DES PROGRAMMES A LA CLASSE : ETUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE INTERNE
Exemple de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique

Laetitia Ravel-Bueno
Equipe DAEST, IUFM d'Aquitaine

L'objet de ce séminaire était la présentation de mon travail de thèse (Ravel 2003a) qui porte sur une étude de la transposition didactique interne, dans le cas particulier de la réintroduction de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique en 1998.
Après avoir introduit la problématique et le cadre théorique que j'ai utilisé pour mener à bien cette recherche, je commencerai par présenter une analyse de l'enseignement d'arithmétique dans son ensemble. Puis, en suivant une méthodologie d'analyse par zooms successifs, je m'intéresserai plus particulièrement à l'enseignement de la division euclidienne avant de terminer par une analyse de deux démonstrations du théorème de la division euclidienne faites dans deux classes de terminale.

I. PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

A l'origine de ce travail se trouve une série de questions naïves sur l'enseignement des mathématiques et plus spécifiquement sur l'arrivée d'un nouvel objet de savoir dans les programmes d'enseignement. Comment le système d'enseignement « réagit » face à cette arrivée ? Autrement dit, pour cet objet de savoir, comment se fait le passage du texte officiel du programme à la classe ? Ce passage va-t-il le modifier ou non ? Si oui, quels sont les acteurs du système d'èenseignement qui opèrent ces modifications ? Dans quel(s) système(s) de contraintes et de libertés agissent-ils ? Pour problématiser et traiter l'ensemble de ces questions, il m'a semblé pertinent d'utiliser le concept de transposition didactique introduit dans la communauté didactique en 1980 par Chevallard.

I.1 La transposition didactique interne

Comme le souligne Conne, la transposition didactique est un « processus qui fait que les objets du savoir mathématique savant sont transformés en savoirs à enseigner, inscrits dans le projet d'enseignement, puis en savoir d'enseignement » (Conne 1992, p. 266). Le passage du savoir savant au savoir enseigné peut donc se décomposer en « deux étages », le passage du savoir savant au savoir à enseigner, suivi du passage du savoir à enseigner au savoir enseigné.

Notons que Chevallard (1991) introduit également la notion de « texte du savoir » pour évoquer le savoir à enseigner et fait remarquer que ce texte n'est nulle part écrit noir sur blanc. On le trouve explicitement dans le programme officiel d'enseignement mais il comprend également une partie d'implicites liés à des habitudes d'enseignement du savoir en jeu ainsi que les interprétations courantes du programme scolaire.

Dans un premier temps, Conne (1992) précise que dans le processus de transposition, « les objets du savoir mathématique savant sont transformés ». Qui a en charge ces transformations ? Chevallard montre que dans ce processus de transposition didactique, un rôle central est joué par la noosphère :

> « C'est elle [la noosphère], [...] qui va procéder à la sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme « savoir à enseigner », seront alors soumis au travail de transposition ; c'est elle, encore, qui va assumer la partie visible de ce travail, ce qu'on peut appeler le travail *externe* de la transposition didactique[1], par opposition au travail *interne*, qui se poursuit, à l'intérieur même du système d'enseignement, bien après l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. » (Chevallard 1991, p. 31)

Il oppose ici un travail externe, sous la responsabilité de la noosphère à un travail interne, qui se poursuit bien après la rédaction du programme. C'est ce travail interne qui m'intéresse dans le cadre de cette thèse.

Si Chevallard souligne que les transformations du savoir lors du passage du savoir savant au savoir à enseigner sont sous la responsabilité de la noosphère, je fais pour ma part l'hypothèse que celles inhérentes au passage du savoir à enseigner au savoir enseigné sont sous la responsabilité des enseignants et des auteurs de manuels. En effet, pour prendre l'exemple des enseignants, lorsqu'un professeur prépare son cours, le texte du savoir à enseigner est pour lui, à ce moment précis, temporairement stable. Cependant, ce texte offre encore à chaque enseignant une grande variété de choix, choix qui modifient le savoir à

[1] C'est nous qui soulignons.

enseigner. Par ailleurs, les projets de cours construits à la suite de ce premier travail de l'enseignant seront eux aussi transformés lors de la réalisation de ce projet devant une classe. En reprenant le terme « d'apprêt didactique » proposé par Chevallard (1991), j'ai alors introduit la notion d'apprêtage[2] didactique du savoir afin de tenir compte du travail transpositif des enseignants et des auteurs de manuels. Ceci me permet de compléter le schéma proposé par Arsac (1989) en ajoutant une étape dans le processus de transposition didactique interne :

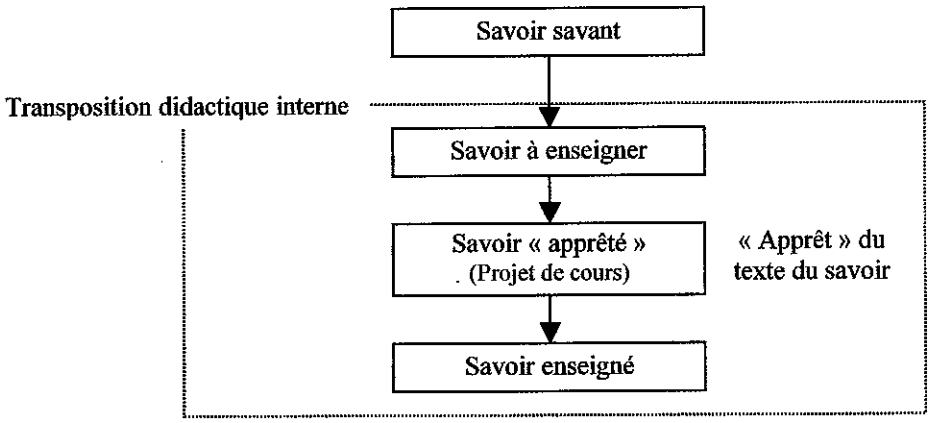


Fig. 1 : Les deux étages de la transposition didactique interne

J'entends par savoir apprêté par un enseignant, le savoir produit par celui-ci dans une perspective d'enseignement du savoir à enseigner, à la suite de ses choix tant mathématiques que didactiques. Il faut souligner que, pour les auteurs de manuels, le processus de transposition didactique interne s'arrête généralement au savoir apprêté et ce n'est que pour les enseignants qu'il se poursuit jusqu'à son terme. De plus, pour les auteurs de manuel, cet apprêtage ne s'effectue pas dans le même système de contraintes que pour les enseignants.

Pour étudier le processus de transposition didactique interne, j'ai choisi dans un premier temps d'analyser une perturbation du système d'enseignement en m'intéressant à la réintroduction de contenus d'arithmétique dans le programme de terminale S spécialité mathématique en 1998. En effet, cette réintroduction s'est faite non seulement après une vingtaine d'année d'absence mais également de façon isolée par rapport au reste du programme de terminale S. Nous pouvons donc penser que les professeurs de spécialité

[2] Je nomme « apprêtage » l'action de l'enseignant qui « apprête » le savoir à enseigner et « apprêt » le résultat de cette action.

mathématique disposent d'une grande liberté de choix dans leur enseignement d'arithmétique, ce qui me permet de poser l'hypothèse d'une forte variabilité dans les choix des professeurs.
J'ai ensuite choisi d'observer de façon « naturaliste » (sans intervention dans la classe) deux classes ordinaires afin de pouvoir étudier le processus de transposition didactique interne dans son ensemble. Pour ce faire, j'ai observé pendant une année entière l'intégralité des cours d'arithmétique de deux enseignantes P1 et P2 en procédant à un entretien avec chacune d'entre elles en fin d'année et en recueillant l'ensemble des copies corrigées des différents devoirs d'arithmétique qui ont eu lieu dans ces deux classes.
Mon étude de la transposition didactique interne se scinde ainsi en deux grandes parties, comme le montre le schéma ci-dessous :

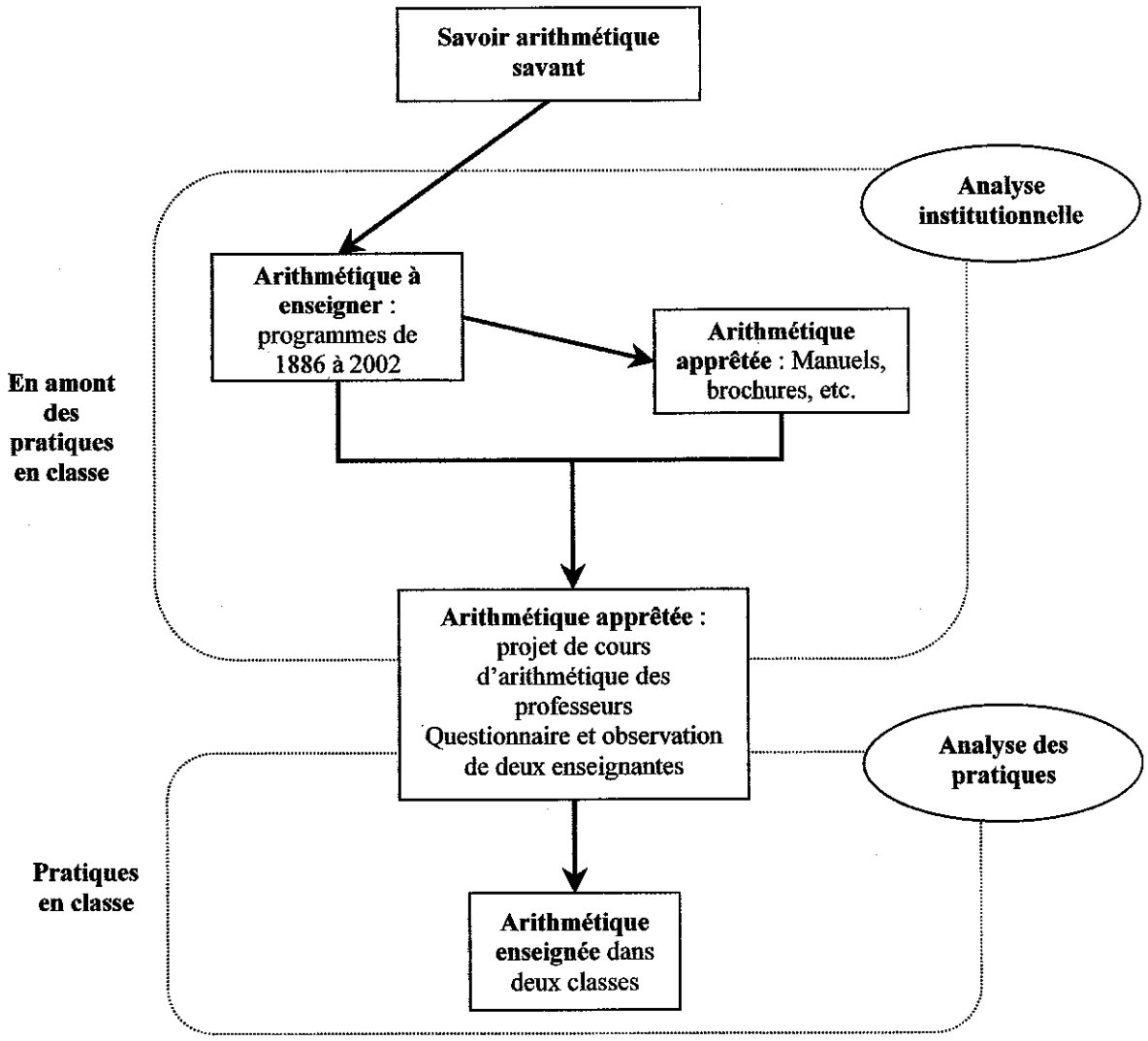


Fig. 2 Etude de la transposition didactique interne de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique.

Les raisons de ce découpage découle de ma problématique. En effet, l'analyse institutionnelle permet d'identifier un système de contraintes et de conditions pesant essentiellement sur l'apprêtage didactique du savoir tandis que l'analyse des pratiques permet, à partir de deux exemples de mise en œuvre spécifique d'un enseignement d'arithmétique, d'analyser le passage du savoir apprêté au savoir enseigné.

I.2 Outils théoriques et questions de recherche

Comme la plupart des travaux existant sur la transposition didactique, je me suis placée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) développée par Chevallard. Dans cette approche, les différents acteurs intervenant dans le processus de transposition sont modélisés comme sujets d'une institution – généralement, de plusieurs institutions. Ce point de vue amène à définir le rapport institutionnel à un objet de savoir comme renvoyant à un ensemble de pratiques sur cet objet au sein de l'institution considérée. Se poser la question de la transposition d'un objet de savoir revient à questionner la nature de cet objet transposé, question qui renvoie « au problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé, problème auquel il faut répondre en termes d'organisation praxéologique » (Bosch & Chevallard 1999, p. 88). On est alors amené à s'interroger sur l'écologie des organisations praxéologiques mathématiques liées à cet objet de savoir. Dans le cadre de la TAD, la problématique écologique me conduit à me poser une première série de questions de recherche :

> **Q_1** : Quel est l'ensemble de contraintes et de conditions qui pèsent sur la transposition didactique interne de l'arithmétique ? Quelles sont les origines et les causes de cet ensemble de contraintes et de conditions ? Quelles conséquences sur la nature de l'arithmétique enseignée par rapport à l'arithmétique à enseigner ?

Par ailleurs, pour tenir compte du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne, je me suis également placée dans le cadre de la TAD. Cette approche modélise l'activité de l'enseignant en terme d'organisation mathématique (OM) construite par l'enseignant pour l'étude d'un objet de savoir et d'organisation didactique (OD) utilisée par le professeur pour mettre en place cette OM. Il existe un principe de codétermination des OM et des OD car « l'OD dépend fortement de l'OM que cette OD vise à mettre en place. Et réciproquement, l'OM est déterminée, à son tour, par l'OD qui la met en place » (Bosch 2002, p. 29). Il s'agit alors d'analyser les déterminations réciproques entre OM et OD afin de mettre en évidence les

choix faits par l'enseignant et d'identifier dans quel système de contraintes et de conditions se sont faits ces choix. Ceci me permet de reformuler mon questionnement initial par la série de questions de recherche suivante :

> **Q_2** : Quels sont les assujettissements institutionnels d'un enseignant ? Quel système de contraintes et de conditions pesant sur les choix mathématiques et didactiques de ce dernier ces assujettissements définissent-ils ? Quel est le « poids » de l'OD sur la détermination de l'OM qu'elle doit mettre en place ? Réciproquement, quel est le « poids » de l'OM sur la détermination de l'OD visant à la mettre en place ?

Cependant, pour identifier cet ensemble de contraintes et de conditions, il faut dans un premier temps pouvoir décrire les OM et les OD. Or ce point se révèle délicat pour les OD. J'ai donc été amenée à reprendre à mon compte la série de questions posées par Bosch (2002) :

> **Q_3** : Comment décrire les composants et la structure des OD au niveau d'un domaine d'étude ? Comment décrire la « dynamique » de ces OD ?

Je vais maintenant présenter la méthodologie d'analyse que j'ai construite pour répondre à la question Q3.

I.3 Méthodologie d'analyse par zooms successifs

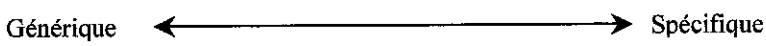
Pour décrire les OM et les OD quelque soit le niveau d'analyse, je me suis appuyée sur l'échelle de hiérarchie des niveaux de détermination didactique de Chevallard (2002). En effet, questionner les OD ou OM existantes nécessite d'analyser l'ensemble des contraintes pouvant peser sur ces organisations praxéologiques, de la plus générique à la plus spécifique. En effet, comme le souligne Chevallard (1999) :

> « [...] les problèmes spécifiques de l'étude d'une organisation mathématique locale particulière restent en général mal posés tant qu'on n'analyse pas les « choix » didactiques, conscients ou non, faits à des niveaux organisationnels de moindre spécificité. » (Chevallard 1999, p. 246)

Il propose une échelle de hiérarchie des niveaux de détermination de ces contraintes[3] qui permet « un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire » (Chevallard 2002, p. 42). Cette échelle compte huit niveaux dont chacun impose un système

[3] Pour une analyse de la dialectique des choix effectifs d'un enseignant et des choix possibles en identifiant les niveaux de détermination didactiques dont relèvent ces choix, voir Noirfalise &Wozniak (2002).

de contraintes aux OM et aux OD tout en permettant les conditions nécessaires à leur mise en place :



Société (-2)→Ecole (-1)→Pédagogie (0)→Discipline (1)→Domaine (2)→Secteur (3)→Thème (4)→Sujet (5)

Fig. 3 : Echelle de hiérarchie des niveaux de détermination surdidactiques et mathématiques

Cette échelle commence donc du niveau de généricité le plus élevé, le niveau -2, celui de la société pour descendre vers des niveaux de spécificité mathématique de plus en plus forte jusqu'au niveau 5, celui du sujet d'étude. Elle peut être mise en relation avec les niveaux de détermination mathématique utilisées dans cette théorie. Ainsi, une OM ponctuelle, organisée autour d'un unique type de tâche, est un sujet d'étude. Une OM locale, organisant le groupement d'un ensemble de types de tâches autour d'une technologie, est un thème d'étude. Une OM régionale, organisée par un amalgame d'OM locales autour d'une théorie, est un secteur d'étude. Et enfin, l'arithmétique qui est une OM globale, organisant plusieurs OM régionales, est un domaine d'étude.

Pour pouvoir me déplacer dans cette échelle de niveaux et tirer des résultats quelque soit le niveau d'analyse choisi, j'ai repris les hypothèses sur les pratiques enseignantes utilisées dans la lignée des travaux de Robert (2001), à savoir que celles-ci forment un système complexe (les différentes dimensions de ces pratiques ne sont pas indépendantes), stable (il existe des choix globaux, stables sur une période de temps donnée, qui « président aux singularisations des déroulements en classe ») et cohérent (il existe une unité derrière les choix des enseignants, quel que soit le niveau où ces choix ont été faits).

Je procède donc par zooms successifs sur l'enseignement de l'arithmétique en descendant vers des niveaux mathématiques de plus en plus spécifiques et ces hypothèses me permettent de reconstruire une cohérence articulant les analyses menées lors de ces zooms.

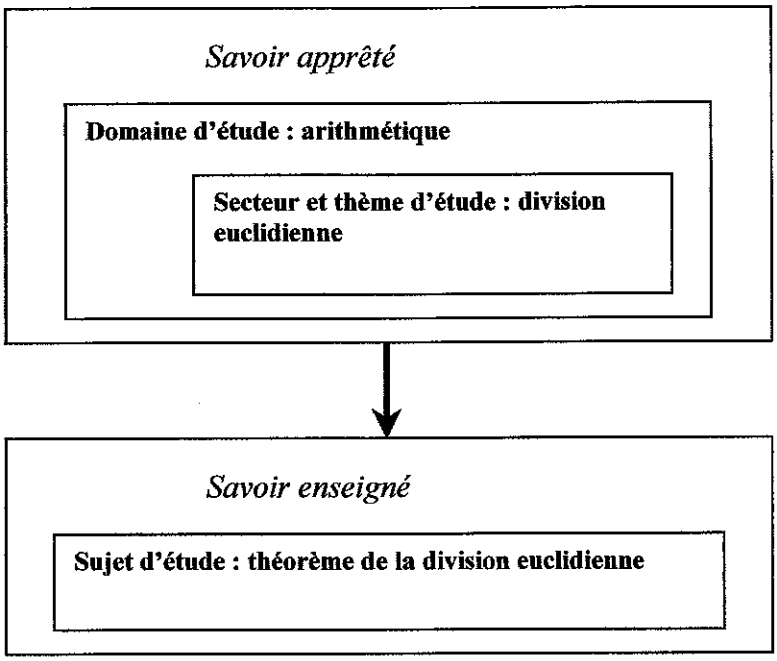


Fig. 4 : Zooms successifs sur les niveaux de détermination mathématique dans le cadre de la transposition didactique interne

Lors de chaque zoom, pour caractériser le savoir apprêté et enseigné, j'ai tenté d'articuler l'analyse des OM et des OD en mettant en évidence les choix faits par les différents acteurs du système d'enseignement ainsi que les conditions et les contraintes pesant sur leurs choix.

Je commence tout d'abord par analyser les pratiques de P1 et P2 sur un domaine d'étude dans son ensemble : l'arithmétique. Pour les OM, j'ai tout d'abord mené une analyse écologique comparative des différents programmes d'arithmétique de 1886 à 2002 et mis en évidence le découpage mathématique du savoir apprêté. Pour décrire et analyser les OD à ce niveau, j'ai introduit la notion de mode de fonctionnement didactique[4] et j'ai décrit le découpage didactique du savoir apprêté pour le mettre en parallèle avec le découpage mathématique.
Je « zoome » ensuite sur la division euclidienne en analysant les OM locales et régionales construites autour du théorème de la division euclidienne par P1 et P2. Celles-ci sont également comparées à celles présentes dans le programme et les manuels. A ce niveau, pour les OD, je me suis intéressée plus particulièrement aux choix relatifs aux démonstrations et à l'évaluation des deux enseignantes observées sur la division euclidienne.
Je « zoome » finalement sur l'OM locale de la division euclidienne et, plus précisément, sur le moment de la démonstration du théorème de la division euclidienne. Je tente alors d'identifier

[4] Cette notion est définie dans la suite de cet article.

le savoir enseigné afin de le comparer au savoir apprêté et de mesurer la distance éventuelle entre les deux. Par ailleurs, les choix didactiques sont analysés à ce niveau en terme d'OD ponctuelles tout en faisant des « emprunts » à la théorie des situations didactiques, notamment la notion d'effets Topaze et de contrat didactique.

II. L'ARITHMETIQUE EN SPECIALITE MATHEMATIQUE : UN DOMAINE D'ETUDE

Lorsqu'un enseignant construit son cours, une des références à laquelle il est fortement lié est le programme. En effet, celui-ci précise dans un premier temps ce que l'enseignant est tenu d'enseigner au niveau des contenus. Pour pouvoir analyser la transposition didactique interne actuelle de l'arithmétique, j'ai procédé à une analyse écologique comparée des programmes d'arithmétique des classes de terminale scientifique depuis 1886. Cette comparaison des programmes, en pointant les différences, les similitudes et les évolutions des différents programmes, permet « d'éclairer » le processus de transposition didactique qui a eu lieu ces dernières années et de déterminer les conditions écologiques actuelles de vie de l'arithmétique dans l'ensemble du corpus d'enseignement.

II.1 L'arithmétique à enseigner : analyse écologique de programmes

Notre étude comparative est découpée en cinq périodes :

1. La période classique : de 1886 à 1971

Pour l'analyse des programmes de cette période, je m'appuie sur les travaux d'Assude (1998). De 1886 à 1971, malgré quelques changements, le contenu du programme d'arithmétique reste relativement stable. L'arithmétique occupe la niche « calcul numérique » du fait de la place importante dans les programmes des opérations sur les fractions. Par ailleurs, la vie de cette niche était renforcée par la présence des sections *nombres réels, progressions arithmétique et géométrique* et *calculs approchés* qui faisaient partie, à cette époque, des contenus d'arithmétique.

Par ailleurs, comme le souligne Assude (1998), une autre niche est également occupée par l'arithmétique dans les programmes de cette période ; la niche « théorie des nombres » qui « consiste à donner à l'arithmétique une consistance théorique par rapport à l'algèbre » (Ibid., p. 108).

2. La période de la réforme des mathématiques modernes : de 1971 à 1983

Le programme d'arithmétique précédent va être bouleversé par la réforme des mathématiques modernes. Alors que l'arithmétique soutenait et contrôlait auparavant le calcul numérique, la disparition de la racine carrée et des problèmes de représentations décimales des rationnels et des irrationnels des contenus d'arithmétique contribue à rendre difficile la vie de la niche « calcul numérique » dans les programmes. Par contre, l'arithmétique devient à cette époque l'occasion de revoir et d'approfondir l'étude des structures algébriques ainsi que de compléter l'étude des ensembles de nombres. L'arithmétique occupe donc de façon préférentielle la niche « structurelle ».

3. La période de la contre-réforme : de 1983 à 1998

Au moment de la contre-réforme, les contenus de l'enseignement secondaire sont remaniés et l'arithmétique disparaît totalement des programmes du lycée dans un premier temps, puis de ceux du collège à partir de 1985. Cependant, après une quinzaine d'années d'absence, l'arithmétique va être réintroduite dans les programmes de l'enseignement secondaire : à la rentrée 1998 en terminale S spécialité mathématique, en 1999 en troisième et en 2001 en seconde.

4. La période contemporaine : de 1998 à 2002

L'arithmétique a été réintroduite dans le programme de terminale S spécialité mathématique avec une volonté marquée de mettre en avant son aspect algorithmique[5]. Par ailleurs, les concepteurs du programme ont souligné que l'arithmétique méritait de retrouver une place dans l'enseignement du fait de son importance dans l'histoire des mathématiques. En 1998, l'arithmétique occupe donc deux niches : la niche « algorithmique » et la niche « culturelle ».

5. Le dernier programme d'arithmétique : 2002

En 2002, un nouveau programme est entré en vigueur. Une des différences essentielles par rapport à celui de 1998 se situe au niveau des contenus : les congruences remplacent les opérations sur les restes. On constate également un renforcement de la niche algorithmique par le biais de l'apparition d'exemples d'utilisation d'outils informatiques dans le texte du programme et d'une articulation entre raisonnement et démarches algorithmiques :

« C'est le lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement » (Introduction du paragraphe « enseignement de spécialité »)

Deux niches sont donc occupées par l'arithmétique dans le nouveau programme de 2002 : la niche « algorithmique » et la niche « raisonnement ».

Je tiens à souligner que la séparation des niches « algorithmique » et « raisonnement » n'est a priori pas pertinente[6] mais existe dans les faits. C'est pourquoi j'ai choisi de les différencier afin d'identifier les contraintes qui pèsent sur les choix des professeurs et des auteurs de manuels en ce qui concerne ces deux niches.

II.2 L'arithmétique apprêtée : un espace de liberté

Dans la suite de ce travail, je me suis plus particulièrement intéressée à la vie de la niche « algorithmique » dans les manuels et les projets de cours des enseignants de spécialité mathématique. J'ai identifié trois moyens de faire vivre la niche « algorithmique » à ce niveau :

- Proposer des démonstrations constructives des théorèmes d'arithmétique ;
- Intégrer l'outil informatique par le biais de la programmation informatique des algorithmes du cours d'arithmétique et l'intégration, à un corpus d'exercices plus classiques, d'exercices à résoudre à l'aide d'outils informatiques ;
- Proposer des exercices dans lesquels les algorithmes sont soit des outils efficaces de résolution soit des objets d'étude.

Une analyse écologique et praxéologique de trois manuels[7] de 1998 et 2002 et une analyse des réponses de 43 enseignants à un questionnaire sur leur cours d'arithmétique a permis de montrer que (Ravel 2002) :

- au niveau des démonstrations constructives, celles-ci étaient peu proposées par les manuels mais plus souvent choisies par les enseignants ;
- que ce soit dans les manuels ou dans les classes, les programmes informatiques étaient donnés aux élèves déjà écrits dans un langage de programmation ; par ailleurs, un seul manuel propose des exercices à résoudre avec ordinateur, exercices qui ne sont pas repris dans les classes ;

---

[5] Notamment par le biais de l'étude de l'algorithme d'Euclide, de celui de la division euclidienne, du test de primalité etc.

[6] En effet, mettre en œuvre une démarche algorithmique revient à utiliser un type de raisonnement particulier.

- en ce qui concerne les algorithmes, ceux-ci ne sont jamais, dans le cadre des exercices, un objet d'étude et il existe une technique algorithmique stéréotypée qui est la résolution d'équations diophantiennes du type au+bv=d.

Nous voyons bien que les choix faits par les auteurs de manuels et les enseignants modifient le savoir à enseigner. Ils font vivre de façon préférentielle la niche raisonnement contrairement aux attentes du programme qui est de favoriser l'approche algorithmique de l'arithmétique.

Voici maintenant un exemple qui illustre ce fait, expliquant également pourquoi j'ai décidé de séparer les niches « algorithmique » et « raisonnement » dans ma recherche. Il s'agit des réponses des enseignants à la dernière question du questionnaire que je leur ai adressé. L'exercice proposé était extrait du manuel Déclic de 1998 :

> « Voici l'énoncé d'un exercice :
>
> 'Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair $n \geq 5$ peut s'écrire sous la forme $n=2p+q$, avec p et q premiers. Par exemple : $51=2\times23+5$. Ecrire un programme permettant pour un entier impair $n \geq 5$ donné, de déterminer un couple (p,q) de nombres premiers tels que $n=2p+q$. (Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)'
>
> Jugez-vous que cet exercice soit un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?
>
> Poseriez vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ? »

Sur 43 enseignants, 22 pensent que cet exercice est un exercice d'arithmétique, 13 pensent que ce n'est pas un exercice d'arithmétique, 6 ne se sont pas prononcés et 2 n'ont pas souhaité répondre à cette question. En ce qui concerne la seconde partie de la question, 22 enseignants pourraient poser cet exercice aux élèves, sous conditions pour certains, 19 ne le poseraient pas et 2 n'ont pas répondu à la question. Ces réponses peuvent s'expliquer par le fait qu'ici, l'arithmétique est un outil de résolution et non l'objet de l'exercice. Par ailleurs, le raisonnement à mettre en œuvre pour résoudre l'exercice est également éloigné des raisonnements « classiques » d'arithmétique. Il s'agit en effet d'écrire un programme et de se faire une idée sur la véracité d'une conjecture non encore démontrée.

---

[7] Il s'agit des manuels de la collection Déclic, Terracher et Transmath.

A la suite de cette question, les enseignants interrogés ont majoritairement fait des commentaires libres sur cet exercice et leur conception de l'arithmétique. Voici trois extraits pris dans ces nombreux commentaires :

> « Je ne poserai pas un tel exercice à mes élèves. Je n'ai pas de passion particulière pour les outils de calcul et je préfère toujours ce qui s'obtient par la réflexion et le raisonnement sans qu'il soit nécessaire d'utiliser une machinerie lourde. »
>
> « Ce cours d'arithmétique est un lieu privilégié pour apprendre à raisonner »
>
> « Le programme de spé math c'est le meilleur tremplin qu'on puisse trouver pour une Math Sup MPSI. »

Les enseignants font donc une différence profonde entre l'aspect algorithmique et l'aspect raisonnement de l'arithmétique. Leurs différentes réponses montrent qu'ils s'octroient une marge de liberté importante par rapport aux exigences officielles du programme concernant la niche « algorithmique ».

Ces analyses ont également permis de mettre en évidence différentes contraintes didactiques et conceptions idéologiques qui ont pesé sur l'apprêtage de l'arithmétique et qui peuvent expliquer pourquoi la niche « algorithmique » vit mal dans les projets de cours des enseignants et les manuels :

- des contraintes institutionnelles fortes comme le temps dont disposent les enseignants, la nécessité d'avoir à préparer les élèves aux épreuves du baccalauréat, la difficulté d'avoir accès à des moyens informatiques dans les établissements scolaires etc. ;
- la difficulté de trouver des références d'exercices mettant en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique ;
- le niveau de formation insuffisant des enseignants en programmation ainsi que les niveaux très hétérogènes des élèves en programmation ;
- la représentation dominante que les enseignants ont sur les mathématiques qui leur fait préférer le raisonnement à l'approche algorithmique des mathématiques ;
- et enfin la spécificité de la classe de spécialité mathématique dont la plupart des élèves se destinent à des études scientifiques universitaires. Les enseignants souhaitent les former au mieux pour le post-bac en insistant sur le raisonnement en arithmétique.

Remarquons pour terminer que toutes ces contraintes favorisent la vie de la niche raisonnement au détriment de la vie de la niche algorithmique.

II.3 Mode de fonctionnement didactique de P1 et P2

Après avoir décrit et analysé les choix mathématiques d'apprêtage de l'arithmétique de trois auteurs de manuels et d'une quarantaine d'enseignants, je vais maintenant m'intéresser aux choix des deux enseignantes que j'ai observées pendant une année entière. Se pose alors la question de la mise en œuvre de ces choix en classe, c'est-à-dire le problème de la description des choix didactiques des enseignants au niveau de l'enseignement de l'arithmétique dans son ensemble. Pour se faire, j'ai introduit la notion de **mode de fonctionnement didactique** d'un enseignant pour décrire une certaine « façon de faire » très générale que je définis provisoirement comme un ensemble de routines qui caractérisent l'activité de l'enseignant indépendamment (du moins en partie) du contenu mathématique enseigné. Je fais également l'hypothèse que ces modes de fonctionnements didactiques contraignent les choix mathématiques de l'enseignant.

Il s'agit maintenant de décrire le mode de fonctionnement didactique de P1 et P2, en décrivant le déroulement habituel des séances dans ces deux classes.

Cas de l'enseignante P1 :

Cette enseignante commence en général les séances de deux heures par quarante minutes de cours magistral (l'enseignante est au tableau) puis distribue des fiches d'exercices que les élèves résolvent de façon autonome pendant qu'elle passe dans les rangs.

L'organisation pédagogique de l'activité mathématique mise en place par P1 se caractérise par une dichotomie très marquée du point de vue de la topogenèse : les élèves et l'enseignante occupent à tour de rôle l'ensemble de l'espace par rapport au savoir. Leurs places sont clairement définies : c'est tout d'abord à P1 de gérer le cours avant de disparaître et de donner à l'élève la responsabilité de l'avancée du travail, de façon individuelle. Cette topogenèse organise la chronogenèse. En effet, les choix pédagogiques structurent, dans cette classe, l'avancée du temps didactique : il s'agit d'organiser chaque séance de 2 heures avec un minimum de cours pour pouvoir garder un maximum de temps pour les exercices. Nous parlons alors d'organisation centrée sur la praxis et non sur le logos (les exercices sont le moteur de l'activité de cette classe).

Ce choix permet à P1 de répondre à deux contraintes très fortes qui pèsent sur tout enseignant de spécialité : préparer les élèves au baccalauréat et au post-bac. En effet, le travail sur fiches d'exercices permet de faire travailler chaque élève en autonomie et de proposer un nombre

d'exercices couvrant à la fois les exigences du baccalauréat et permettant d'aller plus loin que le programme.

Cas de l'enseignante P2 :

Dans la classe de P2, les séances de deux heures sont organisées de la façon suivante : un cours « dialogué » (avec questions à l'ensemble de la classe) et des exercices qui suivent les principaux théorèmes. Ces exercices sont intégrés au cours, les élèves les notent et les résolvent dans leur cahier de cours. Pendant ces exercices, les élèves disposent en général d'un temps de recherche personnel variant entre 5 et 10 minutes pendant lesquelles P2 passe dans les rangs.

Dans cette organisation pédagogique, les topos respectifs de l'enseignante et des élèves ne sont pas aussi marqués que dans la classe de P1. Pour P2, c'est la chronogenèse qui organise la topogenèse de la classe. En effet, son activité est centrée sur le logos : elle accorde une place centrale au cours qui est le moteur de l'avancée du temps didactique. Les exercices ne sont là que pour illustrer le cours. Pour P2, tout se passe comme si, dans une organisation centrée sur le logos, le cours « dialogué » lui permettait de répondre à l'impératif didactique qui est d'aménager une place aux élèves.

II.3 Mode de fonctionnement didactique : contraintes et libertés pour l'enseignant

Je viens de montrer que P1 et P2 ont des modes de fonctionnements très différents. Quel va être l'impact de ce mode de fonctionnement ? Autrement dit, observe-t-on des différences entre le savoir apprêté par P1 et celui apprêté par P2 ? Ces différences sont-elles liées à des choix mathématiques ou didactiques ? Quel est le poids du mode de fonctionnement didactique sur ces choix ? Pour répondre à cet ensemble de questions, je vais poursuivre la description des OD et des OM mises en place par ces deux enseignantes en menant tout d'abord pour les choix didactiques, une comparaison des découpages en chapitres du savoir apprêté par P1 et P2 puis pour les choix mathématiques, une analyse écologique du savoir apprêté par P1 et P2.

Découpage en chapitres du savoir apprêté par P1 et P2 :

Le découpage en chapitres de l'enseignement d'arithmétique de P1 et P2 est présenté ci-dessous. On constate que P1 a un découpage en chapitres qui est plus « fin » qu'un découpage

en secteurs d'étude[8]. En effet, les chapitres sur la division, le pgcd et le ppcm sont des thèmes d'étude (Ravel 2003). P2, de son côté, a un découpage en chapitres plus « gros » qu'en secteurs d'étude.

Le mode de fonctionnement didactique est une contrainte qui peut permettre d'expliquer ces choix de découpage. Par exemple, pour P1, étant donné que les exercices sont le moteur de l'avancée du temps didactique, il faut prévoir de petites unités de cours, centrées sur des thèmes d'étude, afin de pouvoir proposer de grandes plages de travail sur fiches centrées sur ces thèmes. On constate donc ici une « atomisation » des OM dans le cas de l'enseignante P1.

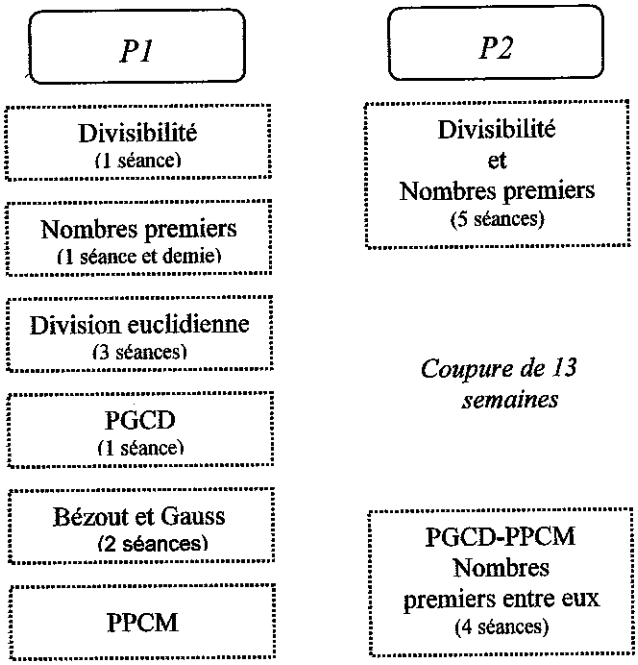


Fig. 5 : Découpage en chapitres du cours d'arithmétique de P1, P2

Analyse écologique du savoir apprêté par P1 et P2 :

Par manque de temps, je soulignerai seulement qu'au niveau des choix mathématiques, l'analyse écologique du savoir apprêté par P1 et P2 m'a permis de montrer que ces deux enseignantes sont représentatives des deux grandes tendances de professeurs que nous avons identifié à la suite de l'analyse de notre questionnaire. P1 utilise l'arithmétique pour mettre en avant à la fois ses aspects « algorithmique »[9] et « raisonnement » tandis que P2 ne fait vivre que la niche « raisonnement » de l'arithmétique dans son projet de cours

[8] Le programme propose un découpage en quatre secteurs d'étude : divisibilité, nombres premiers, division euclidienne et algorithme d'Euclide, Théorèmes de Bézout et de Gauss.

[9] En introduisant notamment des notions de programmation informatique dans son cours.

Dans cette partie, je viens de montrer qu'au niveau du domaine d'étude, P1 et P2 ont fait des choix mathématiques et didactiques différents. Elles n'ont pas le même découpage didactique du savoir et ne mettent pas en avant les mêmes fonctions de l'arithmétique dans leur cours. Je vais poursuivre l'analyse de ces choix en effectuant un premier zoom sur l'enseignement de la division euclidienne.

III. LA DIVISION EUCLIDIENNE : UN SECTEUR ET UN THEME D'ETUDE

Pour comprendre le rôle des enseignants dans le processus de transposition didactique interne, je vais comparer le savoir apprêté par P1 et P2 autour de la division euclidienne à celui que l'on trouve dans le savoir à enseigner, c'est-à-dire à celui que l'on peut reconstruire à partir du programme.

III.1 Savoir à enseigner : OM régionale autour de la division euclidienne

Voici les OM locales et régionales autour de la division euclidienne proposées dans le programme de 1998 :

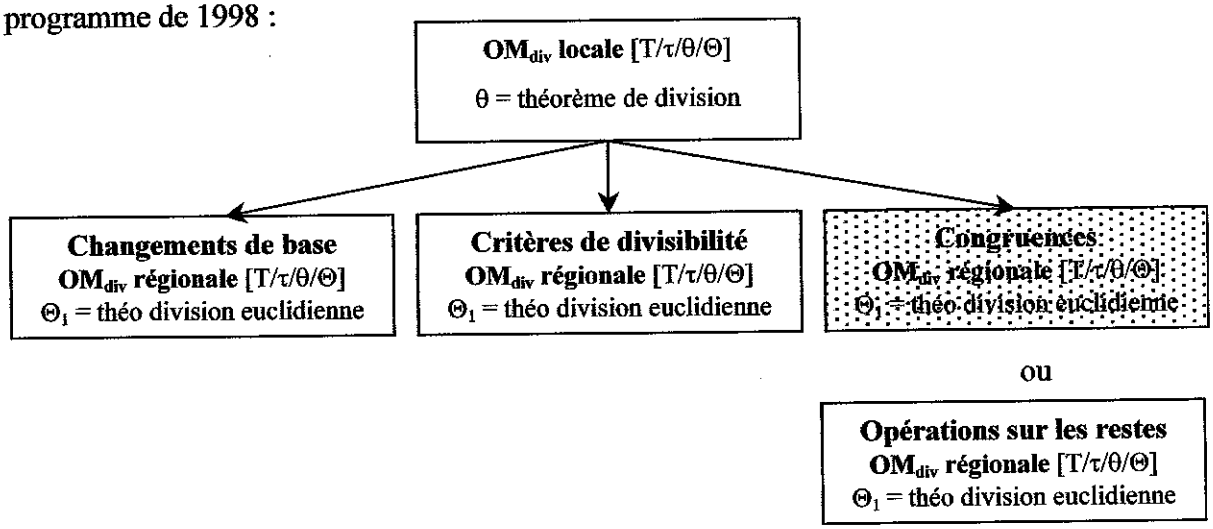


Fig. 6 : Structure du secteur d'étude autour de la division euclidienne dans le programme de 1998

Tout d'abord, soulignons que le programme ne précise pas si le théorème de la division euclidienne est à énoncer dans **N** ou dans **Z**. Ce choix est laissé à l'appréciation des enseignants, de même que le choix de la démonstration.

Les commentaires indiquent que deux OM_{div} régionales peuvent être construites autour de la division euclidienne : une OM_{div} régionale sur les changements de base et une autre sur les critères de divisibilité. L'OM_{div} régionale sur les congruences n'est pas explicitement au programme qui laisse toutefois la possibilité aux enseignants de l'introduire. Quoiqu'il en soit, cette OM_{div} régionale doit rester dans un état de développement incomplet, autour du bloc [T/τ], sans qu'aucune connaissance ne puisse être exigée à ce propos. Elle peut cependant être remplacée par une OM_{div} régionale sur les restes qui permet d'énoncer, de démontrer et d'utiliser les opérations possibles entre les restes. Cette façon de procéder est beaucoup plus lourde que d'utiliser les congruences. Je tiens à préciser que les commentaires du programme sont également explicites sur un point : dans le cas des OM_{div} régionales, l'aspect algorithmique sera privilégié.

Je vais maintenant décrire quels sont les choix de P1 et P2 autour de la division euclidienne afin de voir si ceux-ci sont conformes à ceux présentés dans le programme.

III.2 Savoir apprêté par P1 : OM régionale autour de la division euclidienne

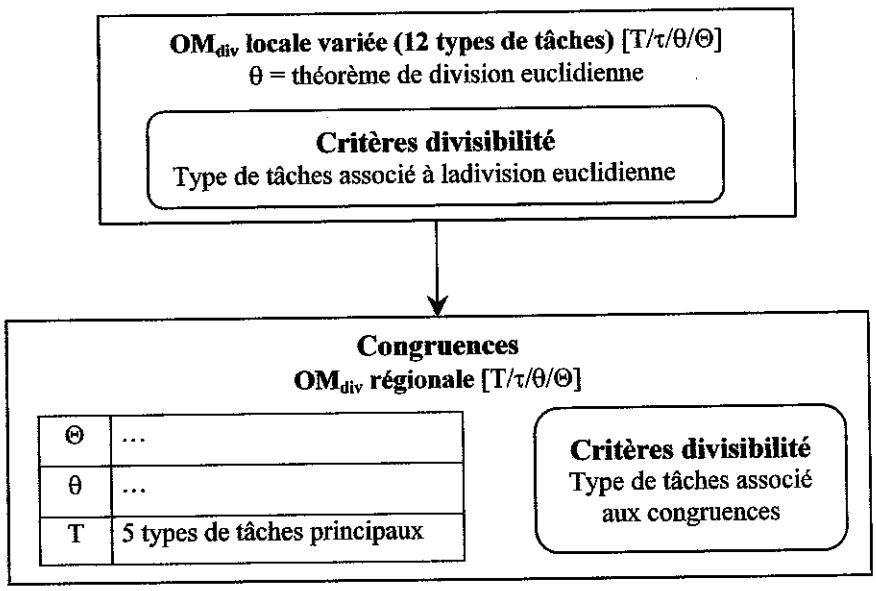


Fig. 7 : Structure du secteur d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P1

La variété des types de tâches proposée par P1 dans l'OM_{div} locale est facilitée par le fonctionnement de P1 à l'aide de fiches d'exercices. Notons que P1 ne consacre pas de séance particulière aux critères de divisibilité. En effet, le type de tâches *Etablir un critère de divisibilité* apparaît aussi bien dans l'OM_{div} locale comme type de tâches isolé que dans l'OM_{div} régionale sur les congruences, où il fait l'objet de plusieurs exercices.

Contrairement au programme, P1 ne propose qu'une OM_{div} régionale : les congruences. Cependant, conformément aux exigences de ce dernier, aucun résultat technologique n'est institutionnalisé sur les critères de divisibilité. Par ailleurs, P1 n'aborde pas les changements de base de numération dans son cours. L'OM_{div} régionale sur les changements de base est donc absente.

Pour finir, au niveau des choix de P1 concernant l'évaluation, notons que celle-ci porte essentiellement sur les types de tâches de l'OM_{div} locale vu dans les exercices donnés en classe.

III.3 Savoir apprêté par P2 : OM régionale autour de la division euclidienne

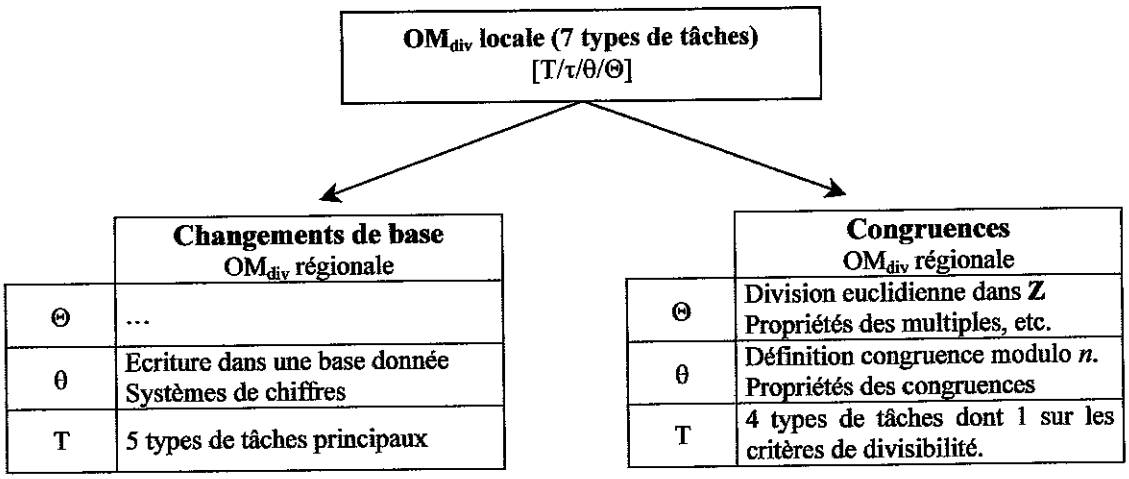


Fig. 8 : Structure du secteur d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P1

Les choix de P2 autour de la division euclidienne sont différents de ceux du programme et de P1. On trouve moins de types de tâches proposés du fait du mode de fonctionnement de P2 : elle donne moins d'exercices que P1 car ceux-ci sont insérés dans le cours.

On constate également, par rapport au programme, l'absence de l'OM_{div} régionale sur les critères de divisibilité. Cela est dû au fait que P2 a fait dépendre cette OM de la notion de divisibilité de deux entiers et non de celle de division euclidienne. Contrairement à P1, les OM_{div} régionales sont ici presque complètes car elles font partie intégrante du cours : les théorèmes sur les changements de base ou les congruences sont donc énoncés, voir démontrés.
Pour finir, notons que l'évaluation de P2 porte d'une part sur les changements de base de numération et sur l'OM_{div} locale, mais essentiellement sur des types de tâches qui n'ont pas été vus en exercices.

Pour conclure sur les choix d'apprêtage au niveau des secteurs et thèmes d'étude, je veux souligner le fait que le mode de fonctionnement didactique est une contrainte interne, de niveau pédagogique, qui contraint fortement les choix mathématiques et didactiques des enseignants. En effet, il détermine en partie la présence et le degré de développement des OM_{div} régionales et pèse également sur la variété des types de tâches proposés et évalués. Cela induit donc des choix mathématiques et didactiques différents qui transforment de façon significative le savoir à enseigner lors de son apprêtage.

IV. LE THEOREME DE LA DIVISION EUCLIDIENNE : UN SUJET D'ETUDE

Je vais maintenant descendre à nouveau d'un niveau dans les analyses, en me centrant sur la démonstration du théorème de la division euclidienne faite par P1 et P2 en classe. Les projets de démonstration de ces deux enseignantes ont été confrontés à des projets de démonstrations reconstruits à partir des programmes, des différents manuels analysés et de brochures[10] à destination des enseignants. Cette méthodologie me permet, à chaque pas de la démonstration, d'identifier les choix mathématiques et didactiques faits par P1 et P2 et par là, d'essayer d'expliciter le système de contraintes et conditions dans lequel ces décisions ont été prises.

[10] Il s'agit d'une brochure du CRDP d'Auvergne (CRDP Auvergne (1998). Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité nouveau programme, *CRDP Auvergne (ed.)*) et d'une autre de l'IREM de Poitiers (BONNEVAL, L.-M. & al (2000). *Enseigner l'arithmétique*, IREM de Poitiers (ed.)).

IV.1 Choix mathématiques et didactiques de P1

P1 choisit d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z** :

« **Théo et déf** :
$a \in Z$, $b \in N^*$. Il existe un couple (q,r) unique avec $q \in Z$, $r \in N$ et $0 \leq r < b$ tel que $a=bq+r$
a = dividende, b = diviseur
q = quotient, r = reste. » (Cours n°4 de P1)

Elle choisit de démontrer ce théorème en s'appuyant sur l'axiomatique des propriétés des parties non vides de **N** qu'elle a mise en place dans le premier cours d'arithmétique :

« Dem : **Existence**
1er cas : $a \in N$
$E=\{n \in N, nb>a\}$. $E \neq \varnothing$ car lim nb = + ∞ (ou n>a/b réalisé si n>partie entière de (a/b)+1). Pour n assez grand, $n \in E$. E admet un plus petit élément Q. $0 \notin E$ donc $Q \neq 0$.
Il existe $q \in N$ tel que Q=q+1. $(q+1) \in E$ et $q \notin E$. $qb \leq a < (q+1)b$
$a=bq+r \Leftrightarrow r=a-bq$. $0 \leq a-bq < b$
Donc $a=bq+r$ avec $0 \leq r < b$
2nd cas : $a < 0$ $(-a) > 0$
En utilisant le 1er cas, $-a=bq'+r'$ avec $q' \in N$ et $0 \leq r' < b$
$a=b(-q')-r'$ $-b < r' \leq 0$
α) Si $r'=0$, $a=b(-q')-0$
β) Si $r' \neq 0$, $a=b(-q')-b+b-r'=b(-q'-1)+b-r'$ avec $b-r' \in]0,b]$

Unicité
$a=bq+r=bs+t$ avec $(q,s) \in Z^2$, $0 \leq r < b$ et $0 \leq t < b$
$b(q-s)=t-r$
$0 \leq t < b$
$-b < -r \leq 0$
$-b < t-r < b$ et (t – r) multiple de b d'où t=r ; d'où bq=bs ; q=s car $b \neq 0$. »

Trois points ressortent de cette de démonstration.

Tout d'abord, P1 choisit de démontrer l'inégalité $qb \leq a < (q+1)b$, quitte à introduire une complexité au niveau du raisonnement qui n'est pas habituelle pour les élèves auxquels ce cours s'adresse. En effet, le plus petit élément de l'ensemble E n'est pas le nombre cherché dans cette démonstration –le quotient– mais le quotient augmenté d'une unité. L'introduction de q comme étant l'entier précédant Q est motivée par l'inégalité à laquelle on veut aboutir : $qb \leq a < (q+1)b$. Ce passage est délicat et très formel d'un point de vue mathématique. Il répond entièrement à la volonté de P1 de former les élèves aux mathématiques du supérieur.

Par ailleurs, en choisissant d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z** et en tenant à faire des « démonstrations nettement plus rigoureuses » en arithmétique, P1 est amenée à faire une démonstration de l'existence par disjonction de cas. Pour démontrer l'existence de r dans le cas $a<0$, elle doit faire une seconde disjonction de cas sur les valeurs possibles de r : $r=0$ et $r \neq 0$. Nous avons donc ici une imbrication de raisonnements par disjonction de cas qui,

dans leur déroulement, nécessitent la mise en œuvre de connaissances extrêmement techniques sur la manipulation d'entiers relatifs et de leurs opposés. Soulignons qu'en choisissant n dans Z dans la définition de l'ensemble E, elle aurait pu éviter la démonstration technique du cas a<0.

Enfin, P1 choisit de démontrer l'existence du couple (q,r) en distinguant la partie existence de la partie unicité. Or, en se basant sur la propriété d'Archimède et les propriétés des parties de **N**, l'existence et l'unicité de q et r peuvent s'obtenir simultanément. On peut se demander pourquoi P1 décide de séparer la démonstration de l'existence et celle de l'unicité. Tout d'abord, comme cela est souligné dans le cours de l'IREM de Poitiers, c'est l'occasion de mettre en œuvre un raisonnement intéressant –le raisonnement par l'absurde– et d'utiliser une propriété spécifique à l'arithmétique (pour montrer qu'un nombre est nul, montrer que c'est un multiple de b strictement compris entre –b et b). Faire ce choix permet donc de répondre à l'un des objectifs de P1 : la formation des élèves au raisonnement. De plus, distinguer la démonstration de l'existence de celle de l'unicité répond également à un second objectif de P1 : préparer les élèves aux mathématiques du supérieur.

Tout ceci montre la cohérence des choix de démonstration de P1 pour le théorème de la division euclidienne avec ses objectifs d'enseignement par rapport au raisonnement. Par ailleurs, son mode de fonctionnement didactique sous forme de cours magistral lui permet de proposer une démonstration aussi « formelle ».

IV.2 Choix mathématiques et didactiques de P2

Comme P1, elle choisit également d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z**. Voici la démonstration qu'elle propose pour ce théorème :

« Dem :
Existence
Soit $a \in \mathbf{Z}$, soit $b \in \mathbf{N}^*$. Encadrons a par deux multiples consécutifs de b.
Soit $q \in \mathbf{Z}$ tel que $bq \leq a < b(q+1)$ *(remarque : $q \leq a/b < q+1$ $q = E(a/b)$)*
$a = bq + a - bq$ avec $r = a - bq$.
Comme $bq \leq a < b(q+1)$, on a $0 \leq r < b$

Unicité
Soit (q,r) et (q',r') deux couples solution. On a $\{a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$, $a = bq' + r'$ avec $0 \leq r' < b$
$\begin{cases} 0 \leq r < b \\ -b < -r \leq 0 \end{cases}$ donc $-b < r-r' < b$

De plus, $bq + r = bq' + r'$ donc $r-r' = b(q'-q)$ avec $q'-q$ entier, donc $r-r'$ multiple de b
D'où $r-r' = 0$ donc $r = r'$, donc $q'-q = 0$ donc $q' = q$ d'où l'unicité. »

Quatre points se dégagent à l'analyse de cette démonstration.

Premièrement, P2 ne prouve pas que a peut être encadré par deux multiples consécutifs de b. Cet encadrement semble aller de soi. Tout comme l'IREM de Poitiers, elle prévoit de s'appuyer sur « le bon sens commun » et sur le fait que « les élèves utilisent spontanément [ce] résultat » (Ibid., p. 245).

Par ailleurs, P2 fait une remarque sur la partie entière de a/b qui peut paraître surprenante. En effet, l'utilisation de la partie entière aurait pu permettre de prouver l'existence de q et d'obtenir de façon « rigoureuse » l'inégalité recherchée.

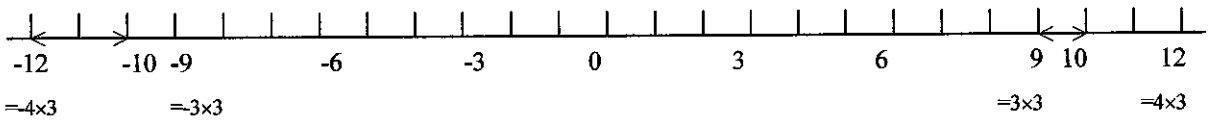
De plus, alors que P2 a choisi d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z**, elle ne fait pas de disjonction de cas selon le signe de a. Elle évite de la sorte un passage technique de la démonstration en introduisant l'inégalité $qb \leq a < (q+1)b$ directement avec a et q à valeurs dans **Z**. Notons que l'utilisation de la partie entière permet aussi d'éviter de distinguer le cas a positif du cas a négatif.

En introduisant la partie entière, P2 aurait pu faire simultanément la démonstration de l'existence et de l'unicité du quotient et du reste. Cependant, de même que P1 et l'IREM de Poitiers, elle choisit de prouver séparément l'existence et l'unicité de (q,r). Tout comme P1, P2 a également comme objectif de former les élèves au raisonnement en arithmétique.

IV.3 Savoir enseigné dans la classe de P1

Je vais maintenant présenter la réalisation de la démonstration faite en cours par P1. Au sein de l'ensemble du protocole, je m'intéresse plus particulièrement à la démonstration difficile du cas $a<0$ dans la partie sur l'existence du quotient et du reste d'une division euclidienne.

Avant de donner l'extrait de protocole, précisons tout d'abord la situation de ce passage par rapport à l'ensemble de la séance. Il se déroule en introduction du théorème, avant la démonstration de l'existence. La démonstration en tant que telle du théorème n'a pas encore débuté. P1 s'appuie sur le schéma ci-dessous. Ce schéma permet d'illustrer l'existence de q et l'inégalité $qb \leq a < (q+1)b$ quand a=10 et a=-10 et quand b=3. Il permet également de visualiser le reste.



26	**P** : [...] Donc pour les nombres positifs je dirai qu'il n'y a pas de nouveauté, ce qui m'intéresse juste, que vous ayez compris en préliminaire, c'est que le quotient on va le trouver par l'inégalité sur ... en plaçant le nombre par rapport aux multiples de 3.	

P1 fait le bilan du travail qu'elle vient d'effectuer sur 10 divisé par 3 en pointant l'élément essentiel sur lequel reposera la démonstration à venir : la place de 10 par rapport aux multiples de 3. Cependant, le fait que P1 reprenne sa phrase « le quotient on va le trouver par l'inégalité sur ... en plaçant le nombre par rapport aux multiples de 3 » est symptomatique de l'attitude de P1, toujours en tension avec ce qu'elle est en train de faire et ce qu'elle a prévu de faire par la suite. Dans son bilan, elle se reprend car elle commence à fournir une explication dans le cadre théorique (l'inégalité centrale dans la démonstration : $qb \leq a < (q+1)b$) alors qu'elle se situe encore dans le cadre de l'application numérique.

27	**P** : Alors pour les nombres négatifs, il y a juste une histoire de convention. La convention importante c'est que par convention le reste est un nombre positif.	
28	**P** : Donc -10, donc le raisonnement est le même, -10 il est entre -4 fois 3 et -3 fois 3. Mais si je prenais ce nombre là, -9, si je veux aller de -9 à -10 le problème c'est qu'il faut soustraire -a ou rajouter enfin soustraire a ou rajouter -a. Donc par définition, la division de -10 par 3 on va écrire que -10 c'est plutôt -4 par 3 plus quelque chose et donc ce quelque chose ce qu'on trouve là cad c'est le +2.	(Voir schéma)
29	**P** : Donc la division ça va s'écrire -10 égal -4 fois 3 plus 2 donc voilà le quotient et voilà le reste.	(P écrit au tableau) *-10 divisé par 3* *-10=-4x3+2* ~~*-10=-3x3-1*~~

Après avoir traité le cas 10 divisé par 3, P1 passe au cas –10 divisé par 3. Elle suit le même ordre que celui choisi dans la démonstration ($a \geq 0$ puis $a < 0$). Elle indique auparavant le point qui va permettre de déterminer si l'égalité trouvée est bien une égalité de division euclidienne : « la convention sur le reste ». Elle écrit d'ailleurs au tableau les deux égalités que l'on peut obtenir, suivant que l'on choisisse –3 ou –4 comme quotient et barre celle qui ne vérifie pas la condition sur le reste. Ce choix d'écrire les deux égalités permet de montrer aux élèves qu'il existe différentes égalités qui peuvent avoir la forme d'une égalité de division euclidienne mais que seule celle qui vérifie la condition $0 \leq r < b$ représente une égalité de division euclidienne.

30	**P** : Ca c'est un exemple numérique pour vous expliquer comment on va faire cette démonstration.	

P1 explique à nouveau le mode de fonctionnement qu'elle a décidé d'adopter pour cette démonstration : travailler sur des exemples numériques permettant de comprendre la démonstration délicate.

31	**P** : La démonstration va être faite en 2 temps.	
32	**P** : Premier temps on va pas s'occuper du cas où a est négatif [...].	
33	**P** : Dans un deuxième temps, on se servira de la démonstration qu'on a faite du côté positif pour passer du côté négatif.	

P1 doit ici résoudre le type de tâche « Introduire la démonstration ». Elle va utiliser pour cela la technique didactique « Donner la structure de la démonstration ». Elle indique que la démonstration va se faire en deux temps : le cas $a \geq 0$ puis le cas $a < 0$. Or, au niveau du projet de cours de P1, cette distinction de cas n'intervient que dans un second temps, après la distinction faite entre la démonstration de l'existence et celle de l'unicité. Deux hypothèses permettent d'expliquer cet oubli de P1 :

- Soit elle est toujours dans une dynamique d'anticipation qui la conduit à « brûler » des étapes ;
- Soit elle est encore « accrochée » à l'exemple numérique qu'elle vient d'exposer et sur lequel elle a introduit la distinction des cas $a \geq 0$ et $a < 0$ sans évoquer explicitement la question de l'existence et de l'unicité du couple (q,r).

Nous constatons donc que P1 donne beaucoup d'explications qui portent essentiellement sur la structuration du cours et des aller-retour entre le schéma et la démonstration théorique afin de créer une place aux élèves dans le cadre d'un cours magistral. Par ailleurs, la tension apparente entre le déroulement effectif de la démonstration et la difficulté à venir freine l'avancement de la démonstration. Ce poids du projet et de l'anticipation de la difficulté joue également sur la gestion du temps. Seules cinq minutes sont consacrées dans cette séance à la démonstration de l'unicité du quotient et du reste – démonstration tout de même délicate – contre trente minutes pour la présentation de la démonstration et la preuve de l'existence.

IV.4 Savoir enseigné dans la classe de P2

Voici la démonstration faite en cours par P2. Je me centre ici sur la démonstration de l'existence du quotient à l'aide de la partie entière. Précisons la position de ces extraits de protocole par rapport à l'ensemble de la séance. Après avoir vérifié la validité de

l'encadrement de a par deux multiples consécutifs de b, P2 inscrit l'inégalité portant sur a/b ($q \leq a/b < q+1$) et demande aux élèves :

41	**P** : [...]Qu'est-ce que ça caractérise ça ?	
42	**Els** : ...	
43	**P** : Quelqu'un a une idée ?	
44	**Els** : ...	
45	**P** : q et q+1 sont des entiers consécutifs. Donc, vous connaissez la définition, vous connaissez ça, ça doit vous rappeler quelque chose.	
46	**El** : c'est divisible par b	
49	**P** : [...] Non.	

Aucun élève ne reconnaît dans cette inégalité une caractérisation qui définit la partie entière de a/b. Pour faire reconnaître cette caractérisation, P2, en précisant que q et q+1 sont des entiers consécutifs, ferme la question. En effet, elle livre aux élèves des éléments sur l'inégalité $q \leq a/b < q+1$ dont elle attendait auparavant qu'ils les tirent par eux-mêmes. Elle désigne par ailleurs cette inégalité particulière comme étant une définition connue des élèves. Par effet de contrat, un élève répond que « c'est divisible par b », sans préciser ce qui est divisible par b. Pour donner sa réponse, cet élève se place dans le cadre des cours d'arithmétique et, parmi les différentes notions vues par la classe dans ce cours (diviseurs, multiples, divisibilité et nombres premiers), la réponse la plus plausible est le fait que l'inégalité $q \leq a/b < q+1$ représente une relation de divisibilité[11].

53	**P** : [...] On l'utilise assez fréquemment cette fonction parce que c'est la seule qui marche pas comme les autres. Elle a des tas de petites propriétés qui sont anachroniques. Je veux dire : elle est pas continue, elle est pas toujours dérivable la fonction qu'il y a là dessous.	
54	**Els** : ...	
55	**P** : Non, vous connaissez pas de fonctions qui ... un petit peu bizarres ?	
56	**El** : la fonction inverse ?	
63	**P** : [...] En d'autres termes, q c'est le plus grand entier inférieur ou égal à a/b. Oui, non ?	
64	**El** : Oui	

P2 se trouve toujours confrontée au fait de devoir « Raviver une connaissance non mobilisable chez les élèves ». Mais la première technique didactique « Fermer progressivement les questions » qu'elle a mise en œuvre pour y répondre n'a pas fonctionné. Elle essaie donc une nouvelle technique « Faire appel à diverses propriétés de la connaissance que l'on souhaite mobiliser » pour sortir la classe de l'incompréhension dans laquelle elle

[11] Il existe en effet une proximité symbolique entre la fraction « a/b » et de la relation « a | b» introduite en début de cours ; proximité symbolique qui peut entraîner des confusions car les rôles de a et de b sont inversés d'une expression à l'autre.

semble se trouver. P2 décide alors de donner des indications aux élèves en posant des questions dans le cadre fonctionnel. Mais la distance entre les écritures habituellement rencontrées dans ce cadre et l'écriture $q \leq a/b < q+1$ que les élèves lisent au tableau est trop importante. Les élèves ne peuvent donc pas répondre aux questions de P2.

Il n'y a plus de logique épistémologique dans les questions que P2 pose aux élèves au sujet de la partie entière ; la situation se transforme alors en un jeu de devinette. C'est un indice du fait que P2 n'a pas réellement problématisé le rôle de la partie entière dans cette démonstration ; elle s'attendait sûrement à ce que cette connaissance soit disponible sans difficulté chez les élèves.

Pour gérer cette situation où la classe n'arrive pas à décrypter ses attentes, P2 a le choix entre donner la réponse exacte ou continuer à essayer de faire trouver aux élèves la réponse qu'elle attend. Elle opte pour la seconde possibilité et abandonne le cadre fonctionnel pour se centrer sur les propriétés de la partie entière qui sont en jeu dans la démonstration :

74	**P** : [...] Quel est le plus grand entier inférieur ou égal à 3,5 ?	
83	**Els** : [...] La partie entière	(Classe)
84	**P** : C'est la partie entière.	(P écrit au tableau) q=E(a/b)

Finalement, plusieurs élèves affirment que c'est « la partie entière » et P2 conclut rapidement sur le fait que q est la partie entière de a/b, sans revenir sur le fait que cela permet d'assurer l'existence du quotient.

Ces extraits de protocole montrent que le problème d'anticipation de la difficulté relative à la partie entière contraint P2 à gérer la situation par une succession d'effets Topaze. Sa gestion didactique consiste tout au long de ce passage à faire participer les élèves jusqu'à obtenir la réponse exacte, d'où une atomisation de la tâche parfois peu reliée au contenu. P2 ne s'autorise pas à donner la bonne réponse. De fait, la dévolution de ses choix de démonstration aux élèves est rendue difficile.

Pour conclure sur l'analyse a posteriori des extraits de protocoles de P1 et P2, je souhaite insister sur deux points.

Tout d'abord au niveau des techniques didactiques, on constate que P1 et P2 utilisent un panel de techniques didactiques relativement restreint pendant la séance. Par ailleurs, l'utilisation de ces techniques se révèle stable tout au long du cours. Le mode de fonctionnement didactique de P1 et P2 permet d'expliquer en partie ce choix de techniques. Pour P1, par exemple, il

s'agit de recréer dans le cadre d'un cours magistral une place à l'élève pour essayer de s'assurer de leur compréhension. D'où une utilisation de techniques didactiques qui permettent à P1 de structurer son cours.

Ensuite, au niveau du savoir enseigné, on a montré que dans le cas de l'enseignante P1, il existe peu d'écart entre le projet initial et sa réalisation en classe, si ce n'est la mise en exergue de la division euclidienne d'un nombre négatif. Ceci n'est pas le cas dans la classe de P2. Les baisses successives d'exigence que l'on lit dans les questions de P2 conduisent à une atomisation du projet en tâches isolées et l'absence de conclusion lors des différentes étapes de la preuve ne lui permet pas de reconstruire une cohérence de la démonstration.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

J'espère avoir montré tout au long de ce séminaire ce que peut apporter la notion de savoir apprêté pour analyser les processus de transposition didactique interne. Cet outil méthodologique me paraît pertinent pour décrire et analyser le travail fait en amont des classes. Il permet tout d'abord de distinguer le rôle des différents acteurs intervenant dans ce processus et ce à différents niveaux d'analyse. Par ailleurs, la comparaison des différents apprêts du savoir est un moyen d'identifier les choix tant mathématiques que didactiques fait par les auteurs de manuels ou les enseignants.

Pour conclure, je souhaite revenir sur deux points : la viabilité de la niche « algorithmique » et le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne.

Mon travail de thèse a permis de montrer que le choix noosphérien de réintroduire l'arithmétique en mettant en avant son aspect algorithmique s'est fait en rupture avec la représentation de l'activité mathématique qui domine dans le système d'enseignement. Dans le cadre actuel, cette niche de l'arithmétique ne vit ni dans les manuels, ni dans les classes. Deux pistes nous semblent intéressantes pour transformer cet état de fait. En dehors des questions de formation des enseignants, un travail peut être fait au niveau des manuels. Les manuels peuvent être considérés comme des institutions de formation pour les enseignants d'après les travaux de Neyret (1993, 1995). Ainsi, proposer dans ces derniers, une véritable réflexion didactique sur l'utilisation des outils informatiques permettrait, a priori, de fournir des conditions davantage favorables à la vie de l'aspect algorithmique de l'arithmétique en classe.

En ce qui concerne l'analyse du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne, j'ai présenté une boite à outil méthodologique[12] permettant d'analyser les choix de l'enseignant quelque soit le niveau d'analyse souhaité. Cependant, la question de la description des OD, de leur dynamique et de leur détermination réciproque avec les OM demande à être retravailler, sûrement par le biais d'une articulation avec la théorie des situations didactiques.

Pour finir, je veux souligner que, dans le cadre particulier de cette étude, je me suis limitée à l'analyse du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne. Or, comme l'a montré Conne (1992), l'élève joue un rôle dans ce processus. Je n'ai pas abordé ce point dans ma recherche. En effet, le mode de fonctionnement didactique des deux enseignants observées ne m'a pas permis d'avoir accès au travail des élèves. Ce point mériterait d'être abordé dans de nouveaux travaux.

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC, G. & al. (1989). La transposition didactique en mathématiques, In IREM et LIRDIS de Lyon (eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie*, (pp. 3-36). Lyon

ASSUDE, T. (1998). Evolution de l'enseignement de l'arithmétique et formation des maîtres, *Actes du XXVème Colloque COPIRELEM*, Loctudy, 103-118.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19(1)**, 77-123.

BOSCH, M., GASCON, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories et empiries. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 23-40) Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage éd. (1ère édition : 1985).

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19(2)**, 221-266.

[12] Méthodologie d'analyse par zooms successifs articulant notamment les niveaux de détermination didactiques et mathématiques de Chevallard (2002).

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulations. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12(2.3)**, 221-270.

NOIRFALISE, R., WOZNIAK, F. (2002). Structure, fonctionnement et écologie des organisations didactiques. A propos de statistique en 2de. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 65-74). Grenoble : La Pensée Sauvage.

RAVEL, L., (2002). Arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques : quel(s) enseignement(s) ?, *Repères - IREM* **n°49**, 93-116.

RAVEL, L., (2003a). *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

RAVEL, L., (2003b). Raisonnement et nombres entiers. Comportements d'élèves de terminale S spécialité mathématique en arithmétique, *Bulletin de l'APMEP*, **n°49**, 93-116.

ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21(1.2)**, 57-80.