

Construction de Définitions / Construction de Concept : vers une Situation Fondamentale pour la Construction de Définitions en Mathématiques – un Aperçu

Cécile Ouvrier-Bufferet

Laboratoire Leibniz – IMAG

E-mail : cecile.ouvrier-bufferet@imag.fr

1. Introduction

Nous avons voulu ce texte aussi proche possible de l'exposé présenté au séminaire ; de plus, nous avons cherché à en rendre la lecture aisée, tout en voulant donner un aperçu global de notre thèse. En conséquence, nous renverrons à la thèse pour certains points spécifiques, absents du présent article.

Notre étude sur la définition a été motivée par le double constat :

- quand on **expose** un concept, on laisse croire que définir ne pose pas de problème : « *le premier piège est de croire facile à acquérir ce qui est simple à énoncer* »

(Kahane, 1999, p.12) ;

- quand on **construit** un concept, il existe une dialectique entre la construction du concept et la construction de sa définition (ceci est à l'œuvre dans la recherche mathématique) : « *A definitional procedure is a procedure of concept formation* » (Lakatos, 1961, p. 54)

Ceci nous a conduit à la problématique de recherche suivante : nous sommes partis de l'hypothèse que la construction de définitions est essentielle à la construction d'un concept et soutenons la thèse qu'il est possible de faire la dévolution de la construction de définitions d'un concept mathématique auprès d'étudiants (ceci appartenant à l'entrée dans une démarche scientifique).

De vastes questions de recherche se posent alors, à commencer par « qu'est-ce qu'une définition en mathématiques ? ». Il n'est bien évidemment pas raisonnable de penser trouver une unique réponse à cette interrogation. Notre étude épistémologique, via les conceptions,

apportera un éclairage substantiel sur ce point. Puisque nous parlons semble-t-il naturellement de « construire des définitions », et ainsi de Situations de Construction de Définitions (SCD) en mathématiques, il nous faudra en présenter les principales caractéristiques. Et nous interroger également sur les apprentissages en jeu dans de telles situations. Bien sûr, notre but est de déterminer les conditions pour la dévolution de SCD, celles-ci apparaissant prometteuses et ouvrant une nouvelle voie pour un travail sur la formation de concepts chez l'apprenant.

Rappelons brièvement que nous avons identifié des types de problèmes pouvant relever de la construction de définitions dans des travaux didactiques. Il s'agit en fait de *redéfinir* des objets connus dans des contextes différents (MATH.en.JEANS, 1997 ou Borasi, 1992), ou d'*inventer* des définitions (Freudenthal, 1973) lors de situations de classification de quadrilatères en géométrie, voire de *définir* à partir d'exemples et contre-exemples (Fletcher, 1970, sur la convexité). Cependant, aucun de ces travaux ne s'attache à la caractérisation du processus de construction de définitions.

Les objets de notre recherche sont ainsi d'élaborer une typologie de SCD, de modéliser des invariants pour les SCD que nous avons expérimentées, d'identifier et de décrire des conceptions dites significatives (nous retiendrons les conceptions aristotélicienne, poppérienne, lakatosienne) : ce dernier point en particulier s'intéresse spécifiquement au processus de construction de définition et tend à le caractériser. Pour cela, nous présenterons succinctement le cadre théorique qui nous a permis cette caractérisation. Nous concluons sur le point suivant : notre recherche tend à l'élaboration d'une situation fondamentale pour la construction de définitions ; nous donnerons les résultats de notre thèse qui s'inscrivent dans cette perspective. Les situations expérimentées dans cette thèse l'ont été avec des étudiants de première année d'université¹.

2. Aperçu Epistémologique sur le Concept de Définition

La nécessité d'une étude épistémologique approfondie sur le concept de définition nous est rappelée par Robinson², qui souligne l'importance de comprendre l'acte définissant. Une telle

¹ Placés par groupe de 2, 3 ou 4, dans un module "Jeux mathématiques" de Deug ou hors contexte.

² *Definition is indefinable. This may be defended on the ground that "you cannot define anything until you already understand defining"* (Robinson - 1954)

étude nous conduit naturellement à la détermination de plusieurs « types » de définitions, qu'ils s'agissent de définition lexicale, nominale, essentielle ou autre. Comprendre la construction même de définitions requiert alors un questionnement tel celui-ci : quelles sont les **origines** de ces différents types de définition ? Dans quels **types de problèmes** interviennent-ils ?

La formation des concepts mathématiques est bien sûr au centre de notre questionnement : si la présentation synthétique de différents aspects propres à une définition en mathématiques est accessible, la caractérisation du processus de construction de définitions ne l'est pas.

Certaines études (Shir, 2004, par exemple) ont montré la fréquence de certaines conceptions³ sur ce que doit être et ce que permet une définition en mathématiques : ainsi, les deux principales fonctions d'une définition concernent la dénomination et l'élaboration d'une théorie ; de plus, une « bonne » définition en mathématiques doit montrer l'existence de l'objet défini, son unicité, être minimale (non redondante), précise voire élégante ! Ces fonctions et conceptions ne nous renseignent cependant pas sur le processus même de construction de définition. Pour comprendre un tel processus, nous avons conduit une étude épistémologique via trois auteurs : Aristote, Popper, Lakatos. Ceux-ci nous permettent de visiter différents « lieux » impliquant la construction de définitions à savoir : la *classification*, l'élaboration de *théories* et la *résolution de problèmes* (au sens de Lakatos). Nous ne relaterons pas ici la méthodologie de recherche qui nous a conduit à retenir ces trois auteurs, pas plus que le débat philosophique en amont opposant essentialistes aux nominalistes. Mais nous avons là trois grands axes de travail sur la construction de définition. Le premier concerne Lakatos et la preuve : les « *Problem-Situations* » lakatosiennes soulignent la dialectique entre construction de définitions et formation de concept. Apparaissent alors différents types de définitions qui sont autant de balises marquant le processus de formation de concept. Nous y reviendrons ci-après. Le deuxième axe s'intéresse à Aristote, et ainsi aux aspects langagiers et logiques du concept de définition. Le principal processus définissant aristotélicien est dit par *genre et différences spécifiques* : il est effectif sur des situations de « *Classification* ». Le troisième axe s'attèle à la « *construction théorique* », Popper étant l'auteur alors retenu. Nous ne pouvons revenir ici sur l'intégralité de ces axes de réflexion sur le concept de définition. Mais présentons notre typologie de SCD, découlant de l'étude épistémologique. Nous avons caractérisé dans la thèse trois types de SCD, dans les termes suivants :

³ Conception est ici employé dans son acception courante

- des SCD **CLASSIFICATION** (qui renvoient à la conception aristotélicienne) : il s'agit de situations de classification, où la demande d'une définition peut être explicite (les objets mathématiques en jeu permettent, dans ce genre de situation, une appréhension en *extension*⁴, du fait de leur accessibilité par leurs représentations). Nous ne développerons pas ici le domaine général de la taxinomie dont relève ce type de SCD.
- des SCD **RESOLUTION DE PROBLEME** (qui renvoient principalement à la conception lakatosienne) : ce type de SCD a été induit par les « *Problem-Situations* » lakatosiennes, sur lesquelles nous reviendrons en détail ci-après.
- des SCD **MATHEMATISATION/MODELISATION** (qui renvoient aux conceptions poppérienne et lakatosienne, et accessoirement à la conception aristotélicienne) : la caractérisation de ce type de SCD est initiée par sa dénomination même. En voici un exemple : « quelle est la structure mathématique commune au monde végétal ? »⁵.

Nous préférons nous concentrer ici sur le type de situation proposé par Lakatos, ce dernier opposant le point de vue heuristique au point de vue théorique. Nous apporterons ainsi une conception véritablement innovante sur la définition.

Notre tâche est alors de caractériser simultanément le type de problème de construction de définitions lakatosien, ainsi que le processus définissant à l'œuvre. C'est ce que nous permet la détermination de la conception lakatosienne - 'conception' étant maintenant employé dans une acception théorique - par le modèle cK ϕ .

2.1. Considérations théoriques

Le modèle cK ϕ (Balacheff, 2003) n'est bien évidemment pas le seul outil théorique utilisé. Notre méthodologie comprend une modélisation de connaissances sur la définition, d'où l'usage de cK ϕ par le quadruplet (P,R,L, Σ) pour la caractérisation des conceptions aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne. La notion de *concept image* (Vinner, 1991) a complété notre utilisation de ce modèle. Pour la présentation de cK ϕ , nous préférons renvoyer à Balacheff, 2003 et Ouvrier-Buffet, 2003. Les emplois des termes du quadruplet (notamment *opérateurs* et *contrôles*) se feront par la suite de manière plus intuitive.

⁴ L'appréhension en *extension* se rapproche du concept de définition *nominale* suivant Leibniz : connaître en extension un objet X signifie savoir reconnaître (au sens faible du terme) ce qu'est ou n'est pas X.

⁵ Il peut s'agir du concept d'arbre.

Par ailleurs, l'élaboration et l'analyse des SCD s'est faite sous l'éclairage de la Théorie des Situations Didactiques. Nous renvoyons à la thèse pour l'ensemble de la présentation méthodologique.

Cependant, nous tenons à souligner ici un aspect particulier de l'étude des protocoles : les situations observées étaient conduites par un Gestionnaire-Observateur (noté GO) qui intervenait en qualité de chercheur expérimenté⁶. Le GO disposait d'un fil conducteur épistémologique concernant le concept de définition : ce dernier lui permettait en partie de gérer la situation, voire de la relancer, sans évaluer ni institutionnaliser les productions des étudiants (que celles-ci concernent le concept de définition ou le concept mathématique en jeu dans la situation). Notre travail de thèse ne nous a pas permis d'approfondir l'étude de la posture du GO : l'étude du GO est actuellement en cours (Ouvrier-Buffet, 2004).

2.2. La conception lakatosienne

Le travail de Lakatos (1961, 1984) a pour cadre général la méthode des *preuves et réfutations*. Ce qui suit consiste en la spécification de la conception lakatosienne. Nous ne modéliserons pas intégralement celle-ci par cK ϕ , afin de laisser transparaître davantage le cheminement des idées lakatosiennes.

Des interrogations inhérentes à la linguistique et l'axiomatique viennent naturellement s'inscrire dans le débat proposé par Lakatos, mais c'est surtout l'heuristique qui est au cœur du questionnement. L'axiomatique est en effet marquée par la rigueur et l'accroissement du contenu. Considérant de plus le théorique et l'heuristique comme deux points de vues différents, Lakatos prône la recherche d'un contexte dit *problématique*, afin de travailler sur la formation de concept et la construction de définition, et ainsi échapper à la présentation axiomatique.

Et il semble « si naturel » à l'auteur qu'« *il existe d'autres voies pour communiquer que les définitions. Je peux initier mes élèves à des problem-situations⁷ non pas par des définitions, mais en leur montrant un cube, un octaèdre et en leur montrant que pour ceux-ci $S-A+F=2$. Alors, je leur demande le domaine de validité de cette formule. Croyez-moi, cela est suffisant pour un début* » (Lakatos, 1961, p. 69)

⁶ Ce qui pose bien sûr la question de la « dévolution » de telles situations auprès d'enseignants (désireux d'utiliser des SCD ou autres situations fondamentales en classe)

⁷ Nous n'avons, pour des raisons évidentes, pas traduit ce terme.

Un type de problème se dessine déjà dans cette situation : il s'agit de construire une classe d'objets à partir d'une "formule", la *formule d'Euler*, à savoir $S-A+F = 2$ pour les polyèdres, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Lakatos nous rappelle, avec des jalons historiques, l'insuffisance de la seule considération du nombre de faces pour l'établissement d'une classification de polyèdres, puis l'invention des concepts de *sommets* et d'*arêtes*, et ainsi présente le problème sous la forme : tous les polyèdres satisfont-ils cette formule ? Nous avons là une première idée des types de problèmes historiques étudiés par Lakatos et l'amorce de la résolution de ceux-ci.

Quant au processus même de construction de définition et de sa dialectique avec la formation de concept, Lakatos nous donne des éléments permettant de le baliser. Il s'agit en fait de trois types de définitions : les définitions *naïves*, les *zéro-définitions* et les *proof-generated definitions*. Ces différents types sont caractérisés principalement par la **fonction** et le **devenir** de telle ou telle définition. Les fonctions des définitions mises alors en avant concernent la communication, la dénomination et la preuve.

Nous allons reprendre les caractéristiques de ces types de définition, telles qu'elles ont été exposées par Lakatos. L'exemple du problème des polyèdres nous servira d'illustration et nous ferons ressortir la dialectique entre formation de concept et construction de définition : la principale difficulté en est la généralisation que nous devons entreprendre. Concernant cette dernière, nous renvoyons, pour plus de détails, à la thèse (Ouvrier-Buffet, 2003, chapitre II).

Les définitions *naïves*, comme leur nom l'indique, peuvent être posées dans une première intention. Mais l'essence même d'une définition *naïve* est de ne pas avoir d'évolution.

En revanche, les *zéro-définitions* ne sont pas des définitions nulles et non avenues : elles sont « zéro » car marquent le début du processus de recherche. Leur fait est attesté par la présence de lemmes vrais, par un manque de contre-exemple, par la justification « générale » de la conjecture de départ. Elles sont vouées à l'évolution vers une *proof-generated definition* (voir ci-après) ou à la disparition. De plus, quelque soit la *zéro-définition*, le domaine de la preuve n'est pas affecté.

Les deux principales règles concernant ce type de définition se résument à :

- ne pas être trop indulgent avec les définitions trop vastes
- développer des *zéro-définitions* si une plus large idée de la preuve en découle.

Les *proof-generated definitions* s'inscrivent dans le cadre de la catalyse de la preuve et de la dialectique entre construction de définition et formation de concept. La principale question demeure : quand apparaissent-elles ? Ce moment où émergent des *proof-generated definitions* est en effet difficile à déterminer. Partant d'une *zéro-définition*, une *proof-generated definition* alors naissante déterminera la solution du problème considéré. Il est bien évident que la dépendance de la construction de définition, des *zéro-définitions* aux *proof-generated definitions*, à la situation de départ est décisive.

La modélisation que nous avons entreprise dans la thèse permet de mettre en relief cette dépendance et de souligner ce que nous prendrons dans une acception simple ici des *opérateurs* et *contrôles*⁸ marquant le processus de construction de définitions.

Pour souligner le rôle et la place des *zéro-définitions* et *proof-generated definitions*, reprenons l'exemple de "*Preuves et Réfutations*".

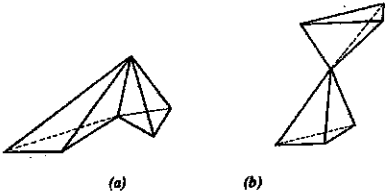
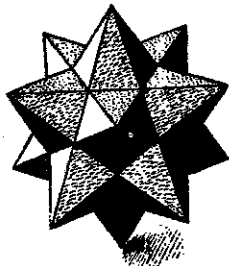
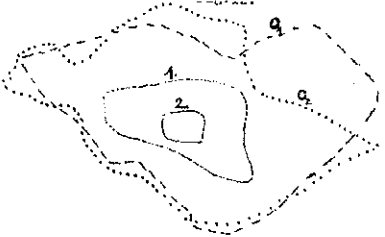
La situation de départ comprend en fait une appréhension en extension du concept de polyèdre (connaissance *naïve*), la formule d'Euler, ainsi que l'idée d'une preuve en trois étapes (celle de Cauchy).

La construction de définitions dans cette situation va principalement évoluer relativement aux points suivants : une définition n'est pas discutée s'il n'y a pas de contre-exemples ... et la falsification par des contre-exemples dépend de la définition des concepts alors en jeu. La méthode des *preuves et réfutations* se dessine, et, dans ce cas, conduira à la redéfinition des concepts de polygone, sommet et arête.

Nous allons dans un premier temps reprendre les balises marquantes du début de la construction du concept de polyèdres (Lakatos, 1961), puis reviendrons, dans un second temps, sur l'aspect construction de définitions, et les balises qu'il est possible d'en donner, en prenant l'exemple de Lakatos comme une méthode de la connaissance.

L'exemplification est la suivante (le concept de polyèdre est bien sûr l'objet des *zéro-définitions*) :

⁸ Nous renvoyons à Balacheff (2003) et Ouvrier-Buffet (2003).

<i>Zéro-définitions</i>	Enoncés	Méthode de preuve et réfutation
Z-déf O1	solide dont la surface est constituée de faces polygonales	Contre-exemple à Z-déf O1 : cube creux
Z-déf O1bis	surface constituée d'un système de polygones	Contre-exemples à Z-déf O1bis pour lesquels $S-A+F=3$ 
Z-déf O2	surface constituée d'un système de polygones tel que : - exactement deux polygones sont adjacents à chaque arête ; - il est possible d'aller de l'intérieur d'un polygone à l'intérieur de n'importe quel autre par un chemin qui ne coupe jamais une arête en un sommet.	Contre-exemple à Z-déf O2, pour lequel $S-A+F = -6$ 
Nouveau problème: (re)définir polygone	Zéro-définition de polygone: système d'arêtes arrangées de telle façon que: - deux arêtes (et deux seulement) sont adjacentes à chaque sommet ; - les arêtes n'ont pas de points communs en dehors des sommets	
	Lakatos propose alors : ▪ une définition de polyèdre (dit « simple ») (1) ▪ ... restreinte par des faces simplement connexes (2) et l'illustre par le dessin ci-contre, marquant ainsi un processus de resserrement (c'est la <i>proof procedure</i>), partant des <i>zéro-définitions</i> O1 et O2.	
	Il s'agira alors de redéfinir : polygone,	sommet, arête

Il apparaît ainsi bien qu'une définition (*zéro-définition* en l'occurrence) n'est pas discutée s'il n'y a pas de contre-exemple ... et la falsification par les contre-exemples dépend de la définition des concepts en jeu. Faire reconnaître un contre-exemple permet de tendre à l'élaboration de *proof-generated concept*.

Apparaissent alors des *opérateurs* que nous proposons sous forme listée : accéder à une plus large idée de la preuve ; générer et utiliser des exemples et contre-exemples ; écrire une *zéro-définition*. Pour ce dernier point sont alors mobilisés des *opérateurs* et *contrôles* d'ordre langagier et logique (nous renvoyons pour cela à la conception aristotélicienne, Ouvrier-Bufferet, 2003, p.50s).

Les principaux *contrôles* proviennent du manque de contre-exemples (ce qui signifie en fait que la *zéro-définition* en cours est « bonne », c'est-à-dire, proche d'une *proof-generated definition*), ainsi que de la preuve elle-même (il s'agit d'une validation par la preuve).

Ce processus de preuve et réfutation, appliqué à la construction de définitions, laisse une question sur les *contrôles* relativement ouverte : existe-t-il un marqueur de fin spécifique à la construction de définition ? Lakatos évacue volontairement la problématique axiomatique et théorique et laisse au lecteur la citation suivante :

« (...) nous devons certainement arrêter l'extension de concepts là où elle cesse d'être un engrais pour devenir un herbicide total (...) **Mais une recherche scientifique "commence et finit par des problèmes"** » (Lakatos, 1984, p. 131)

Ainsi le manque de contre-exemple apparaît comme *contrôle*, avec toute la difficulté inhérente à celui-ci, telle qu'elle a été soulignée par Popper (cf. Ouvrier-Bufferet, 2003, p. 52s sur la conception poppérienne). De toute évidence, ni Popper, ni Lakatos ne propose un critère de fin manifeste pour la formation de concept. Il serait alors nécessaire de se plonger dans une perspective axiomatique, voire dans le problème du choix d'une théorie parmi des théories concurrentes mettant en jeu le concept alors construit.

3. Les SCD Expérimentées : Présentation

Nous avons conduit trois situations expérimentales, en accord avec notre typologie de SCD (voir ci-dessus) et avec les valeurs de variables locales suivantes : le type d'objet mathématique à définir, la présence ou non d'un référent, la demande explicite de définition ou non et les fonctions de la définition dans le problème considéré.

Trois types de situations, avec trois objets mathématiques discrets (arbre, déplacements sur un plan discret, droite discrète) furent conçues. Nous les exposons brièvement ici : ceci nous permettra de conclure sur l'aspect « situation fondamentale » pour la construction de définitions.

3.1. Une SCD de type CLASSIFICATION

La première situation expérimentée fut de type CLASSIFICATION, avec un objet mathématique (l'arbre) propice aux SCD. En effet, l'appréhension en extension de cet objet, par ses représentations, est aisée (à partir d'exemples et contre-exemples de celui-ci, désignés comme tels), à l'image des polyèdres de Lakatos. Une demande explicite de définition a été formulée. De plus, l'arbre est très riche en terme de définitions⁹, et par ailleurs, il est possible de réaliser des SCD des trois types identifiés (CLASSIFICATION, RESOLUTION DE PROBLEMES et MATHEMATISATION/MODELISATION).

Voici l'énoncé de la SCD CLASSIFICATION (en deux temps) :

- *Première partie*

			1. Comment définiriez-vous l'objet mathématique « truc » sachant que : T1, T2, T3 et T4 sont des représentations de « truc », T5 et T6 n'en sont pas.

- *Seconde partie* : 2. Soit G un graphe (ensemble de points et de traits reliant ces points) connexe (en un seul morceau). Démontrer qu'il existe un arbre couvrant tous les sommets.

Les productions des étudiants ont montré un processus définissant par *genre* et *différences spécifiques* de nombreuses *zéro-définitions*, marquées par une évolution sous le coup d'*opérateurs* et *contrôles* langagiers et logiques, mais aussi par la réalisation de tests sur les définitions produites via la recherche de contre-exemples (*opérateur* lakatosien s'il en est !).

3.2. Une SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES

Il s'agit ici de considérer des déplacements sur un plan discret. Par exemple, prenons l'ensemble de déplacements suivant : $\{d_1 : 2 \text{ carreaux à droite et } 3 \text{ carreaux en haut} ; d_2 : 5 \text{ carreaux à gauche et } 2 \text{ en bas} ; d_3 : 5 \text{ carreaux à droite et } 3 \text{ en bas} ; d_4 : 1 \text{ carreau à droite}\}$.

La question est alors : est-il possible d'atteindre, avec cet ensemble de déplacements, tous les points de la grille ?¹⁰ Une seconde question concernerait la suppression d'un des déplacements initialement donné : qu'en est-il des points alors atteints ?

Ceci en réfère au problème mathématique complexe et non intégralement résolu de Froebénius (Ramirez-Alphonsin, préprint).

Il est possible, dans ce contexte, de trouver un ensemble de déplacements aussi grand que l'on veut, générateur et minimal (pour les points de la grille discrète), alors que dans $\mathbb{R}^2$, il existe des systèmes générateurs minimaux de même cardinal ainsi que la définition de *base*. Il y a alors (au niveau de première année d'université) un questionnement sur les concepts en jeu (générateur, minimalité et dépendance) et des relations entre eux. Il s'agit effectivement d'une SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES, car la problématique de preuve est effective, et des conjectures sont accessibles. De plus, la problématique de définition concerne les concepts « générateur » et « minimalité ». Cette situation comprenant plusieurs parties, nous renvoyons à la thèse (Ouvrier-Buffet, 2003, chapitre VIII) pour l'analyse mathématique et didactique.

La troisième SCD expérimentée fait l'objet du paragraphe suivant.

4. Etude d'une SCD : les Droites Discrètes

4.1. Présentation de l'objet mathématique et du type de SCD expérimentée

L'objectif de ce paragraphe est de souligner les potentialités de l'objet mathématique « droite discrète » pour une situation de construction de définitions : nous les présenterons avec le concept de *zéro-définition*, afin de montrer l'amorce et l'évolution d'un processus de construction de définition pour les droites discrètes.

⁹ Différents types de définition peuvent être décrits dont des définitions par induction notamment.

¹⁰ Seules les combinaisons entières positives de ces déplacements sont « autorisées ».

4.1.1. Deux problématiques autour de l'objet « droite discrète »

- La problématique « droite réelle »

La considération d'une droite discrète (simplement par coloration de carreaux – ou pixels – d'une grille régulière) peut conduire à faire référence au concept de « droite réelle », et ainsi à des définitions de celles-ci (géométriques et/ou analytiques) dans le but de définir le même objet dans un contexte discret. Nous avons ainsi appelé cette problématique « droite réelle ». En référer aux droites réelles implique naturellement dans un premier temps le tracé de celles-ci. Cette approche pose déjà une réelle problématique de définition, avant même que référence à une définition de « droite réelle » ne soit formulée. En voici une illustration ci-dessous (figure 1) : prenons une droite réelle. Quels carreaux 'choisir' parmi ceux traversés par cette droite ? Des critères de choix sont alors requis et ainsi se présentent différentes *zéro-définitions*, amenées à évoluer.

Figure 1



Voici les *zéro-définitions* en question (les termes entre guillemets soulignent les potentialités d'évolution de celles-ci) :

Zdéf1 : ensemble de pixels traversés par une droite réelle.

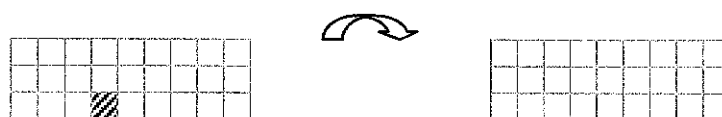
Zdéf2 : ensemble de pixels les "plus près" d'une droite réelle donnée.

Zdéf3 : ensemble de pixels situés "à l'intérieur" d'une bande d'épaisseur e .

- La problématique « régularité »

La seconde problématique consiste en la recherche d'une régularité des séquences constitutives de droites discrètes, en référence à la perception que nous avons de la régularité d'une droite réelle, régularité que nous ne définissons en fait pas. L'illustration (figure 2) ci-après montre la nature de cette problématique : comment modifier une séquence donnée pour obtenir une « meilleure » régularité ?

Figure 2



Deux *zéro-définitions* découlent de cette approche. Là encore, les guillemets soulignent ce qui est amené à évoluer :

Zdéf 4 : une droite discrète est une séquence de paliers vérifiant "certaines propriétés".

Zdéf 5 : une droite discrète est une séquence de pixels ayant une répartition « uniforme » de paliers qu'on ne peut plus améliorer du point de vue de la "régularité".

4.1.2. Une SCD sur « droite discrète »

L'objet géométrique "droite discrète" pourrait faire l'objet d'une situation de type CLASSIFICATION : en effet, c'est un objet accessible et il est envisageable de réaliser une situation analogue à la situation "arbre", à partir d'exemples et contre-exemples identifiés ou non. Cependant, "droite discrète" est un concept encore en construction dans la recherche actuelle, plus problématique que "arbre". De plus, un référent extérieur est dans ce cas désigné (droite euclidienne), contrairement à la situation "arbre" qui n'impliquait pas de référent particulier. Ainsi, une SCD de "droite discrète" de type CLASSIFICATION est possible, mais déjà plus problématique mathématiquement, qu'une demande explicite de définition soit formulée ou non.

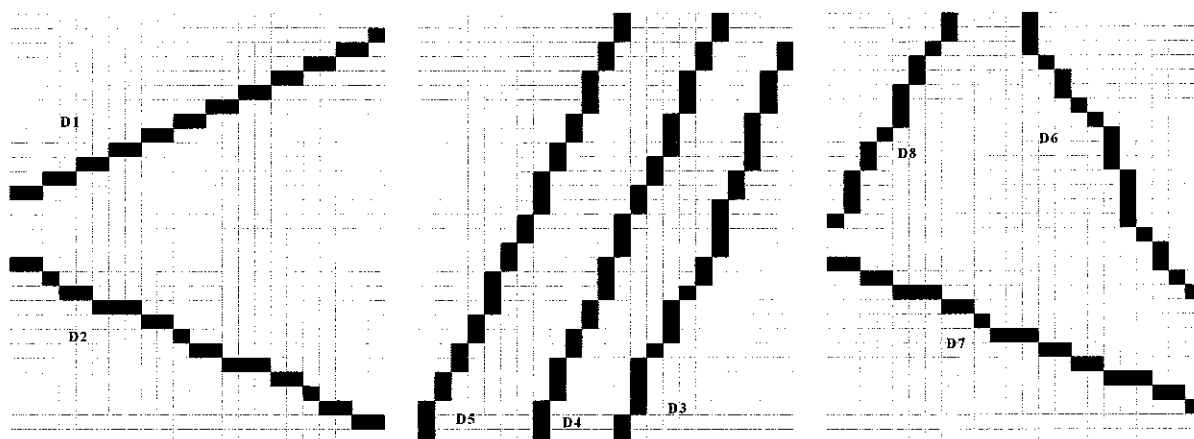
Un référent extérieur étant naturellement désigné (droite euclidienne) dans une étude de l'objet géométrique "droite discrète", une SCD de type MATHEMATISATION/MODELISATION peut être conçue. Différentes problématiques (de construction, de reconnaissance et concernant l'axiomatique) existent autour de l'objet "droite discrète" (pour situer la problématique axiomatique par une simple question : quid de l'intersection de deux droites discrètes ?). Celles-ci permettent de concevoir des problèmes dont la résolution nécessite une construction de définition de "droite discrète", c'est-à-dire des SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES. Par ailleurs, la discrétisation en jeu dans le passage du discret au continu (considérant une droite réelle comme point de départ) implique le type MATHEMATISATION/MODELISATION.

Nous avons retenu pour cet article une SCD de type CLASSIFICATION, avec demande explicite de définition, précédée d'une SCD (des autres types) concernant les triangles discrets, que voici.

- **Les triangles discrets** - *On veut colorier des carreaux d'une grille régulière. Dessinez des triangles (en coloriant des carreaux). Expliquez votre construction.*

- **Les droites discrètes** - La consigne orale suivante fut donnée aux étudiants : *voici des objets qui sont des droites, et d'autres qui n'en sont pas. Dans ce contexte, on colorie des carreaux.*

La question que l'on se pose est la suivante : comment définir « droite » à partir de ces éléments ?



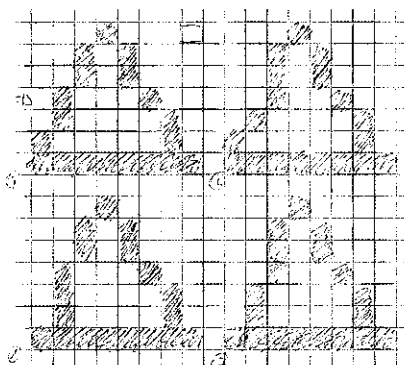
4.2. Processus et productions des étudiants

Les problématiques « droite réelle » et « régularité » décrites dans le paragraphe précédent furent abordées par les étudiants : plus précisément, la question de la « régularité » s'intéressa à la modification et à la répétition d'une séquence de paliers. Ceci a conduit à plusieurs *zéro-définitions* co-existantes (et évolutives). Ainsi, les zéro-définitions **Zdéf2** et **Zdéf3** apparurent, dans la première séance sur les triangles discrets :

68.N: *Moi, je me suis dit que un triangle c'était trois traits ... plus ou moins épais. (...)*

77.N: *Voilà, c'est tout bien ... et après quand j'ai des angles divers, je trace les trois droites, et par où passe la droite, je colorie. Je colorie les cases qui sont touchées par la droite ... enfin, par une des droites.*

177.Re: *Déjà, celui qui est traversé, il faut le regarder, celui qui ne l'est pas, il faut le laisser tomber. Après, il faut regarder s'il est traversé un tout petit peu, il faut peut-être pas en tenir compte ; s'il est traversé beaucoup, il faut plus le regarder.*



De plus, des *zéro-définitions* concernant la « régularité » émergèrent également (d'où des *zéro-définitions* de natures différentes co-existantes, en concurrence), à l'image de celle proposée par Nicolas ; il s'agit de modifier les paliers d'une séquence de pixels :

463 N : *J'ai essayé une autre technique. Là, au lieu d'en mettre 3, 3, 3 et 1, j'ai fait 3, 2, 3, 2.*

Il est à noter, que, dans le groupe dont nous proposons des extraits, une règle « arithmétique » fut formulée et les *zéro-définitions* (faisant appel à la « droite réelle » et au « couloir ») faisaient office de *contrôle* des tracés obtenus par la règle arithmétique. L'évolution des *zéro-définitions* produites dans ce groupe fut dépendante du changement de situation (passage de la situation des triangles discrets, sans demande explicite de définition à la situation de CLASSIFICATION des droites discrètes, avec demande explicite de définition dans le but de délimiter les objets proposés). Les valeurs différentes des deux variables globales 'demande explicite de définition ou non' et 'reconnaissance ou construction d'objets' apparaissent cruciales eu égard au processus de construction de définitions. Il apparaît ainsi que la « demande explicite de définition » semble favoriser le travail de mise en relation entre différentes définitions et mobilise des *opérateurs* et *contrôles* de différents types (langagiers, logiques et lakatosiens -génération d'exemples et de contre-exemples en particulier-) qui agissent dans les caractérisations du concept en jeu. De plus, notre expérimentation a fait ressortir une variable didactique non prévue dans notre analyse préalable : le type de fonction de la définition. Cette variable prenait ici deux valeurs : définir pour construire, dans la situation « triangles discrets » et définir pour reconnaître dans la situation « droite discrète ». Les étudiants ne traitent pas simultanément ces deux fonctions (construction et reconnaissance).

Néanmoins, dans les situations expérimentées, la dévolution a été favorisée par la facilité d'accès aux objets (arbre, droite discrète) de par leurs représentations, et aussi par la possibilité d'énoncer des *zéro-définitions* basées sur la perception ou la description physique de ces objets. La richesse des productions dans les situations « droite discrète » témoigne de la capacité des étudiants à adopter des points de vue différents sur un même objet. De plus, ces points de vue sont proches de ceux de la communauté scientifique.

5. Conclusion

5.1. Des organisations didactique et mathématique spécifiques

La mise en place dans la classe de situations de construction de définitions nécessite des organisations mathématiques et didactiques spécifiques (Bosch, Gascon 2001). En particulier, dans une organisation mathématique usuelle, la définition du concept qui va être étudié est donnée d'emblée (et est en général unique) : ceci est incompatible avec la négociation d'une situation de construction de cette définition. De plus, le fonctionnement d'une SCD nécessite la mise en place d'une organisation didactique non usuelle qui laisse suffisamment de temps à l'élève pour construire des définitions.

En particulier, l'organisation sociale des étudiants en **groupes** s'avère être une valeur d'une variable didactique déterminante pour les SCD. Le GO doit négocier avec cette composante, en acceptant aussi des phases de recherche plus individuelles. Le rôle du GO s'avère spécifique et doit être étudié de manière plus approfondie (étude en cours, Ouvrier-Buffet, 2004).

5.2. Vers une situation fondamentale pour la construction de définitions

Des trois types de SCD expérimentés, le type CLASSIFICATION se révèle facilement dévoluable. Dans les autres types de situation, la dévolution dépend de la demande explicite de définition (variable didactique), mais pas seulement. Soulignons que la demande explicite de définition favorise en particulier la mobilisation d'*opérateurs et contrôles* spécifiques qui vont avoir un rôle réflexif sur la construction de définitions. Ceux-ci permettent aux étudiants de prendre de la distance par rapport au concept mathématique en jeu et favorisent ainsi l'évolution de *zéro-définitions* vers des définitions abouties.

Par ailleurs, notons que la situation « Déplacements sur une grille », relevant du type RESOLUTION DE PROBLEMES, sans demande de définition, et mobilisant des concepts abstraits, a abouti sur une production de définitions sous forme de *définitions-en-acte* et *propriétés-en-acte* (Vergnaud, 1991) : celles-ci se sont révélées suffisantes pour avancer dans la résolution du problème.

Nous pouvons affirmer que les trois situations étudiées dans la thèse constituent des éléments d'une situation fondamentale pour l'apprentissage de la construction de définitions. Cet

apprentissage s'inscrit dans quelque chose de plus général, à savoir la pratique d'une démarche scientifique :

une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories ... (Brousseau, 1982, p.186).

La mise en place d'une situation fondamentale repose notamment sur les hypothèses formulées par Brousseau. Relativement à ces hypothèses, dans les situations que nous avons expérimentées, nous avons noté des changements de points de vue chez les étudiants, tant sur le concept de définition que sur les objets mathématiques en jeu. Ceci n'était a priori pas évident dans la mesure où « définir » ne correspond pas au rôle usuel de l'étudiant (dans une institution « enseignement »).

Soulignons que la construction de définitions apparaît effectivement comme *réponse adaptative optimum* (pour reprendre l'expression de Brousseau) pour le chercheur dans son activité mathématique ; ceci peut effectivement se produire chez des étudiants, dans une SCD de type RESOLUTION DE PROBLEME ou MATHEMATISATION/MODELISATION, mais pas dans une SCD CLASSIFICATION.

Enfin, il semble bien difficile de réaliser la condition de Brousseau suivante : « *s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer par ce système de variables tous les problèmes culturellement connus où la connaissance intervient* » (SIC, Brousseau, 1982), c'est pourquoi Legrand propose « la nécessité de clôture de la situation fondamentale » c'est-à-dire, pour répondre aux exigences concernant les variables d'une situation fondamentale : « *la situation sous laquelle la connaissance se présente doit contenir en germe (sans devoir être déconstruite) les potentialités d'évolution du savoir et rendre possible de nouveaux apprentissages* » (Legrand, 1996, p.237). Les variables d'une situation fondamentale *changent le statut cognitif de la connaissance visée, en tant que moyen de contrôle de l'action, moyen de communication, moyen de preuve, algorithme de référence etc.* (Brousseau, 1982, p.198). Il s'agit maintenant d'effectuer un retour expérimental à la situation fondamentale (à savoir les trois SCD expérimentées) dans le but d'explicitier les variables de celle-ci en question. Peut-être pourrions-nous ouvrir encore davantage la discussion sur les situations fondamentales, en évoquant le titre d'un séminaire Didatech à venir (Grenoble, 2005) de G.Brousseau : « *Les situations fondamentales, fantômes ou réalités ?* » ...

Il est ainsi nécessaire pour nous de réétudier et d'enrichir les caractéristiques des situations (correspondant aux variables didactiques que nous avons identifiées), en particulier pour des SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES.

Puisque ce qui nous concerne est la co-construction d'un concept et de ses définitions, il pourrait être intéressant de proposer de telles situations avec des concepts soit déjà institutionnalisés, soit naturalisés : il faudrait alors étudier tout d'abord la « désinstitutionnalisation » ou la « dénaturalisation » de ces concepts, rechercher à la rendre possible. Nous pouvons d'ores et déjà suggérer quelques pistes à ce propos : il pourrait s'agir de construire une SCD mettant en jeu, de manière problématique, des objets mathématiques déjà institutionnalisés c'est-à-dire : soit les dits objets ne sont pas reconnaissables, soit la définition existante, supposée connue des étudiants, s'avère inefficace. Un travail de définition sur un objet déjà institutionnalisé peut contribuer à la « désinstitutionnalisation » en question s'il s'avère déstabilisant : ceci est bien sûr à étudier.

Bibliographie

- Balacheff, Nicolas : 2003, "cK ϕ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques". *XIIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques* (à paraître). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Borasi, Raffaella : 1992, *Learning mathematics through inquiry*, Heinemann, New Hampshire.
- Bosch, M. & Gascon, J. : 2001, "Organiser l'étude – Théories et empiries". *Actes de la XIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, 23-40. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.
- Brousseau, Guy : 1982, "Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie." *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, n°45, 183-226. LSD2-IMAG. Grenoble.
- Brousseau, Guy : 1997, *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Fletcher, T.J. : 1970, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui – Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré*. 4^{ème} Edition. OCDL. Paris.
- Freudenthal, Hans: 1973, *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.
- Kahane, J-P. : 1999, "Quelques aspects des définitions mathématiques", *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, n°189, 10-14.
- Lakatos, Imre : 1961, *Essays in the logic of mathematical discovery*, Thesis, Cambridge University Press.

- Lakatos, Imre : 1984, *Preuve et réfutations*, Cambridge University Press.
- Legrand, Marc : 1996, "La problématique des situations fondamentales". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°16-2, 221-279. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Leibniz : 1993, Discours de métaphysique. Collection Agora. Pocket.
- MATh.en.JEANS : 1997, "Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? " *Actes MATH.en.JEANS*, 175-176. Ed. MATH.en.JEANS, Paris.
<http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/97175175.pdf>
<http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/97175176.pdf> (Présentation du sujet & fiche d'accompagnement pédagogique).
- Ouvrier-Bufferet, Cécile : 2003, *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. Etude épistémologique et didactique de la définition. Etude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès d'étudiants de 1ère année d'université*. Equipe CNAM - Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble. Sous la direction de Denise Grenier et Charles Payan.
- Ouvrier-Bufferet, Cécile : 2004, "Dévolution et gestion de Situations de Construction de Définitions en Mathématiques". *Symposium Travail du professeur et dévolution dans les classes ordinaires*, C.Margolinas. Présenté au colloque de l'AECSE. Paris, septembre 2004 (à paraître).
- Ramirez-Alphonsin, JL. : 2002 soumis, "The Diophantine Frobenius Problem", 190 p. (preprint Laboratoire Combinatoire & Optimisation Discrète, CNRS & Université Paris 6).
- Robinson, Richard : 1954, *Definition*. Oxford at the Clarendon Press.
- Vergnaud, Gérard : 1991, "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°10/2.3, 133-169.
- Vinner, Shlomo : 1991, "The role of definitions in teaching and learning of mathematics". In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer.
- Zaslavsky, Orit & Shir, Karni : 2004, "Students' Conceptions of a Mathematical Definition", *Journal for Research in Mathematics Education* (en cours de publication).