

SPECIFICITES ET POTENTIALITES DE L'ARITHMETIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

Véronique BATTIE

Equipe DIDIREM - Université Paris 7 ; IUFM de Bretagne

Dans l'enseignement secondaire français, la place de l'arithmétique, arène des nombres par excellence, a fortement varié qualitativement et quantitativement dans l'histoire des programmes. Après des années de purgatoire, elle a réapparu en 1998 en terminale scientifique, dans le cadre de l'enseignement de spécialité et depuis, les classes de troisième et seconde se sont trouvées aussi concernées. Cette réintroduction a été en partie motivée par l'idée que l'arithmétique pouvait favoriser un travail sur le raisonnement mathématique. Une telle évolution curriculaire induit inévitablement des questions didactiques, notamment les suivantes : l'arithmétique des programmes actuels de terminale favorise-t-elle réellement un travail sur le raisonnement mathématique et, si oui, quelles en sont les spécificités ? L'arithmétique enseignée actuellement à ce niveau permet-elle effectivement ce type de travail ? Ce sont ces questions didactiques qui sont au cœur de notre recherche de thèse (Battie, 2003) mais, pour les aborder, un travail épistémologique préliminaire nous a semblé s'imposer afin d'étudier préalablement les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.

De nombreuses recherches didactiques ont abordé, depuis plus de vingt ans, des questions relatives au raisonnement mathématique et à la preuve, c'est-à-dire à la rationalité mathématique. Certaines d'entre elles ont bien mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves et étudiants (cf. par exemple (Dreyfus, 1999), (Hanna, 2000) pour deux publications récentes) ainsi que des spécificités de la rationalité mathématique suivant les domaines (*International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (<http://www-didactique.imag.fr/preuve>)). Cependant, même si, comme nous l'avons mentionné plus haut, le discours « noosphérien » tend à considérer comme une évidence les potentialités offertes par ce champ pour l'apprentissage de la rationalité mathématique, nous n'avons pas directement répondu aux questions que nous nous posons. En effet, au niveau relativement avancé que nous considérons ici, ces potentialités nous semblent avoir été moins systématiquement explorées que ce n'a été le cas pour la géométrie. Il y a à cela des raisons

culturelles évidentes comme l'ont bien montré Grenier et Payan (1998) dans leur travail concernant modélisation et preuve en mathématiques discrètes. C'est pourquoi il nous a semblé nécessaire d'articuler analyses épistémologique et didactique.

L'analyse épistémologique a pour fonction de nous aider à étudier les spécificités des modes de raisonnement qui mettent en jeu les notions d'arithmétique en jeu à ce niveau¹ : divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne (algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD), congruences dans $\mathbb{Z}$, entiers premiers entre eux, nombres premiers (existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers), PPCM, théorèmes de Bézout et Gauss. Cette analyse est basée sur l'étude de preuves arithmétiques, historiques et actuelles. Dans un premier temps, nous introduirons, à l'aide d'une démonstration historique, un outil qui en est issu : la distinction, dans le raisonnement, de deux dimensions que nous appelons « organisatrice » et « opératoire » et l'identification des spécificités de ces deux composantes. Cette distinction et ces spécificités nous ont servi à évaluer, a priori, les potentialités de ce champ pour l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement mathématique.

L'analyse didactique a quant à elle pour but d'étudier l'écologie des potentialités révélées par l'analyse épistémologique dans le contexte curriculaire que nous envisageons. Effectuée en s'appuyant sur les résultats et outils issus de l'analyse épistémologique, elle est menée, dans notre recherche de thèse, suivant deux axes principaux : via l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire et via celle de travaux d'élèves. Et, pour chacune de ces analyses, nous avons choisi deux types contrastés de corpus, opposés en quelque sorte si l'on considère les contraintes institutionnelles auxquelles ils sont assujettis : les corpus en jeu pour le premier axe d'analyse sont les sujets du baccalauréat et des brochures destinées aux enseignants et, pour le second axe, il s'agit des copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat et les transcriptions d'une séance de recherche en groupes en classe de terminale scientifique (TS). Nous n'abordons ici que l'axe relatif à l'analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques en nous centrant sur la séance de recherche qui a été proposée aux élèves d'une classe de TS en collaboration avec leur enseignante animatrice à l'IREM Paris 7. A travers cet exemple nous montrerons la pertinence didactique de l'outil d'analyse issu du travail épistémologique.

¹ A propos de ces modes de raisonnement, nous parlerons dans la suite de *raisonnement en arithmétique*, pour bien les distinguer du *raisonnement arithmétique* identifié dans les recherches sur l'algèbre et notamment sur la transition arithmétique-algèbre (Schmidt (2002)). Pour ces raisonnements en arithmétique, le symbolisme algébrique fonctionne comme un outil supposé suffisamment maîtrisé par ces élèves de terminale scientifique.

1. Dimensions organisatrice et opératoire du raisonnement en arithmétique

1.1. “ Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré ”.

Nous avons choisi d'introduire la distinction entre dimension organisatrice et dimension opératoire à l'aide du résultat énoncé ci-dessus concernant les triangles rectangles en nombres (c'est-à-dire dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers). Nous proposons ci-après une démonstration de ce résultat inspirée de la preuve de Frenicle (1605 ?-1675), étudiée, en particulier, avec l'aide de l'ouvrage de Goldstein (1995). Malgré l'antériorité de la preuve de Fermat (1601-1665), nous avons choisi celle de Frenicle parce qu'elle nous semble plus adéquate pour illustrer notre propos. Nous aurons besoin, pour cette preuve, des deux résultats suivants :

Théorème fondamental : Si le produit de deux nombres entiers a et b premiers entre eux est un carré, il en est de même de ces deux nombres.

Démonstration : On pose $ab=c^2$ et on écrit la décomposition en facteurs premiers de c comme suit : $c=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Dans la décomposition en facteurs premiers de c^2 , l'exposant de chaque facteur premier est pair. a et b étant premiers entre eux, chaque nombre de la forme $p_i^{2\alpha_i}$ ($i \in I=\{0, \dots, n\}$) est un diviseur de a ou, de manière exclusive, de b . On en déduit que a et b sont donc des carrés.

Paramétrisation : Pour que trois entiers x , y et z supérieurs ou égaux à 1, constituent une solution primitive (x , y et z premiers entre eux dans leur ensemble) de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, avec par exemple x pair, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers p , q supérieurs ou égaux à 1 avec $p > q$, premiers entre eux et de parité différente, tels que, à l'ordre près des deux premiers termes, on ait $x=2pq$, $y=p^2 - q^2$, $z=p^2 + q^2$.

Démonstration : La condition est clairement suffisante ; elle est aussi nécessaire. En posant $x=2x'$, on a $(2x')^2=(z - y)(z + y)$. Les deux facteurs de droite ont 2 pour seul diviseur commun, car un tel diviseur doit diviser leur somme $2z$ et leur différence $2y$, or y et z sont impairs et premiers entre eux. Le produit $\frac{z-y}{2} \times \frac{z+y}{2}$ est donc le produit de deux entiers premiers entre eux et il est égal à un carré x'^2 . Donc d'après le théorème fondamental, chaque

facteur est égal à un carré, soit : $\frac{z-y}{2}=q^2$ et $\frac{z+y}{2}=p^2$, et finalement : $y=p^2-q^2$, $x=2pq$, $z=p^2+q^2$; il est facile de vérifier de plus que les nombres p et q sont premiers entre eux et de parité différente.

Venons-en maintenant à la démonstration proprement dite dont le lecteur trouvera en annexe un organigramme partiel (première étape).

Préliminaires : on raisonne par l'absurde : Soit $T1=(x,y,z)$ un triangle rectangle en nombres entiers (c'est-à-dire tel que x, y et z soient des entiers vérifiant : $x^2+y^2=z^2$), premiers dans leur ensemble (triangle primitif), et d'aire carrée. Il s'agit d'obtenir, dans la première étape de la démonstration, un deuxième tel triangle noté $T2=(X,Y,r)$, tel que $r < z$.

Avant cela, démontrons que x et y sont de parité différente :

- Si x et y étaient pairs tous les deux, il en serait de même de z . 2 serait alors un diviseur commun de x, y et z , contrairement au fait que x, y et z sont premiers dans leur ensemble.
- Si x et y étaient impairs tous les deux, ils seraient, ainsi que leurs carrés, congrus à 1 modulo 2. On aurait alors z^2 congru à 2 modulo 4, ce qui est impossible pour un carré.

x et y sont donc de parité différente et nous pouvons supposer x pair.

Première étape (construction d'une solution plus petite) : nous considérons le triangle $T1=(x,y,z)$, introduit en préliminaire :

- (1) x, y et z sont premiers dans leur ensemble avec x pair et tels que : $x^2+y^2=z^2$.
- (2) Il existe un entier k tel que $xy=2k^2$.

D'après (1), nous avons la paramétrisation suivante :

$$x=2pq \quad y=p^2-q^2 \quad z=p^2+q^2,$$

avec p et q entiers premiers entre eux et de parité différente (on suppose q pair dans la suite).

Comme x est pair, il existe x_1 tel que $x=2x_1$, et donc, d'après (2), $x_1y=k^2$. Alors, d'après le théorème fondamental, comme y et x_1 sont premiers entre eux, il existe a et b entiers tels que : $x=2a^2$ et $y=b^2$. On en déduit d'une part, que $pq=a^2$ et donc, à nouveau par le théorème fondamental, qu'il existe r et s entiers tels que $p=r^2$ et $q=s^2$, d'autre part que $y=b^2=p^2-q^2$, donc que $p^2=b^2+q^2$. On obtient alors grâce à la paramétrisation, puisque p, b et q sont premiers dans leur ensemble, l'existence de X et Y , entiers premiers entre eux tels que :

$$q=2XY \quad b=X^2-Y^2 \quad p=X^2+Y^2.$$

On a : $p=r^2=X^2+Y^2$. Le triangle (X,Y,r) est donc rectangle en nombres entiers premiers deux à deux. De plus, comme q est pair, s est pair. On pose $s=2s_1$. Ainsi $q=2XY=(2s_1)^2$ d'où $XY=2s_1^2$ et le triangle (X,Y,r) est d'aire carrée. En conclusion, le triangle (X,Y,r) , que l'on notera T_2 , est primitif d'aire carrée et tel que $r < z$.

Deuxième étape (la descente) : en répétant le procédé, on construit une suite strictement décroissante de triangles d'aire carrée, donc d'entiers naturels (en considérant la longueur de l'hypoténuse de chacun de ces triangles), ce qui est impossible. En conclusion, il n'existe pas de triangle primitif rectangle en nombres dont l'aire soit un carré.

Troisième (et dernière) étape : il reste à montrer que s'il n'existe pas de triangle primitif rectangle en nombres d'aire carrée, alors il n'existe pas de triangle rectangle en nombres d'aire carrée ; ce qui ne pose pas de difficulté.

1.2. Analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire

Selon nous, la démonstration précédente offre l'avantage de bien mettre en évidence la distinction entre deux dimensions dans le raisonnement en arithmétique, que nous choisissons d'appeler *dimension organisatrice* et *dimension opératoire*. Cette distinction est particulièrement claire ici parce que les deux dimensions ne font pas appel au même type de propriétés. En effet, dans $\mathbb{Z}$ on peut distinguer deux types de propriétés selon l'ordre envisagé :

- nous parlons de *propriétés de divisibilité* en référence à l'*ordre divisibilité*, partiel, auquel est associé la structure d'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$,
- nous parlons de *propriétés topologiques* en référence à l'*ordre naturel*, total, auquel est associé l'ensemble bien ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$,

la relation d'ordre naturel étant compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$ et la multiplication dans $\mathbb{N}$. Dans la démonstration envisagée ici, alors que les techniques de calcul rencontrées dans la démonstration reposent sur des propriétés de divisibilité, le raisonnement sur lequel elle repose s'appuie essentiellement sur la propriété topologique : « Toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie ».

D'une manière générale, selon cette distinction :

- *la dimension organisatrice* s'identifie au raisonnement global (on pourrait parler du « squelette » de la démonstration) qui traduit la mise en acte d'une visée. Ce raisonnement organise et structure les différentes étapes ; il nous permet de comprendre l'idée générale de la démonstration. Dans la démonstration présentée ici, celle-ci s'identifie à la descente infinie, célèbre invention de Fermat. Outre cette méthode et les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, très présent, on identifie essentiellement au niveau de la composante organisatrice le raisonnement par récurrence qui constitue, de même que la descente infinie, un mode d'exploitation dans le raisonnement de la propriété de bon ordre de l'ensemble N , les raisonnements par disjonction de cas et par recherche exhaustive² avec ou non limitation préalable du nombre de cas à étudier. L'analyse a aussi permis de mettre en évidence une méthode propre aux anneaux factoriels³ que nous dénommons « jeu d'extension-réduction ». Cette appellation renvoie à son principe (on pourrait parler de méta-méthode) qui se retrouve dans d'autres champs des mathématiques tels l'analyse ou l'algèbre linéaire.
- *La dimension opératoire* : il s'agit de tout ce qui relève des techniques de calcul utilisées au fil de la démonstration qui permettent de mettre en œuvre les différentes étapes du raisonnement suivi. L'analyse du côté opératoire est menée dans notre recherche de thèse en prenant en compte à la fois l'utilisation de théorèmes-clefs, les différentes manipulations algébriques, les formes de représentations des objets employées et la structure de Z qui est privilégiée (articulation entre la structure d'anneau de $(Z, +, \times)$ et celle d'ensemble bien ordonné de $(Z, \leq)$ relative aux deux ordres divisibilité et ordre naturel). Dans la démonstration que nous venons d'exposer, chacun de ces quatre pôles sont en jeu. Les deux premiers pôles mentionnés (utilisation de théorèmes-clefs et manipulations algébriques) apparaissent à la lecture de l'organigramme que nous

² Dans le cadre de la résolution d'un problème, on appelle *méthode de recherche exhaustive* une méthode où l'on teste successivement, après les avoir identifiées, toutes les solutions potentielles. Nous distinguons la *recherche exhaustive au sens large* de la *recherche exhaustive au sens strict* au sens où la première comporte un travail préalable de limitation de la recherche.

³ Elle intervient lorsqu'il s'agit de montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément n de l'anneau Z . Cet anneau étant factoriel, si l'on montre que la propriété est multiplicative (au sens où si elle est vraie pour deux éléments de Z , alors elle est encore vraie pour leur produit) et qu'elle est vraie pour tout nombre premier, alors elle sera vraie pour tout entier.

avons proposé. Et, ce qui est « encapsulé » dans les deux théorèmes en jeu renvoie pour l'un (la paramétrisation) au pôle algébrique et l'autre (le théorème fondamental) à la structuration autour des nombres premiers. L'articulation entre $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{Z}, \leq)$ est présente au niveau de la mise en acte de la visée de construire une solution plus petite (au sens de l'ordre naturel) : l'emploi de la paramétrisation introduit un diviseur-clef qui, par définition, est plus petit que l'un des objets initiaux (le diviseur en question est l'entier noté p , racine de la mesure de l'hypoténuse du deuxième triangle, et l'objet initial est l'entier noté x , mesure de la longueur d'un des côtés autre que l'hypoténuse du premier triangle ; la relation en jeu est $x=2pq$). L'autre élément opératoire intervenant dans la construction d'un objet plus petit correspond à une simple manipulation algébrique ($x < x^2+y^2$).

Cette distinction entre composantes organisatrice et opératoire ne sous-entend en aucun cas que les différents calculs excluent le raisonnement. Dans une démonstration arithmétique, chaque sous-étape met en jeu des raisonnements, qui, a priori, sont propres à la dimension opératoire. Ces raisonnements sont souvent loin d'être triviaux, et parfois même plus complexes que ceux relatifs à la dimension organisatrice, le cas de la preuve proposée en est un exemple éclatant.

Soulignons également que la distinction explicitée ici n'est pas, non plus, a priori, propre à l'arithmétique, mais ce qui nous intéresse, ce sont ses spécificités dans le champ de l'arithmétique.

L'existence, au sein du raisonnement en arithmétique, des grandes catégories organisatrices mentionnées précédemment contribue sans aucun doute aux potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage de la rationalité mathématique. Mais les potentialités de ce champ nous apparaissent aussi liées, à l'issue de l'analyse épistémologique, à la diversité des outils arithmétiques susceptibles d'intervenir dans les phases opératoires du raisonnement et à celle de leur combinatoire possible (la démonstration ci-dessus en donne un aperçu), ainsi qu'aux interactions entre les deux dimensions dans un raisonnement donné. En effet, les deux composantes explicitées ici ne doivent pas être vues comme indépendantes : elles interagissent et le travail que nous avons fait par exemple sur le thème « sommes de deux

carrés »⁴, montre que les imbrications peuvent être très complexes. A chaque sous-dimension organisatrice est associée une dimension opératoire ; au sein de chaque méthode, on trouve tout un jeu opératoire, qui lui-même peut mettre en scène d'autre(s) méthode(s) pouvant être vue(s) comme de nouvelle(s) dimension(s) organisatrice(s). Autrement dit, on observe que des sous-dimensions organisatrices naissent dans le jeu opératoire qui règne au sein d'autres dimensions organisatrices, s'imbriquant les unes dans d'autres. Ces interactions deviennent particulièrement visibles quand on compare plusieurs démonstrations différentes d'un même résultat⁵.

Il y a donc là, à propos d'un univers familier pour les élèves du secondaire: celui des nombres entiers où de nombreuses questions peuvent se formuler et comprendre aisément, un univers du raisonnement, à la fois solidement structuré, qui peut être instrumenté par des outils opératoires efficaces, avec une marge de jeu dans la complexité tant dans les deux dimensions distinguées que dans leur interaction qui ouvre effectivement a priori des potentialités intéressantes à l'apprentissage et l'enseignement de la rationalité mathématique. Qu'en est-il de ces potentialités a priori, si l'on analyse le fonctionnement d'élèves dans le cadre des programmes et de l'enseignement actuel ? C'est la question que nous abordons dans la partie suivante, en nous basant sur des données recueillies dans une classe de terminale S. D'un point de vue plus théorique, cette expérimentation en particulier a été pour nous l'occasion de tester la pertinence didactique des outils issus de l'analyse épistémologique que nous venons de présenter, comme nous allons essayer de le montrer à présent.

2. Exploitation Didactique : analyse du processus de production d'une preuve arithmétique par des élèves

Comme nous le précisons en introduction, nous avons choisi pour l'analyse didactique de contraster les corpus et, pour l'analyse de travaux d'élèves en particulier, nous avons d'une part analysé des copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat et d'autre part préparé, en collaboration avec une enseignante animatrice à l'IREM Paris 7, une

⁴ **Théorème** : Soit n un entier naturel non nul et $n = \prod_{p \in P} p^{v_p(n)}$ sa décomposition en nombres premiers (P est l'ensemble des nombres premiers). On pose $\Sigma = \{a^2 + b^2 ; a, b \in \mathbb{N}\}$. Les conditions $n \in \Sigma$ et $v_p(n)$ est pair pour tout $p \in P$ tel que $p \equiv 3 [4]$ sont équivalentes.

activité de recherche sur une question de rationalité et observé son déroulement dans la classe de cette enseignante. En organisant cette expérimentation, nous avons cherché à observer les élèves dans un cadre aussi peu contraint que possible. Mais nous avons aussi choisi de proposer aux élèves des tâches se situant quelque peu aux limites de la culture d'enseignement étudiée dans cette recherche. Cette stratégie de recherche consistant à se situer à la marge du système que l'on étudie est assez fréquente en didactique. Elle a l'avantage de permettre d'observer des phénomènes intéressants qui seraient moins visibles dans des situations plus ordinaires et c'est pourquoi nous l'avons retenue. Le corpus correspondant est constitué des productions écrites des groupes d'élèves ainsi que des transcriptions de l'enregistrement audio des discussions au sein des groupes et des brouillons. Les deux types de corpus envisagés pour l'analyse de travaux d'élèves permettent également d'avoir accès dans la recherche à deux types de production différents : dans le premier cas, nous avons accès à un produit fini réalisé pour l'enseignant, dans le second cas, nous avons également accès à ce produit fini mais aussi à l'intimité du processus de recherche ; étant donné le lissage et la concision attendues d'une démonstration mathématique écrite ainsi que les contraintes institutionnelles qui pèsent sur ce type d'objet, on peut penser que les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire vont être plus visibles dans le second cas.

D'un point de vue méthodologique, pour chacun des deux groupes d'élèves étudiés, nous avons, après avoir analysé la production écrite remise à l'enseignante à la fin de la recherche, précisé l'itinéraire suivi. Puis, dans un troisième temps, nous avons procédé à des « zooms » localisés à partir de l'analyse des éléments mentionnés précédemment.

Les tâches en jeu sont les suivantes : production d'une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, passage à l'étude de $\sqrt{3}$, comparaison de leur preuve de $\sqrt{2}$ à trois preuves fournies (par descente infinie, par l'absurde et minimalité, en utilisant la structuration autour des nombres premiers), production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et généralisation à partir du support des preuves fournies. Ainsi, ce que nous proposons aux élèves, à l'exception de la première tâche qui correspond à un problème déjà rencontré en classe, est en rupture avec ce qui

⁵ La comparaison de preuves de Fermat et Frenicle du résultat présenté ici nous a permis dans notre travail de mettre en évidence un des aspects de ces interactions en pointant un élément essentiel y participant : les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves.

« vit » dans l'enseignement où, généralement, le niveau organisateur n'est pas sous leur responsabilité pour les tâches non routinières⁶.

Nous nous centrerons ici sur l'étude de la rationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$; le texte proposé aux élèves était le suivant :

Rationnel ou irrationnel ?

On rappelle qu'un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers a et b ($b \neq 0$) tels que $x = \frac{a}{b}$. Etudier la rationalité d'un nombre x , c'est s'intéresser à la question « x est-il rationnel ou irrationnel ? ». Problème : Etudier la rationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

Après avoir indiqué des éléments d'analyse a priori centrés sur notre analyse mathématique en termes de dimensions organisatrice et opératoire, nous présenterons les points forts de l'analyse de cette première partie de la recherche des deux groupes d'élèves en les éclairant si besoin à l'aide de l'analyse a posteriori du reste de cette recherche.

2.1. Eléments de l'analyse a priori.

Avec la définition d'un nombre rationnel (celle-ci est rappelée aux élèves), il est naturel de supposer que le nombre envisagé est rationnel, que l'on ait ou non une opinion quant à la rationalité de ce nombre ; supposer le contraire semble en effet difficilement exploitable étant donné que cela correspond à une non-existence d'objets. Dans le cas d'un nombre irrationnel, les preuves correspondantes ont donc pour pensée organisatrice générale un raisonnement par l'absurde.

Un élément entre en jeu au niveau de cette organisation générale : la fraction $\frac{a}{b}$ est-elle choisie irréductible ? Selon que l'on particularise ou non ainsi cette fraction, la contradiction (visée dans le cas où l'on conjecture que le nombre est irrationnel) à laquelle on aboutit en suivant un raisonnement par l'absurde ne sera pas, *a priori*, la même. On peut aussi prévoir des différences induites au niveau opératoire. Pour cette raison en particulier, nous proposerons au moins deux preuves, pour envisager ces deux possibilités.

⁶ Nous renvoyons en particulier à notre analyse des sujets du baccalauréat (Battie, 2003).

Du côté opératoire, la conscience du champ concerné par l'arithmétique (enseignée en TS) amène à élever au carré les deux membres de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. En effet, face à la question « x est-il un nombre rationnel ou irrationnel ? », les outils de l'arithmétique ne sont pas à disposition. L'égalité à partir de laquelle le travail va se poursuivre est donc $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ou encore $2b^2 = a^2$.

A partir de là, différentes preuves sont possibles et, dans ce qui suit, nous allons rendre compte de cette variabilité dans le cas où $x = \sqrt{2}$. Nous étudierons dans un second temps le passage à l'étude de $\sqrt{3}$.

2.1.1. Différentes preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

A partir du traitement opératoire initial (élever au carré), plusieurs preuves sont possibles. Nous considérons tout d'abord une preuve utilisant le caractère factoriel de l'anneau $\mathbb{Z}$ que nous dénommons fondamentale ; comme nous le verrons par la suite, celle-ci se généralise bien. « Voir les entiers sous leur forme factorisée » définit l'élément essentiel de l'opérateur qui est d'écrire les entiers sous leur forme factorisée. Cette « écriture » peut être opérationnalisée avec la notation de la valuation 2-adique et la preuve est alors la suivante :

Preuve fondamentale

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. D'où : $2b^2 = a^2$ et en prenant la valuation 2-adique :

$$1 + 2 v_2(b) = 2 v_2(a)$$

D'où une contradiction.

Soulignons que cette preuve ne suppose pas la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible.

Malgré son caractère économique, ce n'est pas cette preuve que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire. Celle qui existe est plus liée à une dimension historique (Euclide) et privilégie un travail en termes de divisibilité.

Deux lectures possibles en termes de divisibilité

A partir de l'égalité $2b^2 = a^2$ ou $2 = \frac{a^2}{b^2}$, on peut raisonner en termes de divisibilité sans faire appel à la décomposition en facteurs premiers. Les preuves correspondantes se généralisent plus difficilement et la composante opératoire se complexifie, ce dont notre

analyse mathématique rend compte. Si, par exemple, on travaille à partir de $2b^2=a^2$, deux sens de lecture en termes de divisibilité sont possibles :

- 2 et b^2 divisent a^2 . Cette lecture est la plus fréquente. Elle découle directement de la définition de la divisibilité.
- a^2 divise $2b^2$. Cette lecture est tout à fait extra-ordinaire : elle ne vit pas dans l'institution scolaire en particulier. Elle correspond à une perte d'information : a^2 est égal à $2b^2$ donc en particulier a^2 divise $2b^2$.

Pour éliminer un cas de la première lecture et poursuivre si l'on adopte la deuxième, il est judicieux de supposer a et b premiers entre eux ; on particularise la pensée organisatrice en supposant la fraction irréductible. Remarquons que ce caractère d'irréductibilité correspond à une pratique usuelle lorsque l'on travaille sur les rationnels ; dans l'enseignement secondaire en particulier, cela relève presque de l'automatisme.

Supposons que a et b sont premiers entre eux et poursuivons en reprenant les deux lectures possibles. Elles nous conduisent respectivement à :

- 2 divise a^2 ou encore a^2 est pair : il s'agit alors de raisonner en termes de parité.
- Le théorème de Gauss permet d'en déduire que a^2 divise 2.

L'inversion dans le sens de lecture se retrouve dans ces deux conclusions.

A noter que dans les deux cas est intervenu le résultat « si deux entiers sont premiers entre eux, leurs carrés le sont aussi ».

La première lecture correspond à la preuve dite classique : de l'égalité $2b^2=a^2$ on déduit que a^2 est pair donc que a est pair, puis que b^2 et b le sont aussi ; la contradiction est établie relativement au caractère irréductible de la fraction.

La deuxième lecture quant à elle conduit à une preuve que l'on peut qualifier d'originale et que nous présentons à présent.

Une preuve originale

Pour la suite du traitement de la deuxième lecture, nous renvoyons à l'article de Henry, *Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ?!* (2001). Reprenons là où notre développement s'était arrêté (a^2 divise 2) ; $a^2 \in \{1, 2\}$:

- $a^2=2$ est exclu car 2 n'est pas un carré parfait.
- Si $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{2}$; ce qui est impossible par définition de b .

Dans les deux cas, on aboutit donc à une contradiction. Et on constate que le caractère irréductible de la fraction n'intervient plus dans la formulation de la contradiction.

L'«aveu» que Henry fait dans la conclusion de son article, témoigne de l'originalité du mode de lecture qui a donné naissance à cette preuve, au-delà de l'institution scolaire :

«Je dois maintenant un aveu aux lecteurs (lectrices) qui ont bien voulu me suivre jusqu'ici. J'ai trouvé la petite démonstration de cette propriété dans une copie de CAPES interne. [...]

Le candidat devait montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Sans doute encore stressé en début d'épreuve, partant de l'égalité $a^2=2b^2$, au lieu de remarquer que 2 est diviseur de a^2 , il considérait maladroitement a comme diviseur de $2b^2$. Obtenant finalement une contradiction, il concluait que l'hypothèse $\sqrt{2}$ rationnel absurde, sans faire intervenir la parité de a et b , comme il se doit dans la démonstration classique. J'allais conclure à la faiblesse de son argumentation (et à un méchant 0 à la question) et passer à côté d'un joli résultat. Mais, pris d'un doute, j'ai relu attentivement la copie.» (Henry, 2001)

L'exemple de la copie de CAPES en question illustre comment le développement d'un traitement opératoire (lecture en termes de divisibilité) peut amener à une preuve, et donc en particulier à une organisation, qui ne vit pas dans une institution donnée.

Dans le cadre d'un travail en termes de divisibilité, nous avons jusqu'à présent supposé la fraction en jeu irréductible, ce que nous ne faisons plus à présent.

Descente infinie

En spécifiant le raisonnement par l'absurde qui constitue l'organisation générale, on peut parvenir autrement à une contradiction qu'en supposant la fraction en jeu irréductible ; les preuves données ci-après le montrent bien. Nous proposons dans un premier temps une preuve par descente infinie et nous utilisons ensuite un raisonnement par l'absurde et minimalité⁷, logiquement équivalent à la méthode de descente infinie :

Preuve par descente infinie

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

De même que dans la preuve dite classique, on montre que a et b sont pairs.

Ainsi à partir du couple (a,b) on obtient le couple (a',b') d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}.$$

$$a' < a$$

⁷ Admettre l'existence d'un représentant irréductible pour toute fraction permet de ne pas avoir recours à ces deux catégories d'organisation.

$$b' < b$$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante (en considérant par exemple la suite des abscisses des couples obtenus), ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

Preuve par l'absurde et minimalité

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, l'ensemble E des entiers naturels a tels qu'il existe b (entier naturel non nul) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ n'est pas vide. Ainsi, cet ensemble admet un plus petit élément que l'on note a_0 .

Comme dans la preuve dite classique, on montre que a_0 et b_0 sont pairs.

On obtient donc a_0' appartenant à E tel que $a_0' < a_0$, ce qui contredit le caractère minimal de a_0 .

Nous pouvons réécrire la preuve par descente en explicitant l'ensemble E pour mettre en évidence le lien entre ces deux preuves. De plus, nous pouvons écrire une démonstration par récurrence en prenant pour hypothèse de récurrence :

$P(n)$: « Il n'existe pas d'élément x de l'ensemble E tel que $x < n$. »

Le caractère héréditaire est établi par contraposée en reprenant ce qui a été fait dans la preuve par descente ; la pensée organisatrice est différente de celle structurant les preuves données jusqu'à présent : le raisonnement par l'absurde disparaît.

Ainsi, la spécification de la pensée organisatrice donne naissance à des preuves par l'absurde distinctes ; cette spécification se lit en particulier au niveau de la contradiction établie. Les preuves concernées ici (y compris la preuve par récurrence) se différencient donc aux niveaux organisateur et opératoire mais ont en commun l'étape opératoire aboutissant au résultat : « si le carré d'un nombre est pair alors il est lui-même pair ». Celle-ci est analysée lors de l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ que nous abordons à présent.

2.1.2. De $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$: seul l'opérateur varie

Si l'on reprend les preuves données précédemment, on peut décontextualiser les différentes organisations pour démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Une adaptation est à faire néanmoins du côté opératoire. En mettant momentanément la preuve dite fondamentale de côté, nous avons besoin d'établir que « si le carré d'un nombre est divisible par trois alors il est lui-même divisible par 3 », correspondant au résultat « si le carré d'un nombre est pair alors il est lui-même pair » dans le cas de $\sqrt{2}$. Ce dernier peut être démontré de différentes manières :

- Par contraposée : la dimension opératoire dépend alors du type de traduction du caractère impair de x . Considérons par exemple les trois traductions suivantes : $x \equiv 1[2]$, il existe un entier k tel que $x = 2k + 1$, l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de x est nul, le travail correspondant sur x^2 est différent dans chaque cas.
- Par disjonction de cas sur l'ensemble des entiers, basée sur la relation de congruence modulo 2 : on retrouve la même discussion que précédemment ; la résolution antérieure est un des cas de la disjonction envisagée ici. La différence se situe essentiellement au niveau organisateur : on travaille sur l'implication à établir directement et non en utilisant sa contraposée.

Dans le cas de $\sqrt{3}$, la dimension organisatrice se complexifie : en suivant un raisonnement par contraposée, on est amené à faire une disjonction de cas sur l'ensemble des entiers non multiples de 3 (pour $\sqrt{2}$, elle se réduit à l'examen du cas impair), basée sur la relation de congruence modulo 3. Si l'on choisit d'utiliser la décomposition en facteurs premiers pour traiter ce sous-problème, aucune sous-dimension organisatrice n'apparaît. Ce phénomène ne doit pas nous étonner puisque plus on est proche du ressort fondamental du résultat général sous-jacent (caractère factoriel de l'anneau $\mathbb{Z}$), moins des adaptations sont à faire pour passer d'une preuve à l'autre. Cela se retrouve d'ailleurs lorsque l'on revient à la preuve fondamentale : il suffit de remplacer la valuation 2-adique par la valuation 3-adique ; l'égalité permettant d'aboutir à une contradiction devient $1 + 2 v_3(b) = 2 v_3(a)$.

2.1.3. Vers une généralisation

Il est mathématiquement naturel d'inscrire les études de rationalité de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ dans un questionnement plus large : l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ peut être vue comme cas particulier du résultat général « Soit a et b deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel si et seulement si a et b sont des carrés ». L'explicitation du ressort fondamental joue un rôle essentiel puisque c'est elle qui donne accès à une preuve de ce résultat général :

La condition « a et b sont des carrés » est clairement suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire : Supposons donc que $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel, il existe deux entiers naturels non nuls x et

y tels que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y}$. D'où : $ay^2 = bx^2$ (*). Supposons par l'absurde que a ne soit pas un carré, il existe p premier tel que $v_p(a)$ soit impair. a et b étant premiers entre eux, $v_p(b)$ est nul. Ainsi, on obtient à partir de (*) $v_p(a) + 2v_p(y) = 2v_p(x)$, D'où une contradiction ($1 \equiv 0$ [2]).

Ainsi, si on en revient au travail sur les études particulières de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$, on constate que la dialectique qui s'opère entre dimensions organisatrice et opératoire peut fonctionner dans les deux sens :

- « De l'opératoire vers l'organisateur » : l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers au niveau de l'étape opératoire peut mettre sur la voie, non seulement d'une autre preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (preuve dite fondamentale), mais sur celle d'une preuve du résultat général en jeu. Les autres traductions (il existe un entier k tel que $x = 2k + 1$ et $x \equiv 1$ [2]), en revanche, n'aident pas directement à l'élaboration d'une telle preuve, même si elles donnent les éléments pour démontrer l'irrationalité de la racine d'un entier autre donné (non carré parfait).
- « De l'organisateur vers l'opératoire » : comme nous l'avons déjà vu, lorsque l'on raisonne par l'absurde, le fait de considérer la fraction envisagée comme irréductible implique des traitements opératoires autres que ceux rencontrés dans un raisonnement où l'irréductibilité n'intervient pas.

Cette analyse mathématique en termes de dimension organisatrice et dimension opératoire amène à s'interroger particulièrement sur les points suivants :

- Des éléments organisateurs ou opératoires de la preuve attendue par l'enseignante vont-ils apparaître ? Cette preuve va-t-elle émerger complètement dans la recherche des élèves ?
- Trouve-t-on des éléments nouveaux, tant du côté opératoire qu'organisateur, dans la recherche des élèves ? Ceux-ci conduisent-ils ou conduiraient-ils à une autre preuve que celle attendue par l'enseignante ?
- D'une manière générale, où se situent les difficultés rencontrées par les élèves dans le processus de construction d'une preuve ?
- Comment interagissent les dimensions organisatrice et opératoire, que ce soit lors de l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ou de $\sqrt{3}$, ou, lors de l'éventuel passage d'une étude à l'autre ?

2.2. Eléments de l'analyse a posteriori.

La preuve naturellement attendue par l'enseignante pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est la preuve euclidienne classique ; cette preuve a en effet déjà été rencontrée en classe. Soulignons tout d'abord que, contrairement à l'image donnée par les productions écrites, l'étude de la recherche des élèves montre clairement que lorsque l'« écriture » de cette preuve passe sous leur responsabilité, les choses deviennent problématiques. De plus, la diversité des résolutions possibles pointée par l'analyse mathématique émerge comme nous allons le détailler un peu dans ce qui suit.

Comme nous le prévoyions *a priori*, le texte fourni aux élèves introduit naturellement l'objet fraction dans le travail des élèves. Nous avons eu confirmation que les rationnels sont envisagés automatiquement par les élèves à travers leur représentant irréductible. Certains éléments d'analyse *a posteriori* conduisent d'ailleurs à se demander si cet automatisme n'est pas vu par certains comme une véritable obligation. Mais il faut aussi souligner que cette introduction de l'objet fraction irréductible, induite par l'énoncé et l'usage, n'est pas d'emblée associée consciemment à la mise en acte d'une visée, et en particulier d'une visée de raisonnement par l'absurde. Et l'on voit bien par ailleurs, à plusieurs reprises dans les corpus, comment, lorsque cette visée devient consciente, la conviction que se sont forgée les élèves que $\sqrt{2}$ est irrationnel, perturbe la mise en œuvre du raisonnement hypothético-déductif ici nécessaire ; l'extrait qui suit en témoigne :

Extrait 1

B1 : Eh déjà on a triché parce qu'on est parti sur le fait que c'est irrationnel. Faut partir sur le fait qu'on sait pas.

B3 : Ouais ben oui de toute manière c'est ça qui faut montrer. A mon avis faut que tu/

B2 : Attends, si.

B3 : Partes du fait qu'on sait pas et ensuite on arrive à démontrer que c'est.

B1 : Inaudible.

B2 : Ouais mais non, je vois pas, je vois pas où il est le problème d'arithmétique en fait dedans c'est ça le le problème.

B1 : Si parce que/

B3 : Ben justement une fois que tu arrives à cette équation là, ça devient un problème d'arithmétique parce que t'es obligé d'utiliser le théorème de Gauss, le théorème de Bézout alors qu'euh/

B2 : Ouais mais ensuite/

B3 : Le tout c'est de démarrer.

B2 : Ca donnera quoi le résultat de l'utilisation des théorèmes si racine de 2 il est irrationnel? Tu sais c'que ça va faire toi?

B1 : Théoriquement on sait pas que c'est irrationnel donc ça compte pas c'que tu sors.

B2 : Non ben si. Nous on le sait que c'est irrationnel mais faut le démontrer.

B1 : On est pas censé le savoir.

B2 : Oui on n'est pas censé le savoir, on n'est pas censé le savoir mais euh, le théorème de Gauss il va marcher avec les nombres entiers pas avec les, les nombres rationnels

La mise en œuvre du raisonnement hypothético-déductif impose en effet de distinguer clairement entre la valeur épistémique de l'énoncé : « $\sqrt{2}$ est rationnel » qui est la valeur « Faux » et sa valeur logique au moment où il est engagé dans la preuve, à savoir la valeur « Vrai » qu'on lui attribue pour aboutir ensuite à une contradiction. Et ceci leur semble particulièrement difficile. On sent bien que l'entrée dans le raisonnement par l'absurde serait pour eux plus facile si un doute subsistait sur la valeur épistémique de l'énoncé, rendant l'opposition de valeurs moins flagrante. Cet extrait montre aussi une conception de l'arithmétique comme un domaine où il faut utiliser des théorèmes arithmétiques (théorèmes de Gauss et Bézout en particulier), enfin comme un champ qui porte sur les entiers.

L'élévation au carré, quant à elle, n'est pas non plus quelque chose d'automatique et ce traitement opératoire apparaît même relativement tardivement dans la recherche des élèves. La situation est cependant différente selon les groupes.

Dans un groupe (groupe A), l'émergence du traitement opératoire initial ne s'inscrit pas apparemment dans le fil d'un développement mathématique ; l'idée d'élever au carré intervient initialement de façon brutale et non argumentée, telle une réminiscence. Elle est ensuite abandonnée puis reprise et ce n'est qu'après intervention de l'enseignante que le travail se stabilisera sur l'égalité associée, sans retour cette fois à l'objet racine. Au sein de ce groupe, malgré une attention évidente portée à la nature des nombres en jeu, nous avons observé l'absence d'une claire conscience du champ concerné par l'arithmétique enseignée à ce niveau (cf. extrait 2). L'autre groupe (groupe B), quant à lui, est très vite attentif à la nécessité de travailler sur des entiers (cf. extrait 1) et l'élévation au carré naît véritablement de leur travail mathématique. On observe malgré tout un retour à l'objet racine suite aux interventions de l'enseignante qui propose aux élèves de déduire de l'égalité portant sur les carrés de a et b , des propriétés de ces nombres eux-mêmes, ce qui correspond au passage crucial de a^2 à a dans la preuve attendue. Il semble en effet alors naturel aux élèves de

réintroduire l'objet racine pour répondre à la demande de l'enseignante qui pointe les objets et non leurs carrés. Une preuve de ce groupe, sans cette intervention de l'enseignante qui n'a que partiellement connaissance de la recherche des élèves, aurait sans doute privilégié un raisonnement sur les carrés jusqu'au bout, utilisant le résultat énonçant que *si deux nombres sont premiers entre eux alors il en est de même de leurs carrés* : a^2 étant pair, b^2 serait alors impair d'où une contradiction lorsque l'on traduit opératoirement le caractère pair de a . Précisons que pour le groupe A également, le passage de a^2 à a est suscité par l'enseignante ; sans l'intervention de cette dernière, le groupe aurait privilégié un raisonnement sur les carrés.

Un autre phénomène est, nous semble-t-il, frappant dans cette première phase de leur recherche : pour les deux groupes, la traduction opératoire du caractère pair d'un nombre a par l'égalité $a=2q$ est visiblement une connaissance mobilisable mais non disponible. Dans les deux groupes, cette traduction opératoire, essentielle à la mise en œuvre du raisonnement, n'entre en effet dans le milieu que suite à une intervention de l'enseignante. Précisons que cette intervention n'a pas besoin d'être lourde tout en étant nécessaire ; cette connaissance rendue disponible fait rapidement progresser la recherche des élèves.

L'analyse de la recherche des élèves relative à l'étude de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ met bien en évidence l'influence de certaines caractéristiques de la culture d'enseignement sur leur recherche et les raisonnements qui la sous-tendent. Le fait d'envisager d'emblée la fraction a/b comme irréductible en est une première manifestation qui relève de la culture numérique au sens large et non de la seule culture arithmétique, mais nous voudrions nous centrer ici sur un des objets qui sont au cœur de l'arithmétique qui est enseignée en terminale S et dont l'influence sur la recherche menée a été bien plus importante que nous ne l'avions prévu, et s'est effectuée sous des formes partiellement au moins inattendues. Il s'agit du théorème de Gauss.

Pour les deux groupes, la présence simultanée d'une égalité comportant un produit et une relation de primalité entre deux des entiers intervenant respectivement dans les deux membres de l'égalité, semble amener à un traitement opératoire quasi automatique sur le théorème de Gauss. Voici un extrait correspondant à la première apparition de ce traitement dans la recherche du groupe A :

Extrait 2

A : Donc a il divise racine de 2 puisque a et b sont premiers entre eux donc a il divise pas b et a divise b racine de 2. C'est pas le théorème de Gauss ?

A1 : Mmm ? Si ça fait penser à Gauss quoi mais euh /

A : Donc a il divise racine de 2.

A1 : Non. Non, non non.

A : Mais si !

A1 : C'est racine de 2 qui divise.

A : a il divise b racine de 2, t'es d'accord ? !

A1 : (Rires), elle va me taper. Mais non parce que c'est a égal /

A : Oui mais il divise ça !

A1 : Mais non ! C'est ça qui divise a. Racine de 2 divise a ! C'est pas a qui... a il est tout seul là. C'est pas. T'aurais b égal à racine de 2 a et ben là ça s'rait a euh ça s'rait racine de 2 il divise b et a divise b s'ils étaient pas premiers entre eux.

A : Mais il divise les deux ! Si tu mets les deux /

A1 : Non, tu peux pas inverser ! Parce que si tu dis que. En fait ça c'est plus grand que racine de 2 et ça c'est plus grand que b. Et donc a il ne peut pas diviser un nombre plus petit.

A' : Ben oui.

A1 : Donc, j'ai raison, comme dab, J'ai toujours raison, (rires). -- Donc c'est racine de 2 qui divise a.

A : Oui mais.../

A1 : Parce que regarde euh quand tu divises a/

A : Ah oui ! a et b sont premiers entre eux donc c'est racine de 2 qui divise a.

A1 : Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/

A : C'est bon j'suis d'accord.

Deux avis, « a divise $\sqrt{2}$ » et « $\sqrt{2}$ divise a », s'opposent dans ces échanges à propos de l'interprétation de l'égalité $a = \sqrt{2} b$. C'est avec le premier avis que l'on identifie le traitement opératoire annoncé ; le raisonnement en jeu ici est le suivant : comme $a = b\sqrt{2}$, en particulier a divise $b\sqrt{2}$, d'où a divise $\sqrt{2}$ d'après le théorème de Gauss puisque a et b sont premiers entre eux (le théorème de Gauss est mentionné mais n'est pas associé clairement à ce raisonnement par les élèves). La lecture particulière qui est faite ici en termes de divisibilité correspond à un embryon de la preuve originale présentée dans l'analyse mathématique (cf. § 2.1.1) et donc en particulier une pensée organisatrice distincte de celle attendue par l'enseignante.

Comme nous le précisons antérieurement, cet extrait met en évidence l'absence d'une claire conscience que l'arithmétique (enseignée en TS) concerne les entiers et que celle-ci n'exclut pas qu'une certaine attention soit portée à la nature des nombres en jeu. L'absence d'une

claire conscience du champ concerné par l'arithmétique est identifiée dans cet extrait au niveau de la définition de la relation de divisibilité employée ainsi que dans l'utilisation du théorème de Gauss. Les deux lectures de l'égalité en jeu renvoient à une extension de la définition de la divisibilité. Pour la lecture « $\sqrt{2}$ divise a », en particulier, la spécificité entière n'est conservée que pour le quotient : « Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/ » ; et c'est à travers cette conservation que l'attention portée à la nature des nombres en jeu se manifeste.

L'utilisation du théorème de Gauss par les élèves induit un traitement opératoire original qui pourrait conduire à des preuves différentes de celles attendues mais tout à fait valides. Nous observons cependant que ces preuves ont des difficultés à émerger, que les conclusions à tirer en termes de divisibilité sont facilement inversées ou remises en cause comme l'illustre les extraits de la production écrite du groupe B donnés ci-dessous :

Production écrite du groupe B

Extrait 3

[...] $3b^2 = a^2$

⁸Si 3 ne divise pas a^2 alors a^2 divise b^2 (Thm de Gauss). Or a et b premiers entre eux donc 3 divise a^2 donc a^2 s'écrit $3q$.

Extrait 4

[...] $b^2 = 3q^2$ or b^2 et q^2 sont premiers entre eux donc 3 divise b^2 (Th de Gauss).

D'une part, il peut y avoir des réticences, même si elles restent implicites, à déduire de l'égalité : $a^2 = 3b^2$, lorsque a et b sont premiers entre eux, que a^2 divise 3, alors que, dans les raisonnements usuels, le nombre 3 a généralement le statut de diviseur, et ceci peut avoir contribué aux glissements observés au niveau des conclusions, d'autre part, comme cela apparaît dans l'extrait 2 avec le cas de $\sqrt{2}$, pour résister à l'objection selon laquelle, 3 étant plus petit que a^2 , il est impossible que a^2 divise 3, il faut un raisonnement particulièrement sûr, ce qui n'est visiblement pas encore le cas pour ces élèves. Malgré ces difficultés, assez étrangement, cette lecture tend à prédominer sur la lecture attendue d'une égalité comme $a^2 = 3b^2$, à savoir justement que 3 divise a^2 .

Soulignons pour finir que différents éléments d'analyse *a posteriori* conduisent à émettre un doute quant à la pertinence de la règle de contrat en jeu (il n'est pas attendu que le

⁸ Ce sous-extrait est barré par les élèves, ce que n'avons pas reproduit pour une lecture aisée.

résultat « si le carré d'un entier est pair alors ce nombre l'est aussi ») relativement à la capacité des élèves à démontrer le résultat en jeu et même à le considérer comme allant de soi. Tout d'abord, l'étape opératoire relative à $\sqrt{3}$ est pointée par l'enseignante pour les deux groupes : sans l'intervention de cette dernière, les élèves ne se seraient pas engagés dans une démarche de preuve du résultat « si le carré d'un nombre est multiple de 3, alors ce nombre l'est aussi ». De plus, la tâche de comparaison de preuves (comparaison de leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ avec trois preuves fournies de ce même résultat dont les preuves par descente infinie et par l'absurde et minimalité présentées lors de l'analyse mathématique (cf. § 2.1)) nous permet de penser que les élèves ne se sont pas rendus compte que l'implication non démontrée dans leur preuve l'est dans deux des trois preuves fournies. Enfin, comme l'illustrent les extraits donnés ci-après, traduire la dichotomie pair / impair en termes de divisibilité afin de faire le lien avec celle de nombre divisible par 3 est problématique pour les élèves :

Extrait 5

A2 : [...] Pour $\sqrt{3}$ c'est pas pareil puisque on n'a pas prouvé qu'il est pair. Avec les trucs pairs/

A : Oui je sais.

A2 : Ca a cun rapport.

Extrait 6

B3 : Mais ça marche pas, ça marchera jamais... Puisque c'est un problème de divisibilité donc c'est pas montrons a et b sont pairs, c'est un problème de divisibilité pour 3, on n'a pas du tout fait de la même manière.

Extrait 7

B3 : Mais ils montrent que a et b sont pairs c'est ça qui me, qui me trouble.

B1 : Normal les deux ils sont impairs.

B3 : Ah ben oui, c'est assez logique ouais.

B1 : Donc on fait comme si les deux ils étaient impairs et puis c'est tout.

Extrait 8

B1 : Parce qu'en fait là y'a une grosse connerie là, en fait c'est pair c'est divisible par 2. Là ça devient nettement plus clair. Donc en fait c'est ça faut montrer que a et b sont divisibles par 3. Voilà!

3. Conclusion

A l'articulation entre analyses épistémologique et didactique, notre recherche de thèse cherchait à identifier les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique et à étudier l'écologie de celles-ci au niveau de la classe de terminale scientifique. L'enquête épistémologique nous a permis d'identifier des spécificités du raisonnement en arithmétique, tant dans ses dimensions organisatrice qu'opératoire, et donc des potentialités a priori pour l'apprentissage du raisonnement mathématique dans l'institution scolaire (classe de terminale scientifique). Ces potentialités ont été ensuite confrontées à la contingence didactique et nous nous sommes interrogée sur la pertinence des analyses menées et des outils construits pour étudier l'écologie possible, au lycée, des potentialités identifiées a priori. Lors du séminaire national, nous nous sommes centrée sur la présentation des outils issus de l'analyse épistémologique, ainsi que sur l'illustration de leur mise en fonctionnement au service de l'analyse didactique suivant un des axes en jeu dans notre recherche (analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques).

En ce qui concerne l'expérimentation en classe de terminale S, les outils d'analyse construits nous ont permis de situer les difficultés des élèves dans la résolution des problèmes envisagés et également de mettre en évidence une créativité certaine des élèves. Les éléments de l'analyse que nous avons présentés ici illustrent les limites d'une analyse qui ne prendrait en compte que les productions écrites des élèves. Comme le montre notre travail de thèse, nos outils offrent un accès à la dynamique du processus de production d'une preuve arithmétique.

Au delà de cet exemple nécessairement limité, l'exploitation des outils épistémologiques pour l'analyse de copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat, nous a en particulier permis de préciser où l'institution situait leur autonomie suivant que les tâches pouvaient être considérées ou non comme routinières, de mettre en évidence une créativité au niveau organisateur dans un contexte apparemment verrouillé de ce point de vue et de faire des hypothèses sur les ressorts de cette créativité. Au service de l'analyse institutionnelle, nos outils nous ont aidé à prendre la mesure du champ réellement exploité par l'enseignement par rapport aux potentialités identifiées a priori, tant dans les dimensions organisatrice, opératoire que dans leur interaction. En analysant d'une part la partie arithmétique des sujets de baccalauréat⁹ et d'autre part des ressources moins contraintes

⁹ Depuis la réintroduction de l'arithmétique en terminale.

et susceptibles de nous montrer, à l'inverse des sujets de baccalauréat, l'ouverture maximum du champ des possibles¹⁰, nous avons montré l'existence de réductions et de verrouillages mais aussi de ressorts et ressources au sein même de l'institution scolaire.

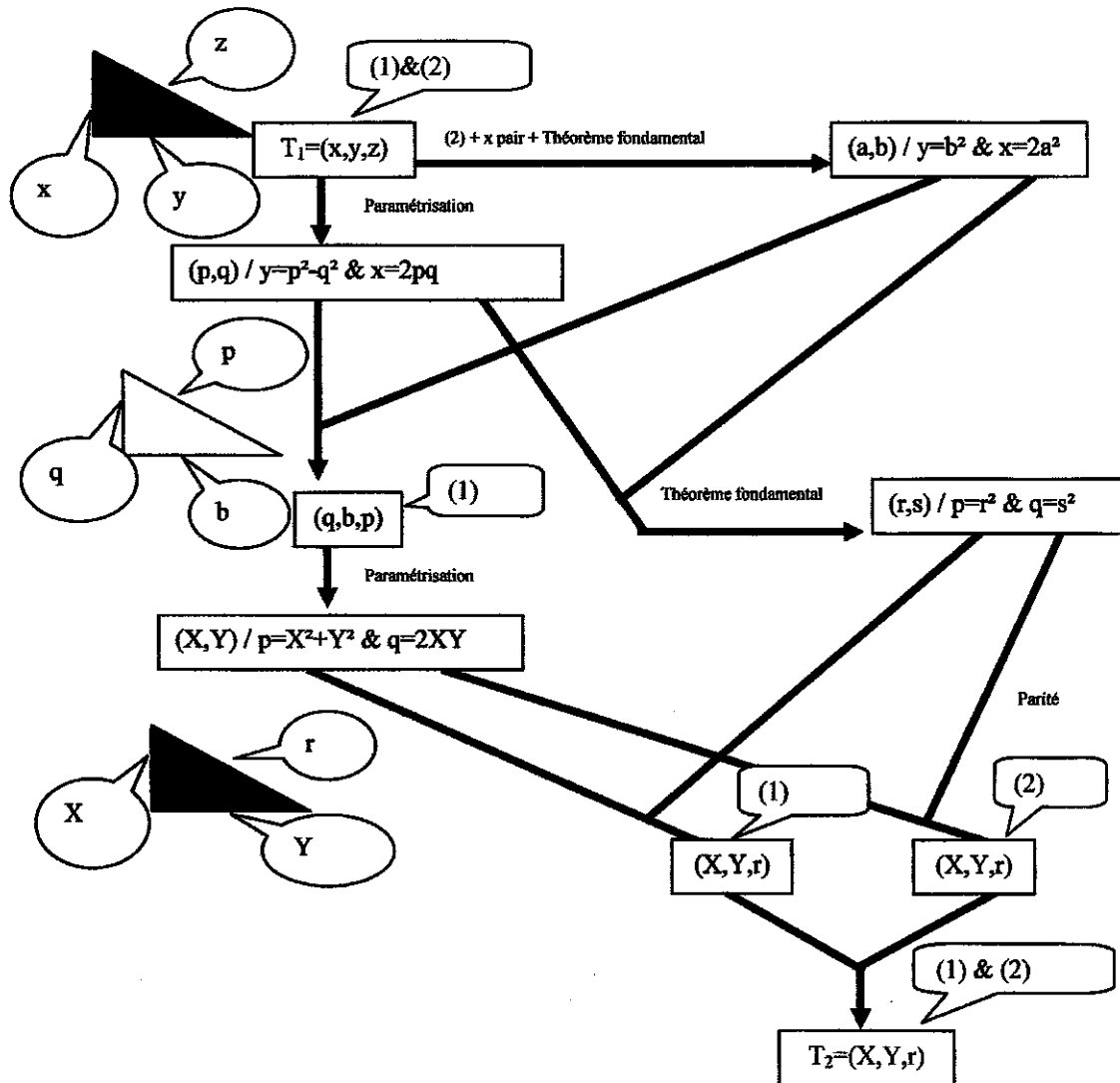
Concourant avec ceux obtenus dans nos autres travaux, les résultats présentés lors du séminaire national tendent à montrer la pertinence de nos outils épistémologiques pour l'analyse didactique et une perspective de prolongement possible de cette recherche s'en déduit : réinvestir cet outil et tester sa pertinence pour l'analyse didactique à d'autres niveaux d'enseignement, en particulier au niveau universitaire, ainsi que pour étudier la transition dans ce domaine entre enseignement secondaire et université. Dans l'enseignement secondaire français en effet, malgré la créativité dont les élèves peuvent être capables, l'autonomie dévolue par l'institution scolaire à l'élève se situe essentiellement au niveau opératoire. Où se situe l'autonomie de l'élève dans le supérieur ? Y a-t-il un saut lors de la transition ? Comment par ailleurs les composantes organisatrice et opératoire, ainsi que leurs relations dialectiques, se complexifient-elles ? Ce sont pour nous des questions ouvertes.

Références bibliographiques

- Battie, V. (2003). Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique. Thèse de doctorat. Université Paris 7, Paris.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1/3), 85-109.
- Goldstein, C. (1995). *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*. Presses Universitaires de Vincennes, Saint-Denis.
- Grenier D., Payan Ch. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/1, 59-100.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration : an overview, *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.
- Henry, M. (2001). Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ?!. *Bulletin de l'APMEP* (433), 204-218.
- Schmidt, S. (2002) Arithmetical and algebraic types of reasoning used by pre-service teachers in a problem-solving context in *RCESMT* (2.1); University of Toronto Press Journals Division, Toronto.

¹⁰ Nous nous sommes centrée sur des publications IREM et APMEP.

ANNEXE 1 : Organigramme de la première étape de la démonstration inspirée de celle de Frenicle



(1) : Le triangle est rectangle en nombres entiers premiers dans leur ensemble. (2): Le triangle correspondant est d'aire carrée. Parité : Comme q est pair, s est pair : $s = 2s_1$. D'où $XY = 2s_1^2$. L'aire de (X,Y,r) est bien un carré.