BONNES VIEILLES PAGES (1)

Le texte dont on propose ci-dessous une traduction est tiré d'un ouvrage écrit au début du 2nd siècle ap.JC, *Sur ce qui est utile pour la lecture de Platon*[1]. Comme l'indique ce titre ainsi que son introduction, l'ouvrage de Théon est destiné à un lectorat désireux d'approfondir la lecture de Platon et qui, pour cette raison, a besoin des connaissances mathématiques élémentaires qui pourraient lui manquer. Plus précisément, Théon précise l'idée ambiguë selon laquelle il est d'une part nécessaire de connaître un peu de mathématiques pour lire Platon, mais qu'il n'est pas besoin, d'un autre côté, d'avoir étudié ces disciplines dès son enfance pour aborder cette lecture :

> Qu'il soit impossible de comprendre ce que Platon a exprimé sur le mode mathématique sans s'être exercé dans cette discipline, tout le monde le concéderait, je pense. Mais qu'une connaissance éprouvée [*empeiria*] en mathématiques ne soit pas non plus sans utilité et sans profit pour les autres sciences, lui-même semble bien le montrer abondamment. Aborder les écrits de Platon en ayant une connaissance éprouvée de toute la géométrie, de toute la musique, de toute l'astronomie, c'est, si cela arrive à quelqu'un, une chose heureuse. Mais cette connaissance éprouvée n'est ni facilement disponible ni aisée à acquérir, au contraire elle exige un effort considérable commencé dès l'enfance. C'est pourquoi, pour ceux qui n'ont pu s'exercer dans les mathématiques, mais qui désirent ne pas manquer totalement la compréhension des écrits de Platon qu'ils ont le vif désir de connaître, nous allons faire un exposé sommaire et bref des notions mathématiques nécessaires, dont ont besoin au plus haut point ceux qui abordent Platon : notions d'arithmétique, de musique, de géométrie, de stéréométrie et d'astronomie, sans lesquelles il n'est pas possible d'atteindre la vie la meilleure, comme il dit après avoir longuement montré qu'on ne doit pas négliger les mathématiques.[2]

Théon précise de nouveau, à la fin de son introduction, que son exposé n'est pas destiné à former des arithméticiens, géomètres, musiciens[3] ou astronomes accomplis, mais qu'il n'exposera que ce qui est nécessaire pour comprendre les textes de Platon. Son introduction s'achève sur la même ambiguïté :

> il serait très utile pour celui qui va aborder ce que nous allons exposer et ce que Platon a écrit, d'avoir parcouru les premiers éléments de géométrie. Il lui serait ainsi facile de suivre notre exposé. Mais néanmoins notre traité sera conçu de telle manière, qu'il deviendra familier même à celui qui manque totalement d'initiation à ces sciences.

La dernière phrase évoque celui qui n'est 'pas initié', *amuêtos*, aux sciences mathématiques, faisant allusion à la comparaison explicite que fait Théon un peu plus haut entre la façon dont Platon conçoit le rôle des mathématiques dans l'éducation (une étape de purification de l'esprit qui prépare à l'étude de la philosophie) et un rite religieux dont Théon rappelle précisément les étapes : l'initiation aux mystères eleusiniens.[4] L'apprentissage des

---

[1] Selon la traduction de Mme Hadot (voir note suivante), qui est assez proche du grec. J. Dupuis, dont la traduction est consultable sur Gallica, traduit '*L'exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon.*'

[2] Cette citation, comme la suivante, reproduit la traduction de Mme Hadot avec de très légères modifications. Voir son analyse succincte de l'œuvre de Théon dans *Arts Libéraux et philosophie dans la pensée antique*, Vrin 2005 (pour la réédition de l'original, paru en 1984).

[3] Au sens antique du terme, c'est-à-dire des spécialistes de musique *théorique* (division harmonique du canon).

[4] Les mystères d'Eleusis étaient une cérémonie religieuse liée au culte de Déméter, et qui est restée très populaire dans toute l'antiquité (jusqu'à la suppression du culte à la fin du 4è siècle ap.JC). On la séparait en *Petits*

mathématiques est conçu par lui comme l'une des étapes de cette cérémonie, la première, qui était purificatoire et préparait aux suivantes : c'est donc à ce stade que l'étude des mathématiques montre pour lui son utilité. C'est probablement ce qui explique que, dans la première citation ci-dessus, il interprète généreusement les recommandations que fait Platon sur l'étude des sciences comme une *préparation à une vie meilleure* (et non plus seulement, comme chez Platon, à la contemplation des intelligibles).

D'un point de vue moderne, le texte de Théon fait partie, avec le texte de l'*Introduction arithmétique* de son quasi-contemporain Nicomaque de Gérase,[5] des premiers témoignages concernant l'arithmétique dite néo-pythagoricienne. On désigne par là un type de pensée arithmétique qui puise probablement à des sources très anciennes, ou du moins réputées telles par ces deux auteurs,[6] et qui a eu dans les siècles suivants, puis au Moyen-Age, une influence considérable.

Le but de la traduction que nous proposons ici est de donner une idée concrète de cette arithmétique, et plus spécifiquement de faire sentir la forme qu'y prend ce que Théon appelle une 'démonstration'. On va voir en effet que si l'argument de Théon semble, 'vu de loin', ressembler à une preuve, son format est néanmoins très éloignée du modèle euclidien de la démonstration.[7]

Euclide en effet, comme on peut le voir à la lecture des livres arithmétiques des *Eléments*, suit la plupart du temps une structure déductive standardisée et à peu près uniforme : les propositions sont présentées dans un ordre déductif et s'appuient sur un ensemble de définition et 'd'opérations permises' exposées au préalable pour la plupart d'entre elles. En outre, Euclide s'appuie fondamentalement sur une représentation géométrique des nombres, ces derniers étant toujours représentés par des *droites*.[8] Les livres arithmétiques s'appuient également sur les mêmes procédures géométriques que celles qui sont utilisées dans les livres de géométrie plane concernant notamment la 'composition' et le retranchement de droites.[9]

---

mystères (qui avaient lieu au printemps) et *Grands mystères* (à l'automne). Ces derniers duraient neuf jours, pendant lesquels les candidats à l'initiation accomplissaient une série graduée de rites : c'est à ces rites que se réfère manifestement Théon.

[5] Les deux semblent avoir vécu au $2^{ème}$ siècle de notre ère.

[6] Les études historiques (voir par exemple W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreism*, Harvard University Press, trad. angl. 1972, l'original est paru en 1962) montrent qu'un nombre important de 'témoignages' sur les 'mathématiques pythagoriciennes' à proprement parler, c'est-à-dire qui remonteraient à la figure mythique de Pythagore et à ses disciples, sont en fait des faux, des écrits apocryphes dont le nombre augmente au fur et à mesure qu'on avance dans l'antiquité. Il est caractéristique de l'antiquité tardive, qui commence peu après nos deux auteurs, de s'être appuyée sur cette littérature apocryphe pour 'refonder' la compréhension qu'on pouvait avoir de l'histoire des mathématiques.

[7] Pour une étude plus approfondie des différents emplois par Théon de la démonstration, je renvoie à l'article de Joëlle Delattre « La démonstration et l'exemple chez Théon de Smyrne » paru dans *Mathématiques et philosophie. La démonstration*, MAFPEN et IREM de Lille, p. 17-30 (le texte est malheureusement difficilement accessible). Plus accessible est le texte du même auteur, « entre démarche mathématique et démarche philosophique », paru dans *Analyse et démarche analytique, les neveux de Descartes*, IREM de Reims 1996, p.25-41 (il est davantage consacré aux démonstrations géométriques de Théon dans la partie consacrée à l'astronomie).

[8] 'Droite' doit s'entendre au sens euclidien, et correspond à ce que *nous* appelons segment de droite. Les définitions 17 à 20 du livre VII évoquent les nombres plans et solides, mais Euclide n'évoque pas ensuite la possibilité de les représenter par des figures ou des solides, comme chez Théon ou Nicomaque.

[9] Les livres arithmétiques des *Eléments* ont aussi en commun avec les livres de géométrie l'usage des proportions, même si la définition qui est donnée pour les nombres diffère fondamentalement de celle qui sont présentées pour les grandeurs géométriques. Sur tous ces points nous renvoyons le lecteur à l'article de M. Bühler et A.M. Pajus sur les démonstrations en arithmétique.

La littérature néopythagoricienne, au contraire, affirme une prééminence absolue de l'arithmétique sur la géométrie. C'est sans doute Nicomaque qui l'affirme le plus nettement, alors qu'il précise que les termes mêmes de la géométrie, comme '*tri*angle' (*trigonos* en grec) ou '*tetra*gone' (*tetragonos*, c'est-à-dire la figure à quatre coins) présupposent les notions et l'existence des nombres 'trois' ou 'quatre'. Cet exemple reflète une position accordant un privilège très fort à l'arithmétique, non seulement d'un point de vue épistémologique, mais aussi et surtout d'un point de vue ontologique : l'arithmétique courante reflète une sorte d'arithmétique plus élevée qui est liée à la structure même du monde intelligible.[10]

D'un point de vue 'strictement technique' (pour autant qu'un tel point de vue soit pertinent dans ce contexte), il ressort de cette position fondamentale un type d'exposé qui lui est adapté. Ce dernier donne une place centrale à l'exposé des propriétés de séries de nombres *à partir de l'examen de ces séries elles-mêmes*. Autrement dit, l'exposé néopythagoricien n'est pas construit, comme chez Euclide, suivant un ordre dans lequel apparaît en premier l'énoncé des théorèmes qu'on se propose de démontrer, ou des problèmes qu'on se propose de résoudre,[11] mais par l'examen et la reconnaissance préalables de certaines régularités que le lecteur découvre et qui lui sont progressivement expliquées, comme si la *réalité* des nombres (plus précisément de *l'ordre* des nombres) devait tout d'abord s'imposer à lui avant qu'il n'en *découvre* les propriétés. Cette manière de faire ménage donc une *surprise* devant la réalité arithmétique elle-même, cette surprise devenant du même coup le préalable à des découvertes plus importantes encore sur la réalité intelligible. Autrement dit, la démarche suivie par Théon a bien valeur initiatique et est non seulement conçue, comme on l'a vu plus haut, comme une initiation eleusinienne : elle est également *construite* de cette manière.

Une conséquence de ce mode d'explication est qu'une place essentielle est laissée à la réflexion du lecteur. Du même coup c'est sa capacité d'invention qui est éventuellement sollicitée : dans la mesure où les propriétés des nombres sont découvertes 'par surprise', au fil même de leur engendrement naturel, un travail de réflexion *devient* éventuellement nécessaire *a posteriori* pour s'en expliquer la structure. Autrement dit, cette démarche est susceptible de conduire à un travail d'invention *de preuves* sur ce qu'on a d'abord découvert. Si ce travail n'est pas vraiment attesté chez Théon ou Nicomaque, il fera l'objet de travaux postérieurs, notamment chez les néoplatoniciens tardifs comme Syrianus ou Proclus.[12]

Pour initier à son tour le lecteur de Mnémosyne aux Mystères, nous proposons un passage relativement court de l'exposé de Théon, tiré de la partie arithmétique de son ouvrage (la première bien entendu, pour la raison expliquée ci-dessus).[13] Il s'agit du passage où sont exposés les 'nombres triangulaires', selon l'expression consacrée pour désigner la célèbre figuration des nombres selon des figures géométriques, comme le triangle ou le carré. Cette figuration est devenue courante dans nos manuels qui proposent souvent de l'utiliser pour

---

[10] Ces aspects sont analysées et mis en valeur par Mme Bertier dans sa traduction du texte de *l'Introduction Arithmétique* de Nicomaque (voir ch.I.4 et les notes qui s'y rapportent). On peut aussi se reporter, pour une évocation de ce point de vue, aux pages *Contre les arithméticiens* dans le *Contre les professeurs* de Sextus Empiricus (textes réunis par J. Delattre, Université de Lille 3, 2006, p. 67-77). Pour une présentation synthétique des modes de pensée néopythagoriciens, on consultera également la notice que lui consacre Bernard Vitrac dans sa traduction d'Euclide, volume 2 (PUF 1994), pp.473-494.

[11] Cette stratégie est susceptible de suggérer que nous disposons toujours d'une sorte de préconnaissance de ce que nous devons découvrir par la démonstration ou la construction elles-mêmes.

[12] Cinquième siècle après J.C. Cette interprétation tardive fait l'objet de mes travaux de recherche actuelle, et j'aurai l'occasion d'en reparler dans le cadre des travaux du groupe M :ATH

[13] L'ouvrage de Théon se compose grosso modo de trois parties, après l'introduction où on discute de l'utilité des mathématiques et d'où sont extraites les citations que nous avons commentées plus haut : la première concerne l'arithmétique, la seconde la musique (théorie des intervalles musicaux), la dernière l'astronomie (notons que l'ouvrage tel qu'il nous est parvenu est certainement mutilé. Si l'on en croit l'intro, il devrait y avoir cinq parties ou du moins une partie géométrique)

retrouver la formule donnant la somme des termes d'une suite en progression arithmétique. En effet en représentant géométriquement une telle somme, en dédoublant la figure triangulaire obtenue puis en 'emboîtant' les deux pour former un rectangle, on peut montrer rapidement comment calculer rapidement cette somme :

a a a a   la somme 1+2+3 vaut 3 fois 4 (rectangle complet) divisé par 2.
a a a a   De manière générale la somme $1+2+\ldots+n$ s'obtient en calculant $n(n+1)/2$
a a a a

Dans ce type d'exposé, bien souvent, la figure est bien utilisée pour ses vertus heuristiques, mais il fait l'économie de *l'observation des suites de nombres* (triangulaires ou carrés) correspondantes. Il perd du même coup une partie du caractère à la fois *naturel* et *heuristique* qu'elle avait dans l'exposition initiale qu'en donnent Nicomaque ou Théon. En d'autres termes, d'autres stratégies sont possibles pour à la fois introduire et expliquer ces nombres, qui conduisent non seulement à une compréhension plus approfondie de leur structure, mais aussi à d'autres démonstrations que celle qui est résumée ci-dessus : nous laissons à la sagacité du lecteur de Mnémosyne, enfin initié, d'inventer ces dernières.[14] On trouvera à la suite un exposé plus proche de nous (c'est-à-dire plus détaillé et plus explicite) sur les nombres figurés, tiré du *Dictionnaire mathématique* d'Ozanam (1691).[15]

TEXTE DE Théon de Smyrne : *Sur ce qui est utile pour la lecture de Platon*, 1ère partie (Arithmétique).[16]

Parmi les nombres, il y a les [nombres] plans, qui sont [produits par] la multiplication de deux nombres [l'un par l'autre], comme [s'ils étaient] longueur et largueur, et parmi ceux-ci, en outre, il y a les [nombres] triangles,[17] les carrés,[18] les pentagones et tous les polygones qui viennent ensuite.

19. Les [nombres] triangles sont engendrés de la manière suivante. Les [nombres] pairs qui se suivent, [s'ils sont] composés les uns aux autres dans leur succession produisent des nombres hétéromèques.[19] Ainsi, 2 est le premier [nombre] pair ; il est de plus hétéromèque ; car il vaut une fois 2. Ensuite si aux 2 [unités] tu adjoins 4, il vient 6, lequel est lui-même hétéromèque : c'est en effet deux fois 3. Et [on peut poursuivre] le même argument jusqu'à l'infini ; pour plus de clarté cependant, et afin que tous aient une bonne vue d'ensemble de cet argument, on le montre de la manière suivante :
Que la dyade qui vient en premier soit les deux alpha ainsi disposés :

$\alpha\ \alpha$

[14] Il pourra également consulter le numéro 13 de Mnémosyne qui contient une traduction d'un article célèbre de Leibniz sur l'origine de son *calcul différentiel*, où il reconnaîtra un héritage important des raisonnements néopythagoriciens.
[15] Texte intégralement reproduit dans les 'Reproductions de textes anciens' de l'IREM de Paris 7.
[16] Trad. A. Bernard, à partir du texte grec édité par Hiller (Teubner 31.9—34.15 et 41.3-8) et que reproduit J. Dupuis avec une traduction française en vis-à-vis (Hachette, 1892, disponible sur le site Gallica de la BNF, http://gallica.bnf.fr/). Les termes entre crochets correspondent à des ellipses du texte grec. Il existe une autre traduction, plus précise que celle qui est proposée ici et accompagnée d'un appareil de notes, par Joëlle Delattre et qui devrait être publié prochainement.
[17] [NdT] Lit. *trigones*, à trois coins.
[18] [NdT] Lit. *tetragones*, à quatre coins.
[19] [NdT] Les nombres *hétéromèques* sont le produit de deux nombres qui ne diffèrent entre eux que d'une unité, comme 6 qui est le produit de 2 et 3, ou 30 qui est le produit de 5 et 6. Ils sont été présentés par Théon dans les chapitres précédents.

Leur figure est hétéromèque ; en effet elle fait deux en longueur et en largeur elle fait un. Après les deux on a le [nombre] pair 4 ; si nous adjoignons [ses unités] aux deux premiers alpha et que nous plaçons les 4 autour des 2, il vient une figure hétéromèque, celle des 6; en effet selon la longueur elle fait trois, alors qu'en largeur elle fait 2. Le pair suivant après 4 est 6 ; quand tu les adjoins aux premiers 6, il vient le [nombre] 12, et si de surcroît tu les disposes autour des premiers, il vient une [nouvelle] figure hétéromèque ; en effet, de même qu'ils font selon la longueur 4, il font 3 selon la largeur. Et [on peut réitérer] le même argument, jusqu'à l'infini, selon le mode de composition des [nombres] pairs.

$$\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{array}$$

A leur tour, les [nombres] impairs, quand on les compose en succession les uns aux autres, font des nombres carrés. En effet les impairs successifs sont 1 3 5 7 9 11. Composes donc ceux-là dans leur succession et tu produiras des nombres carrés. Ainsi l'un est le premier [nombre] carré ; car un est une fois un ; ensuite vient le [nombre] impair 3: et ce gnomon,[20] quand tu l'adjoins à l'un, tu produis un carré également égal, car il fera 2 selon la longueur et 2 selon la largeur. Dans la succession [vient ensuite] le [nombre] impair 5 ; et si tu adjoins ce gnomon autour du carré 4, il s'ensuivra de nouveau un carré, le [nombre] 9, ayant 3 pour longueur et 3 pour largeur. Ensuite vient le [nombre] impair 7 ; si tu l'adjoins au [nombre] 9 tu produiras 16, qui fait 4 en longueur et 4 en largeur. Le même argument [peut être reconduit] jusqu'à l'infini.

$$\begin{array}{cc|c} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{ccc|c} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \hline \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{array}$$

De même, si nous composons les uns aux autres non plus seulement les pairs dans leur succession ou les impairs dans leur succession, mais les pairs *et* les impairs, il nous arrivera des nombres triangulaires. Qu'on expose en effet des nombres pairs et impairs dans leur succession, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Par l'addition de ces derniers, on obtient les [nombres] triangles. La monade vient en premier ; laquelle, sinon en acte, du moins en puissance, est toutes choses, étant le principe de tous les nombres. Si à cette dernière, à la suite, lui est ajoutée une dyade, on obtient un triangle, le 3 ; qu'on ajoute ensuite 3, il vient 6 ; qu'on ajoute ensuite 4, il vient 10 ; ensuite 5, il vient 15 ; ensuite 6, il vient 21 ; ensuite 7, il vient 28 ; ensuite 8, il vient 36 ; ensuite 9, il vient 45 ; ensuite 10, il vient 55 ; et le même argument, à l'infini. Mais il apparaît que de tels nombres sont triangles selon la figure qu'on obtient, en ajoutant aux premiers nombres le gnomon qui vient ensuite. Et les triangles obtenus par l'addition sont ceux-ci

3 6 10 15 21 28 36 45 55

et de même dans la suite.

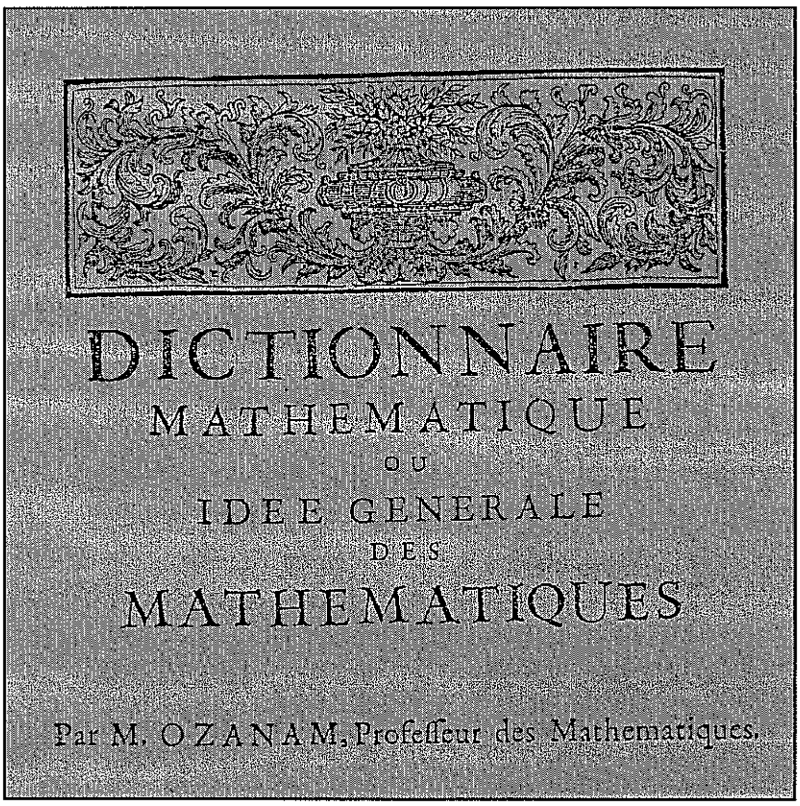
[20] Le terme gnomon désigne habituellement une équerre, comme celle que forme le stylet d'un cadran solaire avec le plan où se projettent les ombres. Si ce sens convient assez bien au raisonnement présent, qu'illustre la figure ci-après, il prend dans la suite un sens plus général que nous laissons au lecteur le soin de découvrir.

1	3	6	10	15
α	α	α	α	α
	α α	α α	α α	α α
		α α α	α α α	α α α
			α α α α	α α α α
				α α α α α

(...)
20. Quant aux [nombres] carrés, ils sont produits, comme on l'a dit, par les nombres impairs à partir d'une monade ajoutés les uns aux autres, et ils ont cette propriété qu'ils sont alternativement pairs et impairs, de même que tout nombre à part l'unité est pair ou impair, ainsi :

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

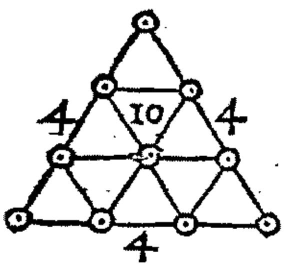
En exposant maintenant, à partir d'une monade et dans l'ordre, les nombres pairs et impairs, les gnomons qui se surpassent l'un l'autre feront, ajoutés ensembles, des carrés comme on l'a démontré plus haut : les impairs, en effet, partant d'une monade se surpassent les uns les autres d'une dyade ; et de même, ceux qui se surpassent les uns les autres d'une triade feront, par ajout, des [nombres] pentagonaux, ou hexagonaux si c'est par une tétrade, et toujours l'excès mutuel des gnomons par lesquels sont produits les [nombres] polygones est déficient de deux par rapport au [nombre de] côtés [des figures] qui en résultent.
(...)
28. De deux [nombres] triangles on forme des carrés : de 1 et 3 vient 4, de 3 et 6, 9 ; de 6 et 10, 16 ; de 10 et 15, 25 ; de 15 et 21, 36 ; de 21 et 28, 49 ; de 28 et 36, 64 ; de 36 et 45, 81. Et les triangles qui viennent ensuite, quand on les associe par deux de la même façon, font des [nombres] carrés, de la même façon, dans les figures géométriques, que la composition des triangles produit une figure carrée.

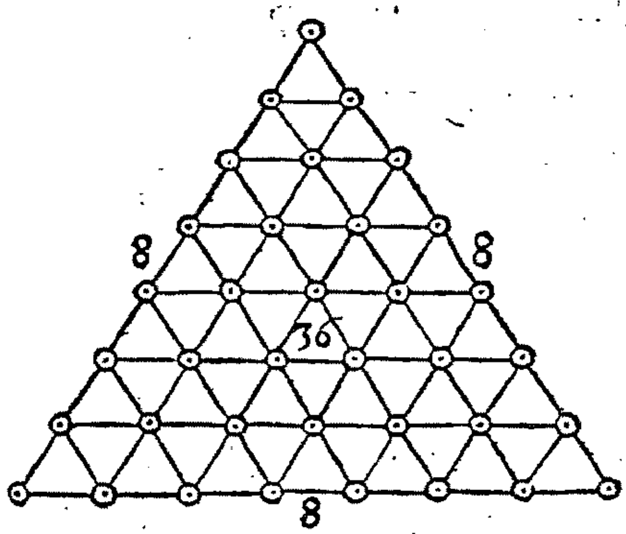

DICTIONNAIRE
MATHEMATIQUE
OU
IDEE GENERALE
DES
MATHEMATIQUES
Par M. OZANAM, Profeſſeur des Mathematiques.

TEXTE d'Ozanam, *Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques*, 1691, article 'Nombre polygone simple'

Le *Nombre Polygone ſimple* eſt la ſomme d'autant de nombres entiers que l'on voudra, apellez *Gnomons*, dont le premier eſt l'unité, & qui croiſſent à l'infini par un excez égal. La ſomme des deux premiers Gnomons eſt le premier nombre Polygone, dont le côté eſt 2. La ſomme des trois premiers Gnomons eſt le ſecond nombre Polygone, dont le côté eſt 3. La ſomme des quatre premiers Gnomons eſt le troiſiéme nombre Polygone, dont le côté eſt 4. Ainſi en ſuite. Ce nombre eſt apellé *Polygone*, parce qu'il repreſente le nombre des points qu'il faut pour remplir un Polygone regulier en égales diſtances priſes ſur des lignes paralleles aux côtez du Polygone. Ce que nous allons dire vous fera mieux comprendre cela.

Quand les Gnomons ſe ſurpaſſent de l'unité, comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. les Polygones qui ſe forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainſi en ſuite, ſçavoir 3, 6, 10, 15, 28, 36, 45, 55, 66, 78, &c. ſont apellez *Nombres Triangulaires ſimples*, parce qu'ils repreſentent les nombres des points qu'il faut pour remplir un Triangle équilateral, en diſtances égales priſes ſur des lignes paralleles aux côtez du Triangle équilateral.

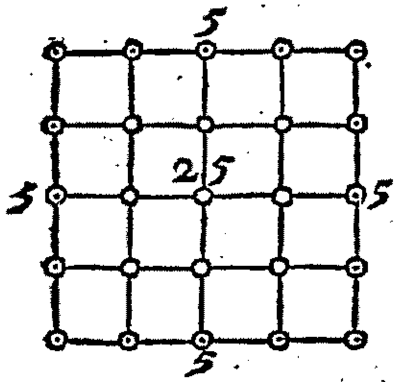


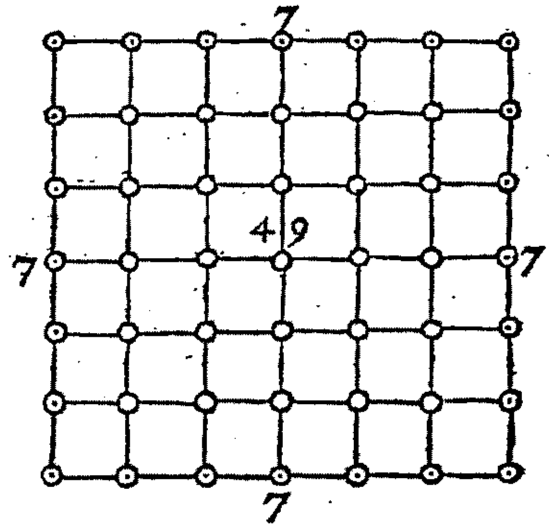


La proprieté de ces nombres Triangulaires eſt que quand ils ſont mis par ordre, comme les precedens 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 66, 78, &c. la ſomme 9 des deux premiers 3, 6; la ſomme 16 du ſecond & du troiſiéme : la ſomme 25 du troiſiéme & du quatriéme : la ſomme 36 du quatriéme & du cinquiéme, & ainſi en ſuite, eſt un nombre quarré.

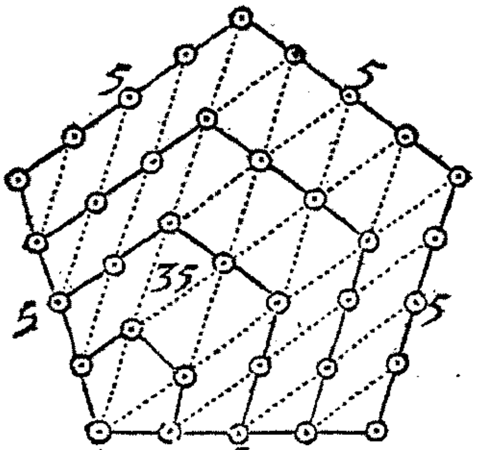
Mais il y a une autre proprieté remarquable, *Si on multiplie un nombre triangulaire par 8, & que l'on ajoûte l'unité au produit, la ſomme ſera un nombre quarré.* Ainſi on connoît que ce nombre 78 eſt un nombre triangulaire, parce qu'étant multiplié par 8, & le produit 624 étant augmenté de l'unité, la ſomme 625 eſt un nombre quarré, dont le côté eſt 25. D'où il ſuit que l'unité eſt virtuellement un nombre triangulaire, puiſque cette proprieté luy convient : ce qui fait que dans les nombres triangulaires mis par ordre, on met ordinairement l'unité pour le premier.

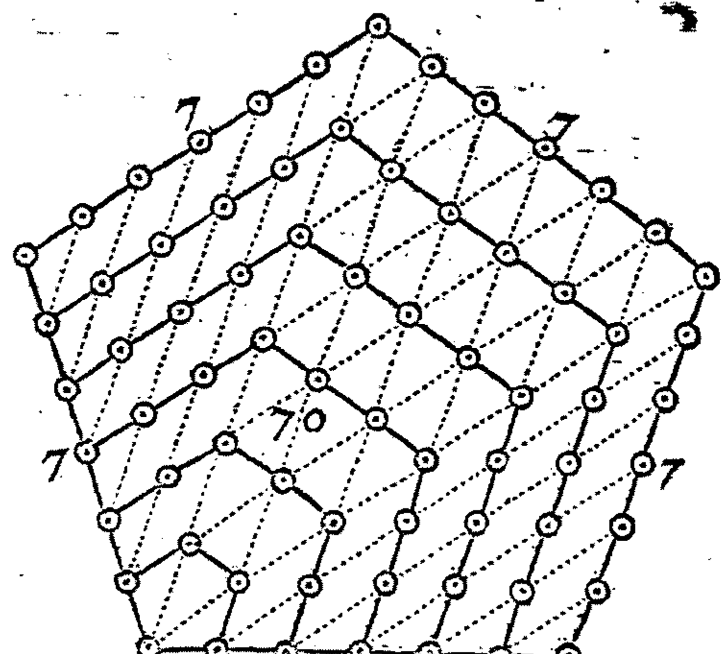
Quand les Gnomons ſe ſurpaſſent de deux unitez, comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, &c. les Polygones qui ſe forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainſi en ſuite, ſçavoir 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, &c. ſont apellez *Nombres Quarrez ſimples*, parce qu'ils ſont éfectivement des nombres quarrez, & qu'ils repreſentent les nombres des points qu'il faut pour remplir un Quarré en diſtances égales priſes ſur des lignes paralleles aux côtez du Quarré.





Quand les Gnomons ſe ſurpaſſent de trois unitez, comme les ſuivans 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, &c. les Polygones qui ſe forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainſi en ſuite, ſçavoir 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, &c, ſont apellez *Nombres Pentagones*, parce qu'ils repreſentent les nombres des points qu'il faut pour remplir un Pentagone regulier en diſtances égales priſes ſur des lignes paralleles aux côtez du Pentagone.



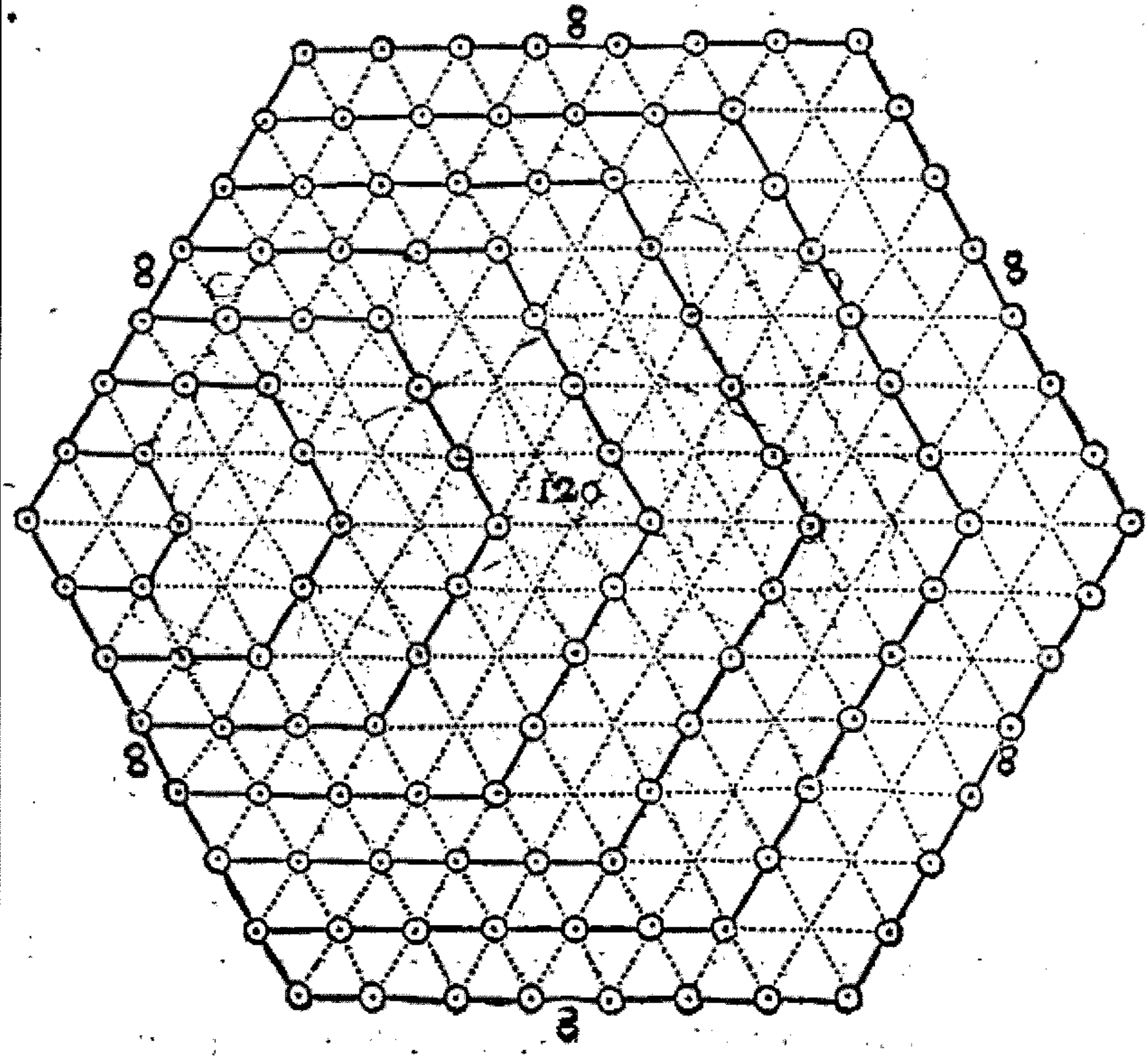


La proprieté de ces nombres Pentagones eſt que *chacun eſt égal à la ſom-*

me d'un Quarré de même côté & d'un Triangle dont le côté eſt moindre de l'unité. Ainſi ce nombre Pentagone 35, dont le côté eſt 5, eſt égal au Quarré 15 du même côté 5, & au Triangle 10, dont le côté eſt 4. Pareillement ce nombre Pentagone 70, dont le côté eſt 7, eſt égal au Quarré 49 du même côté 7, & au Triangle 21, dont le côté eſt 6. Ainſi des autres.

Mais le nombre Pentagone a une autre proprieté remarquable, ſçavoir que *ſi on le multiplie par 24, & qu'au produit on ajoûte l'unité, la ſomme ſera un nombre quarré.* Ainſi en multipliant ce nombre Pentagone 35 par 24, & en ajoûtant 1 au produit 840, on a ce nombre quarré 841, dont le côté eſt 29. De même en multipliant par 24 ce nombre Pentagone 70, & en ajoûtant l'unité au produit 1680, on a ce nombre quarré 1681, dont le côté eſt 41. Ainſi des autres.

Quand les Gnomons ſe ſurpaſſent de quatre unitez, comme les ſuivans 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, &c. les Polygones qui ſe forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, & ainſi enſuite, ſçavoir 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190,

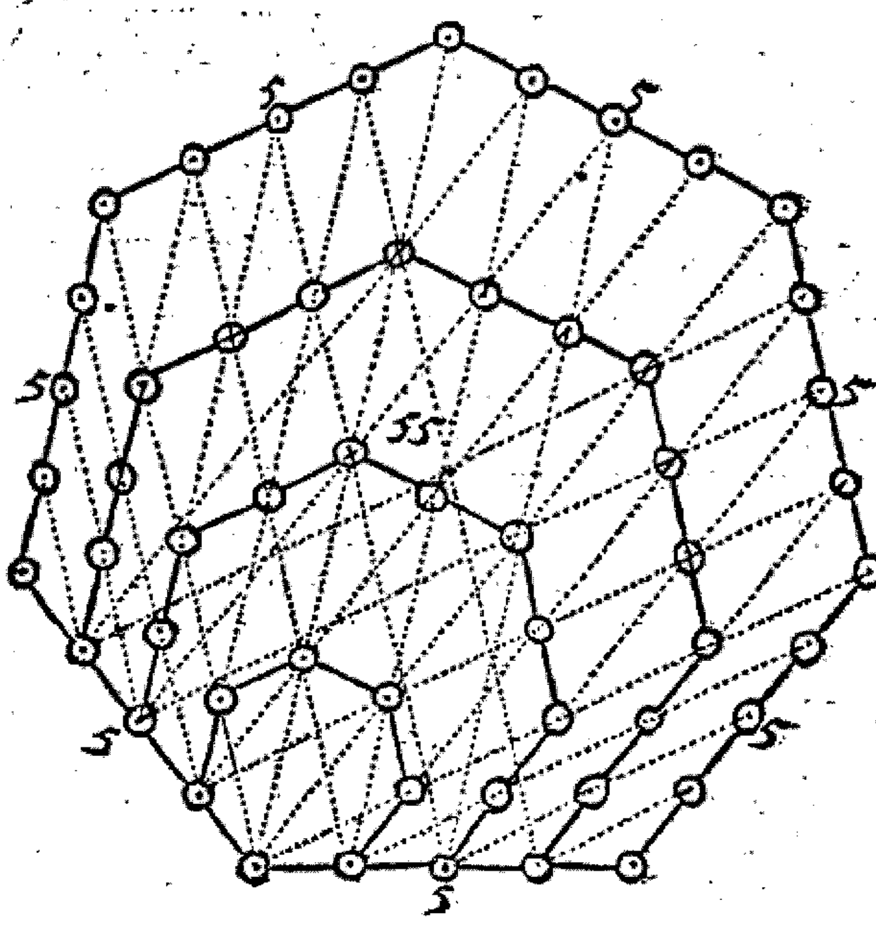


&c. sont apellez *Nombres Exagones*, parce qu'ils representent le nombre des points qu'il faut pour remplir un Exagone regulier, en distances égales, prises sur des lignes paralleles aux côtez de l'Exagone.

La proprieté de ces nombres Exagones est que *chacun est égal à la somme d'un Quarré de même côté, & de deux Triangles égaux, où le côté est moindre de l'unité dans chacun.* Ainsi l'Exagone precedent 120, dont le côté est 8, est égal au Quarré 64 du même côté 8, & aux deux Triangles égaux 28, 28, où le côté est 7 dans chacun. Outre cela dans les nombres Exagones, tous les nombres parfaits se rencontrent, comme 6, 28, &c.

Mais le nombre Exagone a une autre proprieté remarquable, sçavoir que *si on le multiplie par 8, & qu'au produit on ajoûte l'unité, la somme sera un nombre quarré*, comme dans le Triangle. Ainsi en multipliant par 8, l'Exagone precedent 120, & ajoûtant 1 au produit 960, la somme 961 est un nombre quarré, dont le côté est 31.

Quand les Gnomons se surpassent de cinq unitez, comme les suivans 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, &c. les Polygones qui se forment par l'addition continuelle des deux premiers, des trois premiers, & des quatre premiers, &c. sçavoir 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235, &c. sont apellez *Nombres Eptagones*, & ainsi ensuite.



La proprieté de ces nombres Eptagones est que *chacun est égal à la somme d'un Quarré de même côté & de trois Triangles égaux, où le côté est moindre de l'unité dans chacun.* Ainsi l'Eptagone precedent 55, dont le côté est égal au quarré 25 du même côté 5, & aux trois triangles égaux 10, 10, 10, où le côté est 4 dans chacun.

Mais le nombre Eptagone a une proprieté remarquable, sçavoir que *si on le multiplie par 40, & qu'on ajoûte 9 au produit, la somme sera un nombre quarré.* Ainsi en multipliant par 40 l'Eptagone precedent 55, & en ajoûtant 9 au produit 2200, la somme 2209 est un nombre quarré, dont le côté est 47.

Pour trouver promptement un Polygone, le côté étant donné, il n'y a qu'à regarder la Table suivante, qui pourra servir à ceux qui entendent l'Algebre.

Triangle $\frac{xx + 1x}{2}$. *Ou* $\frac{xx - 1x}{2}$.

Pentagone $\frac{3xx - 1x}{2}$.

Exagone $2xx - 1x$.

Eptagone $\frac{5xx - 3x}{2}$.

Octogone $3xx - 2x$.

Enneagone $\frac{7xx - 5x}{2}$.

Decagone $4xx - 3x$.

Endecagone $\frac{9xx - 7x}{2}$.

Dodecagone $5xx - 4x$.

On voit aisément par cette Table, que le côté du Polygone étant 1, le Polygone est aussi 1 : & c'est pour cela que dans l'ordre des nombres Polygones on met ordinairement l'unité pour le premier.

Ceux qui n'entendent pas l'Algebre, pourront se servir du Canon suivant, que nous avons tiré de *Bachet*, pour trouver un nombre Polygone, dont le côté est donné.

Multipliez le côté donné par le nombre des côtez du Polygone diminué de deux unitez, & ayant ôté quatre unitez du produit, multipliez le reste par la moitié du côté donné.

Les nombres Polygones sont d'un grand usage pour les partis du Jeu, & pour les combinaisons, & encore dans l'Algebre pour les Puissances des Binomes & Apotomes, comme l'on peut voir dans le Traité du *Triangle Arithmetique* de *M. Pascal*.