

La résolution de problèmes arithmétiques : une étude longitudinale au CE1

Rémi Brissiaud

Laboratoire CNRS FRE2627 "Cognition & Usages", IUFM de Versailles

Deux variables didactiques “ classiques ” : le type du problème et la taille des nombres

La taille des nombres d'un énoncé de problème arithmétique est une variable didactique “ classique ”. En effet, lorsque les nombres de l'énoncé des problèmes sont de petites tailles, les enfants d'âge scolaire sont susceptibles de résoudre un grand nombre de ces problèmes avant tout enseignement des opérations arithmétiques (Vergnaud et Durand, 1976). Pour cela, ils se livrent à une sorte de simulation des situations décrites dans les énoncés soit en utilisant du matériel (leurs doigts, éventuellement), soit en exécutant un dessin schématique. Ceci s'observe pour toutes les opérations arithmétiques (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993a). Considérons ainsi le problème : “ Eric avait 5 billes ; il en gagne ; maintenant il en a 8. Combien de billes vient-il de gagner ? ”. Pour le résoudre, l'élève peut mettre en œuvre la stratégie de simulation suivante : avec un matériel comme des jetons, il forme une collection de 5 objets ; puis il en ajoute d'autres jusqu'à en avoir 8 en tout et il compte enfin combien d'objets il vient d'ajouter. De manière équivalente, il peut aussi faire un dessin schématique en tenant le même raisonnement (il dessine 5 ronds, etc.).

En utilisant ces stratégies, tous les enfants ne réussissent évidemment pas d'emblée. Dans le cas du problème précédent, par exemple, l'erreur la plus fréquente chez les élèves de C.P. consiste à répondre “ 8 ” parce que l'élève ne distingue pas les éléments qui viennent d'être ajoutés de ceux qui correspondent à l'état initial (Riley & Greeno, 1988). Cependant, si l'on s'intéresse à d'autres types de problèmes comme la recherche du résultat d'un ajout ou celui d'un retrait, par exemple, ils sont, eux, bien réussis dès le CP. Le type du problème est, lui - aussi, une variable didactique “ classique ”.

Une nouvelle variable didactique : la concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique

Puisque l'usage des stratégies qui conduisent au succès semble nécessiter des petits nombres et / ou la disponibilité d'un matériel, le chercheur peut évidemment s'interroger sur ce qui se passe lorsqu'on augmente la taille des nombres et lorsqu'on ne suscite plus l'usage d'un matériel. Or, dans ces conditions, tous les problèmes ne deviennent pas plus difficiles de façon uniforme. Considérons les problèmes suivants (Schliemann, Araujo, Cassundé, Macedo & Nicéas, 1998) :

M1 : Quel est le prix de 3 chocolats à 50 cruzeiros l'un ?

M2 : Quel est le prix de 50 chocolats à 3 cruzeiros l'un ?

Schliemann et al. les ont proposés à des sujets non scolarisés de 12 ans environ qui vivent dans les rues de Récife, en vendant des bonbons aux feux rouges de la ville. Les énoncés de ces problèmes sont rédigés avec les mêmes mots, on y trouve les mêmes nombres 3 et 50, et pourtant, M1 conduit à 75 % de réussite environ alors que M2 conduit à 0 % de réussite ! Lorsque la taille des nombres augmente, à l'intérieur d'un même type de problèmes, certains restent donc bien réussis, alors que d'autres qui utilisent des nombres de même taille, provoquent un échec massif. Les variables didactiques que sont la taille des nombres et le type du problème, prises isolément, ne permettent pas d'expliquer un tel phénomène.

De même, Brissiaud (1995) a montré qu'un même problème additif peut, lorsque la taille des nombres augmente, soit rester bien réussi par les novices (cas de : " Eric a 44 billes ; il en gagne et après il a 47 billes. Combien a-t-il gagné de billes ? "), soit être massivement échoué (cas de : " Eric a 3 billes ; il en gagne et après il a 47 billes... ")¹. Ce n'est donc pas nécessairement le problème qui utilise les plus grands nombres qui est le moins bien réussi. Ces résultats conduisent à étudier une nouvelle variable didactique, différente de la taille des nombres et différente du type du problème. Cette variable rend compte de la façon dont la taille des nombres interagit avec le type du problème pour expliquer le comportement des novices : je l'ai appelée concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique (Brissiaud, 2000, 2002a, 2002b).

¹ Les taux de réussite sont de 54% et 10% respectivement chez des élèves de CP qui n'ont jamais étudié la soustraction.

En effet, comment expliquer que la réussite au problème M1 : “ Quel est le prix de 3 chocolats à 50 cruzeiros l'un ? ” ne nécessite pas de fréquenter l'école, contrairement à la réussite à M2 : “ Quel est le prix de 50 chocolats à 3 cruzeiros l'un ? ”.

Ce fait s'explique si l'on considère que, chez les enfants, la représentation initiale du problème active une stratégie qui reste très proche d'une stratégie de simulation, bien qu'elle n'utilise pas de matériel. S'il en est ainsi, les enfants cherchent combien font “ 3 fois 50 ” dans le cas de M1 et combien font “ 50 fois 3 ” dans celui de M2. Dans le premier cas, la procédure activée ($50 + 50 + 50$) conduit facilement à la solution numérique (50 et 50, 100 ; et encore 50, 150) alors que dans le second ($3 + 3 + 3 + 3 + \dots$), cette solution numérique est très difficilement accessible (3 et 3, 6 ; et encore 3, 9 ; et encore 3, 12 ; etc.). Dans le cas de M1, on peut dire qu'il y a concordance entre la représentation initiale de ce problème et l'économie de sa résolution numérique alors que dans celui de M2, il y a discordance.

De même, concernant le problème : “ Eric a 44 billes ; il en gagne et après il a 47 billes. Combien a-t-il gagné de billes ? ”, les enfants disent souvent : 44 puis lèvent 3 doigts : 45 (1), 46 (2), 47 (3). La simulation de ce qui est dit dans l'énoncé par une procédure de comptage conduit presque d'emblée à la solution numérique : il y a dans ce cas concordance entre la représentation initiale du problème et l'économie de sa résolution numérique. Avec 3 et 47, les enfants s'y prennent de la même manière : 3, 4 (1), 5 (2), 6 (3), 7 (4)... mais la longueur de cette procédure rend difficile son aboutissement et ils échouent. Il y a alors discordance entre la représentation initiale de ce problème et l'économie de sa résolution numérique.

Le phénomène de concordance / discordance et l'étude de la conceptualisation arithmétique

L'étude de ce phénomène permet d'adopter un point de vue sur le progrès des enfants différent de celui selon lequel ils apprennent progressivement à résoudre de nouveaux types de problèmes. En effet, pour un élève, progresser signifie aussi devenir capable de se comporter différemment face à un même type de problème, c'est-à-dire accéder à un comportement stratégique face à un problème arithmétique (pour le problème “ Eric ” et avec les nombres 3 et 47, les élèves progressent en découvrant qu'ils peuvent aussi compter à rebours et, de même, pour le problème des 50 objets à 3 cruzeiros l'un, ils progressent en

découvrant qu'ils peuvent calculer 3 fois 50). Le progrès dépend donc de l'appropriation par les élèves d'équivalences entre procédures².

Ce point de vue peut être adopté non seulement pour étudier la résolution de problèmes de soustraction et de multiplication, mais aussi celle de problèmes de division (Brissiaud, 2002a) ainsi que pour étudier la compréhension des fractions (Brissiaud, 2001, 2002b). Ces recherches ont permis de : 1°) Montrer que les problèmes correspondant à des cas de concordance sont réussis avant tout enseignement alors que ceux correspondant à des cas de discordance sont massivement échoués. 2°) Vérifier que des adultes cultivés (i.e. qui ont reçu un enseignement arithmétique) réussissent les problèmes correspondant à des cas de discordance.

Cette même comparaison des performances dans les cas de concordance et de discordance, si elle était effectuée dans le cadre d'une étude longitudinale, serait évidemment susceptible de conduire à une étude plus précise du phénomène de conceptualisation arithmétique. En effet, le progrès observé dans les problèmes correspondant à des cas de concordance peut s'interpréter comme résultant essentiellement du développement de compétences assez générales : meilleure compréhension des énoncés verbaux en général, meilleure compréhension de la "règle du jeu" inhérente à la résolution de ce type de problèmes arithmétiques, etc.. Dans les cas de concordance, la mise en œuvre de la procédure activée par l'énoncé permet l'obtention de la solution numérique. En revanche, le progrès observé dans les problèmes correspondant à des cas de discordance peut s'interpréter comme résultant à la fois du développement des compétences assez générales précédentes et comme résultant de l'appropriation des "équivalences entre procédures" dont l'usage permet de surmonter la difficulté engendrée par la discordance. Cette différence de progression entre les problèmes pour lesquels il y a discordance et ceux pour lesquels il y a concordance peut ainsi servir d'indicateur lorsqu'on cherche à étudier la conceptualisation. De plus, dans le cadre d'une approche longitudinale, cette étude de la conceptualisation peut se faire en relation avec l'enseignement des opérations arithmétiques qui a cours dans les classes concernées.

² Vergnaud parlerait de "théorèmes en actes".

Présentation de l'étude longitudinale au CE1³

110 élèves appartenant à 5 classes de CE1 ont été soumis aux mêmes problèmes en octobre-novembre 2002 et en juin 2003 (les élèves qui avaient un an de retard ont été exclus de l'étude parce qu'ils risquaient de ne pas être d'"authentiques novices"). Chaque élève a participé à deux séances de 12 problèmes en octobre-novembre et aux deux mêmes séances en juin. La série de ces 12 problèmes a été construite en faisant varier : s = la structure du problème (s1 = structure multiplicative et s2 = additive), c = le contexte (images ou gâteaux dans le cas des problèmes multiplicatifs, billes ou euros dans celui des problèmes additifs) et t = le type du problème. Dans le cas des problèmes multiplicatifs, cette variable prend les valeurs : t1 = recherche du résultat d'une itération (combien vaut a fois b ?), t2 = recherche du résultat d'une partition (valeur d'une part quand on partage a en b parts égales ?) et t3 = recherche du nombre de groupes dans un problème de quotition (en a, combien de fois b ?). Dans le cas des problèmes additifs, cette variable prend les valeurs : t1 = recherche du résultat d'une diminution, t2 = recherche de la valeur d'un ajout et t3 = recherche d'un état initial dans le cas où celui-ci est transformé par un ajout. Enfin, une dernière variable, d, prend la valeur d1 dans les cas de concordance et d2 dans les cas de discordance. Voici par exemple une série de problèmes qui a été utilisée avec un groupe d'élèves lors d'une séance :

s1 : structure multiplicative

s1 c1 t1 d1 : Combien y a-t-il d'images dans 4 paquets de 10 images ?

s1 c2 t1 d2 : Combien y a-t-il de gâteaux dans 10 paquets de 4 gâteaux ?

s1 c1 t2 d1 : Madame Durand a 30 images. Elle partage ces images entre 3 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?

s1 c2 t2 d2 : Monsieur Dupont a 30 gâteaux. Il partage ces gâteaux entre 10 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien de gâteaux chaque enfant va-t-il recevoir ?

s1 c1 t3 d1 : Madame Lebris a 20 images. Elle fait des paquets de 10 images. Combien de paquets peut-elle faire ?

s1 c2 t3 d2 : Monsieur Dulac a 20 gâteaux. Il fait des paquets de 2 gâteaux. Combien de paquets peut-il faire ?

³ Celle-ci (Brissiaud et Sander, sous presse) a été menée dans le cadre d'un contrat de recherche Cognitive : "Les apprentissages et leurs dysfonctionnements". Elle sera, dans la mesure du possible, poursuivie avec les mêmes sujets au CE2.

s2 : structure additive

s2 c1 t1 d1 : Nicolas va en récréation avec ses 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ?

s2 c2 t1 d2 : Léa a 31 euros dans sa tirelire. Pour s'acheter un jouet, elle sort 27 euros de sa tirelire. Combien Léa a-t-elle d'euros maintenant dans sa tirelire ?

s2 c1 t2 d1 : Luc va en récréation avec ses 38 billes. Pendant la récréation, il gagne d'autres billes. Maintenant, il a 41 billes. Combien Luc a-t-il gagnées de billes pendant la récréation ?

s2 c2 t2 d2 : Marie a 3 euros dans sa tirelire. Pour son anniversaire, elle reçoit d'autres euros et elle les met dans sa tirelire. Maintenant, elle a 41 euros dans sa tirelire. Combien Marie a-t-elle reçu d'euros pour son anniversaire ?

s2 c1 t3 d1 : Annie va en récréation avec ses billes. Pendant la récréation, elle gagne 3 billes. Maintenant, elle a 42 billes. Combien Annie avait-elle de billes avant la récréation ?

s2 c2 t3 d2 : Julien a des euros dans sa tirelire. Pour son anniversaire, il reçoit 39 euros et il les met dans sa tirelire. Maintenant, il a 42 euros dans sa tirelire. Combien Julien avait-il d'euros avant son anniversaire ?

En octobre-novembre comme en juin, l'élève qui avait reçu un problème si ti di dans l'un des contextes Ci lors de la 1e séance, était confronté au même problème dans l'autre contexte lors de la 2e séance. Par ailleurs, pour varier les données et les réponses, les valeurs numériques de chaque problème ont été obtenues à partir des triplets (2, 10, 20), (3, 10, 30) et (4, 10, 40) pour les problèmes multiplicatifs et les triplets (3, 38, 41), (3, 39, 42) et (4, 27, 31) pour les problèmes additifs. Les passations sont collectives mais par petits groupes. Comme les élèves de chaque classe sont répartis en 3 sous-groupes, le plan expérimental est équilibré du point de vue des valeurs numériques utilisées au sein des protocoles d'une même classe : pour un problème donné et une séance donnée, chacun des trois problèmes qu'il est possible de construire à partir des trois triplets de valeurs numériques est soumis à un tiers de l'effectif de chaque classe. De même, l'ordre d'apparition de chaque problème au sein des protocoles d'une même classe a été équilibré : 1/3 des élèves le rencontrent dans le 1er tiers du protocole, 1/3 dans le 2e et 1/3 dans le 3e. Par ailleurs, cet ordre est tel que les problèmes additifs et multiplicatifs alternent.

Les énoncés sont donnés sous forme orale : l'expérimentateur lit l'énoncé deux fois et laisse une minute environ pour fournir la réponse numérique (aucune justification n'est demandée). Les sujets doivent l'écrire sur une page d'un livret qu'ils ont reçu en début de séance. La minute achevée, l'expérimentateur leur demande de tourner la page. Pour réguler cette

passation, les 12 pages des livrets sont repérées par les lettres A à L (1^e séance) ou K à X (2^e séance). La durée d'une minute a été choisie parce que, dans les cas de discordance, elle semble à la fois : 1°) suffisamment longue pour permettre aux sujets qui ont accès au "théorème en acte" conduisant à la solution de calculer celle-ci et 2°) suffisamment courte pour interdire aux sujets qui n'ont pas accès à un tel "théorème en acte" de réussir en manipulant leurs doigts par exemple.

Bien que cela ne soit pas exploité dans la suite de ce texte, signalons enfin que l'examen des manuels utilisés dans les différentes classes, conduit a priori à penser que l'enseignement des théorèmes en acte nécessaires à la résolution des problèmes s1t1d2 (recherche du résultat d'une itération dans un cas de discordance) et s2t1d2 (recherche du résultat d'un retrait dans un cas de discordance) est plus explicite dans trois des classes de l'échantillon que dans les deux autres : on peut évidemment faire l'hypothèse que les élèves de ces classes progresseront plus rapidement concernant ces problèmes au moins. Mais dans les limites de ce texte, les seules hypothèses qui vont être examinées sont les suivantes :

1°) Hypothèse 1 : Les problèmes correspondant à des cas de concordance seront mieux réussis en octobre-novembre que ceux correspondant à des cas de discordance. Cette hypothèse vise à tester la généralité du phénomène de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Jusqu'ici, en effet, aucune étude n'a tenté de mettre en évidence ce phénomène concernant les problèmes additifs de recherche d'un état initial. Par ailleurs, concernant les problèmes de quotition et de partition étudiés ici, le phénomène de concordance / discordance n'a été mis en évidence qu'au niveau du CE2 (Brissiaud, 2002a). Enfin, concernant les problèmes de recherche du résultat d'une itération, c'est seulement dans le cadre de l'étude des "mathématiques de la rue" (Schliemann et al, 1998) qu'il a été mis en évidence.

2°) Hypothèse 2 : Comme, en France, la multiplication est étudiée au CE1 alors que la division ne l'est pas, le progrès s'effectuera différemment dans le cas des problèmes de type s1t1 (combien vaut a fois b ?) que dans celui des problèmes de type s1t2 (partition) et s1t3 (quotition). En effet, pendant leur scolarité au CE1, les écoliers français apprennent la commutativité de la multiplication : a fois b est égal à b fois a . S'ils sont confrontés en fin d'année à un problème où l'on demande combien il y a d'unités dans 10 groupes de 4 (cas de discordance), ils sont donc susceptibles de remplacer le calcul de 10 fois 4 par celui de 4 fois 10. En revanche, la division, elle, n'est pas enseignée au CE1 : les élèves n'y apprennent pas que le résultat de a unités partagées en b parts égales s'obtient également en cherchant : "En a , combien de fois b ?". C'est pourquoi, si les élèves sont confrontés en fin d'année à un

problème où l'on cherche le résultat d'un partage de 40 unités en 10 parts égales (cas de discordance), ils sont moins susceptibles de remplacer cette recherche par celle, plus simple, de : " En 40, combien de fois 10 ? ". En résumé, concernant les problèmes s1t1 le progrès chez les élèves devrait être avoir une dimension spécifiquement conceptuelle alors que concernant ceux de type s1t2 et s1t3, le progrès pourrait au contraire avoir une dimension générale, qui ne s'observe pas dans les cas de discordance du fait d'un défaut de conceptualisation.

La situation est différente concernant les problèmes relevant d'une structure additive (S2). En effet, ce sont tous des problèmes de soustraction. Or, cette opération arithmétique est au programme du CE1 et les trois types de problèmes s2t1, s2t2 et s2t3 sont travaillés dès ce niveau de la scolarité dans le cadre de cet enseignement. Avec ces problèmes, il est donc moins probable qu'on puisse attribuer le progrès de manière spécifique à l'une des deux dimensions étudiées (progrès conceptuel vs. développement de compétences générales) et il est moins probable que, selon les problèmes, ce ne soit pas la même dimension du progrès qui domine.

Une présentation succincte des résultats de novembre

Les réponses aux problèmes additifs étaient notées 1 en cas de réponse exacte à une unité près (erreur qui correspond le plus souvent à un comptage en avançant ou en reculant mal positionné), et 0 sinon. Dans le cas des problèmes multiplicatifs, seule la réponse exacte était notée 1. Chaque élève ayant passé chacun des problèmes dans chacun des deux contextes associés, il lui est attribué pour chaque problème la somme de ces deux notes. Les pourcentages de réussite en novembre sont les suivants (Figures 1a et 1b) :

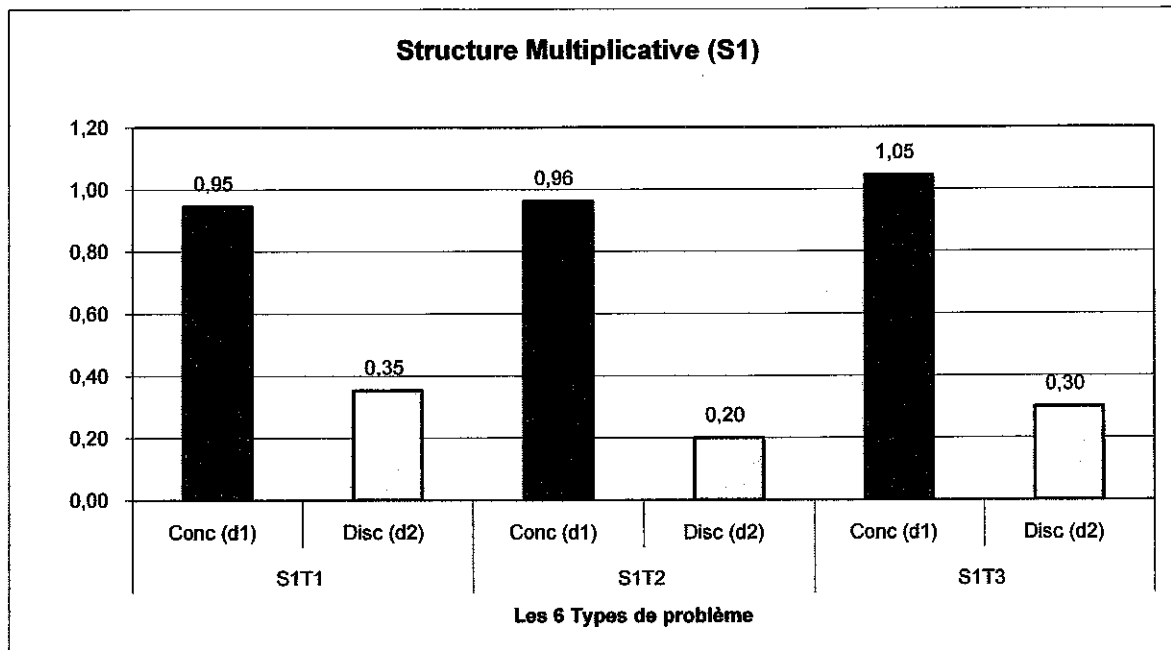


Figure 1a : Performances en novembre pour la structure multiplicative

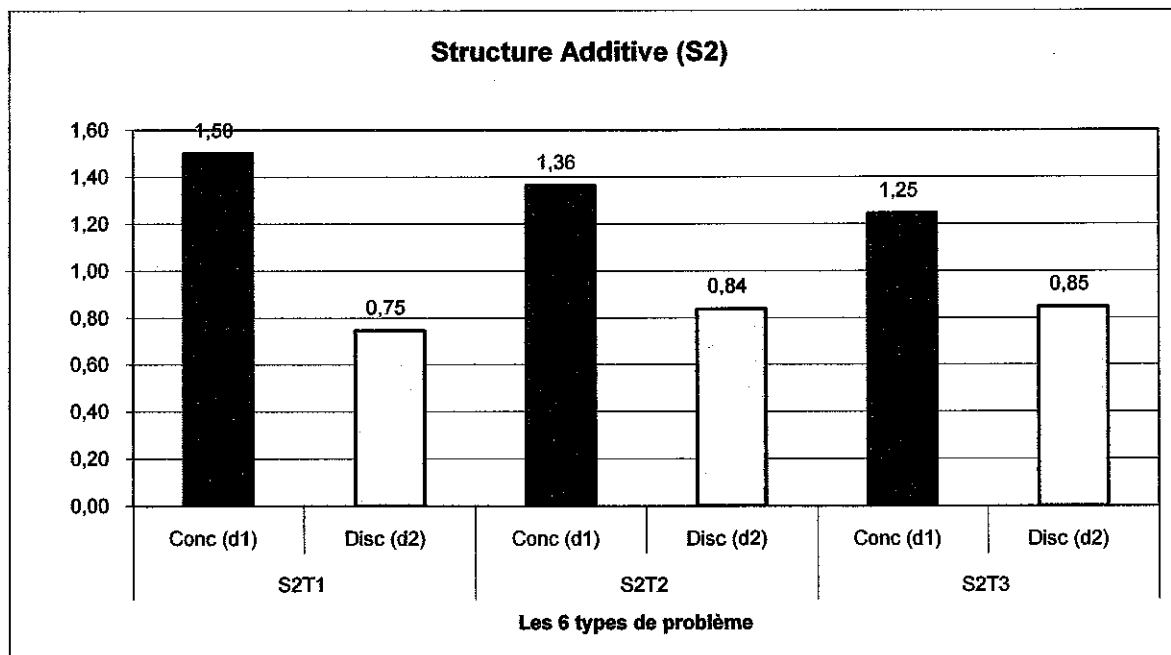


Figure 1b : Performances en novembre pour la structure additive

Les problèmes codés d2 (cas de discordance) sont systématiquement et de manière significative moins bien réussis que les problèmes correspondants codés d1 (cas de concordance) : $23,43 < F(1,109) < 83,38$; $p < 0,0001$. Dans le cas des problèmes multiplicatifs, le type du problème n'a pas d'influence sur la réussite ($F(2) = 1,65$; NS) et

seul le phénomène de concordance / discordance explique les différences de performances ($F(1) = 126,43$; $p < 0,0001$).

En outre, une analyse intra sujet permet de vérifier que les cas de réussite à la condition discordance sont généralement conditionnés par la réussite à la condition concordance du même problème. Pour chacun des problèmes, le tableau croisé des réussites / échecs en fonction de la concordance / discordance prend la forme suivante (l'exemple donné est celui des problèmes slc1t1d1 et slc1t1d2 pour lesquels 17 élèves réussissent les deux problèmes, 48 échouent les deux, etc.) :

		10 paquets de 4 images (discordance)	
		Réussite	Échec
4 paquets de 10 images (concordance)	Réussite	17	41
	Echec	5	48

Pour chacun des problèmes, la deuxième diagonale du tableau ainsi construit (5 et 41, dans l'exemple précédent) est fortement déséquilibrée : très peu d'élèves (5 ci-dessus) réussissent le cas de discordance alors qu'ils échouent au cas de concordance (le khi 2 de Mac Némard est pour les 12 couples de problèmes significatif à .01).

Quels progrès entre novembre et juin ?

En Juin, les pourcentages de réussite sont les suivants (Figures 2a et 2b) :

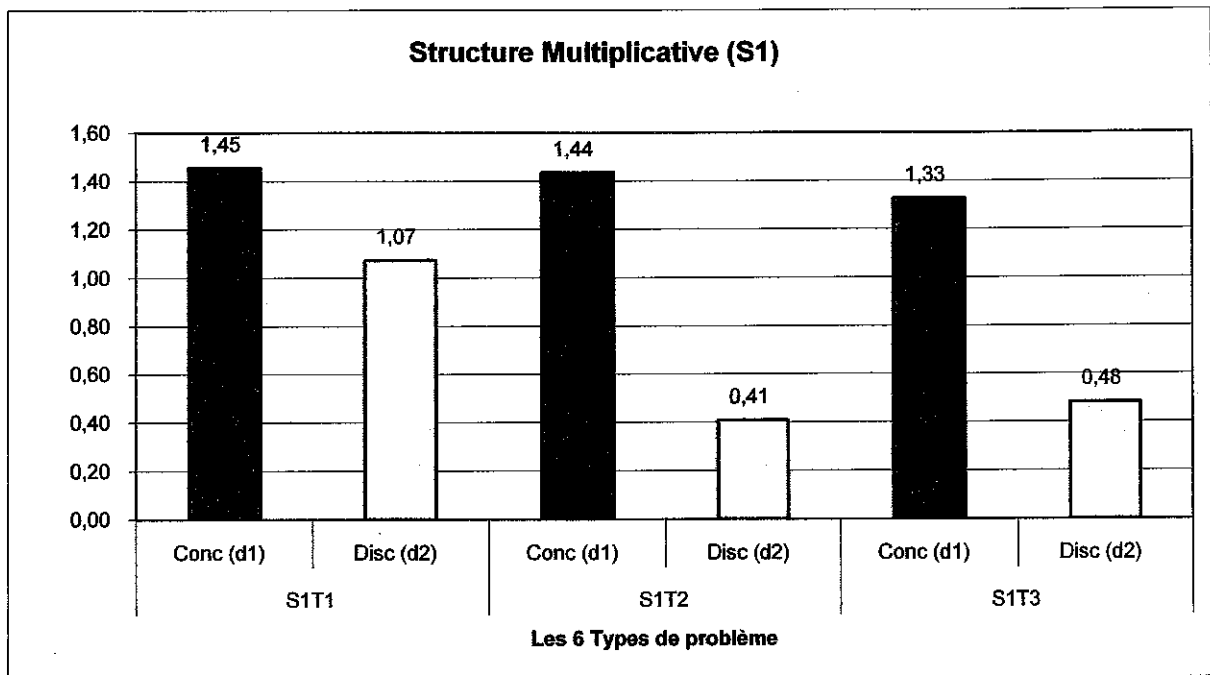


Figure 2a : Performances en juin pour la structure multiplicative

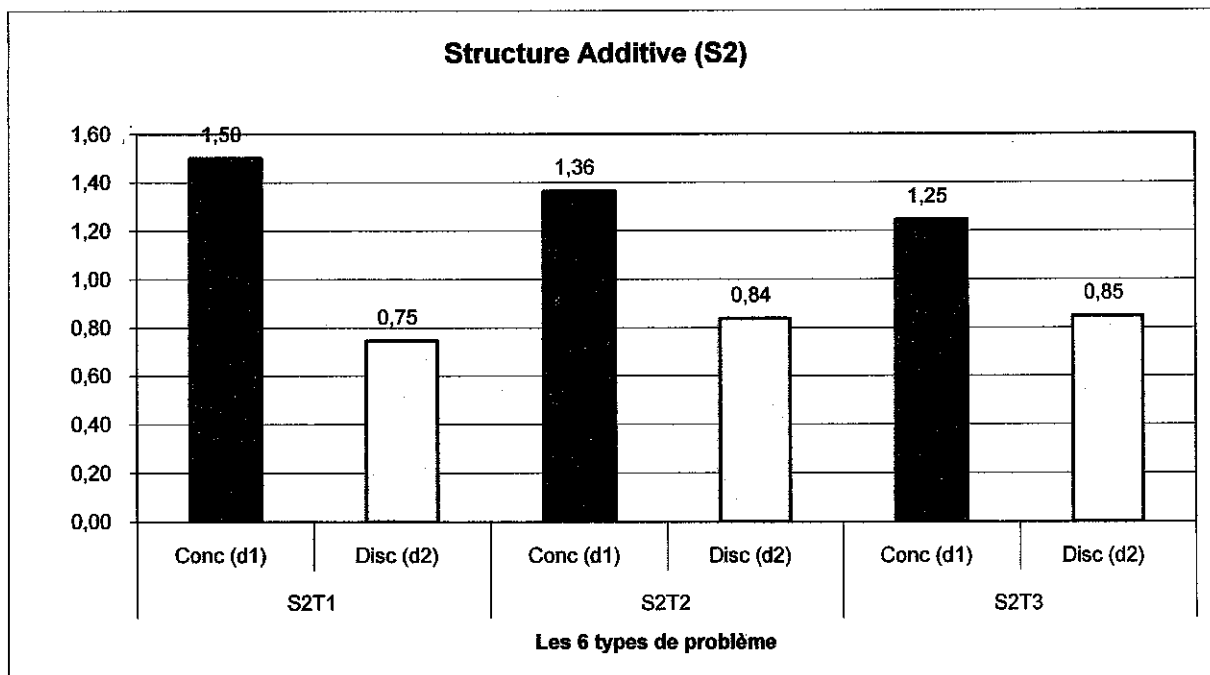


Figure 2b : Performances en juin pour la structure additive

A l'exception de s2t1d1, les élèves ont progressé de manière significative pour chacun des problèmes : $2,7 < t(109) < 9$; $p < 0,01$). Dans le cas de s2t1d1 : $t(109) = 1,742$; $p = 0,0843$. Les problèmes pour lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de leur résolution numérique restent significativement moins bien résolus :

$20,32 < F(1,109) < 152,59$; $p < 0,0001$. Par ailleurs, les khi 2 de Mac N  mar sont significatifs à .01 pour 11 couples de problèmes sur les 12.

Par ailleurs, conformément à l'hypothèse faite, le progrès s'est effectué différemment pour les problèmes multiplicatifs et les problèmes additifs et, au sein des problèmes multiplicatifs, pour les problèmes de recherche du résultat d'une itération par rapport aux problèmes de partition et de quotition. Les Figure 3a et 3b, où sont consignées les moyennes obtenues en calculant pour chaque enfant et chaque problème la différence entre la note de Juin et celle de Novembre, le suggère : les seuls problèmes pour lesquels le progrès est significativement plus important dans le cas de discordance que dans le cas de concordance sont ceux de type S1T1 (Combien fait a fois b ?) ($F(1,109) = 4,43$; $p < 0,05$). Pour ce type de problèmes, un progrès de nature conceptuelle apparaît clairement et distinctement d'un progrès de nature plus générale. En revanche, concernant les problèmes de types S1T2 et S1T3, le progrès est plus important dans les cas de concordance que dans ceux de discordance et pour ceux de type S1T2, cette différence est significative ($F(1,109) = 5,65$; $p < 0,05$). Dans le cas de ces problèmes S1T2, il apparaît clairement qu'un progrès découlant de meilleures compétences générales ne peut pas s'observer dans les cas de discordance du fait d'un défaut de conceptualisation.

Concernant les problèmes relevant d'une structure additive (S2), aucune des deux dimensions du progrès ne s'observe isolément de l'autre.

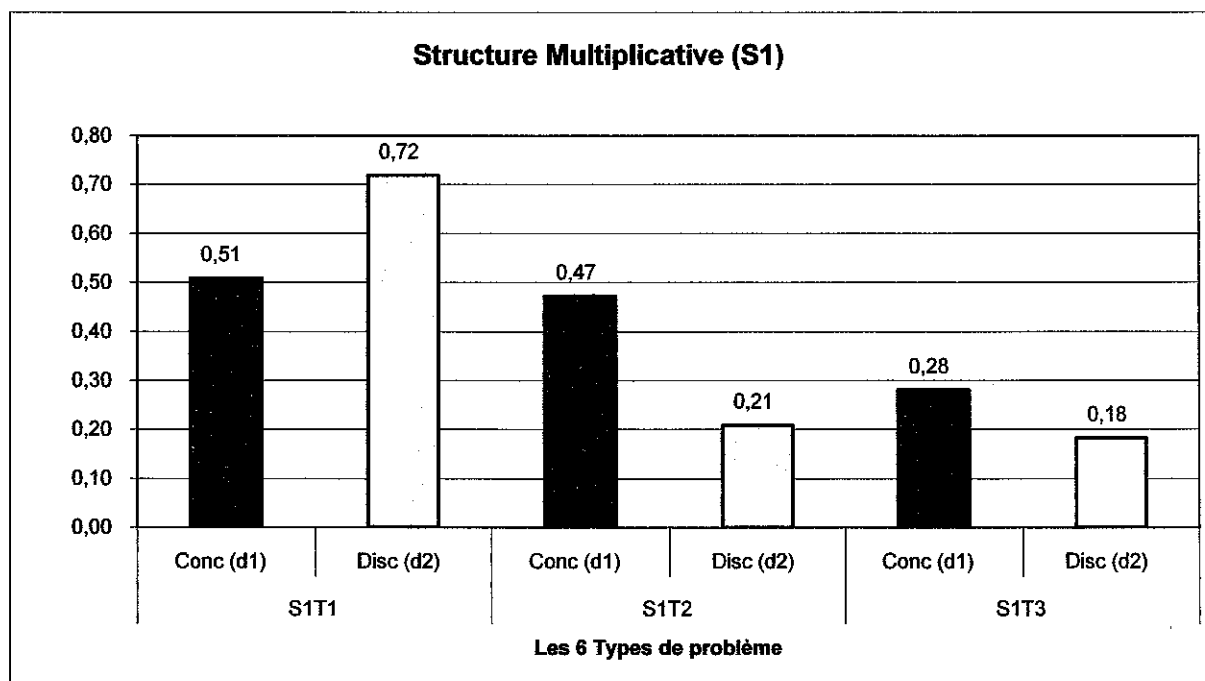


Figure 3a : Progrès entre novembre et juin pour la structure multiplicative

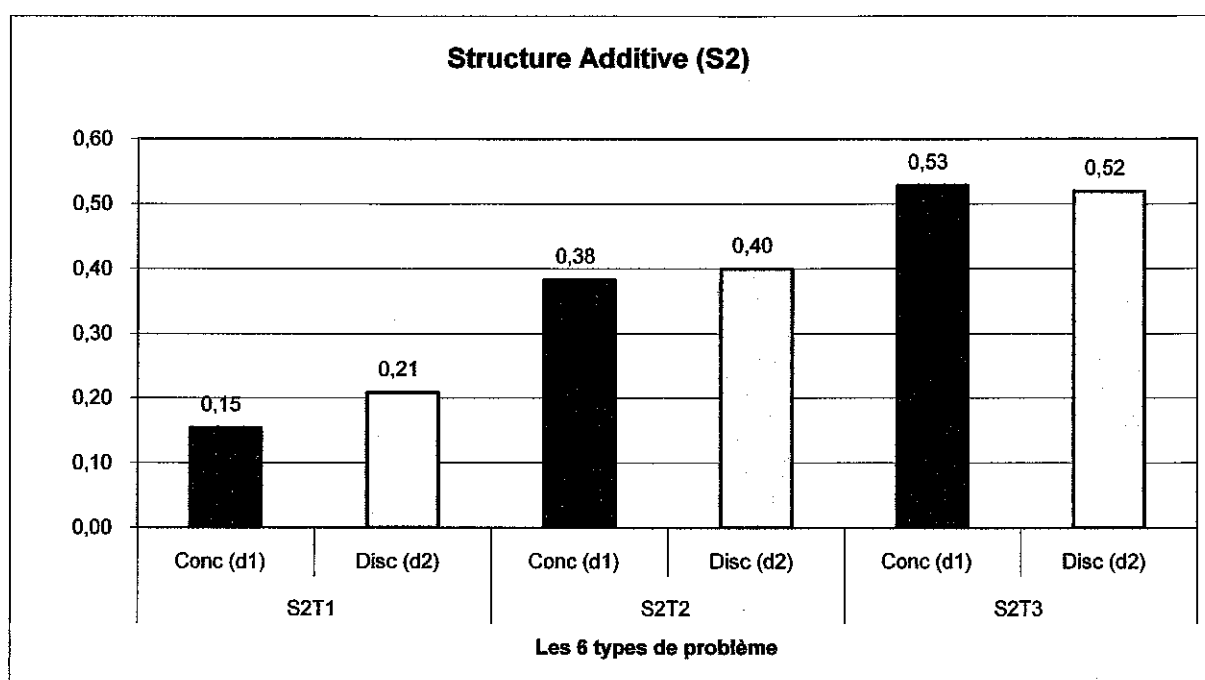


Figure 3b : Progrès entre novembre et juin pour la structure additive

Conclusions générales

En premier lieu, cette étude a permis de mettre en évidence la généralité du phénomène de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Concernant les problèmes de recherche du résultat d'une itération (Combien font a fois b ?), cette étude généralise les résultats obtenus par Schliemann et al. (1998) au cas d'élèves scolarisés mais qui n'ont pas encore eu de leçon sur la multiplication. Cette recherche a également montré qu'on observe le phénomène de concordance / discordance dès le CE1 concernant les problèmes de quotition du type : en a combien de fois b ? et ceux de partition du type : combien vaut a partagé en b parts égales ? Concernant les problèmes additifs, elle a confirmé qu'on observe ce phénomène concernant les problèmes de recherche du résultat d'une diminution et ceux de recherche de la valeur d'un ajout. De plus, elle a montré qu'on l'observe également concernant les problèmes de recherche d'un état initial (cas où celui-ci est suivi d'un ajout).

Mais cette recherche souligne surtout l'intérêt d'un tel phénomène pour l'étude de la conceptualisation arithmétique : lorsque les élèves progressent significativement plus dans la résolution des problèmes correspondant à des cas de discordance que dans la résolution des

problèmes correspondant à des cas de concordance, cela peut servir d'indicateur de l'appropriation d'équivalences entre procédures dont dépend la conceptualisation. Des arguments en faveur de cette thèse ont été avancés ici du fait que les résultats obtenus reflètent bien le statut particulier qu'ont les problèmes de recherche du résultat d'une itération au sein du programme de CE1. D'autres analyses qui n'ont pas été rapportées ici, montrent que ce type d'étude permet également d'étudier les effets de pratiques pédagogiques contrastées ou encore l'influence du contexte (billes ou euros ?) sur la résolution des problèmes additifs.

Dans "L'enfant, la mathématique et la réalité", Vergnaud (1981) recensait les différentes sources de difficulté des problèmes additifs : le type ou la classe du problème (la variable T dans cette étude), la plus ou moins grande facilité du calcul numérique nécessaire, l'ordre et la présentation des informations, le type de contenu envisagé (i.e. le contexte du problème). Concernant les six problèmes qu'il est possible de construire à partir d'une situation de type "état initial – transformation – état final" (trois seulement d'entre eux ont été envisagés ici), G. Vergnaud concluait ainsi (p. 143) : " Il existe ainsi de multiples sources de diversité et de complexité des problèmes à l'intérieur de la seule catégorie état-transformation-état. Mais la source principale, celle qui éclaire d'ailleurs toutes les autres, tient à l'existence de six classes de problèmes et de six formes de calculs relationnels d'inégale difficulté ". Il est clair, comme l'affirme Vergnaud, que le type du problème est une variable didactique. Par ailleurs, il est tout aussi clair que la taille des nombres en est une autre. Cependant, l'étude présentée souligne qu'une troisième variable permet d'expliquer plus finement que les précédentes, la difficulté des trois types de problèmes additifs et, plus encore, des trois types de problèmes multiplicatifs étudiés ici. Cette variable, la concordance / discordance entre la représentation initiale du problème et l'économie de sa résolution numérique, a partie liée avec les précédentes mais elle en diffère parce qu'elle est de nature interactionnelle. De façon plus générale, la méthodologie utilisée dans cette étude apparaît comme un moyen d'étudier la conceptualisation chez les élèves, en liaison avec l'étude de l'enseignement des opérations arithmétiques qui a cours aux différents niveaux de la scolarité.

Bibliographie

Brissiaud R. (1995) *Enseignement et développement des représentations numériques chez l'enfant*. Thèse de psychologie (nouveau régime). Université Paris 8

Brissiaud R. (2000), Apprendre l'arithmétique élémentaire : les cas de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. *Actes des Journées Internationales d'Orsay de Sciences Cognitives (JIOSC 2000) : L'Apprentissage. Une Approche transdisciplinaire* - décembre 2000 (pp. 105-110), 2000.

Brissiaud R. (2002a) Le phénomène de concordance/discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique : le cas de la division euclidienne. *Poster présenté au Colloque Cognitique : Les apprentissages et leurs dysfonctionnements*. 17-18 Juin. Paris.

Brissiaud R. (2002b) Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds) : *Traité des Sciences Cognitives - Le développement des activités numériques chez l'enfant*, 265-291. Paris : Hermes

Brissiaud, R., & Sander, E. (sous-presse). Conceptualisation arithmétique, résolution de problèmes et enseignement des opérations arithmétiques à l'école : une étude longitudinale au CE1. *Acte du Colloque " Les processus de conceptualisation en débat : Hommage à Gérard Vergnaud "*. Clichy-La Garenne. 28-31 Janvier 2004. 10 pages.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving : a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428-441.

Riley, M., & Greeno, J. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5 (1), 49-101.

Schliemann A. D., Araujo C., Cassundé M.A., Macedo S. & Nicéas L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

Vergnaud G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang

Vergnaud G. & Durand C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique, *Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.