SUR LA NOTION D'ESPACE(S) DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE(S)

Alain Kuzniak

IUFM d'Orléans Tours. Equipe DIDIREM Paris 7.

J'ai choisi de centrer la présentation écrite de mon exposé sur la notion d'espace de travail géométrique. Cette notion s'insère dans un cadre théorique développé pour étudier la géométrie enseignée. Pour des éclaircissements sur ce cadre et plus particulièrement sur la notion de paradigmes géométriques, déjà présentée dans ce séminaire, je renvoie aux articles parus sur ce sujet et notamment à ma note d'habilitation publiée par l'IREM de Paris VII : *Paradigmes et espaces de travail géométriques.*

Introduction

Pour résoudre un problème de géométrie, l'élève doit organiser son activité dans un espace particulièrement complexe constitué d'objets visibles et tangibles comme les figures, d'outils matériels comme les instruments de dessin ou d'outils conceptuels comme les définitions ou les théorèmes. Son travail revêt alors des formes très différentes mais complémentaires : il doit tour à tour être observateur, constructeur ou rhétoricien. Pourtant le lieu où s'effectue ce travail de la géométrie, paraît si naturel et si évident qu'il en devient transparent et quasiment invisible. Préciser et mettre en relief cet espace que nous désignerons désormais sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG) constitue la matière de cet article.

De fait, il n'existe pas un seul espace de travail géométrique. Celui-ci dépend de la géométrie de référence et, même en se limitant à la géométrie élémentaire enseignée, il est nécessaire d'envisager l'influence du type de paradigme géométrique sur l'espace de travail car la géométrie mise en jeu impose ses modes d'appréhension et de traitement des problèmes. Dans un premier temps, il faut ainsi décrire un lieu optimisé et idéalisé où la résolution des problèmes de géométrie est possible de manière adéquate et sans turbulence. Cette première approche détermine des espaces de travail de référence. Mais, les utilisateurs des ETG ainsi décrits sont des individus particuliers, parfois néophytes et souvent non-experts, il importe alors d'étudier et de comprendre leur ETG personnel. Cette étude constitue un enjeu didactique.

Un exemple : de la couture à la coupe géométrique

Nous commençons par donner un exemple extrait d'un manuel de cours complémentaire pour jeunes filles publié en 1911 et qui porte le titre rare de « géométrie expérimentale » avec le sous-titre « appliquée aux travaux de la femme ». Dans cet ouvrage, l'auteur tente d'établir un pont entre la géométrie et la coupe en couture en parlant d'une « géométrie de coupe géométrique, c'est-à-dire scientifique ».

Cet appui mutuel consiste à introduire les termes et les définitions géométriques à partir de supports liés au monde de la coupe, notamment les étoffes : c'est ainsi que les plis et les fils de l'étoffe jouent un rôle prédominant.

> *Dans la pratique, on considère les fils de chaîne, appelés simplement fils, et les fils de trame, appelés duites, comme étant perpendiculaires les uns aux autres. Quand la droite à tracer est perpendiculaire à la chaîne ou à la trame, il suffit d'épingler un fil, une duite et leur point de croisement, pour déterminer un angle droit* (p. 20).

Des expériences sont proposées pour dégager certaines propriétés comme celles des droites parallèles. Le va-et-vient entre les remarques sur les objets et les applications apparaît nettement dans les activités de construction des figures objets de la coupe comme ici le losange :

> *Il est facile de couper rapidement un losange de diagonale donnée, ou de coté connu. Remarquons, à cet effet, que si l'on fait tourner une portion de losange autour de l'une ou l'autre diagonale, la partie mobile recouvre exactement la partie fixe. Après deux plis à angle droit, on obtient quatre triangles rectangles superposés. Par suite, si l'on veut découper un losange dans une étoffe, on la plie sur elle-même pour former quatre angles droits autour d'un point ; puis, d'un seul coup de ciseaux, dirigé suivant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on coupe les quatre épaisseurs ; on déplie* (p. 63)

Les exercices mettent en œuvre les constructions découvertes pour aboutir à des objets plus complexes.

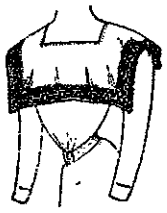


Fig. 161. — Berthe.

47. Une berthe (*fig. 161*) est formée d'un empiècement carré de 62cm de côté; son échancrure est un carré parallèle aux côtés de l'empiècement, qui mesure 23cm de côté. La dessiner au quart de sa grandeur; lui composer un entre-deux comme bordure. En tailler le patron.

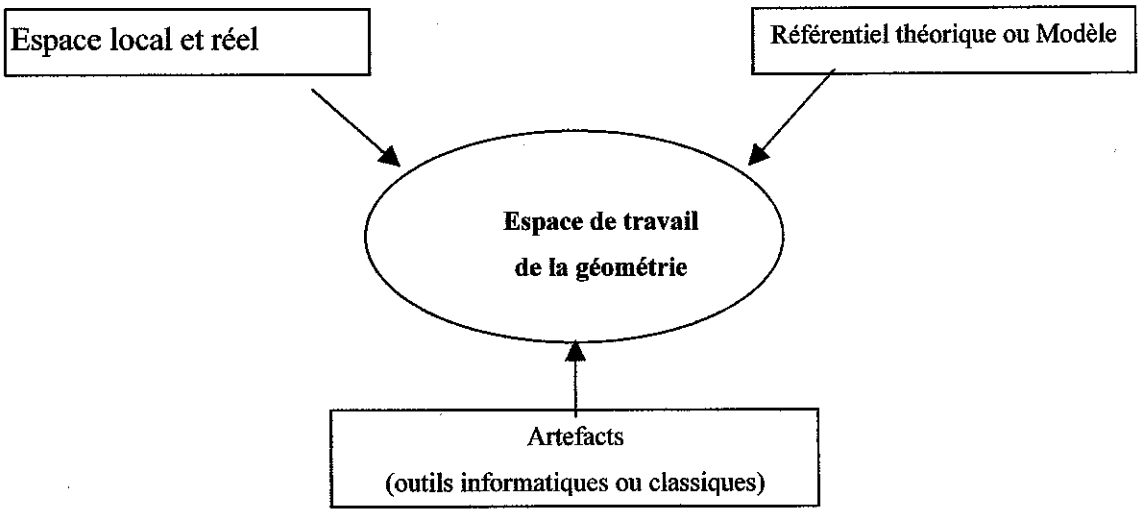
Cet exemple, volontairement choisi hors du contexte actuel, vise à dégager un certain nombre de problèmes en relation avec la définition des espaces de travail.

1. La constitution d'un espace de travail géométrique en interaction forte avec le monde réel ne risque-t-elle pas d'entraîner une confusion entre l'objet géométrique et son origine concrète[1].
2. La nature effective de cet espace n'est pas la même pour les différents usagers. Le novice risque de ne voir ici qu'un travail de couture inutilement compliqué par des considérations annexes, le maître pense faire de la géométrie de type théorique, l'expert perçoit l'oscillation entre ces deux univers.
3. L'élaboration d'un modèle théorique s'effectue à partir de la réalité et en retour il faut envisager les applications possibles de ce modèle à la réalité.

Vers une définition de l'Espace de travail

Définition de l'espace de travail

Nous appellerons espace de travail géométrique, le lieu organisé par le géomètre pour mettre en réseau les trois pôles que sont l'espace réel et local en tant que support matériel, l'ensemble des artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre et enfin un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique qui dépendra de la géométrie choisie. Ces différentes composantes de l'espace de travail seront précisées et définies en relation avec la nature de la Géométrie mise en jeu.



[1] Dans notre terminologie, il s'agit là d'un cas de Géométrie I dont l'horizon on le sait est technologique.

En effet, le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes qui en retour par leurs fonctions différentes participent à la spécificité des différents paradigmes. Nous serons souvent confrontés à cet apparent paradoxe qui fait définir comme géométrique la fonction d'un objet lorsqu'il intervient dans une géométrie que nous essayons justement de mieux définir. Le fait que la nature des composantes dépende du paradigme de référence conduit à envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, nous parlerons alors d'espace de travail géométrique de référence.

Pour éclairer notre conception de l'espace de travail, nous allons faire référence à la reconstitution dans un musée, par un ethnologue[2], d'un atelier de forgeron. L'ethnologue disposait de l'atelier originel non utilisé depuis la mort du forgeron. Au cours du travail de prise d'indices et de mesure, il commença à entrer dans les pas du forgeron, à comprendre l'agencement et l'économie des objets autour de la forge. Il put alors reconstituer non plus seulement un lieu inerte mais l'espace de travail de ce forgeron et ainsi expliquer l'usage de certains instruments liés à l'histoire personnelle de l'utilisateur ou à la fonction particulière de cette forge dédiée au ferrage des chevaux. L'espace de travail de la géométrie sera aussi un lieu habité que l'on peut approcher à partir de certaines de ses composantes mais dont le sens complet dépend de la fonction et de l'utilisateur.

Le travail dont nous parlons en géométrie, renvoie à une conception généralisée de cette notion : le travail[3] est vu comme l'établissement d'un rapport entre un contenu et une forme. Dans notre cas, le contenu est lié à une matière visible et la forme est déterminée par le modèle de référence. Le travail ne doit pas nécessairement déboucher sur la production d'objets concrets, il s'agit d'une activité intellectuelle où l'individu organise, d'une certaine manière et avec son style propre, les relations entre objets empiriques et théoriques.

Espace local et réel

Il est bien sûr difficile de préciser l'espace qui fait l'objet de la géométrie puisqu'en quelque sorte pouvoir décrire l'espace support est l'objet premier du travail du géomètre au moins dans la conception abstraite et formelle de la géométrie[4]. Dans les autres cas, cet espace est souvent considéré comme transparent et l'utilisation même du mot espace n'a pas beaucoup de sens.

---

[2] Il s'agit de Flavio Baumann de l'Université catholique de Valparaiso.
[3] Granger G.G . Essai sur une philosophie du style. p. 5 et sq
[4] Ce que recouvre la Géométrie III.

Les objets géométriques sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent à la fois du modèle théorique qui les définit et de l'espace réel dans lequel ils se trouvent. Dans la vision abstraite de la Géométrie III, l'espace est constitué de points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Ce regard permet d'introduire les sous-parties de l'espace comme des ensembles de points. Dans la géométrie axiomatique naturelle de type Euclidien[5], certaines sous-parties de l'espace sont en fait les objets de l'étude et l'on parlera de figures ou de configurations. En Géométrie I, il s'agit de dessins ou de maquettes. Nous reviendrons plus loin sur ce point classique de la didactique des mathématiques.

L'espace qui intervient en géométrie se construit en étroite relation avec l'espace réel qu'il reconstruit ou qu'il dévoile de manière différente suivant les divers paradigmes. L'espace réel dont nous parlons s'apparente à ce que Malafosse [2002 p. 44] décrit sous le nom d'espace de la réalité c'est à dire « *un ensemble composé des objets réels et des événements existant hors de la pensée du sujet, et sur lequel porte à la fois l'activité psychique des individus et l'activité de réflexion des communautés culturelle* ».

Un autre point important est la notion de localité ; l'espace auquel nous avons accès est de fait nécessairement local. Le détour par l'étude des conceptions de Riemann permet de mieux comprendre les liens entre la géométrie et la modélisation de l'espace. Selon lui, les hypothèses fondatrices de la géométrie résultent d'observations locales et il faut être prudent sur toute généralisation hors du champ de l'observateur. Il pose la question fondamentale de savoir si l'extension de la géométrie localement perçue comme euclidienne donne nécessairement l'espace euclidien. C'est Klein qui le premier a développé et résolu le problème de décrire tous les espaces globaux qui localement étaient indiscernables de l'espace euclidien dans le cadre de sa théorie des formes spatiales. L'intérêt de ce problème vient des méthodes développées pour le résoudre. Il est, en effet, traité en faisant appel à des techniques « géométriques » qui travaillent sur l'espace entier en laissant invariantes certaines propriétés. L'espace devient la matière même du travail géométrique, aidé en cela par les groupes de transformations. La portée de la localité devient essentielle lorsque notre étude s'étend aux géométries non euclidiennes mais même dans notre cadre, elle pose le problème de la relation des objets avec l'espace dans lequel ils sont plongés avec l'idée contemporaine d'une dépendance étroite de la matière avec la géométrie de l'espace. Des logiciels, comme LOGO, posent également le problème de la localité de manière cruciale en introduisant la possibilité

[5] Le paradigme que nous désignons sous le terme Géométrie II.

de travailler sur des modes d'écran différents qui ne sont que localement euclidiens [Kuzniak 2003].

Les artefacts

En didactique des mathématiques, le mot artefact est compris dans le sens que lui donne Rabardel[6] de chose ayant subi une transformation d'origine humaine. Il ajoute que cette chose doit être susceptible d'un usage pouvant s'inscrire dans des activités finalisées. Dans l'usage géométrique, ces choses seront les outils et les instruments utiles en géométrie. Rabardel précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action. L'intérêt de cette approche est d'attirer l'attention sur le processus de genèse instrumentale qui transforme un artefact en instrument avec une double orientation : l'instrumentalisation orientée vers les usages de l'artefact et l'instrumentation tournée vers l'appropriation par le sujet des schèmes d'action.

Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail puisqu'ils en constituent la face la plus visible et la plus prégnante pour l'élève. Dans le cadre euclidien classique, on sait l'importance des constructions à la règle et au compas. La règle n'est pas graduée et ainsi la Géométrie II se différencie radicalement de la Géométrie I où le mesurage peut éventuellement intervenir. Ainsi le problème de la détermination de la trousse à outils est fondamental pour toute réflexion sur les problèmes géométriques et notamment, bien sûr, ceux dits de construction.

L'introduction de nouveaux outils de type informatique a bouleversé les artefacts utilisés et créé, de fait, des nouveaux espaces de travail dont l'étude à la fois théorique et didactique a nourri les recherches en didactique des mathématiques. Cette dernière remarque nous permet d'insister sur le fait que, même dans un paradigme géométrique donné, les espaces de travail géométriques peuvent être multiples ; c'est une source de difficultés supplémentaires.

Le référentiel ou modèle théorique

Les objets et les outils de la géométrie en constituent la partie empirique, celle-ci ne prendra tout son sens qu'articulée avec un ensemble de définitions, de propriétés, de relations réunies dans une sorte de référentiel théorique que l'on peut aussi regarder comme un modèle

théorique. Le sens du mot modèle oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle et norme abstraite. Cette oscillation reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions. Dans ce qui suit, nous appellerons modèle théorique le modèle abstrait qui résulte soit d'une modélisation, soit d'une définition a priori.

Dans le premier cas, le modèle théorique résulte d'un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel dont il cherche à rendre le plus fidèlement compte. La géométrie axiomatique classique entre dans cette description et il est possible de donner l'origine *naturelle* de certaines propriétés de la Géométrie II.

Dans le deuxième cas, le modèle théorique préexiste et ce qu'on appelle modèle est cette fois une interprétation (et souvent une création) qui doit rendre compte des objets et des propriétés définis par les axiomes. Cette interprétation pourra s'appuyer sur une représentation matérielle ou virtuelle destinée à donner du sens à un système d'axiomes et d'énoncés qui est donné a priori. Cette réalisation matérielle porte également le nom de « modèle », le nom de « maquette » lui convient également[7] et évite l'ambiguïté. Cette « maquette » éclaire donc le système d'axiomes et favorise éventuellement le développement de la théorie par le géomètre en fournissant à son intuition un cadre plus familier. La géométrie de type formaliste (Géométrie III) entretient ce rapport au modèle théorique. Ceci apparaît nettement dans les nombreux « modèles matériels » créés pour rendre compte des axiomes décrits par Hilbert, quand on ne retient pas l'axiome d'Archimède ou quand on nie l'axiome du parallélisme (rappelons, sans le développer, l'exemple du modèle de Klein pour la géométrie hyperbolique).

Dans un sens plus restreint, il faut noter que le « modèle » peut aussi désigner une réalisation matérielle d'une figure géométrique, sa maquette : il pourra alors exister une confusion entre le travail sur l'objet réel et l'objet idéal.

Le référentiel de la Géométrie I, au moins dans sa pratique élémentaire, paraît ne se référer à aucune structuration en un modèle théorique. Cependant, il est possible de développer au sein de ce paradigme un modèle de référence : c'est ce qu'a fait par exemple Hjelmslev [1939].

> *La géométrie que nous proposons dans ce qui suit doit avoir comme but le contrôle sensible de tous les résultats. Les définitions doivent être des définitions sensibles : c.a .d. décrire les objets dont on s'occupe de telle façon qu'on puisse reconnaître par une vérification directe si les objets ont les propriétés démontrées.*
>
> *Le programme de travail est : voir et concevoir.*

---

[6] P. Rabardel [1995] *Les hommes et les technologies* Armand Colin p. 59

[7] Maquette est le sens originel de « modèle »

Dans cette géométrie, par exemple, une droite n'est pas tangente en un point à un cercle mais sur une portion de cercle. Le but de Hjelmslev est de définir précisément cette géométrie étroitement liée au monde physique.

Construire l'espace de travail

L'espace de travail ne prend son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et de donner du sens aux trois pôles que nous venons de dégager. Pour réfléchir sur cette construction de l'espace de travail et même si la notion de travail que nous utilisons est relativement abstraite, il nous a semblé intéressant d'observer l'usage du terme espace de travail dans un autre domaine où il est employé à savoir celui de l'architecture ergonomique.

De manière prosaïque les architectes définissent les espace de travail comme des lieux où s'effectue le travail. Pour un auteur comme Lautier [1996] : il s'agit de mettre en place des lieux de travail pour que l'utilisateur puisse y exercer au mieux son travail. Cela nécessite de la part de ce dernier un investissement et une appropriation de ce lieu. Pour certains utilisateurs, il s'agira d'une appropriation faible limitée à une partie de cet espace, ainsi l'ouvrier spécialisé qui ne veut connaître que sa machine outil, pour d'autre d'une appropriation forte qui en fait un domaine de travail étendu comme pour le chef d'équipe conscient de l'agencement global de son lieu de travail dans un processus plus vaste de production. Le même objet aura des valeurs différentes suivant la place de la personne dans cet espace avant tout social : la passerelle des cadres devient un balcon de surveillance pour les ouvrières qui s'en protègent par des cartons.

Pour pouvoir le structurer et éventuellement le modifier, l'espace de travail est conçu dans l'étude de Lautier, comme articulé autour de trois grands pôles : un dispositif matériel, une organisation laissée à la charge du concepteur de l'espace et enfin « la représentation de cet espace » pour ses utilisateurs. Selon nous, ces trois aspects renvoient à des regards et des points de vue différents sur l'espace de travail qui peuvent nous aider à mieux comprendre la construction de l'ETG par ses différents utilisateurs. Ainsi nous commencerons par envisager l'organisation nécessaire des composantes de l'ETG pour le rendre efficient dans une institution donnée. Puis nous envisagerons la part personnelle d'appropriation de cet espace par un individu particulier.

L'enjeu didactique

Pour résoudre un problème de géométrie, l'expert dispose d'un espace de travail que nous qualifierons d'idoine. Cet ETG remplit deux conditions, d'une part, il permet de travailler dans la Géométrie correspondant à la problématique visée, d'autre part, cet ETG est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont maîtrisées et utilisées de manière valide. En d'autres termes, l'expert face à un problème peut reconnaître le paradigme géométrique utile pour la résolution, cela lui permet de l'interpréter et de le résoudre grâce à l'espace de travail de référence associé à ce paradigme. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s'effectuer dans ce que nous appellerons un ETG personnel. Ce dernier n'aura a priori ni la richesse ni la performance de l'ETG d'un expert.

Cette façon de décrire la situation nous permet de dégager un enjeu didactique global tel que nous le percevons dans notre cadre théorique. D'un cadre géométrique unique, nous sommes passés à plusieurs cadres dépendant de la Géométrie utilisée. Dans ces cadres, il est possible de résoudre des problèmes grâce à des ETG idoines. A cela s'ajoute la dimension personnelle due à un individu particulier travaillant dans son ETG personnel.

S'assurer que l'apprenant réorganise les diverses composantes de son ETG en un tout cohérent et opérationnel va constituer l'enjeu didactique. Cette question assez générale peut se décliner en un certain nombre de problèmes qui participent de l'enjeu didactique.

1. Le problème de l'existence d'un ETG idoine pour résoudre un problème ou plus généralement une classe de problèmes.
2. Les malentendus pédagogiques dus à la diversité à la fois des ETG de référence et des ETG idoines.
3. Le problème du développement individuel de l'ETG personnel.

Organisation mathématique et didactique de l'ETG idoine.

La mise en place d'un espace de travail géométrique efficient est une étape essentielle pour installer dans l'institution scolaire une organisation mathématique correspondant au modèle géométrique visé. Ce problème récurrent réapparaît à chaque réforme quand celle-ci modifie une des composantes de l'ETG. Généralement ces modifications curriculaires concernent le modèle abstrait de référence. La recherche et la description d'espaces de travail géométriques

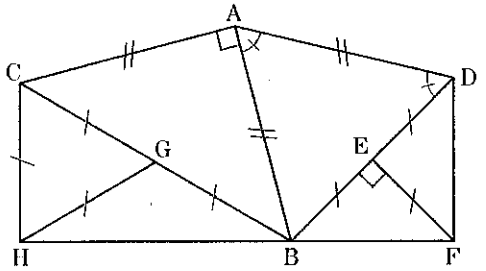
idoines avec des techniques spécifiques et justifiées peuvent utilement s'appuyer sur l'approche anthropologique développée par Chevallard. Cette approche permet d'étudier dans le détail les organisations mathématiques et didactiques mises à l'œuvre dans les manuels ou les programmes.

La modification de la structuration mathématique du modèle abstrait entraîne de fait un changement de l'espace de travail de la Géométrie et si l'on ne modifie pas les artefacts et l'espace support, cet espace de travail peut se révéler inadapté ou difficile à créer. Il nous semble que l'on peut interpréter ainsi le relatif échec de l'introduction massive des transformations géométriques dans l'enseignement de la Géométrie II au Collège et au Lycée en France. Les transformations géométriques ont été introduites dans un espace de travail de référence de la Géométrie II jusqu'alors plutôt statique (avec notamment les cas d'égalité et de similitude ses triangles), sans le modifier de façon à faciliter la réalisation de ces transformations afin qu'elles ne soient pas seulement mentales. La création de logiciels de géométrie dynamique a tenté partiellement de combler cette lacune mais avec le risque d'un glissement vers la Géométrie I du fait de la surpuissance des artefacts.

A côté de cet exemple général, il y a aussi des problèmes simples où l'existence même d'un ETG idoine pour résoudre le problème se pose réellement. Les techniques disponibles ne permettent pas à l'élève de résoudre le problème ou alors de manière trop lourde. Nous allons préciser ce point en étudiant dans ce sens un exercice extrait du manuel Décimale 4ème page 139 (Belin 1998).

Dessin à main levée et place de l'oral

55 Une curieuse construction



a. Reproduire la figure en construisant successivement les triangles ABC, ABD, BEF et FED (E est le milieu du segment [BD]), CGH (G est le milieu du segment [BC]) et GHB. On prendra AB = 5 cm.

b. Démontrer que les droites (HC) et (FD) sont parallèles et que HF est la distance entre ces deux droites.

La première question invite l'élève à construire la figure et insiste sur l'importance de la mesure. L'espace de travail de cette question renvoie à la Géométrie I avec l'importance accordée aux instruments et aussi à la mesure. Or le but du problème, dans la question 2, se situe en Géométrie II, il y a là un conflit classique fréquent[8]. Mais cet exercice introduit une

[8] Voir par exemple notre étude « Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres » *Revue Petit X n°51.* Grenoble pp 5-21

autre résistance qui porte sur la nature de l'espace de travail idoine.

En effet, la tâche demandée est particulièrement lourde puisqu'il faut repérer de nombreuses égalités d'angles pour arriver à montrer à la fois l'alignement de H, B et F et l'orthogonalité des droites (HC) et (HB) d'une part et (FD) et (BF) d'autre part. Dans l'espace de travail classique, papier crayon avec une demande de production écrite de l'enchaînement déductif, la rédaction complète prend une copie double d'élève consciencieux.

Cette fois, le maître, s'il décide de donner cet exercice, doit se poser la question de l'existence d'un espace de travail qui allège le travail de l'élève. Il pourra s'agir d'un espace qui intègre le dessin à main levée et l'expression orale des élèves supprimant par-là même deux obstacles : la construction effective et la lourde rédaction linéaire. Il se crée ainsi un nouvel espace de travail qui donne un statut précis à des notions comme le dessin à main levée ou l'oral en mathématique dont la place est souvent floue dans l'enseignement.

Un autre exemple : l'introduction des cas d'isométries en seconde

Les cas d'isométries des triangles, sous le nom de cas d'égalités, étaient une composante essentielle de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire jusqu'en 1967, date de leur suppression sous la pression de la réforme des mathématiques modernes.

Avant cette date, ils apparaissaient dans les programmes au niveau de la classe de cinquième et leur introduction et leur usage étaient assez proche de celui d'Euclide, la terminologie et l'ordre des cas mis à part.

Dans cette approche, la reconnaissance de sous-figures dans des figures était nécessaire pour découvrir les indices nécessaires à la preuve (angles, côtés égaux). Ceci pouvait nécessiter la construction de figures auxiliaires. Lors de leur nouvelle introduction, ces cas s'insèrent dans un espace de travail défini au collège et qui privilégie les transformations géométriques. Ainsi, deux triangles isométriques peuvent être définis comme deux triangles tels qu'il existe une translation, une rotation, une symétrie ou une composition de ces transformations qui permette de passer de l'un à l'autre. Cette définition réfère aux connaissances enseignées au Collège. Elle ne peut s'appuyer sur la connaissance générale des isométries qui seront vues que par une infime partie des élèves en Terminale.

Les modalités de preuve mises en œuvre dans les deux cas sont non seulement radicalement différentes d'un point de vue mathématique mais aussi d'un point de vue cognitif. Ainsi, non seulement les connaissances mises en jeu diffèrent mais également les processus cognitifs.

Ceci nous conduit à préciser l'articulation entre les espaces de travail et ces processus cognitifs.

Le développement de l'ETG personnel

Dans les faits, l'ETG personnel de l'élève ou de l'étudiant(e) ne fonctionne pas nécessairement comme l'ETG idoine de l'expert. En effet, ce dernier ne surgit pas tout fait dans le cerveau de l'utilisateur, il est le fruit d'un long apprentissage qui met en place les différents schèmes d'action assurant la cohérence de l'ETG. D'autre part, l'élève peut rencontrer des difficultés dans son usage ou faire des erreurs comme dans tout apprentissage.
L'enseignant va devoir travailler pour que les artefacts deviennent des instruments au sens de Rabardel, pour que les divers objets de l'espace étudié deviennent familiers à l'élève et pour qu'enfin les éléments du modèle théorique puissent se structurer autour de ces objets. Le choix du milieu au sens de Brousseau et des situations didactiques visant à la structuration de cet ETG devient alors essentiel.
Mais en plus de cette entrée classique en didactique des mathématiques, le développement personnel de l'ETG suppose aussi que l'on envisage le problème dans sa dimension psychologique et cognitive. Les voies proposées ici sont évidemment très diverses et dans notre étude nous n'avons envisagé que deux pistes qui avaient déjà fait l'objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques. Il s'agit d'une part de l'aspect sémiotique avec la notion de registre de représentation sémiotique particulièrement féconde pour traiter d'une Géométrie articulée autour des figures. L'autre aspect que nous avons pris en compte est celui des niveaux de pensée de Van Hiele qui bénéficie d'un grand nombre d'approches surtout dans les mondes anglo-saxons et hispaniques.

Approche cognitive et ETG

Les études didactiques portant sur l'enseignement de la géométrie au Collège ont conduit à la nécessité de complexifier la notion de figure. Pour les élèves de Collège, la figure peut soit être un support du raisonnement, soit par son existence même la preuve cherchée. Ce double regard sur un même objet a conduit les didacticiens à tenter de distinguer par des mots ce que l'usage confond et à la suite de Parzysz, la distinction dessin-figure est devenue classique.

Dans notre approche, la définition de la figure dépend du paradigme géométrique de référence. En Géométrie I, il s'agit d'un dessin ou pour emprunter une expression allemande une figure géométrique réelle (*geometrische Realgebilde*). Cette formulation insistante porte sur deux aspects : le contexte fait que les dessins doivent être interprétés de manière géométrique (il ne s'agit pas d'art, de physique…), mais d'autre part ces objets ne sont pas des objets idéaux, ils sont réels : les traits ont une épaisseur, les outils de construction sont de vrais outils avec leur frottement, leur usure leur imperfection, leurs pannes.

En Géométrie II, la distance au réel, l'importance de la définition devient essentielle. La figure n'existe alors pas sans un texte qui la définit et qui en fixe les limites. En Géométrie II, le seul objet physique est le dessin, mais un dessin " *controlled by its definition (though it may be inspired by a real object)* " comme le formule Fischbein [1993] qui introduit l'idée de « figural concept » pour rendre compte de la nouvelle notion de figure.

En Géométrie III, la figure correspond à un sous-ensemble de points de l'espace ayant une propriété commune, pour certains il s'agit même de tout ensemble fini de points. Elle est aussi une réification d'une idée abstraite associée à des espaces au moins de dimension 2. Elle peut alors heureusement guider l'intuition du géomètre.

Le changement de statut de la figure est un des points les plus visibles dans l'évolution de l'ETG. Sa prise en charge est possible par la gestion des artefacts, notamment les logiciels géométriques dynamiques. Le jeu sur la figure s'articule aussi sur la liaison espace-modèle dans l'ETG et donc sur la relation entre le spatial et le théorique : préciser la gestion de cette interaction est l'objet de l'approche cognitive de Duval. Pour cela, il introduit un travail spécifique, encore un jeu, sur les registres de représentation sémiotique que sont le registre figural et le registre discursif. La connaissance du jeu entre ces deux registres est certainement un des enjeux de l'apprentissage de la Géométrie II.

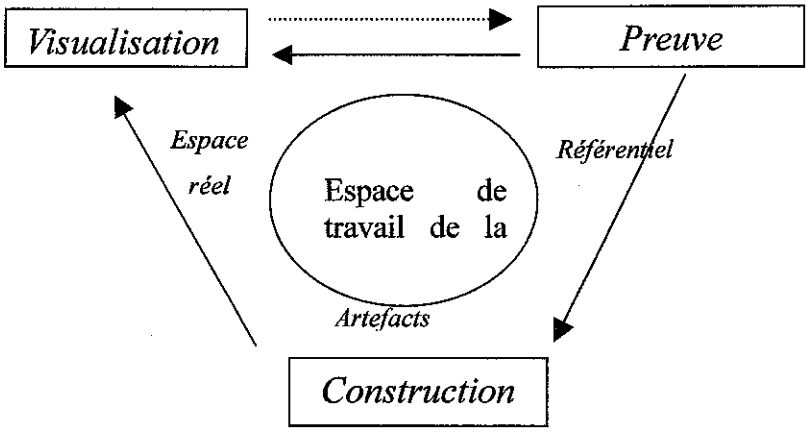
D'autre part, nous allons montrer sur cet exemple, comment une approche cognitive peut venir se superposer à l'espace de travail géométrique. Ce dernier résulte d'une réorganisation des processus cognitifs associés aux diverses composantes de l'ETG. Dans son article « Why to teach geometry ?» [1995], Duval introduit trois processus cognitifs.

Le processus de visualisation lié aux figures mentales ou sur un support matériel.

Le processus de construction dépendant des outils utilisés (règles, compas…).

Le processus de preuve articulé sur un discours théorique.

Il réorganise ensuite ces trois processus dans un schéma que nous superposons sur celui de notre espace de travail. Duval précise que les flèches indiquent les aides et les appuis qu'un processus fournit à un autre.



Ce modèle doit être vu de façon dynamique pour saisir l'évolution du processus cognitif global lié au travail géométrique. Les processus cognitifs relevés par Duval permettent une construction opérationnelle de l'ETG par expansion cognitive en mettant en relation de manière dynamique les différentes composantes de l'espace de travail. Les relations entre les processus cognitifs diffèrent d'une Géométrie à l'autre. L'organisation proposée par Duval s'applique plutôt à la Géométrie II. En Géométrie I, le rôle d'appui de la construction et de la visualisation pour la preuve est plus important. En Géométrie III, cette fois idéalement un système expert pourrait seul développer la preuve, mais la construction au stade de l'esquisse et la visualisation guident l'intuition et l'interprétation des résultats.

Articulation entre niveaux de pensée géométriques et paradigmes

En s'appuyant, d'une part sur la théorie de Piaget et d'autre part sur la GestaltTheorie, Van Hiele a construit une théorie du développement de la pensée géométrique chez l'enfant basée sur les différents niveaux d'appréhension perceptifs et logiques des figures. L'élève passe idéalement par cinq niveaux (numérotés de 0 à 4) qui le conduisent de la perception simple à une conception abstraite et discursive de la géométrie. Les deux premiers niveaux (visualisation[9] et analyse) se distinguent ainsi des deux derniers (déduction formelle et abstraction). Le niveau 2 (déduction informelle) correspond à une phase de transition où s'élabore le raisonnement géométrique.

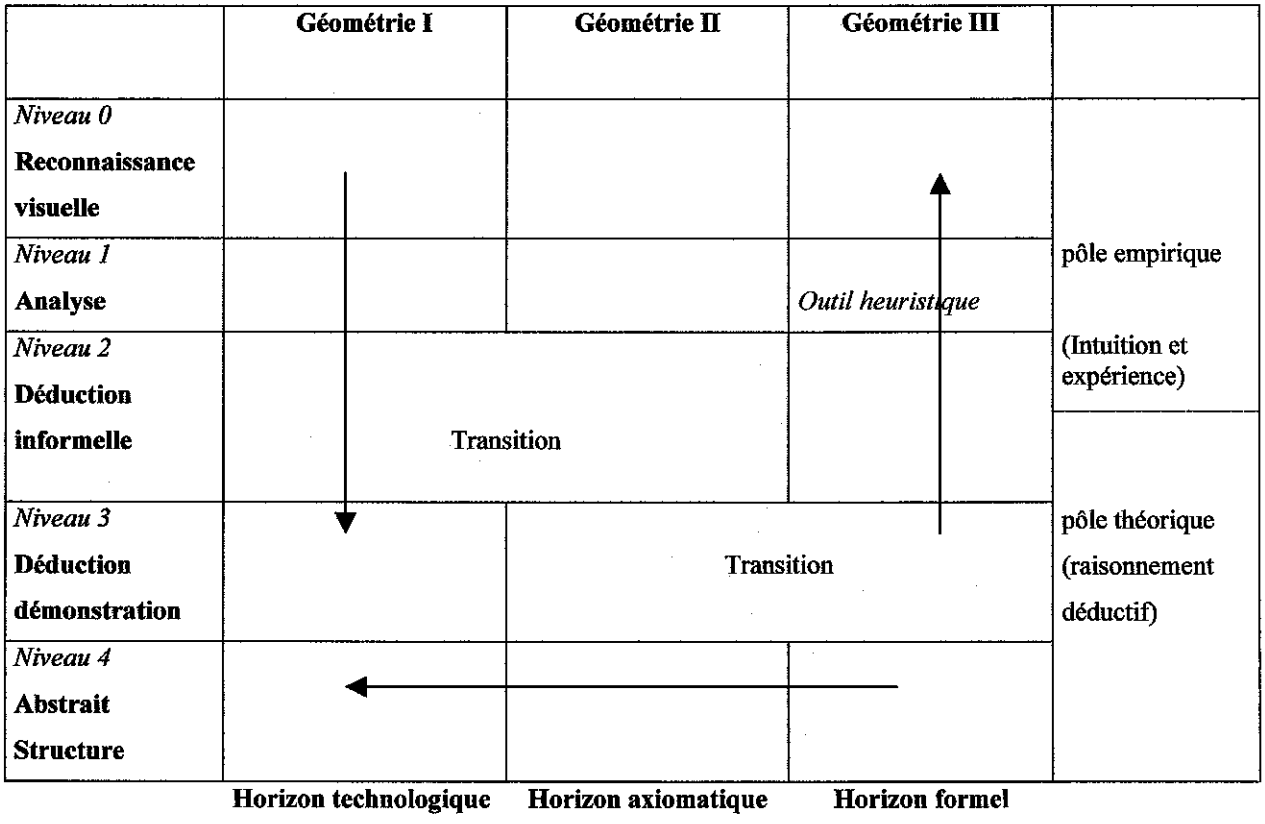
Cette conception de l'évolution de la pensée géométrique gravissant les pentes de l'abstraction et de la généralisation par les structures, rend compte du passage vers les

[9] Nous éviterons ce terme déjà utilisé par Duval qui a bien montré que la visualisation allait bien au-delà de la simple perception visuelle retenue par Van Hiele. Nous parlerons de reconnaissance visuelle.

mathématiques évoluées définies entre autres par Tall [1995]. Nous n'entrerons pas ici dans la discussion pour savoir s'il s'agit vraiment du développement cognitif réel de l'élève. Pour nous, l'intérêt de cette approche, articulée chez Van Hiele avec une progression pédagogique, est d'avoir développé des observables portant sur des activités faciles à mettre en place et qui suivent le développement de la pensée et du raisonnement mathématique. Cela, et ce n'est pas sans un certain nombre de dérives, a permis de mettre en place des tests servant à déterminer le niveau atteint par les élèves. Nous ne reprenons pas ici cette hiérarchisation dans l'optique de classer les élèves et ceci d'autant plus que nous l'utilisons plutôt pour étudier des travaux d'étudiants qui ont déjà parcouru tout le cursus scolaire.

Nous proposons une vision bidimensionnelle des relations entre ces niveaux et les paradigmes que tente de résumer le tableau suivant.

Tableau de Synthèse



Les flèches verticales indiquent les rôles différents joués par le niveau empirique dans les diverses Géométries : en Géométrie I, tout le discours théorique s'appuie sur ce fond empirique alors qu'en Géométrie III il joue essentiellement un rôle heuristique destiné à illustrer (ou à faciliter) le discours théorique. La flèche horizontale insiste sur le fait que le niveau de théorisation obtenue en Géométrie I

est partiellement le fruit de l'expansion formelle réalisée dans le cadre de la Géométrie III. Ces différentes relations permettent ainsi de préciser les différences de nature entre les ETG.

Nous avons grisé la voie privilégiée dans le cadre des mathématiques enseignées et qui associe niveau de pensée et un certain type de géométrie. Les transitions s'opèrent, dans cette conception, dès que le niveau cognitif de l'élève lui permet de maîtriser les éléments de la nouvelle Géométrie. Nous pouvons aussi visualiser cette évolution de la géométrie enseignée dans le cadre scolaire français (et nous suivons ici une idée de Parzysz [2001]) grâce au tableau suivant :

Type de géométrie	PG	G1	G2		G3
Niveaux de Van Hiele	Niveau 0	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4
Problématique	Spatiale	Spatio-géométrique	Géométrico-mathématique	Logico-mathématique	Structuraliste

Nous avons ajouté une colonne intégrant une problématique spatiale dans une sorte de pré-géométrie (PG).

Conclusion

La géométrie élémentaire fait rencontrer un monde idéal avec un monde matériel par l'intermédiaire des objets géométriques. L'activité géométrique peut alors être conçue comme un travail qui va mettre en relation une formulation théorique et un contenu matérialisable dans l'espace réel grâce à un ensemble d'outils spécifiques. Cette réflexion nous a conduit à introduire la notion d'espace de travail géométrique basée sur la mise en réseau de trois composantes : un espace réel et local, un référentiel théorique et enfin un ensemble d'artefacts. Mais cette notion se diversifie rapidement en fonction du paradigme géométrique dominant et de son utilisateur. Cela nous conduit à définir un certain nombre d'ETG destinés à décrire ces multiples facettes de l'activité géométrique.

ETG de référence. Il s'agit d'un espace de travail défini de manière idéale en fonction de seuls critères mathématiques. Son utilisateur est un individu expert « épistémique ». Pour simplifier nous supposerons que pour une géométrie donnée l'ETG de référence est unique, mais même dans le cas de la géométrie élémentaire enseignée, nous devrons distinguer trois ETG de référence associés aux trois Géométries élémentaires que nous avons dégagées.

ETG idoine. L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée et pour une fonction définie. Cela

suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. Son utilisateur premier reste un expert mais il joue un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour ses utilisateurs potentiels futurs. De fait, le choix de l'adjectif idoine suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel, nous devrions en toute rigueur introduire d'abord l'idée d'un ETG institutionnel et poser ensuite la question de son caractère idoine.

ETG personnel. L'ETG idoine doit être utilisé par des étudiants mais aussi par leurs enseignants. Chacun se l'approprie et l'occupe avec ses connaissances mathématiques et ses capacités cognitives. Ces ETG sont ce que nous appelons des ETG personnels. Quand l'élève découvre son espace de travail, il aura tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature de l'espace de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.

L'étude de ces différents espaces de travail nous semble utile pour comprendre les difficultés des élèves et pour préciser l'origine et la nature des obstacles qu'ils rencontrent (épistémologiques, didactiques ou ontologiques).

Les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométriques fournissent un cadre pour la recherche que nous poursuivons actuellement et qui porte sur la comparaison de l'enseignement de la géométrie dans des pays différents. Cette comparaison passe par une explicitation des paradigmes privilégiés dans chaque pays et par la description des ETG considérés comme idoines. Elle suppose aussi l'étude de l'appropriation et de la représentation de ces ETG par les étudiants. Il est ainsi possible d'interpréter la question du rapport des étudiants à la géométrie en termes de regards sur l'espace de travail et sur sa fonction.

Pour mener à bien ces diverses études et rendre compte des types d'ETG en précisant l'aspect de chacun, il faut noter qu'il est nécessaire de s'appuyer sur des approches qui relèvent des différents champs de la didactique des mathématiques tels qu'ils ont pu être développés en France depuis bientôt trente ans et qui se révèlent ici étonnamment complémentaires.

Références bibliographiques

DUVAL R (1995) *Why to teach geometry* Icmi Studies on Geometry Catania

FISCHBEIN E (1993) The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* Vol 24, n°2. 139-162. Kluwer Academic Publishers.

GRANGER G. G. (1968) *Essai d'une philosophie du Style* Armand Colin, Paris

GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace.* Editions du Griffon, Lausanne.

HJELMSLEV J (1939) La géométrie sensible *L'enseignement mathématique* p 7-27 et 294-322

HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques *Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 20/1.* pp. 89-116

HOUDEMENT C, KUZNIAK A, (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics. 40/3.* pp. 283-312

HOUDEMENT C, KUZNIAK A, 1999(2003) Épistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie. In COPIRELEM *Concertum 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques.*Tome 2 pp 95-106 Ed Arpeme

KUHN T.S (1977) En repensant aux paradigmes in *La tension essentielle* Odile Jacob 1977

KUZNIAK A, (2001) Sur une approche intrinsèque de la géométrie enseignée. Géométrie in Bulletin de l'APMEP n°435 pp. 507-518.

KUZNIAK A, (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques.* Note d'habilitation. Université de Paris VII. ISBN 2-86612-248-8

KUZNIAK A, RAUSCHER JC (2002) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du colloque sur la formation des maîtres. La Roche sur Yon. Université de Nantes* pp 271-290.

LACABE-PLEISTEING (1911) Cours de géométrie pour le cours complémentaire *Felix Juven Paris*

LAUTIER F.(1996)Sur les espaces de travail in Cazamian et al *Traité d'ergonomie* Ed Octares.

MALAFOSSE D (2002) Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique *Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 22/1.*

MARIOTTI M. A. (2001) La preuve en mathématique *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies vol 1.4 pp 437-458*

PARSZYSZ (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1 *Actes du colloque copirelem de Tours.* Irem de Tours

RABARDEL P. (1995) Les hommes et les technologies page 59Armand Colin

RIEMANN B (1854) Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen trad Laugel. Blanchard 1968

RICHARD P. R (2004) L'inférence figurale : Un pas de raisonnement discurso-graphique. *Educational Studies in mathematics 57/2* pages 229-263.

TALL D.(1995) Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *Plenary lecture at the conference of PME*, Recife, Brazil.

VAN HIELE, P.M. (1986) Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press.