

IREM
PARIS 7

**Documents pour la formation
des enseignants**

n° 9
Juin 2007

**Mettre du relief sur les mathématiques à
enseigner au collège et au lycée – quelques
exemples**

**M. Pariès, N. Pouyanne, A. Robert, E. Roditi,
M. Rogalski**

ISSN : 2102-488X

**INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT**

**Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner
au collège et au lycée – quelques exemples.**

M. Pariès, N. Pouyanne, A. Robert, É. Roditi, M. Rogalski

Introduction

1) L'enjeu de ce travail

Activités d'introduction, cours, exercices, problèmes... À quoi correspond cet ordre actuel, quasi immuable, des chapitres des manuels de mathématiques du secondaire ? Est-ce que toutes les notions mathématiques à enseigner sont « analogues » et doivent être travaillées de la même façon ? Y a-t-il lieu de commencer certains chapitres par « faire un cours » ? Manque-t-il certains exercices ? Comment élaborer des exercices suffisamment variés ? Y a-t-il lieu de proposer des activités transversales, qu'on ne peut pas « ranger » dans un chapitre de manuel ? Comment faire travailler le symbolisme spécifique à certaines notions ?

Notre ambition ici est de compléter certains outils déjà introduits en didactique des mathématiques (rappelés au fur et à mesure) en indiquant des moyens systématiques pour « donner du relief » aux mathématiques enseignées, par delà l'épistémologie même de ces notions et leurs enjeux scientifiques : il s'agit de contribuer à enrichir les choix *a priori* des enseignants, au quotidien et à plus long terme, en ce qui concerne les contenus mathématiques qu'ils proposent aux élèves et la manière de les faire travailler¹, en leur donnant des moyens de s'orienter dans le paysage mathématique et des repères pour adapter les activités des élèves (surtout en classe) aux spécificités des mathématiques visées par l'enseignement et aux difficultés des élèves déjà connues.

Il ne s'agit donc pas de connaissances nouvelles mais d'une organisation (professionnelle) des connaissances mathématiques des enseignants, qui enrichissent les ressources déjà acquises et les rendent peut-être plus disponibles. Ce relief n'intéresse pas directement les élèves, sauf exception, pour certains commentaires « méta »².

Nous pensons que les programmes ne permettent pas toujours de renseigner suffisamment sur ce qui est en jeu dans une notion pour élaborer des situations d'introduction significatives (ou y renoncer en toute bonne conscience), ou pour concevoir des dynamiques consistantes entre le travail du sens et le travail de la technique par exemple, notamment avec des exercices suffisamment variés, ou pour mettre au point des situations pouvant servir à organiser les connaissances des élèves, ou encore pour imaginer des commentaires « méta ».

Ce serait des éléments de ce que nous appelons « relief » qui pourraient contribuer par exemple à trouver des repères permettant de s'adapter à la spécificité de chaque notion nouvelle : ainsi, pour introduire une notion nouvelle, cela donne des arguments pour choisir entre exposer directement la notion ou commencer par proposer aux élèves un problème facilitant la compréhension ultérieure de la notion ; selon les notions, ce problème peut soit mettre en jeu de manière nécessaire³ la notion, avec ou non un saut informationnel pour les élèves, soit il permet d'étendre des connaissances anciennes⁴, soit encore il amène les élèves à se poser des questions pertinentes pour commencer à comprendre ce que la notion apporte (cf. situations fondamentales, Legrand M., 1996, questions cruciales, Chevallard, 2007...).

¹ Cela peut contribuer à enrichir ainsi les composantes cognitives des enseignants.

² Relatifs aux mathématiques enseignées, Robert, Robinet, 1996

³ Avec des contrôles internes au problème

⁴ En utilisant des outils encore implicites

Ce relief peut aussi, plus globalement, contribuer à ce que les enseignants rétablissent une certaine cohérence⁵ au sein des progressions imposées par les programmes dans les grands domaines abordés au collège et au lycée, à détecter les implicites, ce qui est admis sans le dire⁶, non encore formalisé, voire ignoré⁷, à mettre en évidence certains artefacts pédagogiques intermédiaires⁸, à comprendre le niveau de rigueur qu'on peut attendre à chaque palier⁹, et même à réfléchir à la relativité des aspects formels des mathématiques – pour les démonstrations notamment.

Précisons que toutes les démarches correspondant à un tel travail de mise en relief des mathématiques à enseigner sont à inscrire dans les programmes scolaires, dont elles dépendent : toutes nos analyses ont un caractère relatif.

Soulignons enfin que pour mettre en évidence le relief global que nous cherchons, nous pouvons être amenés à relire des éléments d'histoire et/ou d'épistémologie des mathématiques. Mais ce travail diffère fondamentalement de celui de l'historien ou de l'épistémologue : nous ne faisons pas avancer les réflexions sur le sujet, nous cherchons à tirer des travaux déjà faits¹⁰ des éléments assez globaux, comme notamment les problèmes éventuels ou les projets¹¹ à l'origine des avancées. Cela nous renseigne aussi sur les difficultés qui se sont présentées et les erreurs résistantes, sur l'ordre dans lequel les différentes notions sont apparues, etc. Au mieux pouvons-nous poser des questions nouvelles à ces spécialistes...

2) Positionnement par rapport à la Théorie Anthropologique du Didactique.

Les organisations mathématiques élaborées par Chevallard, 1999 (types de tâches, techniques, technologies, théories) fournissent aux enseignants un puissant relief sur les mathématiques enseignées, inspiré d'un modèle « universel » de développement des mathématiques. Nous n'adoptons pas ce modèle pour nos analyses, même si nous reprenons volontiers certains résultats obtenus dans ce cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) : nous incluons en effet d'emblée dans notre relief les questions liées au développement cognitif des élèves, à leurs apprentissages, voire à leurs différences.

Ainsi, par exemple, ce n'est pas le relief associé à l'exhaustivité des tâches qui nous intéresse d'abord (point de vue strictement mathématique) mais bien celui qui est attaché à leur diversité : pour l'apprentissage que nous visons, ce sont les différentes mises en fonctionnement des connaissances mathématiques qui doivent être repérées, distinguées et non toutes les mises en fonctionnement.

Cela nous amène aussi à introduire des types de notions, qui sont différenciées par leur inscription dans les connaissances des élèves : selon qu'elles sont dans la continuité ou non de

⁵ Et éviter les cercles vicieux d'une année sur l'autre, par exemple en géométrie.

⁶ Par exemple le fait que l'aire d'un triangle est égale à la somme des aires de son triangle des milieux et des trois autres petits triangles restant est admis sans même le dire ! Alors que pour les périmètres, on fait allusion à la figure... (cf. Arsac, 1998)

⁷ Par exemple la convexité au collège

⁸ Et à en comprendre le caractère provisoire (cf. Frère, 1997)

⁹ Par exemple les cas de figures ne sont plus nécessaires à envisager en géométrie affine euclidienne, alors qu'ils devraient être pris en compte au collège.

¹⁰ De nombreux articles ont paru dans la revue Repères-IREM, dont ceux de R. Bkouche (site internet) par exemple, qui peuvent donner des idées au didacticien, qui les intègre dans un autre cadre de réflexion, faisant intervenir les apprentissages.

¹¹ Projets de réorganisation par exemple

ce qu'ils ont déjà travaillé. De ce fait, nous pensons que le travail que l'enseignant devra proposer aux élèves pour introduire ces notions ne sera pas du même type : nous ne reprenons pas non plus les organisations didactiques de l'étude, à cause de notre besoin (théorique) d'introduire des différences selon les notions enseignées, voire selon les élèves.

3) Les mathématiques enseignées : découpées en chapitres de programmes successifs, organisées en listes de compétences à acquérir.

De grandes questions ont été au cœur de la constitution des mathématiques : compter, mesurer diverses grandeurs et pouvoir les comparer, étudier les figures et les transformer, traduire la variabilité - de l'infiniment grand à l'infiniment petit - et décrire des phénomènes évolutifs, résoudre des équations, étudier le hasard, dégager des structures...

Aujourd'hui leur développement a pris de telles proportions qu'on ne peut pas toujours raconter simplement ce dont les mathématiques traitent ni décrire comment on y travaille. On peut retenir toutefois que les mathématiques n'évoluent pas toujours de la même manière. À des phases de découverte, y compris en lien avec d'autres disciplines comme la physique, succèdent souvent des moments de réorganisation, plus axiomatiques, internes aux mathématiques.

On peut cependant énoncer des généralités sur ce champ disciplinaire, spécifique : par exemple les mathématiques ont un caractère cumulatif important, chaque concept présente à la fois des caractères outils et objets (Douady, 1987).

La question des représentations est centrale : un même concept peut être travaillé dans des domaines (cadres) différents, avec des représentations, écritures ou registres différents (Duval, 2002).

La question de l'organisation est aussi centrale : les différents concepts sont organisés en réseaux divers, qui traduisent leur dépendance entre eux (cf. champs conceptuels de Vergnaud, 1990).

De plus « faire des mathématiques » (à partir de la classe de quatrième notamment) nécessite d'adopter une forme particulière de logique (tiers exclu), de validation (raisonnements déductifs organisés en démonstrations), d'écritures (différents registres dont certains symboliques) qui amène même certains chercheurs à formaliser des connaissances sur l'activité mathématique comme du savoir à enseigner : connaissances de divers ordres (Cesame, 2001) ou sur le « méta » (Castela, 2000, Dorier, 1997, Robert et Robinet, 1996, Rogalski, 1998).

Les grands domaines qui sont abordés dans les mathématiques enseignées au collège et au lycée – arithmétique, algèbre, analyse, géométrie, statistiques et probabilités – sont décrits dans les programmes à partir d'un découpage de chaque domaine en notions et compétences à atteindre pour les élèves. Les programmes successifs présentent ces mathématiques de manière très linéaire et découpée, même si les documents d'accompagnement tentent de restituer une certaine globalité, au moins par cycle, et une progression mais ces dernières portent davantage sur les activités des élèves, qu'on retrouve dans différents chapitres, que sur une réflexion épistémologique, liée au champ et au travail scientifiques eux-mêmes.

Nous défendons, sans beaucoup d'originalité, l'idée que ce n'est pas en enseignant exclusivement à partir de ces découpages *a posteriori* et en particulier en ne ciblant que les compétences énumérées qu'on optimise les apprentissages.

Pour prendre un exemple, certaines compétences correspondent à l'application d'une règle. Or, en schématisant, enseigner une règle de manière isolée ne permet pas toujours

d'apprendre la règle – car les adaptations et contrôles nécessaires à une utilisation efficace ne relèvent pas seulement de la technique, pensons-nous.

Autrement dit nous nous plaçons dans une perspective plus conceptuelle, nous cherchons, même si ce peut être à des degrés divers, à faire entrer les élèves dans des activités mathématiques consistantes, non réduites à des applications immédiates de « recettes » tirées du cours, en un mot à faire construire aux élèves certaines connaissances mathématiques. Y compris pour qu'ils acquièrent de bonnes techniques et les compétences attendues !

Nous avons à notre disposition des éléments inspirés de théories de l'apprentissage et des travaux didactiques qui spécifient aux mathématiques et à la situation scolaire les éléments plus généraux, puisque c'est dans une visée d'apprentissage que nous réfléchissons aux spécificités des mathématiques à enseigner.

4) Références aux théories générales de l'apprentissage et aux théories didactiques

Nous retenons schématiquement des théories disponibles l'importance des activités que les élèves ont à faire et leur relation avec leur apprentissage. Ces activités sont caractérisées par un contenu mathématique – par exemple un énoncé – et par le travail que les élèves fournissent à partir de ces contenus – par exemple travail collectif, aboutissant à une production : c'est la mise en fonctionnement des connaissances anciennes, en cours d'acquisition, indiquées ou non, qui nous intéresse au premier chef.

Bien entendu la mémorisation, la constitution d'automatismes, tout comme la construction du sens¹² sont partie prenante de ces apprentissages, toutes directement liées aux activités que les élèves vont avoir à faire en classe et hors classe.

Nous retenons en particulier l'intérêt de mettre en jeu, si c'est possible, des situations de recherche où les élèves peuvent construire en partie leurs connaissances, notamment avant que le savoir leur soit exposé de manière générale, pour donner ainsi plus de sens aux notions enseignées.

Nous avons aussi développé l'importance de proposer des problèmes transversaux, et/ou des problèmes comportant des changements de cadres, pour donner des occasions d'organiser les connaissances. Pour compléter cette perspective en termes d'activités, nous considérons qu'il est indispensable de développer des médiations entre les élèves et le savoir, que ce soit par l'organisation de travaux collectifs et d'échanges ou grâce à des aides bien placées et bien calibrées (cf. Zone Proximale de Développement).

On voit que notre conception de l'apprentissage sous-entend une certaine conceptualisation des notions visées, dans laquelle il est crucial de permettre le développement de dynamiques entre sens et techniques. Cependant, selon le niveau scolaire et les ambitions institutionnelles, la part de la conceptualisation visée peut varier. De plus, en tout état de cause, un certain nombre de concepts se développent au cours de la scolarité et on devrait parler d'un état de conceptualisation pour un moment donné de la scolarité. Par ailleurs, une certaine organisation des concepts entre eux semble associée à une certaine disponibilité des connaissances, notamment comme outils.

Cela étant, ces généralités et les quelques exemples élaborés dans des travaux de didactique ne suffisent pas toujours au quotidien à choisir les contenus à proposer aux élèves sur toutes

¹² Des interrogations demeurent sur les dynamiques « automatismes/sens » ou « technique/sens » à installer en classe.

les années scolaires. En particulier le travail reste à faire pour déterminer à chaque nouveau chapitre le cours et les exercices à mettre en œuvre compte tenu de la classe particulière concernée et du programme, voire des habitudes de l'établissement et de l'équipe de collègues. Même les ingénieries didactiques bien rodées, et il n'y en a pas beaucoup, nécessitent un travail préalable d'adaptation. Sans parler des déroulements, qui peuvent non seulement modifier les choix *a priori* d'activités des élèves mais encore avoir une influence en retour sur les nouvelles situations choisies) !

C'est, encore une fois, pour enrichir les moyens de ce travail au quotidien que nous proposons ce qui suit : par exemple la décision de passer beaucoup de temps sur une activité d'introduction, choisie en relation avec une analyse de la spécificité de la notion visée, ne peut être prise que si des « arguments » théoriques le justifient....

5) Transmission et/ou formations ?

Enfin, insistons sur une dernière difficulté et non des moindres : comment transmettre tous ces éléments de telle sorte que les enseignants se les approprient et les utilisent sans appréhension ?

Nous faisons l'hypothèse que c'est une des missions de la formation, de l'université à la formation professionnelle : c'est même sans doute un des domaines où une certaine continuité peut se développer. Nous n'abordons pas ici directement le sujet – nous renvoyons pour quelques exemples aux publications de l'IREM (cahiers bleus).

La littérature professionnelle est une ressource importante pour les enseignants, cependant là encore nous pensons qu'il n'est pas immédiat de profiter de ces articles – une certaine critique est nécessaire, dont nous prétendons qu'elle ne s'improvise pas. Nous donnons en annexe quelques exemples de l'utilisation du relief développé dans ce travail pour résumer un article de cette littérature professionnelle et mener l'indispensable réflexion critique permettant une appropriation adaptée (annexes 5,6).

Parmi les dispositifs envisagés pour former à mettre en œuvre ce type de réflexion, on peut citer les analyses de vidéo telles que nous les pratiquons, qui nécessitent une analyse des tâches *a priori*, souvent en relation avec la place des notions enseignées dans les programmes, et débouchent sur des problématiques plus générales, liées aux mathématiques enseignées.

Enfin les formations s'inspirant de l'histoire des mathématiques contribuent aussi à leur manière à cet objectif.

6) Présentation du cahier

Quels choix avons-nous faits ?

En quelques pages on ne peut pas couvrir toutes les notions nouvelles introduites au collège et au lycée, même si on travaille sur des réseaux de concepts liés entre eux. De plus de nombreux aspects, à des échelles variées, peuvent être introduits et contribuer à éclairer certains choix des enseignants, ce qui peut faire ressembler l'exposition de toutes ces dimensions à un catalogue, sans organisation, vu l'indépendance relative de ces aspects.

Enfin, il n'est pas toujours aisé, voire opportun, de « séparer » dans l'analyse d'une notion à enseigner ce qui relève strictement d'un certain relief mathématique et ce qui tient plutôt à un choix d'activité mathématique.

Dans ces conditions, d'une part nous allons présenter les éléments retenus en deux parties, un peu artificiellement séparées : nous exposons d'abord ce qui permet (surtout) de mettre du relief sur les mathématiques à enseigner, en allant du plus général au plus particulier (réseaux de notions, notion) puis ce qui permet (surtout) d'adapter les activités à proposer aux élèves à ce relief.

D'autre part nous donnons peu d'exemples développés, certains cependant sont des textes complets (longs) et autonomes et sont donnés en annexes (annexes 1, 2 et 4), d'autres sont indiqués en bibliographie mais nous ne prétendons pas à une quelconque exhaustivité.

Enfin, et nous devons le souligner, nous considérons que ce travail n'est qu'un début !

I Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner

Nous ne ferons pas ici la distinction entre connaissances et savoirs : simplement nous utilisons plus volontiers le mot connaissances lorsqu'il s'agit des élèves et le mot savoir pour désigner ce qui est écrit dans des textes mathématiques.

1) Entre les savoirs « savants » et les savoirs à enseigner : traquer et questionner la transposition didactique

Yves Chevallard (1985) et Guy Brousseau (1986) ont introduit la distinction entre le savoir mathématique, tel qu'il est dans les écrits, et le savoir à enseigner, découpé et ordonné par les programmes : ils ont repris l'idée de transposition didactique pour qualifier cette « transformation », idée dans la quelle nous nous inscrivons.

Un de nos enjeux est de donner des moyens de repérer certaines formes de transposition didactique, notamment lorsque le savoir enseigné s'éloigne beaucoup du savoir savant.

Signalons, à côté de traces subtiles déjà critiquées dans la littérature, le fait que les exercices d'application proposés dans les manuels jouent souvent sur des variations systématiques des coefficients numériques au lieu d'élargir les adaptations des connaissances mises en œuvre (nous y reviendrons).

Une autre source de réflexion tient à l'introduction d'artefacts pédagogiques, qui devraient vraisemblablement être provisoires, et qui restent dans l'enseignement, relevant ainsi d'une transposition très artificielle et très éloignée du savoir savant : ainsi les démonstrations à partir de dessins délibérément faux, qui ont leur heure de gloire dans certains manuels, sous le prétexte de dissuader les élèves d'utiliser des arguments de type « on voit sur la figure » au lieu de démontrer¹³ ; ou encore les tableaux en trois colonnes pour démontrer (je sais que... ; d'après... ; donc...), présentés comme une méthode systématique de démonstration en quatrième et donnant l'illusion d'une réduction possible des démonstrations à des procédés algorithmiques (cf. annexe 7).

Cela dit, le « nouveau » dans un programme de mathématiques (sur l'année scolaire) peut recouvrir des domaines de travail nouveaux mais aussi des notions nouvelles (trigonométrie en quatrième par exemple), des cadres nouveaux (cadre graphique ou algébrique au collège par exemple), des objets nouveaux (produit scalaire en première par exemple), ou des théorèmes et des propriétés (théorèmes de Thalès ou de Pythagore au collège par exemple).

Comment mettre du relief sur ce qui est nouveau dans chaque cas ? Comment traiter les relations « ancien/nouveau » ?

¹³ Cf. Différents types de dessin dans les activités d'argumentation en classe de 5^{ème}, Coppé et Dorier, 2005.

Nous allons d'abord passer en revue ce que peut recouvrir le nouveau en mathématiques dans la scolarité puis nous introduirons une manière de voir la « valeur ajoutée » correspondante pour qualifier le nouveau en relation avec les connaissances déjà introduites (« l'ancien »). Cela nous amènera à distinguer plusieurs types de notions. Puis nous introduirons des éléments plus locaux, liés à chaque notion.

2) Sur le long terme, apprécier le « nouveau » dans les mathématiques à enseigner (collège, lycée) : niveaux de conceptualisation,

a) Les niveaux de conceptualisation, une manière d'interpréter certains gros découpages des programmes dans certains domaines mathématiques.

Plusieurs domaines mathématiques sont introduits au cours de la scolarité. Les statistiques en sont un exemple assez récent, mais aussi l'algèbre élémentaire, la géométrie vectorielle (essentiellement au lycée) – même si c'est en partie caché, les fonctions en seconde et l'analyse à partir de la première en sont d'autres.

La notion de cadre introduite par R. Douady (1987) permet de rendre compte partiellement de différents domaines de travail, cependant nous proposons d'y ajouter l'idée de niveau de conceptualisation, qui permet de décrire des domaines de travail très gros, ayant une cohérence mathématique, pouvant comporter plusieurs cadres, et qui existent souvent à certaines étapes du développement historique.

Cette catégorisation permet notamment de réfléchir aux fondements qui sont à l'œuvre, même s'ils sont implicites, aux cohérences nécessaires au développement des notions dans le niveau et aux notions non encore formalisées qui sont utilisées « quand même » (cf. ci-dessous). C'est une distinction qui permet de mettre en évidence une certaine relativité en mathématiques – relativité de la rigueur, des démonstrations notamment (cf. Arsac, 1997).

Un *niveau de conceptualisation* (cf. Robert, 1995, Dorier, 1997, Robert, 1998) désigne un domaine mathématique assez important, relativement auto-consistant, cohérent, enseigné (ou pouvant être enseigné) au moins en partie : il est spécifié par

- des fondements (axiomes, originaux ou empruntés à d'autres champs mathématiques comme le numérique ou l'ensembliste) – fondements qui peuvent rester implicites mais qui peuvent tout de même être dégagés ;
- un corps de définitions¹⁴ (objets, notions, concepts – avec les cadres et registres impliqués, cf. annexe 8 pour la géométrie chez Euclide) ;
- un corps de théorèmes, de propositions (c'est ce que nous appellerons l'arsenal du niveau) ;
- des modes de raisonnements, des démarches et la rigueur correspondante ;
- un corps de problèmes que l'on peut résoudre en son sein, qui permette de dégager l'enjeu du domaine ;

Le travail mathématique dans un même niveau de conceptualisation peut se faire dans plusieurs cadres, par exemple en géométrie : ponctuel, vectoriel, numérique, analytique, cadre de la figure, en utilisant plusieurs registres (on peut convoquer les coordonnées cartésiennes, polaires ou barycentriques, les notations intrinsèques $\vec{u}$, ou $\overrightarrow{AB}$, les nombres complexes qu'ils soient écrits sous forme algébrique, trigonométrique, géométrique,...).

¹⁴ Même si ces définitions ne sont pas correctes à nos yeux, comme chez Euclide

La cohérence indique qu'on pourrait dérouler sans qu'il y ait de « trous » les démonstrations nécessaires à établir l'arsenal du domaine en se référant aux seuls fondements et définitions initiales (sans qu'il y ait à le faire avec les élèves !) et qu'on peut résoudre les problèmes du champ avec cet arsenal mis en place.

Les relations entre niveaux de conceptualisation ne sont pas de simples inclusions¹⁵ : c'est une autre organisation des savoirs qui est en place, et selon les cas, il s'agit de généralisation ou d'une autre centration sur les fondements ou un changement de ces fondements.

L'intérêt de ce relief, très global, tient pour nous¹⁶ à la mise en évidence pour les enseignants d'une organisation des savoirs et connaissances et à ses conséquences sur le travail mathématique à proposer aux élèves dans chaque niveau. Cela nous permet de mieux classer les outils disponibles les uns par rapport aux autres, de faire des choix de démarches. Cela nous permet aussi de mieux repérer les changements de domaines, et ne pas les confondre avec les changements de cadres, etc. Enfin cela nous permet d'approfondir ce qui est licite ou non selon le niveau.

b) L'exemple de la géométrie¹⁷

Par exemple, deux niveaux de conceptualisation traversent la géométrie enseignée du collège aux premières années d'université : la géométrie « à la Euclide » (surtout développée au collège) – cf. annexe 8, la géométrie affine et affine-euclidienne (développée en DEUG et au CAPES, introduite subrepticement au lycée).

Le qualificatif « à la Euclide » indique que les fondements et les progressions sont ceux d'Euclide mais qu'on a apporté des modifications « modernes » : l'utilisation implicite des nombres réels (et celle des formules d'aires), les transformations (ce qui sous-entend une notion ensembliste d'application du plan dans lui-même même si on ne fait opérer les transformations que sur des figures).

Remarquons que ces niveaux sont relativement indépendants, même si le corps des problèmes qu'ils permettent de résoudre est en partie commun ; un certain degré supplémentaire de généralité est acquis au deuxième niveau en géométrie. De plus, la chronologie scolaire entre ces niveaux n'est pas stricte : certains emprunts partiels à un niveau de conceptualisation pas encore développé à une étape donnée de la scolarité peuvent être repérés comme nous l'indiquerons (géométrie analytique au collège jusqu'à ces dernières années, juxtaposée à la géométrie à la Euclide, vecteurs au collège).

Le programme d'Erlangen fournirait un troisième niveau de conceptualisation en géométrie que nous n'évoquerons pas ici.

Pour donner un exemple de l'utilité de cette réflexion, indiquons que cela peut faire retrouver que, dans le niveau de conceptualisation « à la Euclide », du collège, il est indispensable de tenir compte des cas de figures, car c'est inscrit dans les fondements ; mais qu'on ne peut pas justifier tout ce qui relève de la convexité, notion non encore formalisée dans ce domaine... En revanche en géométrie affine, il n'est pas indispensable de tenir compte des cas de figure si on travaille avec les outils algébriques ou orientés (mesures algébriques, vecteurs, angles

¹⁵ Malgré ce que le mot « niveau » pourrait connoter implicitement – peut-être y aurait-il à modifier ce choix de vocabulaire ?

¹⁶ Nous, ie les enseignants, et peut-être les élèves.

¹⁷ Cf. Robert, 2003.

orientés, angles de droites, aires algébriques...). Et on dispose de la convexité, par exemple par l'intermédiaire des barycentres...

Des textes de D Perrin complètent ce rapide survol : dans le livre sur les mathématiques d'école (Perrin, 2005) et un compte rendu de lecture sur quatre livres de géométrie joint en annexe 9.

c) Autres exemples

Un travail du même type pourrait être fait dans le domaine numérique et celui de la mesure, pour mettre en évidence ces niveaux qui traversent le collège et le lycée.

Des éléments sur l'algèbre élémentaire sont joints en annexe 6, reprenant notamment les travaux de Grugeon, 2000.

Un travail complet et autonome sur l'intégrale est joint en annexe 1 (Rogalski).

Un travail sur les aires, les volumes et les mesures des grandeurs a été présenté dans Perrin, 2005 et dans Rogalski, 2003.

Une première esquisse sur les fonctions est jointe en annexe 4, complétée par la critique d'un article de la littérature professionnelle sur ce sujet en annexe 5.

Une étude sur l'analyse et la logique peut être trouvée dans Durand-Guerrier et Arsac (2003).

d) Champs conceptuels

Par ailleurs les champs conceptuels de Gérard Vergnaud (1990) constituent un découpage du savoir à enseigner en réseaux de concepts proches, à faire travailler ensemble, dans un ensemble de situations qui caractérisent le réseau. Il s'agit pour l'auteur de fournir un cadre qui « permet de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances chez les enfants et les adolescents » : ce dernier point ne rentre pas dans notre point de vue.

Les niveaux de conceptualisation que nous introduisons sont différents des champs conceptuels : ils ne sont liés qu'aux savoirs mathématiques tels qu'ils se sont développés dans l'histoire et qu'ils sont présentés dans les programmes. Cependant, l'utilisation commune du mot conceptualisation indique une préoccupation partagée, qui dénote une conception commune des apprentissages mathématiques appréhendés en relation avec cette conceptualisation : dans notre cas, la mise en évidence de ces niveaux donne des moyens à l'enseignant pour organiser transversalement les connaissances mathématiques à transmettre et caractériser le travail attendu à chaque niveau ; la théorie des champs conceptuels permet aux enseignants de mieux concevoir l'organisation cognitive que les élèves doivent atteindre pour un champ conceptuel donné.

3) Notions non encore formalisées (rédigé par N. Pouyanne).

Le mathématicien « idéal » tel qu'on se le représente parfois ne s'autorise à traiter d'une notion ou à l'utiliser dans un raisonnement que lorsqu'elle a été proprement définie, par lui-même ou par un consensus de la communauté scientifique. Cependant, dans le temps de l'enseignement, il en va bien autrement. Souvent, avant même d'avoir été définies, des notions sont manipulées par le biais de leurs propriétés opératoires. Dans une telle situation, on parlera de notion *non encore formalisée*.

Ainsi par exemple, les aires et longueurs des polygones ou même de figures courbes (les cercles, par exemple), objets récurrents des enseignements primaire et secondaire, font l'objet de formules et interviennent dans des raisonnements où l'on compare deux d'entre eux.

Pourtant, aucune définition complète de la longueur d'un arc ou de l'aire n'est traditionnellement accessible avant l'enseignement supérieur. Cela n'empêche aucunement d'utiliser leurs propriétés de positivité ou d'additivité et d'établir des théorèmes à leur sujet. Il en va de même pour les nombres réels, maniés dans tout l'enseignement secondaire. Ce n'est qu'à la fin du Lycée que l'on explicite la propriété de la borne supérieure sous une forme ou sous une autre (convergence des suites croissantes majorées par exemple) tout en se contentant de l'admettre. Il faut attendre l'enseignement supérieur pour voir formalisée – lorsque cela est traité – la construction du corps des réels.

Il arrive également que *plusieurs états formalisés* – ou partiellement formalisés – d'une même notion se succèdent dans le cours de l'enseignement, sans s'infirmes les uns les autres, par un processus d'extensions successives.

Les vecteurs en sont un exemple : direction-sens-longueur, puis classe d'équipollence de bipoints, enfin élément d'un espace vectoriel. La distance en est un autre : double-décimètre, puis formule de la distance euclidienne sur les coordonnées des points, enfin axiomes d'espace métrique. D'autres exemples sont fournis par les angles, les droites du plan, l'aire (des formules de l'école élémentaire aux parties quarrables puis à la théorie de la mesure).

Certaines notions enfin ont parfois plusieurs formalisations qui co-existent dans des cadres différents. Le même nom donné à l'objet dans les différents cadres constitue souvent une trace de cette co-existence.

Le cosinus, par exemple, intervient en géométrie dans le triangle rectangle, dans le produit scalaire de deux vecteurs, et par le biais de la fonction cosinus (celle de la calculatrice). Le nombre π intervient dans la formule de la longueur du cercle, dans celle de la surface du disque et dans l'égalité $\exp(i\pi) = -1$ et l'on s'assure rarement dans les cursus d'enseignement que c'est bien du même nombre qu'il s'agit dans les trois occurrences. Le même phénomène a lieu avec les puissances et la fonction exponentielle, la notation e^x étant justifiée par les propriétés fonctionnelles de la fonction exponentielle qui prolongent aux nombres réels les propriétés des puissances rationnelles ($a^p = \exp(p \log a)$ si p est rationnel). On peut également considérer que cela se passe dans les théorèmes qui fondent la géométrie du secondaire : le théorème de Thalès et la relation de Chasles sont mutuellement conséquence l'un de l'autre et le sens de l'implication retenue fluctue selon le moment de l'enseignement.

La plupart du temps, on fait opérer des notions non encore formalisées en *cachant* le fait qu'elles ne le sont pas – ou pas encore. À ce moment de l'enseignement, le choix de ces choses cachées constitue le choix de ce qui ne se discute pas (pas maintenant). Cette démarche est nécessaire – imaginerait-on de construire les nombres entiers à l'école élémentaire avant même de s'en servir ! – et n'est pas en contradiction avec le fonctionnement propre des mathématiques du chercheur. Les mathématiques ont de tout temps une double progression : vers « l'avant » et vers ses fondements. Dans l'enseignement, cette double progression existe aussi, parfois en accord avec le cheminement historique des notions. On définit *a posteriori* des objets que l'on manipule depuis longtemps – au risque de malentendus. Dans tous les cas, à partir du moment où une notion a été définie (formalisée), on ne fait plus référence à elle que par cette définition du moins en l'attente d'extensions. Si la définition est consistante, elle est suivie d'un corpus de théorèmes qui en légitiment le fonctionnement *a priori*, alors que la notion n'était pas encore formalisée ; on pourrait d'ailleurs comparer cette démarche à celle de la modélisation au sein d'autres sciences.

Souvent, les modes opératoires qui posent les exigences d'une formalisation au mathématicien suffisent à *caractériser* les objets qu'on cherche à définir, par un théorème d'unicité.

Les nombres réels en sont un exemple : chacun sait que le corps des réels est le seul à contenir le corps des rationnels et à vérifier les propriétés que l'on attend de sa relation d'ordre. La mesure de Lebesgue en est un autre exemple : si l'on cherche une mesure (sur les boréliens) qui prolonge celle des segments ou rectangles et qui soit invariante par translation, on tombe nécessairement sur celle-là.

Mais cela n'est pas toujours aussi limpide, comme le montre par exemple la notion de fonction continue. On peut considérer que la définition contemporaine de la continuité d'une fonction cherche à formaliser l'absence de saut en un point (le fameux « dessiner sans lever le crayon »). Une fois cette notion formalisée, on s'aperçoit vite que le concept est enrichi par les discontinuités de seconde espèce (du type $\sin(1/x)$ à l'origine) que la démarche de formalisation ne prévoyait peut-être pas.

Pour conclure, en quelque sorte, à quelque moment du cursus scolaire, on révèle la chose cachée par une formalisation et des énoncés qui en découlent. Dans le cas de la coexistence de plusieurs formalisations appartenant à des cadres distincts, révéler les relations entre elles relève de l'organisation des connaissances. La conscience des mécanismes de formalisation, de l'existence de notions cachées et de leur détection influe sur l'organisation et la cohérence des notions sur le long terme et permet de prendre en compte la dualité entre intuition et rigueur qui lie l'objet « vraiment pensé » (conceptualisé ?) à son statut logique.

4) « Valeur ajoutée » des notions nouvelles en relation avec l'ancien et le travail des élèves

Un des enjeux ici est de comprendre, au niveau des notions à enseigner, le rapport entre ce qui est nouveau et ce que les élèves ont déjà travaillé et en particulier d'en inférer des modes d'introduction de ce nouveau adaptés aux caractéristiques analysées, évidemment compte tenu des programmes scolaires. Une notion peut relever de plusieurs introductions.

Un cadre par exemple est un domaine de travail qui se caractérise, comme un niveau de conceptualisation, par certains fondements (admis, implicites ou non) – un certain nombre d'objets, des théorèmes, un corps de problèmes et un système de représentations symboliques.

Par exemple le cadre de l'algèbre élémentaire suppose les propriétés des réels (implicitement admises), introduit des objets comme les expressions algébriques, les équations, les inéquations. Un certain nombre de propriétés sont travaillées : ce sont les propriétés de $\mathbb{R}(x)$, sans que ce soit dit, et il y a un corps de problèmes travaillés en algèbre élémentaire : transformation d'expressions, résolution d'équations, preuve par généralisation, etc. (cf. Grugeon, 2000)

Ici nous nous centrons sur un certain nombre de caractères que les nouvelles notions (ou nouveaux objets, ou nouveaux cadres, etc.) présentent par rapport aux anciennes et qui vont amener un travail spécifique des élèves, tout en analysant la fonction que la notion remplit dans le paysage mathématique dans lequel elle est introduite. C'est la combinaison de plusieurs de ces caractères qui va permettre de définir ces types de notions dont nous allons faire l'hypothèse qu'ils sont susceptibles d'être introduits de manière différente et spécifique.

Les fonctions des notions introduites, isolées ou groupées, c'est-à-dire le « à quoi ça sert », elles correspondent souvent soit à l'extension du champ d'application de notions déjà connues, soit à un nouvel objet dont on a « besoin » (caractère outil) soit à une propriété

générale, nouvelle, soit même à une réorganisation, souvent plus rigoureuse voire axiomatique, du champ mathématique correspondant.

Le caractère généralisateur apparaît quand ce qui est nouveau a une portée plus grande que ce que les élèves ont déjà à leur disposition : le nouveau étend l'ancien, que ce soit par extension du domaine d'application ou autrement, en introduisant de la généralité là où il y avait du particulier par exemple.

Par exemple le produit scalaire, le barycentre dans l'espace généralisent le produit scalaire, le barycentre dans le plan. La notion de corps généralise les structures des nombres réels et complexes.

Le caractère formalisateur se signale par l'introduction d'un formalisme nouveau – qui peut être ou non déjà utilisé mais de manière alors réduite.

Par exemple le formalisme du cadre de l'algèbre élémentaire est nouveau, à cause du x , mais il comprend les signes anciens comme le signe $=$, le $+$, etc. De plus l'utilisation de ces signes n'est pas la même en algèbre et en arithmétique élémentaire : il y a « accident », rupture, fausse continuité, faux-amis...

L'intégrale peut être introduite comme formalisant ce qui permet de calculer l'aire sous une courbe – il y a aussi dans cette notion un caractère unificateur, même s'il n'est pas toujours mis en évidence (cf. Robert et Rogalski, 2004).

Le caractère unificateur indique en effet que ce qui est nouveau remplace plusieurs éléments anciens, traités jusqu'ici « chacun pour soi ».

Par exemple la notion d'espace vectoriel unifie ce qui peut être fait séparément dans les espaces de polynômes, les espaces de suites, les vecteurs « géométriques »... (Dorier, 1997).

La formalisation de la notion de convergence de suites en (ε, N) a été introduite par Cauchy en 1827 et a permis de donner une définition unique, valable dans tous les cas, pour les toutes les méthodes utilisées jusqu'alors.

L'usage des lettres en algèbre correspond d'une certaine manière à une unification symbolique liée à l'écriture des variables.

Nous donnons en annexe (4,6) quelques éléments pour organiser le relief qu'on peut mettre sur le domaine « l'algèbre élémentaire » et sur le domaine « fonctions en seconde ».

5) Différents types de notions

Nous avons distingué très généralement trois types de notions : les extensions de concepts sans « accidents » ou avec accidents), les notions RAP (réponses à un problème) et les notions FUG (Formalisatrices, unificatrices, généralisatrices), et nous allons discuter de leurs introductions respectives.

Précisons.

Certaines notions (objets, théorèmes, etc.) sont des extensions de notions anciennes, que ce soit parce qu'elles ont un caractère généralisateur ou qu'elles se traduisent par un formalisme qui étend un formalisme antérieur.

Mais il y a des extensions « sans accident », où il y a congruence du travail entre le nouveau et l'ancien, et des extensions « avec accidents », où quelque chose change dans le travail à faire dans le nouveau et dans l'ancien.

Par exemple la multiplication des décimaux est une extension de celle des entiers, sans accidents au niveau du sens, mais différente au niveau de l'algorithme opératoire.

Le produit scalaire dans l'espace est une extension sans accident de celui dans le plan ;

En revanche passer, pour la relation d'ordre, des nombres entiers aux nombres rationnels comporte un accident, alors même que c'est une extension : on perd l'existence d'un « successeur ».

D'autres notions, plutôt objet, ont deux caractères.

Le théorème de Pythagore par exemple permet de donner une relation générale entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle, unifiant ainsi des situations particulières où les élèves peuvent vérifier ou infirmer la relation caractéristique.

On peut l'introduire comme réponse à un problème : le problème de caractériser les côtés d'un triangle rectangle. C'est une notion que nous appelons RAP – réponse à un problème...

~~Il en est de même du théorème de Thalès, qui permet de donner une relation générale caractérisant le parallélisme de droites coupant deux droites données, voire même des lignes trigonométriques d'un angle.~~

Il en est de même de l'intégrale, vue comme aire sous la courbe – cf. Robert et Rogalski, 2004.

Une étude de la racine carrée a été initiée par T. Assude¹⁸ : elle a dévoilé un statut, dans les *curricula*, qui a évolué entre

- jusqu'en 1960, une extension de notions connues (division remplacée par algorithme d'extraction), avec accidents (pour l'addition),
- pendant la réforme des maths modernes, une réponse à un problème général – fonction inverse de la fonction carrée
- aujourd'hui un statut assez flou, plutôt du côté des nombres (généralisateur). Ainsi la définition actuelle est une réponse unificatrice à un même problème (le nombre positif dont le carré vaut...). Ni l'existence ni le statut numérique du nombre correspondant ne sont abordés (ce que Assude appelle un arrêt de la transposition didactique).

Cela dit, cette notion est évidemment assortie d'un nouveau formalisme.

Enfin certaines notions ont les trois caractères à la fois : ce sont les FUG (elles permettent d'introduire plus de généralité en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme). Souvent ces notions simplifient la résolution des problèmes, apportent une certaine économie, le prix à payer étant d'adopter le nouveau formalisme.

On a déjà développé deux exemples : celui de la convergence des suites et celui des espaces vectoriel (Dorier, 1997, Robert, 1998).

Une étude est en cours sur les notions de topologie générale (Bridoux).

6) Du relief pour une même notion

Outil / objet / cadre

Régine Douady (1987) a introduit les caractères objet et outil des notions à enseigner : cela permet de distinguer d'une part les propriétés décontextualisées d'une notion (objet) et d'autre part ce qui est à l'œuvre lorsqu'on l'utilise dans un contexte, de manière souvent partielle

¹⁸ Dans le cahier bleu n°8 (Cissé, 2006), on trouve une étude résumée assez complète sur cette notion, des erreurs d'élèves, et son enseignement.

(outil). Elle a aussi mis en évidence l'intérêt de parler de cadre, qui peut se traduire en « domaine de travail », une notion étant souvent susceptible d'être travaillée dans plusieurs cadres (numérique, graphique, algébrique, géométrique avec mesure, sans mesure...).

Les registres sémiotiques

Raymond Duval (1995, 2002), travaillant sur les écritures mathématiques et les représentations des objets a proposé la notion de registres pour qualifier différentes écritures des mêmes objets. L'intérêt de cette distinction est d'une part de repérer qu'il y a des registres « non congruents », c'est-à-dire que le travail dans chacun d'eux n'est pas isomorphe en quelque sorte, ce qui est à la source de difficultés si rien n'est fait pour y préparer les élèves ; d'autre part cet intérêt tient au fait que le travail dans différents registres et les conversions entre eux est essentiel à la conceptualisation.

Différents points de vue

Plus flous que les cadres ou registres, les points de vue permettent d'indiquer différentes manières d'aborder la même propriété par exemple. Changer de point de vue pour faire une démonstration revient à adopter une certaine flexibilité (cf. littérature anglo-saxonne).

Classiquement (cf. Robert, 1995), pour traduire la concourance de trois droites on peut prendre le point de vue du point appartenant aux trois droites, ou du point d'intersection de deux d'entre elles qui appartient à la troisième, ou reconnaître trois hauteurs ou médianes d'un triangle, ou encore chercher trois droites concourantes dont les droites données sont l'image par une transformation.

Pour démontrer une égalité, on peut commencer par transformer le terme de gauche, ou celui de droite, ou transformer les deux.

Local / global / ponctuel

Nous avons déjà développé ces manières de mettre du relief sur les différents théorèmes ou énoncés mathématiques (Robert, 1995, Lattuati, Penninx, Robert, 1999).

Nous joignons en annexe 2 un texte beaucoup plus complet et autonome sur ces questions (Rogalski).

7) Du côté des signifiés / signifiants, représentations et ostensifs.

Le problème de la nature et la fonction des objets mathématiques amène à faire la dichotomie entre ostensifs (ayant une certaine matérialité) et non ostensifs (non manipulables, évocables ; ex : fonction, primitive...) ; les non ostensifs émergeant de la manipulation des ostensifs¹⁹.

Les ostensifs correspondent à ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir (caractère matériel et perceptible) : écritures- symboles- mots- discours- graphiques- gestes mobilisés dans l'activité mathématique.

Les ostensifs sont ainsi les signes associés à des non ostensifs, qui en constituent le sens ou la signification : cela se rapproche beaucoup des notions de signifiants/signifiés chez Vergnaud, 1991).

Comme, pour nous, les situations peuvent contribuer à donner du sens aux concepts mathématiques, alors les ostensifs ou les signifiants constituent un intermédiaire entre les

¹⁹ Cf. Bosch et Chevallard (1999), Bloch I Registres, ostensifs et travail mathématique

sujets et les objets à acquérir. Or il peut y avoir des confusions entre ostensifs et non-ostensifs : la co-activation d'ostensifs et de non ostensifs est toujours présente et apparaît à tous les niveaux d'activité.

La distinction entre ostensifs et non-ostensifs touche aux objets et non aux rôles que jouent ces objets dans la pratique. Il n'y a pas de liens, d'association naturellement nécessaires (ça dépend du contexte) entre ostensifs et non ostensifs.

Chez les deux auteurs cités, ostensifs et signifiants sont des ingrédients des activités mathématiques d'un sujet. Selon les niveaux scolaires étudiés, les signifiants²⁰ sont considérés comme externes aux savoirs mathématiques (Vergnaud), ou constituants de base du savoir mathématique (Chevallard).

Un cas particulier : les représentations des objets géométriques

Les objets géométriques sont représentés par des figures ou par des textes, l'activité géométrique (construction, démonstration, etc.) à la fois repose sur ces représentations et s'exprime par ces représentations. Le texte présenté en annexe 3, « Représentations des objets géométriques » (Roditi), précise ces deux modes de représentation des objets géométriques. Il montre les relations entre manière de représenter et activité géométrique, que l'on ait déjà appris la géométrie ou qu'on soit encore élève l'apprenant.

La géométrie enseignée est la géométrie à la Euclide (Robert, 2003), son enseignement ne peut porter directement sur le modèle théorique, il s'appuie sur les connaissances spatiales des sujets. La relation entre l'espace physique et l'espace géométrique est entretenue, notamment par les problèmes de constructions qui mettent en jeu les instruments de tracé (règle, compas, etc.) constituant des contraintes particulières. Pourtant, les rationalités mises en œuvre dans l'espace physique et dans l'espace géométrique sont très différentes et conduisent parfois à des résultats contradictoires.

L'activité de représentation des figures planes est une activité qui favorise la distinction entre les propriétés des objets représentés et les propriétés des représentations. Les représentations ont un rôle heuristique qui nécessite des traitements variés des figures.

Symbolisme / formalisme

Au-delà des apports de Chevallard et Duval, le rôle du symbolisme en mathématiques, et des formalismes qui y sont souvent attachés, est une question à l'étude, en particulier en ce qui concerne l'algèbre. Plusieurs auteurs y ont travaillé ou y travaillent, en liaison avec l'histoire et l'épistémologie, ou avec la linguistique, ou avec la sémiotique.

Même si de nombreux exemples de l'intervention du symbolisme et du formalisme dans les curriculums et les pratiques scolaires peuvent être mis en évidence, la portée didactique des travaux sur ces questions nous semblent mériter une étude approfondie globale encore à développer.

Pour illustrer la nécessité d'un tel travail sur ces questions, citons sommairement quelques points.

- 1. Dans la pratique du travail de l'élève, il arrive assez souvent que la forme de l'écriture symbolique obtenue à un certain moment du travail suggère ce qu'il y a à faire ensuite, en particulier par la reconnaissance de formes ainsi permise. C'est le cas par exemple pour le

²⁰ On devrait même parler ici de référent.

travail sur les figures géométriques ; c'est souvent le cas en algèbre (identités remarquables à utiliser,...) ; ce peut être aussi le cas en analyse (type de majoration à essayer...).

- 2. L'introduction d'intermédiaires pour résoudre un problème (voir le point A2. des adaptations évoquées en II 4) ci-après) amène souvent à un choix de symboles (codages, variables, dénomination d'un objet...) sur lesquels un travail spécifique pourra être entrepris.
- 3. En algèbre élémentaire, on est amené à développer une dimension intrinsèque du travail symbolique indépendante du sens qu'auront les symboles dans tel ou tel problème ; ce formalisme pose évidemment des problèmes particuliers aux élèves.
- 4. L'usage de différents symboles en théorie des fonctions est aussi délicat ; outre les conversions entre différents registres de travail, une analyse spécifique des règles symboliques propres à certains demande la mise en place d'un certain formalisme, qui peut entrer en contradiction avec un autre ; par exemple dans le registre des formules, certaines règles ($\sqrt{x-2}$ au lieu de $\sqrt{(x-2)}$...) peuvent ne pas être conforme avec celles de l'algèbre, ou des pratiques y être beaucoup plus développées à cause de la nature des problèmes étudiés (substitutions).

Il est clair qu'on peut multiplier de tels exemples. Il est peu probable qu'un seul cadre (sémiotique, linguistique...) permette d'en rendre compte de manière unifiée, et de nombreuses études spécifiques vont être ainsi à développer, puis à coordonner. Nous n'irons donc pas plus loin dans l'évocation de ce thème dans le présent texte.

8) Et du côté des démonstrations ? Le travail de Arsac

Arsac a déjà fait un travail de synthèse tout à fait remarquable sur la question dont nous donnons les grandes lignes.²¹

Une des thèses fortes qu'il développe tient à la mise en évidence d'une certaine relativité des formes de démonstrations et de leur rédaction, visible notamment au cours de l'histoire (cf. « Que peuvent retirer les enseignants des travaux didactiques sur la démonstration ? », article paru dans le numéro spécial 22-23 de la revue du centre de recherche en Education de l'Université de St Etienne, 2002, 203-234).

a) Relativité liée aux connaissances mises en œuvre :

On a déjà signalé le fait que dans certaines théories les fondements mêmes sont en partie implicites ou admis.

Arsac prend l'exemple d'un triangle et de son triangle des milieux. On demande de comparer périmètre et aire des deux triangles. Pour cela on admet en le disant que le grand triangle est formé de 4 triangles, on admet que la surface du grand triangle est égale à la somme des aires des 4 triangles qui le composent (sans même le dire !), on doit enfin absolument démontrer que l'aire de ces 4 petits triangles sont égales...

b) Relativité liée aux domaines mathématiques concernés.

Antibi avait montré qu'en probabilité et en combinatoire on ne peut pas « tout écrire ».

²¹ D'autres chercheurs, plus épistémologues ou historiens, ont contribué à la réflexion comme Lakatos.

Arsac ajoute une réflexion sur les différences entre les démonstrations en algèbre, en géométrie, en analyse (Formes et variables de la démonstration mathématique, une étude élémentaire, paru dans journal of proof 12/01/2004).

En guise de bilan : l'exemple des trames

Les programmes indiquent un découpage de l'année en chapitres, organisés selon les notions à introduire, elles-mêmes regroupées en grands domaines.

On peut réorganiser certaines parties des programmes en dégagant ce que nous avons appelé une trame (Robert, RDM vol 12-2) : c'est une organisation mathématique globale, qui met en évidence en les plaçant sur quelques colonnes juxtaposées, les différents concepts visés, avec les cadres et registres impliqués, les différentes méthodes et questions pouvant être abordées, les différents types de problèmes.

La construction d'une telle trame est un travail permettant d'avoir une vision plus unifiée du domaine concerné que ne le permet le seul programme.

II Relief sur les activités à organiser pour les élèves

1) Situations fondamentales, adidactiques, les connaissances-obstacles

On ne peut pas résumer en un paragraphe l'œuvre de Guy Brousseau, dont une grande partie a porté sur une modélisation des activités à proposer aux élèves.

Il a ainsi distingué des grandes dialectiques, action, formulation, validation, à organiser dans des situations si possibles a-didactiques (où le maître n'introduit pas de connaissances), puis institutionnalisation, à partir de synthèses du travail des élèves. Il a produit, pour les mettre en œuvre, une grande quantité d'ingénieries didactiques, basées sur des situations fondamentales (problèmes mettant en jeu la notion visée), essentiellement dans le primaire : nous ne pouvons que renvoyer à la bibliographie.

Il a introduit notamment en mathématiques la notion d'obstacle, inspirée de Bachelard, il l'a défini comme une connaissance qui doit être dépassée lors de la construction des connaissances nouvelles à enseigner : il élabore pour cela des situations fondamentales où la nouvelle connaissance visée fonctionne et elle seule ; elle est abordable néanmoins par les élèves. Mais si les élèves en restent à leurs connaissances précédentes, ils rencontrent une contradiction dans le problème lui-même, qui comporte ainsi des moyens de contrôle internes aux mathématiques. Le problème du puzzle est un exemple type d'un tel problème, qui amène les élèves à utiliser la multiplication et non l'addition pour traiter des situations d'agrandissement "dans toutes les directions". On voit qu'il s'agit d'une extension des connaissances des élèves mais avec une rupture dans le choix de l'opération convenable.

2) Dialectique outil / objet

Régine Douady pour sa part a mis au point des séquences, notamment d'introduction de notions fondamentales en primaire, basées sur une dialectique à faire vivre aux élèves, à partir d'un problème soigneusement mis au point. Dans ce problème, les élèves peuvent utiliser de manière nouvelle une connaissance déjà enseignée dans un contexte moins général, comme un outil encore implicite en quelque sorte, grâce à un jeu sur les cadres mélangeant connu et inconnu. Charge ensuite reste à l'enseignant de s'appuyer sur ce travail pour dégager la notion nouvelle comme objet. Ces introductions, appelées "dialectique outil/objet" doivent être suivies de réinvestissement, et semblent très adaptées à certaines notions généralisant les

connaissances anciennes sans ruptures, de manière à ce que les élèves aient l'idée de " faire pareil " et que cette intuition soit correcte. Le jeu de cible (Douady, 1989) en est un exemple typique, qui amène les élèves à la division euclidienne à partir d'un jeu matériel.

Là encore un renvoi à la bibliographie est indispensable.

3) Les moments de l'étude

Chevallard pour sa part a mis au point des organisations didactiques de l'étude, en distinguant des grands moments – première rencontre etc. Tout se passe comme si toutes les notions mathématiques pouvaient être ainsi abordées, la généralité des définitions ne permettant pas d'affiner selon les concepts.

Depuis quelques années, il a aussi proposé une refonte générale des programmes en PER, déclinés à partir d'AER, qui constituent une autre réponse que la nôtre à nos questions initiales. Bibliographie.

4) Encore les introductions de notions

Les introductions de notions nous semblent pouvoir être abordées un peu plus largement encore que précédemment grâce au type de classification introduit ci-dessus.

En effet, l'introduction d'une extension peut être abordée par l'intermédiaire d'un problème, fabriqué avec de l'ancien, accessible vu qu'il s'agit d'une extension, mais où ce qui est nouveau sert à résoudre.

Les problèmes issus des travaux sur la dialectique outil/objet nous paraissent exactement de ce type, notamment s'il y a extension sans accident, ils permettent de prolonger le sens de ce qui est nouveau et même la technique en associant les élèves à une première utilisation en outil implicite de ce qui est visé.

S'il y a accident, on peut encore introduire de la même manière le nouveau mais l'accident peut donner lieu à erreur et c'est la qualité du problème, notamment les moyens de contrôle internes prévus si possible, qui permettront de dépasser l'obstacle.

Les notions qui peuvent correspondre à la réponse du mathématicien à un problème qui jusqu'alors n'avait pas été amené à introduire de notion spécifique peuvent être abordées en proposant aux élèves un problème qu'ils peuvent s'approprier mais pas résoudre : c'est l'enseignant qui va introduire le nouveau (notamment l'objet nouveau avec son formalisme) mais les élèves ont pu éprouver, partiellement bien sûr, ce à quoi le nouveau apporte une réponse. Même s'ils ne peuvent pas du tout imaginer le problème initial. On conçoit que ces introductions portent davantage sur le sens des notions que sur les techniques nouvelles, surtout s'il y a un nouveau formalisme à la clef... Par exemple l'introduction de la multiplication pour remplacer une addition répétée.

Les quelques exemples donnés dans la dernière annexe illustrent le fait que, dans les classes, c'est souvent comme RAP que les enseignants essaient d'introduire les notions, au cas où rien n'existe déjà dans la littérature (cf. annexe 10).

Quant aux notions FUG(S), nous faisons l'hypothèse qu'il n'existe pas de « bon » problème permettant de les introduire avec tout leur sens. Il existe des introductions partielles, utilisant souvent des changements de cadres, dont on peut décliner un certain nombre (cf. une introduction aux espaces vectoriels élaborée par Rogalski, 1991). Le travail de la technique peut nécessiter là encore des activités spécifiques différentes.

On peut se demander si les « sauts informationnels²² » introduits par Brousseau, 1998, ne sont pas très utiles lorsqu'il faut forcer les élèves, même par effet de contrat, à utiliser une notion FUG(S). Le caractère économique, simplificateur de la notion ne suffit pas toujours à son utilisation par les élèves. Par exemple Dorier, 1992, met cette idée en fonctionnement pour établir la formule de Grégory.

Enfin il est possible que le recours au levier « méta » facilite l'entrée des élèves dans ce type de notion en éclaircissant leur origine (cf. Dorier, 1997).

L'introduction de l'algèbre élémentaire au collège peut sans doute être envisagée de cette manière.

5) Analyses de tâches associées aux énoncés proposés aux élèves

Plus modestement, en relation plus directe avec le quotidien, nous avons introduit des considérations sur les connaissances à utiliser par les élèves dans les exercices et la manière de les mettre en fonctionnement : quelles connaissances, nouvelles ou anciennes, indiquées ou non, utilisées directement, de manière simple et isolée, ou non, et sinon, avec quelles adaptations (quelles reconnaissances à réaliser, quels intermédiaires, quels mélanges, quelles étapes à introduire, quels choix à trancher).

On distingue ainsi les tâches qui amènent à des applications immédiates des connaissances, c'est-à-dire simples (sans adaptation) et isolées (sans mélanges), où seule une connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mis à part la contextualisation nécessaire : remplacement des données générales par des données particulières notamment.

D'autres tâches²³ nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées : on parle de niveau de mise en fonctionnement mobilisable. Le travail des élèves n'est en effet pas analogue selon qu'ils doivent rechercher les connaissances à utiliser (travail du pourquoi ou du quoi) ou mettre en fonctionnement (en l'adaptant) des connaissances indiquées (travail du comment). Si c'est à l'élève de reconnaître les connaissances à utiliser, on parle de niveau de mise en fonctionnement disponible.

Relever d'un certain niveau de mise en fonctionnement d'une connaissance pour une tâche implique que le travail de l'élève sur la tâche doit mettre en jeu de cette manière la connaissance : ou c'est possible et alors le travail de l'élève renforce peut-être la connaissance, ou ce n'est pas possible d'emblée, et ce travail va peut-être contribuer à transformer la connaissance de l'élève pour que cela devienne possible.

Ces analyses sont relatives à un niveau scolaire donné, un programme donné et à une classe donnée. Sept types d'adaptations se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément et qui ont chacun un spectre assez large (et encore une fois relatif) :

- A1. Les reconnaissances (partielles) des modalités d'application des connaissances (notions, théorèmes, méthodes, formules...) : typiquement en géométrie, reconnaître la(es) configuration(s) où utiliser Thalès. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations, à des reconnaissances de formules ou de conditions d'applications de théorèmes...

²² Il s'agit de situations pour lesquelles les connaissances anciennes des élèves sont tellement inadaptées qu'ils peuvent se résoudre à utiliser leurs nouvelles connaissances.

²³ Dans certains travaux, on parlera de tâches complexes

- A2. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions... : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour utiliser Thalès²⁴.
- A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, les mises en relation ou interprétations... : typiquement en géométrie, utiliser du calcul algébrique pour obtenir le résultat (par exemple résoudre $x^2 = 1$ au milieu d'un problème de géométrie). Les énoncés qui jouent sur graphique/fonction contiennent automatiquement cette adaptation.
- A4. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements (cela va d'utilisation répétée (in) dépendante d'un même théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème) : typiquement en géométrie, utiliser quatre fois le théorème de Thalès de manière non indépendante puis sa réciproque. Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer.
- A5. L'utilisation de questions précédentes dans un problème.
- A6. L'existence de choix – forcés (un seul convient finalement) ou non.
- A7. La prise de conscience d'un « manque » de connaissances.

6) Démonstrations : travail externe ou interne ?

Plusieurs autres travaux abordent davantage des aspects liés à l'apprentissage de la démonstration (au collège) : certains insistent sur le sens de cette démarche (pour convaincre) d'autres sur la technique (Duval et al). Nous donnons en annexe 7 un exemple de critique d'article sur la question de l'apprentissage de la démonstration (et la formation).

Signalons encore un aspect complémentaire, de type heuristique.

Un théorème en mathématiques peut intervenir à trois titres au moins : pour être démontré, pour être utilisé de manière essentielle dans une démonstration, ou de manière incidente, comme outil intermédiaire.

Il est quelquefois difficile de mettre du relief sur ces deux dernières manières d'utiliser les théorèmes, voire les notions mathématiques, et des éléments heuristiques (forme particulière de discours méta) peuvent contribuer à éclairer les choses.

Prenons un exemple compliqué pour mieux mettre en lumière notre propos.

Pour démontrer le théorème de Feuerbach (le cercle d'Euler d'un triangle est tangent aux cercles inscrit et exinscrits dans le triangle) on trouve deux démonstrations (si on ne veut pas utiliser une inversion).

La première utilise la démarche suivante : caractérisation de cercles tangents faisant intervenir l'égalité de la distance des centres et de la différence (pour le cercle inscrit) des rayons. Il s'agit de calculer cette distance des centres (on connaît les rayons).

Pour faire ce calcul (outils plus locaux), on utilise plusieurs fois la « formule de Leibnitz » en introduisant des points de la figure comme barycentres particuliers. Le reste tient à ces calculs, qui interviennent de manière incidente, même s'ils sont longs et compliqués !

La deuxième démonstration utilise un lemme intermédiaire qui permet « d'engendrer » un cercle tangent à un autre à partir d'une situation particulière (démarche) : si on a un premier cercle C , une tangente à ce cercle, un point A hors de cette tangente, alors l'ensemble des

²⁴ C'est moins fréquent en général, sauf au niveau universitaire

points N définis à partir des points M de la tangente par la relation $\overline{AN} \cdot \overline{AM} = \mathcal{P}(A, C)$ est un cercle tangent au premier, et passant par deux points fixes de la figure (ce qui permet de le construire). On fait alors jouer au cercle inscrit le rôle de C , à la droite T symétrique de (BC) par rapport à la bissectrice de l'angle A du triangle (qui reste tangente au cercle inscrit) le rôle de la tangente du lemme, au milieu A' de $[BC]$ le rôle de A et on engendre un cercle tangent au cercle inscrit dont il ne reste qu'à reconnaître que c'est le cercle d'Euler. Il passe déjà par A' . On montre qu'il passe aussi par B' et C' : pour cela il s'agit de vérifier que B' (puis C') est un point du lieu considéré. C'est-à-dire qu'il existe un point M de la tangente T tel que (1) $\overline{A'B'} \cdot \overline{A'M} = \mathcal{P}(A', C)$. On construit le point M d'intersection de $(A'B')$ et de T et on calcule le produit du premier membre de (1).

Là encore interviennent des calculs intermédiaires qui permettent de montrer que ce produit est égal au même nombre que le deuxième membre de (1) également transformé. Ces calculs intermédiaires font intervenir les relations métriques dans le triangle d'une part et des homothéties ! Mais on ne peut pas dire que les homothéties en question interviennent autrement que comme outil incident...

7) Le rôle de l'écrit

L'écrit a toujours un rôle particulier dans la communication avec les lecteurs : puisqu'il doit être compris en l'absence même de celui qui écrit, qu'il doit se suffire à lui-même pourrait-on dire.

En mathématiques le passage à l'écrit peut amener à se poser de nouvelles questions, systématiques, à partir des ébauches de démonstration qui le précèdent : il y a lieu, à ce moment là du travail, de préciser les arguments mis en œuvre, en vérifiant précisément les hypothèses par exemple, d'ordonner les arguments en essayant de simplifier (et d'abandonner des arguments superflus), et de compléter, par exemple en prenant en compte les cas particuliers. Toutes ces « opérations » sont caractéristiques de l'écrit en mathématiques.

Un autre rôle a été donné au passage à l'écrit ces dernières années, qui donne à l'écrit plutôt un rôle de témoin qu'un rôle d'interlocuteur exigeant. Des enseignants ont cherché à valoriser l'entrée des élèves dans une recherche, même infructueuse : à cet effet ils ont engagé les élèves dans l'écriture de leur démarche, même incomplète – ce sont les narrations de recherches.

Bibliographie sommaire

Des grands classiques et les références récentes, essentiellement dans la culture française

- Arsac G. (1998) Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie, *Petit x* n°47, 5-31.
- Arsac G. (1998) *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au Collège et au Lycée*, Aléas, IREM de Lyon.
- Arsac G. (1999) Variations et variables de la démonstration géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/3, 357-390.
- Arsac G. (2002) « Que peuvent retirer les enseignants des travaux didactiques sur la démonstration ? », *Revue du centre de recherche en Education de l'Université de St Etienne*, 22-23, 203-234.
- Arsac G. (2004) Formes et variables de la démonstration mathématique, une étude élémentaire ; *Jnal of proof*, 15/01/04.
- Assude T. *Etude du curriculum de mathématiques entre changements et résistances* Note de synthèse, HDR 26-33.
- Balacheff N. (1987) Processus de preuves et situation de validation, *Educational Studies in Mathematics*, 18/2, 147-176.
- Barbin E., Duval R. et al. (2001) *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses, Paris.
- Bkouche R. Site sur Internet.
- Bloch I. Registres, ostensifs et travail mathématique, Site Internet..
- Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/1, 77-124.
- Brousseau G. (1988) *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Castela C. (2000) Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/3, 331-380.
- Cesame (groupe) (2001) Ordres de connaissances et institutionnalisation, Assude et Grugeon, Eds, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 209-226, Irem, Université Paris 7.
- Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*, La pensée sauvage, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, 221-265.
- Chevallard Y. (2007) Pour une formation professionnelle d'université : éléments d'une problématique de rupture, *Actes du colloque « qu'est-ce qu'une formation professionnelle universitaire »*, Arras 2007.
- Cissé (2006) Un dossier sur racine carrée à l'usage des formateurs (collège/lycée), Document pour la formation des enseignants, *cahier bleu* n°8, IREM, Université Paris 7.
- Combiér G., Guillaume JC, Pressiat A. (1996) les débuts de l'algèbre au collège *INRP*, Paris.
- Coppé S. & al. (2005), Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5^e, *Petit x* n°68, 8-37.

- Cousin-Fauconnet Annie (1995) *Enseigner la géométrie au collège* Armand Colin, Paris.
- Dorier J.L. (1992) Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre, *Cahier de Didirem* n°14, IREM- Université P7
- Dorier J.-L. (ed.) (1997) *L'algèbre linéaire en question, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Dorier J.-L. (1998) État de l'art de la recherche en didactique des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en didactique des mathématiques* 18/2, 191-230.
- Douady R. (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7/2, 5-32.
- Douady R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-Irem* 6, 132-158.
- Durand-Guerrier et Arsac (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificités de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 23/3, 295-342.
- Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.
- Duval R. (2002) Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres, in *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, IREM, Université Paris 7 83-105.
- Duval R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x* n°31, 37-61.
- Frère D. (1997) *Différencier la pédagogie en mathématiques, la démonstration en classe de quatrième*, CRDP, Créteil.
- Grugeon B. (2000) L'algèbre au lycée et au collège. Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. 5-39. ; in Grugeon, Guichard, Capponi ,Janvier, Delgoulet Eds, *L'algèbre au lycée et au collège. Actes des journées de formation de formateurs*. Boisseron, IREM de Montpellier.
- Lattuati M., Robert A., Penninckx J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique*, Ellipses, Paris.
- Legrand M. (1996) La problématique des situations fondamentales. Confrontation d'un paradigme des situations à d'autres approches didactiques *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/2, 221-279.
- Perrin D. (2000). Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane: l'exemple de la géométrie affine du collège, *Bulletin de l'APMEP*, 431, 758-784.
- Perrin D. (2001) Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie, *Bulletin de l'APMEP*, 435, 472-497.
- Perrin D. (2003) Quels outils pour la géométrie à l'âge du collège ? *Repères Irem*. 53. 91-110.
- Perrin D. (2005) *Mathématiques d'école, nombres, mesure et géométrie*, Cassini, Paris.
- Robert (1995) *Géométrie, l'épreuve professionnelle au Capes*, Ellipses, Paris.
- Robert A. et Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques* 16/2, 145-176.
- Robert A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, 18/2, 139-190.

Robert A. (2003a) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe. *Revue Petit x*, n° 62, pp 61-71.

Robert A. (2003), Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveau de conceptualisation, *Petit x* n°63, p. 7-29.

Robert A. et Robinet J. (1996) prise en compte du « méta » en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 16/2, 145-176.

Robert A. et Rogalski M. (2002) Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe *Petit x*, n° 60.

Robert A. et Rogalski M. (2004) Problèmes et activités d'introduction, problèmes transversaux et problèmes de recherche au lycée *Repères IREM* n°54 77-103.

Rogalski M. (1991) Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, *Cahier de Didirem* n°11, IREM- Université Paris 7.

Rogalski M. (1998) Présentation : Analyse épistémologique et didactique de connaissances à enseigner au lycée et à l'université *Recherches en didactique des mathématiques* 18/2. 35-137.

Rogalski M. (2001) *Carrefours entre Analyse, Algèbre et géométrie*, Ellipses, Paris.

Rogalski M. (2001) Les changements de cadres dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres, *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, Irem, Université Paris 7.

Sackur C. Assude T. Maurel M. Drouhard JP, Paquelier Y (2005) L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en didactique des mathématiques* 25/1, 57-90.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10 2.3 pp 133-170.

Annexes

la numérotation des pages des annexes est autonome

- 1. Quelques reliefs du côté de l'intégrale (Marc Rogalski)**
- 2. Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle dans la physique élémentaire, questions didactiques (Marc Rogalski)**
- 3. Représentations des objets géométriques (Éric Roditi)**
- 4. Sur l'enseignement des fonctions en seconde (Aline Robert)**
- 5. Un exemple de critique d'article de la littérature professionnelle ; éléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde » (Aline Robert)**
- 6. Critiques d'articles de la littérature professionnelle sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège (Aline Robert)**
- 7. Commentaires sur l'article « Preuves et démonstration : un thème pour la formation des enseignants » (Aline Robert)**
- 8. Compléments sur la géométrie (Aline Robert)**
- 9. Compte-rendu de lecture : quatre livres de géométrie (D. Perrin)**
- 10. Des exemples (présentation par Monique Pariès)**



Annexe 1

Quelques reliefs du côté de l'intégrale

Marc Rogalski

Quelques reliefs du côté de l'intégrale

I. Organisation générale

A. Sur l'aire de (certaines) parties du plan

Hormis l'aire de polygones variés, les élèves n'ont rencontré comme aire d'une région enfermée dans des lignes *courbes* que celle du disque. Psychologiquement, c'est pour eux le même concept d'aire qui est en jeu, mais, au moins jusqu'en classe de 3^e, il n'est pas mathématiquement opérationnel de la même façon pour nombre d'entre eux : par découpage-quadrillage, ils voient que lorsqu'on double les dimensions d'un rectangle, son aire quadruple, alors que pour le disque ils voient l'aire seulement doubler (impossible de découper !). Du point de vue mathématique, *l'aire d'un carré et l'aire d'un disque vues dans les petites classes ne sont pas deux exemples du même concept*, tant que la deuxième n'est pas rattachée à la première ; dans "La mesure des grandeurs", H. Lebesgue dit qu'on pourrait très bien parler de l'aire du carré et du "tarababoum" du disque jusqu'en terminale !

Donc, outre une **mise au point sur des propriétés de l'aire** (aire du carré unité, croissance par inclusion, invariance par les isométries, effet des homothéties et des affinités, aire nulle pour un segment, additivité, *calcul de l'aire d'un rectangle* dont les longueurs des côtés sont des nombres *quelconques...*), il paraît nécessaire de **prendre conscience qu'on peut définir et calculer l'aire de certains domaines limités par des lignes courbes**. Autrement dit, il faut sur quelques exemples *encadrer une aire entre deux polygones* dont les aires diffèrent de ϵ ... et en particulier donner des exemples de *sommes de Riemann*.

Deux exemples paraissent particulièrement utiles.

(a) Le calcul de l'aire du disque par encadrement par les polygones réguliers inscrits et circonscrits, pour unifier les deux types d'aire vus antérieurement. **Attention** : cela demande de connaître la limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand $x \rightarrow 0$, admise en première, et dont une preuve pose bien des problèmes (voir "Carrefours..." 2001).

(b) Afin de préparer la définition de l'intégrale, l'aire limitée par l'axe des x , la parabole $y = x^2$, et la verticale d'abscisse x , encadrée par des sommes de Riemann évaluées au moyen des sommes $\sum_{k=1}^n k^2$.

On trouve $\frac{1}{3} x^3$, et ce résultat, éventuellement étendu à $y = x^3$, $y = x^4$,... peut motiver la recherche de la "dérivée de l'aire" servant à définir une intégrale (voir Robert et Rogalski 2004).

B. L'intégrale d'une fonction continue positive comme aire et le problème de l'additivité

Etant *admis* que le sous-graphe $S(a,b,f)$ d'une fonction continue positive f sur $[a,b]$ possède une aire, on pose par définition $\int_a^b f(t) dt = \text{aire}[S(a,b,f)]$. Si f est constante, on retrouve l'aire des rectangles.

Le problème principal est alors la linéarité de l'intégrale. La formule $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$ est

claire pour $\lambda \geq 0$ par affinité. Mais l'**additivité est un problème délicat !**

Si l'une des fonctions est une constante positive c , l'additivité se ramène à l'additivité de l'aire et à son invariance par translation : figure 1 (1). Mais si ni f ni g ne sont constantes, l'aire entre le sous-graphe de $f+g$ et celui de f n'est ni isométrique ni semblable ni affine au sous-graphe de g : figure 1 (2) et (3). La formule

$$\int_a^b (f(t)+g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

n'a donc rien d'évident !

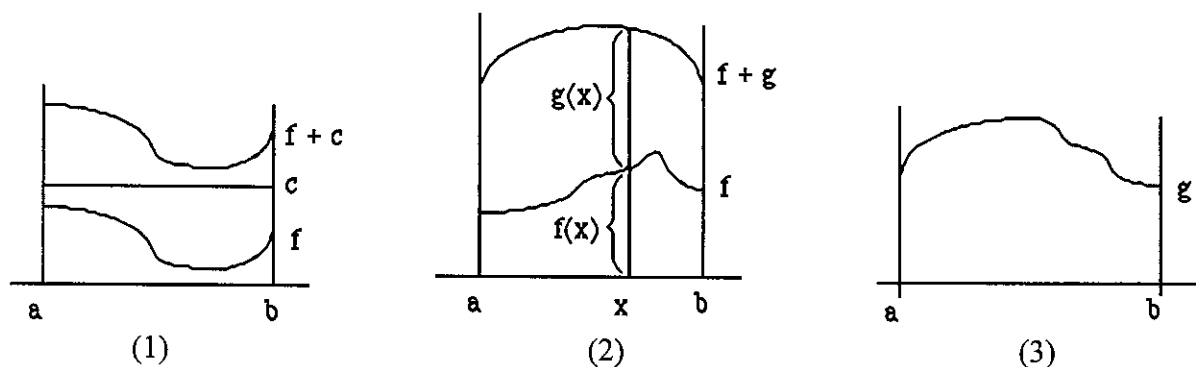


Figure 1

A ce point, on peut évoquer *la méthode des indivisibles* de Cavalieri et sa traduction moderne par *les sommes de Riemann* (voir "Carrefours..."), mais bien sûr aucune preuve ne peut être présentée sans savoir que les sommes de Riemann convergent dans le cas général vers l'aire du sous-graphe (la preuve n'est d'ailleurs pas au programme de terminale). Mais cela peut être dit, et a été prouvé dans les exemples donnés en A. a.

Par contre, on peut le *montrer simplement pour des fonctions monotones*, car si par exemple f est croissante, on a

$$s_n := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \leq \text{aire}[S(a,b,f)] \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) := S_n,$$

et $S_n - s_n = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)] \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$. Et comme la somme de Riemann d'une somme est la somme des sommes de Riemann (pour des sommes régulières), on a l'additivité pour deux fonctions monotones positives de même monotonie.

C. Le théorème fondamental de l'analyse : $\frac{d}{dx} \text{aire}[S(a,x,f)] = f(x)$, et l'additivité

Il s'agit de la formule

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

due à Barrow, en 1669, en termes de cinématique : l'espace parcouru entre les instants 0 et T est l'aire sous le graphe de la vitesse $v(t)$ (fait prouvé pour des fonctions v monotones). Dit autrement :

$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ est une *primitive* de la fonction f sur $[a, b]$.

La preuve en est immédiate par encadrement si f est monotone. Si f est k -lipschitzienne (par exemple f dérivable avec $|f'| \leq k \dots$ mais attention aux programmes !), ce n'est pas trop difficile :

$$\frac{1}{h} \{ \text{aire}[S(a, x+h, f)] - \text{aire}[S(a, x, f)] \} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \text{ (par additivité pour une constante).}$$

Attention : la fonction $t \rightarrow f(t) - f(x)$ n'étant pas positive, il faut *anticiper* sur l'intégrale d'une fonction non positive et sur l'inégalité fondamentale entre le module de l'intégrale et l'intégrale du module (voir § suivant).

Cela admis, le membre de gauche est majoré en module par $\frac{k}{h} \int_x^{x+h} (t-x) dt$, où l'intégrale s'évalue

comme l'aire d'un triangle ; on trouve $\frac{kh}{2}$ qui tend bien vers 0 quand $h \rightarrow 0$.

Il faut remarquer qu'on prouve ainsi une dérivabilité à droite, il faut modifier légèrement le raisonnement pour la dérivabilité à gauche.

Enfin le cas général demande d'utiliser un **raisonnement en $\varepsilon - \eta$** . On peut aussi utiliser une caractérisation de la continuité (à droite) : $\left\{ \max_{[x, x+h]} f(t) - \min_{[x, x+h]} f(t) \right\} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. C'est d'ailleurs *indispensable* pour prouver le théorème de dérivabilité en un point x où $f(x) = 0$, si on veut rester dans le cadre des fonctions positives (car $f(x) - \varepsilon < 0$ si $f(x) = 0$).

L'application à l'additivité de l'intégrale de deux fonctions continues positives se ramène alors à *l'unicité de la primitive d'une fonction nulle en un point*, qui utilise de façon décisive le **rapport monotonie - signe de la dérivée**, ou, ce qui est équivalent, l'inégalité des accroissements finis : la valeur en $b > a$ de la primitive nulle en a de $f+g$ est la somme des valeurs en b de la primitive de f

nulle en a et de la primitive de g nulle en a : c'est la formule $\int_a^b (f(t)+g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.

Il peut être alors instructif de relier intégrale d'une fonction affine (par additivité et primitives) et aire d'un trapèze, et de constater que le mode de calcul de l'aire entre deux droites affines sur un intervalle rejoint tout à fait la méthode des indivisibles de Cavalieri.

D. Les problèmes pour des fonctions non positives

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, un théorème profond (oublié dans la version 2002 des programmes !) dit qu'elle est minorée, donc il existe un nombre λ tel que $f + \lambda \geq 0$.

Lemme-définition. La quantité $\int_a^b (f(t)+\lambda) dt - \lambda(b-a)$ est indépendante du nombre λ pourvu qu'il

vérifie la relation $f + \lambda \geq 0$. C'est par définition $\int_a^b f(t) dt$.

L'idée est d'opérer une *translation verticale* sur le graphe de f pour se ramener au sous-graphe d'une fonction positive, et de corriger par l'aire d'un rectangle. Bien entendu, si $f \geq 0$, $\lambda = 0$ convient, et on retombe sur ses pieds !

Le lemme est évident avec l'additivité de l'intégrale pour une fonction positive et une constante positive.

Il faut alors dérouler un certain nombre de points partant du théorème fondamental de l'analyse pour arriver à la linéarité complète dans le cas général.

(a) La formule fondamentale de dérivation $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ se montre aisément, car

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_a^x [f(t) + \lambda] dt - \lambda(x-a) \right\} = f(x) + \lambda - \lambda = f(x).$$

(b) L'additivité est presque immédiate : si $f + \lambda \geq 0$ et $g + \mu \geq 0$, alors $f + g + \lambda + \mu \geq 0$, et

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(t) + g(t)] dt &= \int_a^b [f(t) + g(t) + \lambda + \mu] dt - (\lambda + \mu)(b-a) \\ &= \left\{ \int_a^b [f(t) + \lambda] dt - \lambda(b-a) \right\} + \left\{ \int_a^b [g(t) + \mu] dt - \mu(b-a) \right\} = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt. \end{aligned}$$

On en déduit la relation $\int_a^b [-f(t)] dt = - \int_a^b f(t) dt$, en écrivant $0 = \int_a^b [-f(t) + f(t)] dt \dots$

(c) La monotonie est immédiate à prouver par l'inclusion du sous-graphe de $f + \lambda$ dans le sous-graphe de $g + \lambda$ si $f + \lambda \geq 0$, $g + \lambda \geq 0$ et $f \leq g$: c'est la croissance de l'aire.

(d) L'inégalité fondamentale se déduit sans peine des points (b) et (c) : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$, à partir de l'inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$.

(e) La relation de Chasles $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ si $a \leq c \leq b$ est évidente en prenant un même λ sur $[a, b]$, sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ (et avec l'additivité de l'aire et la mesure nulle des segments).

(f) Si $f \leq 0$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'opposé de l'aire (nombre positif) située entre l'axe des x et le graphe de f , car c'est $-\int_a^b [-f(t)] dt$, et la symétrie par rapport à une droite conserve les aires.

(g) La linéarité complète se déduit sans peine des points (b) et (f).

Attention : définir l'intégrale d'une fonction non positive f par la formule $\sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i \Sigma_i$ lorsque f a le

signe $\epsilon_i = \pm 1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ et Σ_i est l'aire positive entre l'axe des x et le graphe de f sur $[a_i, a_{i+1}]$, est très *maladroit*, même si cette formule est vraie par les points (e) et (f). En effet, les preuves de tous les points précédent ne sont pas plus faciles, mais surtout *cela ne permet pas de définir*

l'intégrale de toutes les fonctions continues : la fonction $x \rightarrow x \sin \frac{1}{x}$ (et 0 en 0) sur $[-1, 1]$ n'est pas de ce type : elle change de signes une infinité de fois, il faudrait sommer deux séries... et même faire plus compliqué encore si on recolle une infinité dénombrable de fonctions de ce type... !

E. L'application de l'intégrale à la définition et/ou à la mesure de grandeurs géométriques, physiques, ..., le concept de valeur moyenne en mathématique et en physique

Nous renvoyons le lecteur à ce qui est présenté dans les chapitres 7 et 8 de "Carrefours..." ?

II. Quelques points à mettre en relief

A. Rattacher les aires curvilignes à celles des polygones

Il s'agit d'unifier les notions intuitives d'aire des polygones et d'aire du cercle vues antérieurement pour généraliser à l'aire sous une courbe $y = f(x)$ ($f \geq 0$).

Activités possibles : aire sous une parabole, une cubique... ; aire du cercle.

En complément : en encadrant a et b par des nombres décimaux, retrouver que l'aire d'un rectangle de côté a et b est le produit ab , à partir des diverses propriétés admises pour la notion d'aire (aire du carré unité, isométries, aire nulle des segments...).

B. Comparer l'ancienne définition de l'intégrale (par les primitives, dont l'existence est admise), avec la nouvelle (par l'aire, dont l'existence est admise)

En particulier : du point de vue de *l'additivité* et de la *linéarité* (l'ancienne est plus facile), du point de vue de *la mesure des grandeurs* (l'ancienne n'a pas de sens, la nouvelle si), du point de vue du *théorème fondamental de l'analyse* (c'est une définition dans l'ancienne, un théorème à prouver dans la nouvelle, et qui montre l'existence des primitives), du point de vue des *rapports entre intégrale et signe de f et aire sous/sur la courbe* (on l'admettait dans l'ancienne définition, c'est une définition pour $f \geq 0$ dans la nouvelle, il faut travailler un peu pour f de signe variable).

Activités possibles : calculer quelques sommes de Riemann et étudier leur convergence.

Calculer des aires par recherche de primitives ; en particulier, l'exercice classique du calcul de

$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$, en faisant un changement de variable (sans le dire !) : on étudie la fonction de θ :

$f(\theta) = \int_0^{\sin \theta} \sqrt{1-t^2} dt$. Ceci permet de retrouver l'aire du disque, et de montrer (pour la

première fois !) que c'est le même nombre π qui intervient dans le périmètre du disque et les fonctions trigonométriques (définition de π) comme dans l'aire du disque..

C. Réinvestir l'intégrale dans des exercices de mesure de grandeurs

On peut utiliser, soit *la procédure intégrale* dans le cas de fonctions monotones, où les sommes de Riemann convergent facilement (problème du barreau, etc..., voir "Carrefours..."), soit par la

procédure dérivée-primitive (on dira maintenant plutôt : *de l'accroissement différentiel*, voir Rogalski 2006).

Activités possibles : innombrables, voir "Carrefours..." et Rogalski 2006 pour la géométrie et la physique ; il y en a aussi en économétrie (courbe et indice de Gini, voir des documents sur les dossiers de Capes diffusés à la liste "Capes").

Bibliographie

A. Robert et M. Rogalski, Problèmes d'introduction, et autres problèmes de recherche au lycée, Repères IREM, 2004, n° 54, p. 77-103.

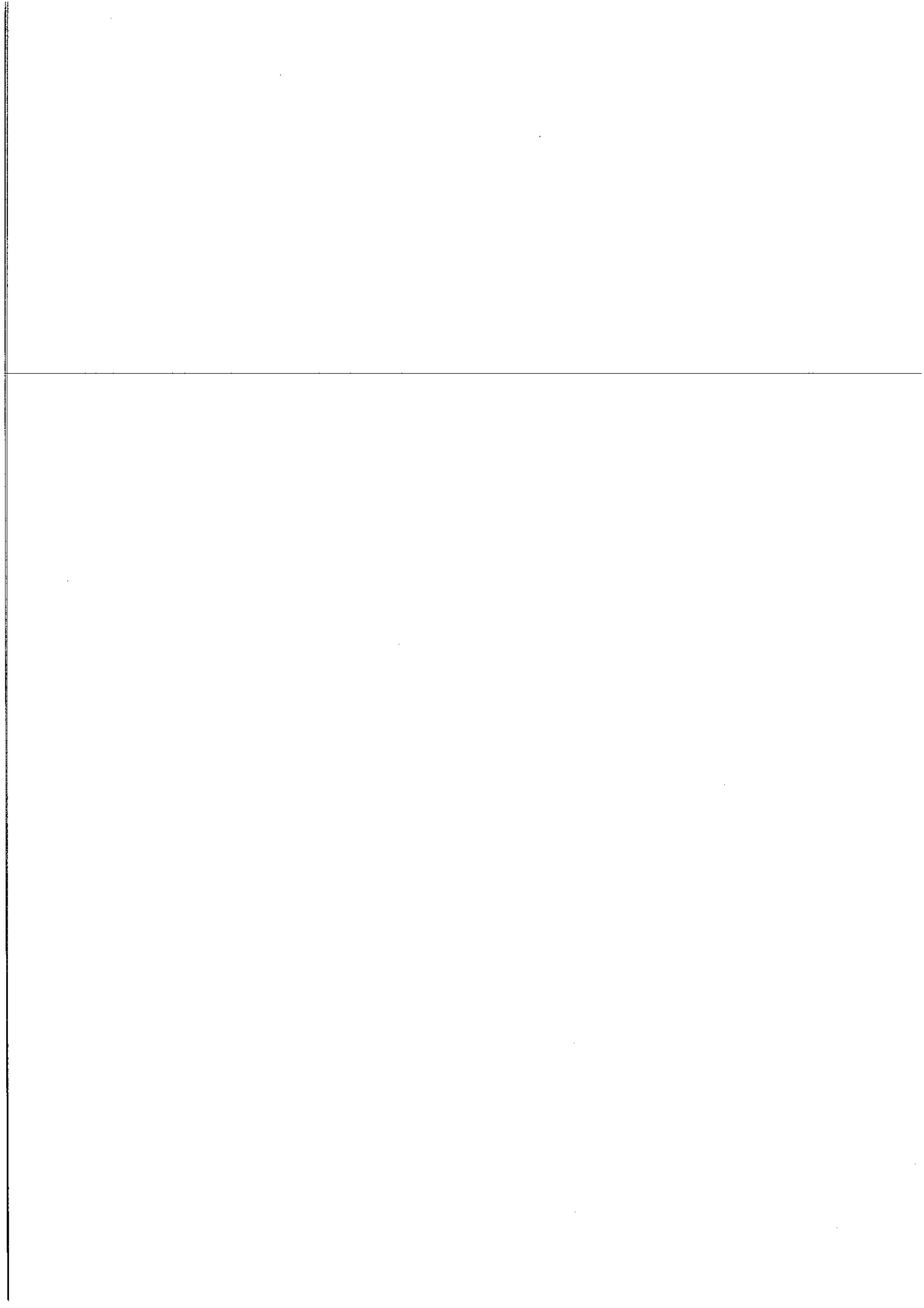
M. Rogalski, avec la collaboration de N. Pouyane et A. Robert, *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Ellipses, 2001.

M. Rogalski, *Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique*, Repères-IREM n° 64, juillet 2006, p. 27-48.

Annexe 2

Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle dans la physique élémentaire, questions didactiques

Marc Rogalski



Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle dans la physique élémentaire, questions didactiques

Marc Rogalski (Université des Sciences et Technologie de Lille, Laboratoire Painlevé)

Résumé

Les notions de propriétés locales et globales jouent un rôle essentiel en mathématiques, dès le début de l'analyse, mais aussi en géométrie et topologie. Elles soulèvent de nombreux problèmes didactiques, car elles sont souvent non explicitées. En physique élémentaire, les points de vue local et global s'opposent et se complètent, et l'activité de mise en équation met souvent en œuvre un jeu subtil entre ces deux points de vue. Nous développons l'idée que faire prendre conscience aux élèves et étudiants de l'existence et du rôle des points de vue local et global peut permettre de leur donner accès à des méthodes efficaces pour les utiliser.

Avertissement

Ce texte est la rédaction d'un exposé fait lors de la journée 2003 de l'Ecole Doctorale Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire, didactiques, de l'université Paris 7. Il s'adressait à un public formé de mathématiciens, physiciens et chimistes, biologistes, géographes, ce qui explique que certaines parties soient rédigées dans un style visant à la compréhension par un public multidisciplinaire.

Introduction

De nombreux concepts et bien des propriétés mathématiques se présentent d'emblée comme étant soit de nature *locale*, soit de nature *globale*. Ces termes ne sont pas toujours simples à préciser. Les définitions formelles font intervenir un mélange subtil de quantificateurs existentiels et universels, ce qui n'est pas sans poser quelques problèmes didactiques, qui apparaissent dès les premières définitions concernant la *continuité* et la *dérivabilité*, et se poursuivent avec la notion d'*uniformité*.

Pourtant, une des activités importantes en analyse et en géométrie est la distinction entre ces deux *points de vue*, l'un des objectifs fréquents étant de *globaliser* une propriété locale, ou d'établir qu'une telle globalisation est impossible.

Ainsi, en géométrie ou topologie, définir un objet par des propriétés des voisinages de chacun de ses points n'en assure pas en général une caractérisation globale, il faut y rajouter des propriétés elles-mêmes globales ; c'est par exemple le cas des variétés.

En analyse, les relations entre les divers types de convergence : ponctuelle, uniforme sur tout compact, uniforme, posent aux étudiants de redoutables problèmes, liés aux rapports entre local et global et à la traduction de ces rapports en termes de quantificateurs. Un autre aspect concerne la globalisation de propriétés locales de fonctions définies sur des espaces topologiques ayant certaines propriétés globales.

Au-delà de ces aspects techniques, certaines grandes questions font intervenir de façon essentielle un point de vue local ou un point de vue global. Le problème de la résolution des *équations différentielles* est typiquement une recherche de passage du local au global. Le problème de la mesure des grandeurs par la *notion d'intégrale* se présente d'abord comme un problème de nature globale, mais sa mise en œuvre, en particulier en physique, demande de partir de notions locales et de mettre au point un procédé particulier de globalisation : la procédure intégrale.

Ce double point de vue local-global se retrouve ainsi en physique, en particulier dans les *processus de modélisation ou mise en équation*, où les instruments privilégiés sont souvent les équations différentielles ou aux dérivées partielles, d'une part, et la mesure (voire la définition) de grandeurs par des intégrales, de l'autre. L'application des lois de la physique aux situations étudiées met ainsi en jeu divers niveaux possibles, avec souvent des allers-retours entre local et global.

L'analyse d'un certain nombre de difficultés didactiques des élèves ou étudiants sur ces diverses questions nous fait penser qu'un enjeu important de l'enseignement est sans doute de développer chez

eux une prise de conscience de l'existence des points de vue local et global, et d'assurer l'apprentissage de certaines méthodes dans la recherche de leur mise en œuvre.

Plan

I. Les notions de local et global en mathématiques

I.1. De quoi s'agit-il ?

I.1. (a) Un exemple de notion locale : la vitesse instantanée ou dérivée

I.1. (b) Le cas des fonctions : propriétés locales, propriétés locales universelles

I.1. (c) Propriétés ponctuelles ou globales

I.1. (d) Topologie

I.2. Premiers problèmes didactiques

I.2. (a) Quantificateurs et dépendances

I.2. (b) Disparition du local au lycée

I.2. (c) Difficultés à utiliser l'existence d'objets non explicites

II. Relations entre propriétés locales et propriétés globales en mathématiques

II.1. Aspects mathématiques

II.1. (a) Les passages du local au global pour des fonctions, avec usage de la compacité

II.1. (b) Variantes locales et globales de certains énoncés

II.1. (c) Le langage de l'uniformité en analyse

II.2. Quelques problèmes didactiques

II.2. (a) Ce qui est à la charge respective des enseignants et des étudiants

II.2. (b) Absence de prise de conscience de la différence entre local et global

II.2. (c) Quantificateurs et dépendances dans les problèmes d'uniformité

III. Problématiques locales ou globales en mathématiques et en physique élémentaire

III.1. L'exemple des équations différentielles en mathématiques

III.2. Diverses approches en physique élémentaire

III.2. (a) Le point de vue local-différentiel : la mise en équation différentielle

III.2. (b) Le point de vue global-intégral : la mesure des grandeurs

III.2. (c) Le point de vue intégral comme globalisation du local

III.2. (d) Aborder un problème de physique : divers choix entre local et global, les lois locales et les "grands principes"

III.3. Quelques questions didactiques

Annexe. Mesure de grandeurs physique et intégrale comme globalisation d'un local théorique

Bibliographie

I. Les notions de local et global en mathématiques

Nous commençons par l'aspect mathématique des idées de local et global, d'abord en expliquant ces notions, puis en regardant les premiers problèmes didactiques qui se posent.

I.1. De quoi s'agit-il ?

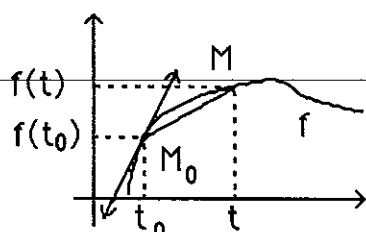
Dans ce paragraphe, nous nous proposons de définir les notions de local et global, en nous appuyant d'abord sur l'exemple de la dérivabilité, puis en formalisant un peu ces notions pour les fonctions, et en abordant enfin les aspects topologiques.

I.1. (a) Un exemple de notion locale : la vitesse instantanée ou dérivée

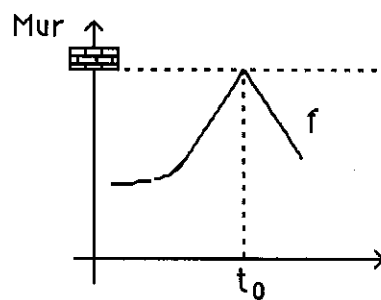
La notion de dérivée est très liée à la notion de vitesse, et nous partons de cette question. Pour un mobile se déplaçant sur une route rectiligne, on peut à chaque instant t donner sa position sur la route au moyen de son abscisse par rapport à un point origine ; notons $f(t)$ cette abscisse, qui est ainsi une fonction de la variable t . On peut représenter cette fonction par sa courbe représentative ou graphe (voir figure 1).

La vitesse moyenne entre deux instants t_0 et t ($t \neq t_0$) est alors définie comme le quotient de la différence des abscisses $f(t) - f(t_0)$ par la différence $t - t_0$ entre les instants : $v_m(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$. La vitesse instantanée en t_0 est la *limite* $v(t_0)$, si elle existe, de la vitesse moyenne entre t et t_0 quand t tend vers t_0 : $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$. Cette limite peut ne pas exister, le graphe de f ayant par exemple en ce point d'abscisse t_0 un point anguleux : c'est le cas lors d'un choc (voir figure 1).

Si elle existe, cette limite peut s'interpréter graphiquement par la notion de tangente (et du point de vue de l'*approximation locale* par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 de la fonction f au point t_0).



Vitesse instantanée



Choc

Figure 1

On voit donc que l'existence d'une vitesse instantanée repose essentiellement sur l'idée de limite. Précisons ce que signifie ici le fait que la vitesse moyenne $v_m(t)$ a une limite $v(t_0)$ quand t tend vers t_0 ; le sens intuitif est : " $v_m(t)$ peut être rendue aussi proche qu'on veut de $v(t_0)$ en prenant t assez proche de t_0 ".

Cette formulation intuitive se traduit de façon plus formelle ainsi :

"on se donne $\varepsilon > 0$ (arbitraire), on veut que l'écart entre les nombres $v_m(t)$ et $v(t_0)$ soit plus petit que ε ; on peut y arriver, en rendant l'écart entre t et t_0 plus petit qu'un certain $\eta > 0$ ".

De façon complètement formalisée, on dit :

"pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que pour t dans le voisinage $V_\eta =]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ on ait $|v_m(t) - v(t_0)| < \varepsilon$, pour $t \neq t_0$ ".

Si on oublie le sens concret de la variable t et de la fonction f (position du mobile), les mathématiciens disent : "la fonction f est dérivable en t_0 , de dérivée $v(t_0)$ ". Ce nombre est d'ailleurs alors noté $f'(t_0)$.

En quoi la propriété de la fonction f d'être dérivable en t_0 , avec dérivée égale à un nombre d , est-elle *locale* ? Parce que cette propriété ne dépend que des valeurs de f sur un voisinage de t_0 . Plus précisément, si une autre fonction g coïncide avec f sur un voisinage de t_0 (sur un intervalle ouvert de centre t_0), aussi petit soit-il, alors si f est dérivable en t_0 , de dérivée d , il en est de même pour la fonction g . En revenant à notre interprétation concrète, si deux mobiles ont exactement le même mouvement entre les instants $t_0 - \alpha$ et $t_0 + \alpha$, alors ils ont même vitesse instantanée en t_0 , et cela est vrai aussi petit que soit $\alpha > 0$. Nous allons préciser de façon générale la notion de propriété locale.

I.1. (b) Le cas des fonctions : propriétés locales, propriétés locales universelles

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et x un point de I . On dit qu'une propriété $P(f, x, I)$ de la fonction f définie sur I , relativement au point x , est *locale* si elle ne dépend que des valeurs de f sur un voisinage de x , aussi petit soit-il ; dit autrement, si une autre fonction g coïncide avec f sur un voisinage de x , alors on a aussi $P(g, x, I)$. Par exemple, avoir une limite en x , être continue en x , être dérivable en x , avoir une dérivée $f'(x) \geq 0$ en x , ... sont des propriétés locales.

Très souvent, on associe à une propriété locale $P(f, x, I)$ la propriété *locale universelle* $P(f, I)$ en affirmant la première pour tous les points x de I : $P(f, I)$ est la propriété : $P(f, x, I)$ pour tout x de I . Par exemple, être dérivable en tout point de I ...

La plupart du temps, une propriété locale relie une condition à vérifier dans laquelle il y a une donnée arbitraire, traduite par un quantificateur universel (dans l'exemple de la vitesse : pour $\varepsilon > 0$ donné, réaliser $|v_m(t) - v(t_0)| < \varepsilon$), à un voisinage V à trouver, mais en général non précisé, du point où l'on regarde la propriété, sur lequel la condition est vérifiée ; l'énoncé affirme seulement l'existence de ce voisinage (il y a un quantificateur existentiel), et le fait qu'il dépend de la donnée arbitraire (par exemple ε) est presque toujours *totale* *implicite*.

Dans certains cas, la propriété locale ne dépend que de quantificateurs existentiels. Par exemple, dire qu'une fonction est lipschitzienne *au voisinage de* x c'est dire qu'il existe un voisinage V de x et une constante $k > 0$ tels que pour tous u et v dans V on ait $|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|$. Dans ce cas, le voisinage V de x ne dépend pas d'une autre variable liée par un quantificateur universel (comme le $\forall \varepsilon$ de la dérivation). La propriété locale universelle correspondante est : "f est localement lipschitzienne" ; cela signifie que pour tout x de I il existe un voisinage V de x et $k > 0$ (dépendant tous deux de x) tels qu'on ait l'inégalité précédente pour u et v dans V .

I.1. (c) Propriétés ponctuelles ou globales

(*) *Propriété ponctuelle* : c'est une propriété d'une fonction f relativement à un point x_0 qui ne dépend que de la valeur de f au point x_0 . Par exemple, énoncer que $f(x_0) = 3$ est une propriété ponctuelle. On peut généraliser à des propriétés de suites de fonctions, par exemple : dire "la suite de fonction f_n converge simplement vers 7 au point x_0 " est une propriété ponctuelle de la suite (f_n) , elle signifie que la suite des nombres $f_n(x_0)$ converge vers 7.

Attention : dire que $f'(x_0) \geq 0$ n'est pas une propriété ponctuelle de f ; en revenant à la définition de la dérivée le lecteur mathématicien pourra s'amuser à écrire cette propriété formellement, et constater qu'elle est locale. Par contre, si la fonction dérivée f' est définie sur I , alors la propriété $f'(x_0) \geq 0$ est ponctuelle comme propriété de f' (mais pas de f).

(*) *Propriété globale* : c'est une propriété d'une fonction f sur un intervalle donné I faisant

Encart A

Une propriété globale qui est locale

Voici, à l'usage des lecteurs physiciens ou mathématiciens, un exemple assez étonnant de propriété dont la définition laisse penser qu'elle est globale, alors qu'elle est *a posteriori* locale.

Si f est une fonction continue 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, le fait que sa série de Fourier en x_0

$$S_n(f)(x_0) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx_0}$$

converge vers $f(x_0)$ quand $n \rightarrow +\infty$ semble une propriété globale, puisque les coefficients de Fourier $c_k(f)$ sont de nature globale (ce sont des intégrales portant sur f :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt ,$$

donc faisant intervenir toutes les valeurs de f sur $[0, 2\pi]$; pourtant, on peut montrer (voir Titchmarsh 1939) que si une autre fonction continue 2π -périodique g coïncide avec f sur un voisinage de x_0 , alors $S_n(f)(x_0) - S_n(g)(x_0)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, et par suite $S_n(g)(x_0)$ tend aussi vers $g(x_0)$.

intervenir toutes les valeurs de f sur l'intervalle. Par exemple, la propriété " $f(x) > 0$ pour tout x de I " est une propriété globale. Une propriété globale dépend en général d'un quantificateur universel portant sur les points de I . Mais nous la distinguons d'une propriété locale universelle pour marquer le fait que sa définition ne fait pas intervenir de voisinages des points de I . Ainsi " $f'(x) \geq 0$ pour tous les x de I " est pour nous locale universelle, pas globale pour f (elle est globale pour f').

Mais il y a des propriétés plus subtiles qu'il n'est pas évident de classer comme locale universelle ou comme globale (ainsi, le mathématicien pourra penser que l'uniforme continuité sur un intervalle I d'une fonction f devrait plutôt être cataloguée comme propriété "locale globale").

Assez souvent, une propriété globale fait intervenir non pas des points de I mais des couples de points de I ; ainsi, être globalement lipschitzienne de rapport k signifie pour la fonction f qu'on a l'inégalité

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|$$

pour tous les couples (u, v) de points de I .

Signalons enfin que certaines propriétés dont la définition est globale peuvent être en fait locales (voir encart A).

I.1. (d) Topologie

Du côté de la géométrie et des espaces topologiques, les notions de local et global jouent aussi un grand rôle. Déjà, les propriétés précédentes pour les fonctions font intervenir des voisinages des points d'un intervalle. On peut donc généraliser ces notions à des fonctions définies sur des *espaces topologiques*, où sont définis des voisinages de chaque point, par exemple des espaces métriques (voir encart B). Mais des propriétés des espaces topologiques eux-mêmes, de nature locale ou globale, peuvent être définies et utilisées. Citons quelques exemples de ce que sont des propriétés topologiques locales.

Encart B

Espaces topologiques, homéomorphies, compacité, connexité

Un *espace topologique* est un ensemble X sur lequel on définit une relation de proximité entre les points, qui se traduit par le fait que chaque point possède une famille de *voisinages* (les points "assez voisins"). Le prototype est la droite, le plan ou l'espace, avec la distance usuelle entre deux points, et les voisinages d'un point sont alors les "boules" centrées en ce point. Un sous-ensemble U est *ouvert* si chaque fois qu'il contient un point, il contient les points assez voisins.

On définit dans un espace topologique une notion de *convergence* : une suite de points x_n converge vers un point x si on peut rendre x_n aussi proche qu'on veut de x en rendant n assez grand (voir en I.1. (a) la notion de limite).

Une *application continue* f d'un espace topologique X dans un autre Y fait correspondre à un point x de X un point noté $f(x)$ de Y , de telle façon que $f(x)$ puisse être rendu aussi proche qu'on veut de $f(x_0)$ en rendant x assez proche de x_0 . Deux espaces topologiques X et Y sont *homéomorphes* s'il existe une bijection f entre eux, telle que f et f^{-1} soient continues. Alors, X et Y ont les mêmes propriétés topologiques (locales comme globales).

Un espace topologique est *compact* si toute suite de points (x_n) de X possède une sous-suite (x_{n_p}) qui est convergente vers un point de X . Une définition équivalente est la propriété de Borel-Lebesgue : si une famille de sous-ensembles U_i *ouverts* de X recouvre X (chaque point de X est dans l'un des U_i), alors on peut trouver une sous-famille finie $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}$ qui suffit à recouvrir X . Un prototype de compact est un intervalle fermé borné $[a, b]$.

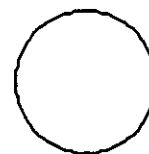
Un espace topologique est *connexe* s'il est "en un seul morceau" : un disque du plan est connexe, la réunion de deux disques disjoints ne l'est pas (voir figure 2).

(*) *La locale compacité* : un espace X est localement compact si tout point x possède un voisinage V qui est compact (voir encart B).

(*) *La locale connexité* : tout voisinage V d'un point x quelconque de X contient un voisinage W qui est connexe (voir encart B). Remarquons la différence formelle avec la locale compacité : au lieu de supposer l'existence d'un voisinage ayant la propriété souhaitée, l'hypothèse faite signifie en un certain sens qu'il y en a beaucoup - mais cette propriété d'abondance peut aussi être *déduite* de la définition dans le cas de la locale compacité, et la différence n'est donc qu'au niveau de la définition formelle.

(*) *L'homéomorphie locale à $\mathbb{R}^n$* : tout point x de X possède un voisinage V homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (voir encart B). C'est par exemple le cas des variétés, objets principaux de la géométrie différentielle et de la physique théorique.

Bien entendu, les deux premières propriétés sont *locales* à cause de l'existence postulée de voisinages des points ayant la *propriété globale* correspondante : compacité, connexité.



Connexe



Non connexe

Figure 2

L'une des questions essentielles en géométrie et topologie est de savoir si deux espaces *localement homéomorphes* (par exemple deux variétés de même dimension n) sont *globalement homéomorphes*. En général il n'en est rien, par exemple des surfaces sont localement homéomorphes à $\mathbb{R}^2$, donc entre elles, mais elles ne sont pas en général globalement homéomorphes :

sur la figure 3, les points a dans un plan, b sur une sphère et c sur un tore, ont des voisinages U , V , W qui sont homéomorphes ; mais ces trois surfaces ne sont pas globalement homéomorphes.

La question est alors de savoir quelles autres propriétés globales il faut supposer pour que l'homéomorphie locale soit globale. Par exemple une surface compacte et *simplement connexe* (toute courbe fermée continue peut se contracter continuellement en un point, ce qui signifie qu'elle n'a pas de trou, contrairement au tore, par exemple) est homéomorphe globalement à la sphère (pour la dimension 3, c'est la conjecture de Poincaré, dont une preuve est à cette date annoncée). Plus généralement, l'invariant global qui permet de classer les surfaces compactes à homéomorphie globale près est le "nombre de trous" (0 pour la sphère, 1 pour le tore, etc).

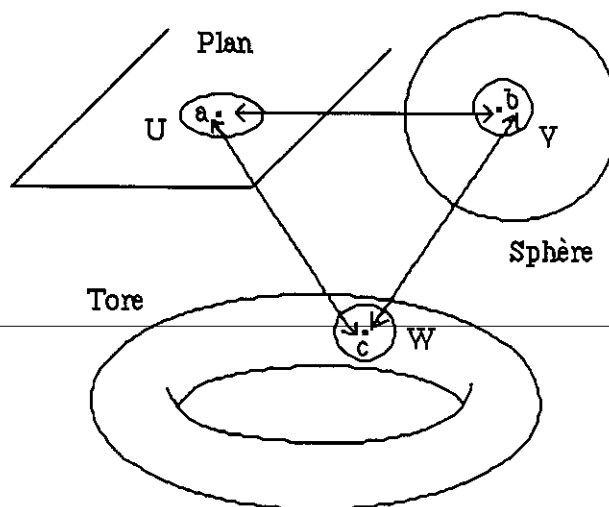


Figure 3

I.2. Premiers problèmes didactiques

Les considérations précédentes sur les fonctions permettent déjà de comprendre l'origine de premières difficultés didactiques.

I.2. (a) Quantificateurs et dépendances

Nous avons vu que la définition d'une propriété locale d'une fonction, telle que la continuité ou la dérivabilité, faisait intervenir, en général pour chaque valeur d'un paramètre $\varepsilon > 0$ arbitraire, l'existence d'un voisinage non précisé explicitement du point x où l'on regarde une certaine relation. Il y a donc un jeu sur les quantificateurs : " $\forall \varepsilon > 0, \exists V$ voisinage de x , tel que...", jeu qui implique une dépendance : le voisinage V dont on affirme l'existence dépend de ε , et sa taille change avec lui (en général, plus ε est petit, plus V est petit). Il faudrait, idéalement, noter V_ε ce voisinage, ... bien qu'il y en ait plusieurs possibles ! On conçoit qu'il y a là des subtilités qu'il est illusoire de vouloir faire passer au lycée auprès des élèves. Même à partir des deux premières années d'université, où l'usage des quantificateurs devient inévitable, la dépendance précédente est loin d'être bien comprise par les étudiants. L'oubli de cette dépendance est évidemment la source d'un certain nombre d'erreurs.

Il s'y ajoute, à partir de la deuxième année d'université, le fait que pour une propriété locale universelle, la taille du voisinage V dont on cherche à prouver l'existence dépend aussi du point x où l'on regarde la propriété. L'indépendance de la taille de ce voisinage du point s'introduit à partir du concept d'*uniformité* (continuité uniforme, convergence uniforme...). Nous reviendrons sur ces questions au § II.1.(c).

I.2. (b) Disparition du local au lycée

Compte-tenu de la subtilité du jeu des quantificateurs présent dans la notion de dérivabilité, le choix des programmes comme des pratiques du lycée est de faire disparaître le caractère local de la dérivation. On se contente donc de calculs sur des fonctions partout dérivables, en utilisant des

énoncés de dérivabilité automatique de caractère algébrique. Il en résulte que les propriétés globales des graphes de fonctions deviennent l'objet d'études prépondérant, au détriment d'études locales, avec néanmoins quelques exceptions sur la recherche du comportement en un point où les formules sont indéterminées (on peut voir dans Maschietto 2003 des exemples de conflits chez les élèves entre une approche locale de la notion de dérivée et leurs habitudes globales sur les graphes). De plus, on étudie peu de fonctions "générales", mais des fonctions explicites.

La rupture avec l'université est ainsi brutale : l'aspect local est immédiatement repris dès le début de l'analyse, et on travaille de façon importante, y compris dans les exercices, sur des fonctions générales (voir à ce propos Praslon 2000).

I.2. (c) Difficultés à utiliser l'existence d'objets non explicites

Encart C

Exemple de calcul explicite de dérivée

Pour calculer la dérivée de $f(x) = x^3$ au point x_0 , on calcule

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^3 - x_0^3}{x-x_0} = x^2 + xx_0 + x_0^2$$

$= 3x_0^2 + 3x_0h + h^2$, si $x = x_0 + h$. Par suite on a

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - 3x_0^2 \right| = |h| |3x_0 + h|$$

et il suffit de rendre ceci $< \varepsilon$. On choisit déjà de prendre $|h| < 1$, et la quantité à majorer est alors inférieure à $|h| (3|x_0| + 1)$, qu'il suffit donc de majorer par ε .

Si $\eta = \min \left(1, \frac{\varepsilon}{3|x_0| + 1} \right)$, on voit que le voisinage $V_\varepsilon =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ répond à la définition de la dérivée en x_0 pour le choix de ε , et est explicite.

Mais la relation $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - 3x_0^2 = 3x_0h + h^2$ et les théorèmes sur les limites montrent que cette quantité tend vers 0 quand h tend vers 0, sans expression explicite d'une dépendance $\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$.

En première année d'université, pour bien faire comprendre la dépendance en jeu dans une propriété locale, par exemple la dérivabilité, et pour faire comprendre une idée essentielle en analyse : le caractère suffisant mais rarement nécessaire des implications assurant une propriété, en particulier en utilisant des inégalités, on fait déterminer aux étudiants des voisinages explicites V_ε sur lesquels on a la propriété visée $\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$ (voir en encart C un exemple standard de ce type d'activités).

Il en résulte parfois chez des étudiants une tendance à penser qu'il faut déterminer explicitement, pour utiliser une propriété locale, ce voisinage V_ε , au moins pour des ε dont ils ont besoin, alors qu'en général l'existence du voisinage suffit pour les raisonnements où il intervient. Mais comme une détermination explicite d'un voisinage demande souvent de mettre en œuvre des techniques de calcul et de majoration peu disponibles chez les étudiants, ils sont alors bloqués par leur exigence d'explicitation, inutile et parfois hors de leur portée.

Voici un exemple de ce type de phénomène, effectivement rencontré par des enseignants. On veut montrer que la fonction $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$ est "décroissante lorsque x est assez grand". L'énoncé ne demande pas de quantifier ce "assez grand", on n'en avait pas besoin pour le problème qu'on se proposait de résoudre avec cette propriété. Il n'est donc absolument pas utile de déterminer un intervalle explicite $]a, +\infty[$ sur lequel la dérivée f' est négative (l'inégalité $f'(x) \leq 0$ traduit la décroissance) ; il suffit de montrer que $f'(x) \leq 0$ quand x est assez grand, ce qui est facile car le numérateur de $f'(x)$ étant $x^2 + 1 + \ln x - x^2 \ln x$, son terme prépondérant (c'est-à-dire celui dont la valeur absolue tend vers l'infini bien plus vite que tous les autres) est $-x^2 \ln x$, qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers l'infini. Mais les étudiants ont essayé de déterminer un a explicite tel que pour $x > a$ ce numérateur soit négatif, sans succès. Cela demande en effet une technique plus élaborée (quoique assez élémentaire ici : $a = e^2$ suffit, par exemple), qui explique leur échec.

On peut penser qu'il y a là, d'ailleurs, une difficulté épistémologique plus profonde : en mathématiques, on utilise de nos jours sans hésiter des "objets mathématiques" dont on sait seulement qu'ils existent, alors même que bien souvent on serait incapable de les décrire ou de les calculer. Cette possibilité a d'ailleurs donné lieu à bien des discussions avant d'être quasi-universellement acceptée, seuls quelques rares mathématiciens "intuitionnistes" émettant encore des réserves. Peut-être les

étudiants ont-ils eux aussi certaines réticences inconscientes à utiliser de tels objets, en particulier ici un intervalle $]a, +\infty[$ non précisé.

II. Relations entre propriétés locales et propriétés globales en mathématiques

Les relations entre propriétés locales et globales jouent un rôle important en mathématiques. Par exemple, un des problèmes, en analyse et en géométrie, est de passer d'une propriété locale universelle à une propriété globale correspondante. Nous allons étudier cette question selon plusieurs aspects, d'abord du point de vue mathématique, avant de regarder les problèmes didactiques soulevés par ces activités de globalisation.

II.1. Aspects mathématiques

Nous avons choisi de mettre l'accent sur trois types de problèmes qui apparaissent dans les mathématiques des trois premières années d'université, en analyse : les procédures de globalisation, l'existence de versions locales et globales d'énoncés du même type, les questions d'uniformité.

II.1. (a) Les passages du local au global pour des fonctions, avec usage de la compacité

Une propriété $P(f, I)$ locale universelle (c'est-à-dire vérifiée en chaque point de I) étant vérifiée par une fonction f , on se demande si on peut en déduire la propriété globale correspondante pour f . En général, il faut faire sur l'intervalle I une hypothèse topologique de nature globale, la plus fréquente dans ce type de questions étant la compacité : I est fermé et borné (de type $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$).

Dans ce cadre de l'utilisation de la compacité (voir encart B), il y a quatre *méthodes* principales souvent utilisées. Nous allons les identifier sur l'exemple des fonctions localement bornées.

Une fonction f est localement bornée sur I si pour tout point x de I il existe un voisinage V_x de x sur lequel f est bornée (c'est-à-dire : $|f(x)| \leq m_x$ sur V_x). Par exemple, une fonction continue est localement bornée, mais bien sûr m_x et la taille de V_x dépendent de x , et l'oubli de ce fait pourrait faire croire qu'une fonction continue sur $]0, 1[$ serait toujours bornée... Mais si l'intervalle est fermé borné, alors une fonction localement bornée l'est globalement. Voici quatre méthodes assez standard pour prouver ce fait.

(*) *Contraposée et construction d'une suite donnant une contradiction*

On raisonne par contraposition ("par l'absurde") : on suppose que la fonction n'est pas bornée, c'est-à-dire par exemple que pour tout entier n il existe un point x_n où $|f(x_n)| \geq n$. On extrait une sous-suite x_{n_p} convergente vers un point x de I (voir encart B), et $|f(x_{n_p})|$ tend vers l'infini quand p tend vers l'infini ; mais ceci est impossible car pour p assez grand les points x_{n_p} sont dans V_x , et par hypothèse on devrait avoir dans ce voisinage $|f(x_{n_p})| \leq m_x$.

(*) *Recouvrements par des ouverts et théorème de Borel-Lebesgue*

On prend les V_x ouverts, et le théorème de Borel-Lebesgue (voir l'encart B) dit qu'un nombre fini de ces ouverts, $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}$, recouvrent ensemble tout l'intervalle I . Donc pour tout x de I on a la majoration $|f(x)| \leq m = \text{le maximum des nombres } m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$: la fonction f est bien globalement bornée.

(*) *Localisation en un point de la négation de la propriété globale et usage de la dichotomie*

Cette méthode marche lorsque la propriété globale est "additive" sur les intervalles : si elle est vraie sur $[c, d]$ et sur $[d, e]$, alors elle est vraie sur $[c, e]$; c'est évidemment le cas pour la propriété d'une fonction : "être bornée". On suppose alors qu'elle est fausse sur $I = [a, b]$. Elle est donc fausse sur une des deux moitiés $[a, (a+b)/2]$ ou $[(a+b)/2, b]$. On note $[a_1, b_1]$ l'un de ces inter-

valles où la fonction f n'est pas bornée. On coupe à son tour cet intervalle en deux, et sur l'une de ses moitiés $[a_2, b_2]$ f n'est pas bornée (voir figure 4).

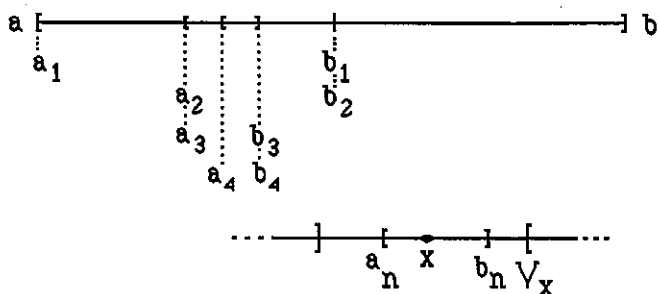


Figure 4

On continue, et on fabrique ainsi une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ sur lesquels f n'est pas bornée, et dont la longueur tend vers 0. Soit x le (seul) point commun à tous ces intervalles. Si n est assez grand, $[a_n, b_n]$ est inclus dans V_x (ceci traduit le fait que les suites a_n et b_n convergent vers x) et par suite f est bornée par m_x sur $[a_n, b_n]$, ce qui est contradictoire au choix des intervalles $[a_n, b_n]$ sur lesquels f n'est pas bornée.

(*) *Extension de l'intervalle sur lequel la propriété a lieu et théorème de la borne supérieure*

On définit brutalement l'ensemble A comme l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels que f soit bornée sur $[a, x]$. Il est facile de voir que A est non vide (il contient le voisinage V_a) et qu'il est un intervalle, donc de la forme $[a, c]$ ou $[a, c[$. On montre alors que $c = b$ et $A = [a, b]$, et f est donc bornée sur $[a, b]$ (voir l'encart D).

Encart D

Utiliser le théorème de la borne supérieure pour montrer qu'une fonction localement bornée sur $[a, b]$ y est globalement bornée

On a appelé A l'ensemble des x de $[a, b]$ tels que f soit bornée sur $[a, x]$, et on sait que A n'est pas vide.

(1) Clairement, si x est dans A , alors tout y de l'intervalle $[a, x]$ est contenu dans A . Le théorème de la borne supérieure dit alors que A est de la forme $[a, c[$ ou $[a, c]$: c est la borne supérieure de A .

(2) Si $c < b$, il existe $\eta > 0$ tel que V_c contienne l'intervalle $[c - \eta, c + \eta]$, et donc $|f| \leq m_c$ sur cet intervalle. Par définition de c , f est bornée sur l'intervalle $[a, c - \eta/2]$, et elle est bornée par m_c sur l'intervalle $[c - \eta/2, c + \eta]$; par suite f est bornée sur $[a, c + \eta]$, ce qui contredit la définition de c comme borne supérieure de A . Donc $c = b$.

(3) Puis, soit $[b - \epsilon, b]$ inclus dans V_b ; alors f est bornée sur $[a, b - \epsilon/2]$, puisque A contient $[a, b[$, et elle est bornée par m_b sur $[b - \epsilon/2, b]$. Elle est donc bornée sur $[a, b]$ tout entier, et $A = [a, b]$.

On constate que les méthodes 2, 3 et 4 utilisent fortement le fait que la propriété "être bornée" est "additive" sur les intervalles, et que si les méthodes 1 et 3 sont les seules à fonctionner par contraposée globale (on nie d'emblée la propriété globale pour obtenir une contradiction), la méthode 4 utilise aussi un raisonnement par contraposée. Seule la méthode 2 est en un certain sens totalement directe.

Ces quatre méthodes, avec parfois certaines adaptations un peu plus subtiles, sont en général utilisables de façon concurrentielle dans la plupart des problèmes de globalisation de propriétés locales universelles de fonctions.

D'autres propriétés locales universelles dans le cadre des fonctions sont plus délicates à globaliser, et demandent d'utiliser d'autres hypothèses que la compacité.

Voici un exemple pour les lecteurs physiciens ou mathématiciens. Une fonction analytique $f(z)$ dans un ouvert U du plan complexe $\mathbb{C}$ possède des primitives locales : pour tout z de U , il existe un voisinage V_z de z et une fonction analytique F_z définie dans V_z telle que $F_z'(w) = f(w)$ pour tout w de V_z . Mais il est faux en général que f possède une primitive analytique globale dans tout U ; le contre-exemple classique est la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ dans $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (d'où l'impossibilité d'une fonction

"logarithme de z " dans cet ouvert). Mais si on suppose que l'ouvert U possède une propriété topologique globale supplémentaire : la "simple connexité", alors l'existence d'une primitive globale dans U est assurée (rappelons que dire qu'un ouvert U est simplement connexe, c'est dire qu'il est sans trou - au contraire de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

II.1. (b) Variantes locales et globales de certains énoncés

L'exemple précédent illustre déjà cette situation : "toute fonction analytique a localement des primitives" est la variante locale de l'énoncé global "toute fonction analytique dans un ouvert simplement connexe a une primitive globale".

Ces variantes entre énoncés locaux et globaux apparaissent dès la première année d'université. Prenons l'exemple des formules de Taylor. Voici deux énoncés (que nous donnons sous des hypothèses qui ne sont pas minimales) dont les termes sont assez clairs, hormis l'expression de "classe C^k " pour une fonction f : cela signifie que f est dérivable, de dérivée f' , que f' est à son tour dérivable, de dérivée f'' , que f'' est dérivable, de dérivée $f^{(3)}$, ... etc, jusqu'à l'existence de la k -ème dérivée $f^{(k)}$, supposée de plus continue.

(*) *Taylor-Young* : si f est définie sur un intervalle I contenant le point 0 et est de classe C^n , alors on peut écrire

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

où $R_n(x) = x^n \varepsilon(x)$, la fonction $\varepsilon(x)$ tendant vers 0 quand x tend vers 0.

(*) *Taylor-Lagrange* : si f est définie sur un intervalle I contenant le point 0 et est de classe C^{n+1} , et si de plus $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I , on a alors

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

où $|R_n(x)| \leq M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout x de I .

Dans ces deux énoncés, $f(x)$ ne diffère d'un polynôme en x de degré n que d'un "reste" $R_n(x)$ qui est *négligeable* devant x^n quand x tend vers 0, au sens où $\frac{R_n(x)}{x^n}$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Mais il y a une différence essentielle entre les deux. Pour rendre $\left| \frac{R_n(x)}{x^n} \right| < \varepsilon$, il faudra dans la première formule prendre x dans un voisinage V_ε non précisé de 0, dont on ne contrôle pas la taille ; de surcroît, on ne dispose d'aucune majoration de $R_n(x)$ sur I : cette formule est locale. Remarquons d'ailleurs que pour $n = 1$ cette première formule exprime la dérivabilité de f en a , dont on retrouve ainsi le caractère local : il s'agit d'un "développement limité" à l'ordre 1.

Par contre, la deuxième formule permet de contrôler le voisinage V_ε (on peut le prendre sous la forme $|x| < \frac{\varepsilon}{M} (n+1)!$), et surtout la majoration de $R_n(x)$ est globale, elle permet donc de trouver des estimations de f sur tout l'intervalle I . Une telle formule est ainsi utile pour montrer des inégalités globales, que la première formule ne permet pas d'atteindre. Par exemple, si $f(x) = \ln(1+x)$, il est facile de montrer par la formule de Taylor-Lagrange que $\left| \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \right| \leq 4x^4$ pour tout x de l'intervalle $] -1/2, +1/2[$. Mais cette inégalité est impossible à établir à l'aide de la formule de Taylor-Young, à cause du caractère local de celle-ci.

II.1. (c) Le langage de l'uniformité en analyse

Dès la deuxième année d'université, plusieurs notions de convergence de suites de fonctions interviennent. En nous limitant aux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, citons en trois.

(*) *La convergence simple ou ponctuelle* : la suite f_n converge simplement vers la fonction f si pour tout x de I la suite des nombres $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. Il s'agit d'une propriété ponctuelle de la suite (f_n) . Si on explicite la convergence, on voit que pour x donné et pour ε donné il existe un entier N , *dépendant de x et de ε* , tel que pour $n \geq N$ on ait $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Cette dépendance de x a pour conséquence, par exemple, que si les fonctions f_n sont continues, la limite f ne l'est pas nécessairement (voir figure 5).

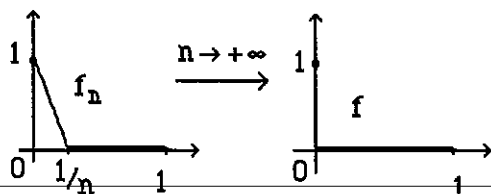


Figure 5

En considérant que l'intervalle $]N, +\infty[$ des entiers est un *voisinage de l'infini*, on peut considérer que la convergence simple est une *propriété locale de la suite (f_n)* , considérée comme une fonction de n , relativement au point infini de $\mathbb{N}$. Ceci traduit la dépendance de N par rapport au nombre ε .

(*) *La convergence uniforme sur tout compact* : la suite f_n "converge vers f uniformément sur tout compact" si, pour tout intervalle compact K inclus dans I et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N , *dépendant de ε et de K* , tel que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $n > N$ et *tout point x de K* . C'est le fait que l'inégalité a lieu pour tous les points x de K à *partir du même N* qui est évoqué par la terminologie "uniformément sur K ". Cette propriété de convergence a un certain caractère local par rapport aux points x au sens où pour un point x de I les intervalles compacts K inclus dans I et contenant x dans leur intérieur sont des voisinages de x . Mais ces voisinages compacts sont donnés, comme ε , ils ne sont pas à trouver, comme N ; il ne s'agit donc pas de la même notion de local que celle vue antérieurement.

Par exemple, si on note g_n les restrictions à $J =]0, 1]$ des fonctions f_n de la figure 5, alors la suite g_n converge vers la fonction $g = 0$ uniformément sur tout compact de J .

(*) *La convergence uniforme* : la suite f_n converge vers f uniformément sur I si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N , *dépendant de ε* , tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *pour tous les x de I* .

Ce type de convergence est essentiel en analyse, c'est lui (ou des variantes analogues) qui permet de maintenir à la limite f les propriétés intéressantes des f_n : continuité, dérivabilité (si ce sont les f_n qui convergent uniformément), etc.

Sur l'exemple des fonctions f_n de la figure 5, on voit facilement que la convergence des f_n vers f n'est pas uniforme sur $I = [0, 1]$: pour réaliser $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pour un $x > 0$, il faut que $n > \frac{1-\varepsilon}{x}$, et par suite l'entier N à trouver dépendra nécessairement de x : la convergence n'est pas uniforme.

Graphiquement, la suite f_n converge vers f uniformément sur I si, quand on se donne un "tube" autour du graphe de f , d'épaisseur verticale $2\varepsilon > 0$, déterminé par le graphe de $f + \varepsilon$ et celui de $f - \varepsilon$, alors les graphes des fonctions f_n sont dans ce tube pour $n \geq N_\varepsilon$ (voir figure 6).

Etant liée à une norme (une distance entre fonctions), la convergence uniforme est facile à manier... mais dès qu'elle n'a pas lieu, il y a des problèmes délicats, liés aux questions de dépendance de N par rapport à x (convergence simple) ou au compact K (convergence uniforme sur tout compact).

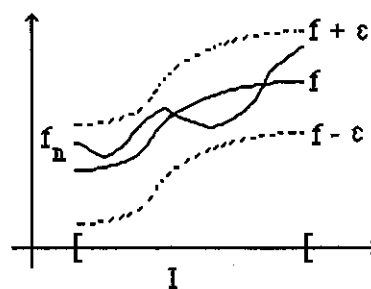


Figure 6

II.2. Quelques problèmes didactiques

Nous allons essayer de pointer quelques questions didactiques posées par les notions mathématiques présentées dans le paragraphe II.1. Nous nous concentrons volontairement sur trois aspects essentiels, bien d'autres questions se poseraient dans le détail.

II.2. (a) *Ce qui est à la charge respective des enseignants et des étudiants*

C'est le premier aspect qu'on constate dans la réalité de l'enseignement universitaire. Les problèmes un peu délicats des passages local-global, d'une part, et les différences importantes dans le traitement des quantificateurs dans les convergences, d'autre part, sont le plus souvent à la charge des seuls enseignants.

Ainsi, certaines des quatre méthodes de globalisation de propriétés locales universelles de fonctions, vues au § II.1. (a), sont utilisées implicitement en cours, quand l'enseignant énonce et démontre qu'une fonction continue sur un compact est bornée, et atteint ses bornes, ou qu'une fonction continue sur un intervalle vérifie le "théorème des valeurs intermédiaires", ou qu'une fonction f à dérivée $f' \geq 0$ est croissante... Mais il est extrêmement rare que des exercices analogues soient à la charge des étudiants. Les énoncés qu'on leur propose en général (de type particulier et numérique au lycée, de type général à l'université) ont pour rôle de familiariser les étudiants avec les manières *d'appliquer* (parfois avec des adaptations) les théorèmes précédents, presque jamais de prouver des globalisations analogues.

Par exemple, dans un exercice fréquent on demande aux étudiants de prouver qu'une fonction continue $f > 0$ sur $[0, +\infty[$, qui tend vers 0 en $+\infty$, a un maximum (il faut adapter un peu pour se ramener à *appliquer* l'un des théorèmes évoqués ci-dessus). Mais on ne propose jamais de prouver, par exemple, qu'une fonction localement lipschitzienne sur $[a, b]$ y est globalement lipschitzienne, énoncé dont la preuve demanderait de mettre en œuvre l'une des quatre *méthodes* de globalisation (le lecteur mathématicien pourra vérifier que chacune de ces quatre méthodes marche effectivement).

On a la même situation avec les notions de convergence : les enseignants prouvent qu'une limite uniforme de fonctions continues l'est encore, en insistant sur l'indépendance du N_ϵ par rapport aux points x (uniformité), mais les seuls exercices proposés tendent à faire *utiliser* ce théorème de continuité d'une limite uniforme, et non à *prouver des énoncés analogues par la même méthode* (par exemple : limite uniforme de fonctions uniformément continues, limite simple de fonctions uniformément globalement lipschitziennes...).

II.2. (b) *Absence de prise de conscience de la différence entre local et global*

Une des circonstances qui rendent difficile la dévolution aux étudiants de preuves mettant en œuvre des méthodes générales de globalisation est que bien souvent les enseignants eux-mêmes ne dégagent pas l'idée de la différence entre propriétés locales et propriétés globales. Pire : bien des manuels, par exemple, dans le chapitre concernant les formules de Taylor, ne signalent même pas que certaines ont un caractère local et d'autres un caractère global. On voit ainsi fréquemment des étudiants essayer désespérément de prouver une inégalité fonctionnelle sur tout un intervalle en utilisant la formule de Taylor-Young, avec un $\epsilon(x)$ non précisé !

C'est un peu, mais dans l'autre sens, la même cause qu'a le type de réaction que nous avons évoqué au § I.2. (c) à propos de la fonction $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$: comment penser qu'un raisonnement local (sur un voisinage non précisé de $+\infty$) suffira, si on n'a pas une claire conscience de la différence entre local et global ?

II.2. (c) *Quantificateurs et dépendances dans les problèmes d'uniformité*

On peut penser que l'une des raisons pour lesquelles les enseignants n'essayent pas souvent de provoquer chez les étudiants la prise de conscience des rapports entre local et global est que le jeu sur les quantificateurs qui apparaît dans ces rapports demande une familiarité minimum avec l'usage de la logique des prédicats... qui est en général l'un des points aveugles de l'enseignement universitaire (voir Durand-Guerrier 1996 et 1999). Les enseignants savent ainsi que les étudiants ont des difficultés avec ces questions de logique mathématique, et ils évitent de s'y référer, sauf lorsque c'est indispensable.

L'un des domaines où ce recours est inévitable est celui des rapports entre les divers modes de convergence des suites de fonctions évoqués en II.1. (c). Les enseignants font donc, à ce propos, les interventions permettant en principes aux étudiants de distinguer les convergences simple, uniforme sur tout compact, et uniforme. Mais l'expérience montre que ces distinctions passent mal, et que des confusions ont lieu, conséquences d'une interaction entre la difficulté à manier les quantificateurs, une certaine vision de la topologie de $\mathbb{R}$, et des difficultés dans les rapports entre fini et infini.

Prenons l'exemple de la suite de fonctions $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x e^{-kx}$, effectivement testée sur des étudiants préparant le CAPES de mathématiques (voir Pian et all. 1998). Il est facile, par sommation d'une série géométrique, de montrer que cette suite converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f définie par $f(0) = 0$, et si x n'est pas nul, $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. De plus, on voit de même que si $x \geq a > 0$, alors on a $|f(x) - f_n(x)| \leq e^{-na}$; on en déduit que la convergence de f_n vers f est uniforme sur chacun des intervalles $[a, +\infty[$, pour $a > 0$. De nombreux étudiants (cf Pian et all. 1998) en déduisent que la suite f_n converge uniformément vers f sur $]0, +\infty[$, parce que cet ensemble est la réunion des intervalles $[a, +\infty[$ lorsque $a > 0$. Ils ne voient pas du tout le fait que les $a > 0$ nécessaires pour que les $[a, +\infty[$ recouvrent $]0, +\infty[$ sont en nombre infini, et que par suite les entiers $N(a, \varepsilon)$ (dépendant de a), tels que pour $n \geq N(a, \varepsilon)$ on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x de $[a, +\infty[$, sont aussi en nombre infini, et qu'on ne pourra donc pas *a priori* en trouver un majorant. Et les étudiants n'ont pas le moyen de contrôle de constater que la fonction f est discontinue en 0, ce qui interdit une convergence uniforme de la suite f_n sur $]0, +\infty[$, qui aurait lieu si elle convergeait uniformément sur $]0, +\infty[$: cela demanderait qu'ils aient réalisé que la convergence uniforme est "finiment additive sur les ensembles" : si f_n converge uniformément sur les ensembles A et B , elle converge uniformément sur leur réunion $A \cup B$ (ici : $]0, +\infty[$ et $\{0\}$). Nous retrouvons le fait que peu de problèmes sur la convergence uniforme sont dévolus aux étudiants. Par exemple, montrer que si une suite de fonctions f_n converge "localement uniformément" (tout point x possède un voisinage V_x sur lequel f_n converge uniformément) sur un intervalle compact I alors elle converge uniformément sur I , par l'une des quatre méthodes de globalisation du § II.1. (a), mettrait en valeur cette "additivité", mais cet exercice n'est jamais posé, bien sûr...

III. Problématiques locales ou globales en mathématiques et en physique élémentaire

Nous abordons dans cette partie les notions de local et global sous l'angle des *problématiques* ou des *points de vue*. Il s'agit pour nous d'analyser comment certains *problèmes* peuvent être abordés avec des points de vue qu'on aurait envie de décrire comme local ou global.

Nous choisissons comme exemple de problèmes en mathématiques celui des équations différentielles, à cause de son importance en physique. Dans cette discipline, nous analyserons les points de vue local ou global à travers leur traduction mathématique : différentielle ou intégrale, mais bien d'autres aspects interviennent en liaison avec ces points de vue, à travers les problèmes de mise en équation ou modélisation.

III.1. L'exemple des équations différentielles en mathématiques

Les problèmes d'équations différentielles se présentent principalement selon deux points de vue, inspirés par la physique : le problème de Cauchy et le problème de Dirichlet.

(*) *Le problème de Cauchy*. Ce point de vue est directement inspiré de la mécanique du point matériel : on se donne la position x_0 et la vitesse x'_0 initiales (pour $t = t_0$) d'un mobile ponctuel de masse m se déplaçant sous l'effet d'une force f dépendant de la position x , de la vitesse x' et de l'instant t : $F(t, x, x')$; le principe de Newton (" $\vec{F} = m \vec{\Gamma}$ ") affirme alors que l'accélération x'' du mobile est donnée, à chaque instant t , par : $m x''(t) = F(t, x(t), x'(t))$. En posant $f = (1/m)F$, on écrit cette équation différentielle en abrégé : $x'' = f(t, x, x')$. On cherche les solutions (trajectoires) $t \rightarrow x(t)$ vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x'_0$ (conditions initiales de Cauchy).

L'aspect essentiel dans cette approche est que le seul théorème simple de base est un *théorème d'existence locale* : si la fonction f est régulière, pour une condition initiale (t_0, x_0, x'_0) donnée, il

existe un voisinage J du point t_0 sur lequel est définie une solution $t \rightarrow x(t)$ (d'ailleurs unique) vérifiant $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x'_0$. Cet intervalle J dépend de t_0 , x_0 et x'_0 , en général (et bien sûr de f). Le problème de *globalisation* qui se pose alors est de trouver le plus grand intervalle possible I sur lequel peut être définie une solution de donnée initiale (t_0, x_0, x'_0) ; une telle solution $t \rightarrow x(t)$ définie sur I est dite *maximale*, et elle dépend du point initial (t_0, x_0, x'_0) . Autrement dit, par rapport à la théorie classique des fonctions au lycée, où une fonction est donnée (en général par une formule) sur un intervalle de définition lui aussi donné, ici les fonctions solutions sont à trouver (non explicitement, c'est leur existence qui compte), et chacune possède un intervalle de définition "naturel" qui est inconnu et en général variable avec les solutions. C'est là une cause de difficultés didactiques.

Les méthodes permettant de globaliser le problème de Cauchy, c'est-à-dire de chercher le comportement global d'une solution maximale, constituent le domaine de l'étude qualitative des équations différentielles (voir Artigue et Rogalski 1990 et Hubbard et West 1995). Le développement moderne de ces méthodes est ce qu'on appelle l'étude des systèmes dynamiques continus (voir Hale et Koçak 1991).

(*) *Le problème de Dirichlet.* Inspiré par des problèmes d'électrostatique ou des problèmes de calcul des variations, ce problème, dans le cas d'une variable, concerne les équations différentielles $x'' = f(t, x, x')$: on cherche une solution $t \rightarrow x(t)$ définie sur *tout un intervalle* $[a, b]$, vérifiant l'équation différentielle et la condition de Dirichlet $x(a) = \alpha$ et $x(b) = \beta$. La condition de Cauchy pour la même équation serait de se donner $x(a)$ et $x'(a)$, par exemple. Le problème de Dirichlet est *global* parce qu'on cherche d'emblée la solution comme une fonction définie *sur tout l'intervalle* $[a, b]$, les données concernant de plus les deux extrémités de l'intervalle. Les théorèmes d'existence concernant ce type d'équation sont plus difficiles, et constituent l'une des origines de l'analyse fonctionnelle. Le théorème d'existence locale correspondant au problème de Cauchy ne permet pas de résoudre le problème de Dirichlet, qui peut ne pas avoir de solution (globale) même pour des fonctions f très régulières (on pourrait montrer facilement en terminale S que l'équation différentielle $x'' = -x$ ne possède aucune solution sur $[0, 2\pi]$ vérifiant la condition de Dirichlet $x(0) = 1$ et $x(2\pi) = 2$, puisque les solutions, trouvées en terminale, sont 2π -périodiques).

III.2. Diverses approches en physique élémentaire

En physique, on trouve aussi deux grandes approches pour modéliser les phénomènes physiques élémentaires. Nous allons voir pourquoi on peut qualifier ces deux problématiques de locale et globale. Il faut insister sur le fait qu'*il ne s'agit pas du tout ici de problèmes d'échelle*, mais de points de vue différents dans la théorisation des phénomènes : le local de la physique élémentaire n'est pas le microscopique ; le premier s'inscrit dans la physique du continu (avec une approche différentielle), le second dans le discontinu (physique atomique et quantique). Le couple local/global n'est donc pas le couple microscopique/macrosopique. Local et global correspondent à des types de questionnement et à des modes de travail. Par ailleurs, ces deux points de vue, tout en s'opposant d'une certaine façon, se complètent au moyen de "modes de passage" de l'un à l'autre, pas toujours simples cependant.

III.2. (a) Le point de vue local-différentiel : la mise en équation différentielle

Il s'agit dans cette approche de décrire les phénomènes étudiés au moyen d'équations différentielles ou aux dérivées partielles (voir encart E).

Par exemple, nous avons vu plus haut que le principe fondamental de la mécanique du point matériel, $\vec{F} = m \vec{\Gamma}$, s'écrit sous la forme d'une équation différentielle du second ordre. Certaines grandes lois de la physique sont exprimées sous la forme d'équations aux dérivées partielles, par exemple en électrostatique ou en statique et en dynamique des fluides.

(*) Si V est le potentiel électrostatique en dehors des charges électriques, il vérifie l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, où Δ est l'opérateur différentiel nommé laplacien (voir encart E). S'il y a une distribution ρ de charges, l'équation devient $\Delta V = k\rho$, où k est une constante.

(*) Si p est la pression en un point au sein d'un fluide en équilibre, de masse volumique ρ , et si s'exerce en ce point un champ de force $\vec{g}$ sur les masses (pesanteur, par exemple), alors $\vec{g}$ et le gradient de p (voir encart E) sont reliés par la relation $\text{grad } p = \rho \vec{g}$.

Ces deux exemples montrent que la description ainsi donnée des phénomènes électrostatiques ou de statique des fluides est essentiellement de nature locale, plus précisément il s'agit de *relations locales universelles*. Le point de vue différentiel en physique est ainsi en général un point de vue local.

Dans les activités de mise en équation ou modélisation, le point de vue local est donc celui de la recherche d'équations différentielles ou aux dérivées partielles vérifiées par certaines des grandeurs physiques présentes, considérées comme fonctions de certaines autres. Les raisonnements à faire dans ce type de procédures sont subtils, mais obéissent à certaines méthodes standard, qu'il est possible d'enseigner... bien que cela ne soit fait que bien rarement. Ces méthodes concernent : la détermination du nombre de variables, fonctions inconnues et équations ; la technique de l'accroissement infinitésimal ; la vérification des ordres de grandeurs et des relations de négligeabilité ; les passages à la limite (voir Artigue 1988, Collectif 1989 et Rogalski 1990). Il s'y ajoute des procédures de vérification, en particulier par les dimensions et par l'étude des cas limites.

Encart E

Dérivées partielles

Si une fonction f dépend de plusieurs variables x, y, z , on l'écrit $f(x, y, z)$. Lorsque l'on fixe x et y , la fonction de z seulement $z \rightarrow f(x, y, z)$ peut être dérivable ; on note alors $\frac{\partial f}{\partial z}$ sa dérivée, dite *dérivée partielle par rapport à z* . On définit de même les deux autres dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On peut éventuellement recommencer l'opération de dérivation partielle, et définir $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, ou $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$, notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, etc. Ce sont les dérivées partielles d'ordre 2, et on peut définir celles d'ordre 3, etc.

Un *opérateur différentiel* fait alors correspondre à une fonction f une autre fonction (numérique ou vectorielle) construite au moyen de ses dérivées partielles. Citons deux opérateurs différentiels souvent utilisés en physique :

* le *laplacien* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ fait correspondre à la fonction f son laplacien, qui est la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} ;$$

* le *gradient*, noté $\vec{\text{grad}} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, fait correspondre à f le champ de vecteur $\vec{\text{grad}} f$ de coordonnées $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.

Une équation ou un système d'équations aux dérivées partielles consiste à chercher une fonction de plusieurs variables dont les dérivées partielles vérifient une ou plusieurs relations.

III.2. (b) Le point de vue global -intégral : la mesure des grandeurs

Le point de vue global relie souvent un point de vue causal à celui de la mesure des grandeurs. Par exemple, on considère

que le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point M est *causé par l'ensemble* de la distribution des charges électriques dans un domaine Ω de l'espace, avec une densité $\rho(P)$ en chaque point P de Ω , au moyen de l'expression intégrale suivante, qui mesure la grandeur champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \int_{\Omega} \frac{c\rho(P)}{\|MP\|^2} \vec{u}_{P(M)} dx dy dz,$$

où c est une constante universelle, $\vec{u}_{P(M)}$ désigne le vecteur unitaire porté par PM orienté de P vers M , et $\|MP\|$ est la longueur de MP .

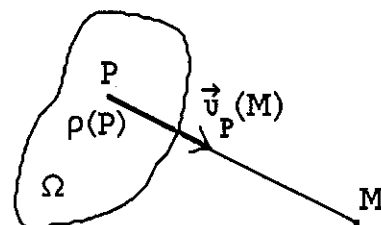


Figure 7

Le potentiel électrostatique est alors une fonction dont le champ électrostatique est l'opposé du gradient. Comme le gradient de la fonction $M \rightarrow \frac{1}{\|MP\|}$ est précisément $-\frac{1}{\|MP\|^2} \vec{u}_{P(M)}$, on en déduit

que lorsque, par exemple, ρ est bornée et Ω compact, alors le potentiel $V(M)$ est aussi donné par une

intégrale :
$$V(M) = \int_{\Omega} \frac{c\rho(P)}{\|MP\|} dx dy dz$$
 . Si les charges sont portées par une surface ou une courbe,

l'intégrale est une intégrale de surface ou une intégrale curviligne.

Par dérivation sous le signe intégrale, on retrouve alors, en dehors de Ω , la relation locale $\Delta V = 0$. Mais ces deux points de vue : global, où l'on calcule le potentiel par intégration, et local, où on cherche une solution de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, ne sont pas toujours équivalents, si par exemple Ω n'est pas borné.

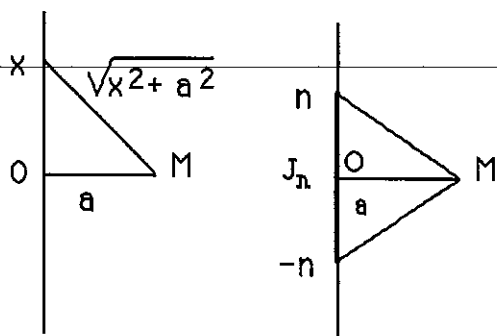


Figure 8

L'exemple classique du potentiel d'un fil rectiligne infini uniformément chargé (voir figure 8) montre bien la différence des deux points de vue : le champ est une réalité physique, globale, dont on peut tester les effets, le potentiel n'est qu'une notion théorique, locale, et définie à une fonction harmonique près (fonction solution de $\Delta f = 0$) *a priori*, en fait à une constante près (dans un ouvert connexe) si on connaît son gradient, c.à.d. l'opposé du champ. Mais un calcul global brutal par la formule intégrale ne donne pas V , mais... $+\infty$!

En fait, en calculant le potentiel V_n d'un morceau borné J_n du fil, et en retirant de V_n une constante a_n convenable, on peut faire converger la suite $V_n - a_n$, et obtenir ainsi une valeur finie pour le potentiel. Bien entendu, calculer directement le champ par son flux à travers un cylindre par le "théorème de Gauss" paraîtra

bien plus simple au physicien... et redonnera le même résultat ! C'est aussi un point de vue global, comme le serait le calcul intégral pour déterminer ce champ.

III.2. (c) Le point de vue intégral comme globalisation du local

Un aspect essentiel qui conduit à une formule intégrale pour calculer ou définir une grandeur physique, c'est-à-dire pour exprimer une grandeur représentant *une situation globale* (par exemple, le champ électrostatique engendré par une répartition globale de charges), est néanmoins *de nature essentiellement locale* ! En effet, le seul moyen pour calculer la grandeur est, en général, de découper les données en petits morceaux, en utilisant *des objets théoriques idéaux et locaux* (charge ponctuelle, masse ponctuelle...), de sommer les effets de ces petits morceaux, et de passer à la limite en contrôlant au moyen de majorations et minorations que cela est possible : cette procédure est simplement *la définition de l'intégrale* ! La mesure des grandeurs ou intégrale n'est donc au fond qu'un processus de *globalisation de local théorique*. Nous détaillons cette question en annexe.

III.2. (d) Aborder un problème de physique : divers choix entre local et global, les lois locales et les "grands principes", le passage global-local

Les points de vue local et global sont alors deux manières de "mettre des problèmes en équation" en physique, qui à la fois s'opposent et se complètent, et qui se présentent sous un double aspect : d'une part le différentiel opposé à l'intégral, de l'autre la loi locale (universelle) opposée au "grand principe". Nous allons essentiellement présenter un exemple détaillé de cette complexité, en évoquant seulement quelques autres.

(*) Le problème de la corde pesante (problème de la chaînette)

Etant donnée une corde pesante homogène de longueur donnée L fixée par ses deux extrémités (dans un plan vertical), quelle forme a-t-elle à l'équilibre ? C'est un vieux problème, l'un des premiers ayant conduit au calcul des variations.

En effet, *une manière globale d'approcher le problème* est de dire, par utilisation d'un "grand principe" de la mécanique, qu'à l'équilibre le centre de gravité de la corde a une altitude Y_G minimum.

La forme de la corde (de masse volumique 1 par exemple) étant donnée par une fonction $y(x)$ inconnue, on peut exprimer sa longueur par une intégrale

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx,$$

ainsi que l'altitude Y_G de son centre de gravité, et dire ainsi qu'une deuxième intégrale

$$I = LY_G = \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$$

est minimum parmi les fonctions $y(x)$ vérifiant $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$ et pour lesquelles la première intégrale est égale à L . Des résultats classiques du calcul des variations fournissent alors une équation différentielle du second ordre que doit vérifier la fonction y : $(y - \lambda)y'' = 1 + y'^2$, pour une certaine constante λ . On tombe donc sur le problème de Dirichlet évoqué au § III.1., qui est bien global.

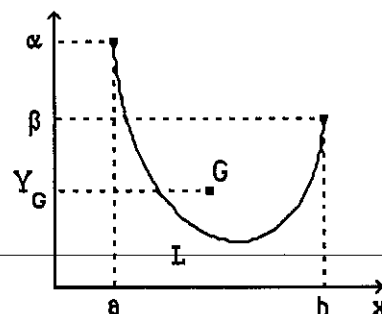


Figure 9

Ici, on va pouvoir résoudre l'équation différentielle explicitement, puis ajuster les constantes à la fin pour répondre aux contraintes globales données.

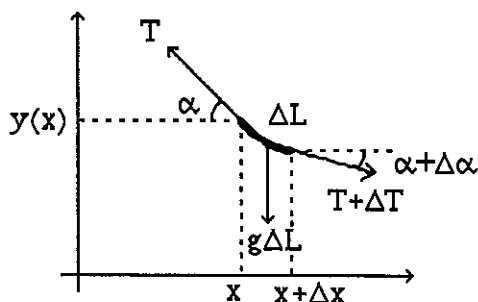


Figure 10

Mais il y a une manière locale d'aborder le problème, qui est de chercher directement l'équation différentielle vérifiée par la fonction $y(x)$ représentant la forme de la corde à l'équilibre ; pour cela, on écrit la condition d'équilibre d'un *petit* morceau de la corde sous les forces de tension et de pesanteur auxquelles il est soumis. On obtient trois relations différentielles vérifiées par les fonctions T , α et y ; en éliminant T et α , on obtient une équation différentielle vérifiée par y :

$$y'' = \frac{g}{C} \sqrt{1+y'^2},$$

où C est une constante.

Cette équation différentielle n'est pas la même que celle obtenue par l'approche globale ! Pourtant, elles ont les mêmes solutions : $\frac{y-p}{K} = \text{ch} \left(\frac{x-q}{K} \right)$, où p , q et K sont des constantes déterminées par les conditions imposées $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, longueur de la corde donnée égale à L ($u \rightarrow \text{ch } u$ est la fonction cosinus hyperbolique, qui vaut $\frac{1}{2} (\exp u + \exp(-u))$) ; la courbe correspondante est d'ailleurs appelée "chaînette"...).

(*) Autres exemples du choix local ou global

Par exemple, on peut traiter localement l'équation d'une corde vibrante, ou l'étudier de façon globale en minimisant l'intégrale du lagrangien entre deux instants $\int_{t_1}^{t_2} (T-U) dt$, où T est l'énergie cinétique de la corde et U son énergie potentielle d'élasticité (due à son allongement).

On peut traiter aussi des deux points de vue la recherche de la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu plan d'indice de réfraction variable : le point de vue local (utilisant la loi de Descartes) donne l'équation différentielle de la trajectoire, et le point de vue global minimise l'intégrale globale du temps de parcours entre deux instants (principe de Fermat) : c'est du calcul des variations.

Dans tous ces exemples, on constate bien que les deux points de vue local et global renvoient aux deux techniques différentielle et intégrale, respectivement. Mais on voit de plus que le point de vue global utilise souvent un "grand principe" de la physique, alors peu explicatif des raisons de ce qui se

pas, alors que l'approche locale semble plus concrète, mais bien plus délicate dans son utilisation d'infiniments petits.

De surcroît, *le point de vue global n'est efficace que si on dispose d'un moyen de retour au local*, c'est-à-dire à une équation différentielle (dont la résolution est à nouveau une globalisation de la relation locale universelle qu'elle définit). Dans nos exemples, et c'est souvent le cas, il s'agit de l'équation différentielle d'Euler donnée par le calcul des variations.

(*) L'approche globale non intégrale, par équation fonctionnelle

Dans certains cas, un raisonnement global assez abstrait *a priori* permet de montrer directement que la fonction cherchée pour décrire un phénomène doit vérifier une certaine *équation fonctionnelle* de type global, et cela peut permettre de la déterminer (bien sûr, l'une des méthodes mathématiques pour résoudre une équation fonctionnelle est de chercher une équation différentielle vérifiée par la fonction inconnue-passage du global au local-puis de résoudre cette équation-retour au global). Voici un exemple emblématique de ce type d'approche d'abord globale.

La lumière se propageant en ligne droite dans un milieu partiellement transparent et homogène, on cherche la loi de diminution de l'intensité lumineuse par absorption en fonction du chemin parcouru. On est amené à faire un certain nombre d'hypothèses *a priori*, de nature globale pour les deux premières :

- (1) *la proportionnalité* : l'intensité lumineuse en x_1 est proportionnelle à celle en x_0 , quels que soient x_0 et x_1 (c'est un "principe de superposition") ;
- (2) *l'homogénéité du milieu* : ce qui se passe entre x_0 et x_1 est la même chose que ce qui se passe entre x_2 et x_3 si $x_3 - x_2 = x_1 - x_0$;
- (3) *la continuité* : l'intensité lumineuse au point d'abscisse x est une fonction continue de x ;
- (4) *la transparence* : il passe toujours de la lumière, autrement dit l'intensité lumineuse n'est jamais nulle.

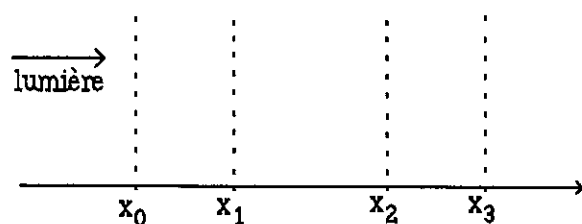


Figure 11

Notons $I(x)$ l'intensité lumineuse à l'abscisse x (on suppose cette fonction de x définie sur tout l'intervalle $]-\infty, +\infty[$). Par (1) et (4) $\frac{I(x)}{I(x_0)}$ est défini et ne dépend que de x et x_0 . On a donc

$$I(x) = I(x_0) \phi(x_0, x)$$

pour une certaine fonction ϕ de deux variables.

Mais par transitivité on a

$$I(x_2) = I(x_0) \phi(x_0, x_2) = I(x_1) \phi(x_1, x_2)$$

et $I(x_1) = I(x_0) \phi(x_0, x_1)$. Par suite : $I(x_0) \phi(x_0, x_2) = I(x_0) \phi(x_0, x_1) \phi(x_1, x_2)$. On déduit de (4) que l'on peut simplifier, donc $\phi(x_0, x_2) = \phi(x_0, x_1) \phi(x_1, x_2)$. Mais de (2) on déduit que pour tous u, v on a $\phi(u, v) = f(v - u)$ pour une certaine fonction f d'une variable. Comme $x_0, \dots, x_3$ sont arbitraires, la fonction f vérifie donc l'équation fonctionnelle

$$f(a + b) = f(a) f(b).$$

Cette fonction ne s'annule pas par (4) et est continue par (3) ; il en résulte classiquement que c'est la fonction exponentielle, et qu'on a donc $I(x) = I(x_0) e^{K(x - x_0)}$ (avec $K < 0$ car l'intensité diminue).

Bien entendu, le même raisonnement s'applique à tout phénomène physique vérifiant des hypothèses analogues : il s'agit d'hypothèses *globales* caractérisant les phénomènes exponentiels, au contraire de l'hypothèse *locale* classique : taux d'accroissement proportionnel à la valeur de la fonction. On peut par exemple établir par ce type de raisonnement global la loi de la radioactivité naturelle (lorsqu'on la regarde comme un phénomène continu avec une invariance dans le temps).

III.3. Quelques questions didactiques

A l'issue de ce tour d'horizon rapide sur la question du local et du global en mathématiques et en physique élémentaire, quelles questions didactiques peut-on se poser ?

Il y a d'abord, du strict point de vue mathématique, tous les problèmes en rapport avec le jeu des quantificateurs intervenant dans les notions de propriétés locales ou globales, et dans les problèmes

d'uniformité. Le problème principal est vraisemblablement *le degré de prise de conscience sur la logique* (plus que de connaissances théoriques) que devraient (pourraient ?) avoir les étudiants (et les élèves) pour affronter ces questions sans contre-sens majeur. C'est loin d'être simple, et les travaux sur ce sujet laissent encore bien des problèmes ouverts (voir Durand-Guerrier 1996 et Legrand 1990b).

Le deuxième problème concernant les mathématiques est celui du *degré d'explicitation que l'enseignement doit avoir sur les différences de nature et de problématique entre local et global*. Deux aspects interviennent dans la question : d'une part le discours enseignant (l'utilisation du "méta") comme levier de prise de conscience ; de l'autre la répartition dans les pratiques effectives entre ce qui est réservé à l'enseignant et ce qui doit être renvoyé aux élèves comme tâches explicites. Les deux sont complémentaires, et il nous semble, comme nous l'avons expliqué dans le § II.2. (a) et (b), que sur ces deux points l'enseignement gagnerait à *sortir de l'implicite total* dans lequel il se cantonne actuellement, d'une part, et à proposer aux étudiants des tâches qui ne soient pas uniquement des applications (même avec adaptation) mais reprennent des *méthodes* du cours.

Les questions de mesure des grandeurs ont pratiquement disparu des cursus mathématiques. Elles sont pourtant au cœur d'une notion fondamentale commune à la physique et aux mathématiques : l'intégrale. Or, en mathématiques, la présentation souvent abstraite de l'intégrale de Riemann en Deug (pour ne pas parler de l'intégrale de Lebesgue en licence !) ne donne pas aux étudiants les moyens de reconnaître qu'une grandeur physique va relever, pour son calcul ou même pour sa définition, de l'intégrale. Nous avons par exemple posé en test à toute une section de Deug première année ayant vu le cours standard sur l'intégrale de Riemann le problème du barreau (voir Legrand 1990a et Rogalski 2001) :

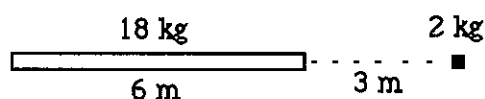


Figure 12

"Une masse ponctuelle de 2 kg est située sur la droite sur laquelle est placée une barre homogène de 18 kg, à 3 m de celle-ci ; la barre a une longueur de 6 m. Quelle est la force d'attraction de la barre sur la masse ponctuelle ? (on rappelle la loi de Newton : deux masses ponctuelles m et m' à distance r s'attirent selon la loi $F = G \frac{mm'}{r^2}$).".

Seulement 12 % des étudiants ont plus ou moins vu que la solution du problème relevait du calcul intégral (et une grande partie d'entre eux n'a pas su déterminer de quelle intégrale il s'agissait).

On voit ainsi que le vrai problème, plus que "de savoir calculer une intégrale", comme le demandent trop exclusivement les enseignants de physique, est, pour les étudiants, de *savoir reconnaître* qu'une intégrale va intervenir dans tel problème physique, c'est-à-dire que c'est l'approche globale-intégrale qui résout la question posée.

Il y a donc là *tout un travail d'apprentissage dans la mise en équation des problèmes de physique élémentaire qui demande d'être beaucoup plus explicite* dans l'enseignement de la physique, et qui doit *s'appuyer sur le sens* d'un certain nombre de concepts mathématiques (intégrale, dérivée, accroissement différentiel...) plus que sur des techniques de calcul. L'objectif devrait être que les étudiants sachent reconnaître si on peut utiliser une approche locale-différentielle ou une approche globale-intégrale, ce qui les différencie, quelles sont les méthodes de leur mise en œuvre.

En même temps, il paraît clair que les sens physiques d'un certain nombre de concepts mathématiques sont un aspect décisif de leur compréhension mathématique (dérivée, intégrale...).

On voit ainsi que se pose *le problème de l'interdisciplinarité*. Les questions didactiques posées par cette question sont très difficiles. Nous renvoyons à Artigue 1988 et 1990 et à Rogalski 1990.

Les diverses expériences menées ici où là ont montré les grandes difficultés à faire vivre longtemps une interdisciplinarité "lourde", même réduite à un face à face entre mathématiques et physique. Mais elles ont montré aussi les possibilités présentées par la présence de moments où l'une des disciplines réfléchit aux modalités d'utilisation de l'autre et à sa manière d'intervenir dans l'autre.

Il nous semble en tout cas que les questions du local et du global peuvent être un terrain privilégié pour une certaine forme d'interdisciplinarité entre mathématiques et physique.

Il faut d'ailleurs remarquer que dans la récente réforme des programmes des lycées, les textes mettent en avant la nécessité de la cohérence de la formation scientifique, et des relations interdisciplinaires. Cela va sans doute poser des problèmes à des enseignants de mathématiques dont la formation aux autres disciplines scientifiques à l'université était, depuis une dizaine d'année,

réduite à la portion congrue. Il y a là un défi pour la formation initiale des futurs maîtres et la formation continue de ceux en exercice.

Annexe. Mesure de grandeurs physiques et intégrale comme globalisation d'un local théorique

Nous adaptons ici un extrait de Rogalski 2001 sur la traduction de la mesure des grandeurs physiques par la procédure intégrale, afin d'explicitier un peu plus les considérations du § III.2. (c).

Si on veut par exemple définir la grandeur "moment d'inertie d'un objet par rapport à un axe" qui lui est fixé, comment fait-on ? Si on prend un "gros" objet Γ , de forme quelconque, et même inhomogène, la définition de son moment d'inertie I par rapport à un axe D ne peut que se définir globalement, relativement à un phénomène physique : si des forces font tourner Γ autour de D avec

une "accélération de rotation" $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, le moment total M de ces forces par rapport à D vérifie la relation

$M = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Une telle définition est en fait une loi-définition décrivant un phénomène à base expérimentale et rationnelle, au moyen de grandeurs déjà définies (forces, moment d'une force, accélération angulaire) : le rapport M/θ'' ne dépend que du solide et de son axe, et non du système de forces qu'on applique à ce solide ; c'est ce rapport qu'on appelle moment d'inertie, noté I (voir figure 13).

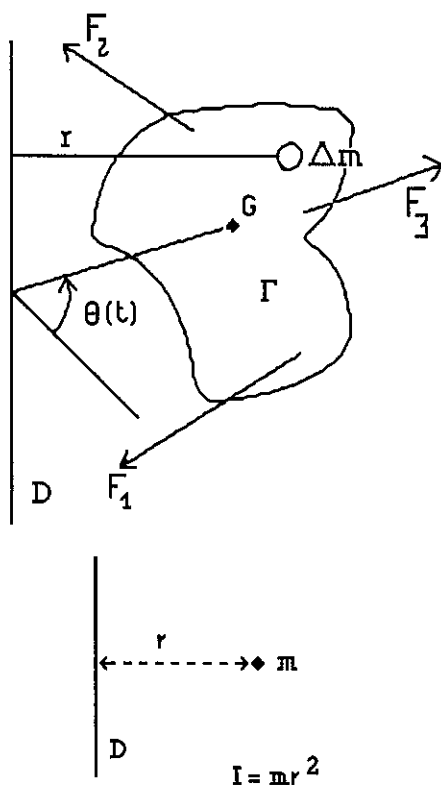


Figure 13

Cette définition ne nous dit pas comment caractériser le moment d'inertie de Γ par rapport à D , de façon à pouvoir le calculer *a priori*, sans faire subir à Γ une "épreuve physique" au cours de laquelle on ferait des mesures (ce qui n'est pas toujours réalisable, surtout quand l'une des grandeurs est définie mathématiquement comme une dérivée seconde).

La caractérisation prend alors nécessairement une *forme locale ou ponctuelle*, au moyen d'une *expérience imaginaire* mettant en jeu des concepts idéaux irréalisables dans la pratique, et qui permet de supprimer toutes les conditions concrètes qui rendaient le calcul impossible : étendue de Γ dans l'espace, caractère inhomogène de sa constitution.

On imagine la notion de "point matériel" de masse m , localisé en un point M de l'espace (ce qui est une pure fiction), à une distance r de la droite D , et l'application de la définition globale à cette situation imaginaire donne le moment d'inertie de cette masse ponctuelle par rapport à D : $I = mr^2$ (rappelons que

si $\vec{F}$ est une force agissant sur le point M , et si O est un point de D , le moment de $\vec{F}$ par rapport à D est $M = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire

porté par D ; on calcule l'accélération de rotation θ'' de la masse ponctuelle, et on exprime le rapport M/θ''). On pourra alors dire que *localement* $I = mr^2$, au sens où si on découpe un petit morceau de masse Δm de Γ dont les points sont à peu près à la distance r de D , le moment d'inertie de ce petit morceau de Γ sera à peu près $\Delta I = \Delta m r^2$. Bien sûr, il faudra préciser le sens des mots "à peu près",

cela d'autant plus que si on découpe Γ en petits morceaux, plus ils seront petits (pour que l'erreur par rapport à une "vraie" (!) masse ponctuelle soit petite), plus ils seront nombreux, et plus la somme des petites erreurs risquera d'être grande...

Comment alors passer d'une caractérisation ponctuelle ou locale théorique de l'expression d'une grandeur (en fonction d'autres) à un calcul global, ou même à une définition globale ? Il s'agit essentiellement de la *procédure intégrale*, qui formalise le *découpage* de l'objet, pour lequel on veut calculer la mesure de la grandeur en question, en petits morceaux, et la reconstitution de la mesure globale à partir des petits morceaux par *sommation*, *encadrement* et *passage à la limite*. L'outil mathématique adapté à cette procédure (qui la formalise) est l'*intégrale*, et il s'agit en général de l'intégrale d'une fonction de une, deux ou trois variables.

Pour bien comprendre cette procédure, élargissons la question de la mesure d'une grandeur lorsque les formules usuelles suivantes, valables quand les premiers facteurs sont constants ou ponctuels, n'ont plus de sens parce que ces premiers facteurs ne sont plus constants :

densité constante $\times$ volume = masse ;

hauteur constante $\times$ longueur de la base = aire ;

hauteur constante $\times$ aire de la base = volume ;

vitesse constante $\times$ temps = distance parcourue ;

force constante $\times$ déplacement (colinéaire) = travail ;

pression constante $\times$ surface = force ;

(distance constante à un axe)² $\times$ masse ponctuelle = moment d'inertie ;

(inverse de la distance constante)² $\times$ produit des masses ponctuelles = attraction.

Presque toutes ces formules, en fait, définissent une grandeur physique à partir d'autres lorsque les premiers facteurs sont constants.

Les deuxièmes facteurs sont associés à des "domaines" W sur lesquels sont définis les premiers facteurs, *supposés maintenant être des fonctions f non constantes* : densité ou pression en un point d'un volume W , hauteur au-dessus d'un point de la base W , pression en un point d'une surface W , distance d'un point de W à l'axe, etc ... De plus on peut définir la "mesure" d'une partie de W , ou du moins d'une classe de parties de W : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de W .

On se propose donc de savoir à quelles conditions on peut mesurer, ou même définir une grandeur $I(W, f)$ attachée à un phénomène physique décrit par le domaine W et la fonction f définie sur ce domaine.

Les conditions raisonnables pour parler de la grandeur cherchée sont les 3 *principes* qui suivent, issus de considérations physiques ; le premier renvoie à la *définition* du type de grandeur étudiée, les deux autres sont des *propriétés* de ces grandeurs, dont le sens est immédiat sur les exemples cités :

(1) *si f est constante ($f = C$), $I(W, f) = C \times \text{mesure}(W)$ [les formules ci-dessus !] ;*

(2) *l'additivité par rapport au domaine (une "relation de Chasles") : si $W = W_1 \cup W_2$, avec $W_1 \cap W_2$ de mesure nulle (par exemple s'il est vide), alors $I(W, f) = I(W_1, f) + I(W_2, f)$;*

(3) *la croissance : si $f \leq g$, $I(W, f) \leq I(W, g)$.*

Chaque fois qu'on a à calculer une grandeur de la forme $I(W, f)$ vérifiant les principes (1), (2), (3), on procédera de la façon suivante :

* on découpe l'ensemble W en "petits" morceaux W_i ;

* on encadre la fonction f entre m_i et M_i sur W_i (ses bornes inférieures et supérieures sur W_i) ;

* par sommation, on peut encadrer $I(W, f)$ par des "sommées inférieures" et "supérieures" :

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \text{ mesure}(W_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} M_i \text{ mesure}(W_i) ;$$

* enfin, on essaie de passer à la limite en prenant des W_i de plus en plus petits.

La *procédure intégrale* est donc formée de ces 4 étapes :

Cette procédure amène ainsi à encadrer $I(W, f)$ entre $\sum m_i \text{mesure}(W_i)$ et $\sum M_i \text{mesure}(W_i)$, avec des W_i disjoints (ou ne se coupant que selon des ensembles de mesure nulle).

On obtient ainsi ce qu'on appelle l'intégrale de fonctions étagées $\sum l_i \text{indatrice}(W_i)$, et on souhaite passer à la limite pour obtenir l'intégrale d'autres fonctions, par exemple de fonctions continues ... si cela marche !

Avant de savoir dans quelles conditions cela peut marcher, il faut préciser un peu plus la nature des ensembles W_i et la nature de leur mesure, d'une part, et quel type de limite on souhaite prendre, de l'autre. Nous ne donnerons des indications, ici, que pour le cas des fonctions d'une variable, c'est-à-dire lorsque $W = [a, b]$.

On a alors, pour chacune de ces deux questions, deux choix "raisonnables" (c'est-à-dire simples, ou dictés par ce qu'on a appris à faire antérieurement, ou adaptés au problème qu'on veut résoudre) :

- (a1) les W_i sont des intervalles, et leur mesure est leur longueur ;
- (a2) les W_i sont les éléments d'une tribu, avec pour mesure la mesure de Lebesgue ;
- (b1) l'approximation se fait en approchant uniformément f par des fonctions étagées (on prend une condition de Cauchy pour la norme uniforme, en supposant f bornée) ;
- (b2) l'approximation se fait directement au moyen de l'intégrale (la condition de Cauchy dit que l'intégrale d'une certaine fonction étagée doit être petite).

En recoupant ces deux choix, on trouve 4 théories classiques de l'intégration :

- (a1b1) : l'intégrale des fonctions réglées ;
- (a1b2) : l'intégrale de Darboux des fonctions bornées Darboux-intégrables (c'est aussi l'intégrale de Riemann) ;
- (a2b1) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables bornées (c'est la définition initiale de Lebesgue) ;
- (a2b2) : l'intégrale de Lebesgue des fonctions Lebesgue-intégrables.

Quelle que soit la théorie de l'intégration adoptée, et la construction choisie (il y en a d'autres, plus ou moins efficaces et plus ou moins naturelles), c'est la procédure intégrale ici décrite, et donc l'une des 4 intégrales ci-dessus, qui apparaît quand on se propose de calculer ou de définir une grandeur géométrique, physique, ...

Dans la pratique, on trouve dans les manuels de physique des phrases du type : " le potentiel d'un

élément de charge $q\Delta x$ est égale à $\frac{q\Delta x}{x}$, donc le potentiel total est $\int_a^b \frac{q}{x} dx$ ". L'espèce de "miracle"

par lequel à partir de l'écriture " Δx " et de l'invocation "d'éléments" de charge (ou de masse ou...) on fait surgir le signe intégral n'est rien d'autre que la procédure intégrale ci-dessus, et le fait, en général sous-entendu, que cette procédure marche bien pour la fonction f sur le domaine W , c'est-à-dire que f est intégrable (voir Artigue 1988 et Collectif 1989 pour plus de détails, en particulier sur les problèmes didactiques associés ; voir aussi Legrand 1990a).

Il faut ainsi bien comprendre que le calcul de $I(W, f)$ demande un passage à la limite : le résultat,

noté souvent $\int_W f(w)dm(w)$, n'est pas en général explicite. Chacune des sommes encadrant $I(W, f)$

dans la procédure intégrale est une *approximation* du résultat qui ne lui est pas égal.

Enfin, dès lors qu'on ne travaille qu'avec des fonctions continues, qu'on a montré que toute fonction continue est intégrable, et qu'on a établi le lien entre intégrale des fonctions continues et primitives des fonctions continues, le calcul des primitives, quand on peut les déterminer explicitement, permet de calculer les intégrales obtenues par la procédure intégrale. Signalons enfin que, lorsqu'on peut ramener une grandeur physique à ne dépendre que d'une seule variable (souvent par des considérations de symétrie ou d'invariance), et que les données sont continues, on dispose aussi de la procédure dérivée-primitive, souvent plus facile à mettre en œuvre (voir Rogalski 2001).

Bibliographie

M. Artigue 1988 : Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol.2, p. 173.

M. Artigue 1990 : L'interdisciplinarité. Dans "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année", Commission Inter-IREM Université, p. 319.

M. Artigue et M. Rogalski 1990 : Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG. Dans "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année", Commission Inter-IREM Université, p. 113.

Collectif 1989 : Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire. GRECO "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques", Collectif, IREM et LPDES, Université Paris VII.

Durand-Guerrier, V. 1996 : Logique et raisonnement mathématique. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. 1999 : L'élève, le professeur et le labyrinthe. Petit x, 50, 57-79.

J. K. Hale et H. Koçak 1991 : Dynamics and Bifurcations. Texts in applied Mathematics, 3, Springer-Verlag, New-York.

J. H. Hubbard and B. H. West 1995 : Differential equations : a dynamical systems approach. Ordinary differential equations. Texts in applied Mathematics, 5, Springer-Verlag, New-York.

M. Legrand 1990a : Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale. Dans "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année", Commission Inter-IREM Université, p. 205.

M. Legrand 1990b : "Circuit" ou les règles du débat mathématiques. Dans "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année", Commission Inter-IREM Université, p. 129.

M. Maschietto 2003 : L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global-local dans l'environnement de calculatrices. Thèse de doctorat de l'université Paris VII.

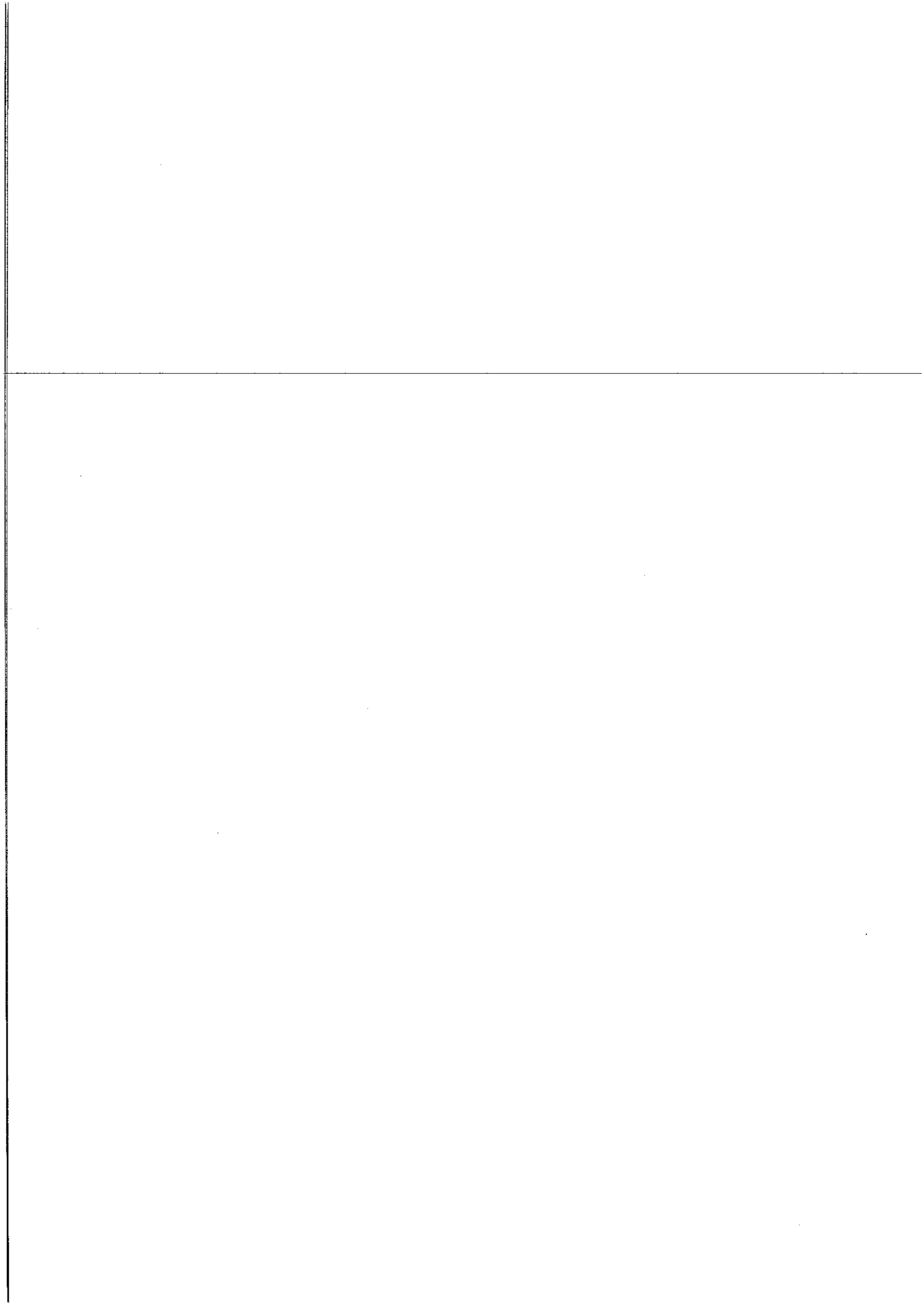
J. Pian, A. Robert et M. Rogalski 1998 : A qualitative study of the mathematical knowledge of french prospective maths teachers: three levels of practice. Etude ICMI, Singapour.

F. Praslon 2000 : Continuités et ruptures dans la transition terminale s / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement. Thèse de doctorat de l'université Paris VII.

M. Rogalski 1990 : Atelier mise en équation. Dans "Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année", Commission Inter-IREM Université, p. 315.

M. Rogalski 2001 : Carrefours entre analyse algèbre et géométrie (avec la coll. de N. Pouyanne et A. Robert). Ed Ellipses, Paris.

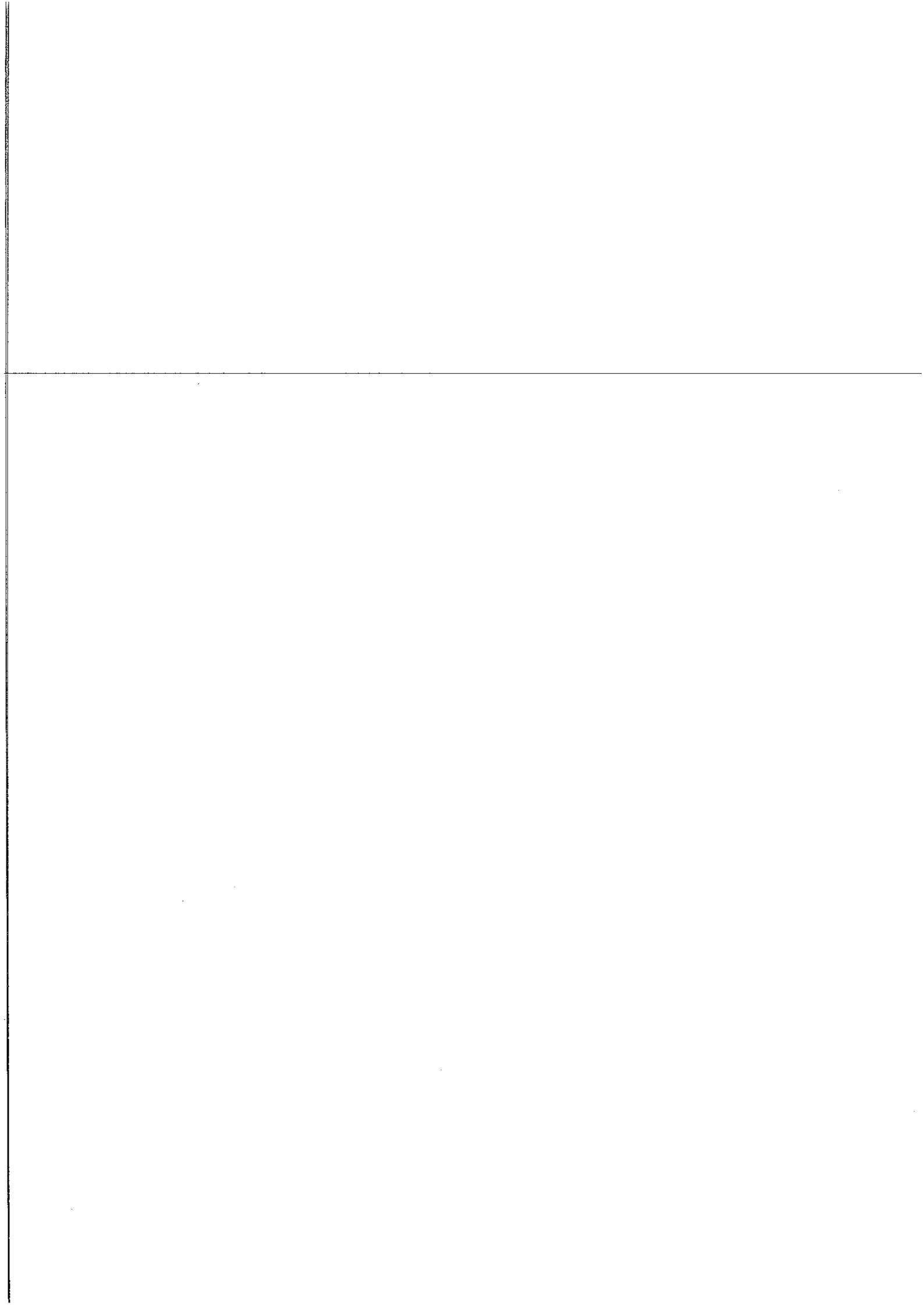
E. C. Titchmarsh 1939 : The Theory of Functions. 2d ed., Oxford University Press.



Annexe 3

Représentations des objets géométriques

Éric Roditi



Représentations des objets géométriques

Les objets géométriques sont représentés par des figures ou par des textes, l'activité géométrique (construction, démonstration, etc.) à la fois repose sur ces représentations et s'exprime par ces représentations. Le présent chapitre précise ces deux modes de représentation des objets géométriques. Il montre les relations entre manière de représenter et activité géométrique, que l'on ait déjà appris la géométrie ou qu'on soit encore élève l'apprenant.

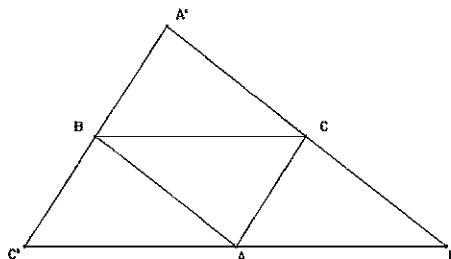
Dans *Sémiosis et pensée humaine*, Raymond Duval (1995) a classé les unités figurales élémentaires du registre des représentations géométriques suivant leur dimension – 0 pour le point, 1 pour les lignes, 2 pour les zones – et leur forme – rectiligne ou courbée, ouverte ou fermée... Il montre que des figures géométriques peuvent se représenter avec des unités de dimensions différentes. Dans le registre des figures, il y a prédominance perceptive des unités de dimension 2 alors que dans celui du discours en langue naturelle, ce sont les unités de dimension inférieure à 2 qui dominent. Par exemple, le parallélogramme se caractérise par ses sommets et son centre (dimension 0), par ses côtés (dimension 1) ou ses diagonales (dimension 0 et 1).

Pour une même propriété géométrique, la modalité choisie de l'entrée discursive et de l'organisation perceptive a un effet sur la démonstration de la propriété. Un exemple proposé par Dupuis (1978) en témoigne où il s'agit de prouver qu'un point est le milieu d'un segment dans une même situation mathématique présentée avec deux modalités différentes. La résolution du problème mobilise exactement les mêmes connaissances sur les parallélogrammes dans les deux modalités, la difficulté mathématique est donc la même. Dans la première, les parallélogrammes ne sont pas indiqués par l'énoncé et la figure est spontanément vue comme celle d'un (ou quatre) petit(s) triangle(s) dans un grand triangle. Dans la deuxième les parallélogrammes n'apparaissent pas non plus facilement, mais ils sont indiqués dans l'énoncé. Les deux présentations ont été proposées à des élèves de troisième. La réussite passe de 10% à 50% quand on passe de la première à la seconde présentation. En outre, lorsqu'on a proposé la présentation la plus facile puis la présentation la plus difficile à des élèves de troisième, près de la moitié de ceux qui viennent de réussir avec la présentation la plus facile échouent quand même avec la présentation plus difficile. D'autres résultats analogues confirment l'autonomie des traitements figuraux et des traitements mathématiques.

Modalité n°1

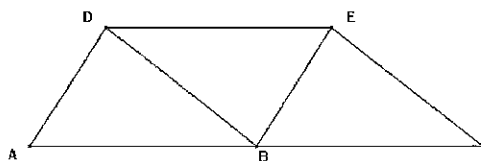
$A'C'$ et AC sont parallèles,
 $A'B'$ et AB sont parallèles,
 $B'C'$ et BC sont parallèles.

Prouver que A est le milieu de $B'C'$.



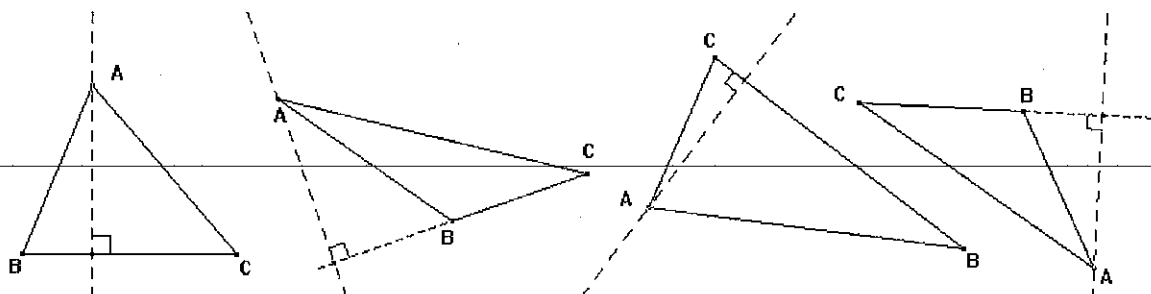
Modalité n°2

$ABED$ et $BCED$ sont des parallélogrammes.
Prouver que B est le milieu de AC .



I. Les dessins et les figures géométriques

Dès 1988 Bernard Parzysz propose de distinguer les dessins des figures parmi les représentations graphiques en géométrie : le dessin est la trace matérielle sur la feuille de papier alors que la figure renvoie à l'objet théorique représenté. Autrement dit : le dessin représente une figure, la figure est composée d'objets géométriques en relation. Illustrons cette distinction en considérant la figure composée d'un triangle ABC et la hauteur issue du sommet A ; les dessins suivants représentent cette même figure :



1. Différentes manières de dessiner une figure géométrique

Les figures sont donc des objets géométriques abstraits. Les figures sont représentées sur le papier. Il n'y a pas cependant pas qu'une représentation graphique d'une figure géométrique donnée car il existe différentes conventions de représentation.

Dans le cas du dessin à l'échelle, ou en vraie grandeur, la représentation des propriétés de la figure doit être visible : il faut distinguer alors les figures dont les relations entre les points sont telles que toutes les mesures sont fixées (il n'y a qu'une figure à un déplacement près) des figures où les relations ne sont pas suffisamment contraignantes pour imposer toutes les mesures (par exemple un rectangle d'aire 24). Dans un dessin à main levée, les propriétés ne sont pas visibles, elles sont indiquées par du texte ou des codes, ou seulement mémorisées. Dans tous les dessins, le savoir sous-jacent au tracé importe peu. Dans une construction géométrique, c'est au contraire le savoir sous-jacent qui discrimine une représentation correcte d'une qui ne l'est pas. S'il s'agit par exemple de dessiner deux segments parallèles qui ne sont pas très éloignés l'un de l'autre, la règle suffit : le parallélisme est en effet contrôlé visuellement entre le premier tracé de segment et le bord de la règle qui va servir pour réaliser le second tracé. S'il s'agit en revanche de construire deux segments parallèles, c'est la méthode s'appuyant sur des propriétés qui est importante. Et si cette méthode nécessite des tracés auxiliaires, il convient de ne pas les effacer.

2. Dessin ou figure, sur quoi travaille-t-on ?

Travaille-t-on sur les dessins ou sur les figures ? La distinction de Bernard Parzysz incite émettre l'hypothèse que les experts travaillent sur les dessins pour raisonner sur les figures. Plus précisément cela dépend si la géométrie est théorisée ou non, lorsqu'elle ne l'est pas, ou que la théorisation n'est pas complète, il arrive qu'on tienne pour vrai le constat fait sur un dessin. Et qu'en est-il des élèves ? Cela dépend de leur âge car les programmes scolaires ne répondent pas de manière homogène à la question.

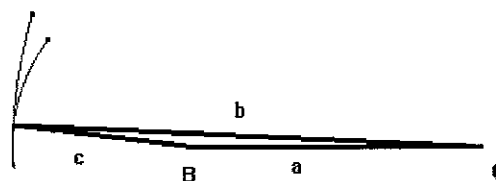
Les traitements différents des dessins et des figures ont conduit Berthelot et Salin (2000) à distinguer trois problématiques géométriques :

- une *problématique pratique* dans laquelle les objets sur lesquels on travaille sont des objets physiques (en particulier des dessins), dans laquelle la démarche de résolution est pratique et dans laquelle la validation se fait en restant dans l'espace sensible ;
- une *problématique géométrique* dans laquelle les objets sont théoriques, dans laquelle la démarche de résolution et la validation s'appuient sur des savoirs géométriques ;
- une *problématique spatio-géométrique (ou de modélisation)* dans laquelle on travaille sur des objets physiques, dans laquelle la démarche de résolution s'appuie sur des objets géométriques qui idéalisent les objets physiques, et sur des savoirs géométriques, mais dans laquelle la validation se fait dans l'espace physique, comme dans la problématique pratique, même si cela n'est pas conforme à la théorie. Dans cette problématique, considérons si une vitre qui a la forme d'un quadrilatère avec ses quatre côtés de longueur 270 mm. Si l'une des diagonales mesure 382 mm, alors on conclut que la vitre est carrée. Dans la problématique géométrique, au contraire, un losange de côté 270 et de diagonale 382 n'est pas un carré.

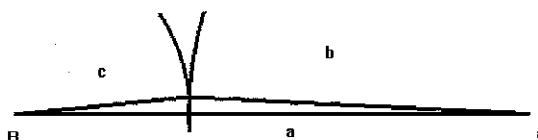
3. Confusion entre problématiques géométrique et spatio-géométrique

Une difficulté survient lorsque les problématiques géométrique et spatio-géométrique sont confondus. Prenons l'exemple d'un professeur qui cherche à faire constater l'inégalité triangulaire à ses élèves, notamment son cas d'égalité. Une recherche menée par Annie Berté (1995-1996) a montré que le cas limite de l'inégalité triangulaire ($a = b + c$) est difficile à appréhender par de nombreux élèves avec seulement un travail graphique. Ils pensent en effet qu'il existe un voire une infinité de triangles dont les côtés mesurent 4 cm, 5 cm et 9 cm.

Les élèves qui commencent par tracer le côté de longueur 4 cm ou 5 cm réussissent souvent à construire un triangle très aplati, mais pas complètement plat qui est validé par la mesure des côtés avec la règle graduée.



Ceux qui commencent par le côté de 9 cm sont nombreux à conclure à l'impossibilité de la construction ou à une infinité de triangles solutions. Certains, fondant leurs arguments sur le dessin obtenu, en viennent à penser que deux cercles peuvent avoir plus de deux points en commun.



Ce qui gêne le professeur pour intervenir, c'est que la validation de l'existence du triangle lorsque l'inégalité stricte est réalisée s'est justement appuyée sur l'expérience réalisée sur la feuille de papier, et c'est précisément le recours à une telle expérience qu'il faudrait maintenant contredire. Il y a malentendu entre le professeur et bon nombre d'élèves : le professeur qui se réfère au modèle, ne peut pas, contrairement à ses élèves, « voir » un triangle non aplati dont un côté est égal à la somme des deux autres : le professeur et les élèves ne voient pas la même chose lorsqu'ils regardent le même dessin !

4. La manière de travailler dépend de la qualité du dessin

Coppé, Dorier et Morau (2005) ont montré qu'une autre catégorie de dessin existe dans l'enseignement alors qu'on ne les retrouve pas dans les pratiques géométriques expertes : les dessins volontairement faux et explicités comme tels. Par exemple, en classe de 5^e on propose

un parallélogramme dont deux consécutifs sont de même longueur et on demande de démontrer que les diagonales sont perpendiculaires. Le parallélogramme est représenté par un quadrilatère qui n'est pas un losange : les dimensions ne sont pas respectées, ni l'égalité des longueurs indiquées dans l'énoncé.

Le choix de ce type de dessins s'explique par la volonté d'éviter que les élèves déduisent du dessin que le quadrilatère est un losange sans le justifier. Les chercheurs ont montré que de nombreux élèves sont perturbés par ces représentations : ils ont compris que le parallélogramme est un losange et ils l'ont démontré, mais ils constatent que la représentation proposée par l'énoncé, représentation en laquelle ils font confiance, démentent leur conclusion.

II. Produire un texte ou un dessin représentant une figure : quelles tâches géométriques ?

Dans l'enseignement de la géométrie, différentes tâches de production de textes ou de dessins sont proposées aux élèves pour qu'ils développent leur compétence à utiliser ces modes de représentations.

1. Dessin d'une figure géométrique donnée par sa description

Dessiner une figure à partir de sa description demande de savoir utiliser les instruments de géométrie mais aussi, en amont, de comprendre la description c'est-à-dire de connaître le vocabulaire et les conventions utilisés en géométrie : l'ordre des points dans la désignation d'un polygone, le fait qu'une même désignation ne peut être utilisée pour deux objets mathématiques différents. Au début de l'apprentissage, certains élèves confondent le point et la lettre qui le désigne.

2. Construction d'une figure géométrique donnée par un dessin à main levée

Lorsque la figure à construire est donnée par un dessin à main levée, l'élève commence par repérer les sous-figures, leurs propriétés et leur organisation, comme lorsqu'il doit reproduire un dessin. Mais les informations ne sont pas à prendre sur le dessin proposé avec les instruments, il faut seulement tenir compte des informations qui sont indiquées par des codages ou par des indications textuelles. Une chronologie de la construction est à élaborer, ce qui nécessite d'anticiper la construction, c'est-à-dire de la réaliser mentalement en partie en fonction des propriétés des sous-figures.

3. Construction d'une figure géométrique donnée par une description

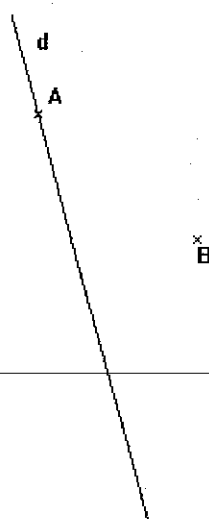
La construction d'une figure donnée par une description est facilitée par une anticipation du résultat à obtenir (sous-figure et organisation) qui demande, pour chacune des sous-figures identifiées, de mobiliser des « figures modèles » stockées en mémoire à long terme et de les particulariser à la configuration proposée. Lorsque la figure est très complexe ou que les contraintes sont nombreuses, la gestion mentale des informations est difficile et la réalisation d'une figure à main levée soulage l'effort de mémoire. Comme pour la construction d'une figure donnée par un dessin, il s'agit ensuite de déterminer les propriétés des sous-figures qui pourront être utiles et de déterminer une chronologie de la construction.

Comparons deux exemples. Le premier exercice a été donné à des élèves de sixième, le second à des élèves de cinquième.

Construire un losange ABCD
ayant la droite d pour axe de symétrie.



Construire un losange ABCD
tel que le point D appartiennent à la droite d .



La figure losange à anticiper est proche de la figure modèle de losange avec ses axes de symétrie vertical et horizontal. Posé en fin d'année de sixième, un tel exercice est réussi par trois élèves sur quatre environ. Le deuxième exercice est réussi par moins d'un élève sur trois, en fin de cinquième, le critère de réussite étant d'avoir produit une des deux solutions possibles. La configuration proposée, avec une droite qui n'est pas un des axes de symétrie mais qui est presque en position verticale ou horizontale, a certainement perturbé les élèves.

4. Programme de construction d'une figure géométrique donnée

Un programme de construction d'une figure géométrique est un texte permettant à celui qui le lit de tracer un dessin de cette figure alors qu'il ne l'a connaît par aucune autre représentation langagière ou graphique. Ce n'est pas une description mais un texte injonctif.

Rédiger un programme de construction suppose une analyse de la figure à faire construire pour ses propriétés qui vont permettre la construction : repérer les sous-figures et de leur organisation en définissant en particulier les relations d'incidence et les points remarquables, hiérarchiser ces relations pour définir une chronologie de la construction organisée en étapes, introduire des notations éventuelles pour répondre aux besoins de la communication. Lorsque la figure dont un élève ou un groupe d'élève élabore le programme de construction est donnée par un dessin et un texte qui précise certaines propriétés de la figure, la validation du programme peut s'effectuer par comparaison entre le dessin produit et le dessin initial.

Les programmes de construction se présentent comme une suite d'instructions ordonnées chronologiquement. La suite d'étapes nettement repérées met en valeur la suite d'actions à accomplir définies par des verbes qui portent sur des objets géométriques et pas sur des objets de l'espace physique comme le support papier ou les instruments.

III. Utilisations des figures en géométrie

En représentant une figure, celui qui fait de la géométrie se donne un moyen d'accéder simultanément, pour chaque objet géométrique de la situation qu'il étudie, à ses propriétés et à ses relations avec les autres objets présents dans la situation. La représentation aide la mémorisation de la figure c'est-à-dire l'ensemble de ces relations. Elle est un moyen

heuristique aussi car la représentation donne la possibilité d'apercevoir des propriétés nouvelles ou des idées pour les démontrer.

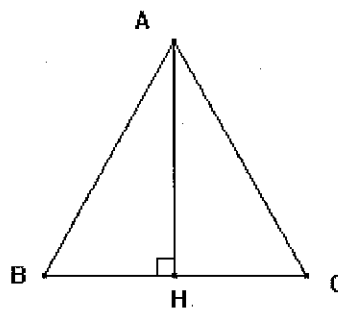
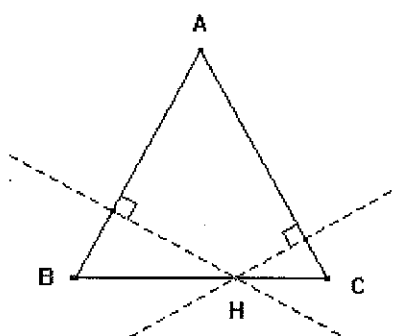
1. Des figures à connaître pour les reconnaître

Les figures sont à la fois mémorisées et reconnues à travers des dessins qui les représentent.

Robert Noirfalise (1991) a réalisé des travaux qui laissent supposer que des figures stockées en mémoire à long terme, qu'il appelle figures « prototypes », agglomèrent plusieurs informations qui sont traitées comme une seule unité. Cela permet de disposer en mémoire de travail d'une quantité d'informations importante, plus importante que celle qu'on est capable de retenir si ces informations sont données une à une, par exemple par une description. Noirfalise suggère que les sujets enregistrent plus ou moins d'informations dans une figure prototype (par exemple le rectangle avec ou sans ses axes de symétrie et son cercle circonscrit) et que cela différencie leur possibilité de traitement.

Les figures « prototypes » ne sont pas mémorisées dans toute leur généralité : elles restent plus ou moins marquées de caractères particuliers (de forme ou d'orientation), cela le conduit à nommer figures « prototypes » ces figures mémorisées. Par exemple, la figure « rectangle », comme la figure « carré », est mémorisée sous une forme prototype où les côtés sont horizontaux et verticaux, alors que la figure losange est mémorisée sous une forme prototype où les deux axes du losange (ses diagonales) sont respectivement vertical et horizontal et le plus long est vertical. Rectangle et losange sont « allongés » dans des proportions standards, ni trop ni trop peu. Or plus une figure « prototype » est marquée par une disposition particulière, plus elle est difficile à adapter à un contexte qui la place dans une autre disposition. Ces figures prototypes joueraient donc un rôle heuristique dans la résolution de problème, plus ou moins efficace suivant la capacité du sujet à les adapter (les agrandir ou les réduire, changer leur orientation, etc.) à la situation qu'il doit traiter.

Les figures « prototypes » sont prégnantes. Robert Noirfalise a proposé à des élèves en fin de 6^e d'écouter attentivement la consigne suivante, puis de la réaliser de mémoire : Tracer un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC$. Marquer un point H sur [BC]. De H, tracer la perpendiculaire à (AB) puis à (AC). La figure correcte est représentée par le dessin de gauche n'est obtenue par aucun des élèves qui répondent pour 40% avec le dessin de droite.



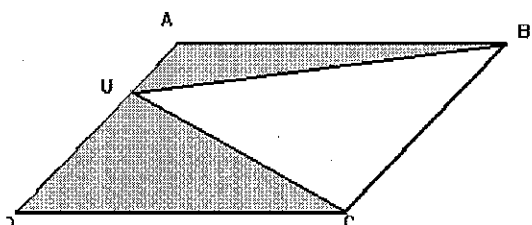
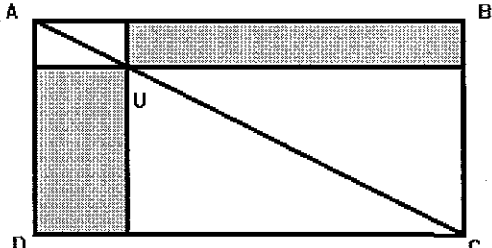
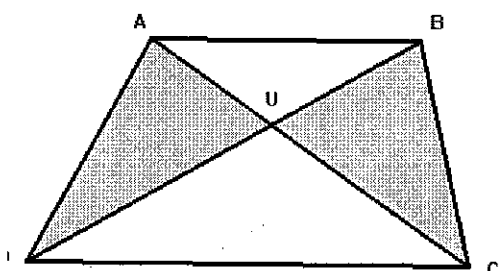
L'interprétation proposée est qu'à la lecture d'un énoncé décrivant une figure géométrique, dès son commencement, un sujet active une figure « prototype » qu'il modifie pour la particulariser à l'énoncé. Jusqu'au mot *perpendiculaire* de l'énoncé, la figure « prototype » du triangle isocèle avec son axe de symétrie est correcte. La modification profonde à opérer pour aboutir à la bonne réponse étant trop coûteuse pour les élèves de 6^e, aucun ne parvient à la dessiner et 40% d'entre eux en restent à la figure qu'ils n'ont pas pu adapter.

2. Traitements d'une figure dans l'activité géométrique

L'importance des figures en géométrie, ne s'explique pas seulement parce que la recherche d'un problème conduit à les représenter. Bien souvent les figures sont modifiées car ce sont précisément les modifications imposées à une figure qui donnent les idées directrices qui permettront d'établir les propriétés recherchées, et cela même si démonstration est déductivement complexe. Raymond Duval (1994) distingue trois types de traitement des figures qui permettent de résoudre des problèmes : ceux dans lesquels les figures sont reconfigurées par des partages ou des combinaisons, ceux qui agrandissent ou réduisent les figures et ceux qui conduisent à des partages avec déplacement de certaines parties de la figure. Les trois types de traitement sont présentés à travers des problèmes géométriques qu'ils permettent de résoudre.

a) Reconfigurations d'une figure géométrique

Afin d'illustrer le travail de reconfiguration des figures géométriques, voici trois problèmes dont l'objectif est chaque fois de comparer des aires.

Problème n°1	ABCD est un parallélogramme et U est un point de [AD]. Où faut-il placer U pour que la surface coloriée et la surface blanche aient la même aire ? 
Problème n°2	ABCD est un rectangle et U est un point de [AC]. Où faut-il placer U pour que les deux rectangles coloriés aient la même aire ? 
Problème n°3	ABCD est un trapèze et U est le point d'intersection des diagonales. Comparer les aires des triangles coloriés. 

Chacun de ces trois problèmes trouve sa solution par une reconfiguration de la figure, mais ces reconfigurations sont très différentes les unes des autres si bien que ces trois problèmes ne sont pas réussis de la même façon : donnés de façon plus fermée dans des classes de 3^e (la question était de montrer que les aires sont égales et non de trouver la position du point U pour qu'elles le soient), ils recueillent respectivement environ 60%, 60% et 10% de réussite (Mesquita, 1989).

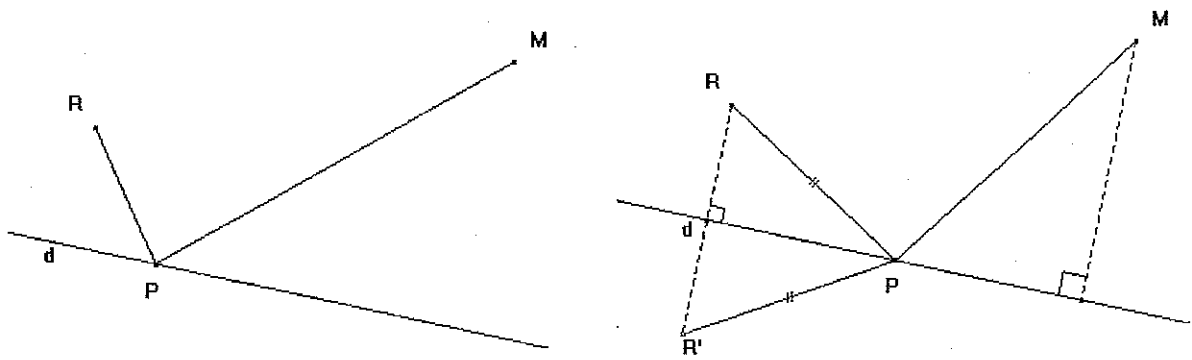
« Solution » n°1	
« Solution » n°2	
« Solution » n°3	

Dans le premier problème, la reconfiguration passe par un partage en sous figures pertinentes qui n'est pas donné. Dans le second problème, le partage est déjà effectué mais la reconfiguration demande de combiner des sous-figures pour en réaliser d'autres. Dans le dernier problème enfin, le partage est déjà effectué et la reconfiguration demande de combiner des sous-figures pour en réaliser d'autres, mais en plus, il y a un « dédoublement » d'une sous-figure qui est utilisée de deux façons différentes : une fois pour elle-même et deux fois dans une combinaison avec une autre sous figure. En outre, le troisième problème demande de mobiliser une propriété des triangles de même base et de même aire.

Dans ces trois problèmes, le traitement de la figure est une reconfiguration puisque les sous-figures ne subissent aucune transformation géométrique, contrairement aux traitements que nous allons étudier ci-dessous où les sous-figures peuvent être déplacées ou agrandies.

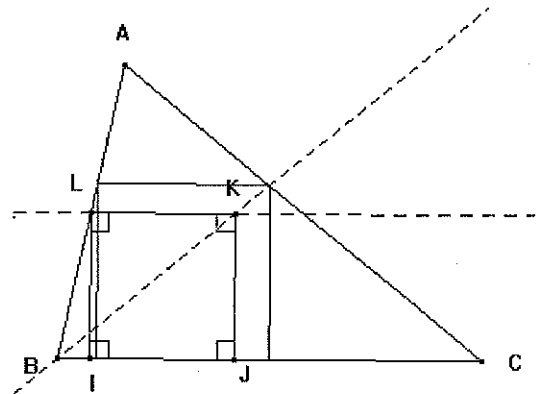
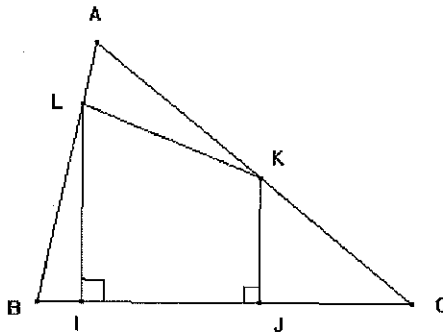
b) Déplacements de sous-figures géométriques

Parmi les démonstrations du théorème de Pythagore qu'on peut proposer en classe de quatrième, beaucoup d'entre elles reposent sur des déplacements de sous-figures. C'est aussi le cas par exemple dans le problème classique d'optimisation de la distance d'un point P à un autre point M en passant par une droite d, les deux points étant donnés dans le même demi-plan déterminé par la droite. Le déplacement qui permet la résolution est la réflexion d'axe d.



c) Agrandissements ou réductions de sous-figures géométriques

Voici un problème de construction dont la résolution met en œuvre un agrandissement de sous-figure : ABC est un triangle. Construire un carré IJKL tel que les points I et J appartiennent au côté [BC], le point K au côté [AC] et le point L au côté [AB].



L'introduction d'un agrandissement permet alors de trouver la piste principale de la construction : il s'agit d'agrandir (par une homothétie de centre B) le carré IJKL où I, J et L sont placés sur les segments souhaités de manière à ce que K appartienne à [AC].

À la fin de son article consacré à l'appréhension opératoire des figures, Duval (1994) conclut que la prise de conscience de l'hétérogénéité de ces activités doit engager les professeurs dans l'enseignement spécifique de ces activités afin que les figures soient bien, pour les élèves, un registre d'exploration heuristique et servir également de support pour construire les textes de démonstration nécessaires à la validation géométrique des résultats obtenus.

Bibliographie

Berté A. (1995), Réflexion sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classe, *Petit x* n°40, p. 41-63.

Berthelot R. & Salin M.-H. (1994), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N* n°53, p. 39-56.

Berthelot R. & Salin M.-H. (2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* n°56, p. 5-34.

Colmez F. & Parzysz B (1993), Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramides du CE2 à la 2^{nde}, in Bessto A ;, Verillon P. & Balacheff N., *Espaces graphiques et graphismes d'espaces*, La pensée sauvage éditions, p. 35-55.

Coppé S. & al. (2005), Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5^e, *Petit x* n°68, p.8-37.

Duval R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x* n°31, p. 37-61.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères-IREM* n°17, p. 121-138.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, V. 10. p. 5-53.

Noirfalise R. (1991), Figures prégnantes en géométrie, *Repères-IREM* n°2, p.51-58

Robert (1995) Géométrie, l'épreuve professionnelle au CAPES, Ellipses.

Robert Aline (2003), Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveau de conceptualisation, *Petit x* n°63, p. 7-29.

Annexe 4

Sur l'enseignement des fonctions en seconde

Aline Robert

Sur l'enseignement des fonctions en seconde

Une présentation très synthétique : quelques éléments de relief !

Ce problème général a plusieurs facettes.

En mathématiques, on peut s'accorder, en première analyse, sur le fait que les fonctions ont pour objet de traduire des dépendances entre variables : il faudrait compléter ce point de vue mais ce n'est pas notre propos ici.

On peut évoquer un mode de pensée numérique (arithmétique) – celui des nombres, algébrique (des lettres) et fonctionnel – des variables et variations, continues ou non. Ces variations font entrer aussi dans le monde de l'infiniment petit et de l'infiniment grand, le monde de l'analyse.

Les représentations (graphes, tableaux, formules) associées aux fonctions sont partielles : dans chacune il « manque » quelque chose²⁵ ; de plus on ne perçoit pas la même chose sur l'objet à partir d'un graphe ou d'une formule (elles ne donnent pas accès aux mêmes qualités de l'objet). On peut cependant distinguer trois points de vue complémentaires, inégalement renseignés par chaque représentation : ponctuel (valeurs, valeurs approchées), local (sur un intervalle, extrema – plus tard limites, dérivée, développement limité), global (courbe, variations, domaine de définition, signe de la dérivée sur le domaine de définition).

On peut enfin penser que le passage d'une fonction comme un ensemble de couples $\{x, f(x)\}$ à la fonction comme élément d'un nouvel ensemble de fonctions est hors du champ du secondaire.

Plusieurs types de problèmes sont possibles : fabriquer une fonction, à partir d'une dépendance (modéliser), étudier une fonction (objet), utiliser une fonction pour résoudre un problème (outil).

Le point de vue des mathématiques enseignées est plus important puisque c'est celui de l'article : ce sont les programmes (et leurs évolutions²⁶) qui nous renseignent. Cependant les absences éventuelles ne peuvent être mises en évidence qu'avec un complément du côté du « savoir savant » (c'est ce qu'on appelle la transposition didactique). Même si l'objectif d'un programme n'est pas de fabriquer des mathématiciens !

De fait, on peut estimer que la notion de fonction présente en seconde un caractère formalisateur et mêmes plusieurs : on l'appelle f , on lui associe une courbe et différents tableaux, voire une formule... Toutes choses plus ou moins nouvelles.

De plus la notion de fonction généralise ce qui a pu être fait en troisième sur les fonctions affines, de manière limitée du fait que les seuls graphes déjà rencontrés sont des droites : il peut y avoir plusieurs sens de variations successifs pour une même fonction, des graphiques non linéaires, des valeurs non calculables par une expression algébrique, un nombre de points important peut être nécessaire pour représenter le graphe !

²⁵ Ce n'est pas toujours le cas pour les registres.

²⁶ Attention aux dates : la réforme des mathématiques modernes a duré à peu près de 1970 à 1985...

Cependant c'est une même notion – qui unifie tout ce qui peut être associé à une certaine catégorie de courbes et/ou de formules (et c'est la définition ensembliste de correspondance fonctionnelle qui traduit bien ce caractère). Attention certaines courbes ne sont pas associables à des fonctions. Cependant ce caractère ne peut être présent chez les élèves en début d'enseignement de seconde.

Du coup une grande question se pose : comment introduire cette notion FUG ?

Les dernières évolutions des programmes sur les fonctions se caractérisent par une plus grande importance accordée au travail des élèves dans différents registres ou différents modes de représentation (graphique, tableau de valeurs, tableau de variation), en relation avec une vision assez qualitative de l'objet, ou globale, au détriment d'un travail direct sur les formules définissant classiquement les fonctions (reléguées plus tard) et permettant d'en calculer les dérivées, limites etc.

Qu'en penser ? C'est une première question, qui porte sur les choix mêmes du programme, et qui n'est pas abordée dans cet article.

Du point de vue des élèves²⁷, nul ne sait *a priori* si ce travail préliminaire, qui porte donc sur le moment où on introduit les fonctions, va aider les élèves à construire le concept. D'abord cela dépend étroitement de ce qui est fait ensuite – le temps long est partie prenante des apprentissages, que ce soit dans la phase de familiarisation ou dans les réinvestissements ultérieurs. Ensuite il n'y a pas de théorie qui aiderait directement à avoir des hypothèses sur ce point.

Par exemple les travaux de Duval et al. posent la question de la « transparence », dans certains enseignements, de la différence de travail pour l'élève dans différents registres (alors dits non-congruents) : ainsi le fait que le travail dans un registre n'est pas le même que le travail dans un autre registre, que ce ne sont pas les mêmes opérations par exemple, peut ne pas être explicité, être laissé à la découverte des élèves seuls. Cela suggère d'aborder explicitement avec les élèves ces différences de traitement dans les différents registres concernés. Mais cela ne veut pas dire qu'il n'y pas un travail à faire sur l'objet, représenté de diverses manières, cela ne veut pas dire non plus qu'il faut commencer par ce travail de passage entre registres !

De plus il faut bien commencer par un « bout » - certaines erreurs peuvent correspondre à des passages obligés, à rectifier dans un deuxième temps.

Côté enseignants, plusieurs questions se posent alors, à l'intérieur des programmes : notamment, au début de l'enseignement, comment organiser l'usage des trois registres (ostensifs) préconisés, dans quel ordre et avec quelles dynamiques entre eux ? Est-ce qu'un travail sur le seul caractère formalisateur peut amorcer la construction de la notion ? Quelles durées sont nécessaires, quels retours en arrière, comment continuer l'enseignement ?

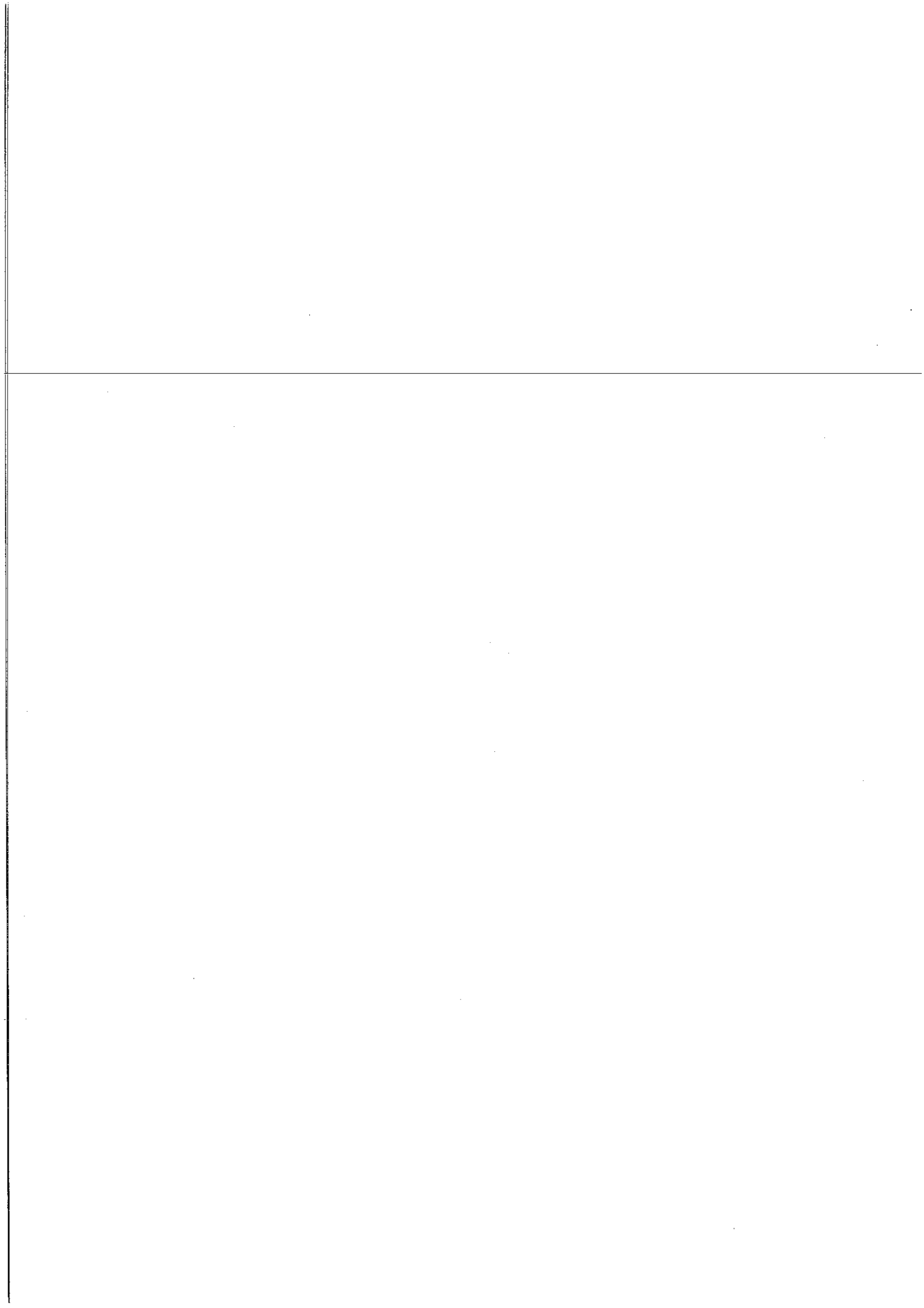
²⁷ Des études anglo-saxonnes ont montré certaines hiérarchies dans les acquisitions.

Annexe 5

Un exemple de critique d'article de la littérature professionnelle

« Éléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde », *Petit x* 71, 29-60 Coppé, Dorier, Yaccuz

Aline Robert



Un exemple de critique d'article de la littérature professionnelle

« Éléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde », *Petit x* 71, 29-60 Coppé, Dorier, Yaccuz

Statut : c'est un article annoncé comme article de recherche.

On doit donc restituer les questions aux quelles il tente d'apporter un éclairage, sûrement limité (par nature).

Il s'agit ici de s'attaquer aux problèmes d'enseignement des fonctions en classe de seconde, compte tenu des évolutions récentes des programmes et de certaines spécificités de la notion. Le premier travail des auteurs est de poser des questions précises pour aborder le problème général, et notamment de choisir des outils didactiques pour cela.

Une deuxième interrogation vise à mettre en évidence, grâce à une expérimentation limitée en classe de seconde, les hiérarchies et les limites de certaines des représentations dont les programmes réclament la mise en œuvre (diagnostic) et à illustrer des difficultés des élèves pour percevoir les relations entre ces diverses représentations (diagnostic et mise à l'épreuve de types d'exercices) : courbes, tableaux de valeurs, tableaux de variations.

Ce travail s'inscrit dans plusieurs cadres usuels de didactique des mathématiques, référés en bibliographie.

Résumé

Les auteurs précisent d'abord un point de vue général sur la notion de fonction (traduisant une dépendance), et expliquent qu'ils vont travailler au sein des programmes actuels.

Ils décrivent alors ces évolutions des programmes, qu'ils rapportent aussi à des exigences qui dépassent l'école, et s'interrogent sur ce qui peut être fait « en vrai » en classe (questionnaires, manuels) ainsi que sur des effets possibles (*a priori*) du nouveau travail prescrit, à partir d'une interprétation détaillée de ce travail notamment en termes d'ostensifs : c'est le point de vue qu'ils adoptent. Ils le développent en passant en revue un certain nombre de caractéristiques de ces différents ostensifs (quelquefois appelés signifiants) : courbe, tableau de valeurs, tableau de variations, s'attardant sur les liens entretenus avec l'objet fonction, le signifié (avec les questions que ça peut poser) et sur leurs rapports respectifs éventuels avec les connaissances antérieures des élèves. Cette réponse à la première question, qui concerne la spécificité de la notion compte tenu des programmes se termine par une conclusion plus précise que les premières questions générales posées, portant sur ces choix d'ostensifs pour faire travailler les élèves lors de l'introduction des fonctions : d'une part il y a une certaine part de flou, compte tenu des analyses présentées juste avant, d'autre part des questions didactiques se posent sur ces ostensifs – quels rapports entretiennent-ils avec la notion de fonction et entre eux ? Autrement dit les programmes peuvent-ils donner les moyens de réaliser les objectifs supposés ?

Dans la deuxième partie de leur travail, les auteurs explorent ces dernières (nouvelles) questions de manière limitée, notamment à travers deux expérimentations dans une classe de seconde – complétées brièvement par les résultats dans une autre classe.

Ils ont proposé aux élèves d'abord, au début de l'enseignement, un jeu de message, organisé entre groupes d'émetteurs et de récepteurs, pour que ces derniers reproduisent, de manière la plus ressemblante possible, le tracé d'une courbe donnée aux premiers, et décrite par eux sans utiliser de courbes. La comparaison est organisée grâce à des transparents produits par les élèves.

Le deuxième exercice, travaillé individuellement plus tard dans le déroulement du cours, vers la fin, demande de tracer des courbes conformes au tableau de valeurs d'une fonction puis de compléter un tableau de variation de la même fonction : cela oblige à introduire des valeurs supplémentaires traduisant de nouvelles variations par rapport aux valeurs initiales.

Les auteurs détaillent les deux expériences, en donnant des analyses *a priori* et *a posteriori* très précises des exercices proposés.

Les constats qui résultent des ces expérimentations limitées confirment la relative indépendance apparente, questionnée au début, du travail des élèves sur les signifiants envisagés (courbes, tableaux) et du travail d'élaboration de la notion de fonction.

La première expérience confirme que les élèves en restent à un traitement des courbes point par point, en relation directe avec le repérage. Les auteurs suggèrent que l'objet fonction n'est pas associé à ce travail, pas plus que l'idée même de variations d'une courbe. La comparaison des courbes obtenues permet cependant de mettre à jour l'idée de non unicité et, à partir de là, sensibilise les élèves à la possibilité de décrire des variations, avec les idées de croissance, etc. Cela permet à l'enseignant d'aborder la traduction en tableau de variations.

La deuxième expérimentation montre la difficulté toujours (et encore) présente pour la grande majorité des élèves de se départir de la prédominance des informations du seul tableau de valeurs pour tracer une courbe et imaginer plusieurs candidats très différents.

Les auteurs signalent aussi le fait que les expérimentations testées ne sont peut-être pas déterminantes pour faire changer les élèves, même suite aux interventions de l'enseignant.

Critique

1. Quelques manques, quelques longueurs, quelques problèmes de vocabulaire, quelques nuances à apporter...

Une description fine de l'enseignement précédent les expérimentations n'est pas donnée, aucune évaluation à plus long terme n'est fournie.

La deuxième classe est introduite de manière curieuse, sans aucun renseignement et traitée très rapidement : pourquoi cette dissymétrie ?

La différence entre travail individuel et travail en groupes de deux n'est pas du tout questionnée. Pourtant on pourrait s'interroger sur les formes de travail associées à ces différentes tâches.

Le statut des expérimentations reste un peu ambigu entre diagnostic, test des connaissances et test d'une petite ingénierie (cf. l'utilisation du mot « institutionnalisation » page 50)...

Les pages 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 sont trop longues et le lien avec ce qui précède n'est pas explicité : il n'en est pas tiré beaucoup de choses et ces analyses ne sont pas toujours mises en relation avec les connaissances, qu'elles soient en place ou à faire évoluer ! En plus ces analyses de procédures mettent bien en évidence, même si ce n'est pas toujours dit ainsi, que ce sont bel et bien des connaissances sur les courbes qui sont mises en fonctionnement,

avec plus ou moins d'adaptations, voire plus ou moins de disponibilité (problème récurrent en classe de seconde).

Les pages 52, 53, 54, 55, 56 sont trop longues.

Les analyses *a priori* de la deuxième expérimentation sont un peu différentes des précédentes : pourquoi ?

Inversion du sens de signifié/signifiant

Les mots « facile », « capables », « capacités » me gênent.

Le mot variations page 39 est pris dans deux sens : variation des fonctions et variation des courbes obtenues...

Le choix des outils didactiques (ostensifs- signifiants) n'est peut-être pas assez discuté : qu'apporte spécifiquement la notion d'ostensif ?

Enfin, dire en conclusion que « ces expérimentations montrent qu'il y a lieu de mettre en place des situations permettant d'initier un questionnement » me semble un peu fort, à nuancer. La place respective des différentes formes de travail n'est pas discutée dans l'article... Le fait que la reprise en main par l'enseignant est fondamentale vient aussi du fait que les situations proposées ne sont pas adidactiques : par exemple le fait qu'on trouve plusieurs courbes dans le premier exercice n'est pas contradictoire avec la consigne « une courbe qui ressemble le plus possible »...

2. Critiques des analyses de la tâche et réflexions

Tâche n°1 : décrire un tracé pour que des élèves reproduisent une courbe qui lui « ressemble le plus possible ».

Que veut dire « ressemble le plus possible » ? Il y a une ambiguïté. Aucun élève ne s'interroge ? Souvent le même type de consigne est donné pour introduire les triangles isométriques, et alors le critère de même forme ne veut pas dire nécessairement superposable (il peut y avoir une symétrie). Même chose pour triangles semblables (de même forme !).

Comme il y a un quadrillage, supposé fourni aux récepteurs, il y a *a priori* deux sortes de renseignements qui peuvent être fournis par les émetteurs : des points repères et des indications pour joindre les points (la courbe est droite, ou la courbe monte).

Toutes ces sous-tâches font fonctionner exclusivement, à mon sens, des connaissances graphiques pour décrire ou obtenir un graphique (mode nomographique), il n'est pas indispensable de penser que la courbe est associée à une fonction pour les donner ou les utiliser. La même tâche pourrait être donnée avec une courbe ne représentant pas une fonction !

Réflexion (?) : Qu'est-ce qui caractérise la représentation graphique d'une fonction ? C'est qu'il y a une seule image pour chaque abscisse du domaine de définition, bien déterminée. Ce n'est pas seulement que ça varie (c'est vrai pour d'autres courbes, même avec des boucles par exemple, c'est vrai pour les courbes obtenues en physique ou en économie !).

De ce fait, à ce moment là, ce qu'on peut attendre de cette tâche n°1, c'est la non-unicité des courbes, qui est normale, mais pas nécessairement un travail sur l'association courbe-fonction, qui n'est pas vraiment mise en défaut - les élèves n'ont pas vraiment les moyens d'imaginer tout seuls la correspondance (cela dépend aussi de ce qui a été donné en cours, qui

n'est pas précisé ici : est-ce que l'enseignant a déjà expliqué qu'une boucle ne peut pas être associée à une fonction ?).

Il n'y a donc d'une part peut-être pas d'enjeu suffisant à travailler pour obtenir la même fonction (courbe en fait), ce qui ne veut pas dire grand-chose, pour les élèves (cf. tracer deux triangles de même forme...). D'autre part, même si la non-unicité peut apparaître aux élèves, grâce à l'intervention de l'enseignant notamment, cela ne débouche pas nécessairement sur une connaissance sur les fonctions mais bien, encore, sur les courbes. N'oublions pas non plus que les problèmes d'unicité sont très peu abordés au collège et que des effets de contrat peuvent jouer à ce sujet.

Cela dit, les conclusions de la première expérimentation sont compatibles avec ces réflexions, dans la mesure où les variations concernent aussi bien les courbes que les fonctions !

Tâche n°2

Analyse des tâches : quelles connaissances peuvent fonctionner ?

Exercice 1

la première question reste dans le mode nomographique : placer des points, les relier. Le fait qu'il y ait une fonction à la base ne sert pas à réaliser la tâche.

Mais la deuxième aussi ! Le lien avec fonction ne sert pas !

Exercice 2

Il y a un travail sur l'objet tableau de variations associé à une courbe ou à une fonction (il me semble cependant que c'est plus avec la courbe qu'on arrive à imaginer ce qui manque) : il faut imaginer une courbe qui prend des valeurs compatibles avec celles qui sont données mais aussi d'autres, supplémentaires, compatibles avec les flèches intermédiaires introduites. Il y a donc une adaptation de type A2 : introduction d'intermédiaires pour faire fonctionner l'association tableaux-courbe.

Mêmes tâches ?

Les connaissances mises en fonctionnement sont bien celles repérées par l'auteur, avec la vérification du fait que quand les élèves doivent imaginer des valeurs, ils essaient d'utiliser un algorithme (valeur moyenne).

3. Mon bilan

Finalement, l'article, tout à fait intéressant si on le discute²⁸, semble confirmer que les élèves ont une vision point par point des courbes, même si les connaissances nomographiques ne sont pas toujours aussi disponibles qu'attendu. La première tâche proposée ne fait pas évoluer cette vision sauf en ce qui concerne l'existence de variations qu'on peut décrire, introduite à la fin par l'enseignant, au moment des comparaisons. Mais ce travail de comparaison des informations peut porter aussi bien sur les courbes que sur les fonctions... À ce stade, il n'est pas sûr que les élèves sont mis en travail sur les fonctions, sans que l'enseignant puisse repérer d'ailleurs ce fait (décalage), mais ce n'est peut-être pas dommageable !

Autrement dit, ce qu'on peut attendre de cette situation, est, sans doute, un diagnostic des connaissances des élèves sur le mode nomographique, mais pas tellement de renseignements sur leur association courbe-fonction dont il n'y a pas vraiment besoin, et encore moins une

²⁸ C'est bien un article de recherche !

introduction à cette association, permettant à une intervention du professeur de répondre à une question que se poseraient les élèves (visions RAP de l'association courbe-fonction) !

La seconde expérimentation sert à préciser encore, sur un petit nombre d'élèves, le fonctionnement de ce mode nomographique, qui est un fonctionnement économique, le tracé le plus simple est privilégié (sans adaptations ou peu par rapport aux tracés linéaire ou courbe simple déjà rencontrés : les élèves fonctionnent en « extension sans accident »...). Elle permet aussi de vérifier la difficulté d'une adaptation de type A2, qui est même impossible pour la majorité des élèves : on peut encore se demander à quoi tient cette difficulté.

Ce qui est en cause semble davantage l'association tableau de valeurs-tableau de variation et la hiérarchie du premier sur le second que le fonctionnement propre du tableau de variation.

Cela renforce le résultat de la première expérimentation : les élèves, au travail avec une courbe, en auraient une perception d'abord ponctuelle, et travaillent ponctuellement dans le mode nomographique.

Cela peut indiquer que l'idée même de variation, pourtant très visible sur une courbe à nos yeux, n'est pas familière aux élèves en mathématiques, ne leur apparaît pas. Le caractère global, statique, de l'objet courbe serait prégnant : le plus absent serait l'aspect local, intervalle, lié aux extrema, dérivées, etc.

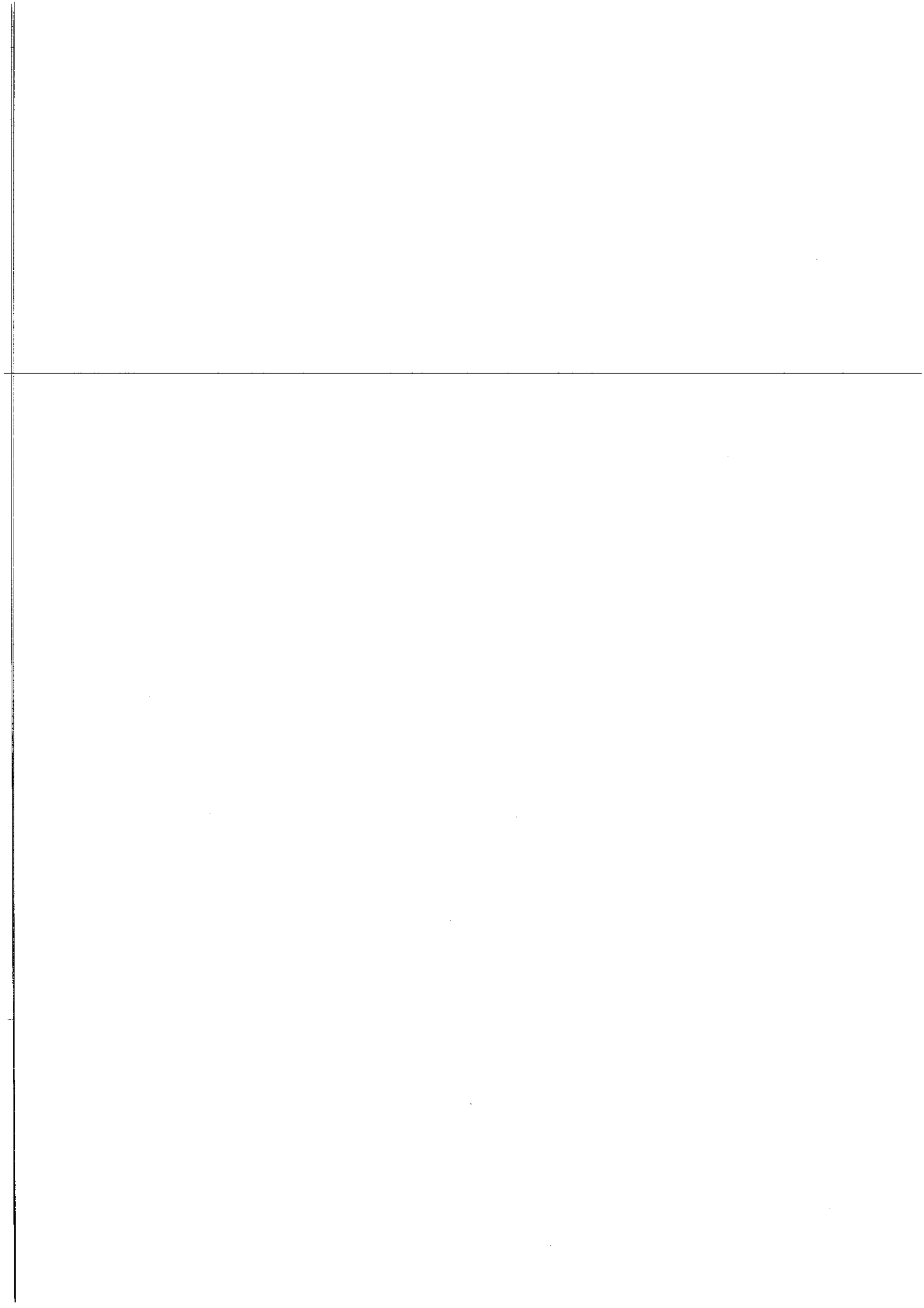
Cela renforcerait les propositions de Falcade qui suggère d'introduire les fonctions comme FUG à partir d'une idée de variation géométrique.

On peut arriver aux mêmes résultats autrement.

Si on adopte notre analyse de la notion comme FUG, des exercices permettant de travailler avec un certain succès apparent la représentation graphique des fonctions et les tableaux de valeurs (caractère formalisateur) n'ont pas de raison de faire deviner aux élèves qu'il existe une notion là-dessous qui a d'autres caractères. Sauf peut-être s'il manquait quelque chose de manière évidente, ce qui n'est pas le cas !

De ce fait c'est la non-unicité de la description tracé-courbe ou courbe-tableau, seuls obstacles rencontrés et que l'enseignant peut mettre en valeur, qui pourraient jouer comme détonateur de questionnement (RAP) : mais ce que cette non unicité met en défaut concerne aussi bien la courbe que la fonction représentée !

Il n'est donc pas clair qu'il y ait là des débuts d'introduction à ce qu'on cherche (travail sur la fonction), ce qui n'est pas du tout nécessairement dommageable pour autant, répétons-le...

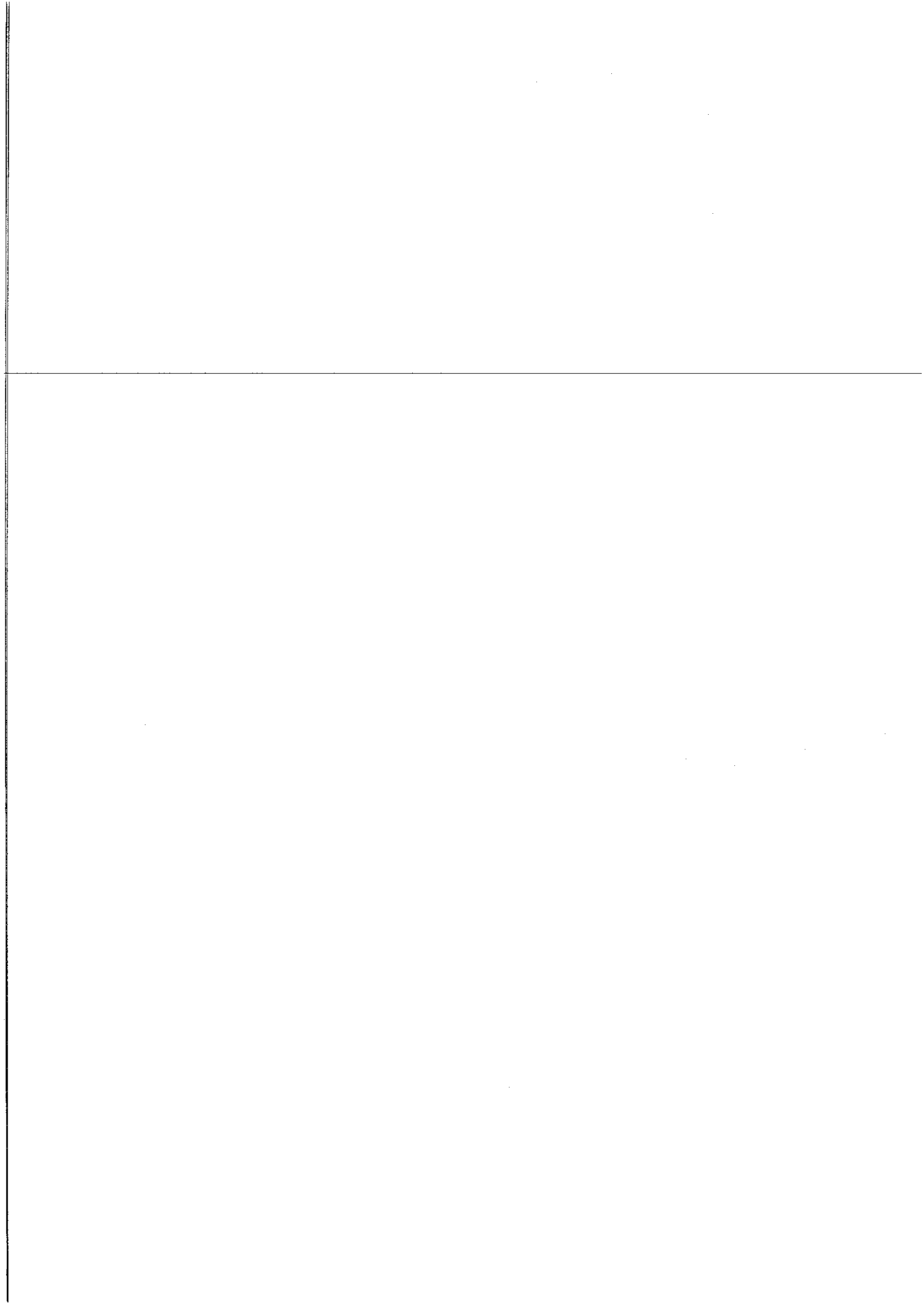


Annexe 6

Commentaires sur l'article :

**Gandit M. (2004) Preuves et démonstration :
un thème pour la formation des enseignants,
Petit x, 65 pp. 36-49, et 66 pp. 49-82.**

Aline Robert



Commentaires sur l'article :

**Gandit M. (2004) Preuves et démonstration :
un thème pour la formation des enseignants,
Petit x, 65 pp. 36-49, et 66 pp. 49-82.**

Si l'article s'adresse évidemment à des formateurs, son statut n'est pas si clair que ça : il y a des analyses, qui ne sont pas dévoilées entièrement (souvent on n'a que des morceaux choisis), des réflexions organisées, des emprunts à un cadre didactique mais peut-on parler de recherche ? Ou même d'ingénierie (pas testée ? Le petit nombre de PLC2 concernés, le fait que l'expérience n'est pas terminée, amèneraient à donner un statut intermédiaire, entre début de recherche et réflexion d'un formateur très expérimenté et outillé par des éléments de didactique.

Résumé

Le résumé se fait très bien en suivant la chronologie de l'article : de l'examen de trois copies d'élèves sont dégagées des hypothèses sur des contrats établis en classe sur les démonstrations, débouchant sur certaines conceptions des enseignants sur les preuves, confirmées par un questionnement chez des débutants. Un premier type de conception (et de contrat en classe) amène aux idées suivantes : une démonstration serait un enchaînement de (petits) pas ternaires, avec un travail préliminaire de codage ou de mise en évidence des hypothèses, où rien n'est laissé dans l'ombre, où les seules connaissances légitimes sont celles du cours, la géométrie étant particulièrement propice à son apprentissage. La forme peut l'emporter sur le sens. Un autre type insiste sur le fait qu'une démonstration doit d'abord établir la vérité d'un énoncé, le valider, réduire le doute, en s'inscrivant dans la rationalité des mathématiques

De l'éloignement des deux types de conceptions, résulte une interrogation sur les pratiques des enseignants : est-ce que certaines d'entre elles n'engendreraient pas les difficultés des élèves ? D'où comment former ? D'où peut-on imaginer une situation fondamentale²⁹ ?

Un retour à une analyse de la preuve est alors proposé : à la fois processus (recherche) et produit (écrit). Avec un petit éclairage sur la relativité des preuves et une discussion sur « les trous » correspondants, de plusieurs ordres.

Le deuxième texte est la présentation argumentée et très détaillée³⁰ d'une situation dite fondamentale qui devait permettre de faire émerger des conceptions de la preuve comme celles signalées plus haut et de les faire évoluer, pour des débutants. Une description très formelle de l'activité de preuve est proposée (!), beaucoup plus générale que ce qui est souvent suggéré par les enseignants.

²⁹ Là je suis très critique sur le plaquage des théories didactiques sur l'apprentissage à la formation !

³⁰ Trop ?

Des questionnements avant et après la résolution d'un exercice encadrent la situation de preuve proposée qui repose sur de la combinatoire³¹. Les réponses des étudiants aux différentes phases sont très détaillées, ainsi que le film du groupe qui a été enregistré pendant la résolution de l'exercice proprement dit (étude clinique très poussée). On constate beaucoup de convergences avec ce qui a été déjà obtenu, complété par quelques éléments spécifiques à la situation, sur les conditions nécessaires, suffisantes, la présence d'une suite de vérités comme validant une preuve, et le rôle de l'écrit.

Finalement, une hiérarchie des éléments de conception « dommageables » est établie dans la conclusion : par exemple faire tout expliciter, alors que c'est illusoire, ou citer des indices seulement partiels de validité indépendamment de leur insertion dans la preuve (types de raisonnement par exemple), alors que cela peut amener à des habitudes sur la forme seulement, se baser trop strictement sur des fonctionnements liés à la géométrie seule, se fier à la validité de chaque élément d'une suite d'implications au lieu d'analyser l'ensemble.

Cependant, comme le temps prévu pour l'expérimentation était mal calibré et que la phase finale, indispensable pour valider l'expérience n'a pas eu lieu, l'auteur, considérant que l'ensemble est très positif tout de même, propose un nouveau scénario, plus court.

Critique

On peut s'accorder sans doute sur le fait que les enseignants, face aux difficultés des élèves à rentrer dans des démonstrations, facteur qui n'est jamais abordé dans l'article, ce qui est un des plus gros manques à mes yeux, cherchent à les aider en leur proposant des sortes d'algorithmes : mais ce faisant les aident-ils vraiment ? La question mérite d'être posée en effet.

Cela dit, est-ce que tous les élèves peuvent entrer de la même manière dans le processus de preuve (cf. narrations de recherche : autre piste !) ? Ne doit-on pas réfléchir aux modalités et pas seulement aux contenus à proposer ? Est-ce que l'inspiration exclusive de l'activité du mathématicien n'est pas naïve (il y a aussi des éléments cognitifs dans l'histoire) ?

Cependant est-ce conforme à l'activité mathématique, justement, de découper les choses en mettant à part les démonstrations (et la formation à leur apprentissage) ? N'y aurait-il pas une autre entrée par le travail dans un domaine, travail qui met en jeu des connaissances et des résolutions de problèmes avec des raisonnements ?

La relativité des démonstrations n'est plus à montrer, aussi bien dans la forme – cf. histoire qu'en relation avec le domaine de travail dans lequel on est (cf. ce qu'on admet en le disant, sans le dire et ce qu'il n'est pas question d'admettre...). Est-ce donc pertinent d'isoler ce segment des activités mathématiques ?

Enfin, le double aspect processus (convaincre) et produit (écrire) me semble pouvoir être questionné davantage et autrement : en particulier l'écrit peut avoir un rôle pour modifier le raisonnement, parce que c'est là qu'on se rend compte de manque de précisions ou de manques tout court, de défaut d'ordre, ou de complications inutiles ! Plus généralement, certains développent l'idée de travailler l'entrée dans la preuve (sens) – cf. Balacheff et

³¹ C'est un domaine des math moins connu, où la structure de la preuve se voit très bien (les objets ne sont pas très « riches », il n'y a pas de théorèmes compliqués, on en reste aux entiers).

d'autres de travailler l'entrée dans la démonstration (écriture, présentation formelles – cf. Duval).

Peut-être ce double travail est-il indispensable ?

Des compléments à cet article ont été donnés avec une bibliographie sur la démonstration.

On peut trouver des réflexions sur le lien entre domaine des mathématiques et démonstration (Arsac) et sur des spécificités au travail de démonstration en géométrie. D'une part avec l'introduction des géométries I, II, III (Kuzniak et al.) : géométries de l'observation, de la mesure, de la preuve formelle, et axiomatique, d'autre part avec une réflexion sur les fondements en géométrie, les progressions utilisables, les types de problèmes et le niveau de rigueur afférent (Arsac, petit xn °37 et 47, Robert petit x n°63), enfin un travail sur les formes et variables de la démonstration en mathématiques (Journal of proof 12/10/04).

Dans un texte de 2005 d'Arsac (conférence à Lyon, régionale de l'APM) le lien est fait avec certaines études sur les élèves : rôle de la figure et du dessin dans leur activité de démonstration. Le rôle du vrai et du faux en mathématiques souvent méconnu des élèves, est aussi exploré dans certains textes, ainsi que celui de la logique mathématique sous-jacente.

Un article très intéressant d'Arsac résume ce que peuvent retirer les enseignants des travaux didactiques sur la démonstration.

Signalons « la lettre de la preuve » (voir sur Google).

Annexe 7

Critiques d'articles de la littérature professionnelle sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège

Aline Robert

Critiques d'articles de la littérature professionnelle sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège

À propos des cinq articles suivants :

Capponi B. (2000) Le tableur arithmétique, algèbre, Petit x n°52

G. Combier, J.C. Guillaume, A. Pressiat (1996) Les débuts de l'algèbre au collège, INRP

JP Mercier (2004) Le problème des 5 carrés ou comment montrer l'intérêt des identités remarquables, Repères IREM n°57

F. Rouger-Moinier (2001) Quelques problèmes pour donner du sens à des règles de calcul littéral Repères IREM n°42

C. Sackur, M. Maurel, (1999) Les inéquations en classe de seconde, Petit x n°53

I. Synthèse des articles

On pourrait résumer tous les articles par leur effort de répondre à la question suivante : appliquer correctement les règles de l'algèbre ne s'apprend pas en faisant seulement apprendre ces règles, il est efficace (utile, nécessaire ?) de déléguer autre chose aux élèves : quoi ? Comment ?

Rappelons le caractère FUG de ces notions algébriques, ce que nous avons mis en relation avec la rupture arithmétique /algèbre³² : les règles du jeu algébrique ne se déduisent pas directement des connaissances antérieures, le nouveau formalisme amène des nouvelles règles qui prennent leur sens en son sein ; le problème du sens est ainsi posé, pour donner des moyens de contrôle, mais c'est difficile car il faut ou être à l'intérieur de l'algèbre (généralisation, preuves) pour le faire ou effectuer un double changement de cadres (résolution économique).

De plus, on pourrait interpréter certains étonnements de professeurs en seconde par le fait qu'au collège, vu les difficultés précédentes, on ne travaille que les aspects mobilisables des notions algébriques alors qu'en seconde les enseignants en attendent déjà une certaine disponibilité, par l'intermédiaire de changements de points de vue ou d'initiatives déléguées aux élèves (sans même que ce soit fait exprès).

C'est ce qui a fait écrire à certains auteurs (Chevallard³³) que les élèves n'apprennent véritablement l'algèbre précisément qu'à partir de la seconde où ils doivent la faire servir. Mais certains élèves sont peut-être laissés en plan dans ce fonctionnement !

Les « solutions » didactiques proposées dans ces 5 articles sont de plusieurs ordres :

³² B. Grugeon (2000) L'algèbre au collège et au lycée, Actes des journées de formation de formateurs de Besançon de juin 1999, publié par l'IREM de Montpellier ; J.C. Duperret (1999) L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège Repères IREM n°34

³³ Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique, l'évolution de la transposition didactique (petit x n°5) ; (1989) une perspective curriculaire : la notion de modélisation (Petit x n°19) ; (1992) Voies d'attaque et problèmes didactiques (Petit x n°23).

- Pour mettre du sens sur ce nouveau formalisme,
- faire produire et pas seulement résoudre des formules (5^{ème}) – l’algèbre sert à généraliser de manière économique,
- faire produire et pas seulement résoudre des équations (4^{ème}) – l’algèbre sert à résoudre ;
- plus généralement faire modéliser pour résoudre divers problèmes aussi bien géométriques que numériques – l’algèbre sert à prouver ou à résoudre (3^{ème} avec deux types d’exemples : une liste de petits problèmes et une situation complète en plusieurs temps qui permettent de faire fonctionner les identités remarquables et la factorisation au service des productions et résolutions d’équations) .
- **Pour mettre du sens sur ce nouveau formalisme**, initier les élèves au jeu que l’on adopte en mathématiques : les énoncés sont nécessaires ; il s’agit alors de faire trouver la nécessité d’un énoncé algébrique, souvent utilisé de manière fausse, en comparant des résultats issus de plusieurs méthodes (graphique et algébrique) (2^{ème}). Une expérience est imaginée pour mettre les élèves en situation de prendre conscience de cette nécessité : travail sur un énoncé permettant deux méthodes, travail en groupes, travail en performance sont mobilisés.
- Cependant plusieurs difficultés attendent le néophyte : certains auteurs proposent de **découper les difficultés mais pas comme d’habitude**.
- On diffère l’enseignement technique de résolution des équations du premier degré au bénéfice de leur production et résolution par un tableur, avec une analyse quasi « naturaliste » de la forme des équations qu’accepte le solveur.
- Ou bien encore on s’appuie sur des textes historiques pour faire imiter (recopier en adaptant) la résolution d’équations à partir d’une recette « antique ».

Restent des questions de gestion de classe, car la portée et la limite de ces propositions ne sont pas abordées, des questions d’utilisation de tableurs ou calculatrices.

Restent aussi des questions d’utilisation de ces articles et plus généralement de formation. Notamment, en vrac :

Peut-on transmettre une seule expérience, faut-il replacer dans un enseignement didactique de l’algèbre ?

Faire lire ? Faire expérimenter ?

On peut aussi critiquer (au sens large) les articles. Ainsi ils se placent tous dans une perspective de rationalité des élèves (surtout celui en seconde) ainsi que dans une vision piagétienne des apprentissages ; or d’une part on sait que certains apprentissages se font autrement, et même qu’il y a vraisemblablement des grandes différences entre les élèves, d’autre part les enjeux (limités) des apprentissages scolaires limitent la rationalité qu’on peut attendre des élèves. Même les mathéux retrouvent souvent *a posteriori* certaines logiques.

La question du jeu auquel on joue en mathématiques a été abordée par d’autres auteurs, autrement – cf. Castela, méta... C’est une question importante, mais là encore on a déjà constaté des diversités entre élèves !

Le travail en groupes nécessite d’être discuté davantage.

Annexe 8

Compléments sur la géométrie

Aline Robert

Compléments sur la géométrie

Les éléments d'Euclide (12 livres dont la majorité géométriques) présentent quelques « imperfections » à nos yeux : on pourrait les résumer en évoquant le manque de théorie des ensembles, de nombres réels et de transformations ainsi que le recours à l'expérience visuelle seule pour faire certains raisonnements.

D'abord les définitions utilisées n'en sont pas : sans que cela nuise au développement déductif ultérieur, les points et droites notamment sont définis de manière intuitive, traduisant une expérience sensible (suffisante ?).

Du fait de l'absence d'ensemble (de points) il n'y a pas non plus de transformation mais seulement des allusions à des mouvements comme la superposition : là encore on peut concevoir que l'expérience sensible donne du sens à ce qui est écrit mais cela peut laisser le mathématicien insatisfait.

De plus, et dans le même ordre d'idées, les raisonnements se font à partir des figures et amènent à admettre sans même le signaler, des propriétés visuelles, notamment liées à la convexité et à l'additivité des aires de figures disjointes (ou adjacentes).

Enfin, ces mathématiciens grecs ne disposaient pas des nombres autres qu'entiers. Pour mesurer, ils raisonnaient sur des rapports de grandeurs (rationnels) qu'ils comparaient. Ils n'avaient donc pas de formules, notamment pour les aires...

Dans ces conditions, après avoir donné ces définitions, axiomes (dont le 5^{ème} postulat) et demandes (règles simples de calcul sur les nombres et rapports de grandeurs), Euclide adopte une progression générale dont nous donnons quelques extraits : il établit pour commencer les cas d'égalité des triangles, puis donne des propriétés élémentaires des parallèles, des triangles particuliers, et établit l'inégalité triangulaire, à partir de la propriété que dans un triangle le plus grand angle est en face du plus grand côté. Il démontre ensuite des propriétés d'égalité d'aires (aire du parallélogramme et double des aires des triangles découpés par les diagonales, aires de parallélogrammes ayant une base commune et la base opposée sur une même parallèle à cette base, aires de triangles de même base et dont les sommets appartiennent à une parallèle à cette base, réciproque, ...). Il utilise pour ce faire essentiellement des cas d'égalité de triangles. Il démontre alors le théorème de Pythagore et sa réciproque.

L'étape suivante est liée au livre 5 qui est un livre sur les nombres : Euclide y établit un moyen pour démontrer que deux rapports de grandeurs sont égaux à partir de comparaison à des rapports plus grands et plus petits.

Ensuite il compare des aires de triangles ayant un sommet commun, établissant que le rapport des aires est égal à celui des bases puis établit le théorème de Thalès et sa réciproque (dans le cas des triangles de même sens).

D'autres livres sont dédiés aux polygones puis au cercle (il est démontré par la méthode d'exhaustion que le rapport des carrés des rayons de deux cercles est constant).

Pour sa part, Hilbert, travaillant sur les fondements, a montré qu'à partir d'un ensemble de points, remplaçant les points d'Euclide, en gardant les postulats d'Euclide et en ajoutant des axiomes permettant d'avoir un ordre sur les points d'une droite, et d'autres permettant en

particulier de rendre explicite les propriétés de convexité dont on a « envie » qu'elles soient vraies, en admettant le premier cas d'égalité des triangles, alors toute la géométrie construite par Euclide se tient, y compris la progression ! C'est une version axiomatique de cette géométrie, qui inclut les nombres réels et les ensembles.

Au collège, on dispose justement des nombres (réels sans le dire), de certaines formules (aires, volumes), et des ensembles (sans le dire).

Il y a au moins deux progressions envisageables, si on veut rendre explicite la suite des théorèmes et déductions qui conduisent au même corps de résultats que chez Euclide : soit on admet le premier cas d'égalité des triangles, soit on admet des propriétés (d'isométries) de certaines transformations (symétries centrales ou orthogonales). Il semble qu'à l'heure actuelle ce soit cette deuxième voie qui est à l'œuvre implicitement dans les programmes.

Donnons un exemple particulier : celui de l'inégalité triangulaire.

En géométrie affine euclidienne cette inégalité est un axiome : en effet on définit la distance de deux points A et B comme la norme du vecteur AB, c'est bien une norme car on a muni l'espace vectoriel associé à l'espace affine d'un produit scalaire, et on sait que les normes vérifient l'inégalité triangulaire.

En revanche que se passe-t-il en géométrie « à la Euclide » ?

Quatre propositions permettent de démontrer l'inégalité $AB < AC + CB$ si A, B et C sont les sommets d'un triangle.

Une première idée générale est de comparer seulement deux longueurs, AB et $AC + CB$: pour cela on va prolonger AC d'une longueur CD égale à CB. On va alors utiliser une propriété des triangles, permettant d'être sûr que AB est plus petit que AD. Cette propriété affirme que si l'angle opposé à AD, ACD, est plus grand que l'angle opposé à AB, ADB, les longueurs des côtés sont dans le même ordre.

Or l'angle opposé à AB, ici ADB, est égal à l'angle CDB car par construction le triangle BCD est isocèle. Et l'angle BCD est plus petit que l'angle ACD qui est égal à $BCD + BCA$.

Pour démontrer la propriété utilisée, on utilise trois étapes (on ne tient pas compte des cas particuliers) :

1) l'angle extérieur à un triangle ABC, soit ACD est plus grand que chacun des deux angles ABC et CAB.

2) Puis, si AC est le plus grand côté d'un triangle ABC, l'angle opposé ABC est le plus grand : en reportant une longueur AD égale à AB sur ce côté AC on obtient un triangle isocèle ABD ; et en appliquant ce qui précède, on peut affirmer que l'angle BDA est plus grand que l'angle BCA ; d'où l'angle ABC est plus grand que ABD (car égal à la somme $ABD + DBC$), l'angle ABC est donc plus grand que BDA (le triangle BDA est isocèle) donc que BCA... On procède de la même façon avec l'autre comparaison.

3) De ce fait réciproquement, si dans un triangle ABC, l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB, alors le côté opposé AC est plus grand que AB : sinon, on aurait une contradiction avec le point 2) !

Annexe 9

Compte-rendu de lecture : quatre livres de géométrie

Daniel Perrin

Compte-rendu de lecture :

quatre livres de géométrie

Daniel PERRIN

00. Les livres.

[A] ARSAC Gilbert, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, Aléas, IREM de Lyon, 1998.

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[H] HARTSHORNE Robin, *Geometry : Euclide and beyond*, Springer, 2000.

[L] LION Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

Quelques autres références :

[Bk] BKOUCHE Rudolf, *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, Bull. APMEP 430, septembre 2000.

[Le] LEBESGUE Henri, *La mesure des grandeurs*, Blanchard, 1975.

[P] PERRIN D., *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège*, Bull. APMEP 431, novembre 2000.

0. Introduction.

Les quatre livres énumérés ci-dessus ont un trait commun qui est de parler de géométrie et notamment d'axiomatique de la géométrie, avec une plus ou moins grande ouverture, qui sur les mathématiques (cf. [H], [L]), qui sur l'enseignement (cf. [A], [CF]). Tous me semblent intéressants et je recommande vivement leur lecture. En tous cas, ces quatre livres m'ont conduit à réfléchir un peu plus sur la géométrie, son enseignement et l'axiomatique sous-jacente. La perspective dans laquelle je vais les commenter – actualité de la commission oblige – est notamment celle de leur utilisation en formation des maîtres.

1. Le livre de Gilbert Arsac.

C'est le plus court des quatre : 121 pages petit format. C'est aussi, avec celui d'Annie Cousin-Fauconnet, le plus soucieux de l'enseignement de la géométrie. Le public visé est clairement identifié : les professeurs de collège et de lycée. Il y a quelques exercices (très peu).

a) *Principes.*

Je partage absolument les principes qu'énonce Arsac dans son introduction en ce qui concerne la formation des maîtres en géométrie. Je souscris en particulier à l'idée qu' "*avec l'axiomatique des espaces affines et vectoriels le futur professeur est aussi bien armé qu'une poule avec un couteau pour résoudre les problèmes de l'enseignement de la géométrie*". Il analyse aussi très bien le problème créé par le fait que, pour enseigner géométrie au collège, le futur professeur n'a guère à sa disposition que ses propres connaissances de collège. Il y a là une carence de l'université et de la formation des maîtres. Enfin, il signale à juste titre l'absence de fondements axiomatiques de la géométrie du collège, après les abandons successifs des cas d'égalité des triangles et de l'algèbre linéaire.

Pour remédier à cela, Arsac présente (brièvement) dans son livre l'axiomatique de Hilbert, avec quelques aspects historiques et une réflexion didactique partout sous-jacente et très pertinente.

b) le plan.

Le chapitre 0 présente les axiomes de la géométrie. Avant cela il livre quelques citations intéressantes de Pascal sur les "règles pour les définitions, les axiomes et les démonstrations". Les axiomes de Hilbert (version revue par Greenberg) sont présentés après un petit aperçu historique. Ce sont les axiomes usuels (incidence, ordre, congruence, continuité dont Archimède et Dedekind, parallèles).

Les chapitres suivants étudient les conséquences des axiomes (incidence au chapitre 1, ordre au chapitre 2). Il y a une discussion intéressante sur la notion de modèle. Le chapitre 3 aborde l'étude des angles (à l'aide des axiomes d'incidence et d'ordre). Il y a notamment une discussion plus approfondie des propriétés de convexité (des polygones et particulièrement des quadrilatères).

Le chapitre 4 étudie les conséquences des axiomes de congruence. Il commence à prendre en compte l'axiome des parallèles pour établir la formule donnant la somme des angles du triangle.

Le chapitre 5 traite plus précisément de l'angle droit et de ses conséquences (médiatrices, bissectrices).

Le chapitre 6 aborde succinctement la question des mesures des longueurs et des angles (ici il y a besoin des axiomes de continuité) et revient sur les conséquences de l'axiome des parallèles (notamment sur la somme des angles d'un triangle).

La conclusion reprend les préoccupations didactiques déjà abordées dans l'introduction. Cinq points y sont abordés : le rôle de la figure (avec une analyse du lien didactique entre les "cas de figures" et les axiomes d'ordre et de continuité), le choix d'une axiomatique (il évoque celle d'Annie Cousin-Fauconnet, mais sans s'y rallier clairement), le contrat didactique (quel niveau de rigueur exiger des élèves selon les classes, quelle place pour la démonstration), l'épistémologie de l'enseignant (il plaide pour un enseignement axiomatique de la géométrie pour les futurs maîtres : j'approuve) et enfin, le lien entre démonstration et informatique (rôle des logiciels, Cabri et autres).

c) Critiques.

Je trouve que la problématique didactique de ce livre, telle qu'elle apparaît notamment dans l'introduction et la conclusion, est très intéressante et cela me semble un livre que tous les futurs maîtres devraient avoir lu et médité. La présentation des axiomes de Hilbert est agréable et concise. Je ferai toutefois à ce livre trois reproches :

1) L'auteur met "sous le tapis" (i.e. il n'en parle pas) les choses difficiles et peu agréables de la présentation d'Euclide-Hilbert (les proportions, les aires, la mesure des angles, etc. ; on se reportera au livre de Lion pour mesurer les difficultés cachées). Je trouve que c'est dommage car ce sont des questions qui se posent très vite. Pour illustrer ce que je dis, on notera qu'il n'aborde ni Thalès, ni Pythagore qui sont pourtant des résultats fondamentaux du collège. Il ne fait pas non plus (contrairement à Lion ou à Annie Cousin-Fauconnet), le lien avec les transformations. En réalité, son point de vue semble être plus de convaincre (notamment les (futurs) professeurs) qu'il est possible de donner une présentation axiomatique de la géométrie plutôt que de la développer vraiment.

2) En fait, je conteste, plus fondamentalement, le recours à l'axiomatique de Hilbert comme outil de formation des maîtres (et je vais le répéter plusieurs fois dans ce texte !). Entendons-nous bien. Je pense qu'il pourrait être utile, pour les maîtres, de connaître cette axiomatique (mais c'est évidemment vrai aussi pour celle issue de l'algèbre linéaire). Mais je la trouve trop éloignée de la pratique et de l'intuition géométrique que peuvent avoir les collégiens, notamment en ce qu'elle ne s'appuie pas du tout sur la notion de nombre. Je redirai plus précisément à propos du livre de Lion (qui ne cache rien, lui, des difficultés de cette approche) et dans la conclusion mon désaccord sur l'utilisation de cette axiomatique en formation des maîtres, s'il s'agit d'aller plus loin qu'une sensibilisation. Sur certains points, je pense qu'avec cette axiomatique, la poule aurait à sa disposition une fourchette au lieu d'un couteau, pauvre bête. Bref, je reproche à Arsac de ne pas aller au bout de son souci didactique et de ne pas proposer aux futurs professeurs une axiomatique directement adaptée à l'enseignement du collège. C'est d'autant plus dommage que cette axiomatique existe : c'est celle que propose Annie Cousin-Fauconnet.

3) Enfin, il reste assez discret sur les géométries non euclidiennes (on comparera à Lion sur ce thème).

2. Le livre d'Annie Cousin-Fauconnet.

Le livre d'Annie Cousin-Fauconnet comporte 308 pages et deux parties très distinctes (plus des annexes). Je ne parlerai ici que de la première partie, qui est une tentative de fondation axiomatique de la géométrie du collège. La seconde partie et les annexes portent sur des scénarios d'enseignement de la géométrie au collège. Je ne l'ai pas vraiment lue, mais le peu que j'en ai vu ne m'a pas vraiment convaincu. La raison essentielle, et c'est le choix de l'auteur, est que cette partie s'inscrit dans le cadre des actuels programmes et de leur philosophie d'introduction progressive des transformations. On sait que je préfère une utilisation des invariants et des cas d'égalité, bref, l'option didactique prise ici ne me convient pas et c'est pourquoi je ne l'évoquerai pas.

a) *Principes.*

La partie axiomatique du livre (qui traite à la fois du plan et de l'espace mais je me limiterai ici au cas du plan) présente une grande originalité par rapport aux trois autres livres. En effet, même si A. Cousin-Fauconnet propose une approche axiomatique qui commence comme celle d'Euclide-Hilbert, elle s'en sépare sur deux points fondamentaux. D'abord, elle utilise très vite les nombres en définissant une distance dans le plan (à valeurs réelles). Ensuite elle postule l'existence des

symétries axiales (ou plutôt le fait que ce sont des isométries), ce qui lui permet d'avoir rapidement les transformations (c'est son objectif didactique, ne l'oublions pas).

b) Le plan.

Le chapitre I porte sur les axiomes d'incidence et d'ordre. Il est assez standard (un peu plus simple que chez Hilbert ou Arsac, assez proche de Lion). Dans ce chapitre, comme dans les deux suivants, les résultats valent aussi bien pour la géométrie hyperbolique que pour l'eulidienne.

Dès le chapitre II, A. Cousin-Fauconnet introduit une distance (vérifiant des propriétés de compatibilité avec l'alignement du genre $AC = AB + BC$ si et seulement si $B \in [AC]$). On a donc tout de suite **des nombres**. Il y a aussi un axiome de continuité (l'intersection de deux cercles est non vide quand la distance des centres vérifie ce qu'on pense).

Cet axiome lui permet de définir la symétrie axiale : l'image de M par σ_{AB} est l'unique point M' de l'autre demi-plan qui vérifie $AM = AM'$ et $BM = BM'$. Elle postule alors que cette application est une isométrie.

Cela permet de définir la notion de perpendiculaire, les médiatrices, les bissectrices.

Au chapitre III elle définit la mesure des angles (en appelant ω celle de l'angle plat et en procédant ensuite par dichotomie et passage à la limite, Lebesgue aurait été ravi, cf. [Le]). Elle étudie ensuite les isométries et montre plusieurs points fondamentaux : la transitivité sur les triangles (cas d'égalité), la transitivité sur les drapeaux (un point et une demi-droite issue de ce point) et le fait que les symétries axiales engendrent les isométries (mais, attention, il faut *a priori* des produits de trois symétries, c'est le cas en géométrie hyperbolique). Ce chapitre, qui est très convaincant, se termine par la classification des isométries (définition des rotations et des symétries centrales).

Le chapitre IV aborde la vraie géométrie eulidienne (avec l'axiome des parallèles) et les propriétés familières (mais fausses sans cet axiome) des rectangles, des médiatrices, des angles alternes-internes, des parallélogrammes. Le paragraphe se continue par l'étude des projections et du théorème de Thalès et finit avec les propriétés métriques du triangle et notamment Pythagore. Il n'y a nulle part d'aires ni de longueurs de courbes.

Je saute le chapitre V qui parle de l'espace et je dis juste un mot des chapitres VI et VII qui font le lien avec les vecteurs. A. Cousin-Fauconnet y donne une définition "élémentaire" des vecteurs (longueur, direction, sens) bien adaptée à l'enseignement secondaire et elle retrouve tous les résultats usuels sur les vecteurs et le produit scalaire, faisant ainsi le lien avec la géométrie eulidienne "cartésienne".

c) Critiques.

Je trouve la tentative d'Annie Cousin-Fauconnet tout à fait intéressante sur le plan de la recherche d'une axiomatique adaptée au collège et je suis, pour l'essentiel, d'accord avec ses choix. En particulier, je souscris de manière fondamentale à l'idée d'utiliser les nombres et donc les mesures de longueurs et d'angles. C'est – à mon avis – un progrès fondamental par rapport au temps d'Euclide de disposer des réels et il faut s'en servir. On pourrait d'ailleurs lier la définition des réels et une approche géométrique de la droite (cf. [Le], par exemple).

Je suis aussi assez d'accord avec l'idée de postuler l'existence des symétries (ou le fait que ce sont des isométries). Sur ce point j'irais un peu plus vite aux propriétés de transitivité qui permettent de **prouver** les cas d'égalité, à la manière d'Euclide. Je reviendrai, en conclusion, sur la démonstration d'Euclide par superposition et ce que je propose pour la rendre correcte. Mais finalement, comme on a besoin, de toutes façons, de la symétrie axiale, la méthode d'A. Cousin-Fauconnet qui mène très vite et de manière efficace aux cas d'isométrie me semble excellente.

Je suis un peu plus réservé sur sa définition des angles. Je préférerais, pour ma part, une définition de l'angle à partir de la longueur d'arc, celle-ci étant vue comme borne supérieure des lignes polygonales inscrites (ce n'est pas tout à fait trivial de faire cela sans le postulat d'Euclide, en particulier il faut montrer que ce sup est fini !). Ce qui me gêne dans sa présentation c'est le fait de ne jamais définir la longueur d'arc et de ne pas montrer que la corde est plus petite que l'arc. Un jour ou l'autre il faudra bien faire cela, ne serait-ce que quand on fera de l'analyse (cf. $\sin x/x$). Pas de trace non plus de certains outils importants comme les angles inscrits, et surtout les aires, mais là-encore c'est sans doute son souci d'être proche des actuels programmes.

Je suis aussi d'accord avec le choix de l'auteur de n'introduire l'axiome des parallèles qu'au dernier moment. Mais il aurait été intéressant de montrer ce que donnent les deux situations fondamentales (euclidienne et hyperbolique). On verra que Lion fait cela admirablement.

Par rapport aux prises de positions didactiques de la commission Kahane, le travail d'A. Cousin-Fauconnet (et c'est très intéressant car il n'a pas été écrit dans cette optique) permet de fonder de façon efficace une approche qui privilégie invariants (sauf les aires) et cas d'égalité. En particulier, l'utilisation des nombres évite les contorsions auxquelles doivent se livrer les fidèles de Hilbert.

Bref, je pense que le travail d'A. Cousin-Fauconnet, qui est trop peu connu à mon sens, doit être défendu et popularisé, notamment en formation des maîtres, et qu'il est un outil de travail indispensable pour les (futurs) professeurs.

3. Le livre de Robin Hartshorne.

Il s'agit cette fois d'un gros livre (500 pages). C'est un livre plus directement tourné vers les mathématiques que les autres et, de ce point de vue, il n'y a rien à dire, c'est du solide : Hartshorne est un mathématicien de premier plan (j'en sais quelque chose !).

a) Principes.

Hartshorne part d'Euclide (y compris d'une discussion des propositions des *Éléments*, référencées par leurs numéros, ce qui peut être gênant quand on n'a pas Euclide sous la main !). Il en montre les limites et la façon dont Hilbert a abordé les problèmes posés par les *Éléments*. Il fait une large place aux aspects historiques et épistémologiques. Au passage il résout la plupart des grands problèmes sur le sujet (de l'axiome des parallèles aux constructions en passant par le 3ème problème de Hilbert).

b) Le plan.

Huit chapitres composent ce livre qui comporte aussi de nombreux exercices et beaucoup de figures.

Le chapitre 1 concerne la géométrie d'Euclide. C'est un chapitre un peu bizarre dans la mesure où il est difficile à lire si on n'a pas le texte d'Euclide. Il y a, outre l'aspect historique, une discussion de la méthode axiomatique d'Euclide et de ses limites et une discussion sur les constructions à la règle et au compas et notamment celle du pentagone régulier. Le chapitre se termine par quelques résultats de géométrie postérieurs à Euclide (la concurrence des hauteurs !, la droite et le cercle d'Euler, etc.)

Le chapitre 2 présente les premiers axiomes de Hilbert : incidence, ordre, congruence des segments et des angles avec, en axiome, le premier cas d'égalité. ⁽¹⁾

Il étudie alors les plans hilbertiens (ceux qui vérifient ces axiomes). En particulier, il étudie soigneusement les intersections de droites et cercles (il y a besoin d'un axiome de continuité pour avoir des intersections dans le cas qu'on pense).

Au paragraphe 12 il étudie le plan euclidien (avec l'axiome des parallèles).

Le chapitre 3 s'appelle "Géométrie sur les corps". Il étudie d'abord le plan cartésien $\mathbf{R}^2$ et il prouve le théorème de constructibilité (qu'il attribue à Descartes). En langage moderne : un nombre est constructible à la règle et au compas s'il est dans une tour d'extensions quadratiques. Il aborde ensuite les corps généraux, sans ordre, puis ordonnés et discute des axiomes de congruence et de l'axiome des cercles. Il discute enfin la notion de corps non archimédien (avec des infiniment petits et grands). Pour résumer, ce chapitre montre que les nombres redonnent la géométrie.

Le chapitre 4 s'appelle "Arithmétique des segments". Il commence par une introduction épistémologique passionnante sur les réels (disons au sens des coupures de Dedekind) et leur parenté avec la théorie des proportions d'Euclide. Puis, Hartshorne définit, à partir de considérations géométriques (à la suite de Hilbert) une arithmétique des segments qui lui permet de récupérer une structure de corps ordonné. Il en tire deux applications. D'abord une définition des triangles semblables, puis, le fait qu'un plan hilbertien (avec l'axiome des parallèles) est un plan cartésien. La boucle est bouclée : la géométrie redonne les nombres ! Ce chapitre s'apparente au livre d'Artin (Algèbre géométrique, Gauthier-Villars, 1978) où E. Artin, autre grand mathématicien, analyse le lien entre algèbre et géométrie (il montre, par exemple, que Desargues équivaut à l'associativité du corps et Pappus à sa commutativité).

Le chapitre 5 porte sur les aires. Hartshorne formalise la théorie d'Euclide, centrée sur le découpage et recollement des figures (polygonales seulement), il montre l'existence d'une mesure des aires (à valeurs dans un groupe abélien ordonné) qui a les propriétés usuelles et montre le théorème de Bolyai (deux polygones de même aire peuvent s'obtenir par découpage et recollement). Il passe ensuite au volume et montre notamment la solution négative (due à Dehn) du 3ème problème de Hilbert (comme Bolyai, mais avec des polyèdres).

⁽¹⁾ J'appelle premier cas d'égalité celui qui fait appel à deux côtés et un angle, SAS dirait Hartshorne (side-angle-side). C'est conforme à l'ordre d'apparition de ce cas dans Euclide ou Hilbert, mais pas avec la tradition de l'enseignement secondaire français du siècle dernier.

Le chapitre 6 porte sur le lien entre constructions et théorie des corps. Il comprend la résolution négative de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, la construction du 17-gone régulier et une partie très originale sur les constructions avec le compas et la règle "marquée" (il montre qu'avec cet outil, la duplication, la trisection, la construction de l'heptagone sont possibles).

Le chapitre 7 parle de géométries non-euclidiennes. Il commence par une discussion historique et mathématique, notamment autour des quadrilatères de Saccheri : $ABCD$ avec $(AC) \perp (AB)$, $(BD) \perp (AB)$ et $AC = BD$ (un rectangle ? vous n'y êtes pas !) et ce qu'il appelle la géométrie "neutre". Puis, après un passage sur l'inversion il étudie le modèle du demi-plan de Poincaré pour la géométrie hyperbolique. Là, il commence à y avoir des choses vraiment compliquées que je n'ai pas lues !

Enfin, le chapitre 8 porte sur les polyèdres, notamment les cinq polyèdres réguliers, mais aussi la formule d'Euler ($s - a + f = 2$) et le théorème de rigidité de Cauchy. Le livre se termine sur les polyèdres semi-réguliers et les groupes de symétries des polyèdres.

c) Critiques.

La longueur du paragraphe précédent montre assez combien ce livre est riche. De plus, Hartshorne écrit de manière très claire et très précise. La rédaction, la présentation sont soigneuses : c'est un grand professionnel. Je n'ai pas vraiment de critiques, sauf qu'il est un peu hors de mon sujet qui est de fournir aux professeurs de collège et de lycée un arrière-plan mathématique solide. Certes il y a tout pour cela dans le livre d'Hartshorne, mais il y en a sans doute trop pour qu'il soit immédiatement utilisable. C'est un très beau et très bon livre de mathématiques, que l'on peut utiliser comme référence (il y a une bibliographie très complète).

4. Le livre de Georges Lion.

C'est un livre de 222 pages, avec 600 exercices (résolus ou munis d'indications : près de 70 pages de solutions). Rien que pour cela ce livre est indispensable !

a) Principes.

Lion est un fervent supporter d'Euclide et de Hilbert. Il présente donc une axiomatique très (trop, à mon sens) proche de celle de Hilbert, même s'il ne rentre pas dans certains raffinements de celui-ci. Une des originalités du livre est de donner, dès le début, un modèle de géométrie autre que celui du plan euclidien, à savoir la géométrie hyperbolique du demi-plan de Poincaré.

b) Le plan.

La première partie (Ch. 1,2,3) porte sur la géométrie préeuclidienne (qui comprend la géométrie euclidienne et l'hyperbolique, mais pas l'elliptique à cause des axiomes d'ordre).

On y trouve (cf. Ch. 1) les postulats de base (postulats d'appartenance, d'ordre, de congruence, à l'exception du postulat des parallèles), avec notamment, pris comme axiome, le premier cas d'égalité des triangles (deux côtés et un angle). Attention, dans cette approche hilbertienne, longueurs et angles ne sont pas associés à des nombres, mais sont définis axiomatiquement à partir de relations d'équivalence

(“avoir même longueur”, etc.). C’est un des points où je regrette que Lion n’ait pas rompu le cordon ombilical avec Euclide-Hilbert.

Dès le début, le demi-plan de Poincaré est présenté comme modèle de cette géométrie (et les figures sont faites dans le cas euclidien et dans le cas hyperbolique, ce qui est vraiment très intéressant).

Le chapitre 2 donne les résultats communs à ces géométries préeuclidiennes (inégalité triangulaire, les deux autres cas d’égalité, l’existence des milieux, des bissectrices, des médiatrices, les propriétés du triangle isocèle et les premières propriétés du cercle).

Le chapitre 3 étudie les isométries préeuclidiennes et montre notamment que les réflexions sont des isométries (en utilisant les cas d’égalité, bien sûr). Attention, il y a deux cas très différents selon que l’on est en géométrie euclidienne ou hyperbolique : en géométrie euclidienne le groupe des déplacements contient un gros sous-groupe distingué (les translations) alors qu’en hyperbolique, il est simple. Je trouve que, sur ce point, la discussion comparative n’est pas poussée assez loin (il y a tout pour cela, notamment en exercices, mais le lecteur a du travail et (je parle pour moi) il aurait aimé avoir quelques axes plus clairement indiqués !)

La deuxième partie aborde la géométrie euclidienne (la vraie, avec l’axiome des parallèles). Elle regroupe les chapitres 4,5,6.

Dans le chapitre 4, Lion étudie les conséquences immédiates de l’axiome d’Euclide, à commencer par la somme des angles d’un triangle. Deux résultats essentiels viennent alors : la droite des milieux et l’angle inscrit et leurs conséquences (propriétés du parallélogramme et de cocyclicité).

Le chapitre 5 étudie les isométries euclidiennes, à commencer par les translations. Celles-ci sont vues comme composées de deux symétries centrales (on n’a pas de vecteurs, bien entendu, d’ailleurs le mot n’existe pas dans ce livre !). Le point suivant est la définition des angles orientés, vus comme éléments du quotient des déplacements par les translations. C’est une méthode un peu abstraite à mon goût. On obtient la classification des isométries du plan à la fin du chapitre.

Le chapitre 6 porte sur la définition des proportions. Bien entendu, faute d’avoir des longueurs qui sont des nombres, leurs rapports doivent être définis géométriquement (comme chez Hilbert, à partir des angles, ou de leurs tangentes, si on veut). Lion montre ensuite Thalès (par une démonstration qui ne me plaît pas du tout : beaucoup trop “euclidienne” au sens où il utilise bissectrices, orthogonalité, etc. et pas assez proche d’Euclide qui utilise les aires !) et il finit par avoir péniblement une arithmétique qui ressemble fort à celle des réels (ou plutôt d’un sous-corps des réels, cf. ci-dessous). L’étape suivante concerne les triangles semblables, puis les homothéties.

La troisième partie s’intitule “géométrie euclidienne constructive”. Elle commence (Ch. 7) par la définition du groupe des aires. Là encore, faute d’utiliser les nombres, cela mène à des contorsions pour définir la relation avoir même aire et je trouve qu’on est bien loin de l’intuition qu’on peut attacher à cette notion. On peut alors prouver Pythagore. Pour aller plus loin il faut être sûr d’avoir assez de réels ce qui est acquis au moyen du postulat du compas (une droite dont la distance au centre est plus petite que le rayon coupe le cercle). Cela permet de retrouver deux notions géométriques importantes et injustement oubliées : la puissance d’un point par rapport à un cercle et les pinces de cercles.

Le chapitre 8 porte sur les similitudes et les inversions. Il est bref, mais il y a 80 exercices à faire !

Enfin le chapitre 9 concerne les coniques : définition par foyer et directrice, tangentes, diamètres, etc. On notera que, des quatre livres, c'est le seul qui aborde ce sujet.

Le livre se conclut par deux annexes : l'une sur le modèle de Beltrami du plan hyperbolique, l'autre, plus algébrique, sur les corps pythagoriciens et euclidiens.

c) Critiques.

Il se trouve que je connais Georges Lion, que je l'apprécie beaucoup et que je le considère comme un excellent géomètre. Il est clair qu'il a fait un gros travail pour mettre Hilbert à la portée d'un étudiant actuel et que son livre donne un panorama presque complet de la géométrie "élémentaire" (vecteurs exceptés). J'aime beaucoup son livre, mais j'ai tout de même quelques réserves.

J'ai d'abord une critique de forme. Je trouve que Lion (et son éditeur) n'ont pas été assez méticuleux dans la finition du livre. Il y a de nombreux défauts typographiques (insupportables de nos jours), des coquilles, des imprécisions, des notations non définies, etc. cela finit par agacer le lecteur un peu maniaque (et c'est mon cas).

Par ailleurs, j'ai une critique fondamentale (qui vaut aussi pour [A] et [H]) : je trouve que ce livre colle trop à Hilbert (dont c'est une excellente approche, de par sa concision) sur plusieurs points. Le premier est le refus d'utiliser les nombres. Je trouve très pénible d'avoir des longueurs et des angles définies comme classes d'équivalence abstraites, sans aucune référence aux mesures. Je préfère de beaucoup le point de vue d'Annie Cousin-Fauconnet. Cela devient carrément insupportable quand il s'agit de parler de rapports de longueurs et c'est encore plus pénible (si c'est possible) dans le cas des aires. Lion a le mérite de faire vraiment les choses et de ne pas hésiter à mettre les mains dans le cambouis et cela me permet de confirmer ce que je disais déjà à propos du livre d'Arsac : je ne suis pas d'accord avec cette présentation. Je vais y revenir en conclusion.

Je conteste aussi vivement un autre point, c'est le fait de prendre, comme le fait Hilbert, le premier cas d'égalité comme axiome. Bien entendu, pour Hilbert cela s'impose car il faut corriger la pseudo-démonstration d'Euclide sur ce point. Mais, de ce point de vue, je préférerais un traitement plus proche d'Euclide et de la "démonstration" qu'il donne de ce cas d'égalité, voir ma conclusion ci-dessous.

Tout cela ne doit pas faire oublier les points très positifs dans le livre de Lion (outre le fait qu'on a le droit de ne pas partager mes objections) : des démonstrations complètes, souvent élégantes, le parti pris de donner dès le début le modèle de la géométrie hyperbolique et de le suivre tout au long des trois premiers chapitres (y compris dans les dessins) et la profusion d'exercices qu'il contient. Tout cela en fait un outil de travail indispensable.

5. Conclusion.

Les quatre livres proposés ci-dessus sont tous très intéressants. La meilleure preuve c'est que leur lecture m'a conduit à repenser ma vision des fondements de l'enseignement au collège. Je précise donc ma position sur ce point. Soyons clair, je n'ai pas changé d'avis, je persiste et signe dans la défense des idées didactiques

qui sont énoncées dans le rapport d'étape de la commission : développer l'usage des invariants, celui des cas d'isométrie et de similitude, etc. Ce n'est pas cela qui est en cause.

La question qui m'intéresse ici est plutôt celle de la formation des maîtres qui permettra un enseignement dans la ligne précédente. Je souscris sur ce point à ce que dit Arsac sur l'inappropriation de l'état actuel des choses (l'usage exclusif de l'algèbre linéaire ou la poule et son couteau). Il faut donc aussi montrer à nos futurs professeurs une autre approche de la géométrie, et, au moins, les initier à un autre système d'axiomes. Mais, à lire Arsac, Hartshorne et Lion, je suis de plus en plus convaincu qu'il n'est pas indispensable, voire pas souhaitable, de revenir à Euclide et surtout à Hilbert (la poule et sa fourchette).

Le principe que je mettrais en avant dans cette recherche d'un système d'axiomes de la géométrie qui soit pertinent pour l'enseignement du collège est le suivant :

Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes, mais aussi n'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver.

(Ce n'est pas moi qui dit cela mais Pascal, cf. [A] ! *De l'esprit géométrique II.*)

S'agissant du collège cela signifie que nos élèves, sortant de l'école élémentaire ont déjà une intuition des nombres et de la géométrie et que je propose de m'appuyer dessus et cela notamment sur trois points (je n'évoque pas ici les points qui sont aussi à la base des axiomes de Hilbert et sur lesquels je suis d'accord, point, droite, ordre, etc.) :

- les élèves connaissent les nombres entiers et décimaux,
- ils ont l'intuition du mouvement et la pratique du pliage,
- ils ont une intuition de l'aire comme place occupée dans le plan.

Je propose donc de fonder sur ces trois constatations un système d'axiomes pour le collège (en réalité, pour les (futurs) professeurs).

Le premier point crucial est celui des nombres sur lequel je vais, comme Annie Cousin-Fauconnet, me séparer d'Euclide et de Hilbert. ⁽²⁾

Avant de consommer ce divorce d'avec Euclide-Hilbert, il faut discuter un peu. Pourquoi les grecs n'utilisaient-ils pas les nombres en géométrie ? Il y a sans doute des raisons philosophiques (la pureté des méthodes géométriques ?). Mais il y a surtout, à mon avis, le fait que les grecs ne disposaient pas d'une bonne notion **géométrique** de nombre. Je m'explique : j'entends par géométrique, s'agissant de la géométrie de la droite, une notion de nombre avec un **ordre** et un ordre lisible. Or, au-delà des entiers, les grecs disposaient des rationnels (et encore leur statut de nombre n'est pas clair) et ceux-ci se prêtent très mal à la comparaison (allez, sans réfléchir : lequel est le plus grand de $\frac{47}{56}$ et de $\frac{81}{97}$?). Pire, s'agissant des irrationnels ils avaient à leur disposition la théorie des proportions (Euclide Livre V), donc, en notre langage, quelque chose qui ressemble aux coupures de Dedekind. Ce n'est pas vraiment facile de calculer avec ça ! D'ailleurs, les grecs ne calculaient pas en géométrie (il ne faut pas oublier que le th. de Pythagore est formulé en

⁽²⁾ Un argument supplémentaire en faveur des nombres est le suivant : avec le système d'axiomes de Lion par exemple, l'existence d'heptagones réguliers n'est pas assurée !

termes d'aires) et cette carence n'est pas étrangère à leurs difficultés face à des problèmes où le calcul est essentiel (par exemple les problèmes de constructions de degré ≥ 3 , cf. duplication, etc. où Descartes fait merveille). Ce qui est un peu curieux, et doit nous faire réfléchir, c'est qu'ils érigeaient en quelque sorte le défaut de leur mathématique (par ailleurs remarquable, ne me faites pas dire ce que je n'ai pas dit) en dogme. En effet, Platon (La République Livre VII, 525) se moque des calculateurs "qui changent l'unité pour de la menue monnaie" et dit que là où ils divisent, les savants multiplient (voir l'exercice ci-dessus avec les fractions !)

Mais alors, me direz-vous, que faire ? Il se trouve que nous avons maintenant un outil essentiel qui permet de calculer et notamment de comparer les nombres : les nombres décimaux (Stévin 1585) et que ceux-ci donnent aussi les réels avec les développements décimaux infinis.⁽³⁾ L'arrivée des décimaux est une révolution épistémologique fondamentale et ce n'est sans doute pas un hasard si Descartes vient peu après, avec le succès que l'on sait pour aborder les problèmes laissés en suspens par les grecs (duplication, trisection, ...) C'est aussi une révolution didactique car les décimaux sont un outil que les enfants connaissent (je n'ai pas dit que c'était facile, mais ...).

Bref, si l'on peut comprendre les contorsions d'Euclide et celles de Hilbert (dont l'objectif était de légitimer Euclide), je ne vois pas pourquoi il serait nécessaire, même pour des futurs profs, d'en passer par là aujourd'hui, d'autant qu'on sait qu'au bout du compte (cf. [H] Ch. 4) les nombres sont dans Euclide comme le ver est dans le fruit. Comme mon avis là-dessus n'est sans doute pas assez autorisé j'y ajouterai celui de Lebesgue qui dans l'introduction de [Le] dit à ce sujet des choses vigoureuses, limpides et passionnantes, allant jusqu'à proposer de supprimer le chapitre des fractions de l'enseignement de la classe de Mathématiques (la TS de 1930) (là, il exagère !). Je cite juste une phrase : *Notre enseignement n'utilise pas encore pleinement ce fait historique, le plus important peut-être de l'histoire des sciences : l'invention de la numération décimale.*

Bref, en conclusion : oui à Stevin, Descartes, Lebesgue et Annie Cousin-Fauconnet !

Si je me suis délibérément écarté d'Euclide sur le premier point je vais au contraire me rapprocher de lui (et m'écarter de Hilbert) sur les deux autres.

Il y a d'abord la question de la démonstration des cas d'égalité que j'ai évoquée plusieurs fois ci-dessus. On sait qu'Euclide prétend prouver le premier cas d'égalité en utilisant la méthode de superposition (si on a ABC et $A'B'C'$ on transporte A en A' , puis la demi-droite $[AB)$ sur $[A'B')$, etc.) Bien entendu c'est une pseudo-démonstration car les notions de mouvement, déplacement, superposition n'ont pas été définies et n'ont pas de sens dans sa théorie. De plus, elle est incorrecte (Euclide, bizarrement oublie le cas où le $A'B'C'$ déplacé est symétrique de ABC par rapport à (AB)). Pour remédier à ce défaut Hilbert (dont l'objectif n'est pas didactique mais mathématique : donner un système d'axiomes inattaquable) prend le premier cas d'égalité comme axiome, suivi en cela par Arsac, Hartshorne et Lion. Pourtant, je suis persuadé (pour l'avoir vécu jadis) que la "démonstration" d'Euclide est de nature à convaincre n'importe quel collégien de la validité des cas d'égalité. La raison à cela est simple : ils ont l'intuition de l'existence de

⁽³⁾ Je n'ai jamais compris pourquoi, plutôt que d'embêter les gens avec des coupures ou des suites de Cauchy, ce n'est pas ainsi qu'on construit les réels (quand on les construit, ce qui est une autre histoire ...).

déplacements (au sens intuitif de mouvements) qui permettent de transporter un point sur un autre. Je serais donc, en vertu des principes énoncés ci-dessus, en faveur d'une axiomatique où les cas d'égalité ne soient pas des axiomes, mais où la preuve d'Euclide en soit vraiment une. Bien entendu, c'est le cas avec l'axiomatique des espaces affines et vectoriels, disqualifiée par ailleurs. Si on analyse la preuve d'Euclide, de quoi a-t-on besoin ? D'un axiome qui assure l'existence et la transitivité de certaines opérations (appelons les "mouvements" pour faire plaisir à Rémi Langevin et à d'autres) sur les couples point-demi-droite issue du point. Cet axiome me semble assez naturel. D'ailleurs, cette idée de postuler l'existence de mouvements n'est pas nouvelle. C'est ce que proposait déjà Hoüel au XIX^{ème} siècle, cf. [Bk] et ce qu'analyse d'ailleurs Hartshorne avec l'axiome (ERM) (Existence of rigid motions).

En vérité, comme il est aussi indispensable, pour la preuve d'Euclide, d'avoir, à côté des déplacements, l'existence des symétries axiales, le système d'Annie Cousin-Fauconnet (qui mène très vite à l'assertion de transitivité voulue) fonctionne parfaitement pour notre objectif et je m'y rallie avec conviction.

Le dernier point dont je voudrais parler est la notion d'aire. C'est un point où les successeurs d'Euclide oublient leur maître ! En effet, dès le premier Élément (Prop. 35) et constamment ensuite, Euclide utilise la notion d'aire (qu'il ne définit pas et manipule parfois avec des mots trop imprécis : il parle notamment de triangles égaux pour désigner des triangles de même aire !). Il l'utilise pour prouver des résultats qui concernent les aires, mais aussi pour faire d'autres démonstrations (par exemple Thalès, cf. Livre VI, Prop. 2 !). Or, aucun des quatre livres ne le suit vraiment sur ce point, pourtant utile (cf. [P]). Arsac et Cousin-Fauconnet sont muets sur les aires, Hartshorne discute du fondement de la théorie mais pas vraiment de ses applications. Seul Lion aborde vraiment la question (avec une définition pénible due à son refus du nombre) et en donne des applications (Céva, Pythagore) mais pas encore assez à mon goût (cf. Thalès).

Un autre point me gêne beaucoup c'est l'absence dans tous les livres de la mesure du périmètre du cercle et de l'aire du disque (serait-ce un reste des injonctions de Dieudonné ? : ... *le calcul infinitésimal doit absorber deux parties traditionnelles de la "géométrie" qui n'ont rien à y faire : le calcul des longueurs, aires et volumes et la "mesure" des angles.*). Aucun de nos auteurs ne définit la longueur du cercle et tous (sauf A. Cousin-Fauconnet et Hartshorne dans ses variantes fortes) proposent des systèmes dans lesquels les polygones réguliers non constructibles (par exemple l'heptagone) n'ont pas d'existence. Ils ignorent aussi tous avec superbe l'aire du disque. Contrairement à Dieudonné, je pense pourtant que c'est de la géométrie, au sens étymologique du terme.

Bref, il me semble important que parmi les axiomes initiaux on mette aussi ceux des aires. Ces axiomes seront superflus car on peut évidemment montrer (en géométrie euclidienne) l'existence des aires. Le livre de Lebesgue [Le] déjà évoqué en est une parfaite illustration. Mais, pour les enfants c'est un outil dont il serait dommage de se priver.

Voilà, j'ai été très long, mais j'espère vous avoir donné envie de lire tous ces livres et vive la géométrie !

Annexe 10

Des exemples

Présentation par Monique Pariès

Des exemples

Les exemples dont nous parlons dans cette partie ont été proposés par des enseignants qui suivent le master professionnel (« métier de formateur d'enseignants de mathématiques »), et à qui il avait été demandé de décrire rapidement des mises en œuvre d'activités d'introduction de certaines notions. Nous en avons retenu deux, que nous présentons en tentant de voir sur quelle « valeur ajoutée » on joue.

Il existe dans la littérature un certain nombre d'autres exemples dans le second degré (voir notamment Lattuati et al, 1995).

1. Introduction, en classe de quatrième, de la division par une fraction et d'inverse d'une fraction

L'ancien

Nous regardons les contenus qui permettent d'aborder l'activité proposée aux élèves.

Ils concernent deux domaines : le calcul fractionnaire et la proportionnalité.

Le travail sur les écritures fractionnaires est abordé tout au long du collège. Le sens d'une écriture fractionnaire a été étendu. Introduite en relation avec la signification « partage » au cycle 3 de l'école primaire ($\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$), l'écriture fractionnaire a été étendue en sixième comme « quotient » ($\frac{a}{b}$ est le nombre dont le produit par b est égal à a). Elle exprime, en cinquième, la relation entre une partie d'une population et la population totale.

En classe de sixième la simplification des fractions a été abordée et en cinquième émerge la notion de fraction irréductible. Le travail sur les sommes et les produits de nombres écrits sous forme fractionnaire est également conduit dès la classe de cinquième puis poursuivi en quatrième.

En ce qui concerne la proportionnalité, les commentaires du programme spécifient « aux diverses procédures étudiées en classe de sixième et cinquième pour rechercher une quatrième proportionnelle, s'en ajoute une nouvelle, communément appelée « produit en croix » ». Cette partie du programme a déjà été étudiée dans la classe où est proposée l'activité ci-dessous.

Une dernière propriété, abordée en quatrième demande à être connue des élèves et concerne l'équivalence entre l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Le nouveau

Il s'agit de donner un sens, par cette activité, au quotient d'un nombre par une fraction et de mettre en place la technique pour effectuer ce quotient. Est introduit ensuite la définition de l'inverse d'un nombre non nul.

Activité introductive

Énoncé de l'exercice proposé :

Répondre aux questions en utilisant ou non des tableaux de proportionnalité

1. On a récolté 350 kg de pommes et on en a vendu les $\frac{2}{7}$. Quelle est la masse des pommes vendues ?
2. On a une récolte de 350 kg de pommes, on en a vendu 210 kg. Quelle fraction de la récolte a-t-on vendue ?
3. On a une récolte de pommes. On en a vendu 280 kg et cela correspond à $\frac{4}{7}$ de la récolte.

Combien en avait-on au départ ?

Solutions attendues par l'enseignant

Les élèves peuvent utiliser diverses méthodes pour résoudre les deux premières questions :

- Question 1
 - prendre les $\frac{2}{7}$ de 350 et donc effectuer le calcul : $\frac{2}{7} \times 350$
 - utiliser un tableau de proportionnalité et déterminer une quatrième proportionnelle avec deux raisonnements possibles :

350	?
1	$\frac{2}{7}$

$$? = \frac{2}{7} \times 350$$

ou

350	?
7	2

350 correspondent à 7 parts.

$$? = \frac{2 \times 350}{7}$$

- Question 2
 - écriture du nombre fractionnaire $\frac{210}{350}$ et simplification
 - Calcul d'une quatrième proportionnelle

350	210
1	?

En ce qui concerne la résolution de la question 3, aucun calcul ne donne le résultat directement. Le recours à un tableau de proportionnalité permet soit d'en moduler l'écriture sous deux formes comme dans la question 1 et d'arriver par analogie à une formulation du résultat du quotient d'un nombre par une fraction.

?	280
1	$\frac{4}{7}$

$$? = \frac{(280 \times 1)}{\frac{4}{7}}$$

?	280
7	4

$$? = \frac{280 \times 7}{4}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{280 \times 7}{4} = \frac{280}{\frac{4}{7}}$$

Analyse a priori. Il s'agit d'amener les élèves à donner du sens à l'inverse d'une fraction et à le calculer. Pour cela, les élèves ont à identifier, dans un cas numérique particulier, une division par une fraction, grâce à la résolution d'une équation, et, grâce à un calcul annexe, fait en plusieurs étapes à partir de ce qu'ils connaissent déjà, ils ont à donner le résultat numérique cherché. Autrement dit, on introduit l'inverse d'une fraction comme extension de la division à de nouveaux nombres. Il faudra institutionnaliser la règle de calcul mise à jour sur le cas particulier.

A posteriori, les élèves ne peuvent reconnaître une division que de la forme $ax = b$. Sauront-ils étendre ce cas à a fraction ? En revanche, ils peuvent penser à multiplier ou diviser les deux membres de l'égalité obtenue par un même nombre. Mais l'identification du résultat numérique et de l'inverse restent problématiques.

2. Introduction des puissances fractionnaires.

L'ancien

Le programme de la classe de première indique pour la partie consacrée au chapitre information chiffrée et suites numériques, pour la partie "taux d'évolution" que les élèves doivent être capable de déterminer le taux d'évolution global connaissant deux taux d'évolution. Il est précisé qu'à ce stade, il s'agit de traiter des exemples numériques et qu'aucune formule n'est exigible, l'outil indispensable étant le taux multiplicateur $1+t$.

Le nouveau

Pour la classe de terminale, concernant cette partie “taux d'évolution”, les élèves ont à connaître les notions de taux d'évolution moyen et de moyenne géométrique. La notation $a^{1/n}$ est introduite en liaison avec l'analyse.

Énoncé

Une quantité augmente de 5% la première année, puis de 15% la deuxième, puis de 25% la troisième. Quelle est l'augmentation annuelle moyenne ?

Le premier essai des élèves, utilisant leurs connaissances de première est de calculer la moyenne arithmétique des trois taux d'intérêt (15%). Or la vérification à partir d'un exemple numérique (avec 100) met en défaut cette méthode de calcul :

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 1,05 & & \times 1,15 & & \times 1,25 & \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ 100 & & 105 & & 120,75 & & 150,9375 \\ \\ \text{et} & \times 1,15 & & \times 1,15 & & \times 1,15 & \\ & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \\ 100 & & 115 & & 132,25 & & 152,0875 \end{array}$$

les résultats sont différents.

Cette réponse ne convient pas.

Le professeur demande alors aux élèves : que dire du taux t cherché ?

$$\begin{array}{ccc} \times 1,05 & \times 1,15 & \times 1,25 \\ \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} \\ \times(1+t) & \times(1+t) & \times(1+t) \\ \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} \end{array}$$

$$(1+t)^3 = 1,05 \times 1,15 \times 1,25.$$

Le professeur introduit (ou fait le lien avec la partie analyse déjà traitée) la puissance $1/3$ comme l'outil permettant de résoudre cette équation d'abord par extension des propriétés des exposants entiers puis en utilisant, pour le calcul effectif, la touche $\frac{1}{3}$ de la calculatrice.

$$((1+t)^3)^{1/3} = (1,05 \times 1,15 \times 1,25)^{1/3}$$

d'où $1+t$ puis t .

Analyse a priori : la notion est introduite comme Réponse à un Problème.

Il s'agit de calculer des pourcentage enchaînés (adaptation de type A1 des connaissances sur la proportionnalité) puis d'étendre la notion de puissance d'un nombre par nécessité de résoudre l'équation. La question est dévolue aux élèves – pas la réponse !

TITRE :

Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée – quelques exemples.

AUTEUR/S :

M.Pariès, N.Pouyanne, A. Robert, E. Roditi, M. Rogalski

RESUME :

Activités d'introduction, cours, exercices, problèmes... A quoi correspond cet ordre actuel, quasi immuable, des chapitres des manuels de mathématiques du secondaire ? Est-ce que toutes les notions mathématiques à enseigner sont « analogues » et doivent être travaillées de la même façon ? Y a-t-il lieu de commencer certains chapitres par « faire un cours » ? Manque-t-il certains exercices ? Comment élaborer des exercices suffisamment variés ? Y a-t-il lieu de proposer des activités transversales, qu'on ne peut pas « ranger » dans un chapitre de manuel ? Comment faire travailler le symbolisme spécifique à certaines notions ?

Dans ce cahier, sans répondre à toutes les questions précédentes, nous complétons cependant les outils déjà introduits en didactique des mathématiques (rappelés au fur et à mesure) en indiquant des moyens systématiques pour « donner du relief » aux mathématiques enseignées, par delà l'épistémologie même de ces notions et leurs enjeux scientifiques : il s'agit de contribuer à enrichir les choix à priori des enseignants, au quotidien et à plus long terme, en ce qui concerne les contenus mathématiques qu'ils proposent aux élèves et la manière de les faire travailler, en leur donnant des moyens de s'orienter dans le paysage mathématique et des repères pour adapter les activités des élèves (surtout en classe) aux spécificités des mathématiques visées par l'enseignement et aux difficultés des élèves déjà connues.

Nous développons quelques exemples, notamment autour de la géométrie, de l'intégration, de l'algèbre élémentaire, des fonctions, notamment en annexes. Nous livrons aussi quelques résumés de la littérature professionnelle sur ces sujets.

MOTS CLES :

Notions mathématiques et types de notions, domaines de travail en mathématiques, niveaux de conceptualisation, formalisation, représentations, local et global, géométrie, intégration, algèbre élémentaire, fonctions.