INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

52

Janvier 2006

CAHIER DE DIDIREM

MASTER DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
OPTION RECHERCHE

Une première étude comparative de l'influence des environnements de géométrie dynamique et papier-crayon sur la constitution des espaces de travail géométriques des élèves de collège

Par

Hélène GOSSET

Directeur : Alain KUZNIAK

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

MASTER DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES OPTION RECHERCHE

Une première étude comparative de l'influence des environnements de géométrie dynamique et papier-crayon sur la constitution des espaces de travail géométriques des élèves de collège

Par

Hélène GOSSET

Directeur : Alain KUZNIAK

SOMMAIRE

I. D'une pratique en salle informatique avec des élèves à la démarche du chercheur

Le fait de choisir de travailler pour le mémoire de master de didactique sur la géométrie dans le cadre des espaces de géométrie dynamique (EGD), provient d'une expérience professionnelle à la fois comme professeur de mathématiques, notamment en ZEP /zone sensible et comme formatrice dans le domaine des TICE en mathématiques.

I.1. Une première expérience d'enseignement en établissement difficile

Nous avons été nommée en premier poste dans un collège classé sensible et en ZEP, de l'académie de Créteil. Il a donc fallu réagir rapidement au besoin de mettre les élèves au travail pour neutraliser les débordements qui découlent de l'inactivité et de l'ennui dans une salle de classe.

Une des premières difficultés consistait à détourner les regards des élèves, qui par la disposition habituelle des salles de classe sont fixés sur le professeur, vers les tâches mathématiques ; en effet, il nous est rapidement apparu que les élèves concentraient davantage leur attention sur le professeur lui-même que sur ce qu'il tentait de leur apprendre. Cela provenait en partie de ce que le contenu du cours ne correspondait pas assez à ce qu'il est raisonnable d'exposer à des élèves de collège, mais surtout au fait que ces élèves ne se sentaient pas concernés par le contenu du cours. Or, lorsque le professeur est l'objet de tous les regards, sans qu'une autre activité n'occupe les élèves, le professeur devient la cible des jeux, moqueries, violences et autres indisciplines. La première parade à cette situation a alors été de faire travailler les élèves par groupes : l'organisation géographique obligeait physiquement les élèves à regarder autre chose que le professeur et à se sentir directement concernés par les interventions du professeur dans le groupe. ; de plus les violences engendrées par des échecs aux tâches demandées, ne se portaient plus systématiquement sur le professeur, mais sur le travail lui-même ou parfois … sur les autres élèves du groupe ! L'efficacité dans le travail ainsi que dans la gestion de la classe atteint avec ce mode de travail, nous a alors incitée à penser que l'utilisation des différents logiciels qui nous avaient été présentés à l'IUFM, pourraient être une alternative adaptée et efficace pour un réel travail mathématiques. Une fois les problèmes matériels de vols, de détérioration du matériel, ou tout simplement de gestion du travail en salle informatique, réglés, l'efficacité de ce nouvel outil s'est avéré remarquable. En effet, comme pour le travail en groupe, l'attention des élèves était détournée du professeur vers la machine et via cette machine, vers la tâche mathématique. Néanmoins, après quelques temps, nous avons pu distinguer deux sortes d'activités effectuées en salle informatique : d'une part le travail sur des bases de données d'exercices (comme SMAO) et d'autre part le travail sur logiciel de géométrie (comme géoplan ou cabri). Pour le premier type d'activités, la gestion était relativement simple, les élèves se mettant très vite au travail sur les ordinateurs, pour « jouer » de manière répétitive aux petits exercices mathématiques qui leur étaient proposés ; de plus ce travail devenait rapidement satisfaisant pour les élèves, car après plusieurs essais, ils étaient assez nombreux à obtenir de bons scores de réussite. Néanmoins, ce type de travail ne semblait pas améliorer les résultats des élèves, sauf peut être lors de révision d'examens comme pour le brevet des collèges en 3ème. Le deuxième type d'activités nous semblait beaucoup plus propice à une véritable activité mathématique. Cependant, les différentes séances sur logiciel de géométrie dynamique avaient un succès inégal auprès des élèves et un impact sur l'acquisition des connaissances très variable.

Après plusieurs années d'utilisation des logiciels, nous avons acquis la conviction que les logiciels de géométrie dynamique étaient *un plus*[1] pour l'enseignement de la géométrie, mais nous avions également conscience que les séances demandaient une très grande préparation et que l'outil n'était pas le seul outil adapté à la géométrie du collège. Par ailleurs, notre expérience confirmait que le fait de travailler en salle informatique ne constituait pas à lui seul une amélioration du travail des élèves et de l'acquisition de leurs connaissances géométriques ; le choix des activités et l'accompagnement des élèves étaient autant d'éléments fondamentaux à la réussite de séances en salle informatique. Ces constatations reposaient uniquement sur six années d'expérience et n'étaient pas partagées par tous les collègues de l'établissement. Ces derniers trouvaient en particulier qu'il manquait tout un côté à l'utilisation des logiciels : les élèves en utilisant des logiciels, ne manipulaient plus les instruments de géométrie comme le rapporteur et cela leur paraissait une vraie perte pour l'enseignement de la géométrie. Le fait de rejeter l'utilisation des logiciels au motif que cela empêche l'acquisition de la manipulation du rapporteur, nous paraissait assez dépassé car il nous semblait, qu'indépendamment de nos propres constatations sur les séances utilisant les logiciels, en cette fin de XX^{ème} siècle, seuls les élèves de collège étaient amenés à utiliser le rapporteur . Nous pensions que compte tenu du monde dans lequel les élèves sont plongés et

[1] Nous employons délibérément ce terme, très peu précis, car il reflète bien le fait qu'à cette étape de la réflexion nous ne cherchions pas à analyser quels étaient les apports de ces logiciels en classe. Notre travail d'enseignante était facilité et cela nous paraissait bien suffisant.

de leurs occupations futures, l'utilisation d'EGD devait nécessairement être envisagée. Et si ce changement d'enseignement devait se faire au détriment de l'acquisition de l'utilisation du rapporteur, c'était sans gravité. Nous avons fréquemment rencontré cette opposition entre la manipulation d'instruments de géométrie et l'utilisation de logiciel de géométrie dynamique lors de discussions avec d'autres enseignants.

I.2. Une seconde expérience d'enseignant et la confrontation au monde de la formation

Nommée en second poste dans l'académie de Paris, en collège et lycée, de zone sensible, nous avons été très surprise de constater qu'aucun enseignant de mathématiques n'utilisait la salle informatique, alors que l'établissement était parfaitement équipé et que les élèves étaient beaucoup plus disciplinés que dans le premier établissement. Nous avons rapidement repris l'habitude de travailler en salle informatique en particulier pour y traiter des exercices de géométrie. Bien que *convaincue* de l'efficacité de ce travail, nous n'arrivions pas à amener d'autres collègues à utiliser la salle informatique. La difficulté à transmettre la *conviction* de l'efficacité de ce travail provenait en grande partie du fait qu'il s'agissait justement d'une *conviction* ne reposant que sur une expérience personnelle, sans argument objectif qui permettrait de justifier le chamboulement des pratiques que pouvait engendrer cette nouvelle forme de travail. La difficulté à convaincre d'autres enseignants d'utiliser la salle informatique, était d'autant plus grande que les élèves travaillaient correctement en salle « classique » et par conséquent l'attitude des élèves ne nécessitait pas de bouleverser l'enseignement habituel.

C'est dans ce contexte que nous avons été sollicitée pour animer des ateliers sur l'utilisation des TICE en cours de mathématiques, puis, pour animer des formations sur l'utilisation des TICE en géométrie plus particulièrement. Là encore, le scepticisme des enseignants formés conjugué à l'absence d'arguments convaincants, nous a profondément gênée pour réussir efficacement dans la mission qui nous avait été confiée. Cette difficulté devait se révéler profonde puisque nous avons même rencontré un formateur qui maniait parfaitement les logiciels, qui faisait pratiquer aux stagiaires des exercices pour lesquels les logiciels constituent de vrais outils d'apprentissages, mais qui reconnaissait devant les stagiaires ne jamais utiliser les logiciels avec ses élèves. Il considérait que les logiciels pouvaient présenter un intérêt comme alternative à l'enseignement « classique », mais que *le plus* apporté par les logiciels ne compensait ni le temps *perdu* devant l'ordinateur par les élèves, ni le temps passé par l'enseignant pour préparer des séances efficaces. De nombreux enseignants, à l'issue des formations avaient une position similaire. Ils reconnaissaient que les logiciels de géométrie dynamique pouvaient être effectivement utilisés en classe, mais que cela ne changerait pas grand chose à l'apprentissage des élèves.

I.3. Un premier pas vers la didactique : la formation de formateurs en 2002/ 2003

Lorsque nous avons suivi la formation de formateurs de professeur de mathématiques (aujourd'hui un morceau du master de didactique parcours professionnel) durant l'année scolaire 2002-2003, nous avons eu la confirmation que l'échec des formations animées était imputable au manque de préparation de ces formations ; en particulier ces formations manquaient d'éléments objectifs (non liés à l'expérience propre du formateur) qui pourraient permettre de justifier le recours aux logiciels de géométrie dynamique pour l'apprentissage de la géométrie au collège.

Les premiers éléments de didactique découverts lors de cette formation, nous ont laissé penser que cette science pourrait nous permettre de produire le genre de preuves cherchées. Nous avons alors cherché des articles qui apporteraient une réponse à la question suivante : « Quelles preuves a-t-on de l'efficacité des EGD sur l'apprentissage de la géométrie au collège ?». Les articles que nous avons lus sont de Laborde et Capponi (1994), de Vadcard (1998) et de Capponi (2000). Il est apparu de manière particulièrement frappante, d'une part que la lecture de ces articles nécessitait une connaissance de la didactique et en particulier de certains cadres théoriques, et, d'autre part, qu'aucune preuve rigoureuse pour notre problème ne ressortait. Les auteurs proposaient des types de travaux qu'ils jugeaient propices à l'apprentissage de la géométrie et ils justifiaient effectivement l'efficacité de ces travaux à l'aide de connaissances théoriques de didactique, mais il était impossible de conclure à la lecture de ces articles de la manière que nous attendions : « les logiciels de géométrie dynamique permettent de mieux apprendre la géométrie car … ». Cette absence de preuve a constitué pour nous une surprise et nous avons à ce moment là conclu que la raison en était qu'aucune étude n'avait cherché à prouver l'efficacité de l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique.

I.4. Où une question naïve se transforme en problématique.

Après avoir suivi deux années du master didactique parcours professionnel, nous avons souhaité poursuivre la découverte de la didactique et c'est ainsi que nous nous sommes inscrite au master de didactique option recherche. Lorsqu'en début d'année de ce master, il a fallu définir un sujet de mémoire, nous avons évidemment repensé à notre besoin d'apporter des preuves de l'apport des EGD pour l'enseignement de la géométrie afin de rendre les formations dans ce domaine plus efficaces. C'est ainsi que la question posée pour le mémoire l'a été en ces termes : *« j'aimerais vérifier l'hypothèse suivante : les élèves ayant manipulé régulièrement des figures géométriques sur logiciel (par exemple les cabri - dessins de C.Laborde et B.Capponi) en 6ème et 5ème ont plus de facilités pour comprendre ce qui est attendu dans le cadre d'une démonstration géométrique en 4ème. »*

Au début de ce master, nous avions toujours la conviction que la didactique était l'outil qu'il fallait pour prouver que les logiciels apportaient de nouveaux éléments à l'enseignement de la géométrie au collège.

I.4.1. La vision de la géométrie du collège en tant que professeur

Avant de poursuivre, essayons de clarifier ce que cet enseignement de la géométrie au collège représentait pour nous à ce moment là.

Nous envisagions cet enseignement comme orienté vers la démonstration. N'ayant aucune connaissance de la didactique de la géométrie, l'apprentissage de la géométrie au collège s'interprétait comme un apprentissage qui consistait à se déplacer de la géométrie du dessin et de la description de l'école élémentaire pour atteindre la géométrie du raisonnement et de l'abstraction ; le révélateur de cette abstraction se trouvant dans la démonstration.

En terme très naïf, et toujours sans expérience du discours didactique, le raisonnement fait à ce moment là pour être convaincu de l'apport des EGD dans le cours de géométrie était le suivant : la géométrie que les élèves connaissent à l'école élémentaire consiste à observer la figure, à « voir » sur les dessins ; en revanche, au collège on demande aux élèves de ne plus prendre d'informations sur la figure et de ne tenir pour vrai que ce qui est dit ou prouvé à l'aide de théorèmes. Une des grosses difficultés des élèves dans le passage de la géométrie de l'école élémentaire à la géométrie du collège, difficulté que nous avions repérée dans notre expérience professionnelle, vient du fait que de nombreuses propriétés se voient sur la figure et par conséquent les élèves ne voient pas l'intérêt du discours qui accompagne presque systématiquement une figure au collège et par la suite ils ne comprennent souvent pas l'intérêt du passage par la démonstration pour vérifier ce qui n'est pas dit mais est considéré comme vrai. Nous n'avions pas à notre disposition à ce moment de la réflexion des notions de Duval de registres et d'appréhension d'une figure (1996 et 1994). Nous verrons plus loin comment cette conception de la géométrie peut être affinée en utilisant ce cadre théorique.

Ce qu'un logiciel de géométrie dynamique nous semblait favoriser c'était la prise de conscience que ce qui se voit est insuffisant pour définir une figure. En effet, si l'on construit, avec un logiciel, une figure en plaçant par exemple un point sur une droite sans préciser que ce point appartient à la droite, la figure ne résistera pas au dragging[2] ; l'élève verra donc que sa figure n'a pas été construite correctement. Cet exemple du point appartenant à la droite nous semble particulièrement marquant car c'est une des propriétés pour laquelle les élèves ont le plus de mal à comprendre la nécessité de la préciser ; par exemple lorsqu'ils démontrent qu'un point est le milieu d'un segment, ils oublient très souvent de préciser l'appartenance au segment. Nous faisions l'hypothèse qu'en utilisant régulièrement un logiciel de géométrie dynamique, les élèves verraient plus facilement le besoin de dire toutes les propriétés nécessaires. Dans ce contexte, nous envisagions les exercices de construction sur logiciel comme de véritables entraînements pour l'apprentissage de la démonstration. Rappelons encore une fois que le raisonnement précédent se faisait dans une ignorance totale des différents cadres théoriques de la didactique de la géométrie.

I.4.2. Un premier cadre théorique pour l'enseignement de la géométrie : les Espaces de Travail Géométriques

C'est dans ce contexte que nous avons lu Kuzniak (2004) et Houdement, Kuzniak (1998-1999). La découverte des paradigmes de la géométrie naturelle (GI) et de la géométrie axiomatique naturelle (G II) nous ont alors paru bien correspondre à la manière dont nous envisagions la géométrie enseignée au collège. En effet, la géométrie I correspond à ce que nous semble être la géométrie que les élèves pratiquent en arrivant en $6^{ème}$. Il s'agit d'une géométrie centrée sur le dessin, où tout ce qui est vu est considéré comme vrai, où l'on effectue des déductions à partir d'observations, où l'on fait facilement référence à la réalité pour justifier ou construire un raisonnement. Ensuite, les professeurs de collège n'ont qu'un objectif : se débarrasser de cette géométrie trop « concrète », qui manque de « rigueur », qui

[2] Nous nommons dragging le fait de modifier la position d'un objet créé avec un logiciel de géométrie dynamique. En fonction de l'ordre de construction des objets, une figure sera modifiée ou non par dragging.

ne repose pas sur une axiomatisation cohérente et dans laquelle le dessin est l'objet d'étude. Ils cherchent à remplacer cette géométrie naturelle par une géométrie qui se détache de la réalité, une géométrie dans laquelle les figures ne sont plus que des supports de raisonnement, une géométrie basée sur des axiomes. Ce que nous nommions auparavant la géométrie de la démonstration, correspondait bien à la géométrie axiomatique naturelle. En effet, il s'agit bien au collège, d'utiliser la figure pour accéder à la démonstration. Kuzniak (2004 p19) décrit cette géométrie comme « un pas de côté par rapport à la réalité », mais il précise bien que ce pas de côté nécessite aussi une relation étroite entre la réalité et les axiomes utilisés. Le fait que cette géométrie continue à faire référence à la réalité, nous a fait prendre conscience de la difficulté que les élèves pouvaient avoir à se détacher de la Géométrie I, puisqu'ils devaient encore se rattacher à la réalité, mais sans y être plongés, en étant simplement « à côté ».

La difficulté à formuler cette nuance, nous semble être caractéristique de la difficulté que les élèves peuvent avoir à percevoir la différence dans les attentes des enseignants. Les enseignants eux-mêmes n'ont probablement pas conscience que de nombreux exercices n'aident pas à clarifier leurs attentes. Tous les exercices « ambigus » cités par Kuzniak (2004) et Houdement, Kuzniak (1998-1999) et qui sont proposés aux élèves, tant dans les manuels qu'aux examens, sont significatifs de cette absence de conscience de l'existence des paradigmes. Il existe même des situations où les enseignants sont contraints de mélanger les deux paradigmes ; nous pensons par exemple, à l'introduction des propriétés liées à la symétrie, dont la découverte se fait souvent par observation des effets des pliages, mais dont l'utilisation dans les exercices ne fait plus référence à la réalité observée mais uniquement aux propriétés découvertes sans que la différence d'approche soit évoquée.

Ce premier cadre théorique nous permettait une description cohérente avec notre expérience professionnelle de la géométrie enseignée au collège, et nous permettait de formuler notre conviction sur l'efficacité de l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique de la manière suivante : les logiciels de géométrie dynamique favorisent le passage de la géométrie I à la géométrie II. Nous avons alors rédigé la problématique suivante :

« Partant des hypothèses H et H'(Kuzniak 2004 p15), nous voudrions observer le rôle joué par les logiciels de géométrie dynamique dans le passage entre GI et GII. l'Espace de Travail Géométrique (ETG) créé par les logiciels de géométrie dynamique pourrait constituer une « passerelle » entre la géométrie I et la géométrie II.

Nous dirons qu'elle résiste au dragging lorsque le déplacement des éléments qui la constituent ne modifie pas les

Ce rôle serait cependant soumis aux types d'activités proposées avec ces logiciels. En effet, on peut lire p32 (Kuzniak 2004) que par leur facilité d'emploi pour créer des objets, les outils informatiques favorisent l'instauration d'un ETG I plutôt qu'un ETG II . Autrement dit, les logiciels placeraient les élèves dans un ETG I qui leur est familier et nous voudrions observer comment les activités proposées entraînent ces élèves vers un ETG II. Pour cela, en se plaçant au niveau de la classe de 5ème, nous voudrions analyser d'une part des énoncés écrits pour une utilisation avec logiciel et d'autre part des énoncés à traiter avec papier/ crayon. »

I.4.3. Une précision sur les ETG et les exercices de construction

Malgré l'adhésion aux notions de paradigmes géométriques pour décrire la nature des tâches géométriques des élèves du collège, nous ne partageons pas un point développé dans Kuzniak (2004). Ce point concerne l'analyse des exercices de construction. Etant donné l'importance que nous donnons à ces exercices de construction, en particulier en Environnement de Géométrie Dynamique, il nous paraît important de préciser notre point de vue sur ces exercices en reprenant les exemples cités dans Kuzniak (2004).

On peut lire dans Kuzniak (2004 p31) un exemple d'exercice de construction dont l'espace de travail est considéré en géométrie I. Il s'agit de tracer une droite passant par un point M donné, et par deux droites sécantes dont le point d'intersection n'est pas présent sur la feuille. Selon Kuzniak, l'espace de travail de cet exercice est celui de la géométrie I, car en géométrie II il est toujours possible grâce à une similitude de ramener le problème dans un espace aussi petit que l'on veut. Nous comprenons bien cette interprétation et la conséquence de cette interprétation nous semble être que de nombreux exercices de construction, peut être tous ceux qui ne sont pas des exercices de constructibilité, relèvent de la géométrie I. Or, il nous semble que le cas des exercices de construction est plus complexe. En effet, pour pouvoir classer les exercices de construction en géométrie I ou géométrie II, il nous paraît indispensable de prendre en compte les intentions didactiques de l'enseignant : que cherche à transmettre l'enseignant lorsqu'il pose un tel exercice ? Dans l'exemple cité, on peut supposer que ce qui intéresse l'enseignant ce n'est pas le dessin final et que tous les moyens ne sont pas bons pour y arriver. Par exemple, il rejettera très certainement la solution qui consisterait à prolonger les droites sur la table pour trouver le point d'intersection, puis à tracer la droite

---

propriétés qu'elle devait posséder.

demandée ! Ce qui intéresse l'enseignant c'est le raisonnement et la référence aux propriétés des hauteurs dans un triangle qui viendront justifier la construction. La figure n'est qu'un support à ce raisonnement, il y a bien référence à une certaine axiomatisation et le pas de côté par rapport à la réalité est bien fait. Pour nous, le pas de côté consiste justement dans le fait qu'on accepte de ne pas pouvoir prolonger les droites ce qui dans la réalité serait possible sur la table ou par réduction du dessin. Dans un exercice de construction posé au collège, les intentions de l'enseignant sont pratiquement toujours en géométrie II et chaque pas de construction doit être justifié par des propriétés. Bien entendu, ces exercices de construction font partis des exercices dont l'ETG est ambigu pour les élèves puisque cette attente de l'enseignant n'est généralement pas précisée dans l'énoncé. L'élève est supposé comprendre que le professeur de mathématiques au collège n'attend plus de lui un dessin compatible avec l'énoncé, mais une démarche compatible avec une série d'axiomes et de propriétés. Nous prendrons donc comme hypothèse de travail que tous les exercices de construction peuvent se résoudre dans un ETG II et nous irons même plus loin ; nous pensons que les exercices de construction sont de bons indicateurs de l'ETG des élèves. En effet, ils peuvent en général se résoudre aussi bien en GI qu'en GII ; aussi selon la solution adoptée par les élèves, nous pourrons avoir une idée assez fiable de l'ETG de l'élève.

I.5. Des obstacles levés pour énoncer une problématique

La distance prise par rapport au point de vue de Kuzniak sur les problèmes de construction a été un premier pas vers l'évolution de la problématique. D'autres éléments dont nous n'avions pas encore pris conscience étaient de véritables obstacles pour permettre à la problématique de se détacher des préoccupations d'enseignante. Ce n'est qu'après avoir cerné ces obstacles que la problématique a pu évoluer vers sa forme définitive.

I.5.1. Le problème lié à l'importance de l'ensemble des situations proposées par un enseignant sur une année.

Le premier obstacle provenait du fait que nous ne parvenions pas à envisager quelles observations permettraient de mettre en évidence le rôle de passerelle attribué au logiciel dans la problématique. Les analyses d'énoncés proposées dans cette problématique nous semblaient insuffisantes pour voir émerger le rôle joué par les logiciels de géométrie dynamique. Cependant, nous ne voulions pas effectuer de comparaison sur des productions d'élèves car nous savions que la comparaison nécessiterait d'intervenir dans deux classes différentes avec des enseignants différents et des élèves différents. Les résultats observés sur les productions ne nous paraissaient pas pouvoir produire de preuves du rôle des logiciels dans les différences observées car ces différences pouvaient tout aussi bien provenir des élèves ou des situations proposées par le professeur tout au long de l'année. Le côté enseignant nous avait paru important dès le début et continuait à trouver sa place dans la problématique, sans que nous parvenions à clarifier notre questionnement. Nous formulions à peu près ainsi nos interrogations sur le rôle de l'enseignant : comment savoir dans les différences éventuellement observées, ce qui provenait de l'utilisation du logiciel dans la situation analysée et ce qui provenait de l'enseignement reçu tout au long de l'année. Un enseignant qui utilise des logiciels de géométrie dynamique a peut être une conception différente de son enseignement qui le conduirait, même sans logiciel à donner des situations favorisant le passage à la géométrie II. Le logiciel ne serait donc pas le milieu favorisant le passage, mais ce serait les situations créées par l'enseignant tout au long de l'année, indépendamment du milieu. Nous ne voyions pas comment différencier le rôle de l'enseignant et celui du logiciel. Ce problème du rôle de l'enseignant restera non résolu jusqu'à la fin du travail, constituant une des pistes de réflexion à approfondir.

I.5.2. L'importance de prendre en compte l'organisation du milieu et le choix des variables didactiques pour observer une séance en environnement de géométrie dynamique

C'est ensuite la prise en compte de l'ensemble de la séance en salle informatique qui nous semblait difficile, à la fois le milieu mis en place par l'enseignant et les interventions de celui-ci durant la séance. Lorsque nous avions écrit : « Ce rôle serait cependant soumis aux types d'activités proposées avec ces logiciels » (p5) nous faisions référence à notre expérience et à la constatation que toute séance en salle informatique n'était pas toujours porteuse d'apprentissage pour les élèves. Autrement dit, n'importe quelle activité en salle informatique ne constitue pas une situation adidactique, même si les logiciels de géométrie dynamique sont conçus pour être des milieux organisés. Nous avons vu que dans Kuzniak (2004) on retrouvait cette constatation. Nous avons eu la confirmation de l'importance du milieu et du choix des variables didactiques pour observer des effets à la lecture d'articles portant sur l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique. Par exemple, dans l'article de Mariotti (2000), l'étude porte effectivement sur l'apport du logiciel pour la construction d'une argumentation, mais le logiciel n'est pas seul en cause : Mariotti étudie également les interactions créées par le professeur entre les élèves. Ainsi les conclusions de l'article ne portent pas uniquement sur les effets du logiciel, mais sur les effets du logiciel dans une certaine situation, en respectant le choix de certaines variables didactiques. De la même façon, lorsque Capponi et Laborde (1994) décrivent l'utilisation du logiciel et les effets sur l'apprentissage de la notion de figure, le milieu créé par la modification des menus est un élément très important de l'étude.

I.5.3. La remise en cause de notre conviction sur l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique.

Un des autres aspects difficile de la problématique et qui n'a émergé que peu à peu, concerne la formulation en terme de jugement de valeur. On l'aura compris, depuis le début de notre expérience professionnelle, nous avions la *conviction* du bienfait des logiciels sur l'apprentissage de la géométrie. Cette conviction nous empêchait de pouvoir envisager des résultats qui auraient mis en évidence l'absence d'influence des logiciels de géométrie dynamique sur l'apprentissage de la géométrie II ou même un ralentissement de cet apprentissage. Toute notre démarche consistait depuis le début à mettre en évidence le « plus » des logiciels de géométrie.

Deux événements nous ont permis de prendre conscience d'une part de la possibilité de voir émerger des résultats qui contrediraient la *conviction* et d'autre part de la nécessité d'abandonner toute référence à un jugement.

Le premier événement a consisté en une réflexion d'une enseignante qui, pour la première fois, organisait une séance de préparation au CAPES avec le logiciel cabri et qui remarquait que les étudiants, après avoir conjecturé correctement, avaient eu encore plus de mal à ressentir le besoin de démontrer cette conjecture que lorsqu'ils conjecturaient sur papier. Cette enseignante concluait en se demandant quelle géométrie on faisait réellement avec les logiciels de géométrie dynamique. Cela remettait en cause notre *conviction* et nous poussait à affiner notre problématique pour réussir à préciser justement quelle géométrie se faisait avec les logiciels de géométrie dynamique.

Le deuxième « événement » n'a pas été soudain, mais s'est construit peu à peu à la lecture d'articles traitant des logiciels de géométrie dynamique (Mariotti 2000, Capponi, Laborde 1994, Capponi 2000). Tous ces articles sont écrits par des chercheurs qui sont probablement convaincus que l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique n'est pas *néfaste* pour l'apprentissage de la géométrie, néanmoins, aucun ne conclut en terme de comparaison avec jugement en disant par exemple que « c'est mieux » ou « c'est moins bien ». Ce que les articles mettent en avant c'est quels apprentissages sont générés par les différentes utilisations, quels concepts sont construits par exemple, mais en aucun cas ces articles ne disent si c'est mieux ou moins bien qu'en environnement papier- crayon. Ces deux remarques nous ont permis d'évoluer en cherchant à centrer notre recherche non plus sur *les plus* que les logiciels apporteraient mais sur l'observation de ce qui se passe de différent lorsqu'il y a utilisation de logiciels.

Ainsi, après sept mois de découverte de la didactique, nous avions mieux cerné ses enjeux et nous pouvions avancer dans la formulation d'une nouvelle problématique.

Nous souhaitions désormais observer s'il existait des différences entre les espaces de Travail géométrique d'élèves qui utilisent les espaces de géométrie dynamique et ceux d'élèves travaillant uniquement en environnement papier-crayon. Ces différences éventuelles seraient observées sur une séance d'exercices de construction proposée à la fois avec logiciel et sans, dans deux classes différentes. A.Kuzniak, nous a alors suggéré de faire une comparaison entre deux niveaux différents celui de la 6ème et celui de la 3ème. Cette comparaison nous a paru pertinente parce qu'elle permet de mettre en évidence l'évolution de l'ETG des élèves entre l'entrée au collège et la fin de la scolarité au collège. En croisant la comparaison entre les deux niveaux avec la comparaison selon l'utilisation ou non d'EGD, nous pourrions mieux observer des tendances éventuellement liées à leur utilisation. Le choix des niveaux de 6ème et 3ème, permettait de voir les effets de l'enseignement de la géométrie du collège, tournée comme on l'a vu vers l'établissement d'ETG II. Contrairement à ce qui avait été envisagé en début d'année, nous ne chercherions plus à analyser les énoncés donnés durant toute une année, mais seulement à faire un état des lieux à un instant donné des ETG d'élèves dans quatre classes différentes : deux classes de 6ème, deux classes de 3ème, avec à chaque fois une classe utilisant des EGD et une classe ne les utilisant pas. Cela signifiait, qu'il fallait observer le travail durant une séance de géométrie de quatre classes. Le rôle joué par l'enseignant n'était toujours pas complètement réglé, mais nous avons décidé de ne pas en tenir compte dans un premier temps et d'y revenir si les observations ne se révélaient pas suffisamment intéressantes.

En résumé, ce premier travail de recherche du master nous a permis de faire évoluer la problématique selon les trois étapes suivantes.

Tout d'abord nous cherchions une légitimation à notre pratique d'enseignante, afin de pouvoir convaincre des collègues. Dans un deuxième temps, nous cherchions toujours à prouver que nos pratiques d'enseignante étaient bénéfiques sur l'apprentissage de la géométrie, mais nous avions réussi à expliciter quelle géométrie nous cherchions à mettre en place avec les paradigmes de la géométrie I et de la géométrie II. Et enfin, nous avons pu nous détacher du jugement de valeur que nous portions sur les EGD, pour « simplement » essayer de voir apparaître des constantes liées à l'utilisation des EGD.

Si nous reprenons ici l'argument concernant l'utilisation du rapporteur qu'on nous opposait au début de notre pratique d'enseignante (voir page 2), nous dirions toujours que ce seul argument ne peut justifier l'arrêt de l'utilisation des EGD, mais notre regard sur l'usage du rapporteur serait plus fin et nous chercherions à voir plus précisément si son acquisition permet d'enrichir la connaissance des objets géométriques (en particulier les angles) dans le but de développer un Espace de travail géométrique ayant pour référentiel la Géométrie II.

II. Le choix des cadres théoriques et l'énoncé de la problématique

Avant de développer la problématique qui provient de l'ensemble du travail décrit dans le chapitre précédent, nous allons décrire les cadres théoriques qui serviront de points d'appui pour notre étude.

Nous avons vu que, dans un premier temps, les ETG avec les deux paradigmes de la géométrie I et de la géométrie II, nous avaient semblé pertinents pour notre étude ; après avoir affiné la réflexion selon les pistes décrites ci-dessus, il nous a paru fondamental d'enrichir ces ETG pour pouvoir décrire beaucoup plus précisément la géométrie faite dans des classes qui utilisaient les EGD et dans celles qui ne les utilisaient pas. Le cours de géométrie du master et la rédaction du devoir de validation de ce module, nous ont permis de découvrir plusieurs cadres théoriques nous permettant de décrire avec beaucoup plus de précisions les ETG des élèves et en particulier de faire des comparaisons. Il s'agit en particulier des notions de Duval de registres (Duval 1996) et d'appréhension de la figure (Duval 1994) et des niveaux de Van Hiele.

II.1. Les paradigmes de la géométrie naturelle (GI) et de la géométrie axiomatique naturelle (GII)

Comme nous l'avons déjà vu, ce cadre décrit par A.Kuzniak (2004) permet assez simplement d'observer l'évolution qui a pu se produire entre la géométrie à l'entrée au collège et celle à la fin du collège. Les éléments d'observation sur des exercices de construction sont les suivants.

- Les prises d'informations sur la figure donnée dans un énoncé, autres que celles codées ou notées par l'énoncé. Par exemple les mesures de longueurs, d'angles, les perceptions d'égalité de longueur ou d'angles droits, sans référence ni à des propriétés, ni à des mesures, peuvent indiquer que l'élève considère la figure comme une source d'information. Cela signifie que la perception joue un rôle important dans le travail géométrique de cet élève. Dans la suite de cette étude, nous nommerons *règle a* la règle qui consiste à respecter cet « interdit » de recourir aux informations directement issues de la figure fournie par un énoncé. La maîtrise de cette *règle a* sera le signe d'un espace de travail géométrique dans le référentiel de la géométrie II.

- Les vérifications ou la prise d'information sur la figure obtenue, à l'aide d'instruments de géométrie (ou de fonctions du logiciel) seront également l'indication d'un ETGI plutôt qu'un ETGII. Par exemple la mesure de longueurs de côtés à la règle ou en demandant ces mesures au logiciel ou la vérification d'angles droits à l'aide d'une équerre ou en posant la question au logiciel, rentreront dans cette catégorie d'indices incitant à penser que le travail géométrique de ces élèves se fait en géométrie I.
- Enfin, les constructions qui ne font référence ni à la notion de droites perpendiculaires (ou de droites parallèles) ni aux instruments permettant de construire ces perpendiculaires (l'équerre ou la fonction perpendiculaire du logiciel), seront également des éléments à prendre en compte pour établir un ETGI. Lorsque les outils cités ci-dessus ne sont pas utilisés pour tracer des droites parallèles ou perpendiculaires par exemple, cela signifie que les élèves se contentent de leur perception des droites parallèles ou perpendiculaires pour les représenter. Ils peuvent le faire « à l'œil » ou bien en s'aidant visuellement des bords de la feuille par exemple. Il est probable que ces élèves n'ont pas conscience que ce qu'ils tracent sont des perpendiculaires (ou des parallèles) lorsqu'ils effectuent de telles constructions..

II.2. L'analyse du travail en géométrie selon R.Duval

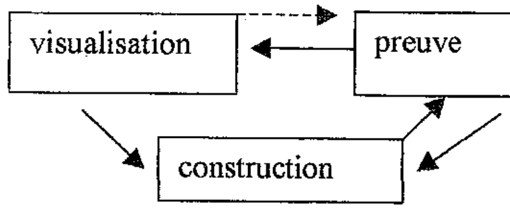
II.2.1 Les dimensions des unités figurales

Ce deuxième cadre nous permettra d'affiner notre connaissance des ETG des élèves tout d'abord en nous appuyant sur la notion de dimensions des unités figurales de Duval (1994 et 1996). Nous avons retenu cette notion car selon Duval le pas décisif à franchir pour l'apprentissage de la géométrie consiste dans l'acquisition des changements de dimensions des unités figurales (1996 p179). En effet, selon Duval, ce qui est perçu le plus rapidement et naturellement sur une figure ce sont les unités figurales de dimension 2 (par exemple les formes rectilignes fermées), alors que pour parvenir à faire émerger une démonstration à partir d'une figure, il faut le plus souvent redescendre aux unités figurales de dimension 0 ou 1 (les points ou les droites par exemple) qui apparaissent dans les propriétés et théorèmes. Ce qui est donc fondamental dans l'apprentissage de la géométrie enseignée au collège est la compréhension du rôle heuristique joué par une figure géométrique. Sans l'acquisition de l'appréhension opératoire (Duval 1994) d'une figure, un élève ne pourra réussir à effectuer les démonstrations demandées au collège. Cette appréhension opératoire consiste en la capacité à effectuer des modifications sur les figures, en particulier celles que R. Duval nomme déconstructions dimensionnelles (Duval R., Godin M., Perrin-Glorian M.J. (2005)). Ces déconstructions consistent à faire apparaître des unités figurales de dimensions 0 ou 1, qui se rattachent à des théorèmes ou des propriétés connus et nécessaires pour établir la démonstration cherchée. Nous avons observé, lors d'une étude faite pour le cours de géométrie du master, que la difficulté à opérer ainsi sur une figure, pouvait être si grande pour certains élèves, qu'ils pouvaient avoir recours à des propriétés inventées, de manière à réussir la démonstration sans avoir à modifier leur perception de la figure.

Cette approche de l'acquisition de la démarche géométrique au collège correspond bien à la perception que nous en avions en tant qu'enseignante. En effet, lorsque nous écrivions, page 3, que pour nous la géométrie enseignée au collège était orientée vers l'apprentissage de la démonstration, nous ne savions pas bien comment caractériser cet apprentissage. Nous percevions bien que la figure avait toujours un rôle, mais que ce rôle était différent de celui qu'on lui faisait jouer à l'école élémentaire. Nous parlions d'abstraction et de raisonnement, sans pouvoir réellement décrire ces apprentissages ni trouver des critères qui permettraient de dire si cette géométrie du collège est acquise. L'apport de Duval dans ce domaine nous paraît pouvoir combler en partie cette absence de critères et nous donner des éléments d'analyse, qui permettront de conclure si l'utilisation de la figure, comme on l'attend au collège, fait partie de l'ETG des élèves ou non. Dans une analyse d'exercice de construction, nous chercherons donc à mettre en évidence quel recours aux sous figures, ou au contraire, quels ajouts d'éléments sont nécessaires à la réalisation de l'exercice et de quels changements de dimensions des unités figurales ses modifications sont issues. Selon la réussite ou non de cette démarche chez les élèves nous pourrons affiner notre connaissance de leur ETG.

II.2.2 Les processus cognitifs et leurs interactions

Les différents processus cognitifs et leurs interactions, cadre développé par Duval (1995), nous aideront à clarifier la démarche adoptée par les élèves dans les exercices de constructions. Nous redonnons ici le schéma correspondant à ces processus et repris par A.Kuzniak (2004).



Dans le cas d'exercices de construction, il nous paraît intéressant de chercher à savoir par quel biais les élèves entrent dans le travail : les élèves vont-ils partir d'un raisonnement qui leur permettra d'effectuer une construction « rigoureuse » au sens de la géométrie II, ou bien vont-ils faire des essais successifs pour obtenir une reproduction de la figure demandée ? Ces essais vont-ils permettre ensuite une justification se rapprochant d'une preuve ou bien au contraire la justification va-t-elle être une retranscription de la construction ce qui montrerait que la construction n'a pas permis d'interaction avec un autre processus cognitif ?

La notion de preuve étant complexe à définir et n'intervenant pas de manière explicite dans les exercices de construction, nous utiliserons ici ce terme pour désigner un certain recours à des propriétés mathématiques valides. Cela peut se traduire par l'utilisation précise d'instruments de géométrie spécifiques, qui montre une référence explicite à une propriété, ou plus clairement par la citation de la propriété utilisée, ou encore par le fait d'envisager une certaine déconstruction dimensionnelle. Cela ne nous semble pas réducteur dans le cas des exercices de construction et nous permettra de différencier les constructions produites par reproduction du schéma donné, des constructions provenant de propriétés connues ou reconnues par les élèves (même si elles n'ont pas été démontrées auparavant). Par exemple, un signe d'un recours explicite à la preuve, au sens où nous venons de le décrire, dans un exercice de construction, sera le recours à un instrument de géométrie spécifique, comme l'équerre par exemple pour tracer un angle droit, au lieu d'une vérification « à l'œil » de la justesse de la construction. Cette utilisation de l'instrument marquera que l'élève a pris conscience de l'existence d'un angle droit et n'a pas seulement une reconnaissance visuelle de l'aspect de l'angle considéré.

Dans ce schéma, Duval ne fait pas apparaître de flèche allant de la construction à la preuve (en bleu). Kuzniak (2004) précise que ce schéma de Duval se réfère à la géométrie II et que dans le cas de la géométrie I, la preuve prend appui sur la construction et la visualisation de façon plus importante. Nous avons donc ajouté cette flèche sur le schéma.

II.2.3. La coordination des changements de registre entre le registre figural et le registre discursif à propos de la figure.

Nous utiliserons également les problèmes liés aux changements de registre du registre figural au registre discursif. L'observation de ces changements de registre nous paraît très important à intégrer à notre analyse car il donne des outils pour observer ce que nous avons mentionné page 4, à savoir, d'une part que les élèves ont beaucoup de mal à comprendre l'importance de préciser l'appartenance d'un point à une ligne dans des démonstrations, et d'autre part, que les EGD semblaient pouvoir avoir un rôle dans l'acquisition de ce passage au registre discursif. Par ailleurs, Duval (1994) considère que la coordination des traitements entre ces deux registres constitue un des enjeux de l'apprentissage de la géométrie du collège.

Pour illustrer ces changements de registre spécifiques à la géométrie, nous reprendrons le problème de l'appartenance d'un point à une ligne. Il nous semble que ce problème de précision de l'appartenance d'un point à une ligne est révélateur de l'assimilation de la coordination indispensable entre le registre de la figure et le registre du discours mathématique. Duval précise que « l'originalité des démarches en géométrie, par rapport à d'autres formes d'activité mathématique, tient au fait que la coordination des traitements spécifiques au registre des figures et à celui du discours théorique en langue naturelle y devient absolument nécessaire.» (1994, p173). Ceci nous semble en effet fondamental à assimiler, car en géométrie, un raisonnement dans le registre de la figure ne peut être validé que s'il y a passage au même raisonnement dans le registre du discours. Or la grosse difficulté tient au fait que le registre de la figure est « tout entier commandé par l'évidence immédiate d'un constat perceptif » (1994, p174) et qu'il y a donc un pas difficile à franchir pour réussir à savoir ce qui du registre de la figure (autrement dit, ce qu'on voit sur la figure) doit être traduit dans le registre discursif, comme un élément valide et indispensable d'un raisonnement mathématique. Par exemple, des éléments perceptifs d'orientation, comme « à gauche », « à droite », « au dessus », « au dessous » ne sont pas des éléments valides pour le raisonnement mathématique alors qu'ils peuvent parfois contribuer à justifier des propriétés sur une figure. Ou encore, pour citer un exemple que nous avons déjà mentionné, le recours aux mesures sur une figure n'est pas non plus un élément du registre figural considéré comme valide dans le raisonnement géométrique. L'appartenance d'un point à une ligne nous semble relever du même problème de coordination, mais à l'inverse des exemples précédents, cette appartenance doit être précisée dans le registre discursif pour rendre valide le raisonnement.

Dans le cas des exercices de construction, puisqu'ils ne nécessitent pas, par la solution demandée, de changements de registres, la maîtrise de ces changements de registres ne pourra être observée qu'en EGD. Nous considérons, en effet le fait de « dire » au logiciel les constructions à effectuer, comme un passage à un registre discursif. L'obtention d'une figure non stable et l'analyse des fonctions utilisées pour réaliser la construction, permettront d'observer le degré d'assimilation de la coordination des changements de registres.

II.3. Les différents niveaux de Van Hiele

Pour finir, nous évoquerons également dans certains cas les différents niveaux de Van Hiele. Ces niveaux nous permettront d'affiner notre connaissance des ETG des élèves dans la mesure où ils sont un indicateur du niveau atteint dans l'acquisition de la démonstration et en particulier dans l'emploi adéquat de propriétés nécessaires et suffisantes.

Nous chercherons à voir s'il y a un lien entre les constructions effectuées et les propriétés utilisées pour justifier ces constructions. Par exemple, une construction faisant référence à une propriété nécessaire et suffisante sera-t-elle justifiée par cette propriété ? ou bien au contraire, une telle construction s'accompagnera-t-elle d'une propriété différente faisant référence par exemple à une reconnaissance visualisation ? Ces observations permettront de mettre en évidence un décalage entre les constructions produites et le niveau de Van Hiele.

Compte tenu du choix des exercices de construction, ce cadre théorique ne sera utilisé que lorsque nous aurons besoin d'un outil pour évaluer le niveau de passage à la démonstration.

II.4. La problématique

En nous appuyant sur les cadres théoriques décrits dans les paragraphes précédents, nous allons essayer d'établir un état des lieux des espaces de travail géométriques personnels d'élèves de 6ème et de 3ème, en cherchant à mettre en évidence des différences provenant d'une part du niveau de classe, et d'autre part, de l'utilisation ou non des logiciels de géométrie dynamique.

La première question à laquelle nous tenterons de répondre est la suivante : Le référentiel des espaces de travail géométrique des élèves de 3ème, est-il réellement plus tourné vers le référentiel de la géométrie axiomatique naturelle que celui des élèves de 6ème, comme le laisse penser la différence entre les attentes de la géométrie enseignée à l'école élémentaire, et la géométrie enseignée au collège ? Cette première question sera traitée indépendamment de l'artefact utilisé.

Ensuite, nous allons chercher à vérifier les deux hypothèses suivantes qui concernent l'influence que l'utilisation d'environnements de géométrie dynamique peut avoir sur la pratique de la géométrie au collège.

H1 : Les environnements de géométrie dynamique constituent un milieu qui favorise la mise en œuvre de techniques de construction, plutôt que la mise en œuvre du processus de preuve comme appui pour les constructions.

H2 : Les environnements de géométrie dynamique constituent un milieu permettant de développer dans le cadre d'exercices de construction, la coordination des changements de registre entre le registre discursif et le registre de la figure.

La première hypothèse provient de la constatation que les figures stables par dragging sont issues d'un raisonnement mathématiquement valide. C'est pourquoi les stratégies optimales visées dans le milieu créé par l'environnement de géométrie dynamique seront toujours des constructions issues d'un passage par la preuve.

Cependant, ce passage à la preuve, peut être de nature différente : Il peut y avoir utilisation directe d'une preuve pour produire une construction (schéma 1), mais également visualisation d'une propriété à utiliser, vérification par la preuve de cette propriété et construction (schéma 2). Et enfin, pour les élèves dont le référentiel est celui de la géométrie I, l'obtention d'une figure stable par dragging peut se faire par essais successifs. Il n'y aura dans ce cas pas appui sur la preuve dans le processus de construction, mais les étapes de la construction pourront par la suite, constituer un élément pour l'élaboration de cette preuve. C'est ce dernier cas qui nous intéresse, car il semble que la « preuve » issue de cette démarche ne repose pas sur un raisonnement mathématique (même si elle est mathématiquement valide), mais sur une validation par la stabilité. Il s'agira plus d'une technique de construction que d'une véritable propriété. En observant quelles justifications les élèves apportent à leur construction, nous tenterons de vérifier dans l'étude menée, quel type de processus semble le plus fréquemment utilisé. Nous marquons en bleu sur le schéma3 suivant la flèche correspondant à l'élaboration possible d'une « preuve » à partir d'une construction.

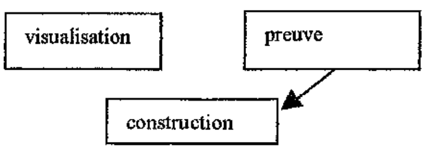


Schéma 1

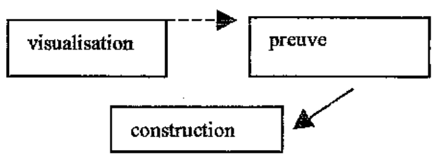


Schéma 2

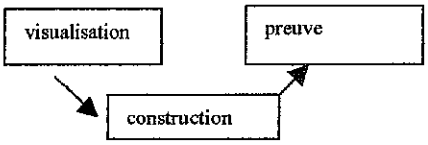


Schéma 3

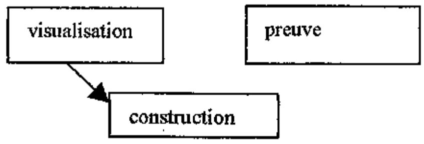


Schéma 4

Le schéma 4 illustre le processus qui va consister en la réalisation d'une reproduction de la figure de départ, sans qu'aucune justification technologique ne puisse être mentionnée.

La seconde hypothèse provient de la constatation du passage obligé au registre discursif pour communiquer avec le logiciel et nous paraît d'autant plus importante à vérifier que la coordination des changements de registres est fondamentale à la fois pour produire des preuves et pour rédiger ces preuves dans le registre du discours.

Ce qui nous conduit à penser que les EGD peuvent avoir un rôle important à jouer dans l'acquisition de cette coordination dans le cas des constructions, est la constatation suivante : Alors que dans une construction en environnement papier-crayon les appartenances sont des évidences, sur le logiciel, pour obtenir une figure stable par dragging, la précision de l'appartenance est indispensable. Autrement dit, il semble bien que le mode de fonctionnement du logiciel permet de dégager les éléments du registre figural qui doivent apparaître dans le registre discursif pour rendre un raisonnement valide.

Par ailleurs, lors d'exercices de construction en environnement papier-crayon, le placement d'un point sur une ligne est une action immédiate, tandis que d'autres actions, comme le tracé de droites parallèles, demandent une démarche plus approfondie. On peut donc comprendre qu'en restant dans l'environnement papier-crayon, les élèves ne donnent pas la même importance à la précision de l'appartenance, qu'à la précision de droites parallèles par exemple.

Pour finir, une troisième hypothèse émerge des analyses des solutions à l'exercice que nous allons proposer, mais ne sera pas vérifiée dans l'étude car cela aurait nécessité de prévoir cette hypothèse au début de l'étude et de concevoir des exercices particuliers pour tenter de la vérifier. Cette hypothèse est la suivante :

H3 : L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique permet de travailler les déconstructions dimensionnelles par adjonction d'unités figurales de dimensions 0 ou 1 ou bien par extraction de telles unités figurales.

Nous mentionnerons dans l'analyse de la solution n°7 proposée dans le paragraphe IV.2.3., les éléments qui peuvent conduire à étayer cette hypothèse, mais nous ne ferons aucune conclusion à ce sujet en rapport avec l'étude des productions des élèves.

III. Mise en place de l'étude

III.1. Le choix des exercices

III.1.1. Objectifs et critères

Nous avons cherché à proposer pour l'étude des exercices de construction qui nous permettraient d'avoir une idée du passage au processus de preuve pour cette construction. Les exercices comportant des figures et demandant des démonstrations, comme les exemples cités dans Kuzniak (2004) ou Houdement, Kuzniak (1998-1999), sont souvent propices à faire émerger les élèves dont l'ETG personnel se réfère à la géométrie II et ceux dont l'ETG personnel se réfère à la géométrie I et par conséquent le passage à la preuve et/ ou la visualisation aurait pu être mis en évidence. Cependant ces exercices ne convenaient pas pour notre recherche, puisque l'étude devait porter sur des élèves du niveau $6^{ème}$ et qu'à ce niveau, il n'est pas envisageable de demander des démonstrations aux élèves ; Si l'on avait posé ce genre d'exercices, les élèves de $6^{ème}$ se seraient placés en GI sans ambiguïté, puisqu'ils n'ont pas les moyens de se placer en GII. Il fallait donc se limiter à des exercices de construction.

Cependant, nous devions d'une part ajouter des questions supplémentaires afin de connaître les choix faits par les élèves en termes de processus cognitifs et d'autre part, veiller à mélanger des informations dans le registre du discours et sur la figure pour faire émerger la coordination entre ces deux registres.

Une autre contrainte, liée aux niveaux choisis, était que les exercices devaient présenter un certain intérêt pour les élèves de $3^{ème}$ et être faisables avec les connaissances de $6^{ème}$. Nous avons assez rapidement envisagé des exercices autour des quadrilatères car les élèves manipulent ces objets de la $6^{ème}$ à la $3^{ème}$.

Enfin, ces exercices devaient présenter un intérêt qu'ils soient résolus avec un logiciel ou en papier crayon. Par exemple, nous avions envisagé de donner comme exercice l'énoncé pris dans Mariotti (2000, p37). Il s'agit tout simplement de « construire un segment », puis de « construire un carré qui a ce segment pour côté ». Mais, si cet exercice pouvait présenter un intérêt sur logiciel, puisque le carré obtenu devait résister au dragging, il perdait en revanche tout intérêt en environnement papier-crayon. Les élèves, surtout ceux de $3^{ème}$, n'auraient pas compris qu'on leur demande un tel travail comme exercice ; en effet, le dessin d'un carré n'est jamais l'objet d'un exercice en $3^{ème}$, mais une étape souvent implicite dans la construction d'une figure plus complexe ou dans la réalisation d'un exercice de démonstration.

III.1.2 Enoncés et variables didactiques retenus

Premier exercice

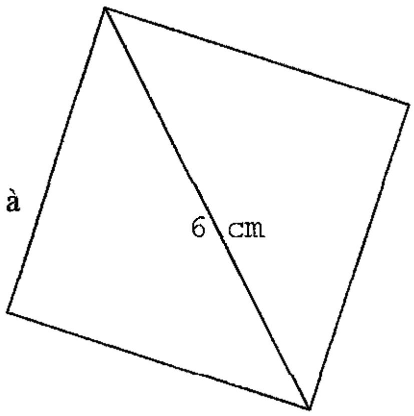
Compte tenu des contraintes évoquées ci-dessus, et en gardant l'idée du carré, figure bien connue des élèves qui ne présente pas de difficultés particulières, nous avons choisi de faire construire un carré en connaissant une diagonale. A partir de cette idée, nous avons conçu l'énoncé ci-dessous.

Exercice 1

Dans le cadre n°1, construire ce **carré** en vraie grandeur.

Dans le cadre n°2, décrire la construction effectuée

Dans le cadre n°3, donner les raisons qui vous ont conduit à effectuer cette construction.



Les variables didactiques choisies sont les suivantes :

Pour l'énoncé du cadre n°1 :

➢ Pour permettre une forte utilisation de la visualisation et un recours au registre figural, le carré est donné volontairement en vraie grandeur : les élèves peuvent ainsi mesurer, vérifier des angles droits, tracer des diagonales sur le schéma de l'énoncé... pour s'en resservir ensuite dans la construction.

➢ Pour mettre en évidence l'absence de recours au discours accompagnant une figure, le carré est volontairement non codé, mais indiqué dans l'énoncé. Il y a donc une double source d'informations, d'une part sur la figure (la mesure de la diagonale est donnée sur le schéma) et d'autre part dans le texte (la nature du quadrilatère y est indiquée).

➢ L'orientation du carré « en biais » permet de mieux mettre en évidence les constructions qui reproduisent la figure, nouveau signe d'une utilisation forte de la visualisation. De même, l'interprétation de « **ce** carré » comme la demande d'une reproduction à l'identique de la figure, avec l'orientation donnée, marque l'attachement à la position de la figure dans l'espace et par là un travail en géométrie I.

Pour les questions des cadres 2 et 3 :
Ces questions sont là avant tout pour nous permettre de mieux analyser les constructions proposées par les élèves.

- La question « décrire la construction effectuée » doit servir uniquement à retrouver l'ordre dans lequel la construction a été effectuée. Pour le travail sur logiciel, cette question est redondante avec la fonction « revoir la construction » du logiciel qui permet de voir pas à pas l'ordre dans lequel la construction a été faite. Néanmoins, elle s'est révélée utile pour analyser quelques constructions particulièrement confuses. Dans le cas de l'environnement papier-crayon elle a permis de savoir pour pratiquement tous les élèves la démarche de construction adoptée.

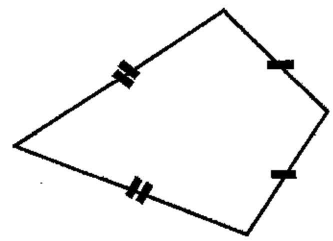
- La précision demandée dans le cadre n°3, a été choisie pour essayer d'appréhender quels processus cognitifs l'élève a mis en œuvre pour effectuer sa construction. Par exemple, une justification en termes de propriété est le signe d'un passage par la preuve, tandis que la retranscription des étapes de la construction est le signe de l'absence du passage par la preuve.

- Le choix des termes employés a été fait en s'inspirant des questions posées par Mariotti (2000 p38) qui demande aux élèves d'accompagner leur construction d'une description de la procédure de construction et du raisonnement. Le terme « raisonnement » nous paraissait trop éloigné des connaissances des élèves. De plus, nous ne voulions pas demander de « justifications » car certains enseignants apprennent à leurs élèves qu'une justification consiste à citer les propriétés utilisées, alors que nous voulions laisser les élèves libres de faire référence à des propriétés ou non. C'est pour toutes ces raisons que nous avons choisi de demander aux élèves de donner les « raisons de cette construction ». Il s'est avéré que la formulation présentait une ambiguïté qui a conduit certains élèves à penser qu'on cherchait à savoir pourquoi cet exercice avait été posé, autrement dit, quel était le but du professeur lorsqu'il a posé cet exercice (en effet, dans les cadres, nous avions repris en style « télégraphique » les questions et avions écrit « les raisons de cette construction », ce qui présentait une ambiguïté). Outre des réponses qui n'ont pu être analysées, cette ambiguïté a conduit les enseignants à préciser, durant les séances, le sens de la question. Pour en préciser le sens, l'un des enseignants a dit à un groupe d'une classe de 3ème : « Pour effectuer votre construction, vous avez utilisé des propriétés, on vous demande de dire lesquelles ». En employant le mot « propriétés » alors que nous avions soigneusement évité de l'employer, l'enseignante a un peu faussé les réponses de ses élèves à cette question. Nous reviendrons sur les conséquences de cette intervention dans l'analyse de l'exercice en termes de milieu.

Deuxième exercice

Nous avons choisi de donner un deuxième exercice, pour deux raisons. Tout d'abord, nous souhaitions que tous les élèves aient une occupation durant toute la durée de la séance, pour éviter que des élèves cherchent à terminer plus vite le premier exercice, afin d'en avoir fini avec l'activité proposée. Ensuite, nous espérions que le recueil de données supplémentaires permettrait de confirmer les tendances observées sur le premier exercice.

Exercice 2
A l'aide du logiciel cabri, construire une figure semblable à la figure ci-contre. On appelle cette figure **un cerf-volant.**
Dans le cadre n°1, décrire la construction effectuée.
Dans le cadre n°2, donner les raisons qui vous ont conduit à effectuer cette construction.



Nous avons cherché un deuxième exercice de construction laissant une place plus grande à l'utilisation de la visualisation. Nous avons choisi le cerf-volant car cette figure ne faisait pas encore partie du programme ; ainsi, les élèves ne connaissent normalement aucune propriété, et il nous paraissait intéressant de voir s'ils se comporteraient comme pour le carré où s'ils commenceraient par essayer de démontrer des propriétés qu'ils essaieraient ensuite d'utiliser pour réaliser la construction. La construction pouvait donc s'effectuer en géométrie I par visualisation des propriétés des diagonales du cerf-volant par exemple ou bien en géométrie II par démonstration des propriétés des diagonales avant de passer à leur utilisation. Le deuxième intérêt que nous avons vu au cerf-volant, provient du choix de l'objet « générique ». Il ne s'agissait pas, comme pour le carré, de reproduire le cerf-volant dessiné, mais de construire n'importe quel cerf-volant. Nous souhaitions voir le rôle donné à la mesure dans cette construction.. Compte tenu du peu de temps que les élèves ont consacré à cet exercice, nous n'avons pas recueilli suffisamment de données pour qu'une exploitation soit intéressante. Nous ne nous occuperons par conséquent plus de cet exercice dans la suite.

III.2. Les conditions d'observation : choix des classes, consignes et renseignements sur les élèves.

III.2.1. Choix des classes

Conformément à la problématique, et pour essayer de réduire les « effets enseignants », nous avons cherché à observer seulement deux professeurs exerçant en 6ème et en 3ème, l'un utilisant des logiciels et l'autre non. Dans un premier temps, nous avons cherché des enseignants exerçant dans le même établissement pour que les élèves soient de « même nature », et nous aurions même souhaité que les enseignants aient une progression commune pour que les connaissances acquises sur les quadrilatères soient comparables. Cela n'a pu se faire. Nous avons trouvé deux enseignants ayant une certaine expérience (une dizaine d'années pour l'une et beaucoup plus pour l'autre) qui ont accepté de suivre des consignes précises pour une séance avec leurs élèves.

III.2.2. Consignes données aux enseignants

Les consignes envoyées aux enseignants avant la séance sont les suivantes :

Avec papier crayon :

- Laisser les élèves chercher seuls et laisser aboutir même les procédures qui vous semblent erronées.
- Répondre aux questions techniques des élèves et intervenir en cas de blocage complet sur une question.
- Une fois l'exercice terminé, vous pouvez intervenir pour valider ou invalider des procédures, mais je souhaiterais que la fiche ne soit pas modifiée.

Avec logiciel :

- Rappeler (ou l'expliquer si c'est la première fois que les élèves le rencontrent) qu'une figure est correcte lorsqu'elle n'est pas déformée par le déplacement d'un de ces éléments.
- Laisser les élèves effectuer les procédures même erronées. Si plusieurs procédures sont testées, cela m'intéresserait d'enregistrer les différentes procédures. Nommer les figures en les numérotant (si ce n'est pas trop difficile à gérer).
- Répondre aux questions techniques des élèves et intervenir en cas de blocage complet sur une question.
- Une fois l'exercice terminé, vous pouvez intervenir pour valider ou invalider des procédures, mais je souhaiterais que la fiche ne soit pas modifiée.

Ces consignes se sont révélées suffisantes pour les séances en environnement papier-crayon ; en revanche, elles auraient dû comporter des indications précises quant aux fonctions à laisser à la disposition des élèves dans les menus du logiciel cabri. En effet, le professeur qui utilise le logiciel cabri fabrique pour les élèves de 6ème un menu adapté, tandis qu'en 3ème

il laisse aux élèves l'utilisation de toutes les fonctions. Nous verrons dans l'analyse de l'exercice en termes de milieu ce que cette différence peut avoir comme conséquence sur les solutions proposées par les élèves.

III.2.3. Remarques fournies par les enseignants sur les classes

Les enseignants nous ont fourni quelques remarques sur leurs classes et les progressions suivies.

En 6ème, la classe travaillant sur le logiciel cabri, est considérée comme très forte par l'enseignant ; il ne s'occupe pas du tout de faire ce qui est écrit dans le programme officiel parce que les élèves savent déjà tout. En particulier, il n'a pas traité avec ces élèves les propriétés du carré. En revanche, nous avons appris qu'il avait traité, avec ses élèves, un exercice sur le logiciel cabri, qui consistait à construire des polygones réguliers à partir d'un cercle et des diagonales. Nous avons interrogé l'enseignant à ce sujet car certaines solutions utilisant cette technique « du cercle » revenaient très fréquemment contrairement à ce que nous avions prévu. Ces élèves ont une très grande habitude d'utiliser cabri avec des menus adaptés, mais sans la fonction « report de mesure » qui était importante pour résoudre l'exercice du carré. Le professeur a commencé la séance en expliquant le fonctionnement de cette fonction.

L'autre classe de 6ème est un groupe de niveau faible formé par des élèves de différentes classes. La séance qui nous occupe est la première que l'enseignante a avec ce groupe depuis le changement des groupes. Dans cet établissement, le programme est traité dans le même ordre par tous les enseignants de 6ème et les propriétés des quadrilatères n'ont pas encore été vues.

La classe de 3ème observée sur logiciel, est considérée comme faible par rapport aux autres classes de 3ème de l'établissement qui est un établissement du centre de Paris. Ces élèves étant très nombreux, ils n'ont pratiquement pas utilisé le logiciel cabri durant l'année. Néanmoins, la plupart des élèves ont déjà eu le même enseignant dans le courant de leur scolarité au collège et presque tous connaissent le fonctionnement du logiciel, même s'ils y sont moins à l'aise qu'en 6ème. Là encore le professeur commence la séance en montrant l'utilisation de la fonction « report de mesure » ; il rappelle aussi aux élèves que la figure obtenue doit résister au dragging. Ses mots sont « les figures que vous allez devoir construire doivent vérifier la propriété d'être stable» et il accompagne cette phrase de l'exemple, au vidéo projecteur, de deux carrés l'un stable et l'autre non stable.

La deuxième classe de 3ème est considérée comme « forte » par le professeur ; mais il manque un bon tiers de la classe qui est en voyage scolaire durant la séance.

III.2.4. Les données recueillies

Les séances ont été observées les 15 et 17 avril 2005. Tous les documents écrits par les élèves ont été récupérés, les enseignants n'en ayant pas gardé de trace. De même tous les fichiers des exercices résolus sur logiciels ont été recueillis avec le nom des élèves pour pouvoir être associés aux copies. Un seul groupe a mal enregistré son travail sur le premier exercice, nous privant de sa production sur le logiciel. Ces documents écrits ont constitué la principale source d'information permettant de mener l'étude.

Dans les classes qui ont travaillé en environnement papier-crayon les élèves ont travaillé par 2, 3 ou 4. Sur logiciel, ils étaient soit par deux, soit seul sur l'ordinateur. Compte tenu des effectifs des classes et de cette répartition en groupes, les données recueillies sur logiciels sont beaucoup plus nombreuses que celles sur papier-crayon. Nous tiendrons compte de cette différence lors de l'énoncé des résultats.

Nous étions présente aux quatre séances observées en prenant des notes sur les discussions qu'avaient les élèves au sujet de la méthode de construction qu'ils allaient adopter. Ces notes se sont révélées utiles pour affiner certaines copies dont la trace écrite était un peu faible. Cela nous a permis de mieux interpréter certaines constructions. Néanmoins, ce recueil d'observation est limité puisqu'il est difficile de suivre le travail de plusieurs groupes simultanément.

En plus des notes prises, une caméra a filmé le travail d'un groupe d'élèves dans chacune des séances. Les groupes filmés devant les ordinateurs, n'ont pas apporté d'éléments particulièrement intéressants car dans les deux cas, soit les élèves ont très rapidement trouvé la solution « stable », soit ils ont trouvé la solution stable en observant le travail des groupes voisins. Dans le cas du travail sur papier, le groupe de 6ème filmé a permis d'affiner des remarques sur une certaine utilisation des instruments de construction ; en revanche, en 3ème, les élèves, trop soucieuses de bien faire, n'ont pas beaucoup communiqué ni beaucoup discuté de leurs choix ; d'ailleurs, les copies du groupe filmé présentent des différences importantes, contrairement à ce qu'on remarque habituellement lors d'un travail de groupe.

III.3. Analyse de l'exercice en terme de milieu

III.3.1. Un milieu non organisé versus un milieu riche en rétroactions.

Une première remarque importante sur l'organisation du milieu concerne justement l'absence d'organisation dans le cas de l'environnement papier-crayon. En effet, on a vu qu'aucune consigne concernant la restriction de l'usage des instruments ou le recours à des documents de cours n'avait été donnée à l'enseignant et que celui-ci n'en a donné aucune à ses élèves. Le milieu dans lequel évoluent les élèves, travaillant en environnement papier-crayon, est donc un milieu non travaillé, brut. Le milieu n'a pas l'organisation nécessaire à la production d'une rétroaction qui permettrait aux élèves d'avancer dans la validation ou la réfutation de leur construction. Les seuls éléments qui permettront cette validation proviennent de l'enseignant, mais on a vu qu'il leur avait été demandé de ne pas intervenir ou le moins possible, ou bien des autres élèves. Ce milieu n'est pas un milieu nouveau pour les élèves, ils y sont habitués.

Dans l'étude faite, les élèves de 3ème ont l'habitude du travail en groupes avec leur professeur et ne vont pas chercher de validation auprès d'elle, ils vont se contenter d'une validation au sein du groupe.

En revanche, les 6ème qui travaillent avec ce professeur pour la première fois, vont chercher à plusieurs reprises à obtenir une validation auprès du professeur. N'ayant pu enregistrer toutes les interventions du professeur, il est difficile de savoir, dans l'environnement papier-crayon ce qui a été influencé par le professeur. Ceci dit, les notes prises durant la séance, y compris sur les interventions du professeur nous permettent de dire que lorsque les processus des élèves étaient trop éloignés de ce que le professeur essayait de leur faire dire ou construire, les élèves ne réussissaient pas à en tenir compte et poursuivaient selon leur idée de départ.

En revanche, dans l'environnement de géométrie dynamique, même sans envisager le problème de la création des menus, la stabilité de la figure par dragging constitue une rétroaction du milieu. Les logiciels de géométrie dynamique sont conçus comme un « constituant d'un milieu organisé pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique » Capponi et Laborde (1994). Les élèves ont donc un moyen pour vérifier que leur construction va provenir d'une technologie conforme à l'attente de l'enseignant de par l'obtention ou non d'une figure stable par dragging. Cette conformité à l'attente de l'enseignant peut se traduire en disant que l'élève aura un moyen de savoir si sa construction se situe bien dans le référentiel de la géométrie II. Les logiciels de géométrie dynamique sont conçus pour les constructions issues de technologies mathématiquement non valides soient instables par le dragging. Capponi et Laborde (1994) montrent que la technique de construction employée n'est pas toujours le fruit d'une véritable organisation de la pensée de l'élève, mais parfois le fait d'essais successifs que la non stabilité par dragging permet de réfuter. Cette utilisation des essais successifs, est d'autant plus vraie que le milieu n'a pas été travaillé par un jeu sur les menus, ce qui est le cas dans l'exercice étudié. On voit donc ici que l'obtention de figures stables par dragging dans le cas de notre exercice de construction signifiera qu'il y a eu élaboration d'une technique reposant sur une technologie valide, mais que l'élève n'a pas toujours conscience de la technologie utilisée. Cela peut laisser penser que l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique peut effectivement conforter l'ignorance de la technologie sous jacente à la construction.

Cette différence entre les deux environnements est d'autant mieux mise en évidence dans l'étude proposée, qu'on a vu dans la méthodologie que l'enseignant travaillant en environnement de géométrie dynamique rappelait au début de l'heure l'importance d'obtenir la propriété de stabilité.

Cette première constatation nous amène à penser que les solutions en EGD qui utilisent des techniques conduisant à des figures non stables par dragging devraient être relativement limitées, tandis que les solutions employant ces mêmes types de techniques devraient être plus fréquentes dans l'environnement papier-crayon.

III.3.2. Des solutions spécifiques par niveau de classe en raison des outils à disposition des élèves

La deuxième différence importante dans l'organisation du milieu selon l'environnement concerne la modification des menus du logiciel cabri. Nous avons mentionné dans le paragaphe III.2.2 que les menus des élèves de 6ème étaient adaptés par le professeur. En particulier, les élèves de 3ème avaient accès à la fonction « mesure d'un segment » alors que les élèves de 6ème n'y avaient pas accès. La conséquence de cette différence est la suivante : lorsqu'il est demandé aux élèves de justifier le choix de leur construction, les élèves de 6ème ne peuvent pas faire référence à la mesure des côtés obtenus (ou de la diagonale) et sont donc obligés de chercher ailleurs une justification à leur construction. Les élèves de 3ème

quant à eux, peuvent se contenter de citer les mesures qu'ils obtiennent pour justifier leur construction. De la même manière, en environnement papier-crayon, tous les instruments étant autorisés, les élèves peuvent en particulier mesurer et par conséquent ne rencontrent pas d'obstacles pour invoquer la mesure comme justification à leur construction.

Deux conséquences sur les solutions envisageables : d'une part, le fait qu'un EGD non travaillé va se rapprocher d'un environnement papier-crayon, en ce qui concerne notamment l'usage de la mesure ici. Et d'autre part, les justifications apportées par les élèves n'ayant pas accès à la fonction mesure devraient être de nature différente, peut-être une référence plus grande à une technologie ou à une technique.

III.3.3. La présence possible de solutions « incohérentes » : le résultat de la modification du milieu par l'intervention du professeur

Nous avons précisé dans le paragraphe III.2.2 que nous avions demandé aux enseignants d'intervenir le moins possible durant la séance, pour laisser les élèves seuls dans le milieu, de manière à voir émerger les différences entre les deux environnements, indépendamment de l'enseignant. Nous avons vu que dans les deux environnements les enseignants sont intervenus. Dans les deux cas cela a apporté des modifications dans l'organisation du milieu.

Dans le cas de l'environnement de géométrie dynamique, deux interventions vont modifier les résultats : la première concerne l'explication, en début de séance, de l'usage de la fonction « report de mesure sur demi-droite ». Cette intervention va influencer considérablement les élèves. Il est très probable qu'aucun élève n'envisagera de proposer une solution sans usage de cette fonction alors que des solutions sans cette fonction étaient initialement envisageables. La deuxième concerne le fait que les élèves de 6$^{\text{ème}}$ avaient traité, peu de temps auparavant, un exercice, sur le logiciel cabri, portant sur la construction de polygones réguliers inscrits dans un cercle. Le souvenir de cette activité entraîne la présence d'une technique de construction détachée de toute technologie. La construction résultant de cette technique est stable par dragging, mais ne reflète pas l'appui sur le processus de preuve » pour réaliser la construction ; les justifications accompagnant cette construction feront probablement référence à cette technique.

Dans le cas de l'environnement papier-crayon, c'est l'intervention du professeur concernant la phrase « donner les raisons de cette construction » qui va influencer les réponses des élèves. En effet, en citant le mot « propriété », le professeur va inciter les élèves à chercher la technologie sous jacente à leur construction, même si initialement leur construction n'a pas reposé sur cette technologie. Cette intervention du professeur sur le milieu, peut donner naissance, dans les productions recueillies, à des solutions « incohérentes » dans lesquelles nous verrons par exemple apparaître des mesures sur les côtés du carré et des propriétés dans les raisons demandées.

III.3.4. Une contrainte spécifique au logiciel : l'utilisation des fonctions « report de mesure sur demi-droite » et « cercle de centre donné et passant par un point »

Nous allons nous attacher très spécifiquement à ces deux fonctions du logiciel cabri, car elles reposent toutes les deux sur les problèmes de passage au registre discursif de la notion d'appartenance d'un point à une ligne (ici une demi-droite et un cercle) et nous avons déjà signalé la difficulté relative au changement de registre pour ce point particulier.

Tout d'abord, pour placer un point à une distance donnée d'un point fixé, dans une direction donnée, avec le logiciel cabri, on peut utiliser la fonction « *report de mesure sur demi-droite* ». C'est celle qui nous intéresse ici, puisque le professeur a montré au début de l'heure comment utiliser cette fonction. Lorsque cette fonction est utilisée, le logiciel demande de cliquer sur « *cette distance* » et « *cette demi-droite* » et le point obtenu, fixé sur la demi-droite, ne peut être modifié sans que la distance ou la demi-droite ne le soit auparavant. Mais, il existe une autre fonction, « *report de mesure* » pour laquelle il n'est pas nécessaire de préciser l'appartenance à la demi-droite. Lorsque cette fonction *report de mesure* est utilisée, le point obtenu peut être déplacé le long d'un cercle (non dessiné). La figure obtenue n'est donc pas stable par dragging. Ce qui différencie donc ces deux fonctions est bien le fait de préciser ou non si le point appartient à la demi-droite. Le dessin obtenu est identique dans les deux cas, mais l'un résistera au dragging du point, tandis que l'autre non.

On sait que les élèves ont la possibilité de vérifier que tous les éléments de la figure restent fixes par dragging, on peut donc envisager que les constructions utilisant la fonction *report de mesure* seront rectifiées. Cependant, nous pensons que les élèves pour qui la coordination des changements de registres n'est pas acquise, n'envisagent même pas la possibilité que le point placé ne soit pas stable. Pour eux, le point est positionné sur la ligne, visuellement il n'y a aucun doute, donc ils ne vont pas vérifier la stabilité de ce point.

De la même manière, il existe deux fonctions du logiciel cabri pour tracer un cercle. La première fonction « *cercle* de *centre un point* et *passant par un point* » nécessite de cliquer sur un point pour le centre et sur un point pour le deuxième point. La seconde « *cercle* de *centre un point* » ne nécessite pas de cliquer sur le point par lequel le cercle doit passer. La conséquence de l'utilisation de la seconde fonction, est qu'en draggant le cercle, la figure ne reste pas stable, alors que dans le premier cas, la figure varie seulement si le point fixé varie. Là encore, Il s'agit de préciser l'appartenance d'un point à une ligne dans le registre du discours (adressé au logiciel) et nous pensons que les élèves qui n'ont pas assimilé ce qui, du registre de la figure, doit impérativement se trouver dans le registre du discours, n'envisageront pas que la figure puisse ne pas être stable à cause de l'absence de la précision de l'appartenance du point au cercle.

Pour pouvoir vérifier si cette hypothèse est correcte, il aurait fallu pointer aux élèves concernés la non stabilité des figures obtenues et voir s'ils trouvaient des raisons à cette non stabilité. Nous avons envisagé cette hypothèse trop tard pour pouvoir mener ce questionnement.

Dans l'analyse des solutions, nous nommerons solution*, les solutions utilisant la fonction *report de mesure* et solution**, les solutions utilisant la fonction *cercle de centre donné*. Les solutions *étoilées* seront donc des solutions non stables provenant d'une mauvaise coordination des changements de registres.

IV. Les solutions envisagées

IV.1. La classification des solutions envisagées

IV.1.1. Les constructions basées sur une visualisation forte

Ces constructions correspondent au cas où le carré ne sera pas « déconstruit » pour faire apparaître des unités figurales de dimension 0 ou 1, comme les diagonales ou le point d'intersection des diagonales. Le carré sera envisagé comme une forme rectiligne fermée, ce qui peut se traduire, par exemple, par le tracé des côtés l'un après l'autre, en tournant.

Dans ce type de construction, le point d'appui sur le processus de visualisation est très fort. Il peut être si important que la figure n'est pas produite par des étapes de construction, mais en référence directe avec la visualisation, comme s'il s'agissait d'un « recopiage » de ce qui est vu. Autrement dit, les processus de visualisation et de construction sont très proches.

Les éléments qui permettront de reconnaître ce type de construction sont par exemple l'absence de recours à des instruments de géométrie spécifiques (équerre pour angle droit, par exemple) ou aux fonctions correspondantes du logiciel. Cependant, cette absence de recours aux instruments sera moins caractéristique ici que si la figure considérée était un quadrilatère moins « usuel ». En effet, le carré est une figure connue depuis longtemps par les élèves qui possèdent donc des techniques de construction avec les instruments de géométrie spécifiques. En effet, pour une figure moins bien connue des élèves, le tracé des côtés du quadrilatère comme des segments ou des demi-droites perpendiculaires aurait été le signe d'un passage à des unités figurales de dimensions 0, pour la vision des sommets comme des points d'intersection des demi-droites, et 1 pour l'apparition des segments ou demi-droites comme des unités figurales présentant des propriétés spécifiques. Le carré étant travaillé par les élèves tout au long de l'école élémentaire, un recours à l'équerre pour effectuer le tracé des angles droits aux sommets du carré, ne pourra pas être considéré comme le signe d'une utilisation de la déconstruction dimensionnelle.

IV.1.2. Les constructions effectuées en utilisant la déconstruction dimensionnelle mais sans passage explicite à la preuve

Nous classerons dans ce type de constructions, les constructions qui utilisent des unités figurales de dimension 0 ou 1 qui ne sont pas présentes sur la figure, comme la deuxième diagonale, le point d'intersection des diagonales, un cercle, le point d'intersection d'un cercle et des diagonales, mais pour lesquelles l'utilisation de ces unités figurales ne provient pas explicitement de propriétés mathématiques connues.

Il s'agira par exemple de solutions dans lesquelles la perpendicularité des diagonales ne sera pas utilisée explicitement, mais « reproduite » à partir d'une visualisation du schéma initial ou d'une situation déjà rencontrée. Sur logiciel, la caractéristique de ces solutions est qu'elles ne seront pas stables par dragging.

Par ailleurs, ces constructions pourront utiliser des propriétés redondantes.

Dans les justifications apportées, on peut s'attendre à ce qu'il n'y ait pas de citations de propriétés, mais plus un essai d'explication de la construction.

Ces solutions ne se placent donc plus exclusivement dans la visualisation, et montrent une capacité à opérer sur la figure pour utiliser des propriétés ou des techniques, plus ou moins bien maîtrisées. Il y a un passage à ce que nous avons nommé preuve, sans pour autant que les élèves aient vraiment conscience de ce passage.

IV.1.3. Les constructions effectuées à partir de déconstructions dimensionnelles des figures avec un passage explicite à la preuve.

Comme pour les constructions décrites dans le paragraphe précédent, l'utilisation de la deuxième diagonale, du point d'intersection des diagonales, du cercle et de l'intersection des diagonales et du cercle, seront des éléments de reconnaissance pour ces solutions.

La différence avec les solutions du paragraphe précédent réside dans le fait que le recours à ces unités figurales de dimension 0 ou 1 va s'accompagner d'une utilisation explicite de propriétés nécessaires et suffisantes La référence explicite sera caractérisée par l'obtention de figures stables sur logiciel, ou par l'utilisation d'instruments de géométrie spécifiques, ou encore par l'utilisation d'une seule propriété, sans recours à des propriétés redondantes.

Conformément à ce que nous avons nommé preuve, nous classerons dans la troisième catégorie les solutions qui reposent sur une technique de construction, sans utilisation de propriétés. En effet, il est impossible, sur la construction, de différencier la provenance de la démarche de construction. Ce sont les justifications apportées qui permettront de distinguer si la construction repose sur une propriété ou sur une technique.

IV.2. Solutions envisagées : présentation et analyse

IV.2.1. Les constructions basées sur une visualisation forte

Solution n°1 : le carré vu comme une forme rectiligne fermée

➢ Description :

- mesure de la longueur du côté du carré sur le schéma de l'énoncé
- tracé d'un segment horizontal de la longueur mesurée, puis d'un côté vertical de la longueur mesurée, etc.

Avec le logiciel, les fonctions utilisées sont *report de mesure ou report de mesure sur demi-droite, segments, droites ou demi-droites,* éventuellement *polygone.*

➢ Analyse :

Cette première solution est élaborée en prenant appui uniquement sur la visualisation, sans aucun passage à la preuve. Le carré est en effet vu comme une forme rectiligne fermée ressemblant à la feuille de papier (sauf que le carré a des côtés égaux). C'est la visualisation des bords de la feuille de papier (ou bien des pixels sur l'écran[3]) qui permet de tracer les côtés perpendiculaires du carré.

L'absence de codage des angles droits du carré, sur le schéma donné dans l'énoncé va permettre à cette solution d'émerger chez des élèves pour lesquels le carré n'est pas vu comme un quadrilatère formé par des côtés perpendiculaires, mais comme une forme rectiligne fermée dont les bords sont positionnés comme les bords de la feuille. Il n'y a aucune référence à la perpendicularité par les instruments utilisés et on peut s'attendre à ce que les justifications ne mentionnent pas non plus cette perpendicularité.

Cette construction fait partie de celles pour lesquelles le processus de construction est imbriqué dans celui de visualisation. On ne voit pas apparaître d'étapes de construction.

Cette construction est effectuée très fortement dans le référentiel de la géométrie I, comme le montre par exemple, le non respect de la *règle a*.

Compte tenu du fait que l'obtention de cette solution n'est pas stable par dragging et que les élèves de $6^{ème}$ qui travaillent sur logiciel ont l'habitude de cette stabilité, nous pouvons nous attendre à ne pas rencontrer cette solution en $6^{ème}$. Pour la classe de $3^{ème}$, les élèves ont moins l'habitude de travailler avec les logiciels, mais l'évolution attendue entre la classe de $6^{ème}$ et celle de $3^{ème}$ fait qu'il est peu probable de rencontrer la solution 1 en environnement papier-crayon comme en logiciel dans les classes de $3^{ème}$.

Solution n°2 : Le carré comme un rectangle particulier

➢ <u>Description</u>

- mesure de la longueur du côté du carré sur le schéma de l'énoncé
- tracé d'un segment de la longueur mesurée
- tracé d'un segment perpendiculaire au premier segment de la longueur mesurée
- tracé d'un segment perpendiculaire au deuxième segment de la longueur mesurée
- tracé d'un segment joignant l'extrémité du troisième segment avec une extrémité du premier segment

---

[3] Sur un écran, les pixels se lissent lorsqu'on trace une droite bien verticale ou horizontale ce qui constitue un élément de reconnaissance visuelle des droites perpendiculaires dans cette orientation.

Avec le logiciel les fonctions utilisées sont « *report de mesure* » ou « *report de mesure sur demi-droite* », « *segment* », « *droite* » ou « *demi-droite* », « *droite perpendiculaire* », éventuellement *polygone*

➢ <u>Analyse</u>

Ce qui distingue cette solution de la première est le recours explicite aux angles droits du carré. Comme on l'a vu pour la solution n°1, l'absence de codage des angles droits sur le schéma de l'énoncé, permet d'affirmer que l'élève a pensé de lui-même aux angles droits et donc que l'élève a en tête une définition explicité du carré à l'aide des angles droits. On peut dire qu'il y a un pas de côté effectué par rapport à la visualisation dans cette construction. Cependant, nous avons vu que compte tenu de la familiarité des élèves avec le carré, le recours explicite aux angles droits, ne peut être considéré comme un passage à des unités figurales de dimension 0 et 1 et donc que le processus reste fortement dans la visualisation.

Il y a encore dans cette solution l'utilisation de la mesure sur le schéma donné, ce qui la place dans le référentiel de la géométrie naturelle. Compte tenu de l'objectif travaillé tout au long du collège, on peut penser que les élèves de 3ème n'auront pas recours à cette solution. Par ailleurs, cette construction conduisant à une figure stable par dragging, des élèves de 6ème travaillant en EGD, n'ayant pas intégré la *règle a,* peuvent tout à fait y avoir recours. Cependant, la modification du milieu par le fait que les élèves ont traité un exercice de même nature, peut conduire la solution n°5 (ou même la solution n°6) à venir remplacer cette solution.

Solution n°3 : Utilisation du théorème de Pythagore

➢ <u>Description</u>

- calcul de la valeur approchée du côté par théorème de Pythagore
- Tracé d'un segment de la longueur calculée
- Tracé d'un segment perpendiculaire au premier segment de la longueur calculée
- Tracé d'un segment perpendiculaire au deuxième segment de la longueur calculée
- Tracé du dernier segment

➢ <u>Analyse</u>

Cette solution n'est attendue qu'en classe de 3ème en raison du recours au théorème de Pythagore. On peut même s'attendre à ce que plusieurs élèves y aient recours en raison du très grand nombre d'exercices utilisant le théorème de Pythagore que les élèves de 4ème et 3ème rencontrent.

Cette solution montre un passage certain par la preuve pour effectuer la construction, puisqu'il y a utilisation explicite d'une propriété. Cependant, pour utiliser cette solution il n'y a pas besoin d'avoir recours à des unités figurales de dimension 0 ou 1. Il suffit de voir apparaître le triangle rectangle qui est d'ailleurs déjà tracé sur le schéma de l'énoncé. La visualisation a donc un rôle encore très important dans le choix de cette solution.

La difficulté d'interprétation de cette solution en terme de paradigmes de la géométrie I ou II rejoint les travaux de Kuzniak (2004) sur les exercices à ETG ambigus. En effet, ces travaux montrent que les exigences en termes d'utilisation du théorème de Pythagore sont sources de grosses ambiguïtés pour les élèves. Dans cet exercice de construction, le recours au théorème de Pythagore est légitime en géométrie II, puisque le carré est précisé dans l'énoncé et que la longueur de la diagonale est donnée. La difficulté d'interprétation commence dans l'utilisation de la valeur approchée pour effectuer la construction. Une construction parfaitement en GII consisterait en la construction à la règle et au compas de $\sqrt{3}$. Nous n'envisageons pas cette solution parmi les élèves de collège compte tenu de l'enseignement. Les élèves qui auraient recours au théorème de Pythagore seraient donc tous amenés à utiliser la valeur approchée. Leur ETG ne peut donc pas être décrit comme parfaitement en GII.

L'utilisation de report de mesure rend possible l'apparition de solutions étoilées pour cette solution n°3.

IV.2.2. Les constructions effectuées en utilisant la déconstruction dimensionnelle mais sans passage explicite à la preuve

Solution n°4 : Visualisation des propriétés des diagonales du carré

➢ <u>Description</u>

- schéma initial complété avec la deuxième diagonale
- Tracé d'un segment de 6 cm
- Milieu du segment
- Tracé d'une droite approximativement perpendiculaire au segment (sans que l'emploi de l'équerre ne soit mentionné, ni le mot perpendiculaire employé) passant par le milieu
- Report 3 cm deux fois sur la droite tracée à partir de l'intersection
- Tracé du carré

➢ <u>Analyse</u>

Ce qui distingue cette solution des solutions précédentes, concerne l'ajout d'unités figurales de dimension 0 et 1 par rapport à la figure initiale. Pour réussir cette construction, il faut effectivement penser à ajouter le milieu de la diagonale donnée, c'est un point donc une unité figurale de dimension 0, et la deuxième diagonale qui est une unité figurale de dimension 1. L'élève qui utilise cette construction, n'effectue pas le passage à la preuve pour sa construction, ce que nous pourrons vérifier en analysant les justifications apportées, en revanche, il montre sa capacité à modifier la figure pour effectuer la construction demandée ; ceci peut laisser penser que l'appréhension opératoire de la figure est sinon acquise du moins en cours d'acquisition.

Les processus en jeu sont bien à la fois la visualisation et un passage par le processus de preuve ; cependant la nature de la preuve peut être de l'ordre du « souvenir » d'un travail sur les diagonales des quadrilatères autant qu'une référence explicite à une propriété.

En EGD, cette solution nous semble là encore peu probable puisqu'elle est non stable par dragging

Solution n°5 : Déconstruction de la figure pour utiliser une technique

➢ <u>Description</u>

- Tracé d'un *cercle (sur papier : cercle de rayon 3 cm)*
- Tracé de deux *droites passant par* le centre qui « ont l'air perpendiculaires »
- Tracé du quadrilatère

Sur logiciel :

- *Mesure* du rayon
- dragging *pour avoir la mesure 3*

➢ <u>Analyse</u>

Ce qui est le plus frappant dans cette solution ce sont les nombreuses modifications opérées sur le schéma initial. Il y a en effet ajout du cercle, des diagonales, du point d'intersection des diagonales. La déconstruction dimensionnelle est donc fortement utilisée ici, marquant une distance importante prise par rapport à la visualisation. Cependant, comme dans la solution n°4, l'absence d'utilisation des angles droits pour tracer les diagonales perpendiculaires, montre qu'il n'y a pas recours explicite à une propriété. Le passage à la preuve reste encore de l'ordre d'une technique visuelle, sans explicitation.

Cette solution met donc en œuvre à la fois un détachement de la visualisation du schéma initial, et une utilisation forte d'une technique visuelle. Cette technique est connue des élèves pour avoir été travaillée à l'école élémentaire et, dans le cas des élèves de 6ème travaillant sur logiciel, pour avoir été retravaillée avec l'enseignant, comme nous l'avons signalé au paragraphe III.3.3.

IV.2.3. Les constructions effectuées à partir de déconstructions dimensionnelles des figures avec un passage explicite à la preuve

Solution n°6 Utilisation explicite des diagonales

➢ Description

- Tracé d'un segment de 6 cm.
- Placement du milieu et tracé de la perpendiculaire au segment précédent (ou médiatrice)
- Report 3 cm deux fois sur médiatrice à partir de l'intersection ou cercle
- Tracé du carré

➢ Analyse

Cette construction utilise explicitement la déconstruction dimensionnelle par le passage d'une unité de dimension 2 (ici, le carré) à des unités de dimensions inférieures (les diagonales). L'élève doit penser au milieu du segment initial (dimension 0) et à la perpendiculaire (dimension 1), ou à la médiatrice (dimension 1).

Toujours concernant l'ajout d'éléments pour effectuer la construction, l'utilisation du cercle pour placer les deux sommets manquants (au lieu de reporter 3 cm), montre une bonne capacité à opérer sur la figure puisque rien dans les outils proposés ne pousse à l'utilisation du compas ou de la fonction *cercle*. De plus cette adjonction concerne une unité figurale de dimension 1 (le cercle) servant à placer des unités figurales élémentaires de dimension 0 (les points), comme intersection de deux unités de dimension 1 (la médiatrice et le cercle). Il s'agit donc bien d'un véritable travail sur les changements de dimensions des unités figurales.

Ce qui différencie cette solution de la solution précédente est le fait qu'ici, il semble y avoir utilisation explicite d'une propriété, puisque tous les éléments de la caractérisation du carré par les diagonales sont utilisés explicitement. Le passage au processus de preuve semble plus conscient ; cependant, pour différencier s'il s'agit d'une technique de construction ou de la référence à une preuve, l'analyse des justifications apportées sera indispensable.

On peut penser que cette solution est celle qui est attendue par les enseignants de collège en 6ème, comme en 3ème. Il sera intéressant d'observer si cette solution revient effectivement plus fréquemment que les autres.

Parenthèse sur l'hypothèse H3

En nous appuyant sur l'analyse qui vient d'être faite au sujet de l'utilisation d'unités figurales de dimension 0 et 1, nous allons étayer brièvement l'hypothèse H3, concernant le fait que les EGD permettent davantage de développer le travail sur le rôle opératoire des figures que l'environnement papier crayon. Il s'agit en particulier de l'utilisation de la déconstruction dimensionnelle pour faire apparaître les éléments indispensables à une démonstration. En effet, dans l'analyse précédente, nous avons vu qu'il était possible d'avoir recours au cercle pour placer les points manquants et que l'adjonction de ce cercle était l'occasion d'un travail sur la modification d'une figure. Or, il nous semble que cette utilisation du cercle sera plus fréquente dans le milieu créé par les EGD que dans l'environnement papier-crayon tel que nous l'avons décrit dans le paragraphe III.3.2. En effet dans le milieu papier-crayon non travaillé, la technique liée à la notion de report de mesure d'un segment est celle qui consiste à mesurer ; tandis qu'avec les logiciels de géométrie dynamique, le report de mesure est plus compliqué que le recours au cercle. Les élèves auront donc plus spécifiquement l'occasion d'ajouter un cercle, non mentionné dans l'énoncé lorsqu'il s'agira de reporter des longueurs à partir d'un même point. On peut même ajouter que même sans l'utilisation du cercle, les logiciels de géométrie dynamique nécessitent, pour placer le point, de créer des demi-droites qui n'existent pas auparavant ce qui constitue là encore une déconstruction de la figure.

Le travail en Environnement de géométrie dynamique oblige donc, dans certaines conditions, à s'autoriser à modifier la figure par adjonction d'éléments non précisés dans l'énoncé.

Enfin, analysons ce que peut signifier dans cette solution l'apparition ou non de la solution 6*.

La présence de la solution n°6* (c'est à dire utilisant *report de mesure* au lieu de *report de mesure sur demi-droite*) est tout à fait envisageable puisque la fonction *perpendiculaire* renvoie systématiquement une droite. Aussi, pour reporter des mesures et avoir une figure stable par dragging, l'élève devra envisager de lui-même la création de demi-droites. Or si l'élève regarde la figure obtenue, la demi-droite est tracée, puisque la droite l'est. L'élève pour qui l'ensemble des propriétés d'une figure se voit sur cette figure, sans reconnaître le besoin du passage au registre discursif, ne pourra pas envisager la création de demi-droites, même s'il sait que la « bonne » fonction à utiliser est *report de mesure sur* *demi-droite*. Il se retrouvera donc avec comme seule proposition du logiciel la fonction *report de mesure*, et placera le point obtenu approximativement sur la droite voulue, ce qui lui donnera une solution non stable par dragging du point.

L'obtention d'une solution n°6 stable par dragging pourra donc être le signe d'une bonne maîtrise de l'articulation entre le registre de la figure et le registre discursif.

Solution n°7 : le carré inscrit dans un cercle

➢ Description

- Tracé de 2 droites perpendiculaires
- 4 fois report de mesure 3 cm, ou tracé d'un cercle
- Placement des points aux intersections
- Polygone

➢ Analyse

L'analyse proposée pour la solution n°6 est encore vraie pour cette solution. Ce qui différencie cette solution de la précédente est l'utilisation encore plus forte des modifications opérées sur la figure. En effet, la diagonale qui est représentée par un segment sur le schéma devient ici une droite. Il y a une véritable prise de distance par rapport au schéma de l'énoncé. Si la visualisation du schéma sert peut-être encore d'appui pour envisager cette construction, elle n'est cependant plus au cœur de l'élaboration de la démarche, qui utilise des propriétés (ou une technique) non visibles sur le schéma donné.

Cette solution est aussi, comme la solution n°6 proche de la solution attendue par les enseignants et permet d'obtenir une figure stable par dragging en EGD.

Pour finir, nous souhaitons décrire une construction proche de celle-ci, valable en EGD, qui nous semble répondre à tous les critères attendus pour une solution valide dans l'Espace de travail Géométrique attendu par les enseignants, et qui pourtant ne sera pas stable par dragging. Il s'agit, après avoir tracé les deux droites perpendiculaires, de tracer un cercle de rayon quelconque, de demander la mesure du rayon, puis d'ajuster cette mesure pour obtenir un rayon de 3 cm. La spécificité de cette solution, par rapport à toutes les autres solutions logiciels, provient de l'utilisation de la mesure en dernière étape de la construction. Nous pensons que ce renvoi en fin de construction est possible pour deux raisons. Tout d'abord, le professeur nous a déclaré ne pas travailler avec les mesures. Les élèves qui sont habitués à construire des figures sans références à la mesure sont donc susceptibles de garder cette mesure pour la fin de leur construction. Ensuite, un élève dont l'entrée se fait entièrement par la preuve, n'a pas de raison de commencer par la mesure. Au contraire, les propriétés citées ne font pas référence à la mesure, aussi une entrée par la preuve n'envisagerait la mesure qu'en fin de construction pour se conformer à la demande de l'énoncé. Il nous semble donc que cette solution dénote dans tous les cas un travail en géométrie II. Nous rencontrons donc ici une solution qui, bien que conduisant à une figure non stable par dragging, semble bien révéler un ETGII, très proche de l'ETG idoine pour cet exercice[4]. Nous nommerons solution n°7bis cette nouvelle solution.

Le fait de produire la solution n° 7 ou la solution n°7bis nous semble être simplement le signe de l'habitude de l'utilisation du logiciel. Les élèves de 6ème qui utilisent régulièrement le logiciel cabri vont probablement davantage chercher à obtenir des solutions stables par dragging que les élèves de 3ème chez qui la solution n°7bis peut se rencontrer.

IV.3. Les figures obtenues : description et analyse

IV.3.1. L'aspect de la figure

Nous distinguerons deux aspects de la figure obtenue sur la copie rendue ou sur l'écran final, que nous nommerons Fig1 et Fig2.

Lorsque la figure obtenue ne comporte que le carré ou bien le carré et tous les éléments qui ont servi à sa construction (Fig1), on peut supposer que la consigne a bien été comprise comme étant la construction de la figure décrite (un carré) avec les contraintes indiquées (la diagonale de 6 cm).

Lorsque la figure comporte une seule diagonale (Fig2) et que tous les autres éléments de la construction ont été cachés (gommés sur papier ou cachés sur Cabri) cela indique que la consigne a été comprise comme la reproduction du schéma donné. Autrement dit, il ne s'agit pas d'une construction, mais d'une reproduction du schéma initial.

Selon la démarche de construction adoptée (voir les solutions proposées), le côté « reproduction » ou « construction » sera plus ou moins développé.

[4] Nous n'avions jamais envisagé auparavant le fait qu'une solution puisse conduire à une figure non stable par dragging tout en relevant de la géométrie II. Ce fait nouveau nous paraît très important à prendre en considération dans la création d'exercices sur EGD visant à développer le passage en géométrie II.

IV.3.2. Les vérifications sur la figure

La présence sur les figures obtenues, ou éventuellement dans le texte de justification, de référence à des mesures faites sur la figure sera un élément montrant que, quelle que soit la démarche de construction et quelles que soient les propriétés éventuellement citées pour justifier de cette démarche, l'élève a ressenti le besoin de vérifier que les mesures de sa figure étaient bien cohérentes avec le schéma initial. Les justifications mathématiques qu'il a pu apporter, n'ont pas suffi pour le convaincre de la réussite de sa construction. Dans l'environnement papier-crayon, il n'est pas toujours facile de savoir si les mesures ont été faites après la construction ou lors de la construction. Ce sont souvent les notes prises durant la séance qui nous ont permis de distinguer les deux cas. Nous ferons donc apparaître la présence des mesures dans le tableau des résultats pour les solutions papier-crayon, même si ces vérifications ne sont pas toujours évidentes à la lecture de la copie.

Concernant le travail sur logiciel, nous avons signalé que les élèves de 6ème avaient un menu adapté réalisé par le professeur. En particulier, le professeur n'a pas laissé aux élèves la possibilité de faire apparaître des mesures sur l'écran. Durant la séance, plusieurs groupes d'élèves ont demandé à faire ces mesures, mais ont dû y renoncer en raison du menu. Les observations faites sur les vérifications, seront donc rendues plus délicates par cette différence de configuration du logiciel entre les élèves de 3ème et de 6ème.

L'apparition de mesures sera notée par le mot **mesure** dans la colonne « figure obtenue ».

IV.3.3. L'orientation de la figure

Les trois orientations que nous allons décrire ci-dessous seront en général le résultat de l'ordre dans lequel la construction a été faite. Nous prévoyons donc de rencontrer certaines orientations en relation avec certaines constructions. Nous ne citons pas ici d'orientation pour les figures qui auraient une « orientation quelconque ».

La première orientation (codée Or1) est celle où le carré obtenu a la même orientation que le carré du schéma donné. Cette orientation met en évidence que l'exercice a été compris comme une reproduction du schéma initial. L'exercice a été résolu entièrement dans la perception. Cette orientation s'accompagnera probablement d'une figure répliquant à l'identique le schéma donné (Fig2) et les constructions associées seront probablement celles utilisant plus la visualisation.

La deuxième orientation (codée Or2) correspond à l'image mentale « courante », c'est à dire au carré vu comme unité figurale de dimension 2 : il s'agit de placer les côtés du carré horizontalement et verticalement. On peut distinguer trois cas de cette orientation : dans un premier cas, l'élève a une vision du carré comme une forme rectiligne fermée, c'est à dire une unité figurale de dimension 2. Si cette vision est la seule que l'élève a, la construction effectuée sera probablement de celles qui ne font pas intervenir les diagonales, c'est à dire les solutions 1, 2 ou 6. . Dans un deuxième cas, l'élève saura effectuer le passage à des unités figurales de dimension inférieure et son attachement à cette vision du carré ne posera pas de problème pour la construction. Enfin, le cas où l'élève envisagera le passage aux diagonales, mais où son attachement à cette vision du carré comme unité figurale de dimension 2 sera très forte, un conflit peut survenir avec l'orientation des diagonales décrites ci-dessous. Cela peut conduire à la non réussite de l'exercice.

La troisième orientation (codée Or3) consiste à placer les diagonales perpendiculaires horizontalement et verticalement. On peut s'attendre à rencontrer cette orientation dans les constructions qui commencent par les diagonales. Cette vision des droites perpendiculaires comme des droites horizontale et verticales peut entrer en conflit avec Or2, puisque là aussi les droites perpendiculaires sont horizontales et verticales (mais dans Or 2, il s'agit des côtés du carré).

IV.4. Les justifications apportées : description et analyse

Nous allons distinguer dans les justifications fournies par les élèves, le type de justification selon les catégories définies ci-dessous :

Recopiage : signifie une allusion au fait que la construction ne peut qu'être correcte puisqu'elle a été recopiée (en général mention explicite du mot « copie » ou de la technique de recopiage)

Vérification visuelle : allusion à des mesures de côtés, de diagonales ou d'angles droits, sans citer de propriétés.

Description : description des étapes dans le cas particulier de la figure produite, par exemple « on trace une droite, puis un point, ... ». Ce qui ressemble à un programme de construction.

Technique : énoncé de la technique sans référence à des propriétés, mais sans se placer dans le cas particulier non plus. Par exemple une technique qui revient fréquemment : « en traçant l'intersection d'un cercle avec des diamètres perpendiculaires, on trace 4 sommets d'un carré »

Dragging : justification par la stabilité de la figure

Propriétés reliées à la construction : citation de propriétés en rapport avec la construction effectuée (par exemple « les diagonales d'un carré sont perpendiculaires » lorsque le carré est construit à partir des diagonales)
Propriétés non reliées à la construction : par exemple citation de la définition du carré avec les côtés égaux alors que la construction utilise les diagonales

Plusieurs types de justifications peuvent être données, dans ce cas, elles seront toutes comptabilisées.

Nous avons choisi ces regroupements, car l'objectif de l'analyse des justifications est de faire émerger les élèves qui ont consciemment pris appui sur la preuve pour effectuer des constructions. Nous nous intéresserons donc principalement aux justifications fournies dans le cas de constructions provenant d'un passage par la preuve.

Une construction dont l'analyse montre qu'elle prend appui sur une preuve, peut apparaître dans un groupe d'élèves travaillant en EGD, par tâtonnement. Après plusieurs essais, la figure obtenue étant stable, l'élève aura produit une construction conforme à l'attente de l'enseignant. Néanmoins le processus cognitif sur lequel le groupe a pris appui, n'est pas obligatoirement celui de la preuve. Nous pourrons observer cela selon le type de justifications citées.

V. Les données recueillies

Nous avons récapitulé dans un tableau les différentes données recueillis en indiquant pour chaque élève ou groupe d'élèves, la construction utilisée, la figure obtenue et les justifications apportées. Nous avons par ailleurs ajouté avec la figure lorsque des mesures de vérification ont été faite sur la figure finale, ainsi que l'orientation de cette figure.

	Solution	**Figure obtenue**	**Raisons de la construction**
6ème_pap_3_leilaM	solution n°1	Fig2, Or2, mesure	Vérification visuelle
6ème_pap_3_leilaP			Par recopiage
6ème_pap_4_vanessa	autre solution	Fig2, Or1, mesure	Recopiage et vérification visuelle
6ème_pap_4_lydia	solution n°1		Vérification visuelle
6ème_pap_5_kevin	solution n°1	Fig2, Or1, mesure	Vérification visuelle
6ème_pap_5_derick			
6ème_pap_5_lewis			
6ème_pap_6_marieanne	solution n°2	Fig2, Or1, mesure	Vérification visuelle
6ème_pap_6_anonyme		Fig2, Or2, mesure	
6ème_pap_2_jérôme	autre solution	Fig2, Or2, mesure	Recopiage et vérification visuelle
6ème_pap_2_sylvain			
6ème_pap_1_laetitia	solution n°4	Fig1, Or1, mesure	Vérification visuelle
6ème_pap_1_Mervé			Propriété reliée à la construction
6ème_log_11_marine	solution n°5 sans mesure	Fig2	Technique
6ème_log_20_jonathan	solution n°5	Fig1, Or3	Dragging
6ème_log_20_bryan			Description construction
3ème_log_6_flore	autre solution	Fig1, mesure, Or2	Propriétés reliées à la construction
3ème_log_6_adele			
3ème_log_13_rachel	autre solution*	Fig1, mesure Or3	« j'aurais du utiliser des théorèmes »
3ème_log_13_ferdinand			Grâce aux « Propriétés et théorèmes d'un carré » non citées
3ème_log_16_clara	autre solution*	Fig1, mesure Or3	Propriétés reliées à la construction
3ème_log_16_paloma			
6ème_log_8_thomas	autre solution*	Fig2, conflit Or2 et Or3	
6ème_log_8_daphné			
3ème_pap_1_lucas	Essai solution n°3 mais échec puis, solution n°6	Fig1, Or1, mesure	Vérification visuelle
3ème_pap_1_clément		Fig1, Or2, mesure	propriétés reliées et non reliées à la construction et vérification visuelle
3ème_pap_1_yanis		Fig1, Or1, mesure	
3ème_pap_1_indou		Fig1, mesure	
3ème_pap_2_anasthasia	Solution n°6	Fig1, Or1,	Propriétés reliées et non reliées à la construction
3ème_pap_2_laura			
3ème_pap_3_chloe	Solution n°6	Fig1, Or1, mesure	Propriétés reliées à la construction et vérification visuelle
3ème_pap_3_emre			
3ème_pap_3_lucie			
3ème_pap_3_sarah			
3ème_pap_4_sabrina	Solution n°6	Fig1, Or2,	Propriétés reliées à la construction et vérification visuelle
3ème_pap_4_typhaine			Propriétés reliées à la construction
3ème_pap_4_amélie			Description

3ème_pap_4_jennifer			Propriétés reliées à la construction
6ème_log_1_béatrice	Solution n°6	Fig2, Or3	Technique
6ème_log_1_alix			Description
6ème_log_2_margaux	Solution n°6	Fig2, Or3	Raisons = but de l'exercice
6ème_log_2_juliette			
6ème_log_3_maud	Solution n°6**	Fig2, Or3	Raisons = but de l'exercice
6ème_log_3_sarah			
6ème_log_5_clément	Solution n°6	Fig2	Description
6ème_log_5_steven			Dragging
6ème_log_6_leopold	Solution n°6	Fig1	Technique
6ème_log_10_suzanne	Solution n°6	Fig2, Or3	Technique
6ème_log_10_jeanne			?
6ème_log_12_wilson	Solution n°6	Fig2, Or2	« symétrie » ?
6ème_log_12_julien			technique
6ème_log_14_nil	Solution n°6	Fig2, Or2	Description
6ème_log_14_maxime			
6ème_log_16_max	Solution n°6	Fig2, Or2	Technique
6ème_log_16_loris			
6ème_log_21_mohamed	Solution n°6**	Fig1	
6ème_log_21_paul			Vérification visuelle
3ème_log_1_constance	Solution n°6	Fig1 mesure	Propriétés reliées et non reliées à la construction
3ème_log_1_Cyril			
3ème_log_3_Paul	Solution n°6*	Fig1	Vérification visuelle
3ème_log_3_arnaud			
3ème_log_4_quentin	Solution n°6**	Fig1, Or3	Technique ? dragging
3ème_log_5_maxime	Solution n°6*	Fig1	Propriétés reliées à la construction
3ème_log_7_romain	Solution n°6	Fig1, mesure	
3ème_log_8_julia	Solution n°6**	Fig1, mesure	Propriétés reliées à la construction et technique.
3ème_log_8_flora			
3ème_log_10_robin	Solution n°6**	Fig1, Or2	Description
3ème_log_10_arthur			
3ème_log_14_victor	Solution n°6*	Fig1, mesure Or3	Propriétés reliées et technique
3ème_log_14_louis			
3ème_log_20_rael	Solution n°6	Fig1	Propriétés reliées à la construction
3ème_log_20_raphael			Propriétés reliées et non reliées à la construction
6ème_log_4_margot	Solution n°7	Fig1, Or3	Technique
6ème_log_4_camille			
3ème_log_11_julia	Solution n°7*	Fig1, mesure, Or3	Propriétés reliées et non reliées à la construction
3ème_log_21_Jihane	Solution n°7	Fig1, mesure	Propriétés reliées à la construction
3ème_log_21_charlotte			
3ème_log_12_victoire	Essai solution n°3, puis solution n°7bis*	Fig1, mesure, Or3	Propriétés reliées à la construction
3ème_log_12_monique			

Afin de ne pas alourdir les tableaux de synthèse présentés dans la suite, nous ne ferons pas apparaître la solution n°3 (utilisant le théorème de Pythagore) puisqu'elle n'a été proposée dans aucune copie.

Lors des séances observées, nous avons vu deux groupes (l'un en environnement papier-crayon, et l'autre en EGD) essayer cette solution. Dans les deux cas, l'obstacle rencontré par le fait qu'il fallait chercher deux côtés de l'angle droit (ils sont égaux, mais les élèves n'ont pas vu que cela permettait de résoudre l'équation), n'a pu être franchi et la solution a été abandonnée. D'autres groupes ont peut-être effectué la même tentative, mais nous n'avons pu les observer. Nous ne reviendrons pas sur cette solution.

VI. Analyse des données recueillies

VI.1. Une première analyse : les élèves de 3ème évoluent dans un espace de travail géométrique proche du référentiel de la géométrie II

Nous utiliserons les tableaux de synthèse suivants ainsi que la description de quelques productions précises de productions d'élèves pour illustrer les résultats.

Tableau de synthèse par niveau de classe (tableau 1)[5]

	pas de déconstruction			déconstruction sans preuve			Déconstruction et preuve		
	Sol 1	Sol 2	autres	Sol 4	Sol 5	autres	Sol 6	Sol 7	total
6ème	3	1	2	1	2	1	10	1	21
3ème	0	0	0	0	0	3	13	3	19

Tableau de synthèse des figures construites par niveau de classe (tableau 2)

	Fig1	Fig2	Sans mesure	Avec mesures[6]	Or1	Or2	Or3
6ème	5	16			4	8	6
3ème	19	0	7	12	7	4	6

Croisement entre l'apparition de mesures pour vérifier et de propriétés pour justifier en 3ème. (Tableau 3)

Classes de 3ème	Autres justifications	Justifications avec des propriétés
Pas de mesures de vérification	3	4
Mesures de vérification	2	10

[5] Les totaux des tableaux présentés sont différents car ils prennent en compte soit le nombre de groupes, soit le nombre de productions recueillies, selon si les élèves ont rendu des productions identiques ou non.

[6] Pas de données pour les 6ème car seuls ceux travaillant en environnement papier-crayon pouvaient effectivement mesurer.

VI.1.1. Mise en évidence des difficultés liées à l'importance de la place accordée à la visualisation, sur quelques observations en $6^{ème}$.

Nous allons décrire cinq productions d'élèves de $6^{ème}$, accompagnées d'observations faites durant les séances, qui mettent en évidence l'importance de la visualisation chez les élèves de $6^{ème}$ et les difficultés rencontrées pour réussir à passer du référentiel de la géométrie I au référentiel de la géométrie II.

La première production concerne l'observation enregistrée par la vidéo dans la classe de $6^{ème}$ travaillant en environnement papier-crayon. Il s'agit du groupe $6^{ème}$_pap_3 qui a produit une solution n°1, c'est à dire utilisant la mesure du côté et pas du tout la notion de perpendiculaire. Une des deux élèves a immédiatement commencé à tracer le carré en utilisant la même orientation que le carré donné (Or1) et les mesures faites sur la figure, tout ceci à l'aide d'une règle graduée (sans utiliser les graduations de la règle pour faire les angles droits). Sa voisine lui a alors fait remarquer que c'était l'équerre qu'il fallait utiliser puisque le quadrilatère était un carré. Docilement, l'élève a pris son équerre et s'en est servi pour mesurer, comme elle l'avait fait avec la règle et sa voisine a été satisfaite. Ces deux élèves ont retenu que la construction d'un carré se fait avec une équerre (elles mentionnent d'ailleurs cet instrument dans la description) mais n'ont pas fait le lien entre l'utilisation de l'équerre et les angles droits du carré. Ces élèves ont donc bien lu le texte accompagnant l'énoncé, mais la vision du carré comme forme rectiligne fermée est si forte qu'elles ne peuvent la décomposer pour laisser une place aux unités figurales de dimension 1 (les côtés) et former des angles droits.

Une deuxième production nous a paru intéressante en raison de la présence de deux démarches différentes dans un même groupe et de la discussion que ces élèves ont eue. Il s'agit du groupe $6^{ème}$_pap_1 formée par Laetitia et Mervé qui ont utilisé la solution n°4, c'est à dire un recours aux diagonales par la visualisation.

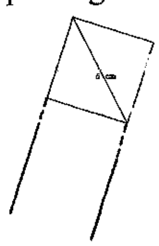
C'est tout d'abord sur l'orientation de la figure qu'on remarque une différence. La figure de Laetitia est orientée comme le schéma de l'énoncé (Or1), tandis que Mervé propose un carré avec ses côtés horizontaux et verticaux (Or2), ce qui laisse penser que Laetitia est plus dans la reproduction du schéma que Mervé.

Ensuite, Laetitia a tracé, sur le schéma de l'énoncé, la deuxième diagonale ce qui lui a permis de visualiser le fait que les diagonales ont le même milieu, tandis que durant la séance, nous avons observé que Mervé cherchait à convaincre Laetitia qu'on savait que les diagonales allaient être perpendiculaires (sans avoir recours au schéma). Autrement dit, Mervé semblait bien effectuer un passage par la preuve, mais elle ne réussissait pas à expliquer sur quoi reposait sa conviction. Mervé n'a d'ailleurs pas su citer de propriétés relatives aux diagonales dans les justifications.

Pour finir, Laetitia a accepté la construction proposée comme correcte puisqu'elle « ressemblait bien à celle de départ », elle n'a donc pas pu se détacher de la visualisation, malgré les échanges avec Mervé.

Ce qui semble être mis en avant dans cette observation est la difficulté à changer de processus cognitif lorsque le processus allant de la visualisation à la construction est bien installé et ne rencontre pas d'obstacles à son utilisation. C'est ici que l'effet de la constitution d'un milieu favorisant la rencontre de cet obstacle pourrait être intéressant à observer. Cela renvoie à l'idée d'observer quel passage à la preuve l'utilisation d'un Environnement de géométrie dynamique permet de travailler.

Un autre groupe a également rencontré un désaccord sur la démarche à adopter et l'élève la plus plongée dans la visualisation n'a pas réussi à admettre que l'autre construction proposée (la solution n°1) était aussi correcte. Il s'agit du groupe 6ème_pap_4 dont une des constructions a consisté en le prolongement des côtés du carré donné, pour obtenir une reproduction « à l'identique ».



L'appui physique sur le schéma donné, nous semble montrer que la figure n'est pas reconnue comme une figure mathématique, mais comme un dessin quelconque. L'élève semble très loin des attentes des enseignants du collège, d'autant plus qu'elle n'a pas réussi à adhérer à la solution n°1 proposée par l'autre élève du groupe.

Une quatrième production d'élèves intéressante par le fait que les deux élèves sont entièrement plongés dans la visualisation, est la construction fournie parle groupe 6ème_pap_2, dont voici la description :

- mesure de la longueur du côté du carré sur le schéma de l'énoncé
- Tracé d'un segment de longueur 6 cm (une diagonale) orienté approximativement de 45° par rapport à l'horizontale

- Tracé d'un segment vertical de la longueur mesurée ayant une extrémité commune avec le segment précédent
- en tournant : 1 segment horizontal joignant le segment précédent et la diagonale, 1 côté vertical de la même longueur …
- mesure du deuxième côté et reprise du dessin si le deuxième côté n'a pas une longueur suffisamment proche de la longueur mesurée.

Cette solution utilise le tâtonnement pour ajuster le trop plein d'informations fourni à la fois par le schéma de départ et la mesure sur ce schéma. Sur les deux copies, on voit très bien le tâtonnement mentionné par le gommage d'essais successifs. Mais, c'est surtout la justification qui nous a paru intéressante : les élèves disent que leur construction est correcte car « c'est la copie du schéma ». Cette référence à la copie montre bien que le chemin à parcourir avant d'atteindre les exigences de la géométrie II est encore long pour ces élèves..

La dernière observation concerne le conflit entre les orientations Or2 (côtés du carré horizontaux et verticaux) et Or3 (diagonales horizontales et verticales) qui provient de la seule vision des droites perpendiculaires comme des droites horizontales et verticales.
Nous avons rencontré ce conflit à plusieurs reprises tant en EGD qu'en environnement papier-crayon.

Par exemple, le groupe 6ème_Log_8, que nous avons observé durant la séance, a passé beaucoup de temps à essayer de concilier les deux orientations. Ils ont commencé par tracer un segment de 6cm horizontalement puis ont cherché à construire le carré autour de cette diagonale, mais n'ont pas réussi car le carré ne pouvait pas avoir ses côtés horizontaux et verticaux. La solution finalement proposée a probablement été inspirée par les groupes voisins et est une solution « très bancale ». Cela signifie que ces élèves n'ont pas réussi à concilier le fait de commencer à tracer des diagonales perpendiculaires avec la vision « usuelle » du carré.

On retrouve ce conflit sur les figures produites par les élèves en environnement papier-crayon. En effet, 7 copies sur les 14 relevées en 6ème, laissent apparaître la trace d'un essai de carré de côté 6 cm. C'est à dire que la moitié des élèves, ont d'abord envisagé de tracer un côté horizontal de 6cm, mais ont confondu son rôle de diagonale avec le côté du carré à cause de cette position horizontale. Ce qui semble les avoir arrêtés c'est, d'une part le manque de place dans le cadre prévu pour la construction, et d'autre part, la différence de taille entre la figure obtenue et le schéma donné.

Ici encore on voit l'importance accordée à la visualisation chez les élèves de 6ème et l'importance d'un travail ciblé pour permettre de se dégager de cette visualisation.

VI.1.2. La mesure : révélateur de la contradiction entre l'Espace de Travail Géométrique des élèves de 3ème et l'ETG instauré par les professeurs.

Le **tableau 1** nous montre qu'aucun élève de 3ème ne propose de solution faisant appel à une mesure sur le schéma initial. En revanche en 6ème, près d'un tiers des élèves mesurent sur le schéma donné la longueur du côté du carré pour effectuer la construction. Cette première observation montre que les élèves de 3ème ont bien intégré la *règle a* du collège. Cette tendance est cohérente avec l'ETG que les professeurs de collège cherchent à installer ; l'évolution entre la 6ème et la 3ème est donc en adéquation avec l'enseignement qu'on y rencontre.

En revanche, ce qui vient contredire cette cohérence est le recours très fréquent aux mesures pour vérifier la construction que l'on voit apparaître dans le **tableau 2,** pour les élèves de 3ème. Nous ne faisons pas ici de comparaison avec les élèves de 6ème puisque le milieu était différent en EGD par le jeu sur les menus.

Les élèves de 3ème utilisent donc la mesure pour se convaincre que la construction est correcte, mais savent que la prise d'information sur une figure est interdite dans la géométrie du collège. Ce point est confirmé par le **tableau 3** dans lequel on voit que 10 productions sur 19 ont recours à des mesures pour vérifier la construction tout en justifiant la construction, pour le professeur, par des propriétés.

Il nous semble que tous ces élèves de 3ème ont bien compris les attentes de l'enseignant (*la règle a* et qu'une justification se fait par la citation de propriétés), mais qu'ils ont besoin d'une vérification par la mesure pour se convaincre que leur construction est correcte. La perception a encore un rôle important dans l'ETG personnel de ces élèves. Les propriétés qu'ils énoncent et les étapes des constructions correspondent à une démarche relevant de la géométrie II, mais tout cela ne constitue pas pour eux une preuve de l'exactitude de leur solution. Nous avons même observé un groupe d'élèves de 3ème en environnement papier-crayon (3ème_pap_1) dans lequel un élève, après avoir effectué une construction avec la solution n°6, a vérifié en mesurant et a conclu, devant l'inexactitude de ses mesures : « j'ai faux de 2 mm ». Nous nous attendions à ce qu'il mentionne soit l'erreur de mesure, soit l'approximation de la construction, mais aucun élève du groupe n'a réussi à convaincre cet élève que la construction était réellement correcte. Cet élève a bien un espace de travail géométrique personnel en géométrie I, mais connaît les exigences de l'ETG de son professeur.

Nous voyons donc apparaître ici une contradiction entre les ETG instaurés par les professeurs, dans lesquels les élèves semblent relativement à l'aise et l' ETG personnel de l'élève, que l'élève sait ne pas devoir utiliser lorsqu'il s'adresse au professeur.

Devant l'importance du recours à la mesure, on peut imaginer qu'un travail en EGD avec un menu adapté (sans la mesure d'un segment), permettrait en obligeant les élèves à se convaincre autrement de l'exactitude de leur construction, d'aider les élèves à se construire des moyens de vérifications plus proches des attentes de la géométrie du collège.

Nous verrons dans le paragraphe VI.2. que l'environnement de géométrie dynamique conduit effectivement à d'autres stratégies de vérifications, mais qu'elles ne sont pas nécessairement plus proches des attentes de la géométrie du collège.

VI.1.3. En 3ème, le niveau de Van Hiele révélé par les constructions est différent de celui provenant des justifications

Le tableau n°1 montre qu'aucun élève de 3ème ne résout l'exercice purement dans la visualisation, sans effectuer aucune opération sur la figure, tandis qu'un tiers des élèves de 6ème proposent des constructions restant purement entre les processus de visualisation et de construction, sans envisager de modifier le schéma donné.

Les colonnes du tableau n°2, qui concernent les figures obtenues, montrent que tous les élèves de 3ème produisent des figures qui ne sont pas des « figures reproduction ». En effet, aucun élève de 3ème n'a éprouvé le besoin de cacher (gommer sur papier ou cacher sur logiciel) les éléments ajoutés pour effectuer la construction. On pourrait penser que la différence, sur logiciel, avec les élèves de 6ème provient d'une moins bonne connaissance du logiciel ; autrement dit, les élèves de 3ème sur logiciel ne connaîtraient pas la fonction « cacher / montrer ». Cet argument ne tient pas car plusieurs groupes d'élèves de 3ème ont utilisé cette fonction pour cacher les longueurs utilisées. Les élèves de 3ème connaissent donc l'utilisation de cette fonction, mais n'y ont pas recours pour terminer leur exercice.

On peut donc conclure que pour tous les élèves de 3ème, la production d'une figure qui comporte les éléments ayant servi à sa construction constitue bien la réponse à la construction demandée. En revanche, les trois quarts des élèves de 6ème cherchent à donner comme figure finale la reproduction identique du schéma initial. Ceci montre bien que l'importance de la visualisation diminue entre la 6ème et la 3ème.

L'importance grandissante du processus de preuve se note aussi par les justifications apportées.

Tout d'abord, l'observation du tableau des résultats (paragraphe V) montre qu'aucun élève de 6ème (ni sur logiciel, ni sur papier-crayon) ne cite des propriétés. Les justifications qui se rapprochent le plus des propriétés sont toujours en relation avec la construction La justification que nous avons citée dans le paragraphe IV.4. est un exemple qui revient plusieurs fois. Mais on rencontre aussi d'autres justifications qui reprennent l'idée de la construction. Citons par exemple le groupe 6ème_log_11 « le cercle et les diagonales font 4 points et ça fait un carré ». On voit bien le tracé apparaître dans l'énoncé de cette justification ; il n'y a donc pas référence explicite à une propriété mathématiques en 6ème. Ce type de justification en 6ème dénote un niveau de Van Hiele entre la reconnaissance visuelle et l'analyse.

Ensuite, on constate sur le tableau du paragraphe V que les élèves de 3ème sont beaucoup plus nombreux à citer des propriétés. On a vu que le professeur de la classe travaillant sur papier avait explicité la question portant sur les justifications en précisant qu'il s'agissait de citer des propriétés, mais dans le travail sur logiciel, on retrouve aussi plus de propriétés qu'en 6ème.

En revanche, si les élèves de 3ème sont plus nombreux à proposer des propriétés que les élèves de 6ème, on rencontre tout de même 9 groupes (sur 16 qui proposent une solution n°6 ou 7), qui bien qu'ayant proposé une solution qui semble prendre appui sur un processus de preuve, ne proposent pas de propriétés en relation avec la technique utilisée.

Cela nous amène à dire que la production d'une construction prenant appui sur une preuve, ne signifie pas nécessairement un passage conscient par la preuve ou que cette preuve ne constitue pas l'unique point d'appui pour les élèves. Par exemple, le groupe 3ème_pap_1 a eu comme première idée de passer par le théorème de Pythagore (solution n°3). Ils ont ensuite renoncé à cette solution et se sont rabattus sur le passage par les diagonales. Or certaines des propriétés citées pour justifier la construction, font référence à l'égalité des longueurs des côtés du carré. Autrement dit le lien entre la technique de construction et la justification n'est pas fait. La justification apportée montre que malgré un appui sur une propriété mathématique pour effectuer la construction, la vérification de cette construction s'effectue de nouveau par un passage à la visualisation. Le niveau de Van Hiele qui semble apparaître dans la construction (si l'on se réfère au type de construction utilisé) est donc proche d'un niveau de déduction informelle, tandis que la vérification se rapproche plus d'un niveau d'analyse ou de reconnaissance visuelle.

Nous venons donc de voir que si l'utilisation de constructions prenant appui sur une preuve est très fréquent en 3ème, les élèves de 3ème ne perçoivent pas toujours cet appui sur la preuve. Ils ne voient pas la technique utilisée comme une caractérisation nécessaire et suffisante.

Il y a donc un décalage entre ce que révèle la construction et le niveau de Van Hiele atteint par ces élèves dans l'exercice considéré.

Notons tout de même certains cas où il y a adéquation entre le niveau révélé par la justification et le type de construction. Par exemple, le groupe 3ème_Log_16 propose une solution qui utilise à la fois la définition du carré avec les angles droits et l'égalité des côté et la caractérisation du carré par les diagonales ; Dans les justifications apportées, ce groupe, cite explicitement les deux propriétés utilisées dans la construction. Nous n'étudierons pas plus ces productions, car ce qui nous intéresse c'est de voir le décalage qui existe entre les constructions et les justifications.

Nous verrons dans le paragraphe suivant l'influence de l'environnement de géométrie dynamique sur ce décalage.

VI.2. Une deuxième analyse : la différence des processus cognitifs à l'œuvre selon l'environnement

Tableau de synthèse par artéfact (tableau 4)[7]

	pas de déconstruction			déconstruction sans preuve			déconstruction et preuve		
	Sol 1	Sol 2	autres	Sol 4	Sol 5	autres	Sol 6	Sol 7	total
Log	0	0	0	0	2	4	19	4	28
Pap	3	1	1	1	0	0	4	0	11

Tableau de synthèse des figures construites par niveau de classe (tableau 5)

	Fig1	Fig2	Sans mesure	mesures	Or1	Or2	Or3
Log	20	10	5	10	3	6	12
Pap	5	6	2	11	8	6	0

[7] Nous rappelons que les totaux des tableaux sont différents car ils prennent en compte soit le nombre de groupes, soit le nombre de productions recueillies, selon si les élèves ont rendu des productions identiques ou non.

Remarque : Dans la ligne Log, pour les mesures, seuls les $3^{ème}$ sont comptabilisés, car les $6^{ème}$ n'avaient pas accès à la fonction *mesure*.

VI.2.1. Disparition du passage à la visualisation dans les constructions en EGD

le **tableau 4** nous indique de façon très marquée qu'aucun élèves travaillant sur logiciel n'a proposé de solution relevant d'un processus cognitif purement visuel, sans recours à une déconstruction de la figure, tandis que la moitié des productions en environnement papier-crayon ont recours à des solutions purement visuelles. Cependant le rôle joué par l'environnement de géométrie dynamique est à tempérer, compte tenu d'une part des effectifs, d'autre part des niveaux des élèves décrits par les enseignants et enfin de la technique développée en $6^{ème}$ par le professeur utilisant le logiciel cabri (l'exercice déjà mentionné sur la construction de polygones réguliers à partir d'un cercle).

Par ailleurs, les solutions dans lesquelles de nombreux éléments sont non stables par dragging, sont peu nombreuses dans le travail sur logiciel.

On peut aussi noter, dans le **tableau 5**, des différences entre les deux environnements, concernant l'orientation des figures construites. Ces différences marquent aussi un moindre recours à la visualisation dans le cas de l'utilisation d'un écran d'ordinateur, puisque très peu de figures sur logiciel sont orientées comme le schéma de l'énoncé (Or1).

Cependant la distance prise par rapport au schéma de l'énoncé dans le cas de l'utilisation d'un écran peut provenir, indépendamment de tout processus cognitif, de l'éloignement physique qui existe entre la feuille de papier et l'écran de l'ordinateur. L'utilisation d'EGD favorise donc, de ce point de vue, un certain détachement de la vision du schéma de l'énoncé, mais c'est uniquement dû à la disposition physique de l'écran, sans que la conception du milieu n'intervienne.

VI.2.2. Des justifications beaucoup moins visuelles en EGD, mais un passage au processus de preuve toujours incertain

Comme nous l'avons noté à plusieurs reprises, l'observation du type de justifications apportées selon l'environnement va permettre de vérifier le lien qui existe entre la production d'une construction prenant appui sur la preuve et le réel passage au processus de preuve pour les élèves. Nous avons donc récapitulé dans le tableau suivant, les types de justifications répertoriées dans le tableau du paragraphe V.

Tableau sur les justifications fournies selon l'environnement (tableau 6)

	Propriétés reliées à la construction	Propriétés reliées et non reliées à la construction	Vérifications . visuelles	techniques	description	Recopiage : papier Dragging : logiciel	total
Papier-crayon	5	2	11	0	1	3	19
logiciel	8	3	2	10	4	3	29

Ce tableau indique que les références à des propriétés reliées à la construction sont aussi fréquentes en environnement papier-crayon qu'en environnement de géométrie dynamique. L'organisation du milieu ne fait donc émerger aucune différence, alors même qu'une partie des élèves (tous les $6^{\text{ème}}$ travaillant en EGD) ont travaillé sans la possibilité de recourir à la mesure pour vérifier.

Autrement dit, l'interdiction d'utiliser la mesure, diminue effectivement les justifications par référence à la mesure (11 sur 19 en environnement papier-crayon, 2 sur 29 en EGD), mais ne conduit pas pour autant à l'augmentation des références à des propriétés.

Le deuxième enseignement du tableau concerne le recours à des techniques pour justifier les constructions. Aucun élève travaillant en environnement papier-crayon ne cite des techniques, tandis que plus d'un tiers des élèves travaillant en EGD citent des techniques comme justification. Tout se passe comme si les justifications par vérification visuelle, étaient remplacées par des justifications à l'aide de techniques (ou de description).

Dans le paragraphe VI.1.3. page 56, nous avons remarqué que l'énoncé de ces techniques traduit les étapes d'une construction, même si elles sont formulées de manière plus détachées de la construction présente que dans le cas des descriptions. Ces techniques semblent donc bien provenir directement d'une construction déjà rencontrée ou bien élaborée à l'occasion de l'exercice. Autrement dit, les élèves qui citent ces techniques prennent appui sur leur construction pour se créer des « preuves ».

La flèche bleue du schéma 3 est ici mise en œuvre.

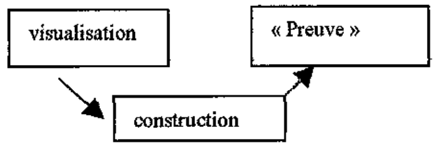


Schéma 3

Nous mettons des guillemets à « preuve » car les techniques créées agissent comme un référent théorique pour les élèves qui pourront s'en resservir ensuite, mais ces techniques ne reposent pas sur un raisonnement mathématique construit. L'élève se construit un référentiel théorique qui n'est pas celui attendu par la géométrie axiomatique naturelle.

Nous avons vu que la technique ou « preuve » que l'élève utilise peut provenir soit d'une technique déjà connue, soit des essais successifs invalidés par le dragging du logiciel.

Nous allons illustrer ce processus en observant l'ensemble du travail fourni par le groupe 3ème_log_8.

Nous avons observé les différents étapes qui ont conduit ce groupe à proposer la solution n°6 : les deux élèves ont commencé par essayer d'utiliser la fonction *polygone régulier* du logiciel, associée à une mesure fixée de 6cm. A deux reprises, elles ont recommencé car la figure obtenue n'était pas stable. Ensuite, le professeur est intervenu pour leur dire de ne pas utiliser cette fonction. Elles ont alors eu l'idée de tracer quatre droites perpendiculaires deux à deux pour former un quadrilatère avec 4 angles droits, et elles ont constaté qu'elles obtenaient un rectangle. Elles ont alors essayé d'obtenir les 4 côtés de même longueur à partir de leur 4 droites perpendiculaires, mais n'arrivaient pas à obtenir « exactement » la même mesure par le logiciel. Enfin, mais nous n'avons pas pu observer pourquoi, elles ont effectué la construction n°6.

Ces différentes étapes montrent bien que la solution finale est apparue après des essais successifs, rejetés, comme prévu, en raison de la non stabilité par dragging.

Ce que nous ne savons pas ici est quelle trace les solutions rejetées vont laisser aux élèves. Par exemple, l'essai qui a conduit à un rectangle va-t-il constituer pour ces élèves à l'établissement d'une « propriété » sur l'insuffisance des côtés perpendiculaires pour construire un carré ? Et si cette « propriété » est établie, quel sera son statut ? Sera-t-elle une propriété inscrite dans une axiomatisation ou bien restera-t-elle à l'état de technique formulée par exemple de la manière suivante : « quand on trace quatre côtés perpendiculaires, on n'est pas sûr d'avoir un carré. » ? Nous n'avons pas cherché à répondre à ces questions, mais elles constituent un élément important pour affiner la connaissance des processus cognitifs qui découlent de l'utilisation du milieu créé par les logiciels de géométrie dynamique.

Pour terminer l'étude de cet exemple, nous allons revenir sur les propriétés utilisées pour justifier la construction.

Nous venons de voir que la construction n'a pas été produite par un lien direct entre la preuve et la construction. Il y a eu des va et vient entre la visualisation, la preuve et la construction. Les différentes flèches du schéma de Duval ont été ici mises en œuvre. Cependant, les élèves proposent la justification suivante : « propriété utilisée : celle du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle », puis elles tentent de décrire de manière théorique ce qu'elles ont utilisé : "la médiatrice de la diagonale du carré représente l'autre diagonale".

Le tâtonnement provenant des essais successifs de la construction se retrouve donc dans la justification. On a également l'impression que les élèves tentent de se souvenir de propriétés apprises pour les citer ici, mais elles ne parviennent pas à faire un pas complet du côté de la preuve. L'emprise de la construction continue à avoir trop d'effet.

Nous ne pouvons pas dire si ce qui vient d'être observé chez ces élèves est une tendance fréquente car nous n'avons pas observé assez d'élèves au travail, mais le fait que les justifications émises en restent à l'état de techniques très reliées à la construction, nous conduit à penser qu'il faut rester vigilant sur les conclusions qu'on pourrait tirer d'un travail de construction pur avec des élèves.

Tout ceci nous conduit à dire que les EGD permettent effectivement de donner une illusion de constructions prenant appui sur des preuves, mais que la flèche bleue réellement créée n'est peut être pas une aide pour la géométrie qu'on essaie d'installer au collège. C'est à dire qu'elle ne contribue pas à améliorer les niveaux de Van Hiele, en ne faisant pas travailler la référence explicite à des propriétés nécessaires et suffisantes. Cette constatation rejoint celle que nous avions citée (page 15) venant d'un professeur qui utilisait le logiciel cabri avec des étudiants pour la première fois. La géométrie pratiquée en EGD ne semble pas être tout à fait de même nature que la géométrie développée en environnement papier-crayon ; en particulier elle semble s'appuyer sur un ensemble d'axiomes qui paraissent beaucoup plus basés sur des techniques (reposant sur une technologie mathématique, mais technologie qui n'a pas besoin d'être connue pour réussir) que sur la l'axiomatisation de la géométrie euclidienne.

VI.3. Une troisième analyse : vérification de l'hypothèse H2

Cette troisième analyse repose sur l'importance du nombre de solutions étoilées obtenues. Rappelons que ces solutions sont des solutions non stables par dragging obtenues après utilisation des fonctions *report de mesure* ou *cercle*. Nous présentons ci-dessous dans un tableau les solutions logiciels pour lesquelles des solutions « étoilées » ont été rencontrées.

	autre*	Sol 6	Sol 6*	Sol 6**	Sol 7	Sol 7*	total
6ème	1	8	0	2	1	0	12
3ème	2	3	3	3	1	2	14

Une tendance très marquée concerne la faible apparition des solutions étoilées chez les élèves de 6ème. Seuls 3 groupes sur 12 ont proposé une solution étoilée. En revanche, en 3ème, 10 groupes sur 14 ont proposé de telles solutions. Rappelons que les solutions étoilées reflètent des solutions pour lesquelles il manque la précision de l'appartenance d'un point à un cercle ou d'un point à une droite. Il est donc remarquable ici que les élèves de 6ème sont beaucoup plus nombreux à penser à préciser ces appartenances que les élèves de 3ème, alors que les élèves de 3ème ont dû entendre répéter plus souvent l'importance de préciser ces appartenances.

Une interprétation possible est que les élèves de 6ème connaissent mieux les fonctions du logiciel que les élèves de 3ème qui utilisaient le logiciel pour la première fois cette année là, lors de la séance observée. Cependant, si cette remarque est exacte pour l'utilisation de la fonction « cercle », elle est incorrecte pour la fonction report de mesure, puisque les élèves de 6ème ont reçu au début de la séance les mêmes explications concernant cette fonction que les élèves de 3ème.

Il semble donc bien que ce soit l'habitude de l'utilisation du logiciel qui conduise presque tous les élèves de 6ème à préciser les appartenances de points à des lignes.

Pour confirmer ce que nous venons de constater, il serait intéressant de voir l'attitude des élèves de 6ème (habitués à travailler en EGD) dans un environnement papier-crayon. Le passage au registre discursif se ferait-il réellement selon les critères mentionnés, ou bien le fait de changer d'environnement ferait-il changer d'attitude pour le passage au registre discursif ? De la même manière, en changeant de type d'exercices, c'est à dire en travaillant sur des exercices de démonstration sans recours à la construction, ces élèves de 6ème auraient-ils également la même attitude ?

VII. Conclusion

Dans l'étude que nous avons menée, nous avons mis en évidence deux points différents. Le premier point concerne l'évolution du travail géométrique entre la classe de 6ème et la classe de 3ème et le second, l'influence de l'environnement de géométrie dynamique sur ce travail.

A plusieurs reprises, et de façon assez nette, nous avons mis en évidence que le travail géométrique des élèves de 3ème se situait plus dans le référentiel de la géométrie II, que celui des élèves de 6ème. Les élèves de 3ème se conforment ainsi aux attentes de leurs enseignants. Cependant, nous avons aussi constaté, que cette acquisition des attentes dans la géométrie du collège, relevait plus d'une conformité à l'espace de travail géométrique de leur professeur qu'à une véritable modification de l'Espace de Travail Géométrique personnel de ces élèves. Dès que les élèves ne s'adressent plus à leur enseignant, ils ont besoin de recourir à des méthodes de géométrie I, pour se convaincre de la justesse de leur travail, pourtant effectué en géométrie II. Autrement dit, l'Espace de Travail Géométrique personnel des élèves est différent de celui dans lequel ils évoluent lorsqu'ils réalisent des productions destinées à leur professeur.

On peut s'attendre à ce que ces élèves soient ceux qui se retrouvent étudiants ou adultes à re-développer des stratégies très proches de la géométrie I comme celles décrites dans Houdement, kuzniak(1998-1999). Il nous semble donc, qu'en plus de l'importance de l'explicitation des différents paradigmes de résolution possibles lors des formations notamment, comme le souligne Kuzniak (2004), la reconnaissance de l'existence de ce double Espace de Travail Géométrique, permettrait d'expliquer certains décalages dans les productions des élèves, et par là de cibler des situations pour réduire ces décalages.

Nous avons ensuite établi quelques résultats permettant de clarifier les apports des Environnements de Géométrie Dynamique sur l'établissement des espaces de travail géométrique des élèves.

Nous avons tout d'abord mis en évidence que l'environnement de géométrie dynamique, alors qu'il semble permettre le développement d'un appui sur la preuve pour effectuer des constructions, constitue surtout un milieu propice au développement de techniques de construction, souvent dissociées de toute référence à une technologie mathématique.

Ce point nous paraît particulièrement important, car l'impression première concernant les EGD, est qu'en développant les techniques de construction, ils vont aider à améliorer le passage à la preuve, ce passage à la preuve pouvant se traduire par une augmentation dans les niveaux de Van Hiele. Nous n'avons pas établi, dans cette étude, si le développement de techniques de construction peut effectivement aider à l'acquisition d'un meilleur niveau de Van Hiele ; en revanche, nous avons constaté d'une part qu'en Environnement de géométrie dynamique, les techniques de constructions font partie de l'espace de travail géométrique des élèves, et d'autre part, que ces élèves assimilent ces techniques au référentiel théorique. Cela signifie que l'usage exclusif des environnements de géométrie dynamique peut conduire à l'établissement d'un espace de travail géométrique différent de celui attendu.

Nous avons également mis en évidence, que l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique dans le cadre d'exercices de construction, permettait de travailler et d'améliorer la coordination entre le registre discursif et le registre de la figure.

Cette amélioration a été constatée dans le milieu même où ce changement de registre a été travaillé (les EGD). Autrement dit, on ne sait pas si des élèves réussissant à effectuer les changements de registres dans le milieu créée par le logiciel, sont capables de la même coordination lors du passage en environnement papier-crayon. Nous aurions eu besoin de faire pratiquer des changements de registres, en environnement papier-crayon, aux élèves de 6ème très habitués à l'environnement de géométrie dynamique, pour voir si les acquisitions dans un environnement étaient transférables dans l'autre.

Pour finir, nous avions mentionné, en tout début du mémoire, l'importance que nous accordions à l'enseignant. Cette place n'a pas été prise en compte dans l'étude que nous avons menée. Les questions posées à ce sujet demeurent donc.

Par exemple, qu'est-ce qui motive pour un enseignant, le choix de l'environnement pour la résolution d'un exercice donné ?

Ou bien, quelle interprétation les enseignants donnent-ils à la stabilité par dragging des figures obtenues en environnement de géométrie dynamique ?

Ou encore, la principale question que nous nous posons aujourd'hui : Comment l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique modifie-t-elle les pratiques des enseignants dans l'enseignement de la géométrie en particulier, mais aussi dans son enseignement des mathématiques en général ?

VIII. Bibliographie

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères – IREM* n°17, pp.121-138

Duval R. (1995), Why to teach geometry, *Icmi Studies on Geometry*, Catania pp. 53-58

Duval R.(1996), *Sémiosis et Pensée humaine*, Peter Lang, Berne, pp.173-207

Duval R., Godin M., Perrin-Glorian M.J. (2005), Reproduction de figures à l'école élémentaire in Castela C. & Houdement C. (eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2004,* ADIREM et IREM de Paris 7, p. 5-89.

Capponi B., Laborde C. (1994), Cabri-Géomètre, constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des Mathématiques,* n°14/n°1.2, pp.165-210

Capponi B. (2000), De la géométrie de traitement aux constructions dans cabri-géomètre II au collège, *Repères – IREM* n°40, pp.11-42

Fishbein E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational studies in Mathematics,* vol 24, n°2, pp.139-162

Laborde C. (2000), Introduction to proof : Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving, *Educational Studies in Mathematics* n°44

Houdement C., Kuzniak A. (1998-1999), Géométrie et paradigmes géométriques, *petit x* n°51, pp. 5-21.

Kuzniak A. (2004), *Paradigmes et espaces de travail géométriques, Note pour l'habilitation à diriger des recherches,* IREM Paris VII

Mariotti MA. (2000), Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics* n°44

Vadcard L.(1998), La validation en géométrie au collège avec Cabri-géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires, *petit x* n°50, pp. 5-21.

Notre site WEB

http://iremp7.math.jussieu.fr

IREM Université Paris7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Une première étude comparative de l'influence des environnements de géométrie dynamique et papier-crayon sur la constitution des espaces de travail géométriques des élèves de collège.

AUTEUR :

Gosset Hélène

RESUME :

A partir de constats faits dans des salles de classe et dans le cadre de la formation continue des enseignants, l'objet de cette étude est de chercher à mettre en évidence des différences créées par les Environnement de Géométrie Dynamique sur les espaces de travail géométriques des élèves de collège.
L'étude s'appuie sur des productions d'élèves, issues d'un exercice de construction d'un carré à partir de sa diagonale, et sur l'observation des séances ayant conduit à ces productions.
Le cadre développé par R.Duval à propos de la notion de registres, des trois processus cognitifs liés au travail géométrique et de la notion d'appréhension opératoire d'une figure, ainsi que le cadre développé par A.Kuzniak sur la notion d'espace de travail géométrique et des paradigmes de la géométrie I et II associés, en constituent les références théoriques.
L'étude cherche à clarifier le rôle des EGD dans l'acquisition de la coordination des changements de registres et dans la mise en fonctionnement du processus de preuve dans le cadre d'un exercice de construction.
Enfin, les productions analysées constituent un élément venant étayer l'existence chez les élèves, d'espaces de travail géométriques personnels, en décalage avec les espaces de travail géométriques mis en place par les enseignants.

MOTS CLES :

Didactique de la géométrie, Espace de travail géométrique, Environnement de géométrie dynamique, Géométrie au collège.

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 2006
ISBN : 2-86612-274-7