\sqrt{192} - 2\sqrt{243})$$

Annexe 5 :

3^{ème}

CONTROLE N° 5

CHAP 4 & 5

Ex 1) Donner les résultats des calculs suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ (b est un nombre entier)

$$A = \sqrt{18} - \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{32} - \sqrt{98}$$

$$B = 3\sqrt{45} + 2\sqrt{20} - 4\sqrt{80}$$

$$C = 5\sqrt{300} - 2\sqrt{12} + \sqrt{363}$$

Ex 2) Soit $A = 4x(x+3) - 10x + 5$

1- Développer et réduire A

2- Calculer A si $x = -1$; si $x = \sqrt{2}$ et si $x = -\sqrt{3}$

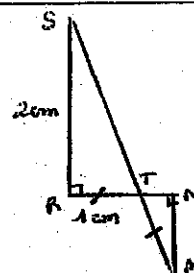
Ex 3) Soit la figure ci-contre (elle n'est pas à la bonne échelle)

1- Démontrer que les droites (RS) et (MN) sont parallèles

2- Calculer la valeur exacte de la longueur ST

3- Calculer la valeur exacte de la longueur MN

4- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{RST}$ à 0,1 degré près



Ex 4) Tracer un cercle de centre O et de rayon 6 cm. On place deux points distincts A et B sur ce cercle tel que $\widehat{OAB} = 26^\circ$. La droite (OB) coupe le cercle en C (C est diamétralement opposé à B)

1- Donner la mesure de l'angle $\widehat{ABO}$ le justifier

2- Donner la nature du triangle ABC le justifier

3- Calculer AB et donner sa valeur arrondie à 1 mm près

Annexe 6

EPREUVES COMMUNES

ANNEE 2005/2006

EPREUVE de MATHEMATIQUES

RAPPEL : Toutes les réponses doivent être justifiées.
Les théorèmes utilisés doivent être clairement et complètement énoncés.
Les réponses en écriture fractionnaires seront écrites sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICES NUMERIQUES

14 points

Exercice 1 : 6 pt

1) Soit le nombre $A = \sqrt{500} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{20}$.

1.5 pt

Montrer que A peut s'écrire sous la forme $a\sqrt{5}$, où a est un nombre entier

1 pt

2) Développer et réduire $B = (5 + \sqrt{5})^2$.

3) Calculer C et D et donner chaque résultat sous la forme la plus simple possible :

$$C = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{12}$$

$$D = \frac{\left(\frac{8}{7} - 2\right)}{\frac{9}{14}}$$

C 1 pt et D 1 pt

4) Simplifier le nombre E, donner son écriture scientifique et son écriture décimale.

$$E = \frac{-24 \times 10^7 \times 8 \times 10^{-13}}{3 \times 10^{-3}}$$

1.5 pt

Exercice 2 :

5 pt

On considère l'expression : $F = (2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 7)$

1. Développer puis réduire F.

2. Factoriser F.

3. Résoudre l'équation : $(2x + 3)(x + 10) = 0$.

4. Calculer F pour $x = -\frac{3}{2}$; $x = 7$ et $x = -\sqrt{3}$ (pour le dernier calcul, on donnera la réponse sous forme $a - b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers).

1,5 pt

1 pt

1 pt

0,5 par réponse

Exercice 3 :

3 pt

1. Calculer le plus grand diviseur commun de 9240 et 3822 (on indiquera la méthode utilisée).
2. Simplifier la fraction $\frac{3822}{9240}$ pour la rendre irréductible ; vous noterez sur votre copie le détail des calculs.

2 pt

1 pt

TRAVAUX GEOMETRIQUES

12 points

Exercice 1 :

6,5 pt

Dans cet exercice, l'unité de mesure de longueur est le centimètre. Vous répondrez aux différentes questions en citant les théorèmes utilisés et en justifiant leur application.

Sur le schéma ci-contre :

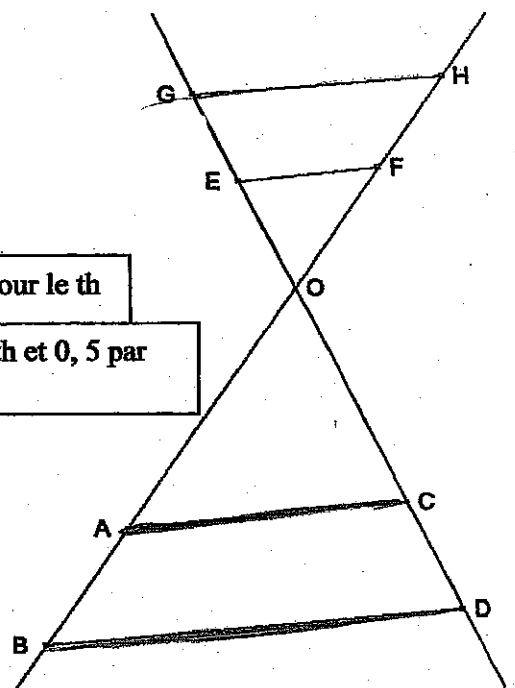
- les points B, A, O, F et H sont situés sur la droite $\mathcal{D}_1$;
 les points D, C, O, E et G sont situés sur la droite $\mathcal{D}_2$;
 les droites (AC) et (BD) sont parallèles ;
 OA = 6 ; OB = 9 ; OC = 5 ; OE = 2,5 ;
 OF = 3 ; OG = 4,5 ; OH = 5,3

1. Calculer la mesure exacte de la distance OD.
2. Les droites (EF) et (AC) sont-elles parallèles ? Pourquoi ?
3. Les droites (GH) et (AC) sont-elles parallèles ? Pourquoi ?

0,5 par quotient et 1 pour th

2,5 dont 2 pour le th

2 dont 1 pr th et 0,5 par quotient

**Exercice 2 :**

5,5 pt

1. Soit un repère orthonormé (O, I, J). (On prendre $OI = OJ = 1$ cm)

Placer les points A(-2 ; 1) ; B(-1 ; 3) et C(5 ; 0)

1.5 nt

2. Démontrer que la valeur exacte de AB est $\sqrt{5}$.

1 pt

3. On admet dans la suite de l'exercice que : $AC = 5\sqrt{2}$ et $BC = 3\sqrt{5}$

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

1 nt dont 0.5 pour th

4. Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC , préciser son centre et calculer son rayon.

0,5 + 0,5

5. Soit M le milieu de [AC], construire le point D symétrique de B par rapport à M. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

1 nt

PROBLEME

13 points

Soit ABC un triangle rectangle en A, on donne $AC = 15$ cm et $BC = 30$ cm

1. Faire la figure à l'échelle $\frac{1}{2}$ sur la feuille annexe que l'on complètera au fur et à mesure .

1 nt

2. Calculer la longueur AB en donner la valeur exacte.

1 nt

3. Calculer la mesure exacte de l'angle $\hat{ABC}$

0,5 pt

4. On appelle I le milieu de [BC], la médiatrice de [BC] coupe la droite (AB) en J et la droite (AC) en K. Montrer que $CI = 15$

1,5 pt dont 0,5 pour triangle rectangle

5. Quelle est la nature du triangle KIC. En déduire que les angles $\hat{ABC} = \hat{CKI} = 30^\circ$

2 nt

6. Calculer les mesures exactes de KC et de KI puis donner la valeur arrondie au millimètre près de KI.

1,5 + 1,5 pt

7. On trace la hauteur (AH) issue de A du triangle ABC, elle coupe [BC] en H

Que peut-on dire des droites (AH) et (KI) ?

1 pt

8. Calculer la mesure exacte de AH puis sa valeur arrondie au millimètre.

2 pt

Fin.

1 point présentation

Annexe 7 1-

1) INTRODUCTION :

1- Manipulation de la machine à calculer :

$7,3^2=$

$8,5^3=$

$(-3)^2=$

$6^8=$

$\sqrt{7}=$

$\sqrt{27}=$

$(\sqrt{26})^2=$

$\sqrt{0}=$

2- carré, racine carrée :

a	4	9	16	25	36	49	1,44	1,96	-9	-25
$\sqrt{a}$										
$(\sqrt{a})^2$										

⇒ Conclusion : - un nombre négatif n'a.....
- un nombre et son opposé.....

3- racine carrée : addition et soustraction :

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a + b$	$\sqrt{a + b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$a - b$	$\sqrt{a - b}$
2	3								
9	16								
5	20								
-3	12								

⇒ conclusions : - $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

4- racine carrée : produit et quotient

a	b	$a \times b$	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
4	25								
9	36								
5	12								

⇒ conclusions :

Annexe 7-2.

(2000)

3^{ème}

LES RACINES CARREES

CHAP V

1) INTRODUCTION :

1- Manipulation de la machine à calculer :

$$7,3^2 = 53,29$$

$$8,5^2 = 72,25$$

$$(-3)^2 = 9$$

$$6^2 = 36$$

$$\sqrt{7} = 2,645751...$$

$$\sqrt{27} = 5,196152...$$

$$(\sqrt{26})^2 = 26$$

$$\sqrt{0} = 0$$

2- carré, racine carrée :

a	4	9	16	25	36	49	1,44	1,96	-9	-25
$\sqrt{a}$	2	3	4	5	6	7	1,2	1,4	$\triangle$	$\triangle$
$(\sqrt{a})^2$	4	9	16	25	36	49	1,44	1,96	$\triangle$	$\triangle$

⇒ Conclusion : - un nombre négatif n'a pas de racine carrée
- un nombre et son opposé ont le même carré

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \sqrt{a^2} = a \quad \text{à condition que } a \geq 0$$

3- racine carrée : addition et soustraction :

a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a + b$	$\sqrt{a + b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$a - b$	$\sqrt{a - b}$
2	3	1,414	1,732	3,146	5	2,236	-0,318	-1	$\triangle$
9	16	3	4	7	25	$\sqrt{25} = 5$	-1	-7	$\triangle$
5	20	2,236	4,472	6,708	25	$\sqrt{25} = 5$	-2,236	-15	$\triangle$
-3	12	$\triangle$	3,464	-	9	3	-	-15	$\triangle$

⇒ conclusions : - $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$
- $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a - b}$ à condition que $a \geq 0$ et $b \geq 0$

4- racine carrée : produit et quotient

a	b	$a \times b$	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a \times b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
4	25	100	$\frac{4}{25}$ 0,16	2	5	10	$\sqrt{100}$ = 10	$\frac{2}{5} = 0,4$	0,4
9	36	324	$\frac{9}{36}$ 0,25	3	6	18	$\sqrt{324}$ = 18	$\frac{3}{6} = 0,5$	$\sqrt{0,25} = 0,5$
5	12	60	$\frac{5}{12}$	2,236	3,464	7,746	$\sqrt{60} = 7,746$	0,645	0,645

⇒ conclusions : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ à condition que $a \geq 0$ et $b \geq 0$
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ à condition que $a \geq 0$ et $b > 0$

Il arrive parfois qu'on trouve un nombre qui ne se termine jamais : ce nombre n'est ni un entier, ni un décimal, ni un rationnel : c'est un irrational

ex $\sqrt{5} \approx 2,236067978$

il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est égal à 5 on doit se contenter de donner une valeur approchée

$\sqrt{5} \approx 2,236$ (par défaut à 10^{-3} près)

II Racine carrée

1) Définition

↳ lorsque a désigne un nombre positif, la racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est a

la racine carrée de a est notée $\sqrt{a}$

$\sqrt{a}$ ← radicaux
radical

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{1} = 1$

Remarques :

* $\sqrt{a}$ n'a pas de sens lorsque a est négatif (comme on l'a vu dans le tableau $\sqrt{-3}$ impossible)

* en revanche l'écriture $-\sqrt{3}$ est tout à fait correcte : elle désigne l'opposé de $\sqrt{3}$

en effet $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ ont tous les deux pour carré 3

$(-\sqrt{3})^2 = 3$ $(\sqrt{3})^2 = 3$

⚠ lorsque a est un nombre négatif

$\sqrt{a^2} = -a$

ex $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ si $a < 0$
ou -3 donc $a = -3$

III Propriété des racines carrées :

1) Simplification d'une racine carrée

Certaines racines carrées ont un radicaux qui est composé de carrés

pour faire apparaître ces carrés, il faut décomposer le radicaux en produits de facteurs premiers.

(rappel : nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...)

ex $\sqrt{180}$

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5}$

on fait apparaître des carrés parfaits

$\sqrt{180} = 2 \times 3 \sqrt{5}$
 $= 6\sqrt{5}$

• $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2}$

ou $\sqrt{5^2 \times 2}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

• $\sqrt{172}$

172	2
86	2
43	43

$\sqrt{172} = \sqrt{2^2 \times 43}$
 $= 2\sqrt{43}$

Comme nous l'avons vu dans le tableau

$$\hookrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$\text{ex } \sqrt{4} \times \sqrt{25} = \sqrt{100} = 10$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \times 5 = 10$$

$\hookrightarrow$ le produit de 2 racines carrées est égal à la racine carrée du produit avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

ex Simplifier l'écriture

$$\sqrt{75} \times \sqrt{32} = \sqrt{75 \times 32}$$

$$= \sqrt{3 \times 25 \times 2 \times 16}$$

$$= 4 \times 5 \sqrt{3 \times 2}$$

$$= 20 \sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{4}{21}} \times \sqrt{\frac{35}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 \times 35}{21 \times 16}} = \sqrt{\frac{4 \times 5 \times 7}{7 \times 3 \times 4 \times 4}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{12}}$$

3) racine carrée d'un quotient

Comme nous l'avons vu dans le tableau

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$\hookrightarrow$ le quotient de 2 racines carrées est égal à la racine carrée du quotient avec $a \geq 0$ et $b > 0$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ex Simplifier l'écriture

$$\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\frac{6 \times 7}{3 \times 5 \times 5}} = \sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$



ATTENTION

$$\text{ex } \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} \quad \text{en effet le tableau}$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

de même $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$

$$\sqrt{64} = 8 \neq 10 - 6 = 4$$

comme nous l'avons vu dans

$\hookrightarrow$ la racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines carrées et la racine carrée d'une différence n'est pas la différence des racines carrées

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB :

<http://iremp7.math.jussieu.fr>

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE :

La racine carrée en troisième. Des enseignements aux apprentissages.

AUTEUR :

Anne Dumail, dirigée par Aline Robert.

RÉSUMÉ :

Ce mémoire, situé dans le cadre général de la théorie de l'activité, présente une étude de cas concernant 27 élèves d'une classe de troisième : il cherche à établir et à caractériser les liens entre l'enseignement proposé sur la notion « racine carrée » et les apprentissages des élèves. L'analyse des données recueillies, traitées grâce à une méthodologie spécifique associée au cadre théorique choisi (attentive en particulier à la nature, la difficulté et la fréquence des adaptations proposées), permet ainsi de mettre en relation les activités possibles des élèves, inférées par le couple tâches/déroulement, avec leurs productions lors des évaluations. De plus, grâce aux trois évaluations à trois moments différents de l'enseignement de la notion, le rôle du facteur temps se trouve questionné. En particulier, l'observation d'un phénomène de régression à long terme, pour certains élèves, amène à s'interroger sur l'existence de « connaissances fragiles » : l'enseignement proposé, caractérisé par des tâches isolées et très découpées, ne permettrait pas de les transformer en connaissances solides. En outre, sont mis en évidence des éléments de différenciation très nets : deux groupes d'élèves, aux résultats et aux comportements très différents, sont distingués tout au long des analyses. Enfin, la notion « racine carrée », enseignée en troisième dans un cadre qualifié de « pseudo-algébrique », permet de pointer la question du jeu permanent mais implicite, entre cadre numérique et cadre algébrique, au sein duquel on fait travailler les élèves en collège. En ce sens, les radicaux ne seraient pas des sources mais plutôt des révélateurs de difficultés liées à un problème plus vaste.

MOTS CLES :

racine carrée, activités, tâches, déroulements, adaptations, contrôles, différenciation.

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 2007
ISBN : 978-2-86612-294-2