

## **B. Des figures à la manière de les voir : comment poser le problème de la visualisation dans l'apprentissage de la géométrie ?**

**Raymond Duval**

Professeur émérite à l'Université du Littoral Côte d'Opale

Le rapport aux figures, c'est-à-dire la manière de regarder ce qu'elles donnent à voir, constitue le seuil critique pour les premiers apprentissages de la géométrie. C'est-à-dire le seuil peut-être le plus difficile à faire franchir aux élèves dans l'enseignement et, aussi, le plus décisif pour leur faire comprendre ce qu'est une démarche géométrique.

Cette affirmation peut surprendre. En effet, le corpus des figures dont les programmes peuvent demander la connaissance est très restreint et il correspond à des formes qui sont perceptivement remarquables et culturellement familières. Et, dans l'enseignement, ces figures se retrouvent au carrefour d'une grande variété d'activités : observation, reproduction, construction, description, définition, etc. Or ce qui est visé à travers ces activités, c'est la connaissance de propriétés qui vont permettre de développer des raisonnements pour résoudre des problèmes et pour en justifier les solutions. Cette connaissance dépasse les figures qui ne sont que des réalisations chaque fois particulières. Alors pourquoi accorder à la manière de voir ce que les figures donnent à voir un tel enjeu d'apprentissage ?

Les figures renvoient nécessairement à un acte qui est cognitivement fondamental : voir ! Or dans les démarches de géométrie cet acte devient d'emblée problématique tout en demeurant essentiel. Car tout regard sur une figure requiert un questionnement qui, souvent, se fait contre le premier constat perceptif, contre ce que l'on a reconnu au premier coup d'œil : qu'est-ce qu'il faut voir sur cette figure ? que représente-t-elle ? Pour désigner la démarche liée à ce questionnement, implicite ou explicite, on parle souvent d'« analyse », de « lecture », de « propriété » ou même d'« hypothèses »... Mais, même si c'est autrement que l'on regarde, il s'agit toujours de voir. Cela veut dire que les figures en géométrie, cela ne se regarde pas du tout comme n'importe quelle autre figure (image, schéma, plan.. ) ailleurs qu'en géométrie. D'où les deux questions, étroitement liées, qui constituent le problème que nous allons traiter dans cet exposé.

- En quoi consiste cette manière si particulière de voir qui est pratiquée en géométrie ?

- Et, quel type d'activité peut contribuer à faire entrer les élèves dans cette manière de voir ?

Pour dégager des éléments de réponse, nous allons partir d'une idée très simple : c'est la tâche demandée qui détermine le rapport aux figures. Or étant donné la très grande variété des activités géométriques qui peuvent être proposées sur les figures, ou qui font appel à des figures, une constatation s'impose très vite : *il y a plusieurs manières de voir une même figure* ! Tout dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. Et là surgit toute la complexité cognitive de la visualisation en géométrie. Les trois questions suivantes en donnent un premier aperçu.

1. Quelles sont les différentes manières de voir des figures auxquelles il est fait appel à travers la variété des activités géométriques qui sont proposées aux élèves ?
2. La manière de voir qu'un type d'activité favorise aide-t-elle à entrer dans les autres manières de voir requises par les autres types d'activité ?
3. Quelle est la manière mathématique de voir, c'est-à-dire celle qu'implique le développement des démarches discursives en géométrie (énonciation de propriétés, définitions, déduction d'autres propriétés, théorèmes....) ?

Pour répondre à la première question nous allons présenter une classification des différentes manières de voir permettant de les comparer. Pour répondre à la seconde nous montrerons l'opposition entre deux types de visualisation, également sollicités dans les apprentissages : la visualisation iconique et la visualisation non iconique. Et pour répondre à la troisième, nous mettrons en évidence le rôle central de la déconstruction dimensionnelle pour l'articulation entre visualisation et discours mathématique.

## **I Classification des manières de voir en fonction du rôle des figures dans les activités géométriques proposées aux élèves**

Le champ des activités possibles pour faire travailler les élèves avec des figures de géométrie ou sur des figures de géométrie est extrêmement étendu. Les variations d'activité portent à la fois sur *la tâche à faire* (reproduire une figure selon un modèle ou la construire, ou effectuer des mesures, ou encore la décrire pour la faire reconstruire par un autre élève...) et sur *le mode de l'activité demandée* (modalité concrète en utilisant un matériel manipulable ou modalité représentationnelle en s'en tenant aux seules productions graphiques, ou encore modalité

technique en imposant certains instruments...). Or ce ne sont pas du tout les mêmes manières de voir qui sont sollicitées d'un type d'activité à un autre, même si ce sont les mêmes formes nD (pièces matérielles 3D à manipuler physiquement, figures 2D déjà construites ou proposées à construire, à modifier...) qui sont perceptivement données à voir. En prenant simplement comme critères le type d'opérations sur les formes données à voir et la manière dont les propriétés géométriques sont mobilisées par rapport à ce type d'opérations, on peut distinguer quatre manières de voir. Ces quatre manières de voir sont quatre entrées très différentes dans la géométrie.

|                                                                                                 | BOTANISTE                                                                                                                           | ARPENTEUR-<br>géomètre                                                                                                                                    | CONSTRUCTEUR                                                                                                                                                                        | INVENTEUR-bricoleur                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Type d'opération sur les <b>FORMES VISUELLES</b> , requis par l'activité proposée            | Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour :<br><b>UNE forme particulière est privilégiée comme TYPIQUE</b> | Mesurer les bords d'une surface :<br><b>sur un TERRAIN ou sur un DESSIN (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure)</b>              | <b>Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument</b><br>Il faut (souvent) passer par des TRACÉS AUXILIAIRES qui n'appartiennent pas à la figure « finale » | <b>Transformer des formes les unes dans les autres.</b><br>Il faut ajouter des TRACES REORGANISATEURS dans la figure finale pour initialiser ces transformations   |
| 2. Comment les <b>PROPRIETES GEOMETRIQUES</b> sont mobilisées par rapport à ce type d'opération | <b>Pas de liens</b> entre les différentes propriétés ( pas de définition mathématique possible )                                    | Les propriétés sont <b>des critères de choix pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à une formule permettant un calcul</b> | Comme <b>contraintes d'un ordre de construction</b> . Certaines propriétés sont obtenues par <b>une seule opération de traçage</b> , les autres exigent plusieurs opérations.       | Implicitement par renvoi à un réseau plus complexe (une trame de droites pour la géométrie plane ou une trame d'intersections de plans...) que la figure de départ |

Figure 1. Quatre entrées classiques dans la géométrie

**Le botaniste.** C'est l'entrée la plus évidente et la plus immédiate. Il s'agit d'apprendre à reconnaître et à nommer les formes élémentaires qui sont utilisées en géométrie plane : types de triangles et de quadrilatères, configurations obtenues par les différentes positions de deux droites l'une par rapport à l'autre, éventuellement les formes circulaires et les formes ovales etc. Et il s'agit évidemment d'observer les différences entre deux formes présentant certaines similitudes (un carré et un rectangle) et de remarquer des similitudes entre des formes

différentes (entre un carré et un parallélogramme). Ici, les propriétés distinguées sont des caractéristiques visuelles de contour.

En réalité ce type d'activité n'a rien d'une activité géométrique. Elle ne paraît géométrique que dans la mesure où elle porte sur des formes dites « euclidiennes ». Mais le même travail d'observation pourrait (et devrait) être fait sur des feuilles d'arbres. Et parmi tous les modèles de formes planes que Piaget (1947, p.70) avait demandé de « copier », à des enfants de 2 à 7 ans, on aurait pu tout aussi bien glisser une feuille de platane et une feuille de marronnier, la forme d'un sapin et celle d'un épicéa, ou le dessin schématique d'une automobile. Rappelons que dans les observations de Piaget il s'agissait de copier « à main levée » sans utiliser aucun instrument, même pas une règle !

**L'arpenteur géomètre.** C'est l'entrée historique. Il s'agit d'apprendre à mesurer des longueurs sur un *terrain*, au sol, ou des distances entre deux repères, et à les reporter sur un *dessin* qui prend un statut de plan. *On se situe donc d'emblée à deux échelles de grandeur qu'il s'agit de mettre en correspondance.* Or cette mise en correspondance n'a rien de naturel ou d'évident, car il n'y a pas de procédure commune pour mesurer les distances réelles sur le terrain et pour mesurer les longueurs de tracés d'un dessin. Les tâches spécifiques de cette entrée vont donc consister à proposer des activités exigeant de passer d'une échelle de grandeur à une autre. Le problème du vitrier en est un exemple typique (Berthelot et Salin 94, p.40-41) : combien de mesures effectuer, et lesquelles, pour fabriquer une fenêtre qui rentre dans une ouverture ayant la forme d'un parallélogramme ? La mesure du rayon de la terre par Eratosthène en est un autre exemple célèbre.

Ce type d'activité montre la complexité pour beaucoup d'élèves à mettre en correspondance ce qu'ils voient sur le terrain et ce qui est dessiné sur une feuille. Or cette mise en correspondance exige que l'on privilégie des aspects qui sont essentiels pour la lecture d'un plan ou d'une carte de géographie (Berthelot et Salin 2000), mais qui ne sont pas toujours pertinents pour la représentation géométrique : le choix d'objets repères, le choix de points ou d'axes de références pour représenter la position des objets les uns par rapport aux autres, la prise en compte de directions ou d'orientations... En outre dans ce type d'activité *les propriétés géométriques sont mobilisées à des fins de mesure.*

**Le constructeur.** C'est l'entrée nécessaire. La particularité des figures géométriques, du moins de celles qui correspondent à des formes euclidiennes élémentaires et à des configurations de formes élémentaires, est *d'être constructibles à l'aide d'instruments.* Les

figures géométriques ne se dessinent pas à main levée, elles se construisent à l'aide d'un instrument qui guide le mouvement de la main, ou qui s'y substitue. Pourquoi ? Par la régularité qu'il impose au mouvement de traçage, et *donc par l'invariance visuelle qu'il introduit dans le tracé*, un instrument permet de produire une forme visuelle ayant une propriété géométrique et cette forme visuelle constitue la primitive de l'instrument. Ainsi le trait droit ou le rond régulier, pour les instruments classiques que sont la règle (non graduée) et le compas. Sans l'utilisation d'instruments, il serait impossible de vérifier une propriété sur une figure.

C'est à travers l'utilisation d'un instrument que les élèves peuvent vraiment prendre conscience que les propriétés géométriques ne sont pas seulement des caractéristiques perceptives. En effet, l'utilisation d'un instrument donne la possibilité d'expérimenter, en quelque sorte, les propriétés géométriques comme **des contraintes de construction** : pour chaque forme visuelle qui n'est pas directement produite par un instrument, plusieurs opérations de traçage sont nécessaires et il y a un ordre pour ces opérations. Ne pas en tenir compte rend la construction impossible. Naturellement, tout changement d'instrument entraîne un changement dans les propriétés géométriques qui doivent être explicitement mobilisées.

C'est cette entrée qui a donné lieu aux innovations les plus spectaculaires pour l'enseignement de la géométrie au cours de ces vingt dernières années (Laborde 1994). Des logiciels de construction ont été développés. Leur avantage, outre celui déjà considérable d'exécution automatique des tâches de réalisation comme pour les calculatrices, est de supprimer complètement les approximations compensatrices de la main dans l'utilisation des instruments. Autrement dit, il n'est plus possible de réussir une construction sans prendre en compte les propriétés géométriques. Ainsi Cabri Géomètre, une figure construite doit pouvoir conserver sa configuration si l'on bouge l'un de ses points.

**L'inventeur-bricoleur.** Pour présenter cette quatrième entrée, il suffit d'évoquer les problèmes classiques du type suivant :

- (1) Comment partager, d'un seul coup de ciseau, un triangle de manière à pouvoir assembler les deux morceaux en un parallélogramme ?
- (2) Comment construire, à partir d'un carré donné, un autre carré deux fois plus grand (dont l'aire soit le double) ? (Ce problème peut être donné sur du papier quadrillé, ce qui réduit les opérations de mesure à un simple comptage de carreaux)

Ces problèmes ont en commun d'exiger une DECONSTRUCTION VISUELLE des formes perceptives élémentaires qui s'imposent au premier coup d'œil, pour pouvoir obtenir la reconfiguration, ou la figure, demandée. Ces problèmes touchent une capacité fondamentale qui est la condition nécessaire à toute utilisation heuristique des figures : **ajouter des tracés supplémentaires à une figure de départ** (c'est-à-dire celle qui accompagne un énoncé de problème, ou que l'on peut construire à partir d'un énoncé de problème) **afin de « voir » (= découvrir sur la figure) une procédure de résolution.** Ce sont ces tracés supplémentaires qui vont permettre une réorganisation visuelle de la figure de départ. Ici, c'est la recherche de ce tracé supplémentaire qui constitue le problème : « comment partager d'un seul coup de ciseau... ? »

Passer d'une manière de voir à une autre constitue un changement profond de regard, qui est trop souvent ignoré dans l'enseignement. Car le fonctionnement cognitif impliqué par chacune de ces manières de voir n'est pas le même, comme nous le montrerons dans la deuxième partie de cet exposé. Mais avant, il n'est peut-être pas inutile de souligner, que chacune de ces manières de voir joue directement sur la compréhension et les connaissances géométriques que les élèves peuvent ou ne peuvent pas acquérir, selon qu'ils entrent ou non dans chacune des manières de voir. Dans le cadre restreint de cet exposé, on se contentera comme explication du tableau comparatif suivant :

|                                           | BOTANISTE                                                                  | ARPENTEUR-<br>géomètre                                                                | CONSTRUCTEUR                                                                                       | INVENTEUR-<br>bricoleur                                                                                                                               |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| STATUT<br>EPISTEMO-<br>LOGIQUE            | CONSTAT<br>perceptif immédiat :<br>« ça se voit sur ... »                  | CONSTAT résultant<br>de la lecture d'un<br>instrument de mesure                       | RESULTAT <i>d'une</i><br><i>procédure de construction</i>                                          | RESULTAT <i>d'une</i><br><i>décomposition de la</i><br><i>figure de départ en</i><br><i>unités figurales que l'on</i><br><i>reconfigure autrement</i> |
| SOURCE<br>COGNITIVE<br>DE LA<br>CERTITUDE | <b>Superposition</b><br>effectuée à l'œil ou<br>en utilisant un<br>gabarit | <b>Comparaison</b> des<br>valeurs numériques qui<br>ont été obtenues<br>empiriquement | <b>Nécessité interne</b> à<br>l'enchaînement des<br>opérations de la procédure<br>de construction. | <b>Invariance</b> des unités<br>figurales qui sont les<br>référents de la<br>transformation de la<br>figure de départ                                 |

Figure 2 Le mode de compréhension et de connaissance liée à chacune des manières de voir

Cette diversité des manières de voir soulève deux questions cruciales pour l'enseignement de la géométrie et pour l'organisation des situations d'apprentissage.

(1) Peut-il y avoir, pour les apprenants, des transferts pour la manière de voir liée à un type d'activité à une autre manière de voir quand on propose un autre type d'activité aux élèves ? Ainsi, par exemple, le fait de privilégier les activités de construction de figures entraîne-t-il le développement de la capacité heuristique à enrichir et à réorganiser les figures ?

Cette première question peut être élargie :

(1bis) Y aurait-il un ordre, et donc une hiérarchie à respecter, pour proposer les activités qui sont propres à chacune de ces quatre entrées ? Par exemple, l'approche botaniste peut-elle être considérée comme la première étape nécessaire à toute acquisition des connaissances géométriques ?

(2) Quelle est la manière de voir qui est exigée par n'importe quelle démarche discursive en géométrie, est-ce l'une de ces quatre manières de voir ou en est-ce une cinquième ?

Et le caractère crucial de cette question peut être souligné par cette question corollaire si j'ose dire :

(2bis) Est-ce que certaines des quatre manières de voir que nous venons d'analyser ne seraient pas incompatibles avec cette cinquième manière de voir ? Autrement dit, non seulement l'ignorance de la spécificité de cette cinquième manière de voir serait préjudiciable à l'enseignement de la géométrie, mais l'accent mis d'emblée sur des entrées comme l'entrée botaniste créerait des obstacles insurmontables à tout apprentissage de la géométrie.

Ces questions sont rarement posées et étudiées tellement une réponse « oui » est considérée évidente pour la première, aussi bien dans sa formulation stricte que dans sa formulation élargie. Quant à la seconde elle peut paraître bien étrange à beaucoup.

Pourtant c'est là qu'il faut chercher le nœud de toutes les difficultés qui conduisent à faire de la géométrie qui ne prend pas ou qui ne marche pas, à moins peut-être de disposer de logiciels...

## II Deux modes opposés de fonctionnement cognitif : la visualisation iconique et la visualisation non iconique

Commençons par quelques remarques pour attirer l'attention sur la complexité de l'acte de « voir », trop souvent méconnue dans l'enseignement de la géométrie.

Ce qu'on appelle « voir » recouvre toujours deux niveaux d'opérations qui sont différents et intrinsèquement indépendants. Il y a, d'une part, la **reconnaissance discriminative de formes** et il y a, d'autre part, **l'identification des objets correspondant aux formes reconnues**. Le problème cognitif majeur concernant toute visualisation est de savoir comment se fait le passage d'une reconnaissance discriminative de formes à l'identification des objets donnés à voir.

Ce problème est rarement étudié parce que dans la perception du monde qui nous environne ces deux niveaux d'opération ne semblent pas dissociables puisqu'ils sont simultanés (du moins à l'échelle de notre conscience), l'objet étant immédiatement donné avec la forme qui permet de le distinguer. Cette fusion entre reconnaissance d'une forme et identification d'un objet, base de toute évidence perceptive, est la condition pour des réponses rapides et adaptées à des situations nouvelles et imprévues. En revanche il n'en va plus de même pour la perception des représentations construites par production de tracés. Il n'y a aucune relation intrinsèque entre les formes reconnues dans un tracé et l'objet que ce tracé « veut » représenter. Comment alors peut s'effectuer le passage de l'un à l'autre ?

Le passage repose sur une « **ressemblance** » entre la forme discriminée et la forme typique de l'objet représenté. C'est cette ressemblance qui est généralement considérée comme constitutive de l'image. Ainsi, Pierce en a fait la caractéristique de toutes les représentations iconiques par opposition aux symboles et aux indices. Généralement cette ressemblance suffit pour reconnaître directement, et immédiatement, l'objet représenté, comme dans la perception du monde environnant. Ainsi il n'y a pas besoin de savoir lire pour regarder des bandes dessinées et en suivre le récit. Naturellement, ce mécanisme cognitif d'iconicité n'est pas toujours suffisant. Il faut parfois recourir à une **énonciation** implicite ou explicite. En d'autres termes, il faut parfois un apport verbal d'informations, intégré à l'image comme légende ou comme codage d'un élément figuratif, pour pouvoir identifier ce que représentent les formes discriminées. Mais ce rôle auxiliaire de l'énonciation ne doit pas nous faire oublier l'importance du mécanisme d'iconicité. Il continue à s'imposer de manière autonome chaque fois que quelque chose (dessin, figures ou formes de pièces à manipuler) est donné à voir.

Maintenant nous pouvons nous demander ce qu'il en est de l'acte de « voir » tel qu'il est sollicité dans les différentes activités de géométrie ? Est-il aussi simple qu'on le suppose souvent en disant de manière quasi réflexe « ça se voit sur... » ? Limitons-nous pour l'instant au second type d'opérations pour chacune des quatre manières de voir que nous avons distinguées. Le fait majeur que nous voudrions mettre en évidence est que ces quatre manières de voir renvoient à deux modes totalement opposés de fonctionnement cognitif : l'un qui est le mode normal de visualisation, du moins en dehors de la géométrie, et l'autre que l'on rencontre seulement en géométrie. Or la visualisation iconique présente non seulement des limitations rédhibitoires pour l'acquisition de connaissances géométriques mais elle dresse des obstacles pour le développement, chez les élèves, de la visualisation non iconique, malgré les nombreuses activités de construction qui peuvent être proposées.

| VISUALISATION ICONIQUE :                                                                                                                                                                                                                     |                        | VISUALISATION NON ICONIQUE :                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| <p><i>ÇA RESSEMBLE AU</i> profil d'un objet réel, ou à un ensemble d'itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type (étalon)</p> <p>La figure reste un objet indépendant des opérations que l'on effectue sur elle</p> |                        | <p>C'est une <i>SEQUENCE</i> d'<i>OPERATIONS</i> qui permet de reconnaître des propriétés géométriques, par impossibilité d'obtenir certaines configurations, ou par invariance des configurations obtenues.</p> <p>La figure est une configuration contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexes</p> |                     |
| BOTANISTE                                                                                                                                                                                                                                    | ARPENTEUR-<br>géomètre | CONSTRUCTEUR                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | INVENTEUR-bricoleur |

Figure 3. Comment à partir de la discrimination de formes dans un ensemble de tracés identifier les objets représentés ?

### 1. Les impasses de la visualisation iconique

La visualisation iconique repose sur une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier. Naturellement la situation n'est pas la même selon que le référent est un objet matériel dans l'espace environnant<sup>2</sup> ou une représentation de

<sup>2</sup> Lorsque le référent est l'espace physique environnant ou des objets matériels, l'établissement des correspondances entre les formes reconnues dans un tracé et le référent réel implique la mobilisation du corps de celui qui regarde (sa position, son orientation, ses déplacements ou ses mouvements de manipulation). Les cartes, les plans de ville, les schémas accompagnant des instructions de montage en sont un excellent exemple (Duval)

sa forme type. Nous nous limiterons ici à la seconde situation. Ici la visualisation iconique suppose la connaissance d'une forme type pour chaque objet géométrique à identifier, la comparaison tolérant des écarts plus ou moins grands entre les formes reconnues et la forme type. Il y a par exemple une forme type du rectangle qui exclut une trop grande disproportion entre longueur et largeur. De même, la forme type d'un triangle requiert que les hauteurs soient situées à l'intérieur. En outre chaque forme type est associée à un nom qui permet de l'évoquer et qui lui confère le statut d'objet. Les impasses de la visualisation iconique sont bien connues.

- La reconnaissance étant centrée sur le contour d'une zone ou d'une surface, ***une forme c'est d'abord un profil***. Cela veut dire que toutes les propriétés qui ne sont directement liées au contour caractéristique d'une forme (celles liées aux diagonales les quadrilatères remarquables) restent hors champ et donc moins facilement mobilisables quand les énoncés de problèmes ne les mentionnent pas explicitement. Cela veut dire aussi qu'il y a une résistance à sortir du contour fermé de la figure, en prolongeant par exemple les côtés pour faire apparaître les droites sous-jacentes.
- Les formes apparaissent comme étant ***stables***. Elles ne sont donc pas vues d'une manière qui permette de les transformer en d'autres formes semblables ou, surtout, différentes. Par exemple il est difficile d'apercevoir une superposition de parallélogrammes dans un réseau de droites d'où l'on voit d'emblée se détacher une juxtaposition de triangles. Et cela pourra être d'autant plus difficile que la reconnaissance des formes s'accompagne de l'énonciation, implicite ou explicite, du nom de ce que l'on identifie.

Or ces tendances lourdes de la visualisation iconique vont contre le développement de ce qui doit devenir le geste réflexe pour pouvoir faire de la géométrie : décomposer toute forme, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ, en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions.

## **2. La visualisation non iconique ou la déconstruction de formes**

La décomposition des formes discriminées (à commencer par celles qui apparaissent être visuellement simples) en unités figurales est le préalable à l'entrée dans les manières non iconiques de voir les figures. Or le point essentiel est qu'il existe au moins deux manières radicalement différentes de décomposer une figure de départ en unités figurales. Pour les

distinguer, il suffit de prendre comme critère une pratique qui est spécifiquement mathématique dans la manière d'utiliser une figure de départ, c'est-à-dire une figure qui est, soit donnée avec un énoncé de problème, soit constructible à partir de cet énoncé : l'introduction de tracés supplémentaires. On la retrouve dans les deux modes de visualisation non iconique que nous avons distingués mais elle y intervient de manière radicalement différente. Dans un cas elle est imposée et produite par les instruments utilisés pour construire une figure. Dans l'autre elle doit être « imaginée » par celui qui regarde car le choix du tracé supplémentaire permet de voir une procédure de résolution du problème posé. Or cela renvoie à deux types de fonctionnements cognitifs qui n'ont rien de commun.

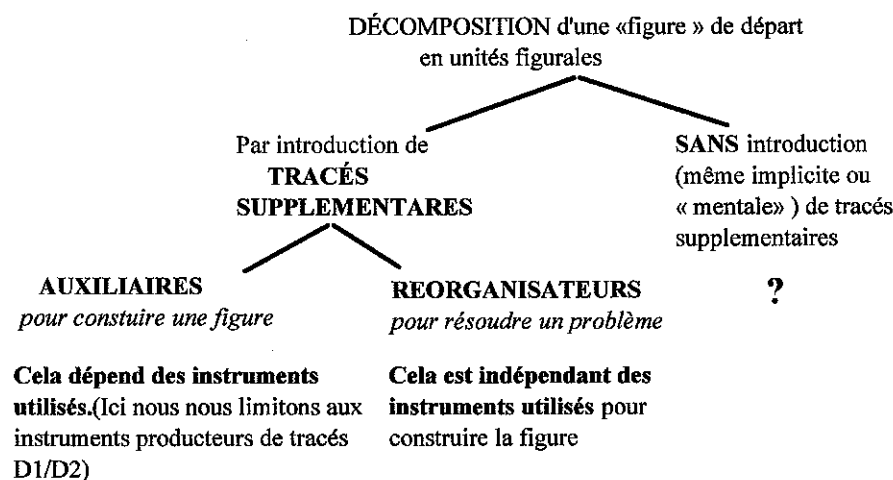


Figure 4. Deux ou trois modes de visualisation non iconique ?

La caractéristique des figures géométriques, par rapport à toutes les autres types de figures est qu'elles peuvent se construire à l'aide d'instruments et principalement d'instruments producteurs de tracés D1/D2<sup>3</sup>. La production de chaque tracé correspond à la fois à une instruction formulable (les « figures téléphonées ») ou formulée (dans le menu d'un logiciel) et à la mobilisation d'une propriété géométrique en relation avec l'instrument utilisée

<sup>3</sup> Le «dénominateur» correspond à la prise en compte de l'espace où les représentations sont produites :

- celui d'objets physiques que l'on peut manipuler physiquement (nD /3D) : maquettes de polyèdres (3D/3D), feuille papier que l'on peut plier ou découper (2D/3D), ficelles que l'on peut tendre (1D/3D) comme avec un géoplan. J'appellerai ces objets, objets maquettes (pour les distinguer des instruments)
- celui d'un support de projection (nD/2D) pour la représentation qui sera alors produite par des tracés ou par des empreintes : sable, papier, écran électronique

Cela permet donc de distinguer les activités géométriques **réalisées matériellement** et les activités géométriques qui sont **réalisées représentativement**. Souvent les objets maquettes sont utilisés pour une interprétation iconique des représentations graphiques. Cela apparaît d'ailleurs dans les définitions : la droite comme une ficelle tendue... Et cela stérilise l'ouverture de la représentation.

(compas, règle non graduée, règle graduée...). Autrement dit l'activité de construction de figures, presque toujours des configurations de formes 2D/2D ou 3D/2D, repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D. Mais dans cette activité de déconstruction-reconstruction toute l'attention porte sur la reconstruction, car la déconstruction des formes 2D/2D est automatiquement faite par l'instrument tandis que la reconstruction exige un ordre dans les instructions à donner et donc dans la séquence des opérations de traçage à faire. Or cette activité conduit à la production de tracés qui n'appartiennent pas à la figure à construire, qu'il s'agisse soit de tracés intermédiaires, soit de tracés qui vont déborder le contour des formes à tracer : par exemple les droites qui sont les supports des côtés du carré ou du triangle à construire. *Nous appellerons ces tracés intermédiaires ou ces tracés supports des «tracés auxiliaires»*. D'ailleurs dans un environnement papier crayon, on peut souvent observer l'habitude désastreuse de les effacer, une fois la figure à construire obtenue.

La situation est totalement autre lorsqu'il s'agit de partir d'une figure pour résoudre un problème. Le problème du partage d'un triangle en un seul coup de ciseau de manière à assembler les deux morceaux en un parallélogramme en est l'exemple typique. Il s'agit de transformer un triangle en un parallélogramme par l'ajout d'un tracé supplémentaire. Il s'agit donc là de la déconstruction d'une forme visuelle de base pour obtenir une autre forme visuelle de base. Et le choix de ce tracé supplémentaire va dépendre de la manière dont les deux parties du triangle obtenues par ce tracé vont permettre de les réassembler sous la forme d'un parallélogramme. Il s'agit évidemment d'une déconstruction qui est sans rapport avec la déconstruction impliquée dans la construction des figures. Car le choix de ce tracé est indépendant de la manière dont le triangle peut être construit et il n'y a rien de commun entre ce tracé supplémentaire à trouver et les tracés auxiliaires. Nous appellerons « tracés réorganisateurs » tous les tracés permettant de réorganiser une figure donnée en vue d'y faire apparaître des formes non reconnaissables dans cette figure donnée. L'utilisation heuristique d'une figure dépend évidemment de la capacité à « voir » les tracés réorganisateurs possibles.

Il faut souligner ici un point fondamental pour comprendre l'importance et la spécificité de l'acte de voir dans l'apprentissage de la géométrie : **la visualisation non iconique est totalement indépendante de toute énonciation explicite ou implicite**. En d'autres termes, elle n'est en rien subordonnée à une connaissance des propriétés géométriques. Cela semble trivial pour les activités de type construction de figures dans la mesure où ce sont les

instruments utilisés qui commandent, dirigent ou contrôlent la décomposition visuelle des formes. En revanche cela l'est moins pour l'utilisation heuristique des figures où le plus souvent les analyses de la résolution de problèmes accordent un rôle directeur à la connaissance des propriétés pour l'exploration des figures. Par exemple, on peut se demander s'il faut connaître le théorème des milieux pour résoudre le problème de la reconfiguration du triangle en un parallélogramme ou, au contraire, s'il n'y a pas des apprentissages spécifiques qui rendent les élèves capables de « voir » ou de découvrir le tracé réorganisateur à ajouter sans connaître la propriété (et également de voir pour d'autres problèmes).

Nous reviendrons sur cette question qui touche le rôle heuristique de la visualisation dans la résolution de problèmes de géométrie élémentaire. Mais déjà nous pouvons faire les remarques suivantes : si l'on peut modifier son discours sur des objets, on ne peut pas modifier les formes qui sont d'emblée reconnues dans une figure c'est-à-dire dans un ensemble de tracés. Et cela pour une raison simple qui tient non pas au second niveau des opérations constituant l'acte de voir mais au premier niveau. A la différence de l'énonciation et donc de la production d'explications ou de justifications, la reconnaissance visuelle de formes échappe à tout contrôle intentionnel. Car il y a des lois d'organisation des données visuelles, mises en évidence par la *Gestalt-theorie*, qui imposent la reconnaissance de certaines formes *contre* la reconnaissance d'autres formes, même si celles-ci sont verbalement évoquées. Ce qui conduit parfois certaines recherches didactiques à déplorer que dans la résolution de problèmes de géométrie, les élèves observés soient arrêtés par la perception de la figure ! En fait un apprentissage visant à rendre les élèves capables de « voir » ou de découvrir le ou les tracés réorganisateurs à ajouter pour trouver la solution d'un problème doit se faire au niveau de la reconnaissance des formes et non pas à celui de l'identification des objets représentés comme nous l'indiquerons plus loin.

### **3. Les acquisitions relatives à une manière de voir aident-elles à entrer dans les autres manières de voir ?**

Cette question du transfert de ce qui a été acquis dans un type d'activité proposé en classe à un autre type d'activité qui peut ensuite être proposé, est la question cruciale pour l'enseignement de la géométrie au Primaire et au Collège. Car c'est sur la supposition d'un transfert que repose l'élaboration d'une progression dans l'organisation curriculaire de l'enseignement et aussi dans les choix successifs des activités.

Pour ce qui concerne un transfert des acquisitions entre les différentes manières de voir mobilisées par les différents types d'activités, le passage d'un fonctionnement cognitif de la visualisation iconique à celui de la visualisation non iconique apparaît trop important pour que la possibilité d'un transfert soit envisageable, du moins pour la grande majorité des élèves au Primaire et au Collège. Et même si on s'en tient à la visualisation non iconique, il n'y a rien de commun entre la décomposition des formes reconnues qui est réalisée instrumentalement dans la phase de construction d'une figure et la décomposition par réorganisation qui exige que l'on voit d'autres formes que celles qui sont d'emblée reconnues. En oubliant provisoirement le premier type d'opération constituant l'acte de voir, c'est-à-dire la reconnaissance de formes, et s'en tenant au deuxième type d'opération, celui permettant l'identification des objets à partir des formes reconnues on peut résumer l'opposition entre la visualisation iconique (commune à tous les domaines de connaissance) et la visualisation non iconique (spécifique aux mathématiques) par le schéma ci-dessous.

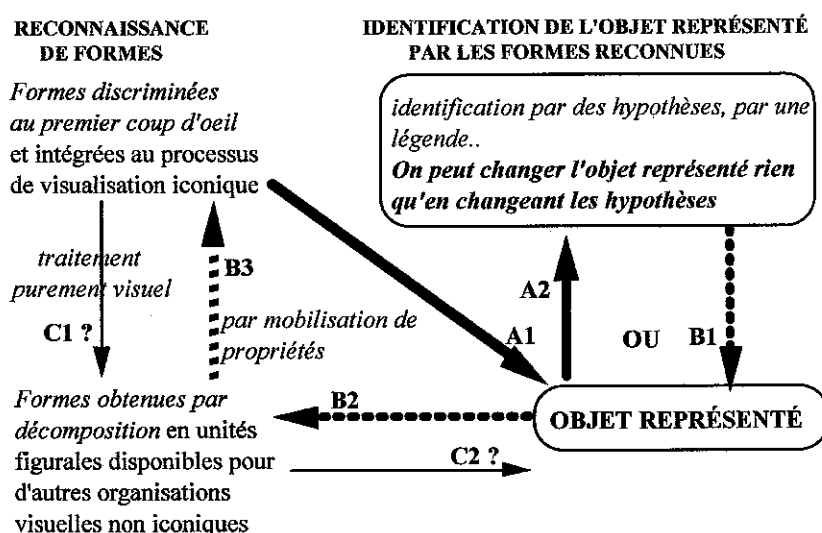


Figure 5. Deux modes de fonctionnement cognitifs pour identifier les objets représentés dans une figure à partir des formes qui sont y perceptivement reconnues.

La visualisation non iconique (flèches en pointillés B1-B3), sans laquelle on ne peut entrer dans les démarches mathématiques qui sont mises en œuvre en géométrie exige un retournement complet de la manière normale de voir des figures (flèches A1-A2). Comment aider les élèves non seulement à en prendre conscience mais à l'effectuer réellement ? Peut-on considérer que toutes les activités de construction, qui imposent instrumentalement une déconstruction des formes visuellement reconnues, soient suffisantes pour cela ? Il semblerait que ce soit là une opinion largement partagée, du moins si l'on considère l'importance donnée

depuis une trentaine d'année à tout ce qui touche aux activités de construction, même si cela ne semble pas aider la plupart des élèves à dépasser l'évidence perceptive immédiate et à développer des stratégies d'exploration visuelle des figures pour résoudre des problèmes de géométrie.

En fait, pour saisir la complexité cognitive du passage de la visualisation iconique à une visualisation non iconique, il nous faut oublier la gamme très riche de toutes les activités qui sont proposées aux élèves pour établir un pont entre ce qui serait pratique et ce qui serait théorique, entre ce qui serait concret et ce qui serait formel, entre ce qui serait spatial et ce qui serait proprement géométrique, ou encore, dans une représentation figurale, entre ce qui serait matériel et ce qui serait « mental ». Il nous faut aborder la question en amont de toutes ces oppositions trop globalisantes : quelle est la manière mathématique de voir qui est requise par n'importe quelle démarche discursive en géométrie, que ce soit l'énonciation de propriétés, (définitions ou théorèmes) la déduction d'autres propriétés.... ? Est-ce l'une des quatre manières de voir, ou seulement l'un des deux modes de visualisation non iconique que nous venons de distinguer ? Nous retrouvons ici la question que nous avons laissée en suspens (*supra* Figure 4) : existe-t-il deux ou trois manières non iconiques de décomposer les formes ? Et s'il y en a une troisième, quel type d'activité peut y faire entrer les élèves ?

### **III. Une cinquième manière de voir requise par les raisonnements mathématiques : la déconstruction dimensionnelle des formes.**

Elle consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, et donc reconnue comme forme  $nD/2D$ , en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme. Ainsi la figure d'un cube ou d'une pyramide ( $3D/2D$ ) est décomposée en une configuration de carrés, de triangles, etc. (unités figurales  $2D/2D$ ). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales  $1D/2D$ ). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en «points» (unités  $0D/2D$ ). **Notons qu'avec les points nous sortons de toute visualisation.** En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités  $1D/2D$  (tracés sécants ou tracés formant un coin («sommets», « angles »...)). Autrement dit, le marquage d'un point sur un tracé ou hors de ce tracé (par exemple pour fixer les extrémités d'un segment ou son milieu) relève d'un codage

symbolique. C'est d'ailleurs à ce codage symbolique que l'on associe généralement des lettres !

Pour bien mettre en évidence le caractère irréductible de cette manière de voir à celles que nous venons de décrire et pour montrer qu'elle constitue le premier seuil décisif pour l'apprentissage de la géométrie, nous nous contenterons, dans ce papier, de la comparer à la décomposition heuristique des formes correspondant aux activités de l'inventeur-bricoleur.

### 1. La décomposition heuristique par division méréologique des formes reconnues

L'utilisation heuristique d'une figure exige souvent que l'on regarde une figure comme s'il s'agissait des pièces d'un puzzle. Mais cela suppose que l'on **décompose en unités figurales du même nombre de dimensions que la figure de départ**. Ainsi un triangle (2D/2D) peut être décomposé en d'autres triangles (2D/2D). Mais aussi, un cube matériel (3D/3D) ou n'importe quel autre solide peut être partagé en blocs qui seront aussi des polyèdres (3D/3D). *Ce partage, que nous appellerons une division méréologique (division d'un tout en parties juxtaposables ou superposables), se fait toujours pour reconstruire avec les parties ainsi obtenues une figure souvent très différente visuellement.* Cette décomposition s'inscrit donc dans un processus plus général de *métamorphose*, pour ne pas dire d'anamorphose (laquelle est une transformation par un processus de déformation continue). La décomposition méréologique des figures est l'une des démarches les plus anciennes dans l'histoire de la géométrie. D'ailleurs, les premières « démonstrations » de la relation de Pythagore se fondent sur une décomposition /reconfiguration méréologique (Padilla, 1992). Cette décomposition peut être :

- *strictement homogène* : la décomposition se fait en unités de même forme que la figure de départ . Les quadrillages constituent les figures fonds (les « supports » !) qui souvent guident les premières opérations de décomposition méréologique.

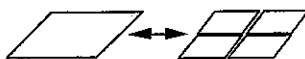


Figure 6

- *homogène* : la décomposition se fait en unités figurales de même forme mais différentes de la forme de la figure de départ :



Figure 7

— *hétérogène* : la décomposition se fait en unités figurales de formes différentes entre elles. Le problème du partage d'un triangle en deux parties pour reformer un parallélogramme implique une décomposition hétérogène de ce type.

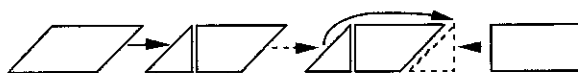


Figure 8

Les décompositions homogènes sont des transformations qui sont visuellement réversibles et qui peuvent être spontanément amorcées à la seule vue de la figure. En revanche, les décompositions hétérogènes ne le sont pas.

Pour une figure de départ déterminée par un énoncé de problème, il y a évidemment plusieurs décompositions méréologiques possibles, mais toutes ne conduisent pas à la solution du problème. Parfois même celles qui y conduisent ne sont pas directement visibles sur la figure. Autrement dit il y a des situations où la figure aide à voir et d'autres où elle empêche de voir. On peut déterminer les facteurs qui favorisent ou inhibent ces processus de division méréologique et de réorganisation des formes reconnues (Duval 1995b). Et ces facteurs peuvent être des variables didactiques dans des activités visant à faire entrer les élèves dans une utilisation heuristique des figures.

La décomposition méréologique présente une double particularité :

- elle peut s'opérer soit matériellement (par découpage et réassemblage des pièces obtenues comme pour un puzzle), soit graphiquement (par ajout de ce que nous avons appelé plus haut des tracés réorganisateurs), soit même simplement du regard (et non pas « mentalement ») ; ces trois modalités sont presque équivalentes à un détail près : quand une partie doit intervenir simultanément dans deux sous-reconfigurations différentes, il faut disposer matériellement de deux pièces pour cette même partie ;
- la décomposition par division méréologique est très souvent sans lien direct avec le discours mathématique, et c'est pour cela qu'elle permet l'exploration purement visuelle d'une figure de départ pour détecter les propriétés géométriques à utiliser pour résoudre un problème posé.

## 2. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes

La déconstruction dimensionnelle présente deux caractéristiques qui l'opposent non seulement à la décomposition méréologique mais également à la déconstruction instrumentale.

- Elle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive. Et on pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif. Pour la représenter graphiquement, il faut en quelque sorte transformer les figures géométriques en schémas. Ainsi la seule énonciation des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme par exemple implique que l'on déconstruise dimensionnellement une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D. Car les propriétés d'un objet 2D/2D (par exemple un parallélogramme représenté par A ci-dessous) sont des relations entre des objets représentés par des unités figurales 1D/2D (les configurations B et C ci-dessous) ou 0D/2D.

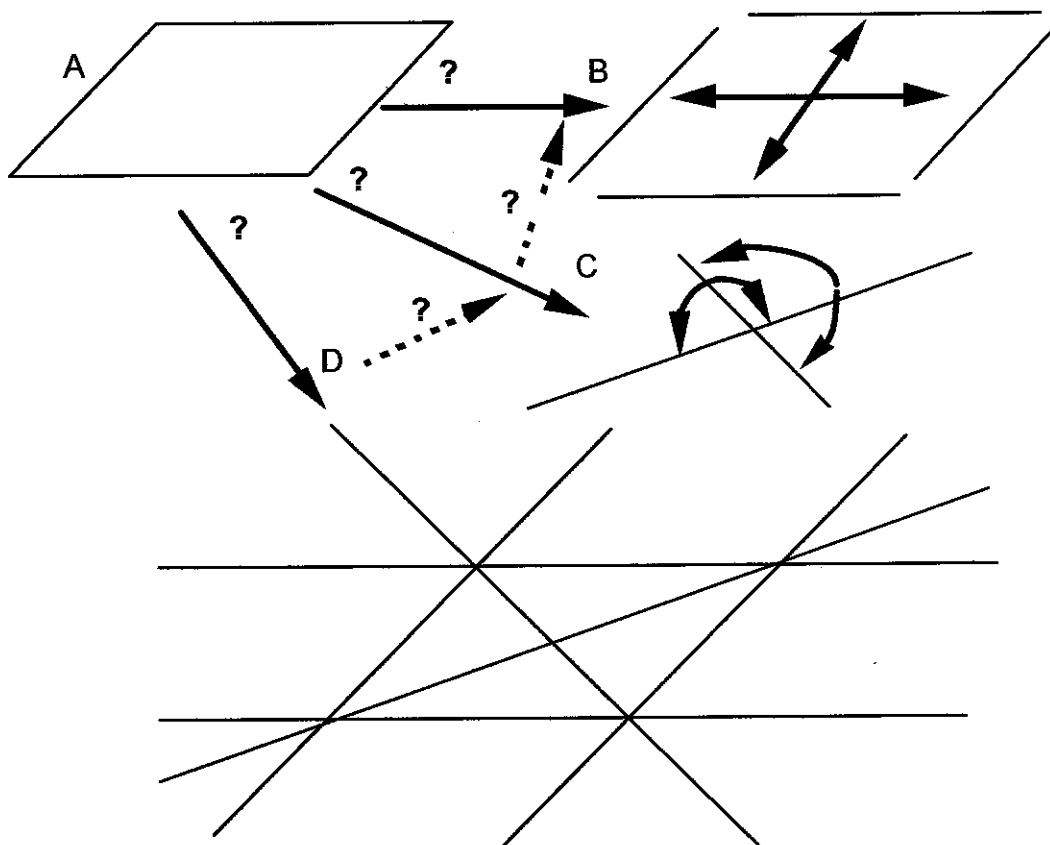


Figure 9. Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'une forme.

Cela représente une révolution cognitive pour le fonctionnement spontané de la visualisation iconique ou non iconique. La déconstruction dimensionnelle des formes est une démarche qui va contre tous les processus d'organisation et de reconnaissance perceptive des formes. Ce

qui, rappelons le, n'est pas le cas de la décomposition de type puzzle : car celle-ci, au contraire, repose sur la mobilisation de ce processus tout en cherchant à en dépasser les limitations ou les restrictions immédiates. Or la première loi de l'organisation et de la reconnaissance perceptive des formes est *la priorité immédiate et stable des unités 2D sur les unités 1D ou 0D*. Cela veut dire non seulement que l'on voit d'abord un carré (ou un rectangle) avant de voir quatre côtés, mais cela veut dire surtout que tous les tracés que l'on perçoit d'emblée comme formant le contour de la surface carrée (ou rectangulaire) restent, d'une certaine manière, non détachables de cette reconnaissance visuelle première. **Les côtés d'un polygone restent les bords non séparables de la surface qu'ils délimitent.** Tout ce qui s'impose comme une forme 2D/2D prend d'ailleurs une force d'« image objet » qui va servir d'unité de référence pour identifier d'autres figures. Et cela rend inconcevable et invisible le processus de déconstruction dimensionnelle des formes. Même les activités de construction de figures, où elle est imposée *de facto* par les instruments, restent pratiquement sans effet sur le fonctionnement cognitif qui impose la primauté visuelle des formes 2D sur les formes 1D ou les unités 0D. C'est pourquoi la déconstruction dimensionnelle, c'est-à-dire le passage des surfaces aux lignes ( $\neq$  bords), représente une révolution cognitive par rapport aux autres types de visualisation. Il est plus difficile à réaliser encore que le passage des solides aux figures planes que l'on peut obtenir avec un plan d'intersection.

- La déconstruction dimensionnelle ne peut être matérialisée d'aucune manière, alors que la décomposition méréologique peut être effectuée ou simulée matériellement avec des objets physiques que l'on sépare et que l'on réunit d'une autre manière. Davantage elle ne peut pas, à strictement parler, être montrée graphiquement à moins d'introduire un couple de figures reliées entre elles *selon la structure proportionnelle* d'une équivalence ou d'une implication. Dans la Figure 9 ci-dessus le schéma fusionne trois propositions auxquels correspondent respectivement les liens,  $A \rightarrow B$ ,  $A \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow D$ , ce qui n'est pas la manière habituelle de visualiser pratiquée dans l'enseignement et dans les manuels, celle-ci en restant le plus souvent à la manière de voir du botaniste !

On peut alors voir à la fois la similitude et surtout l'opposition entre division méréologique des formes 3D ou 2D et la décomposition dimensionnelle des formes nD. **Alors que la division méréologique se fait pour une reconfiguration faisant apparaître de nouvelles formes non reconnaissables dans la figure de départ, la déconstruction dimensionnelle se fait pour UNE (RE)CONSTRUCTION DEDUCTIVE DES OBJETS REPRESENTES.** Autrement dit, la

division méréologique reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable.

### 3. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes perçues correspond au fonctionnement profond de la visualisation en géométrie.

Quand nous disons « fonctionnement profond », nous signifions par cette qualification que les autres manières de voir sont des manières de voir qui restent en surface. Et cela conduit à modifier la notion de « figure » qu'on l'entende dans son sens classique ou qu'on l'entende selon l'opposition entre dessin et figure, opposition qui met l'accent sur le caractère particulier de la visualisation réalisée et sur le caractère général de l'objet représenté, lequel dépend des propriétés. Toute figure doit émerger de ce que nous avons appelé ailleurs un « circuit de visualisation » organisé autour d'une trame de tracés 1D/2D, car à partir d'un **réseau de droites** on peut faire apparaître une grande diversité de Formes 2D/2D.

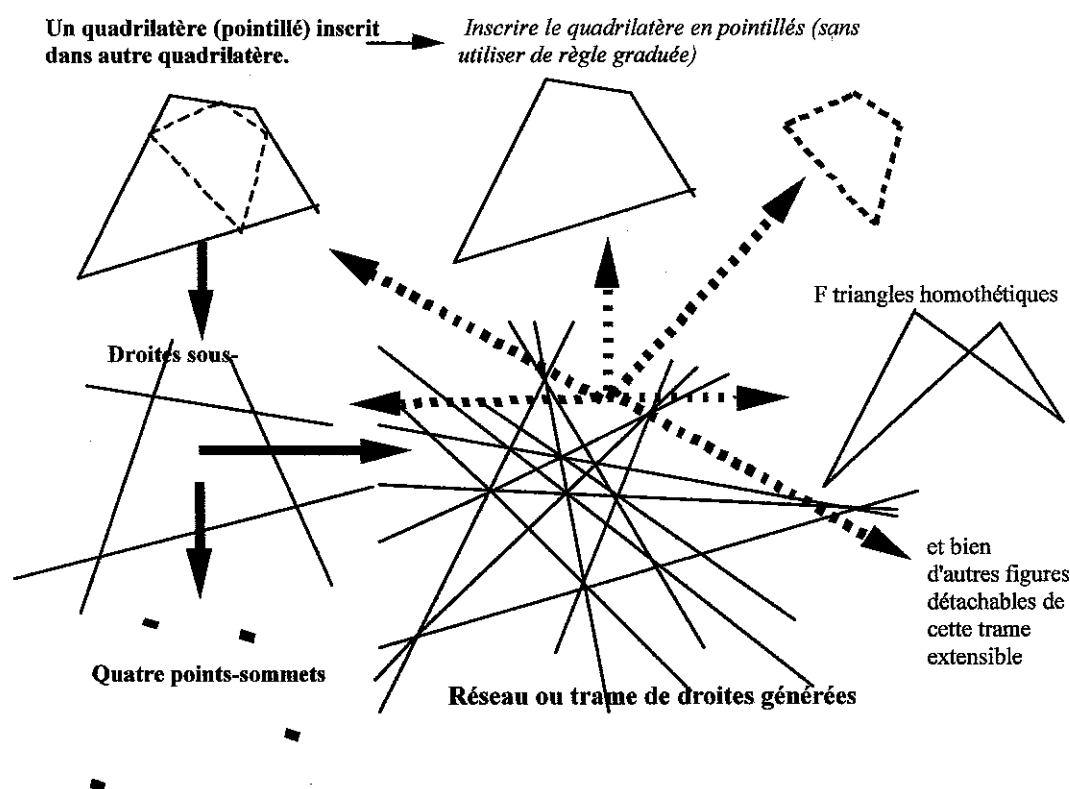


Figure 10

La résolution du problème exige de faire apparaître le réseau des droites supports, de les prolonger pour faire apparaître de nouveaux points d'intersection et construire ensuite de

nouvelles droites. Mais pour penser à cela il faut aussi être capable de reconnaître dans le réseau de droites plusieurs figures géométriques possibles dont les quadrilatères !

Dans la visualisation iconique toute figure tend à être une représentation stable ou non modifiable parce qu'image ou représentation d'un objet. Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. Autrement dit toute figure, en géométrie plane, est une configuration transformable en d'autres, *chacune se détachant d'une même trame, au gré des propriétés ou des objets que l'on nomme.*

Deux points sont donc essentiels pour bien comprendre le fonctionnement en profondeur de la déconstruction dimensionnelle des formes.

- C'est la trame d'unités figurales 1D/2D qui est le champ des unités figurales de base et le champ réel du travail sur les figures, et non plus les unités figurales 2D/2D introduites comme les figures de base. A partir d'un réseau de droites on peut faire apparaître une grande diversité de formes 2D/2D. Mais cela requiert aussi une reconnaissance des formes non visibles immédiatement, du type de celle qui est mise en œuvre dans la division méréologique.
- Cette déconstruction dimensionnelle des formes est le pré-requis pour une compréhension effective de toute énonciation des propriétés géométriques et donc pour leur mobilisation dans la résolution de problèmes.

Revenons, pour illustrer ces deux points au problème du reformatage d'un triangle en parallélogramme. Pour justifier la solution de l'inventeur bricoleur, il faut faire appel au théorème des milieux et aux propriétés du parallélogramme. **Mais, à l'inverse, suffisait-il de connaître ce théorème pour trouver la solution ?** En d'autres termes comment passer de la figure d'un triangle à la reconfiguration IV (ci-dessous), *directement, ou au contraire en étant capable d'un détour par le réseau de droites sous-jacents*, lequel permet la reconnaissance potentielle de triangles **ET** de parallélogrammes ? Autrement dit seul celui qui a le réflexe de voir la figure de départ sur le fond du réseau des droites qui en supportent les côtés, ou qui a le réflexe de générer le réseau de droites sous-jacents peut voir la configuration III, laquelle est la seule qui puisse s'articuler cognitivement de manière pertinente et congruente à la justification mathématique. Et nous pouvons préciser l'observation faite plus haut sur l'exemple précédent : à partir d'un réseau de droites on peut faire apparaître une

grande diversité de formes 2D/2D et *donc voir le passage mathématique* des unes aux autres (c'est-à-dire les propriétés qui le rendent possible).

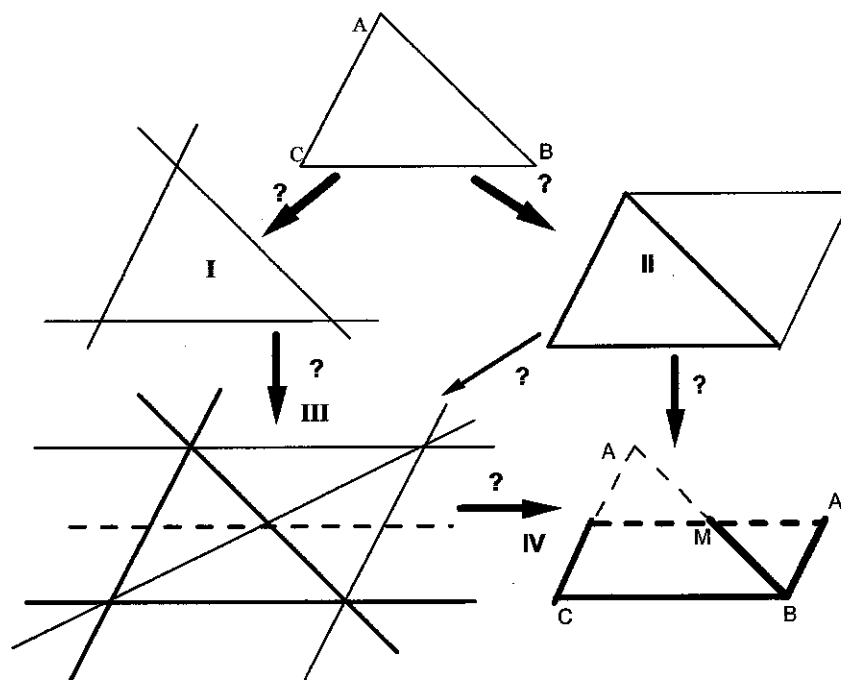


Figure 11 Déconstruction dimensionnelle du triangle de départ : chemin I, III et non pas II  
Cela montre que le regard mathématique sur les figures implique le développement de la création de « circuits de visualisation », c'est-à-dire de circuits qui associent à la fois des décompositions par division méréologique et des décompositions par déconstruction dimensionnelle, l'articulation entre visualisation et discours mathématique reposant exclusivement sur la déconstruction dimensionnelle. Leur fonction est évidemment heuristique. Il suffit d'ailleurs de se poser la question suivante pour voir combien la mise en place de tels circuits est importante pour que les élèves deviennent à la fois capables d'initiatives et de contrôle dans les activités de recherche et de démonstration.

## Conclusion

Le premier enjeu de tout enseignement de la géométrie, quels qu'en soient les objectifs, est de faire **apprendre à voir**. Et cela non seulement parce que toute entrée dans la géométrie implique visualisation mais parce que cette visualisation recouvre plusieurs manières de voir qui, cognitivement, sont incompatibles entre elles. Ainsi il y a un saut cognitif entre la visualisation iconique, qui correspond à la manière spontanée de voir, et la visualisation non-iconique qui exige une décomposition des formes reconnues, avant même toute identification des objets représentés. Et parmi les différents types de décomposition des

formes reconnues, nous avons vu que c'était la déconstruction dimensionnelle des formes qui était la manière de voir décisive pour apprendre la géométrie. Apprendre à voir en géométrie, c'est apprendre à déconstruire dimensionnellement toute forme reconnue. Et cela pour une raison essentielle : toute articulation d'un discours mathématique avec des représentations visuelles repose sur cette déconstruction dimensionnelle des formes.

Force est de reconnaître, que l'importance cruciale de cet enjeu est largement méconnu aussi bien dans l'enseignement de la géométrie que dans les recherches sur l'enseignement de la géométrie. Par exemple, le fait de voir une unité figurale 2D/2D comme une configuration d'unités 1D/2D (Figures 9 ci-dessus) n'est-il pas souvent considéré comme allant de soi, ou comme découlant quasi automatiquement de l'utilisation de la règle pour tracer une figure ? D'ailleurs toutes les progressions de connaissances semblent organisées selon le même ordre : *(points → droites) → segments de droites → polygones*, la connaissance des propriétés relatives aux différentes configurations possibles que l'on peut former par deux droites et celle des propriétés relatives à la comparaison de deux segments devant fournir les briques élémentaires avec lesquelles on peut construire les connaissances relatives aux polygones et à toute la géométrie plane (en intégrant bien l'usage du compas et la figure du cercle. Aussi bien par l'usage des instruments que par le vocabulaire employé pour décrire ou définir les propriétés des figures euclidiennes de base, **l'enseignement de la géométrie est organisé comme si la déconstruction dimensionnelle des figures était sinon naturelle, du moins facilement accessible à tous les élèves**. Et c'est là que commencent tous les malentendus qui empêchent que s'établisse pour les élèves une articulation réelle entre figures et discours géométrique (compréhension des définitions, utilisation des propriétés), c'est-à-dire une communication entre les processus de visualisation et les démarches de raisonnement. Comment s'étonner alors de la marginalisation de l'enseignement de la géométrie et de la réticence qu'elle suscite chez beaucoup d'élèves ?

Toute cette analyse de la visualisation en géométrie débouche donc sur deux questions, ou plutôt sur deux chantiers très différents.

Le premier porte sur l'articulation entre visualisation et discours en géométrie. Et là il devient essentiel de ne pas confondre deux niveaux : celui du discours mathématique d'une part et celui des productions verbales des élèves d'autre part. L'articulation entre visualisation et discours mathématique repose exclusivement sur la déconstruction dimensionnelle dans la mesure où tout passage de la représentation figurale au discours sur les objets représentés implique nécessairement un changement de dimension, et cela dès l'énonciation des définitions (Duval 1995a p.178). En revanche les explications et les justifications produites

par les élèves sont, en partie, commandées par la manière de voir qu'ils mettent en œuvre — laquelle peut relever seulement de la visualisation iconique — et, en partie, par le degré de différenciation des opérations discursives déterminant leur production verbale (Duval 2003, p.36). Le rôle et les analyses de toutes les productions des élèves en géométrie est à reconsidérer totalement d'une part en fonction de la diversité des manières de voir, et d'autre part en fonction des opérations discursives qu'ils peuvent mettre en œuvre.

La deuxième question est plus immédiate. Elle porte directement sur la déconstruction dimensionnelle. Entrer dans cette manière de voir constitue une véritable révolution cognitive et exige un travail spécifique. Quel type d'activité peut alors aider les élèves à entrer dans cette manière de voir, sans en rester à la visualisation iconique ou à la visualisation non iconique classique (la construction instrumentale de figures) ? C'est là qu'il me sera le plus facile de répondre.

## Références

- Berthelot R. Salin M-H.(1994) L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. *Grand N*, 53, 39-56.
- Berthelot R. Salin M-H. (2000) L'enseignement de l'espace à l'école élémentaire, *Grand N*, 65, 37-59.
- Duval R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 57-75.
- Duval R. ( 1995a ) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang
- Duval R. (1995b) Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processings. in *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education* (Ed. R. Sutherland & J. Mason ), 142-157, Berlin : Springer
- Duval R. (2000) Costruire, vedere e ragionare in geometria : quali rapporti ? *Bolletino dei docenti di matematica* 41, 9-24. Bellinzona.
- Duval R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°8, 13-62.
- Laborde C. (1994) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. *Bulletin APMEP*, 396, 523-548.
- Padilla, V. (1992) *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P.: Strasbourg, 1992.
- Piaget J. (1947) 1972, *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : P.U.F.