

Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique

Caroline Bardini

DIDIREM Université Paris 7, bardini@math.jussieu.fr

Introduction



A propos de son tableau *La condition humaine I*, Magritte écrit : “I placed in front of a window, seen from a room, a painting representing exactly that part of the landscape which was hidden from view by the painting. Therefore, the tree represented in the painting hid from view the tree situated behind it, outside the room”. [Gablik, 1976, p.97]

A l’origine de notre problématique se trouve un constat, argumenté par les recherches que nous avons menées dans le cadre du DEA de didactique des mathématiques [Bardini, 2001] : celui de la fragilité du rapport à la factorisation des élèves en fin de Troisième.

Conformément aux hypothèses formulées dans certains travaux de didactique de l’algèbre¹, la factorisation, qui se constitue essentiellement de manipulations formelles et qui occupe une place non négligeable dans l’enseignement des mathématiques à ce niveau scolaire, s’est avérée, au vu de notre étude, très souvent dépourvue de toute signification, *lato sensu*, pour un bon nombre d’élèves. Pour la plupart, en effet, cette notion reste bien souvent associée à une tâche qu’ils accomplissent « à l’aveugle », où interviennent un certain nombre de règles « inquestionnables » vouées à transformer un ensemble d’écritures algébriques qui restent exemptes de sens.

Ainsi avons-nous été amenés, face à un tel bilan, à nous interroger sur le rapport des élèves aux expressions algébriques. Comment les élèves perçoivent-ils les expressions algébriques qu’ils manipulent ? Plus exactement, comment les élèves perçoivent-ils les éléments constitutifs de telles expressions ? En somme, et pour revenir à l’œuvre de Magritte, *que se cache-t-il, pour l’élève, derrière le symbole ?*

¹ Cf. Tonnelle (1979).

I- Les différents usages de l'histoire en didactique de l'algèbre

La question de la constitution du sens des écritures algébriques a déjà fait l'objet de nombreuses études en didactique des mathématiques, les travaux de Luis Radford en fournissant un exemple particulièrement éclairant².

C'est à travers une approche sémiotique, où l'accent est mis sur la dimension socio-culturelle du symbole³, que Radford étudie le rapport des élèves au symbolisme. Il s'intéresse notamment à créer des situations qui inciteraient les élèves à développer eux-mêmes, en reprenant ses termes, les *idées* que véhiculent les symboles, procédant ainsi à une construction personnelle de la relation symbole/ idée.

Pour ce faire, il convient, selon lui, « (...) d'identifier les idées de base de l'algèbre, les voies d'accès qui permettent aux élèves de construire des représentations externes de plus en plus complexes, les actions permettant de déboucher sur une dialectique entre les idées et leurs symboles. » [Radford, 1996, p.255]

Et c'est dans l'histoire, et plus précisément dans l'analyse de documents historiques qui manifestent l'émergence du langage algébrique, que Radford recherche des voies d'accès pour élaborer des séquences d'enseignement appropriées.

Or le recours à l'histoire dans les recherches en didactique de l'algèbre n'est pas le seul fait d'un chercheur comme Radford. Au fil de notre étude [Bardini, 2003], nous avons montré que l'histoire a constitué un point d'entrée pour de nombreux travaux dans ce domaine, qu'ils s'inscrivent dans une problématique directement liée au symbolisme algébrique ou dans un questionnement plus large à propos de l'enseignement/apprentissage de l'algèbre.

C'est notamment le cas des travaux de Carolyn Kieran⁴, qui se sert de l'histoire afin de bâtir une analogie entre l'évolution au cours de l'histoire et au cours de l'apprentissage de quelques concepts algébriques. Sans toutefois vouloir faire de celle-là le modèle de celui-ci, elle perçoit dans cette approche historique un double intérêt : non seulement elle lui permet d'approfondir son analyse de la construction par les élèves de concepts donnés (fonction, variable, etc.), mais elle sert également à identifier les différents modes de raisonnement (arithmétique ou algébrique) susceptibles d'être mis en oeuvre lors de la résolution de problèmes posés aux élèves.

² Cf. Radford (1996, 1999, 2002).

³ Surtout en ce qui concerne les travaux les plus récents de Radford.

⁴ Cf. Kieran (1981, 1996).

Les recherches d'Anna Sfard offrent également une coloration historique. Cependant, contrairement à Kieran, l'usage qu'elle en fait est moins spécifique à un domaine mathématique donné. En effet, c'est en s'appuyant sur des données historiques qu'elle identifie, dans un premier temps, les deux dimensions : opérationnelle et structurale, constitutives, selon elle, des notions mathématiques. Les différentes étapes organisatrices de l'édification de celles-ci que l'histoire lui permet de repérer en termes d'opération-objet lui servent ensuite à modéliser les différentes strates constitutives de la construction par les élèves de concepts mathématiques en général.

L'histoire peut également présenter un intérêt méthodologique. Harper, par exemple, s'intéresse à repérer les similitudes et les différences entre l'ordre d'acquisition de concepts algébriques par les élèves et l'évolution historique de ces mêmes concepts. C'est en reprenant le découpage de l'algèbre proposé par Nesselmann, selon lequel l'évolution historique de l'algèbre se présenterait selon un schéma ternaire (rhétorique-syncope-symbolique), qu'elle décrit les modes de résolution employés par certains élèves face à un problème donné. Ainsi repérera-t-elle, par exemple, les réponses qui relèvent de méthodes qu'elle classe en tant que « rhétoriques », « diophantiennes », ou « vietnamiennes ».

Cet intérêt méthodologique de l'histoire est également une caractéristique des travaux de Radford qui, nous l'avons vu, s'en sert notamment pour construire des séquences d'enseignement. Cependant, l'usage qu'il en fait paraît organisé autour d'une analyse qui dépasse le cadre d'une étude purement historique. Lorsqu'il affirme : « (...) un symbole ("x" ou autre) est le symbole de quelque chose, d'une idée », cela semble indiquer que son regard ne porte pas uniquement sur les différentes marques historiques de l'édification d'un symbole, mais qu'il s'intéresse, au-delà, à ce que nous appellerons ici, de façon intuitive, l'« essence » d'un symbole.

Cet élargissement du questionnement développé par Radford n'est certes pas propre à ses travaux, cependant il nous semble lié à l'objet même de son questionnement. En effet, notre étude a révélé que, plus les travaux portaient sur les symboles mathématiques en soi, plus les analyses prenaient source dans des domaines autres que l'histoire, et en particulier dans la philosophie.

En analysant différentes études se rapprochant de notre thème, *i.e.* le symbolisme algébrique, nous avons en effet constaté que bon nombre de recherches, didactiques ou cognitives, renvoient à des textes philosophiques de Gottlob Frege, et plus précisément aux notions de *sens* et *dénotation* qu'il introduit.

II- L'étude du symbolisme en didactique des mathématiques

Frege entend par signe « toute manière de désigner qui joue le rôle d'un nom propre » [Frege, 1971, p.103], pouvant être un nom, un groupe de mots ou de caractères. Un signe est composé, d'après lui, de deux éléments : son sens et sa dénotation. La dénotation d'un signe est précisément ce qu'il désigne et son sens est le mode de donation. Empruntons un exemple cité par Frege : « Soient a , b , c les médianes d'un triangle. Le point d'intersection de a et de b est le même que celui de b et de c » [ibid., p. 103]. Le point d'intersection des médianes peut être désigné de plusieurs façons différentes ; ici ce sont les différentes constructions géométriques qui servent de mode de donation (« point d'intersection de a et de b », par exemple). Ces différentes désignations sont ce que Frege appelle les sens. Et si d'un côté le signe a plusieurs modes de donation, plusieurs sens (car plusieurs expressions permettent de le décrire, telle « point d'intersection de a et de b »), il ne possède qu'une dénotation : c'est l'objet déterminé ; ici, le point en question. De même, les expressions « l'élève de Platon » et « maître d'Alexandre le Grand » ont des sens différents, cependant une seule dénotation : toutes les deux se réfèrent à Aristote.

En didactique, l'interprétation et l'emploi de ces deux notions présentent des variations selon les auteurs, qui en ont parfois adapté la définition à leurs besoins. Si certains, comme Raymond Duval ou Jean-Philippe Drouhard, se sont montrés fidèles aux termes frégeens (le second rajoutant toutefois les notions de *connotation* et d'*interprétation*), d'autres s'en sont éloignés, comme le montrent les travaux de Ferdinando Arzarello qui, d'une part, dédouble la notion de sens d'une expression algébrique pour définir ce qu'il nomme *sens algébrique* et *sens contextualisé* d'une expression¹ et, d'autre part, « contextualise » la notion de dénotation.

III- Ecrits épistémologiques autour de l'algèbre

La prégnance des références philosophiques dans ces travaux didactiques sur le symbolisme nous a montré que, pour aborder la question du rapport des élèves au symbolisme algébrique, une investigation théorique préalable sur celui-ci était fondamentale. Ainsi nous est-il paru primordial de compléter l'analyse développée par les auteurs mentionnés *supra*, relative aux

¹ Le sens algébrique, par exemple, correspond à la façon dont l'objet nous est donné, plus particulièrement à travers les règles explicites dans l'expression. Tandis que les expressions $n(n+1)$ et n^2+n dénotent, selon lui, la même fonction, elles possèdent des sens algébriques différents.

termes frégeens de *sens* et *dénotation*, par une mise en perspective de différents écrits philosophiques apparus comme des références incontournables dans l'étude de l'algèbre.

La lecture des textes choisis s'est essentiellement articulée autour de deux pôles, selon que les réflexions développées par les auteurs autour de l'algèbre étaient d'ordre général ou, au contraire, spécifiques aux symboles de celle-ci.

C'est ainsi que nous avons regroupé, dans une première partie, les textes de Jules Vuillemin (1962) et Gilles Gaston Granger (1994), en retenant de ceux-ci une authentique analyse des éléments constitutifs de l'algèbre et de leurs articulations avec la philosophie. Les réflexions menées par les deux auteurs nous ont cependant paru clairement distinctes. Tandis que le premier se réfère au domaine algébrique, essentiellement dans le but d'établir des rapports entre les mathématiques et la philosophie, en insistant sur l'étude des méthodes qui lui sont spécifiques, à partir d'une analyse des processus employés par divers mathématiciens, nous retrouvons dans l'ouvrage de G-G Granger un discours davantage bâti autour de la question de la *pensée formelle* et plus précisément sur les corrélations entre les couples forme/contenu et opération/objet.

Le deuxième pôle s'est organisé autour des écrits de Désiré André (1909), Charles Babbage (1821), Marcelo Dascal (1978), et enfin de Florian Cajori (1928) dont le texte, bien que ne relevant pas d'une analyse philosophique, s'avère une référence incontournable pour toute étude relative aux symboles mathématiques.

En analysant la *caractéristique géométrique* leibnizienne, par exemple, Dascal observe : « Mais le but principal d'une telle notation n'est pas de servir pour la *description* des choses – auquel cas il serait mieux d'avoir des *reproductions* de ces choses ou les choses elle-mêmes – mais plutôt servir au raisonnement (...) » [Dascal, 1978, p. 216]. Il analysera cependant surtout le caractère *autarcique* des notations mathématiques dans les conceptions de Leibniz : « Avec l'aide d'un tel système de signes, les déductions et démonstrations, les vérifications et épreuves, ainsi que d'autres opérations logiques, se font sans onérer nos pouvoirs de raisonnement et jugement. Tout s'y fait à partir des caractères, et tout se déroule au niveau des caractères eux-mêmes.

Mais si la lecture de ces différents écrits philosophiques a, conformément à notre dessein, incontestablement approfondi l'analyse théorique relative à l'algèbre et à ses constituants amorcée par l'étude des textes de Frege, ces écrits se sont révélés cependant insuffisants pour nourrir épistémologiquement notre étude didactique du rapport au symbolisme algébrique, en particulier parce que le discours constituant la plupart des travaux

épistémologiques précités relevait plutôt d'une réflexion philosophique d'ordre général que d'une pensée épistémologique spécifique de l'écriture symbolique.

Si l'on voulait étudier les symboles algébriques et le rapport au symbolisme en s'appuyant sur les expériences à partir desquelles ils s'édifient, il nous semblait primordial que l'étude théorique susceptible de charpenter notre recherche fut sous-tendue par un examen de la genèse des symboles, ceux-ci étant perçus en tant qu'éléments actifs de l'édification des mathématiques. C'est pourquoi, pour approfondir notre réflexion épistémologique, nous nous sommes intéressés aux travaux de Michel Serfati, lequel fait référence à certaines questions épistémologiques soulevées par les auteurs cités *supra*, tout en proposant une réflexion rétrospective, d'un mathématicien, relative à la mise en place de l'écriture algébrique.

Dans le cadre de sa thèse de doctorat intitulée *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Michel Serfati explicite « en quoi l'écriture symbolique a décisivement contribué à l'invention en mathématique même ». Il y fait une étude épistémologique, par le biais de son évolution historique, de la constitution de l'écriture symbolique mathématique. Michel Serfati propose un découpage de l'organisation symbolique en six volets, dénommés *figures de la représentation* -un découpage exhaustif pour la description de la symbolique en vigueur après Descartes. En empruntant les termes de M. Serfati, ce sont : la représentation du requis (c'est-à-dire l'inconnu), celle du donné (les analyses épistémologiques soulignent toutes les difficultés sous-jacente à la conception relative à une telle représentation), celle des instructions opératoires élémentaires, de l'enchevêtrement des instructions (à travers notamment la mise en place des parenthèses), enfin de la mise à égalité et de la représentation des concepts composés -un problème résolu après Descartes, seulement.

Cette étude a montré à quel point la conception et la mise en place de ces différentes figures de loin n'a pas été de soi. Dû aux limitations du présent article, nous n'en présenterons que quelques facettes dans ce qui suit.

IV- Articulation entre didactique et épistémologie

IV.1 - Une (re)lecture épistémologique de quelques travaux didactiques

La lecture de ces différents écrits philosophiques et épistémologiques ne pouvait se faire sans pointer certaines résonances avec quelques écrits didactiques explorés auparavant.

Notre problématique s'est ainsi trouvée naturellement évoluer au fil de la recherche, d'une étude du rapport des élèves au symbolisme algébrique à l'articulation des réflexions didactiques et épistémologiques relativement au symbolisme.

Nous avons alors procédé, dans un premier temps, à une relecture épistémologique des travaux didactiques menés dans le domaine du symbolisme, en nous servant du découpage des figures de la représentation proposé par M. Serfati comme grille d'analyse. Cette examen, qui a consisté à mettre en regard, pour chaque figure de la représentation, les travaux didactiques associés, nous a notamment permis de déceler dans des réponses d'élèves, des modes de raisonnement similaires à ceux mis en évidence par les travaux épistémologiques. Ainsi, par exemple, avons-nous exploré, sous une perspective épistémologique, la difficulté de certains élèves à aborder la question de la représentation d'un nombre « arbitraire mais fixé » ou encore les réticences, bien repérées, de certains autres à percevoir la symétrie que véhicule la représentation de la mise à égalité. L'exemple que nous détaillons ci-après est relatif à la représentation du requis.

De l'analyse épistémologique relative à la représentation de l'inconnu, nous retenons une double conception de l'« inconnu ». Face à la présence de l'« inconnu » dans un texte mathématique, il convient de distinguer, comme le note Serfati, la **part d'inconnu** que le texte recèle et la **substance inconnue** qu'il contient. En d'autres mots, un texte mathématique peut comporter dans sa structure quelque chose qui n'est pas donnée, que le lecteur ne connaît pas (c'est la part d'inconnu dans le texte). Mais cet inconnu est différent de la substance inconnue dans la mesure où celle-ci est précisément « la valeur d'une grandeur, permanente dans le texte, mais inconnue » [Serfati, 1997, p.45]. Comme l'observe Serfati :

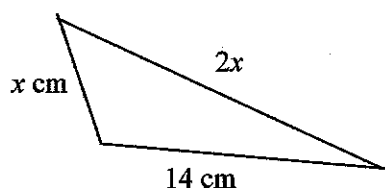
« Si seule la seconde interprétation nous paraît aujourd'hui aller de soi, la confusion entre les deux conceptions est à la fois constante et implicite chez Diophante qui (...) n'utilise jamais qu'un seul signe pour désigner l'inconnue (ou l' "inconnu"). (...) En vérité, Diophante, pour qui le z est à la fois un signe et une marque dans le texte – signe d'une grandeur inconnue d'une part, marque d' "inconnu", d'autre part – se trouva ainsi contraint à ce que nous considérons aujourd'hui comme de véritables acrobaties dans le calcul. » [Ibid., p. 45]

Si Serfati affirme que « seule la seconde interprétation nous paraît aujourd'hui aller de soi », c'est sans doute parce que le « nous » auquel il se réfère c'est le « nous, mathématiciens ». Toutefois, à travers les travaux de K. Stacey et M. MacGregor [1997], nous verrons que cette confusion n'est pas rare parmi les élèves, qui ont souvent tendance, un peu comme Diophante, à associer au signe d'inconnu de multiples référents.

Afin d'étayer nos propos nous nous intéresserons à trois énoncés de problèmes (nommés, comme dans l'original, problèmes TRIANGLE, MARK et BUS) proposés à des étudiants australiens âgés de 13 à 15 ans. Ces problèmes se veulent, selon Stacey et MacGregor, conforme aux problèmes fréquemment posés lors de l'introduction de l'algèbre au collège. Nous analyserons plus précisément les réponses de quelques élèves recueillies lors d'entretiens ultérieurs à la résolution des problèmes¹.

Problème TRIANGLE

The perimeter of this triangle is 44 cm. Write an algebraic equation and work out x .



..... $x = \dots\dots$

Problème MARK

Some money is shared between Mark and Jan so that Mark gets \$5 more than Jan gets. Jan gets \$ x . Use algebra to write Mark's amount. If the money to be shared is \$47, how much would Jan get? How much would Mark get?

Problème BUS

A bus took students on a 3-day tour. The distance travelled on Day 2 was 85 Km farther than on Day 1. The distance travelled on Day 3 was 125 Km farther than on Day 1. The total distance was 1410 Km. Let x stand for the number of Km travelled on Day 1.

Use algebra to work out the distance travelled each day.

Observons que tous les problèmes indiquent (plus ou moins explicitement) l'inconnue² à prendre en compte (dans les problèmes MARK et BUS la dénomination est d'ailleurs explicite). Toutefois, les élèves ne respectent pas toujours ces indications et souvent résolvent les problèmes en accordant au signe de l'inconnue (fourni par l'énoncé) différentes interprétations.

Plus précisément, pour le problème BUS, Stacey et MacGregor soulignent que quelques élèves ont écrit l'équation $x + 85 + 125 = 1410$ pour le résoudre, indiquant ainsi, selon elles, que la lettre x représente pour ces élèves toutes les quantités inconnues du problème.

¹ Nous invitons le lecteur à se reporter au document original pour une description plus précise de l'expérimentation.

² Observons que l'inconnue ne correspond pas au requis dans tous les problèmes (notamment dans le problème BUS, où il est demandé de trouver la distance parcourue chaque jour).

Pour illustrer cette même catégorie d'interprétation, les auteurs de l'expérimentation citent également la réponse de l'élève Dean, que nous retranscrivons ci-après.

« For TRIANGLE, he works out x to be 10 but writes down his solution as $x = 30$. He then says that is wrong, and writes $x = 10 \times 3$ as his final answer to the problem. He explains, "It is three lots of 10". » [K. Stacey et M. MacGregor, 1997, p. 194]

Selon Stacey et MacGregor, même si Dean semble savoir que la longueur représentée par x cm mesure 10 cm et que celle représentée par $2x$ mesure 20 cm, la lettre x sert à représenter, pour lui, tout ce qui n'est pas explicitement donné dans le problème. En d'autres mots, la lettre x sert à représenter la part d'« inconnu » du problème.

IV.2 - L' épistémologie en tant qu'outil dans la conception de tâches³

Mais la contribution des travaux de M. Serfati à notre étude ne s'est pas limitée à cette mise en regard des deux champs de recherche. Après avoir étudié, à travers divers exemples, dans quelle mesure l'analyse épistémologique pouvait apporter des éléments nouveaux à l'étude didactique de certaines productions d'élèves, il convenait d'approfondir cette analyse, en proposant des tâches, *lato sensu*, susceptibles d'enrichir nos connaissances concernant le rapport des élèves au symbolisme.

Pour cela, nous nous sommes détachés d'une analyse « linéaire » des différentes « figures de la représentation » pour amorcer une étude « transversale », en dégagant quelques idées repérées et décrites de façon plus ou moins explicite tout au long de l'étude de chacune de ces figures. Et, plutôt que d'envisager des exercices destinés à caractériser chaque figure, nous avons choisi d'élaborer des situations « diagonales » vouées à illustrer trois idées dégagées de l'analyse épistémologique du symbolisme algébrique. En particulier, nous nous sommes intéressés à examiner la question des deux démarches théoriques d'exploration d'une écriture symbolique (la démarche analytique —qui est celle théoriquement adoptée par l'auteur— et la démarche synthétique —qui est celle théoriquement adoptée par le lecteur), ainsi que la question de l'usage de lettres dans la résolution d'un problème mathématique et enfin celle de substitution dans la manipulation de symboles algébriques. L'analyse épistémologique s'est avérée, à ce stade de notre recherche, fondamentalement architectonique : nous avons associé, à chaque idée épistémologique, différents « types de tâches », en mettant l'accent sur différents volets de chaque idée. Nous commencerons, dans le présent article, par examiner la dernière question *supra* citée en présentant les caractéristiques mises en exergue par l'étude

épistémologique de la substitution, opération qu'on dirait aujourd'hui banale en mathématiques, apparue avec Leibniz et qui constitue une part de la puissance de la méthode mathématique. Nous traiterons ensuite de la question relative à la double démarche d'exploration de l'écriture symbolique en pointant les diverses articulations avec la didactique.

IV.2.1 - L'Art Combinatoire

Prenons par exemple⁴, l'équation algébrique suivante, et intéressons-nous à la recherche de ses racines multiples:

$$4. (x+1)^3 - 4.x^3 - 1 = 0$$

Après quelques manipulations algébriques, nous constatons que cette équation, en fait du second degré admet une racine double de valeur $-\frac{1}{2}$.

A présent, appliquons-lui une première substitution, et plus précisément une littéralisation⁵. Aux lieux occupés par le nombre de signe 3, vient s'inscrire la lettre n , signe d'une valeur fixée mais quelconque. Nous nous retrouvons ainsi face à une équation de degré $n-1$:

$$4. (x+1)^n - 4.x^n - 1 = 0$$

A travers la littéralisation, non seulement un nouvel objet a été créé (une équation de degré $n-1$) mais la problématique qui lui était associée a également été modifiée. Sur l'objet d'abord : l'équation obtenue, qui est une forme canonisée de l'équation de départ, se veut une équation dite « indéterminée ». En remplaçant le nombre de signe 3 par la lettre n , non seulement nous obtenons une nouvelle équation, mais toute une famille d'équations. Comme le note Serfati, la substitution, dont la motivation se plaçait initialement purement au niveau combinatoire (remplacer le chiffre 3 par la lettre n , à chaque occurrence), aura transformé un unique individu en toute une espèce, l'équation ainsi obtenue étant une extension de la première (et en sens inverse, l'équation initiale étant un cas particulier de sa transformée, une instantiation). En même temps que l'objet a subi une modification, la problématique initiale a été elle aussi transformée. A présent, nous pouvons reformuler notre questionnement initial comme ceci : peut-on choisir l'entier indéterminé (de signe n) pour que la nouvelle équation admette aussi une racine multiple ?

³ Dans le sens large du terme.

⁴ Cet exemple, ainsi que son analyse est discuté avec plus de détails dans [Serfati, 1997].

⁵ Terme introduit par M. Serfati dans [Serfati, 1997] pour indiquer la substitution, dans le texte, d'un chiffre par une lettre.

Toujours dans une perspective d'extension, nous aurions très bien pu, plutôt que littéraliser à la place de l'exposant (en remplaçant le nombre de signe 3 par la lettre n), littéraliser à la place du nombre de signe 1, c'est-à-dire attribuer au lieu du second 1 de l'équation un paramètre de valeur fixée mais indéterminée. Nous obtiendrions alors :

$$4. (x+1)^3 - 4x^3 - a = 0$$

Nous avons encore affaire ici à une équation de degré deux, dépendante à présent d'un paramètre de signe a . A l'instar de la première substitution, nous pouvons dire que le résultat de celle-ci est une extension de l'originale, de même que l'équation de départ se veut une instantiation numérique de la première (où la valeur de a est égale à 1). La question concernant les racines multiples se traduit désormais par : peut-on déterminer les nombres indéterminés de signe a pour tels que l'équation admette une racine multiple ?

Finalement, nous appliquerons une dernière substitution à l'équation de départ, la composée des deux substitutions précédentes, une succession de deux littéralisations, au terme desquelles nous obtenons :

$$4. (x+1)^n - 4x^n - a = 0$$

En interprétant n comme donné et a comme requis. la question des racines multiples de cette nouvelle équation de degré $n-1$ peut se traduire par : peut-on déterminer les nombres de signe a pour que, l'entier de signe n étant donné, l'équation admette une racine multiple ?

A travers ces différents exemples de substitution, nous avons voulu souligner l'importance de cette opération, impossible dans l'univers des énoncés rhétoriques et si commune dans les pratiques mathématiques d'aujourd'hui. En effet, à travers une double littéralisation, l'équation de départ, presque entièrement chiffrée, a acquis un nouveau statut : elle représente une classe d'équations de paramètres n et a . La question initiale des racines multiples a, en conséquence, aussi été élargie et, comme le souligne Serfati :

« (...) [elle] trouve alors une réponse non triviale et satisfaisante⁶, ce qu'on n'avait pas observé dans les tentatives intermédiaires. La réussite obtenue dans la transformée ultime se subsume en la création d'un

⁶ En effet, l'équation $4. (x+1)^n - 4x^n - 1 = 0$ n'admet de racines multiples que lorsque $n = 3$. De la même façon, l'équation $4. (x+1)^3 - 4x^3 - a = 0$ n'admet de racines multiples que si $a = 1$. Par contre, l'équation $4. (x+1)^n - 4x^n$

$- a = 0$ admet des solutions non triviales. n étant fixé, on trouve $a_k = \frac{(-1)^{k+n-1} i^{n-1}}{\left(2 \sin \frac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}}$, pour $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$.

Nous renvoyons le lecteur aux travaux de M. Serfati pour plus de détails. Note de l'auteur.

problème neuf, intéressant, et qui ne résultait nullement ni de l'examen initial, ni d'une interprétation naturelle de la source. » [Serfati, 1997, p. 307].

Et, plus loin, il conclut :

« (...) la transformée (...) montre alors comment la réussite est en fait venue couronner un certain nombre d'essais, au hasard, portant substitution à presque tous les lieux possibles occupés par des chiffres dans *Béta*⁷. Un exemple qui illustre donc l'intérêt de la pratique aveugle des métamorphoses, à l'effet de créer des problèmes neufs à résoudre. » [ibid., p. 308]

Si cette série de substitutions semble à nos yeux aller de soi, elle n'était pas pratique courante au XVII^e siècle. En effet, l'idée qu'une écriture symbolique puisse être à l'origine de nouvelles constructions mathématiques était quasiment inconcevable avant Leibniz, ses prédécesseurs ayant seulement envisagé une direction unilatérale (du registre des significations vers le symbolique). Leibniz fut le premier à pratiquer cette « nouvelle démarche », procédant à des manipulations symboliques sans y apporter constamment des significations. Cette manipulation « à l'aveugle », une procédure entièrement mise en oeuvre dans le registre symbolique (ce que Leibniz désigna sous le nom d'Art combinatoire), vint donc conférer au texte symbolique une puissante caractéristique : son autonomie. A ce sujet, Serfati observe :

« Ainsi avait-il [Leibniz] reconnu au texte symbolique cette faculté cruciale de "véhiculer essentiellement des combinaisons d'informations portant sur [sa] propre structure", que souligne G. Granger⁸. Quoi qu'il en soit, agissant de la sorte, Leibniz fut conduit à prendre en compte le registre symbolique en tant que tel, c'est-à-dire pourvu d'une existence certaine *per se* : dès lors, l'autonomisation du texte symbolique et l'élargissement, ainsi compris, de la pratique de l'Art combinatoire, furent à l'évidence, historiquement liés de façon indissoluble. » [ibid., p.375. Italiques dans l'original]

Ainsi avons-nous vu, à travers l'analyse épistémologique, à quel point la procédure de substitution s'est révélée cruciale à l'avancement des mathématiques. Un bon géomètre doit, Leibniz aurait sûrement acquiescé, avoir la faculté de se détacher (tout du moins momentanément) du monde des significations se permettant, dans un premier temps, de produire « automatiquement » des formules sans égard à leur signification et dont la validation éventuelle se ferait, dans un second temps, par l'auteur lui-même ou la

⁷ Notation utilisée par M. Serfati qui renvoie à l'équation de départ. Note de l'auteur.

⁸ in *Essai d'une philosophie du style*. Armand Colin. Paris 1968, page 22. Note dans l'original.

communauté scientifique. C'est dans cette perspective de l'Art combinatoire et toute la puissance qu'il révèle⁹ que nous avons développé l'exercice suivant.

Imaginez-vous dans un monde sans grandes puissances : où les carrés, les cubes, etc. n'existent pas. Un monde où toutes les puissances sont écrites en fonction de la seule puissance existante : celle du premier degré. En d'autres mots, c'est un monde où x existe, mais où x^2 , x^3 , x^4 , etc. n'existent pas. Dans ce monde où x est la référence absolue, on n'a qu'une information : on sait que $x^2 = 2x - 2$.

a) Dans ce monde, comment peut-on écrire x^3 ?

b) Complétez le tableau de multiplication suivant :

	1	x	x^2	x^3
1	1	x	$2x - 2$	
x				
x^2				
x^3				

c) A l'aide du tableau précédent, pouvez-vous déterminer combien vaut, dans ce monde, la somme :

$$-x^3 + 2x^2 - 2x ?$$

d) Dans ce monde, comment peut-on exprimer une puissance quelconque de x ?

Précisons que notre démarche, en construisant cet exercice, était de traduire, dans la pratique, l'idée leibnizienne d'Art combinatoire. Certes l'exercice à développer se devait d'évoquer la substitution ; cependant, afin de traduire toute la puissance de cette manipulation (plus précisément en ce qui concerne le « calcul aveugle »), les tâches ne pouvaient être trop « simples », telle la substitution d'un chiffre par une lettre dans une expression algébrique (la littéralisation, qui peut être abordée par des élèves de collège) ou l'application numérique d'une écriture algébrique (l'instanciation, souvent rencontrée en 2^{nde}, à travers des tâches relevant du calcul d'une expression pour une valeur donnée de la variable en jeu).

Notre projet était en fait ici de dépasser le seul cadre d'instanciation-extension, dont l'intérêt est au demeurant non négligeable, et de proposer un exercice de substitution où le principe de manipulation quasi aveugle des expressions algébriques est davantage mis en évidence.

⁹ Leibniz parle d'ailleurs d' « autarcie ».

Le principe de « substitution à l'aveugle » doit cependant être ici compris avec une certaine réserve. Si les manipulations combinatoires présentées jusqu'alors dans l'analyse épistémologique révélaient en quelque sorte une manipulation « automatisée » (à chaque lieu du signe 3 venait, par exemple, s'inscrire la lettre n), la substitution dans cet exercice n'est pas immédiate. En ce qui concerne notamment la première question (et cela s'étendra aux questions suivantes), le seul examen visuel de l'écriture symbolique (x^3) ne suffit pas pour « annoncer le besoin de substitution ». Une étape intermédiaire de ré-écriture (explicite ou non) s'avère nécessaire : il faut, en effet décomposer x^3 en produit de x par x^2 pour, ensuite seulement, substituer au lieu de x^2 l'expression $2x-2$, aboutissant à l'expression factorisée $x(2x-2)$. Or cette étape n'est pas ultime dans la résolution et le reconnaître est à nos yeux une des difficultés essentielles de cet exercice. Il s'agit ici en effet de reconnaître x^2 dans l'expression factorisée (c'est-à-dire prévoir son développement : $2x^2-2x$) pour ensuite substituer au lieu de x^2 l'expression $2x-2$, aboutissant à l'expression finale de x^3 « selon les règles du jeu », *i.e.* $2x-4$.

L'application successive de substitutions n'est pas non plus spécifique à l'expression x^3 . En effet, plus les puissances de x seront élevées, plus la résolution de la question demandera des substitutions successives (surtout si l'on ne réinvestit pas les réponses précédemment obtenues). A l'origine de cette difficulté en est une autre, à notre sens centrale dans l'exercice : sa résolution exige qu'à tout moment, l'élève ne perde pas de vue l'objet à remplacer, ceci demandant de sa part une capacité à repérer cet objet dans la totalité du texte symbolique, qu'il soit immédiatement visible ou masqué par des manipulations algébriques que l'élève devra alors pré-voir.

Enfin, comme le note Serfati, « Et le résultat de la substitution combinatoire peut parfois paraître stupéfiant à son auteur même, découvrant une propriété à laquelle il n'aurait jamais pensé » [ibid., p. 376]. Quelle surprise l'élève n'aura pas lorsqu'il découvrira que, dans ce monde, x^4 est tout simplement -4 ¹⁰!

IV.2.2 - Auteur/lecteur d'une expression algébrique

Dans l'édition de 1526 du *Behennde unnd hüpsch Rechnüg auff allen Kauffmanschafften*, premier traité imprimé (d'Arithmétique) contenant les signes de la croix (+) et du trait (-), Widmann met à la disposition du lecteur une succession d'assemblages

¹⁰ On reconnaît ici la construction de l'anneau quotient $\mathbb{R}[x]/x^2-2x+2$.

élémentaires et leur « traduction ». Ainsi, à côté de l'assemblage élémentaire $3 + 30$, se trouve l'explication de sa notation : « Ajoutez le nombre 30 au nombre 3 ». Il en va de même pour l'expression $4 - 17$, que le lecteur devait interpréter, selon Widmann, comme l'instruction : « Retranchez le nombre 17 du nombre 4 ».

Sous la plume de Clavius, dans l'*Algebra* (1608), nous retrouvons à nouveau des instructions d'addition ou soustraction, cette fois-ci cependant agrémentées de signes cossiques. Ainsi, l'expression $120 - 7$, par exemple, devait s'interpréter, si l'on reprend l'explication première des « figures » symboliques fournie par Widmann, comme l'instruction suivante : « De la valeur de l'inconnue, retranchez le nombre 7 ».

M. Serfati résume, dans les deux cas, la visée de l'auteur :

« (...) fournir au lecteur la représentation symbolique d'une *instruction* élémentaire, c'est-à-dire d'une règle pour l'exécution d'une action ou opération (ici la soustraction) portant sur deux quantités, qui sont, soit des nombres connus, soit des grandeurs inconnues. » [Serfati, 1997, p.57].

Ainsi, dès la fin du XVI^e siècle, le lecteur placé devant des assemblages élémentaires tels ceux précités, était en mesure de les interpréter, c'est-à-dire, de leur apporter des significations.

Une telle interprétation rhétorique s'étendit aux assemblages de niveau supérieur à un¹¹, une fois prescrit un ordre¹² aux assembleurs, *i.e.*, aux signes opératoires. Ainsi, face à l'expression : « $(2 + x) \cdot 3,5$ », le lecteur interprétait : « Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe x . Multiplier ensuite le résultat obtenu par le nombre de signe 3,5. »¹³ De façon générale,

« (...) l'interprétation des assemblages dûment complétés ainsi élaborés s'est donc trouvée être l'exécution d'instructions composées, c'est-à-dire d'une succession d'instructions élémentaires dans un ordre séquentiel prescrit. » [ibid., pp.74-75]

L'expression rhétorique de l'interprétation de l'écriture symbolique (appliquée par le lecteur) s'est caractérisée, nous l'avons vu, par une succession d'instructions prescrites dans un ordre bien défini. En effet, pour déchiffrer une expression algébrique, le lecteur part des

¹¹ Reprenons la définition de niveau d'un assembleur fournie par M. Serfati : « les premiers [assembleurs d'une Forme *a priori* syntaxiquement correcte] à être considérés sont ceux de premier niveau, c'est-à-dire ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant et sans qu'il existe d'autres assembleurs avec cette propriété. L'assemblage et la Forme associée sont alors dits de premier niveau. Les assembleurs de second niveau sont ensuite ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant, et tels qu'entre eux, il n'existe que des assemblages de premier niveau¹². Ainsi définit-on assemblages et Formes de second niveau Et ita porro... » [Serfati, 1997, pp. 179-80]. [12] Ou des Lettres-Chiffres ; il faudra néanmoins qu'au moins un assemblage de premier niveau soit effectivement présent. Note dans l'original.

¹² Afin de lever toute ambiguïté.

¹³ Exemple cité dans [Serfati, 1997, p.74].

assembleurs de plus bas niveau, les plus internes et reconstruit progressivement la hiérarchie, appliquant une démarche synthétique¹⁴ (cf. Serfati). Ainsi, l'expression $[5(2+x)]^2$ sera interprétée rhétoriquement par le lecteur à travers la série d'instructions: « Ajoutez le nombre de signe 2 au nombre de signe x. Multipliez le résultat par le nombre de signe 5. Elevez le dernier résultat au carré ».

Or l'expression rhétorique de l'interprétation d'une écriture symbolique, bien que conforme à la visée de l'auteur, révèle un ordre de description inverse à l'expression rhétorique de celle-ci. Prenons l'exemple précité. En effet, si le déchiffrement de l'écriture symbolique par le lecteur commence par l'interprétation des assembleurs de plus bas niveaux (l'instruction d'addition), la volonté première de l'auteur est de représenter symboliquement un « carré » (dont l'exponentié est lui-même le résultat de la multiplication de deux facteurs, etc.), signe qui structure l'expression. En d'autres mots, si l'auteur d'une écriture algébrique est guidé par la signification de celle-ci, le lecteur, quant à lui, l'aborde en commençant par les assembleurs les plus internes, les plus immédiatement reconnaissables sur le plan combinatoire¹⁵.

Nous pouvons illustrer cette double démarche, analytique et synthétique, à travers l'examen de ce qu'on appellera « arborescence combinatoire »¹⁶ d'une expression donnée.

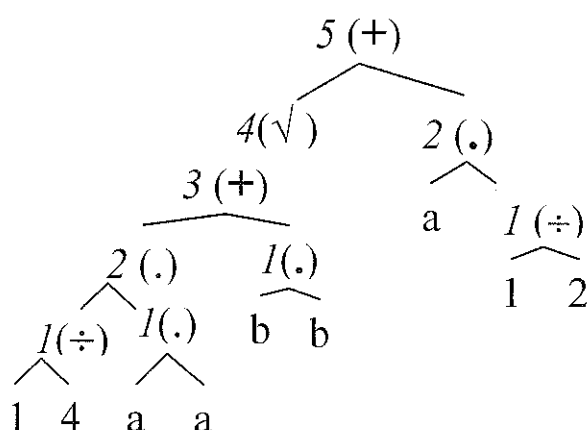
Prenons, par exemple, l'expression fournie par Descartes de la racine de l'équation $z^2=az+bb$, et l'arborescence correspondante à cet assemblage¹⁷ :

¹⁴ Une démarche qui se veut, soulignons-le-le, purement théorique, rarement effectuée dans la pratique.

¹⁵ Cette double ordination, rattachée aux démarches de reconstruction et de décomposition, traduit deux démarches théoriques, dont la mise en pratique n'est dans les faits ni purement synthétique ni purement analytique. Comme le note Serfati, la lecture effective d'une écriture symbolique relève d'un mélange entre analyse et synthèse, « (...) la synthèse venant après-coup consolider localement les avancées de l'analyse. » [Serfati, 1997, p.101]. De la même façon, pour ne pas perdre de vue la totalité de son expression, l'auteur doit également considérer les assembleurs de plus bas niveau en même temps que ceux conceptuellement plus importants.

¹⁶ Ailleurs repérée.

¹⁷ Nous avons rajouté à l'expression originale des points multiplicatifs afin de faciliter l'analyse syntaxique, et avons également indiqué les niveaux associés à chaque assembleur.



$$\frac{1}{2}.a + \sqrt{\frac{1}{4}.a.a + b.b}$$

1 2 5 4 1 2 1 3 1

Le diagramme présente une racine, correspondant à la représentation de l'assembleur de plus haut niveau puis des branches et feuilles, celles-ci correspondant aux assembleurs de plus faibles degrés (un, dans le cas du signe a , ou zéro).

Les deux démarches évoquées *supra* correspondent alors à deux façons d'explorer l'arborescence.

La procédure analytique, théoriquement propre à l'auteur de l'expression, consiste tout d'abord à examiner la racine, ici de niveau cinq, puis à décrire l'assembleur dont le niveau lui est directement inférieur (c'est-à-dire le signe relatif à racine carré – de niveau quatre – ou celui de la multiplication – de niveau deux). Il s'agit ensuite de choisir, arbitrairement, celle des deux feuilles associées à cet assembleur qu'on va décrire, en commençant, par exemple, par celle de droite, où figure le signe opératoire représentant la multiplication (de niveau deux), puis par la lettre de signe a , pour ensuite remonter à l'assembleur de niveau deux, puis alors descendre au signe opératoire de niveau un et à ses feuilles. Après l'examen de l'assembleur de plus faible degré, l'auteur doit remonter à la racine pour décrire la branche gauche, en commençant par l'assembleur de niveau quatre, puis trois, etc. Soulignons ici que, comme le note Serfati: « la procédure décroissante¹⁸ ne pourra être purement analytique, au sens usuel de ce terme: pour « descendre » de la racine aux feuilles, il faut en effet chaque fois remonter à des niveaux supérieurs intermédiaires ».

D'un autre côté, la procédure synthétique du déchiffreur consiste à examiner en premier lieu toutes les feuilles associées aux assembleurs combinatoirement immédiats, puis à explorer tous les assemblages de niveau deux. Or les feuilles ne sont pas toujours « voisines » sur l'arborescence; ainsi, la procédure ascendante n'est pas davantage purement synthétique dans

¹⁸ Nous dirons descendante. Note de l'auteur.

la mesure où elle ne peut être décrite par un chemin direct, partant des feuilles et « visant » la racine.

Dans l'exercice que nous avons conçu, reproduit ci-après, non seulement la visée de l'auteur (exprimée en langage naturel) est fournie, mais l'expression algébrique correspondante l'est également. Le travail de l'élève consiste alors à mettre en relation l'expression algébrique et sa description rhétorique (deux « produits » théoriquement fournis par l'auteur), parmi un choix d'expressions et de phrases données. L'enjeu de cet exercice se traduit alors, dans le contexte de la double démarche d'exploration d'une écriture algébrique, comme suit: dans quelle mesure un élève¹⁹ qui *a priori* est placé en position de lecteur (puisque'il est face à des écritures symboliques déjà fournies), parvient à se dégager de l'ordre de l'interprétation qu'il en fait pour reconnaître la « structure » de l'expression qui lui est donnée et donc se placer en tant qu'auteur de l'expression ?

Pour les questions suivantes, associer, à chaque expression mathématique, la phrase qui la décrit. Si vous associez « autre », à une expression, préciser la phrase qui la décrit dans le rectangle prévu :
a et *b* représentent deux nombres non nuls.

Question 1

A= $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$:

n°1 : L'inverse du carré de la somme de *a* et *b*

B= $\frac{1}{a^2 + b^2}$:

n°2 : La somme des inverses des carrés de *a* et *b*

C= $\frac{1}{(a + b)^2}$:

n°3 : Le carré de la somme des inverses de *a* et *b*

n°4 : Autre(s) :

¹⁹ L'expérimentation menée dans le cadre de notre thèse montre que cet exercice, présenté tel quel, peut être abordé par des élèves dès la classe de 4^{ème}.

Question 2

$$A = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 : \boxed{}$$

n°1 : Le tiers de la somme des carrés de a et b

$$B = \frac{a^2 + b^2}{3} : \boxed{}$$

n°2 : La somme des carrés des tiers de a et b

$$C = \frac{(a+b)^2}{3} : \boxed{}$$

n°3 : La somme des tiers des carrés de a et b

$$D = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} : \boxed{}$$

n°4 : Le tiers du carré de la somme de a et b

n°5:Autre(s) :

Question 3

$$A = \frac{1}{ab} : \boxed{}$$

n°1 : L'opposé de l'inverse du produit de a et b

$$B = \frac{1}{-a-b} : \boxed{}$$

n°2 : L'inverse du produit des opposés de a et b

$$C = \frac{-1}{ab} : \boxed{}$$

n°3 : L'opposé du produit des inverses de a et b

n°4 :Autre(s)

IV.3 - L' épistémologie en tant qu'outil dans l'analyse de l'accès au symbolisme

Certaines des tâches citées *supra*, dont la conception repose, nous l'avons vu, essentiellement sur les analyses épistémologiques portant sur le symbolisme algébrique, ont été présentées à des élèves de 4^{ème}, dont l'introduction au symbolisme est très récente, et également à des élèves de 2^{nde}, *a priori* déjà familiers avec l'écriture symbolique. Nous explorerons à présent la contribution épistémologique dans l'étude des résultats des expérimentations menées, en commençant par l'examen des réponses apportées à l'exercice ci-dessus mentionné par un élève de 4^{ème} lors d'un entretien individuel²⁰.

L'idée épistémologique liée à la double ordination de l'exploration d'une écriture symbolique nous a en effet permis, entre autres choses, d'analyser, sous le prisme des démarches analytique et synthétique, la « reconstruction » des expressions algébriques par l'élève de 4^{ème}, fussent-elles données en français ou sous forme symbolique.

Considérons dans un premier temps la démarche adoptée par l'élève lorsqu'il cherche à traduire en français l'expression : « $\frac{1}{a^2 + b^2}$ », c'est-à-dire, lorsque l'élève adopte une

démarche allant de la synthèse vers l'analyse. En lisant à haute voix l'expression fournie, dit : « *La somme du carré de a plus b au carré. L'inverse de la somme du carré de a et b* ». Ainsi, lorsque l'élève doit adopter la position d'auteur, il ne traduit pas exactement la démarche théorique de l'auteur, en ce sens où il n'attribue pas immédiatement les différents niveaux aux assembleurs associés. L'élève commence certes par traduire l'assembleur de plus haut niveau en langage naturel (« l'inverse »), mais la suite de sa traduction est encore fortement influencée par sa position de lecteur. En effet, lorsque l'élève aborde la suite de l'expression, sa traduction s'avère un mélange entre analyse et synthèse (« la somme de a au carré plus b au carré »). L'élève commence par traduire, dans une démarche d'auteur, l'assembleur de niveau deux (la somme), mais abandonne momentanément cette position pour traduire l'expression telle qu'il la lit (« a au carré plus b au carré »). Ce n'est que dans un second temps que l'élève homogénéise sa « position » et propose la phrase attendue en suivant le modèle des autres phrases proposées dans l'énoncé : « l'inverse de la somme du carré de a et b ».

²⁰ Nous invitons le lecteur à se reporter à l'intégralité de notre travail [Bardini, 2003] pour plus de détails concernant l'expérimentation menée.

D'un autre côté, lorsque l'élève adopte la démarche inverse, partant de l'analyse vers la synthèse²¹, cherchant à traduire symboliquement l'expression fournie en français : « La somme des tiers des carrés de a et b », dit : « *Et après le D c'est... la somme... des tiers... donc la somme. Donc deux expression mis... divisées par 3 avec un plus au milieu. Après il y a a au carré et b au carré.* »

L'élève ne traite pas l'intégralité de la phrase (« c'est la somme... des tiers... donc la somme. ») et semble avoir besoin, pour poursuivre sa lecture, non seulement de représenter l'assembleur principal et ses arguments (« Donc la somme. Donc deux expressions mis... »), mais toute la syntaxe de l'expression. Une fois les assembleurs de niveau 3 et 2 déterminés (même si ce dernier est une simple ébauche : « deux expressions »), l'élève est capable de saisir l'allure générale de l'expression algébrique, partant de l'assembleur de niveau 2 («... divisées par 3 ») et rappelant l'assembleur principal (« avec un plus au milieu »). En dernier lieu, l'élève traite l'assembleur de niveau 1, qui semble venir comme accessoire dans la composition de l'expression algébrique (« après il y a a au carré et b au carré ») dont le dessin général paraît pour lui tout à fait clair.

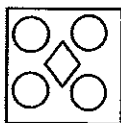
L'analyse épistémologique nous a également conduit à mettre en lumière un type de description intermédiaire entre le rhétorique et le symbolique, présent dans quelques réponses d'élèves, qui tient compte non seulement de la présence de symboles dans le texte produit, mais qui considère aussi l'ordre dans lequel apparaissent les traductions des différents « assembleurs » d'une expression algébrique. Ceci nous a permis de distinguer entre des réponses d'élèves qui auraient pu être, à première vue, mises sur le même plan.

Nous pouvons illustrer ceci en examinant quelques réponses d'élèves de 4^{ème} et de 2^{nde} à la question d de l'exercice reproduit ci-après.

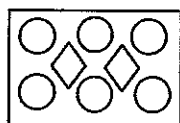
²¹ Un démarche qui ne se veut pas unilatérale : l'édification de l'expression algébrique se révèle le produit d'un constant aller-retour entre la phrase rhétorique et les composantes de l'expression algébrique progressivement assemblées.

Exercice

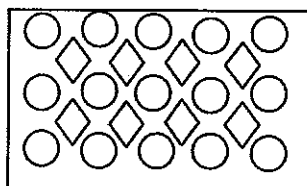
Une marque de chocolat propose des tablettes de différentes tailles, contenant toutes des pépites de chocolat et des noisettes disposées ainsi :



tablette 2x2



tablette 3x2



tablette 5x3

et ainsi de suite.....

Légende : Les cercles représentent les noisettes, les losanges les pépites.

La 1^{ère} tablette est notée 2x2 car il y a 2 noisettes en longueur et 2 noisettes en largeur.

La 2^{nde} tablette est notée 3x2 car il y a 3 noisettes en longueur et 2 en largeur ; et ainsi de suite...

a) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans chacun de ces 3 exemples ?

Tablette 2x2 : Tablette 3x2 : Tablette 5x3 :

b) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans une tablette 11x9 ?

c) Et dans une tablette 20x17 ?

d) Si on ne connaît que le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, peut-on calculer le nombre de pépites d'une tablette? Expliquer (au dos)

e) Existe-t-il des tablettes contenant 12 pépites de chocolat ? Si oui, lesquelles ?

Soit la réponse de l'élève de 4^{ème} : « On peut connaître le nombre de pépite en soustrayant un à la largeur de la plaquette et faire pareil sur la longueur puis les multiplier ensemble car il y a toujours une rangée de moins de pépite que de noisette et une colonne de moins. ». Cet élève fournit une description rhétorique exhaustive de la méthode permettant d'obtenir le nombre de pépites d'une tablette, une fois le nombre de noisettes donné. Or il n'a pas été rare de trouver, parmi les réponses données par les élèves de 2^{nde}, des descriptions également entièrement écrites en français. Cependant, les deux types « rhétoriques » de réponses apportent des renseignements différents quant au rapport des élèves à la formule attendue. Comparons la réponse de l'élève de 4^{ème}, précitée, à celle de l'élève de 2^{nde} : « Il suffit de prendre le nombre de noisettes en longueur moins une noisette pour le bord et multiplier par le nombre de noisettes en largeur moins une pour le bord. » Cette réponse, même si elle est

également écrite entièrement en français, est sensiblement différente de la réponse donnée par l'élève de 4^{ème}. En effet, tandis que ce dernier décrit la formule plutôt comme un processus, l'élève de 2^{nde} la décrit comme s'il lisait, de gauche à droite, la formule attendue. Nous retrouvons un cas similaire illustratif du mode « quasi-littéral » de description entre pépites et noisettes dans la réponse de l'élève de 2^{nde}, qui se rapproche davantage de la formule attendue: « *Si on connaît le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, en faisant le nombre de noisettes en largeur-1 (car pour chaque rangées de noisettes on enlève une pépite ex : 3 noisettes -> 2 pépites) x nombre de noisettes en longueur-1 = nombre de pépite dans une tablette* ». Ici, non seulement la réponse s'éloigne de la description de type procédural retrouvée dans la majorité des réponses rhétoriques employées par les élèves de 4^{ème}, mais est également composée de symboles lettrés et opératoires. Ainsi, nous dirons qu'elle s'avère véritablement intermédiaire entre rhétorique et symbolique, non seulement de par sa forme mais également de par (l'ordre de) son contenu.

V - Perspectives pour une application dans les EIAH²²

A travers l'analyse de la conception des exercices envisagés, nous avons été conduits, entre autres choses, à considérer la complexité des différentes expressions algébriques proposées, en suggérant notamment que cette notion est intimement liée au type de tâche instancié par l'exercice, ainsi qu'à l'environnement dans lequel celui-ci est proposé (papier-crayon, informatique, etc.).

L'analyse de la complexité des expressions proposées dans les différents types de tâches semble ainsi nous conduire vers un questionnement plus spécifique, relatif aux divers éléments constitutifs des expressions algébriques²³, mettant en rapport trois éléments qui sont apparus, dans le chapitre précédent, comme étant intimement liés : le type de tâche envisagé, la nature des éléments constitutifs des expressions en jeu et la complexité de celles-ci. Ce questionnement peut s'étayer par les interrogations suivantes: un type de tâche étant donné, quelle(s) complexité(s) peut-on envisager pour les expressions en jeu? Quels sont les éléments qui déterminent cette complexité (niveau de l'expression, ramification de son arborescence,

²² Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain.

²³ Nous regrouperons les différents éléments des expressions algébriques en deux catégories : les assembleurs (qui, ici, n'excéderont pas le niveau trois) et les « formes » venant occuper les places ouvertes par ces assembleurs, pouvant être des lettres ou des nombres.

etc.)? De façon plus précise : quelles sont les "variables"²⁴ des expressions algébriques sur lesquelles nous pouvons jouer de façon à garder une certaine pertinence à la tâche proposée et dans quelle mesure les variations apportées sur certains éléments d'une expression algébrique influent-elles sur la complexité de celle-ci ? Finalement, en reprenant la problématique posée dans le chapitre précédent : quelles sont les limites des instanciations de certains types de tâches proposés et dans quelle mesure peut-on, à partir d'un modèle donné, en générer d'autres?

Ce questionnement multiple s'est par ailleurs vu trouver un champ d'application de toute autre nature. L'analyse approfondie de certains types de tâches et du niveau de complexité des expressions qui les composent ont en effet suscité l'intérêt de chercheurs en EIAH qui, travaillant sur la modélisation et le développement d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage de l'algèbre (projet *Lingot*), ont perçu dans cette analyse un point d'appui qui semblait leur permettre de générer de façon automatique un ensemble de tâches susceptibles d'être proposées à des élèves.

Étant donné les différents types d'éléments constitutifs des expressions algébriques, les modifications sur celles-ci peuvent se faire à deux niveaux différents: sur les assembleurs, d'une part ou sur les formes, de l'autre. Prenons un exemple : pour l'expression de niveau deux « $(a+b)^2$ », nous pouvons aussi bien envisager des modifications affectant les assembleurs (remplacer le signe d'addition par celui de la division) que celles affectant les formes (remplacer la lettre a , par exemple, par un nombre donné).

L'analyse que nous avons engagée nous a donné la possibilité d'entrevoir des « familles » de substitutions, en fonction de leurs implications. En effet, selon que les incidences de la génération automatique pouvaient porter sur la traduction rhétorique, le niveau des expressions ou encore la « nature » des assembleurs, certaines classes de substitutions ont dû être écartées.

En ce faisant, prenant en compte le caractère didactique de cette étude (et en particulier l'idée de la pertinence de certaines expressions algébriques pour des élèves que l'application informatique nous a amené à considérer), nous avons été conduits à considérer l'aspect « sémantique » des expressions, ce qui avait été écarté par principe dans les analyses épistémologiques relatives à la substitution.

²⁴ En ce sens qu'elles varient.

Conclusion

Les quelques éléments déjà obtenus semblent finalement ouvrir des perspectives de recherches encourageantes. En effet, le domaine choisi pour amorcer le prolongement de notre travail, les EIAH, nous paraît particulièrement bien adapté pour apporter des réponses à quelques interrogations découlant du présent travail. Sur le plan théorique, tout d'abord, nous avons vu que cette application nous a conduit à raffiner la question de la complexité des expressions algébriques: guidés par le pôle didactique de notre étude, nous avons par exemple vu que le concept de « niveau » d'une expression algébrique a dû être complété par la prise en compte des ramifications de l'arborescence combinatoire de celles-ci. Dans la pratique, ensuite, nous devons souligner que l'environnement informatique permet d'envisager différents « habillages » pour les types de tâches considérés. Or, non seulement nous pouvons diversifier les scénarios pour un même type de tâche, mais aussi les organiser autour de diverses autres activités algébriques où différentes compétences des élèves peuvent être étudiées.

Partant d'un questionnement purement didactique, notre recherche s'est vue progressivement caractérisée par la mise en regard de deux domaines, didactique et épistémologie –leur réunion nous étant apparue incontournable à l'édification de notre projet. Le prolongement de celui-ci semble toutefois pointer vers la mise en rapport de trois champs de recherche, la composante informatique venant s'assembler (*sumballein*) aux deux autres. Une question qui nous semble désormais naturellement émerger est la suivante : comment ces trois champs d'études, didactique, épistémologie et informatique peuvent-ils s'articuler au sein d'une même recherche ? Quelles limites et quelles perspectives se dessinent d'une telle conjonction ?

Bibliographie

- [1] André, D. (1909). *Des notations mathématiques. Énumération, choix et usages*. Paris, Gauthier Villars.
- [2] Babbage, C. (1821). On the influence of Signs in Mathematical Reasoning. *Transactions of Cambridge Philosophical Society (vol.II)*, 325-375. Cambridge.
- [3] Bardini (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique: une approche didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat. Université Paris7.
- [4] Bardini, C. (2001). *Le rapport des élèves à la factorisation en fin de Troisième*. Cahier Didirem 35. IREM Paris 7.

- [5] Cajori, F. (1928). *A History of mathematical notations* (vol. I et II). La Salle, Illinois. The Open Court Publishing Company.
- [6] Dascal, M. (1978). *La sémiologie de Leibniz*. Paris. Aubier-Montaigne.
- [7] Frege, G. (1971). *Ecrits Logiques et philosophiques*. Traduction de Claude Imbert. Paris. Seuil.
- [8] Gablik, S. (1976). *Magritte*. Boston. NY Graphic Society.
- [9] Granger, G-G. (1994). *Formes, opérations, objets*. Vrin. Paris.
- [10] Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Education Studies in Mathematics* 12(3), 317-326.
- [11] Kieran, C. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*, 3-12. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.
- [12] Radford L. and Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation* 22(2), 253-276.
- [13] Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*. 11(3), 25-53.
- [14] Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics* 22(2), 14-23.
- [15] Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Thèse de Doctorat. Université Paris I.
- [16] Stacey K. and MacGregor M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.). *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4), 190-197. Lahti.
- [17] Tonnelles, J. (1979). *Le Monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA. IREM d'Aix-Marseille.
- [18] Vuillemin, J. (1962). *La philosophie de l'Algèbre (tome I)*. Paris. Presses Universitaires de France.