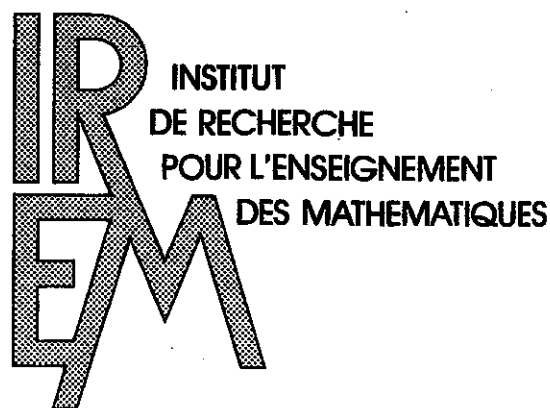


ASSOCIATION
POUR LA
RECHERCHE
EN
DIDACTIQUE
DES
MATHÉMATIQUES



Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2004

Édités par Corine Castela et Catherine Houdement

DIDIREM Paris 7, IUFM de Haute-Normandie (Rouen)

ARDM et IREM de Paris 7

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2004

Édités par Corine Castela et Catherine Houdement

DIDIREM Paris 7, IUFM de Haute-Normandie (Rouen)

ARDM et IREM de Paris 7

Sommaire

Les interventions présentant une certaine proximité thématique ont été rapprochées, ce qui donne la structure suivante, non chronologique :

Thème Géométrie

Raymond Duval, Marc Godin, Marie-Jeanne Perrin-Glorian	Janvier 2004	5
Reproduction de figures à l'école élémentaire.		
• Marie-Jeanne Perrin-Glorian	Pour situer le travail de notre groupe de recherche.	7
• Raymond Duval	Des figures à la manière de les voir : comment poser le problème de la visualisation dans l'apprentissage de la géométrie ?	15
• Marc Godin	De trois regards possibles sur une figure au regard géométrique	39
• Marie-Jeanne Perrin-Glorian	Des situations pour apprendre à regarder les figures. Quelques résultats et perspectives.	71
Alain Kuzniak	Octobre 2004	91
Sur la notion d'espace(s) de travail géométrique(s).		

Thème Algèbre

Agnès Lenfant	Janvier 2004	111
De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre.		
Caroline Bardini	Mars 2004	141
Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique.		

Thème Arithmétique

Véronique Battie	Mars 2004	167
Spécificités et potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.		
Laetitia Ravel-Bueno	Mars 2004	193
Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique.		
Rémi Brissiaud	Octobre 2004	223
La résolution de problèmes arithmétiques : une étude longitudinale au CE1.		

Thème Enseignant – Elèves

<i>Christine Félix</i>	Janvier 2004	239
Une analyse comparative des gestes de l'étude : le cas des mathématiques et de l'histoire.		
<i>Eric Roditi</i>	Octobre 2004	257
La résolution de problèmes professionnels : une modalité de formation continue des enseignants.		
<i>Bernadette Ngono</i>	Octobre 2004	289
Etude des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP. Effets éventuels de ces pratiques sur les apprentissages.		

Autres thèmes

<i>Teresa Assude</i>	Mars 2004	317
Etude du curriculum de mathématiques entre changements et résistances. Liens entre écologie et économie didactique.		
<i>Cécile Ouvrier Buffet</i>	Mars 2004	335
Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.		

Reproduction de figures à l'école élémentaire

Raymond Duval, Marc Godin, Marie-Jeanne Perrin-Glorian

IUFM Nord-Pas-de-Calais

Les exposés qui suivent sont coordonnés et bénéficient du travail d'une équipe de recherche pluricatégorielle qui fonctionne depuis plusieurs années à l'IUFM Nord – Pas-de-Calais. Elle se compose de : Raymond Duval ; Claire Gaudoul ; Marc Godin ; Bachir Keskessa, Bernard Offre ; Marie-Jeanne Perrin ; Odile Verbaere. Trois conseillers pédagogiques du Pas-de-Calais : Joël Jore, Nadine Jore, Philippe Delecroix, ont également été associés au travail de cette équipe.

La présentation comprend quatre parties :

- A. une introduction de Marie-Jeanne Perrin-Glorian,
- B. un exposé de Raymond Duval qui pose le problème de la visualisation en géométrie,
- C. un exposé de Marc Godin qui présente les différents regards qu'on peut porter sur une figure tout au long de l'école primaire et des moyens d'agir sur les variables des situations de reproduction de figure pour les faire évoluer,
- D. un exposé de Marie-Jeanne Perrin qui présente des éléments pour une grille d'analyse des situations de reproduction de figures en termes de milieux.

A. Pour situer le travail de notre groupe de recherche

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

IUFM Nord - Pas-de-Calais et équipe DIDIREM Université Paris 7

Dans cette première partie, je présenterai quelques caractéristiques générales de notre recherche, notamment la problématique, les méthodes de travail, les hypothèses et les cadres théoriques mobilisés.

1. Points de départ de la recherche

La recherche part d'un certain nombre de constats et d'une première analyse des difficultés constatées.

1. Des difficultés résistantes concernant l'usage des figures dans la résolution des problèmes de géométrie ont été repérées depuis longtemps chez les élèves du collège, aussi bien dans la construction de figures que dans la démonstration de propriétés de figures géométriques. D'une part les élèves se fient à ce qu'ils voient sur le dessin au lieu de travailler sur la figure géométrique portant sur des objets théoriques définis par des propriétés. D'autre part ils ne voient pas ce qu'il faudrait voir : par exemple, ils ne peuvent pas isoler les sous figures pertinentes pour utiliser les théorèmes, ils ne pensent pas à prolonger les droites pour faire apparaître des alignements ou des intersections intéressants...

2. L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire se réduit souvent à l'apprentissage d'un vocabulaire culturel concernant quelques objets de l'espace, quelques surfaces planes et quelques objets ou relations géométriques de base (point, droite, segment, parallèle, perpendiculaire), et à la manipulation des instruments usuels. Il est souvent considéré comme secondaire par rapport à celui des nombres. Il est peu problématisé. L'importance de la résolution de problèmes pour donner sens aux concepts mathématiques est bien reconnue dans le domaine numérique et de nombreux documents sont à la disposition des maîtres et des formateurs dans ce domaine. Dans le domaine de la géométrie, même si les programmes récents vont dans le sens d'une problématisation, l'enseignement se fait le plus souvent par ostension : on montre les objets, on les fait reconnaître, mais ils interviennent rarement pour apporter des réponses à des problèmes.

3. Malgré les efforts des programmes pour assurer une continuité, il y a une rupture du contrat didactique entre l'école et le collège en ce qui concerne la géométrie. On peut trouver dans les

manuels du CM2 et de 6^{ème} des tâches qui sont voisines, mais avec des attentes et des implicites assez différents, notamment en ce qui concerne la reproduction de figures. De plus, des tâches apparemment voisines donnent des résultats assez différents dans les évaluations de 6^{ème}, ce qui montre que les difficultés ne se limitent pas aux notions mathématiques elles-mêmes.

4. On peut avancer plusieurs raisons expliquant ces difficultés de l'enseignement de la géométrie à l'école et la relative rupture entre l'école et le collège :

- les spécificités du savoir lui-même : l'opposition entre un savoir pratique lié à la maîtrise de l'espace, à des activités manuelles de tracé, de déplacement, à la perception visuelle, et une théorie axiomatique, terrain par excellence d'exercice du raisonnement déductif, qui devient prépondérante au collège. Il n'y a pas vraiment de consensus sur le contenu de la géométrie à l'école, sur la façon de négocier avec les élèves les rapports entre ce qu'on peut appeler la géométrie pratique et la géométrie théorique ;
- la formation des enseignants : relativement peu d'enseignants du primaire ont une formation générale scientifique, ils ont souvent eux-mêmes rencontré des difficultés en géométrie dans leurs études secondaires et se sentent peu sûrs dans ce domaine. Or, il est avéré que l'enseignement par résolution de problèmes accroît l'insécurité de l'enseignant : en laissant plus d'initiative aux élèves, il ouvre la porte à des procédures et des raisonnements imprévus qu'il lui faudra gérer, ce qui demande une bien plus grande maîtrise des savoirs ;
- les recherches sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire sont encore assez peu nombreuses, bien qu'elles se soient développées depuis quelques années, mais le plus souvent il s'agit de la liaison entre le cycle 3 et le collège, peu de travaux s'intéressent au cycle 2 qui nous paraît pourtant très important pour initier le rapport à la géométrie et aux figures en particulier.

2. Problématique et Hypothèses

En même temps que nous présenterons la problématique, nous essayerons de préciser les hypothèses qui la fondent. Ces hypothèses ne sont pas vraiment des hypothèses que nous cherchons à valider ou à falsifier, ce sont plutôt des hypothèses de travail qui s'appuient sur

les constats précédents et sur les travaux existants. Nous avancerons donc parallèlement les deux aspects : problématique et hypothèses.

Problématique 0

La première question qui se pose ici, c'est de savoir **ce qu'on appelle géométrie**. Nous dirons que l'on fait de la géométrie dès qu'on raisonne sur des dessins qui pourraient être tracés avec des instruments, c'est-à-dire qui présentent des propriétés qui donnent accès à la déduction, sur des objets plats qui pourraient se représenter par de tels dessins, que l'on traite par le raisonnement des problèmes liés à l'espace, à des objets de l'espace, à des positions ou changements de position dans l'espace. Nous nous intéressons plus spécialement à la géométrie plane et à l'évolution du rapport à la géométrie plane qui est à construire de la maternelle à la fin du primaire.

Il nous semble qu'il y a **deux grandes catégories de problèmes** pour aborder la géométrie plane à l'école primaire : d'une part la modélisation de problèmes qui se posent dans l'espace sensible prenant en compte des rapports à l'espace lié à la taille de l'espace (cf. travaux de Brousseau, 1982, Berthelot et Salin, 1992, Gobert, 2001...), d'autre part le dessin géométrique dans le microespace de la feuille de papier : production et reproduction de figures.

Les recherches ont surtout exploré la problématique de modélisation, rapport à l'espace etc. ; nous nous plaçons plutôt dans la problématique de production ou reproduction de figures. Il y a moins de travaux concernant cette problématique. Citons cependant ceux de Fregona (1995) et Argaud (1998) qui se situent au cycle 3 ou au début du secondaire. Il y a aussi Favrat (1991-92) qui s'est intéressé au repérage d'alignements et aux tracés à la règle et dont certaines préoccupations sont proches des nôtres.

Hypothèse 0 : Le rapport aux figures est un point clé dans le rapport des élèves à la géométrie.

Entre la maternelle et la sixième les élèves doivent passer d'une vision des figures en termes de surfaces à manipuler sous forme de gabarits, à découper, colorier à une vision en termes de points et lignes qui permettent de caractériser la figure pour une construction à l'aide d'instruments qui sont eux-mêmes porteurs de connaissances géométriques. Les travaux se sont surtout intéressés au passage du contrôle des propriétés par la perception et les instruments au contrôle par des définitions, des propriétés et des déductions.

Nous pensons qu'il y a un pas aussi grand à franchir pour passer de la perception et la comparaison directe d'objets par la vue à la production de tracés et au contrôle de ces tracés par les instruments géométriques. Ce passage nous semble un point aveugle de l'enseignement de la géométrie plane à l'école.

Problématique 1

L'enjeu qui nous intéresse est d'amener les élèves à un *changement de regard progressif sur les figures* (dessins)¹ et sur les formes (objets matériels) géométriques les conduisant, au bout du compte, à concevoir les objets géométriques, et ce, en choisissant des situations qui « forcent » ce changement de regard et amènent la *vision* de propriétés géométriques. Ce changement de regard se fait conjointement avec un début de construction d'objets géométriques théoriques (définis par leurs propriétés) et du vocabulaire pertinent.

Nous sommes toujours dans le domaine de la perception et du visuel mais la *perception visuelle progressivement instrumentée*. En même temps que l'usage des instruments, il s'agit de concevoir les propriétés géométriques que ces instruments permettent de représenter sur le papier et de contrôler.

Hypothèse fondamentale (hypothèse 1)

Nous considérons que deux éléments sont particulièrement significatifs de cette évolution du changement de regard :

- le passage de la vision de la figure comme surface (via le gabarit) à une vision en termes de lignes (prolongeant le bord du gabarit) ;
- le passage de la vision de la surface en termes de lignes à une vision en termes de points caractéristiques, nécessaire dans une situation où la reproduction de la figure nécessite le repérage d'alignements et d'intersections de lignes qui ne sont pas forcément tracées.

Cette hypothèse est à relier d'une part sur le plan cognitif aux travaux de Duval sur l'importance des changements de dimension dans la lecture des figures, d'autre part, sur le plan épistémologique, aux diverses acceptions du terme « figure ». Les différentes visions de la figure sont largement illustrées dans l'exposé de Marc Godin.

¹ Nous reviendrons plus loin sur l'utilisation du mot "figure" dans ce texte.

Autres hypothèses concernant le rapport aux figures

Hypothèse 2. Un autre élément significatif, pour procéder à ce changement de regard, c'est la capacité pour l'élève à dissocier l'objet géométrique de l'outil avec lequel il a appris à le produire (cercle / compas ; perpendiculaire, angle droit / équerre ; droite / règle...) et de la procédure d'utilisation de cet outil.

Hypothèse 3 : les éléments à prendre en compte dépendent des objets géométriques considérés, par exemple le carré et le cercle ne peuvent pas se traiter de la même manière dans tous les types de situations, notamment en tant que lignes. En effet, pour les lignes droites, on a un gabarit universel : la règle permet de prolonger n'importe quel segment donné. Pour un cercle, on n'a pas de gabarit universel : un gabarit ne donne qu'un cercle de rayon fixé et, pour utiliser le compas, il faut le centre. On peut dire que, pour le carré, en passant de la dimension 2 (la surface) à la dimension 1 (les droites portant le bord), on obtient un procédé de construction avec les instruments (règle graduée et équerre). Pour le cercle, le passage à la dimension 1 (le bord) ne donne pas de procédé de construction avec les instruments usuels, il faut passer à la dimension 0 et identifier un point particulier : le centre, par exemple comme intersection de deux diamètres (qui peuvent être vus comme axes de symétrie).

Hypothèse 4. L'évolution souhaitée du regard s'accompagne d'une évolution du langage dans un processus dialectique : d'une part, le langage participe à l'évolution du regard ; d'autre part, le langage évolue avec l'évolution du regard.

Problématique 2

Un autre point essentiel de notre problématique, c'est que nous voulons nous intéresser à l'enseignement dans des classes ordinaires en espérant pouvoir le faire évoluer. Pour cela, il nous faut :

- tenir compte des pratiques effectives des maîtres,
- produire des situations gérables dans l'enseignement ordinaire qui amènent à produire un changement de regard sur les figures : du dessin ordinaire au dessin géométrique.

Pour avoir une idée plus précise des pratiques des maîtres, nous avons fait passer un questionnaire dans les circonscriptions des conseillers pédagogiques qui travaillent avec nous. L'analyse n'est pas terminée, mais le dépouillement nous a déjà montré que la place accordée à la géométrie était assez faible, surtout au cycle 2 et que ce sont surtout les figures usuelles qui sont considérées, celles auxquelles on peut donner un nom.

Cette problématique suppose donc une dernière hypothèse :

Hypothèse de faisabilité

Bien sûr, nous supposons aussi qu'on peut construire une progression visant l'apprentissage de lecture et production de figures géométriques en jouant sur le choix des figures et le choix des outils, instruments usuels mais aussi outils non standardisés, qui plus est une progression ou au moins un ensemble de situations ayant une certaine cohérence et utilisable dans l'enseignement ordinaire.

3. Cadres théoriques

Comme l'ensemble des trois exposés le montrera, notre recherche s'appuie sur l'articulation de plusieurs cadres théoriques et la considération de travaux antérieurs.

Travaux antérieurs

Les recherches antérieures dans la didactique française portent surtout sur la liaison école collège et la modélisation de l'espace. Les cadres théoriques développés dans ces travaux nous paraissent adaptés à ces problématiques mais pas totalement à celle du dessin géométrique telle que nous l'envisageons.

Connaissances spatiales / connaissances géométriques

Salin et Berthelot (1992) ont utilisé la distinction entre connaissances spatiales et connaissances géométriques, entre problématique spatiale et problématique géométrique non seulement dans le cas de modélisation de problèmes de l'espace sensible mais aussi pour analyser des rapports à des figures du micro-espace comme dans la question du triangle aplati. Cette analyse nous paraît tout à fait intéressante et pertinente, et nous sommes attentifs aux différentes dimensions repérées. Cependant la distinction des diverses problématiques, très intéressante relativement à l'approche de la géométrie comme théorie permettant de modéliser l'espace physique, nous paraît un cadre théorique trop pauvre et insuffisant pour analyser le rapport aux figures dans le micro-espace de la feuille de papier.

Figure / dessin

Les distinctions entre dessin et figure faites par de nombreux chercheurs, par exemple Parzysz (1989), Laborde et Capponi (1994) nous paraissent surtout adaptées aux études qui

s'intéressent à la géométrie au collège, à la transition école / collège, ou à la formation des maîtres du primaire pour distinguer de la trace matérielle l'objet géométrique ou la représentation que s'en fait un individu. En ce qui nous concerne, nous nous plaçons en amont, ce qui fait que garderons le terme figure pour l'objet matériel, le dessin, dans la mesure où les dessins qui nous intéressent ne sont pas n'importe quels dessins et que c'est justement à la spécificité de ces dessins que nous nous intéressons. Peut-être faudrait-il dire dessin géométrique, mais cela désigne plutôt l'activité que le produit. Figure est le terme habituellement utilisé à l'école primaire, et il ne présente pas d'ambiguïté ici puisque nous restons dans le cadre du dessin matériel sur la feuille de papier. Une figure est pour nous un dessin qui a des propriétés qu'on pourrait préciser dans le cadre de la géométrie théorique en le considérant comme une représentation d'une figure géométrique ; ces propriétés se traduisent par des propriétés visuelles contrôlables avec des instruments. C'est dans l'exercice de ce contrôle que vont intervenir les propriétés géométriques proprement dites.

Distinction de paradigmes géométrie 1 / géométrie 2

Houdement et Kuzniak (1999, 2000) ont distingué différents paradigmes de la géométrie mais cette distinction, produite pour des recherches sur la formation des maîtres et utilisée dans le secondaire, est surtout adaptée à ces niveaux d'enseignement. Ainsi, ils mettent toute la géométrie du primaire dans la géométrie 1 alors que nos travaux se situent dans la mise en place de cette géométrie 1 et dans l'étude de son fonctionnement. Parzysz (2001) a proposé de considérer aussi la géométrie 0, géométrie sur des objets, qu'il distingue de la géométrie G1 spatio-graphique. Si l'on reprend ces distinctions, on pourrait considérer que nos travaux se situent dans le passage de G0 à G1. Cependant ces auteurs mettent la mesure dans G1, alors que nous nous intéressons à une géométrie dans l'espace physique mais sans mesure : nous distinguons celle-ci du report de longueur qui a une place importante dans la reproduction de figure pour fixer la taille.

On peut aussi se reporter à l'exposé que j'ai fait au colloque de la COPIRELEM en 2003 (Perrin-Glorian, 2004) pour une présentation un peu plus détaillée des travaux antérieurs et de leur relation avec notre problématique.

Cadres théoriques mobilisés

Notre propre recherche s'appuie essentiellement sur l'articulation de trois points de vue théoriques :

- un point de vue cognitif sur la figure développé dans l'exposé de Raymond Duval,
- un point de vue épistémologique sur la figure, en particulier sur le passage du dessin ordinaire ou des objets déplaçables de l'espace à la figure au sens de dessin géométrique pouvant être construit (ou dont les propriétés peuvent être contrôlées) avec des instruments (aboutissant sur le long terme à la géométrie euclidienne de la règle et du compas). Ce point de vue est développé dans l'exposé de Marc Godin,
- un point de vue didactique fondé sur la théorie des situations didactiques : identification de variables didactiques et construction de milieux, gérables par les enseignants, et qui amènent les élèves à changer leur regard sur les figures. Il nous faut identifier les variables et les moyens de fabriquer les situations, non pour qu'elles soient produites par les enseignants, mais pour qu'elles soient utilisables et modifiables par eux. Je ne le développe pas mais je l'utiliserai pour présenter les exemples.

4. Méthodes de travail

Notre problématique demande d'une part d'affiner nos constats et notre prise d'information sur l'état actuel de l'enseignement, d'autre part de construire des situations que des enseignants ordinaires pourront reprendre à leur compte. Sur le premier point, dont nous ne parlerons pas ici, nous avons travaillé autour des résultats des évaluations de début de 6^{ème} et de l'interprétation de leurs résultats : nous avons en particulier proposé à des élèves de fin de CM2 quelques-unes des épreuves dans un dispositif qui nous permettait d'observer leurs procédures et les questions qu'ils se posaient à propos des items. Nous avons aussi récolté une centaine de réponses à un questionnaire sur les pratiques en géométrie des enseignants de cycle 2 et 3 de trois circonscriptions du Pas-de-Calais.

Sur le deuxième point, nous avons utilisé un mode de fonctionnement à deux étages dans notre équipe de recherche : un groupe restreint consacré à la recherche proprement dite (élaborations théoriques, élaboration et analyses des situations, des données, rédaction d'articles). Un groupe large, constitué du groupe restreint et des conseillers pédagogiques, qui procédait aussi à l'élaboration et l'analyse des situations, des déroulements, des outils de la recherche, mais plutôt dans l'objectif d'élaborer des documents pour les maîtres et des actions de formation. Ce groupe a travaillé sur un type de situations au cycle 2.

Je passe maintenant la parole à Raymond Duval puis à Marc Godin pour préciser certains des aspects théoriques de ce travail.

B. Des figures à la manière de les voir : comment poser le problème de la visualisation dans l'apprentissage de la géométrie ?

Raymond Duval

Professeur émérite à l'Université du Littoral Côte d'Opale

Le rapport aux figures, c'est-à-dire la manière de regarder ce qu'elles donnent à voir, constitue le seuil critique pour les premiers apprentissages de la géométrie. C'est-à-dire le seuil peut-être le plus difficile à faire franchir aux élèves dans l'enseignement et, aussi, le plus décisif pour leur faire comprendre ce qu'est une démarche géométrique.

Cette affirmation peut surprendre. En effet, le corpus des figures dont les programmes peuvent demander la connaissance est très restreint et il correspond à des formes qui sont perceptivement remarquables et culturellement familières. Et, dans l'enseignement, ces figures se retrouvent au carrefour d'une grande variété d'activités : observation, reproduction, construction, description, définition, etc. Or ce qui est visé à travers ces activités, c'est la connaissance de propriétés qui vont permettre de développer des raisonnements pour résoudre des problèmes et pour en justifier les solutions. Cette connaissance dépasse les figures qui ne sont que des réalisations chaque fois particulières. Alors pourquoi accorder à la manière de voir ce que les figures donnent à voir un tel enjeu d'apprentissage ?

Les figures renvoient nécessairement à un acte qui est cognitivement fondamental : voir ! Or dans les démarches de géométrie cet acte devient d'emblée problématique tout en demeurant essentiel. Car tout regard sur une figure requiert un questionnement qui, souvent, se fait contre le premier constat perceptif, contre ce que l'on a reconnu au premier coup d'œil : qu'est-ce qu'il faut voir sur cette figure ? que représente-t-elle ? Pour désigner la démarche liée à ce questionnement, implicite ou explicite, on parle souvent d'« analyse », de « lecture », de « propriété » ou même d'« hypothèses »... Mais, même si c'est autrement que l'on regarde, il s'agit toujours de voir. Cela veut dire que les figures en géométrie, cela ne se regarde pas du tout comme n'importe quelle autre figure (image, schéma, plan..) ailleurs qu'en géométrie. D'où les deux questions, étroitement liées, qui constituent le problème que nous allons traiter dans cet exposé.

- En quoi consiste cette manière si particulière de voir qui est pratiquée en géométrie ?

- Et, quel type d'activité peut contribuer à faire entrer les élèves dans cette manière de voir ?

Pour dégager des éléments de réponse, nous allons partir d'une idée très simple : c'est la tâche demandée qui détermine le rapport aux figures. Or étant donné la très grande variété des activités géométriques qui peuvent être proposées sur les figures, ou qui font appel à des figures, une constatation s'impose très vite : *il y a plusieurs manières de voir une même figure* ! Tout dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. Et là surgit toute la complexité cognitive de la visualisation en géométrie. Les trois questions suivantes en donnent un premier aperçu.

1. Quelles sont les différentes manières de voir des figures auxquelles il est fait appel à travers la variété des activités géométriques qui sont proposées aux élèves ?
2. La manière de voir qu'un type d'activité favorise aide-t-elle à entrer dans les autres manières de voir requises par les autres types d'activité ?
3. Quelle est la manière mathématique de voir, c'est-à-dire celle qu'implique le développement des démarches discursives en géométrie (énonciation de propriétés, définitions, déduction d'autres propriétés, théorèmes....) ?

Pour répondre à la première question nous allons présenter une classification des différentes manières de voir permettant de les comparer. Pour répondre à la seconde nous montrerons l'opposition entre deux types de visualisation, également sollicités dans les apprentissages : la visualisation iconique et la visualisation non iconique. Et pour répondre à la troisième, nous mettrons en évidence le rôle central de la déconstruction dimensionnelle pour l'articulation entre visualisation et discours mathématique.

I Classification des manières de voir en fonction du rôle des figures dans les activités géométriques proposées aux élèves

Le champ des activités possibles pour faire travailler les élèves avec des figures de géométrie ou sur des figures de géométrie est extrêmement étendu. Les variations d'activité portent à la fois sur *la tâche à faire* (reproduire une figure selon un modèle ou la construire, ou effectuer des mesures, ou encore la décrire pour la faire reconstruire par un autre élève...) et sur *le mode de l'activité demandée* (modalité concrète en utilisant un matériel manipulable ou modalité représentationnelle en s'en tenant aux seules productions graphiques, ou encore modalité

technique en imposant certains instruments...). Or ce ne sont pas du tout les mêmes manières de voir qui sont sollicitées d'un type d'activité à un autre, même si ce sont les mêmes formes nD (pièces matérielles 3D à manipuler physiquement, figures 2D déjà construites ou proposées à construire, à modifier...) qui sont perceptivement données à voir. En prenant simplement comme critères le type d'opérations sur les formes données à voir et la manière dont les propriétés géométriques sont mobilisées par rapport à ce type d'opérations, on peut distinguer quatre manières de voir. Ces quatre manières de voir sont quatre entrées très différentes dans la géométrie.

	BOTANISTE	ARPENTEUR- géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR-bricoleur
1. Type d'opération sur les FORMES VISUELLES , requis par l'activité proposée	Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour : UNE forme particulière est privilégiée comme TYPIQUE	Mesurer les bords d'une surface : sur un TERRAIN ou sur un DESSIN (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure)	Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument Il faut (souvent) passer par des TRACÉS AUXILIAIRES qui n'appartiennent pas à la figure « finale »	Transformer des formes les unes dans les autres. Il faut ajouter des TRACES REORGANISATEURS dans la figure finale pour initialiser ces transformations
2. Comment les PROPRIETES GEOMETRIQUES sont mobilisées par rapport à ce type d'opération	Pas de liens entre les différentes propriétés (pas de définition mathématique possible)	Les propriétés sont des critères de choix pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à une formule permettant un calcul	Comme contraintes d'un ordre de construction . Certaines propriétés sont obtenues par une seule opération de traçage , les autres exigent plusieurs opérations.	Implicitement par renvoi à un réseau plus complexe (une trame de droites pour la géométrie plane ou une trame d'intersections de plans...) que la figure de départ

Figure 1. Quatre entrées classiques dans la géométrie

Le botaniste. C'est l'entrée la plus évidente et la plus immédiate. Il s'agit d'apprendre à reconnaître et à nommer les formes élémentaires qui sont utilisées en géométrie plane : types de triangles et de quadrilatères, configurations obtenues par les différentes positions de deux droites l'une par rapport à l'autre, éventuellement les formes circulaires et les formes ovales etc. Et il s'agit évidemment d'observer les différences entre deux formes présentant certaines similitudes (un carré et un rectangle) et de remarquer des similitudes entre des formes

différentes (entre un carré et un parallélogramme). Ici, les propriétés distinguées sont des caractéristiques visuelles de contour.

En réalité ce type d'activité n'a rien d'une activité géométrique. Elle ne paraît géométrique que dans la mesure où elle porte sur des formes dites « euclidiennes ». Mais le même travail d'observation pourrait (et devrait) être fait sur des feuilles d'arbres. Et parmi tous les modèles de formes planes que Piaget (1947, p.70) avait demandé de « copier », à des enfants de 2 à 7 ans, on aurait pu tout aussi bien glisser une feuille de platane et une feuille de marronnier, la forme d'un sapin et celle d'un épicéa, ou le dessin schématique d'une automobile. Rappelons que dans les observations de Piaget il s'agissait de copier « à main levée » sans utiliser aucun instrument, même pas une règle !

L'arpenteur géomètre. C'est l'entrée historique. Il s'agit d'apprendre à mesurer des longueurs sur un *terrain*, au sol, ou des distances entre deux repères, et à les reporter sur un *dessin* qui prend un statut de plan. *On se situe donc d'emblée à deux échelles de grandeur qu'il s'agit de mettre en correspondance.* Or cette mise en correspondance n'a rien de naturel ou d'évident, car il n'y a pas de procédure commune pour mesurer les distances réelles sur le terrain et pour mesurer les longueurs de tracés d'un dessin. Les tâches spécifiques de cette entrée vont donc consister à proposer des activités exigeant de passer d'une échelle de grandeur à une autre. Le problème du vitrier en est un exemple typique (Berthelot et Salin 94, p.40-41) : combien de mesures effectuer, et lesquelles, pour fabriquer une fenêtre qui rentre dans une ouverture ayant la forme d'un parallélogramme ? La mesure du rayon de la terre par Eratosthène en est un autre exemple célèbre.

Ce type d'activité montre la complexité pour beaucoup d'élèves à mettre en correspondance ce qu'ils voient sur le terrain et ce qui est dessiné sur une feuille. Or cette mise en correspondance exige que l'on privilégie des aspects qui sont essentiels pour la lecture d'un plan ou d'une carte de géographie (Berthelot et Salin 2000), mais qui ne sont pas toujours pertinents pour la représentation géométrique : le choix d'objets repères, le choix de points ou d'axes de références pour représenter la position des objets les uns par rapport aux autres, la prise en compte de directions ou d'orientations... En outre dans ce type d'activité *les propriétés géométriques sont mobilisées à des fins de mesure.*

Le constructeur. C'est l'entrée nécessaire. La particularité des figures géométriques, du moins de celles qui correspondent à des formes euclidiennes élémentaires et à des configurations de formes élémentaires, est *d'être constructibles à l'aide d'instruments.* Les

figures géométriques ne se dessinent pas à main levée, elles se construisent à l'aide d'un instrument qui guide le mouvement de la main, ou qui s'y substitue. Pourquoi ? Par la régularité qu'il impose au mouvement de traçage, et *donc par l'invariance visuelle qu'il introduit dans le tracé*, un instrument permet de produire une forme visuelle ayant une propriété géométrique et cette forme visuelle constitue la primitive de l'instrument. Ainsi le trait droit ou le rond régulier, pour les instruments classiques que sont la règle (non graduée) et le compas. Sans l'utilisation d'instruments, il serait impossible de vérifier une propriété sur une figure.

C'est à travers l'utilisation d'un instrument que les élèves peuvent vraiment prendre conscience que les propriétés géométriques ne sont pas seulement des caractéristiques perceptives. En effet, l'utilisation d'un instrument donne la possibilité d'expérimenter, en quelque sorte, les propriétés géométriques comme **des contraintes de construction** : pour chaque forme visuelle qui n'est pas directement produite par un instrument, plusieurs opérations de traçage sont nécessaires et il y a un ordre pour ces opérations. Ne pas en tenir compte rend la construction impossible. Naturellement, tout changement d'instrument entraîne un changement dans les propriétés géométriques qui doivent être explicitement mobilisées.

C'est cette entrée qui a donné lieu aux innovations les plus spectaculaires pour l'enseignement de la géométrie au cours de ces vingt dernières années (Laborde 1994). Des logiciels de construction ont été développés. Leur avantage, outre celui déjà considérable d'exécution automatique des tâches de réalisation comme pour les calculatrices, est de supprimer complètement les approximations compensatrices de la main dans l'utilisation des instruments. Autrement dit, il n'est plus possible de réussir une construction sans prendre en compte les propriétés géométriques. Ainsi Cabri Géomètre, une figure construite doit pouvoir conserver sa configuration si l'on bouge l'un de ses points.

L'inventeur-bricoleur. Pour présenter cette quatrième entrée, il suffit d'évoquer les problèmes classiques du type suivant :

- (1) Comment partager, d'un seul coup de ciseau, un triangle de manière à pouvoir assembler les deux morceaux en un parallélogramme ?
- (2) Comment construire, à partir d'un carré donné, un autre carré deux fois plus grand (dont l'aire soit le double) ? (Ce problème peut être donné sur du papier quadrillé, ce qui réduit les opérations de mesure à un simple comptage de carreaux)

Ces problèmes ont en commun d'exiger une DECONSTRUCTION VISUELLE des formes perceptives élémentaires qui s'imposent au premier coup d'œil, pour pouvoir obtenir la reconfiguration, ou la figure, demandée. Ces problèmes touchent une capacité fondamentale qui est la condition nécessaire à toute utilisation heuristique des figures : **ajouter des tracés supplémentaires à une figure de départ** (c'est-à-dire celle qui accompagne un énoncé de problème, ou que l'on peut construire à partir d'un énoncé de problème) **afin de « voir » (= découvrir sur la figure) une procédure de résolution**. Ce sont ces tracés supplémentaires qui vont permettre une réorganisation visuelle de la figure de départ. Ici, c'est la recherche de ce tracé supplémentaire qui constitue le problème : « comment partager d'un seul coup de ciseau... ? »

Passer d'une manière de voir à une autre constitue un changement profond de regard, qui est trop souvent ignoré dans l'enseignement. Car le fonctionnement cognitif impliqué par chacune de ces manières de voir n'est pas le même, comme nous le montrerons dans la deuxième partie de cet exposé. Mais avant, il n'est peut-être pas inutile de souligner, que chacune de ces manières de voir joue directement sur la compréhension et les connaissances géométriques que les élèves peuvent ou ne peuvent pas acquérir, selon qu'ils entrent ou non dans chacune des manières de voir. Dans le cadre restreint de cet exposé, on se contentera comme explication du tableau comparatif suivant :

	BOTANISTE	ARPENTEUR- géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR- bricoleur
STATUT EPISTEMO- LOGIQUE	CONSTAT perceptif immédiat : « ça se voit sur ... »	CONSTAT résultant de la lecture d'un instrument de mesure	RESULTAT <i>d'une</i> <i>procédure de construction</i>	RESULTAT <i>d'une</i> <i>décomposition de la</i> <i>figure de départ en</i> <i>unités figurales que l'on</i> <i>reconfigure autrement</i>
SOURCE COGNITIVE DE LA CERTITUDE	Superposition effectuée à l'œil ou en utilisant un gabarit	Comparaison des valeurs numériques qui ont été obtenues empiriquement	Nécessité interne à l'enchaînement des opérations de la procédure de construction.	Invariance des unités figurales qui sont les référents de la transformation de la figure de départ

Figure 2 Le mode de compréhension et de connaissance liée à chacune des manières de voir

Cette diversité des manières de voir soulève deux questions cruciales pour l'enseignement de la géométrie et pour l'organisation des situations d'apprentissage.

(1) Peut-il y avoir, pour les apprenants, des transferts pour la manière de voir liée à un type d'activité à une autre manière de voir quand on propose un autre type d'activité aux élèves ? Ainsi, par exemple, le fait de privilégier les activités de construction de figures entraîne-t-il le développement de la capacité heuristique à enrichir et à réorganiser les figures ?

Cette première question peut être élargie :

(1bis) Y aurait-il un ordre, et donc une hiérarchie à respecter, pour proposer les activités qui sont propres à chacune de ces quatre entrées ? Par exemple, l'approche botaniste peut-elle être considérée comme la première étape nécessaire à toute acquisition des connaissances géométriques ?

(2) Quelle est la manière de voir qui est exigée par n'importe quelle démarche discursive en géométrie, est-ce l'une de ces quatre manières de voir ou en est-ce une cinquième ?

Et le caractère crucial de cette question peut être souligné par cette question corollaire si j'ose dire :

(2bis) Est-ce que certaines des quatre manières de voir que nous venons d'analyser ne seraient pas incompatibles avec cette cinquième manière de voir ? Autrement dit, non seulement l'ignorance de la spécificité de cette cinquième manière de voir serait préjudiciable à l'enseignement de la géométrie, mais l'accent mis d'emblée sur des entrées comme l'entrée botaniste créerait des obstacles insurmontables à tout apprentissage de la géométrie.

Ces questions sont rarement posées et étudiées tellement une réponse « oui » est considérée évidente pour la première, aussi bien dans sa formulation stricte que dans sa formulation élargie. Quant à la seconde elle peut paraître bien étrange à beaucoup.

Pourtant c'est là qu'il faut chercher le nœud de toutes les difficultés qui conduisent à faire de la géométrie qui ne prend pas ou qui ne marche pas, à moins peut-être de disposer de logiciels...

II Deux modes opposés de fonctionnement cognitif : la visualisation iconique et la visualisation non iconique

Commençons par quelques remarques pour attirer l'attention sur la complexité de l'acte de « voir », trop souvent méconnue dans l'enseignement de la géométrie.

Ce qu'on appelle « voir » recouvre toujours deux niveaux d'opérations qui sont différents et intrinsèquement indépendants. Il y a, d'une part, la **reconnaissance discriminative de formes** et il y a, d'autre part, **l'identification des objets correspondant aux formes reconnues**. Le problème cognitif majeur concernant toute visualisation est de savoir comment se fait le passage d'une reconnaissance discriminative de formes à l'identification des objets donnés à voir.

Ce problème est rarement étudié parce que dans la perception du monde qui nous environne ces deux niveaux d'opération ne semblent pas dissociables puisqu'ils sont simultanés (du moins à l'échelle de notre conscience), l'objet étant immédiatement donné avec la forme qui permet de le distinguer. Cette fusion entre reconnaissance d'une forme et identification d'un objet, base de toute évidence perceptive, est la condition pour des réponses rapides et adaptées à des situations nouvelles et imprévues. En revanche il n'en va plus de même pour la perception des représentations construites par production de tracés. Il n'y a aucune relation intrinsèque entre les formes reconnues dans un tracé et l'objet que ce tracé « veut » représenter. Comment alors peut s'effectuer le passage de l'un à l'autre ?

Le passage repose sur une « **ressemblance** » entre la forme discriminée et la forme typique de l'objet représenté. C'est cette ressemblance qui est généralement considérée comme constitutive de l'image. Ainsi, Pierce en a fait la caractéristique de toutes les représentations iconiques par opposition aux symboles et aux indices. Généralement cette ressemblance suffit pour reconnaître directement, et immédiatement, l'objet représenté, comme dans la perception du monde environnant. Ainsi il n'y a pas besoin de savoir lire pour regarder des bandes dessinées et en suivre le récit. Naturellement, ce mécanisme cognitif d'iconicité n'est pas toujours suffisant. Il faut parfois recourir à une **énonciation** implicite ou explicite. En d'autres termes, il faut parfois un apport verbal d'informations, intégré à l'image comme légende ou comme codage d'un élément figuratif, pour pouvoir identifier ce que représentent les formes discriminées. Mais ce rôle auxiliaire de l'énonciation ne doit pas nous faire oublier l'importance du mécanisme d'iconicité. Il continue à s'imposer de manière autonome chaque fois que quelque chose (dessin, figures ou formes de pièces à manipuler) est donné à voir.

Maintenant nous pouvons nous demander ce qu'il en est de l'acte de « voir » tel qu'il est sollicité dans les différentes activités de géométrie ? Est-il aussi simple qu'on le suppose souvent en disant de manière quasi réflexe « ça se voit sur... » ? Limitons-nous pour l'instant au second type d'opérations pour chacune des quatre manières de voir que nous avons distinguées. Le fait majeur que nous voudrions mettre en évidence est que ces quatre manières de voir renvoient à deux modes totalement opposés de fonctionnement cognitif : l'un qui est le mode normal de visualisation, du moins en dehors de la géométrie, et l'autre que l'on rencontre seulement en géométrie. Or la visualisation iconique présente non seulement des limitations rédhibitoires pour l'acquisition de connaissances géométriques mais elle dresse des obstacles pour le développement, chez les élèves, de la visualisation non iconique, malgré les nombreuses activités de construction qui peuvent être proposées.

VISUALISATION ICONIQUE :		VISUALISATION NON ICONIQUE :	
<i>ÇA RESSEMBLE AU</i> profil d'un objet réel, ou à un ensemble d'itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type (étalon) La figure reste un objet indépendant des opérations que l'on effectue sur elle		C'est une <i>SEQUENCE</i> d'<i>OPERATIONS</i> qui permet de reconnaître des propriétés géométriques, par impossibilité d'obtenir certaines configurations, ou par invariance des configurations obtenues. La figure est une configuration contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexes	
BOTANISTE	ARPENTEUR- géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR-bricoleur

Figure 3. Comment à partir de la discrimination de formes dans un ensemble de tracés identifier les objets représentés ?

1. Les impasses de la visualisation iconique

La visualisation iconique repose sur une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier. Naturellement la situation n'est pas la même selon que le référent est un objet matériel dans l'espace environnant² ou une représentation de

² Lorsque le référent est l'espace physique environnant ou des objets matériels, l'établissement des correspondances entre les formes reconnues dans un tracé et le référent réel implique la mobilisation du corps de celui qui regarde (sa position, son orientation, ses déplacements ou ses mouvements de manipulation). Les cartes, les plans de ville, les schémas accompagnant des instructions de montage en sont un excellent exemple (Duval)

sa forme type. Nous nous limiterons ici à la seconde situation. Ici la visualisation iconique suppose la connaissance d'une forme type pour chaque objet géométrique à identifier, la comparaison tolérant des écarts plus ou moins grands entre les formes reconnues et la forme type. Il y a par exemple une forme type du rectangle qui exclut une trop grande disproportion entre longueur et largeur. De même, la forme type d'un triangle requiert que les hauteurs soient situées à l'intérieur. En outre chaque forme type est associée à un nom qui permet de l'évoquer et qui lui confère le statut d'objet. Les impasses de la visualisation iconique sont bien connues.

- La reconnaissance étant centrée sur le contour d'une zone ou d'une surface, *une forme c'est d'abord un profil*. Cela veut dire que toutes les propriétés qui ne sont directement liées au contour caractéristique d'une forme (celles liées aux diagonales les quadrilatères remarquables) restent hors champ et donc moins facilement mobilisables quand les énoncés de problèmes ne les mentionnent pas explicitement. Cela veut dire aussi qu'il y a une résistance à sortir du contour fermé de la figure, en prolongeant par exemple les côtés pour faire apparaître les droites sous-jacentes.
- Les formes apparaissent comme étant *stables*. Elles ne sont donc pas vues d'une manière qui permette de les transformer en d'autres formes semblables ou, surtout, différentes. Par exemple il est difficile d'apercevoir une superposition de parallélogrammes dans un réseau de droites d'où l'on voit d'emblée se détacher une juxtaposition de triangles. Et cela pourra être d'autant plus difficile que la reconnaissance des formes s'accompagne de l'énonciation, implicite ou explicite, du nom de ce que l'on identifie.

Or ces tendances lourdes de la visualisation iconique vont contre le développement de ce qui doit devenir le geste réflexe pour pouvoir faire de la géométrie : décomposer toute forme, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ, en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions.

2. La visualisation non iconique ou la déconstruction de formes

La décomposition des formes discriminées (à commencer par celles qui apparaissent être visuellement simples) en unités figurales est le préalable à l'entrée dans les manières non iconiques de voir les figures. Or le point essentiel est qu'il existe au moins deux manières radicalement différentes de décomposer une figure de départ en unités figurales. Pour les

distinguer, il suffit de prendre comme critère une pratique qui est spécifiquement mathématique dans la manière d'utiliser une figure de départ, c'est-à-dire une figure qui est, soit donnée avec un énoncé de problème, soit constructible à partir de cet énoncé : l'introduction de tracés supplémentaires. On la retrouve dans les deux modes de visualisation non iconique que nous avons distingués mais elle y intervient de manière radicalement différente. Dans un cas elle est imposée et produite par les instruments utilisés pour construire une figure. Dans l'autre elle doit être « imaginée » par celui qui regarde car le choix du tracé supplémentaire permet de voir une procédure de résolution du problème posé. Or cela renvoie à deux types de fonctionnements cognitifs qui n'ont rien de commun.

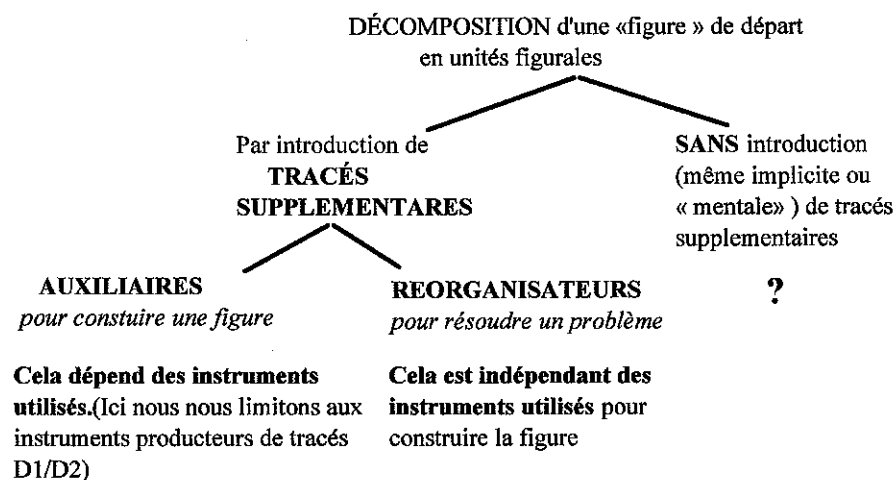


Figure 4. Deux ou trois modes de visualisation non iconique ?

La caractéristique des figures géométriques, par rapport à toutes les autres types de figures est qu'elles peuvent se construire à l'aide d'instruments et principalement d'instruments producteurs de tracés D1/D2³. La production de chaque tracé correspond à la fois à une instruction formulable (les « figures téléphonées ») ou formulée (dans le menu d'un logiciel) et à la mobilisation d'une propriété géométrique en relation avec l'instrument utilisée

³ Le « dénominateur » correspond à la prise en compte de l'espace où les représentations sont produites :

- celui d'objets physiques que l'on peut manipuler physiquement (nD /3D) : maquettes de polyèdres (3D/3D), feuille papier que l'on peut plier ou découper (2D/3D), ficelles que l'on peut tendre (1D/3D) comme avec un géoplan. J'appellerai ces objets, objets maquettes (pour les distinguer des instruments)
- celui d'un support de projection (nD/2D) pour la représentation qui sera alors produite par des tracés ou par des empreintes : sable, papier, écran électronique

Cela permet donc de distinguer les activités géométriques **réalisées matériellement** et les activités géométriques qui sont **réalisées représentativement**. Souvent les objets maquettes sont utilisés pour une interprétation iconique des représentations graphiques. Cela apparaît d'ailleurs dans les définitions : la droite comme une ficelle tendue... Et cela stérilise l'ouverture de la représentation.

(compas, règle non graduée, règle graduée...). Autrement dit l'activité de construction de figures, presque toujours des configurations de formes 2D/2D ou 3D/2D, repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D. Mais dans cette activité de déconstruction-reconstruction toute l'attention porte sur la reconstruction, car la déconstruction des formes 2D/2D est automatiquement faite par l'instrument tandis que la reconstruction exige un ordre dans les instructions à donner et donc dans la séquence des opérations de traçage à faire. Or cette activité conduit à la production de tracés qui n'appartiennent pas à la figure à construire, qu'il s'agisse soit de tracés intermédiaires, soit de tracés qui vont déborder le contour des formes à tracer : par exemple les droites qui sont les supports des côtés du carré ou du triangle à construire. *Nous appellerons ces tracés intermédiaires ou ces tracés supports des «tracés auxiliaires»*. D'ailleurs dans un environnement papier crayon, on peut souvent observer l'habitude désastreuse de les effacer, une fois la figure à construire obtenue.

La situation est totalement autre lorsqu'il s'agit de partir d'une figure pour résoudre un problème. Le problème du partage d'un triangle en un seul coup de ciseau de manière à assembler les deux morceaux en un parallélogramme en est l'exemple typique. Il s'agit de transformer un triangle en un parallélogramme par l'ajout d'un tracé supplémentaire. Il s'agit donc là de la déconstruction d'une forme visuelle de base pour obtenir une autre forme visuelle de base. Et le choix de ce tracé supplémentaire va dépendre de la manière dont les deux parties du triangle obtenues par ce tracé vont permettre de les réassembler sous la forme d'un parallélogramme. Il s'agit évidemment d'une déconstruction qui est sans rapport avec la déconstruction impliquée dans la construction des figures. Car le choix de ce tracé est indépendant de la manière dont le triangle peut être construit et il n'y a rien de commun entre ce tracé supplémentaire à trouver et les tracés auxiliaires. Nous appellerons « tracés réorganisateurs » tous les tracés permettant de réorganiser une figure donnée en vue d'y faire apparaître des formes non reconnaissables dans cette figure donnée. L'utilisation heuristique d'une figure dépend évidemment de la capacité à « voir » les tracés réorganisateurs possibles.

Il faut souligner ici un point fondamental pour comprendre l'importance et la spécificité de l'acte de voir dans l'apprentissage de la géométrie : **la visualisation non iconique est totalement indépendante de toute énonciation explicite ou implicite**. En d'autres termes, elle n'est en rien subordonnée à une connaissance des propriétés géométriques. Cela semble trivial pour les activités de type construction de figures dans la mesure où ce sont les

instruments utilisés qui commandent, dirigent ou contrôlent la décomposition visuelle des formes. En revanche cela l'est moins pour l'utilisation heuristique des figures où le plus souvent les analyses de la résolution de problèmes accordent un rôle directeur à la connaissance des propriétés pour l'exploration des figures. Par exemple, on peut se demander s'il faut connaître le théorème des milieux pour résoudre le problème de la reconfiguration du triangle en un parallélogramme ou, au contraire, s'il n'y a pas des apprentissages spécifiques qui rendent les élèves capables de « voir » ou de découvrir le tracé réorganisateur à ajouter sans connaître la propriété (et également de voir pour d'autres problèmes).

Nous reviendrons sur cette question qui touche le rôle heuristique de la visualisation dans la résolution de problèmes de géométrie élémentaire. Mais déjà nous pouvons faire les remarques suivantes : si l'on peut modifier son discours sur des objets, on ne peut pas modifier les formes qui sont d'emblée reconnues dans une figure c'est-à-dire dans un ensemble de tracés. Et cela pour une raison simple qui tient non pas au second niveau des opérations constituant l'acte de voir mais au premier niveau. A la différence de l'énonciation et donc de la production d'explications ou de justifications, la reconnaissance visuelle de formes échappe à tout contrôle intentionnel. Car il y a des lois d'organisation des données visuelles, mises en évidence par la *Gestalt-theorie*, qui imposent la reconnaissance de certaines formes *contre* la reconnaissance d'autres formes, même si celles-ci sont verbalement évoquées. Ce qui conduit parfois certaines recherches didactiques à déplorer que dans la résolution de problèmes de géométrie, les élèves observés soient arrêtés par la perception de la figure ! En fait un apprentissage visant à rendre les élèves capables de « voir » ou de découvrir le ou les tracés réorganiseurs à ajouter pour trouver la solution d'un problème doit se faire au niveau de la reconnaissance des formes et non pas à celui de l'identification des objets représentés comme nous l'indiquerons plus loin.

3. Les acquisitions relatives à une manière de voir aident-elles à entrer dans les autres manières de voir ?

Cette question du transfert de ce qui a été acquis dans un type d'activité proposé en classe à un autre type d'activité qui peut ensuite être proposé, est la question cruciale pour l'enseignement de la géométrie au Primaire et au Collège. Car c'est sur la supposition d'un transfert que repose l'élaboration d'une progression dans l'organisation curriculaire de l'enseignement et aussi dans les choix successifs des activités.

Pour ce qui concerne un transfert des acquisitions entre les différentes manières de voir mobilisées par les différents types d'activités, le passage d'un fonctionnement cognitif de la visualisation iconique à celui de la visualisation non iconique apparaît trop important pour que la possibilité d'un transfert soit envisageable, du moins pour la grande majorité des élèves au Primaire et au Collège. Et même si on s'en tient à la visualisation non iconique, il n'y a rien de commun entre la décomposition des formes reconnues qui est réalisée instrumentalement dans la phase de construction d'une figure et la décomposition par réorganisation qui exige que l'on voit d'autres formes que celles qui sont d'emblée reconnues. En oubliant provisoirement le premier type d'opération constituant l'acte de voir, c'est-à-dire la reconnaissance de formes, et s'en tenant au deuxième type d'opération, celui permettant l'identification des objets à partir des formes reconnues on peut résumer l'opposition entre la visualisation iconique (commune à tous les domaines de connaissance) et la visualisation non iconique (spécifique aux mathématiques) par le schéma ci-dessous.

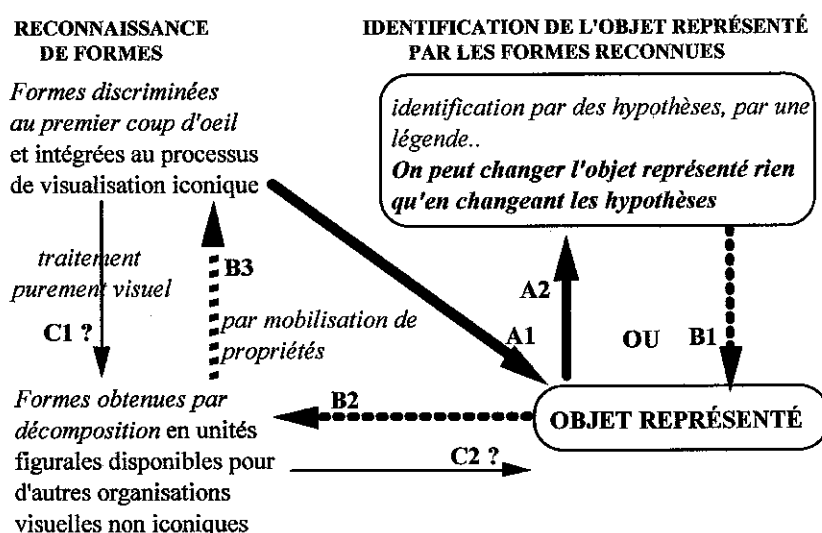


Figure 5. Deux modes de fonctionnement cognitifs pour identifier les objets représentés dans une figure à partir des formes qui sont y perceptivement reconnues.

La visualisation non iconique (flèches en pointillés B1-B3), sans laquelle on ne peut entrer dans les démarches mathématiques qui sont mises en œuvre en géométrie exige un retournement complet de la manière normale de voir des figures (flèches A1-A2). Comment aider les élèves non seulement à en prendre conscience mais à l'effectuer réellement ? Peut-on considérer que toutes les activités de construction, qui imposent instrumentalement une déconstruction des formes visuellement reconnues, soient suffisantes pour cela ? Il semblerait que ce soit là une opinion largement partagée, du moins si l'on considère l'importance donnée

depuis une trentaine d'année à tout ce qui touche aux activités de construction, même si cela ne semble pas aider la plupart des élèves à dépasser l'évidence perceptive immédiate et à développer des stratégies d'exploration visuelle des figures pour résoudre des problèmes de géométrie.

En fait, pour saisir la complexité cognitive du passage de la visualisation iconique à une visualisation non iconique, il nous faut oublier la gamme très riche de toutes les activités qui sont proposées aux élèves pour établir un pont entre ce qui serait pratique et ce qui serait théorique, entre ce qui serait concret et ce qui serait formel, entre ce qui serait spatial et ce qui serait proprement géométrique, ou encore, dans une représentation figurale, entre ce qui serait matériel et ce qui serait « mental ». Il nous faut aborder la question en amont de toutes ces oppositions trop globalisantes : quelle est la manière mathématique de voir qui est requise par n'importe quelle démarche discursive en géométrie, que ce soit l'énonciation de propriétés, (définitions ou théorèmes) la déduction d'autres propriétés.... ? Est-ce l'une des quatre manières de voir, ou seulement l'un des deux modes de visualisation non iconique que nous venons de distinguer ? Nous retrouvons ici la question que nous avons laissée en suspens (*supra* Figure 4) : existe-t-il deux ou trois manières non iconiques de décomposer les formes ? Et s'il y en a une troisième, quel type d'activité peut y faire entrer les élèves ?

III. Une cinquième manière de voir requise par les raisonnements mathématiques : la déconstruction dimensionnelle des formes.

Elle consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, et donc reconnue comme forme $nD/2D$, en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme. Ainsi la figure d'un cube ou d'une pyramide ($3D/2D$) est décomposée en une configuration de carrés, de triangles, etc. (unités figurales $2D/2D$). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales $1D/2D$). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en «points» (unités $0D/2D$). **Notons qu'avec les points nous sortons de toute visualisation.** En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités $1D/2D$ (tracés sécants ou tracés formant un coin («sommets», « angles »...)). Autrement dit, le marquage d'un point sur un tracé ou hors de ce tracé (par exemple pour fixer les extrémités d'un segment ou son milieu) relève d'un codage

symbolique. C'est d'ailleurs à ce codage symbolique que l'on associe généralement des lettres !

Pour bien mettre en évidence le caractère irréductible de cette manière de voir à celles que nous venons de décrire et pour montrer qu'elle constitue le premier seuil décisif pour l'apprentissage de la géométrie, nous nous contenterons, dans ce papier, de la comparer à la décomposition heuristique des formes correspondant aux activités de l'inventeur-bricoleur.

1. La décomposition heuristique par division méréologique des formes reconnues

L'utilisation heuristique d'une figure exige souvent que l'on regarde une figure comme s'il s'agissait des pièces d'un puzzle. Mais cela suppose que l'on **décompose en unités figurales du même nombre de dimensions que la figure de départ**. Ainsi un triangle (2D/2D) peut être décomposé en d'autres triangles (2D/2D). Mais aussi, un cube matériel (3D/3D) ou n'importe quel autre solide peut être partagé en blocs qui seront aussi des polyèdres (3D/3D). *Ce partage, que nous appellerons une division méréologique (division d'un tout en parties juxtaposables ou superposables), se fait toujours pour reconstruire avec les parties ainsi obtenues une figure souvent très différente visuellement.* Cette décomposition s'inscrit donc dans un processus plus général de *métamorphose*, pour ne pas dire d'anamorphose (laquelle est une transformation par un processus de déformation continue). La décomposition méréologique des figures est l'une des démarches les plus anciennes dans l'histoire de la géométrie. D'ailleurs, les premières « démonstrations » de la relation de Pythagore se fondent sur une décomposition /reconfiguration méréologique (Padilla, 1992). Cette décomposition peut être :

- *strictement homogène* : la décomposition se fait en unités de même forme que la figure de départ . Les quadrillages constituent les figures fonds (les « supports » !) qui souvent guident les premières opérations de décomposition méréologique.

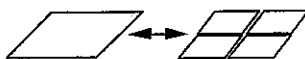


Figure 6

- *homogène* : la décomposition se fait en unités figurales de même forme mais différentes de la forme de la figure de départ :



Figure 7

— *hétérogène* : la décomposition se fait en unités figurales de formes différentes entre elles. Le problème du partage d'un triangle en deux parties pour reformer un parallélogramme implique une décomposition hétérogène de ce type.

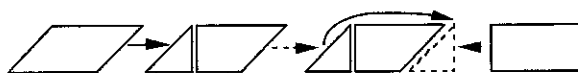


Figure 8

Les décompositions homogènes sont des transformations qui sont visuellement réversibles et qui peuvent être spontanément amorcées à la seule vue de la figure. En revanche, les décompositions hétérogènes ne le sont pas.

Pour une figure de départ déterminée par un énoncé de problème, il y a évidemment plusieurs décompositions méréologiques possibles, mais toutes ne conduisent pas à la solution du problème. Parfois même celles qui y conduisent ne sont pas directement visibles sur la figure. Autrement dit il y a des situations où la figure aide à voir et d'autres où elle empêche de voir. On peut déterminer les facteurs qui favorisent ou inhibent ces processus de division méréologique et de réorganisation des formes reconnues (Duval 1995b). Et ces facteurs peuvent être des variables didactiques dans des activités visant à faire entrer les élèves dans une utilisation heuristique des figures.

La décomposition méréologique présente une double particularité :

- elle peut s'opérer soit matériellement (par découpage et réassemblage des pièces obtenues comme pour un puzzle), soit graphiquement (par ajout de ce que nous avons appelé plus haut des tracés réorganisateurs), soit même simplement du regard (et non pas « mentalement ») ; ces trois modalités sont presque équivalentes à un détail près : quand une partie doit intervenir simultanément dans deux sous-reconfigurations différentes, il faut disposer matériellement de deux pièces pour cette même partie ;
- la décomposition par division méréologique est très souvent sans lien direct avec le discours mathématique, et c'est pour cela qu'elle permet l'exploration purement visuelle d'une figure de départ pour détecter les propriétés géométriques à utiliser pour résoudre un problème posé.

2. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes

La déconstruction dimensionnelle présente deux caractéristiques qui l'opposent non seulement à la décomposition méréologique mais également à la déconstruction instrumentale.

- Elle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive. Et on pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif. Pour la représenter graphiquement, il faut en quelque sorte transformer les figures géométriques en schémas. Ainsi la seule énonciation des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme par exemple implique que l'on déconstruise dimensionnellement une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D. Car les propriétés d'un objet 2D/2D (par exemple un parallélogramme représenté par A ci-dessous) sont des relations entre des objets représentés par des unités figurales 1D/2D (les configurations B et C ci-dessous) ou 0D/2D.

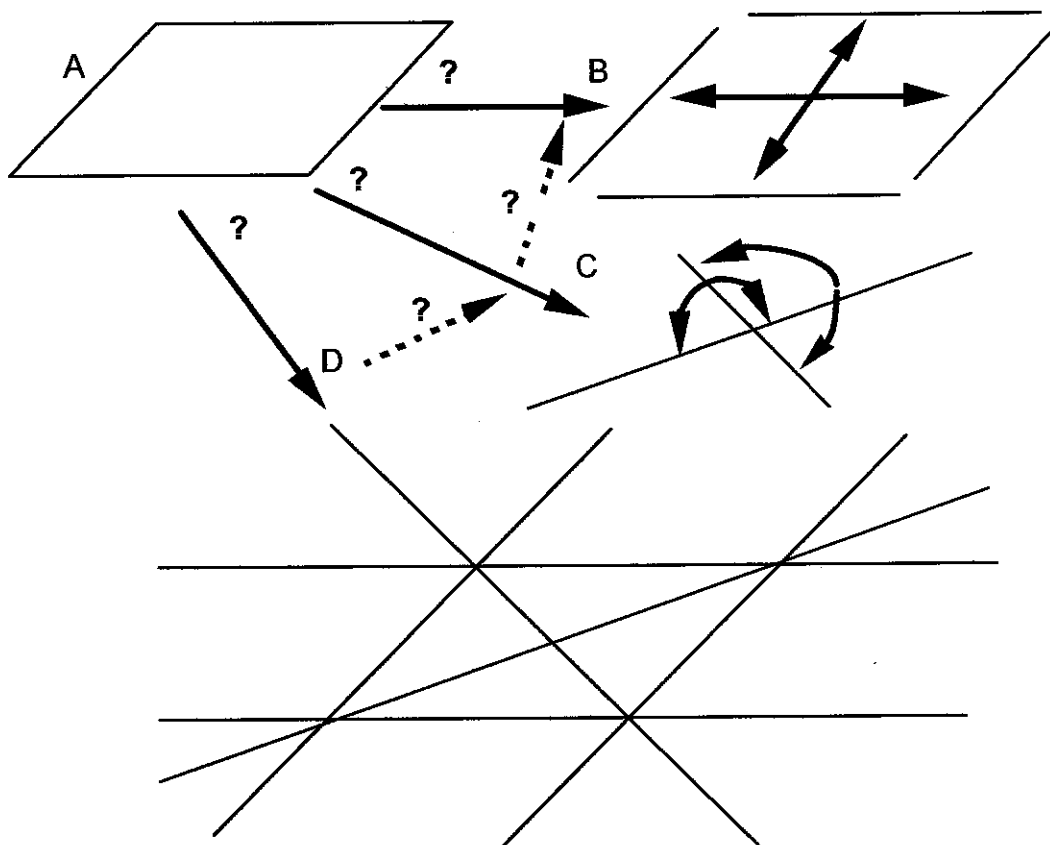


Figure 9. Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'une forme.

Cela représente une révolution cognitive pour le fonctionnement spontané de la visualisation iconique ou non iconique. La déconstruction dimensionnelle des formes est une démarche qui va contre tous les processus d'organisation et de reconnaissance perceptive des formes. Ce

qui, rappelons le, n'est pas le cas de la décomposition de type puzzle : car celle-ci, au contraire, repose sur la mobilisation de ce processus tout en cherchant à en dépasser les limitations ou les restrictions immédiates. Or la première loi de l'organisation et de la reconnaissance perceptive des formes est *la priorité immédiate et stable des unités 2D sur les unités 1D ou 0D*. Cela veut dire non seulement que l'on voit d'abord un carré (ou un rectangle) avant de voir quatre côtés, mais cela veut dire surtout que tous les tracés que l'on perçoit d'emblée comme formant le contour de la surface carrée (ou rectangulaire) restent, d'une certaine manière, non détachables de cette reconnaissance visuelle première. **Les côtés d'un polygone restent les bords non séparables de la surface qu'ils délimitent.** Tout ce qui s'impose comme une forme 2D/2D prend d'ailleurs une force d'« image objet » qui va servir d'unité de référence pour identifier d'autres figures. Et cela rend inconcevable et invisible le processus de déconstruction dimensionnelle des formes. Même les activités de construction de figures, où elle est imposée *de facto* par les instruments, restent pratiquement sans effet sur le fonctionnement cognitif qui impose la primauté visuelle des formes 2D sur les formes 1D ou les unités 0D. C'est pourquoi la déconstruction dimensionnelle, c'est-à-dire le passage des surfaces aux lignes ($\neq$ bords), représente une révolution cognitive par rapport aux autres types de visualisation. Il est plus difficile à réaliser encore que le passage des solides aux figures planes que l'on peut obtenir avec un plan d'intersection.

- La déconstruction dimensionnelle ne peut être matérialisée d'aucune manière, alors que la décomposition méréologique peut être effectuée ou simulée matériellement avec des objets physiques que l'on sépare et que l'on réunit d'une autre manière. Davantage elle ne peut pas, à strictement parler, être montrée graphiquement à moins d'introduire un couple de figures reliées entre elles *selon la structure proportionnelle* d'une équivalence ou d'une implication. Dans la Figure 9 ci-dessus le schéma fusionne trois propositions auxquels correspondent respectivement les liens, $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$, ce qui n'est pas la manière habituelle de visualiser pratiquée dans l'enseignement et dans les manuels, celle-ci en restant le plus souvent à la manière de voir du botaniste !

On peut alors voir à la fois la similitude et surtout l'opposition entre division méréologique des formes 3D ou 2D et la décomposition dimensionnelle des formes nD. **Alors que la division méréologique se fait pour une reconfiguration faisant apparaître de nouvelles formes non reconnaissables dans la figure de départ, la déconstruction dimensionnelle se fait pour UNE (RE)CONSTRUCTION DEDUCTIVE DES OBJETS REPRESENTES.** Autrement dit, la

division méréologique reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable.

3. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes perçues correspond au fonctionnement profond de la visualisation en géométrie.

Quand nous disons « fonctionnement profond », nous signifions par cette qualification que les autres manières de voir sont des manières de voir qui restent en surface. Et cela conduit à modifier la notion de « figure » qu'on l'entende dans son sens classique ou qu'on l'entende selon l'opposition entre dessin et figure, opposition qui met l'accent sur le caractère particulier de la visualisation réalisée et sur le caractère général de l'objet représenté, lequel dépend des propriétés. Toute figure doit émerger de ce que nous avons appelé ailleurs un « circuit de visualisation » organisé autour d'une trame de tracés 1D/2D, car à partir d'un **réseau de droites** on peut faire apparaître une grande diversité de Formes 2D/2D.

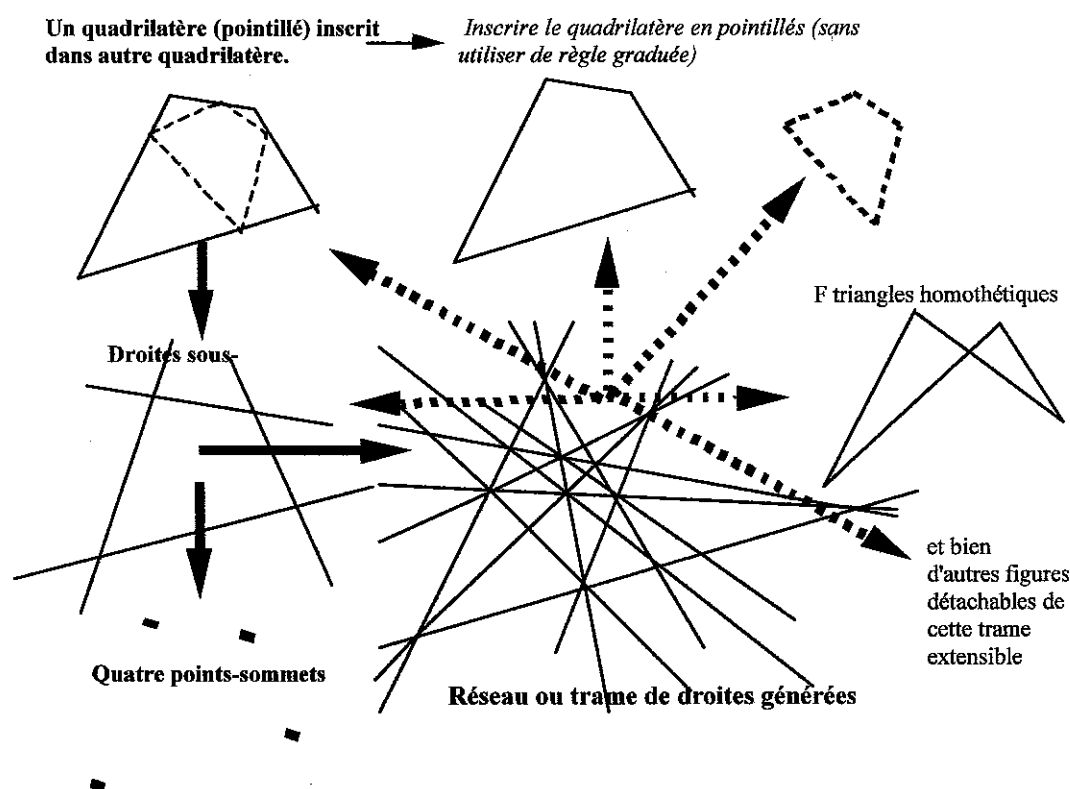


Figure 10

La résolution du problème exige de faire apparaître le réseau des droites supports, de les prolonger pour faire apparaître de nouveaux points d'intersection et construire ensuite de

nouvelles droites. Mais pour penser à cela il faut aussi être capable de reconnaître dans le réseau de droites plusieurs figures géométriques possibles dont les quadrilatères !

Dans la visualisation iconique toute figure tend à être une représentation stable ou non modifiable parce qu'image ou représentation d'un objet. Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. Autrement dit toute figure, en géométrie plane, est une configuration transformable en d'autres, *chacune se détachant d'une même trame, au gré des propriétés ou des objets que l'on nomme.*

Deux points sont donc essentiels pour bien comprendre le fonctionnement en profondeur de la déconstruction dimensionnelle des formes.

- C'est la trame d'unités figurales 1D/2D qui est le champ des unités figurales de base et le champ réel du travail sur les figures, et non plus les unités figurales 2D/2D introduites comme les figures de base. A partir d'un réseau de droites on peut faire apparaître une grande diversité de formes 2D/2D. Mais cela requiert aussi une reconnaissance des formes non visibles immédiatement, du type de celle qui est mise en œuvre dans la division méréologique.
- Cette déconstruction dimensionnelle des formes est le pré-requis pour une compréhension effective de toute énonciation des propriétés géométriques et donc pour leur mobilisation dans la résolution de problèmes.

Revenons, pour illustrer ces deux points au problème du reformatage d'un triangle en parallélogramme. Pour justifier la solution de l'inventeur bricoleur, il faut faire appel au théorème des milieux et aux propriétés du parallélogramme. **Mais, à l'inverse, suffisait-il de connaître ce théorème pour trouver la solution ?** En d'autres termes comment passer de la figure d'un triangle à la reconfiguration IV (ci-dessous), *directement, ou au contraire en étant capable d'un détour par le réseau de droites sous-jacents*, lequel permet la reconnaissance potentielle de triangles **ET** de parallélogrammes ? Autrement dit seul celui qui a le réflexe de voir la figure de départ sur le fond du réseau des droites qui en supportent les côtés, ou qui a le réflexe de générer le réseau de droites sous-jacents peut voir la configuration III, laquelle est la seule qui puisse s'articuler cognitivement de manière pertinente et congruente à la justification mathématique. Et nous pouvons préciser l'observation faite plus haut sur l'exemple précédent : à partir d'un réseau de droites on peut faire apparaître une

grande diversité de formes 2D/2D et *donc voir le passage mathématique* des unes aux autres (c'est-à-dire les propriétés qui le rendent possible).

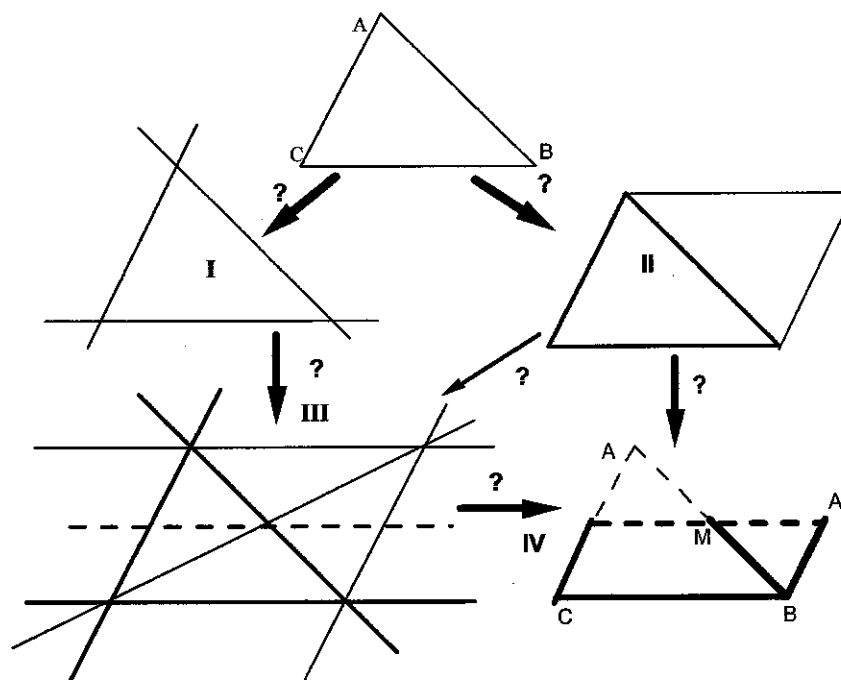


Figure 11 Déconstruction dimensionnelle du triangle de départ : chemin I, III et non pas II
Cela montre que le regard mathématique sur les figures implique le développement de la création de « circuits de visualisation », c'est-à-dire de circuits qui associent à la fois des décompositions par division méréologique et des décompositions par déconstruction dimensionnelle, l'articulation entre visualisation et discours mathématique reposant exclusivement sur la déconstruction dimensionnelle. Leur fonction est évidemment heuristique. Il suffit d'ailleurs de se poser la question suivante pour voir combien la mise en place de tels circuits est importante pour que les élèves deviennent à la fois capables d'initiatives et de contrôle dans les activités de recherche et de démonstration.

Conclusion

Le premier enjeu de tout enseignement de la géométrie, quels qu'en soient les objectifs, est de faire **apprendre à voir**. Et cela non seulement parce que toute entrée dans la géométrie implique visualisation mais parce que cette visualisation recouvre plusieurs manières de voir qui, cognitivement, sont incompatibles entre elles. Ainsi il y a un saut cognitif entre la visualisation iconique, qui correspond à la manière spontanée de voir, et la visualisation non-iconique qui exige une décomposition des formes reconnues, avant même toute identification des objets représentés. Et parmi les différents types de décomposition des

formes reconnues, nous avons vu que c'était la déconstruction dimensionnelle des formes qui était la manière de voir décisive pour apprendre la géométrie. Apprendre à voir en géométrie, c'est apprendre à déconstruire dimensionnellement toute forme reconnue. Et cela pour une raison essentielle : toute articulation d'un discours mathématique avec des représentations visuelles repose sur cette déconstruction dimensionnelle des formes.

Force est de reconnaître, que l'importance cruciale de cet enjeu est largement méconnu aussi bien dans l'enseignement de la géométrie que dans les recherches sur l'enseignement de la géométrie. Par exemple, le fait de voir une unité figurale 2D/2D comme une configuration d'unités 1D/2D (Figures 9 ci-dessus) n'est-il pas souvent considéré comme allant de soi, ou comme découlant quasi automatiquement de l'utilisation de la règle pour tracer une figure ? D'ailleurs toutes les progressions de connaissances semblent organisées selon le même ordre : *(points → droites) → segments de droites → polygones*, la connaissance des propriétés relatives aux différentes configurations possibles que l'on peut former par deux droites et celle des propriétés relatives à la comparaison de deux segments devant fournir les briques élémentaires avec lesquelles on peut construire les connaissances relatives aux polygones et à toute la géométrie plane (en intégrant bien l'usage du compas et la figure du cercle. Aussi bien par l'usage des instruments que par le vocabulaire employé pour décrire ou définir les propriétés des figures euclidiennes de base, **l'enseignement de la géométrie est organisé comme si la déconstruction dimensionnelle des figures était sinon naturelle, du moins facilement accessible à tous les élèves**. Et c'est là que commencent tous les malentendus qui empêchent que s'établisse pour les élèves une articulation réelle entre figures et discours géométrique (compréhension des définitions, utilisation des propriétés), c'est-à-dire une communication entre les processus de visualisation et les démarches de raisonnement. Comment s'étonner alors de la marginalisation de l'enseignement de la géométrie et de la réticence qu'elle suscite chez beaucoup d'élèves ?

Toute cette analyse de la visualisation en géométrie débouche donc sur deux questions, ou plutôt sur deux chantiers très différents.

Le premier porte sur l'articulation entre visualisation et discours en géométrie. Et là il devient essentiel de ne pas confondre deux niveaux : celui du discours mathématique d'une part et celui des productions verbales des élèves d'autre part. L'articulation entre visualisation et discours mathématique repose exclusivement sur la déconstruction dimensionnelle dans la mesure où tout passage de la représentation figurale au discours sur les objets représentés implique nécessairement un changement de dimension, et cela dès l'énonciation des définitions (Duval 1995a p.178). En revanche les explications et les justifications produites

par les élèves sont, en partie, commandées par la manière de voir qu'ils mettent en œuvre — laquelle peut relever seulement de la visualisation iconique — et, en partie, par le degré de différenciation des opérations discursives déterminant leur production verbale (Duval 2003, p.36). Le rôle et les analyses de toutes les productions des élèves en géométrie est à reconsidérer totalement d'une part en fonction de la diversité des manières de voir, et d'autre part en fonction des opérations discursives qu'ils peuvent mettre en œuvre.

La deuxième question est plus immédiate. Elle porte directement sur la déconstruction dimensionnelle. Entrer dans cette manière de voir constitue une véritable révolution cognitive et exige un travail spécifique. Quel type d'activité peut alors aider les élèves à entrer dans cette manière de voir, sans en rester à la visualisation iconique ou à la visualisation non iconique classique (la construction instrumentale de figures) ? C'est là qu'il me sera le plus facile de répondre.

Références

- Berthelot R. Salin M-H.(1994) L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. *Grand N*, 53, 39-56.
- Berthelot R. Salin M-H. (2000) L'enseignement de l'espace à l'école élémentaire, *Grand N*, 65, 37-59.
- Duval R. (1988) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°1, 57-75.
- Duval R. (1995a) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang
- Duval R. (1995b) Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processings. in *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education* (Ed. R. Sutherland & J. Mason), 142-157, Berlin : Springer
- Duval R. (2000) Costruire, vedere e ragionare in geometria : quali rapporti ? *Bolletino dei docenti di matematica* 41, 9-24. Bellinzona.
- Duval R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°8, 13-62.
- Laborde C. (1994) Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. *Bulletin APMEP*, 396, 523-548.
- Padilla, V. (1992) *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P.: Strasbourg, 1992.
- Piaget J. (1947) 1972, *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : P.U.F.

C. De trois regards possibles sur une figure au regard " géométrique "

Marc Godin

IUFM Nord-Pas de Calais

Une figure rectiligne se donne à voir selon trois types d'unités visuelles perçues comme primitives : des surfaces, des lignes ou des points. Et cela donne à voir des propriétés géométriques différentes. On peut donc avoir trois regards différents selon le type d'unités visuelles que l'on discerne. Toute la question est de savoir si ces trois regards sont assez vite accessibles aux jeunes élèves.

Nous n'évoquerons pas d'autres propriétés d'une figure rectiligne que celles données à reconnaître selon l'un ou l'autre de ces trois regards. Cela veut dire que nous ne nous intéressons pas aux propriétés qui pourraient être décidées par un choix d'hypothèses et donc reportées sur la figure par un codage, lequel peut entrer en conflit avec l'un ou l'autre de ces regards.

Résoudre des problèmes de reproduction d'une figure est une activité qui impose le passage d'un regard à un autre. Un tel passage exige un travail de réorganisation visuelle de ce que l'on reconnaît comme unités visuelles primitives et prépare la prise de conscience de relations abstraites entre les propriétés relevant des différents regards mobilisés.

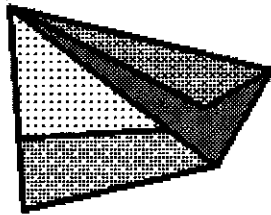
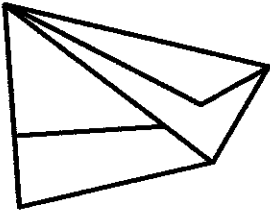
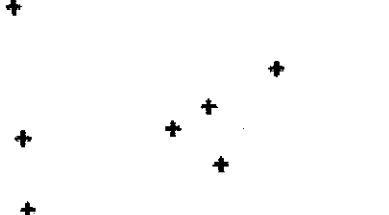
Les éléments déterminant une activité de reproduction d'une figure sont : une figure modèle, des outils pour reproduire et une partie de la figure à reproduire. La donnée de ces trois éléments, par le fait qu'elle induit un de ces trois regards, est une variable fondamentale qui permet d'introduire les élèves à la déconstruction dimensionnelle des figures.

Dans cet article nous allons décrire les trois regards possibles sur une figure rectiligne, puis nous analyserons quatre situations de reproduction d'une figure en les illustrant par des exemples. Nous montrerons une progression dans les situations de reproduction en vue de développer chez les élèves la mobilisation de ces trois regards. Enfin nous aborderons la

question de l'élaboration de figures par les enseignants pour qu'ils construisent eux-mêmes de telles progressions.

I Trois regards sur une figure rectiligne.

Une figure plane peut être considérée dans un premier temps comme un assemblage d'unités visuelles, identifiées comme telles au premier coup d'oeil.

		
Assemblage de surfaces	Assemblage de lignes	Assemblage de points

Ces différentes unités visuelles correspondent à celles prises en compte par Euclide pour qui une surface est vue comme limite d'un solide, une ligne comme limite d'une surface et un point comme limite d'une ligne. Ce point de vue doit être directement lié à une problématique de reproduction ou de construction de figures. Ce qui pose la question des instruments que l'on utilise pour reproduire ou pour construire.

Culturellement, à la suite d'Euclide, on a privilégié les instruments qui permettent de produire des lignes rectilignes ou circulaires. Autrement dit, toute figure, quel que soit le regard porté sur elle, doit être ramenée à un assemblage de lignes. Parfois une figure qui est considérée comme un assemblage de lignes doit être modifiée en un autre assemblage de lignes pour être construite à la règle et au compas (*Infra* Exemple page 44-45).

Or ce regard sur les figures comme assemblage de lignes n'a rien de naturel. Ce qui s'impose spontanément c'est le regard sur les surfaces qu'elles délimitent. Et la prédominance de ce regard est renforcée par le fait qu'un assemblage de surfaces peut être vu comme leur juxtaposition ou comme leur superposition. Or passer de ce regard au regard euclidien constitue un saut visuel trop gravement sous-estimé dans l'enseignement. C'est pourquoi les premières activités de reproduction de figures doivent d'abord rendre les élèves compétents pour passer d'un regard centré sur les surfaces à un regard centré sur les lignes et sur leurs

relations d'incidence. Mais cela exige un tout autre type d'instrument que la règle et le compas. Il faut, par exemple, un outil-surface informel et une règle (*Infra* Exemple 4 page 52-53).

La capacité à avoir un regard géométrique sur une figure consiste dans la capacité à développer ces trois regards contre la prédominance d'un seul.

II Les situations de reproduction.

Nous dirons qu'il y a reproduction d'une figure quand celle-ci, étant donnée visuellement, reste visible et consultable pendant toute l'activité.

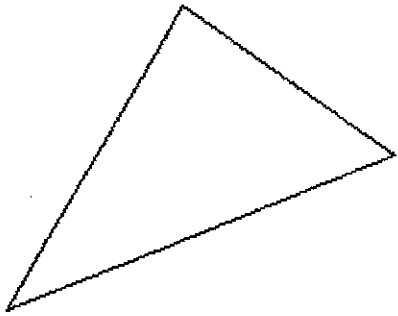
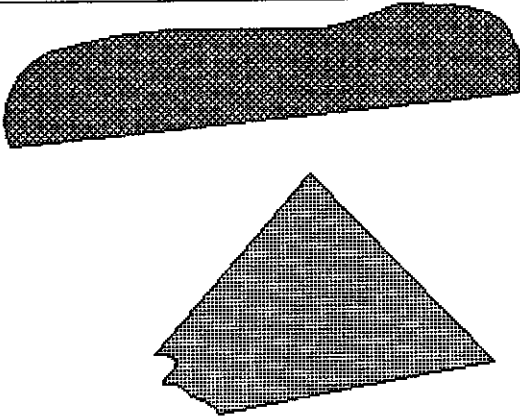
On peut distinguer quatre situations de reproduction selon que la reproduction est effectuée :

1. par déplacement des gabarits correspondant à certaines des surfaces de la figure mais sans effectuer de tracés graphiques,
2. par des tracés en suivant les contours des formes correspondant à des surfaces de la figure,
3. par des tracés rectilignes en suivant les contours d'outils usuels,
4. par des tracés, lignes rectilignes ou circulaires avec les instruments euclidiens.

La vérification d'une reproduction est assurée par un transparent qui confirme ou non la qualité de la reproduction.

Nos préoccupations concernent essentiellement des activités de reproduction dans lesquelles il faut produire des tracés rectilignes. Car notre objectif est de faire apprendre à changer de regard sur une figure pour un élève de cycle 2.

Trois éléments facteurs interviennent dans une situation de reproduction

Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle peut être donnée en cherchant à favoriser l'un des trois regards. Dans l'exemple ci-dessus, c'est l'assemblage de lignes qui est choisi.	Les outils sont de deux types : un gabarit déchiré correspondant partiellement à la figure et la règle classique, c'est-à-dire une surface ayant un côté rectiligne sur laquelle il n'est pas possible de tracer de ligne (pour que cette surface devienne un gabarit imaginaire d'une figure ayant un rapport avec la figure modèle).	Au départ on n'a pas d'informations concernant la figure de travail.

Le choix des outils est bien entendu déterminant pour faire évoluer le regard sur une figure.

Prenons quelques exemples en relation avec le tableau suivant pour tenir compte des capacités des élèves :

Au cycle 1, les élèves ont pu résoudre un problème de reproduction, en posant des éléments graphiques guidés par des gabarits de formes composant la figure.

A la fin du cycle 2, les élèves ont du résoudre des problèmes de reproduction de figures en utilisant la règle et l'équerre, outils de géométrie.

Au cycle 3, les élèves commencent à résoudre des problèmes de reproduction de figures en utilisant la règle et le compas, outils de géométrie.

Voici quelques activités qui peuvent faciliter une progression.

Gabarits et pochoir.

Gabarits et pochoir déchiré.

Gabarits et deux règles.

Gabarits et une règle.

Gabarit déchiré et deux règles.

Gabarit déchiré et une règle.

Gabarit déchiré, une règle et un outil de report de longueur.

Surface-outil, une règle et un outil de report de longueur.

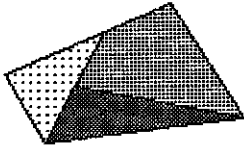
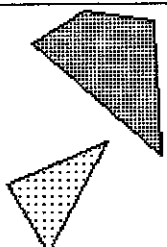
Equerre-surface, une règle et un outil de report de longueur.

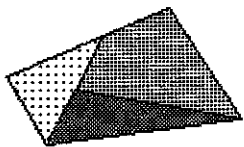
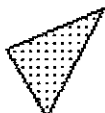
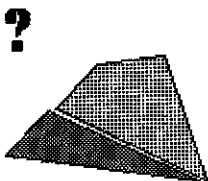
Equerre-ligne, une règle et un outil de report de longueur.

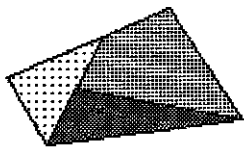
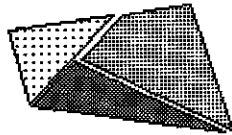
Compas, une règle et un outil de report de longueur.

Exemple de reproduction de figure par déplacement de gabarits et sans tracé graphique

C'est une activité de type puzzle. Une situation de reproduction comme celle décrite dans l'exemple suivant pourrait ne pas retenir notre attention car les données relèvent toutes a priori d'un regard surface, mais elle permet de faire apparaître des erreurs qui s'expliquent par une méconnaissance d'un regard ligne.

Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle est donnée par un assemblage de surfaces.	Deux gabarits de surface à placer.	Au départ on a déjà placé une surface.

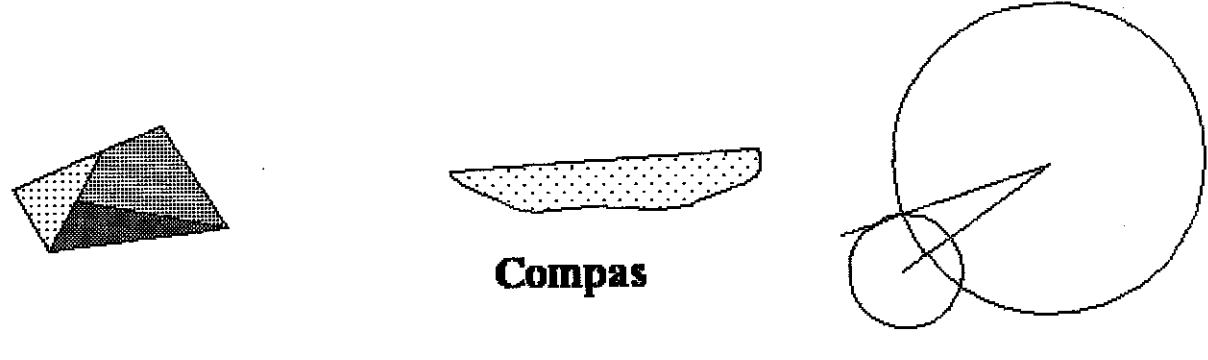
Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle est donnée par un assemblage de surfaces.	Un gabarit de surface à placer.	La figure, assemblage de surfaces est déjà bien commencée.

Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle est donnée par un assemblage de surfaces.		On obtient une figure assemblage de surfaces.

Exemple de reproduction par construction « à la règle et au compas ».

C'est la situation à l'extrême opposé de la précédente.

Une figure modèle,	les outils conventionnels : la règle et le compas.	et une figure de travail.
	 Compas	
La figure modèle est donnée par un assemblage de surfaces.		Au départ, on a rien.

Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
 Compas		
La figure modèle est donnée par un assemblage de surfaces.		On obtient une figure assemblage de lignes.

Cette situation de reproduction relève d'un regard type assemblage de points, avec la nécessité de construire un point comme intersection de deux lignes. Cette situation est réalisable par un élève qui a acquis un regard géométrique sur les figures, c'est-à-dire par un élève capable de déconstruction dimensionnelle.

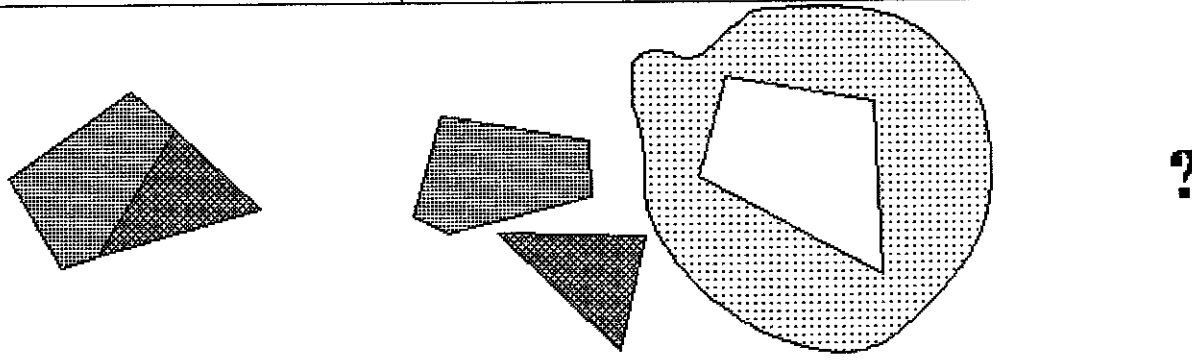
Entre ces exemples extrêmes, regardons maintenant des exemples qui au cycle 2 amèneraient un élève à voir une figure non seulement comme un assemblage de surfaces mais aussi comme un assemblage de lignes.

Des exemples pour construire l'outil " règle " :

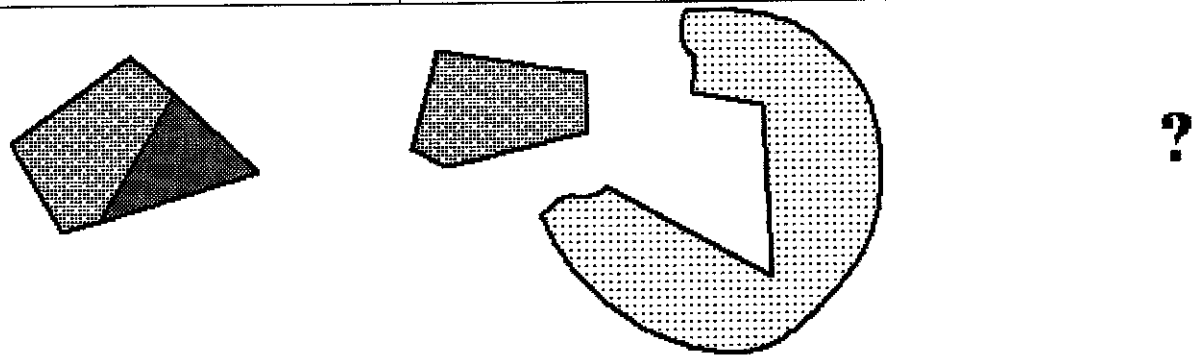
La règle n'est pas un outil simple et banal.

Un morceau de pochoir, une cale pour poser des gabarits peuvent remplir la fonction de règle. En outre, il est plus facile d'avoir deux ou trois règles qu'une seule, alors que dans les I.O. on demandait dès le CP de tracer des figures à LA règle.

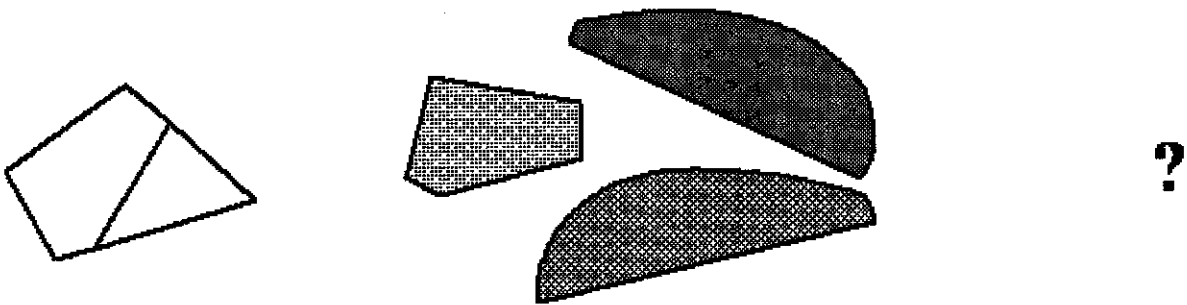
Exemple de type avec “ pochoir ” :

Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle peut être donnée selon l'un des trois regards et dans l'exemple ci-dessus, c'est l'assemblage de surfaces qui est choisi.	Les outils sont de deux types : des gabarits de surface et un pochoir.	Au départ on n'a pas d'informations concernant la figure de travail.

Exemple de type : “ pochoir déchiré ”.

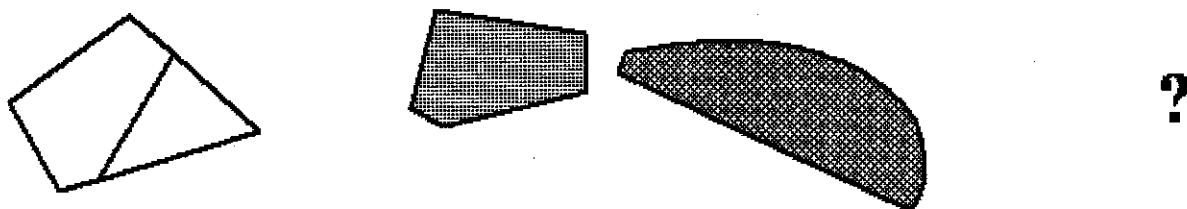
Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle peut être donnée selon l'un des trois regards et dans l'exemple ci-dessus, c'est l'assemblage de surfaces qui est choisi.	Les outils sont de deux types : un ou des gabarits de surface et une partie de pochoir.	Au départ on n'a pas d'informations concernant la figure de travail.

Exemple de type “ au moins deux règles ”.

Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle est perçue comme un assemblage de lignes.	Les outils sont de deux types : un gabarit de surface et deux règles.	Au départ on n'a pas d'informations concernant la figure de travail.

Exemple du type “ à la règle ”.

La présence d'une seule règle pose un problème qui, pour être résolu, requiert un acte graphique.

Une figure modèle,	des outils,	et une figure de travail.
		
La figure modèle est perçue comme un assemblage de lignes.	Les outils sont de deux types : un gabarit de surface et une règle.	Au départ on n'a pas d'informations concernant la figure de travail.

Exemples de reproduction d'un triangle sans les outils de géométrie conventionnels.

Construire ou reproduire une figure simple, c'est-à-dire une figure qui visuellement apparaît comme une surface et non pas comme un assemblage de surfaces, signifie, ici, tracer le contour fermé de la forme simple.

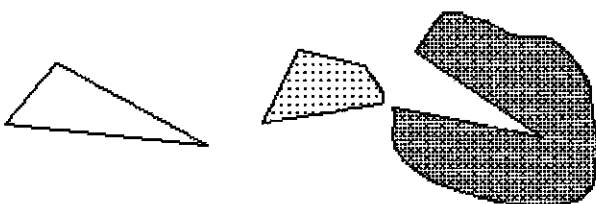
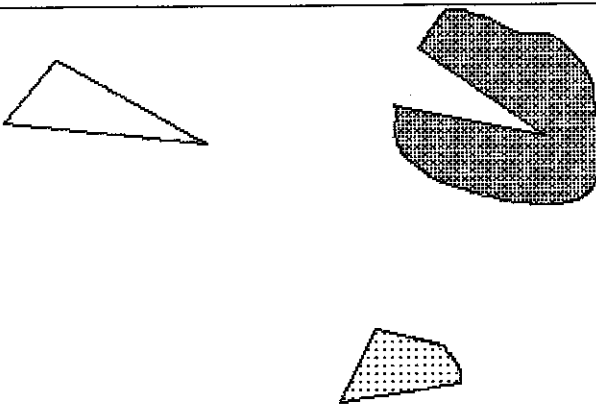
Que se passe-t-il si on varie les outils 2D disponibles pour guider le crayon ?

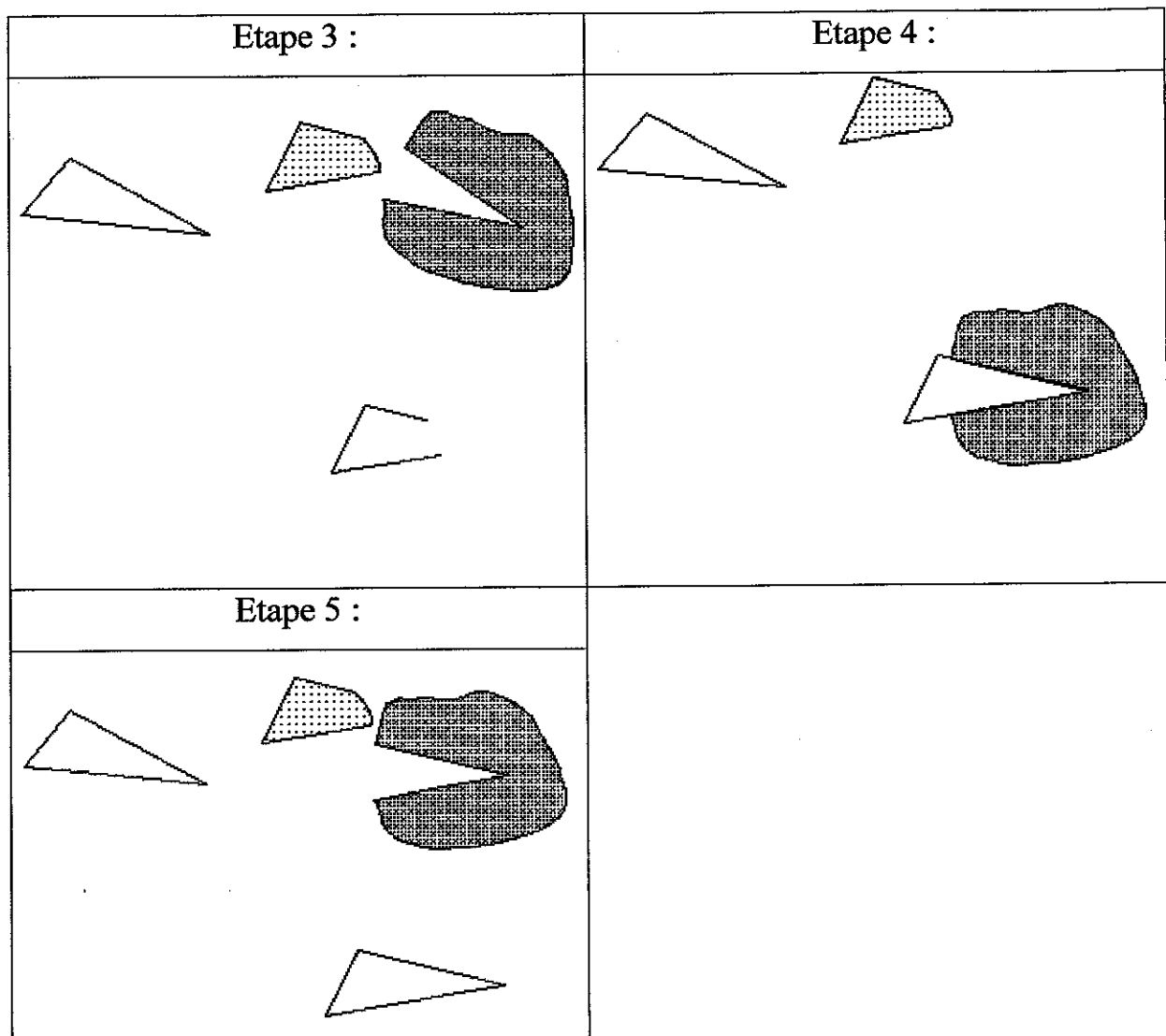
Ces outils ne sont pas tous de même valeur et leur choix modifie ce qui est possible ou non pour les objectifs d'enseignement. Le passage de l'exemple 1 à l'exemple 2, ci-dessous, montre qu'une règle peut être interprétée comme un morceau de pochoir.

Les outils en deux dimensions peuvent a priori être utilisés simultanément ou non, mais l'utilisation, d'un seul outil à la fois, oblige à une déconstruction 1D de la figure à reproduire (ce qui est visible dans l'exemple 3 ci-dessous où il devient nécessaire de prolonger des bords de surface, alors que, dans l'exemple 2, ce n'est pas nécessaire).

Exemple 1 :

La tâche consiste à restaurer un triangle avec un gabarit et un pochoir. Malheureusement le gabarit du triangle et le pochoir ont été déchirés.

OUTILS : Un gabarit déchiré et un pochoir déchiré.	
Etape 1 :	Etape 2 :
 A triangle template (white with a black outline) and a torn stencil (white with a black outline, missing a piece).	 A triangle template (white with a black outline) and a torn stencil (white with a black outline, missing a piece).



Le geste graphique s'inscrit toujours dans la conception du contour fermé d'une figure 2D propre au gabarit ou au pochoir, mais il a été, **ici, momentanément interrompu.**

Exemple 2 :

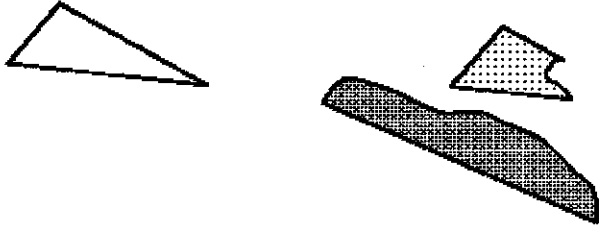
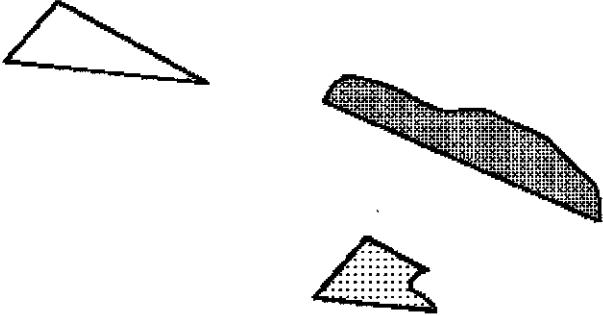
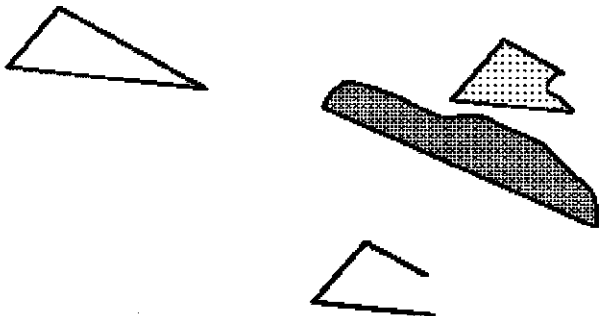
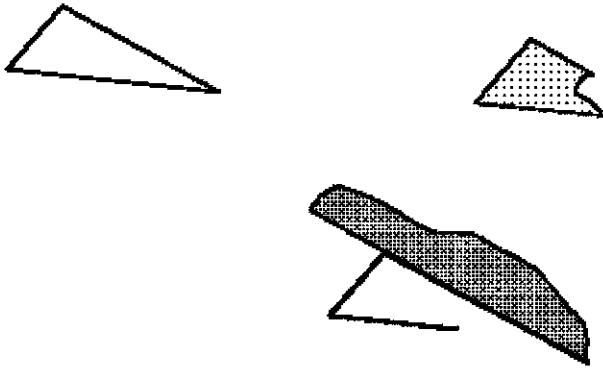
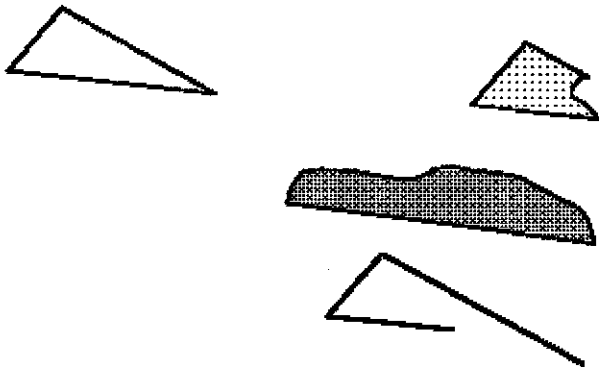
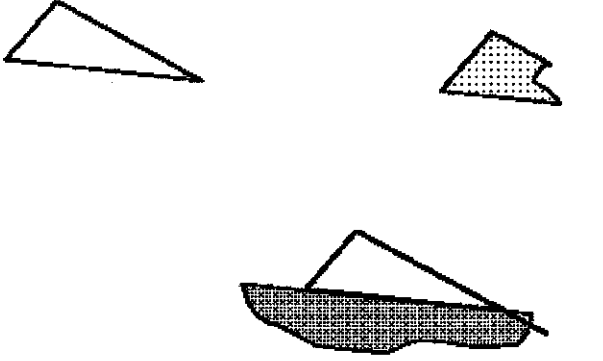
Pour restaurer un triangle un gabarit déchiré et plusieurs règles sont donnés.

OUTILS : Un gabarit déchiré et des règles.	
Etape 1 :	Etape 2 :
Etape 3 :	Etape 4 :
Etape 5 :	

A l'étape 4, les deux règles sont placées simultanément afin de reconstituer le pochoir (voir étape 4 de l'exemple 1 ci-dessus) et la superposition de ces deux règles est le prélude à la capacité de prolonger une ligne (voir étape 4 de l'exemple 3, étape 3 de l'exemple 4 et étape 2 de l'exemple 5 ci-dessus).

Exemple 3 :

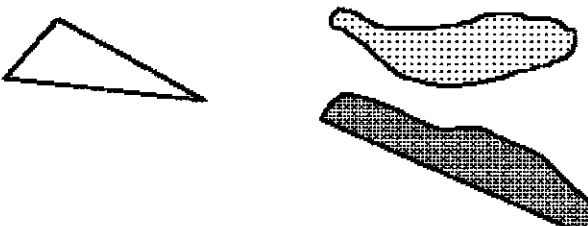
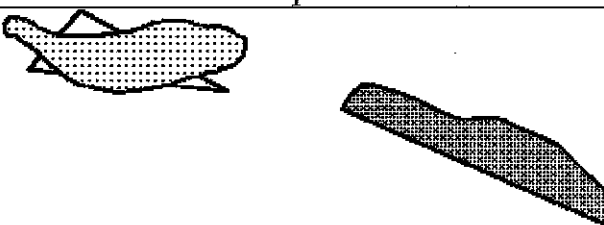
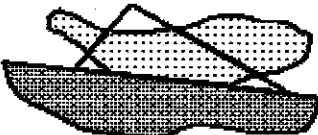
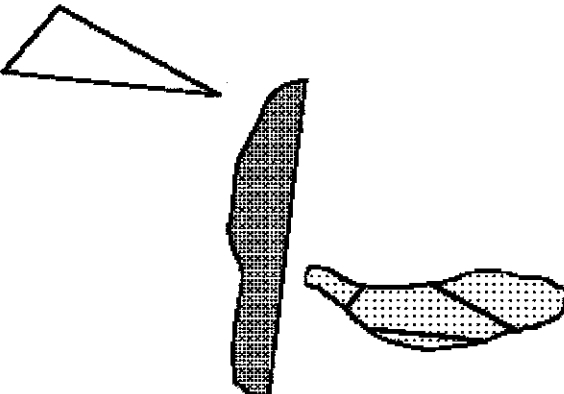
Le gabarit déchiré du triangle et une seule règle sont donnés.

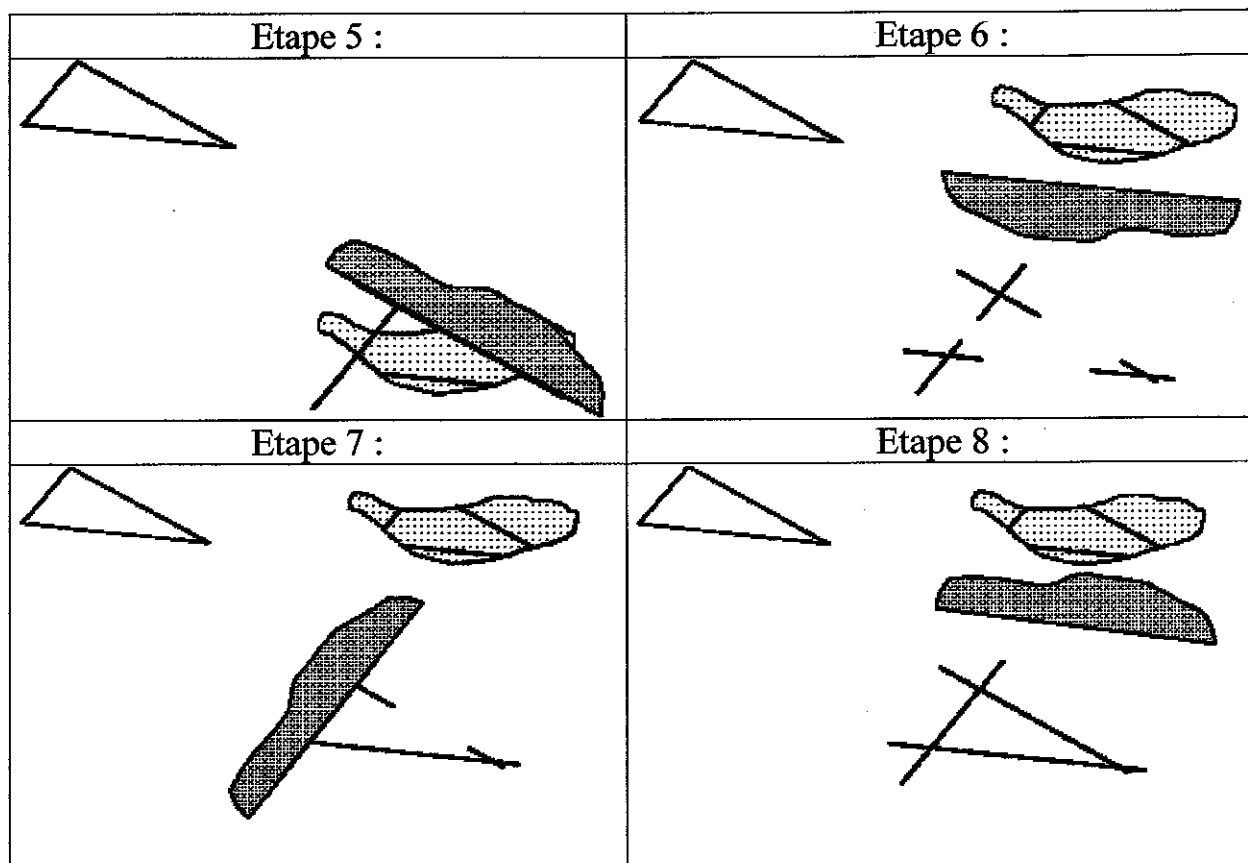
OUTILS : Un gabarit déchiré et une seule règle.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	
Etape 5 :	Etape 6 :
	

La suppression d'une règle par rapport à l'exemple précédent, oblige à abandonner la stratégie de reconstitution du pochoir, et donc à abandonner le graphisme du contour externe du triangle pour tracer les deux côtés manquants en isolant bien deux gestes séparés. Cette situation oblige également à tracer non seulement un côté *mais aussi son prolongement*. Le segment tracé à l'étape 4 est le **premier élément 1D tracé**, auparavant les éléments tracés n'étaient qu'une partie du contour fermé. Il y a là un premier passage important de 2D à 1D.

Exemple 4 :

Lorsque aucun gabarit n'est disponible, comment faire avec un outil dont le contour n'a *a priori* aucun rapport avec le triangle ?

OUTILS : Surface et règle.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	



Les gestes graphiques 1D de l'étape 3 peuvent apparaître comme des substituts aux actions de découpe, ou de pliage, nécessaires pour obtenir un gabarit du triangle ou un morceau de celui-ci.

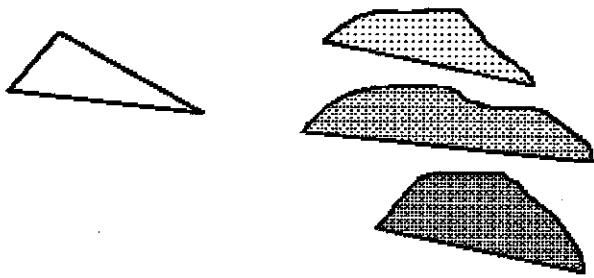
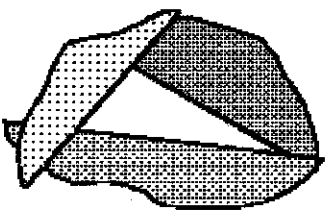
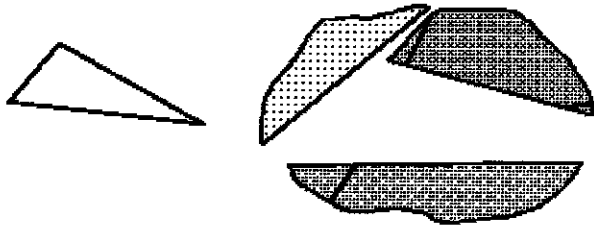
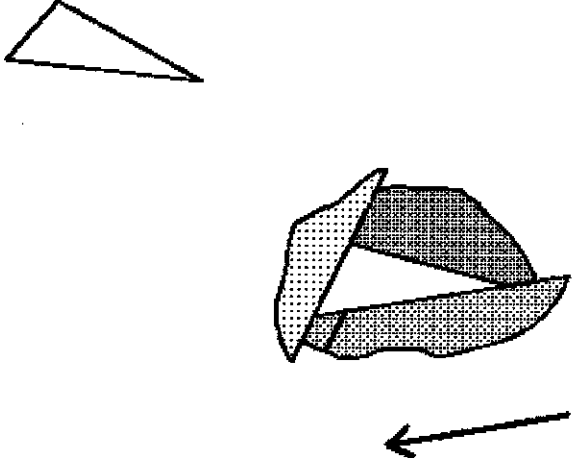
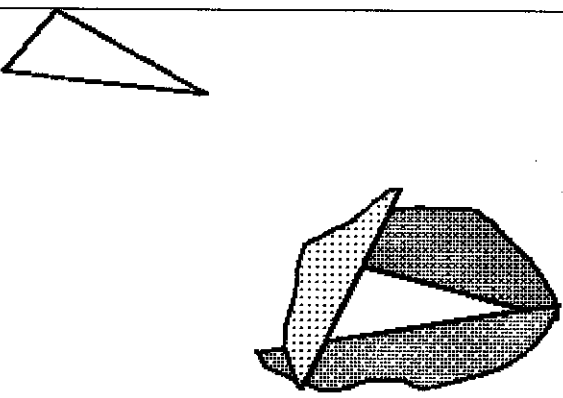
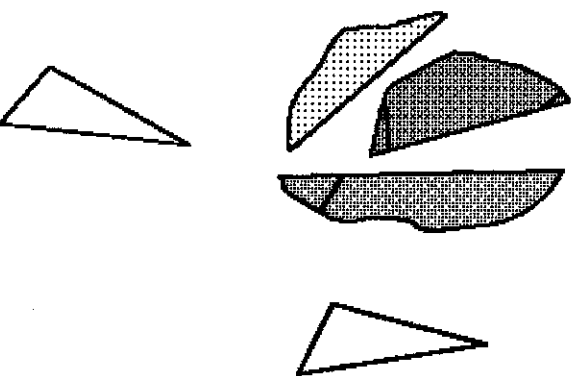
La capacité de choisir (ce qui n'est pas le cas dans cet exemple) **une forme dont le contour n'a pas de rapport avec le contour d'une figure, et de pouvoir y inscrire un morceau de chaque côté de la figure** —pour reproduire, en une seule fois, la figure par des prolongements de lignes— est un indicateur d'une visualisation géométrique évoluée.

Exemple 5 :

Aucun gabarit ou pochoir n'étant disponibles, comment faire avec trois morceaux de surface ayant chacun un bord rectiligne ? Comment faire avec trois « règles informables »¹ ?

Et cela, en sachant qu'un pochoir ferait bien l'affaire...

¹ Nous appellerons « règles informables » des surfaces dont un bord est rectiligne et sur lesquelles il est possible de tracer pour faire apparaître une forme 2D.

OUTILS : « Règles informables ».	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	
Etape 5 :	Etape 6 :
	

Les règles sont placées ici par juxtaposition au triangle, et les règles sont reliées entre elles par superposition. **Tracer sur les règles garde la mémoire de cette superposition.**

On voit ici que l'utilisation des règles introduit naturellement l'opération de prolongement d'un tracé, même si dans un premier temps cela ne fait pas sortir du cadre de la figure à

reproduire. Cela au moins en brise l'unité visuelle qui fusionne les trois bords en un contour unique.

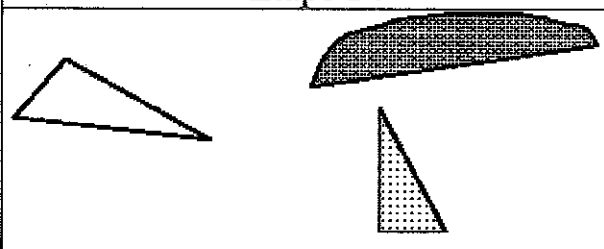
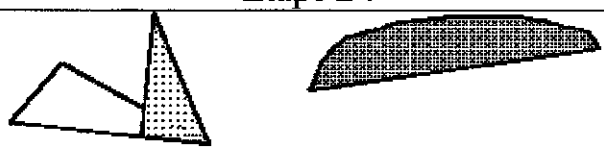
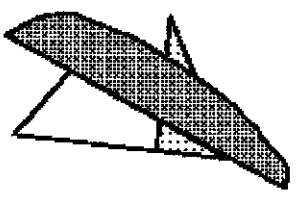
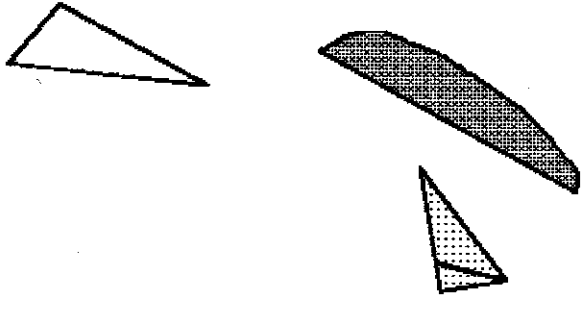
Le passage de l'étape 4 à l'étape 5 montre qu'une seule règle pourrait être informée d'une forme 2D, et que les deux autres règles serviraient à reconstituer le pochoir. Et, ici, chacun évidemment, pense au premier cas d'égalité des triangles d'Euclide.

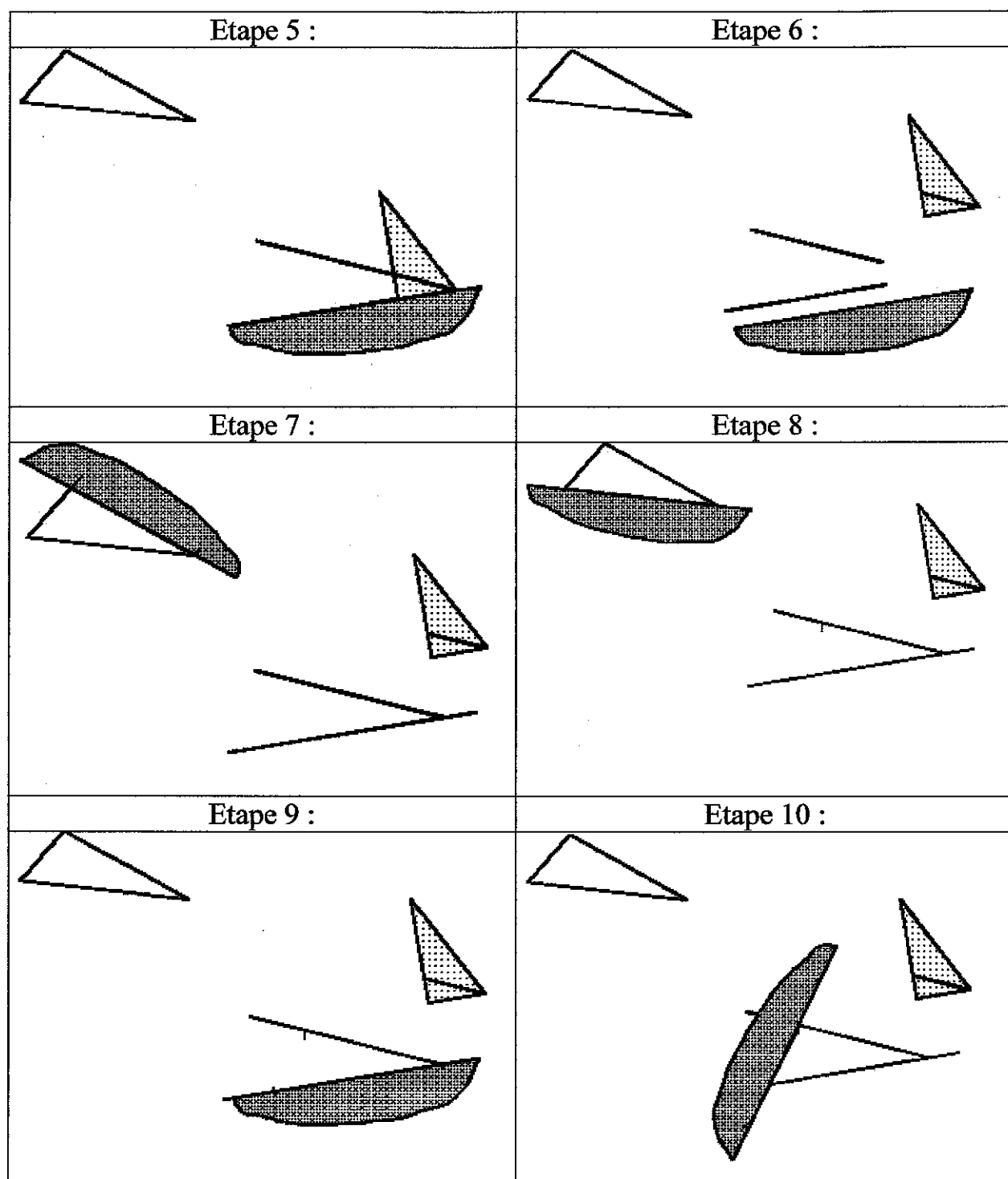
Il s'agit là d'une démarche opposée à celle de l'exemple précédent où l'objectif était de reconstituer un gabarit.

Exemple 6 :

Pour reproduire une figure il faut une surface à " informer " et une règle. Prenons comme surface un triangle rectangle, c'est-à-dire une équerre et prenons conscience de l'ambiguïté de cet outil.

L'équerre devient nécessaire quand " informer " une règle n'est pas possible et que l'on ne dispose que d'une seule règle. (Bien entendu, l'équerre peut être utilisée comme à l'exemple 3, sans tenir compte d'un côté rectiligne de sa forme. L'équerre peut aussi être utilisée comme à l'exemple 4 en tenant compte d'un côté rectiligne de sa forme et en la plaçant en juxtaposition au triangle, mais ici l'équerre est placée par superposition).

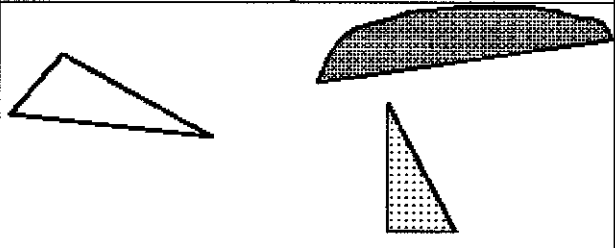
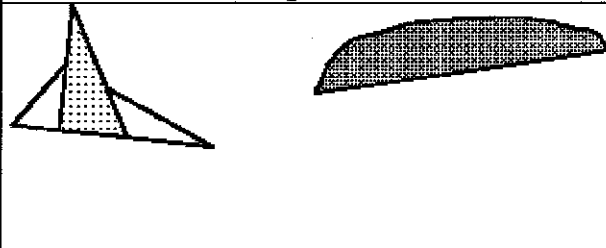
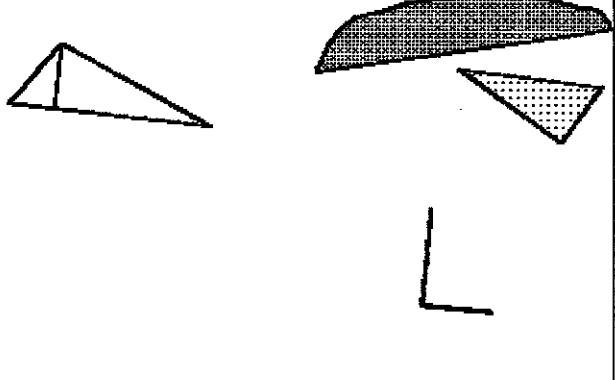
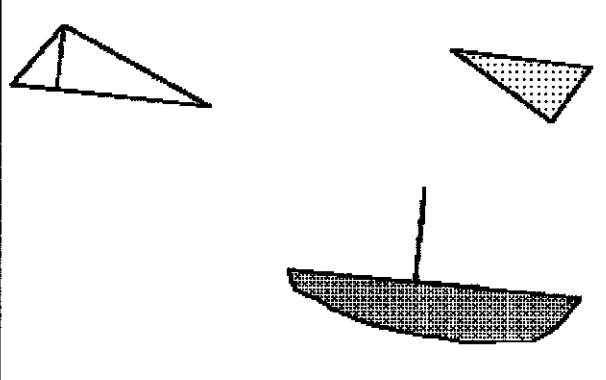
OUTILS : Equerre détournée comme surface et règle informables.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	



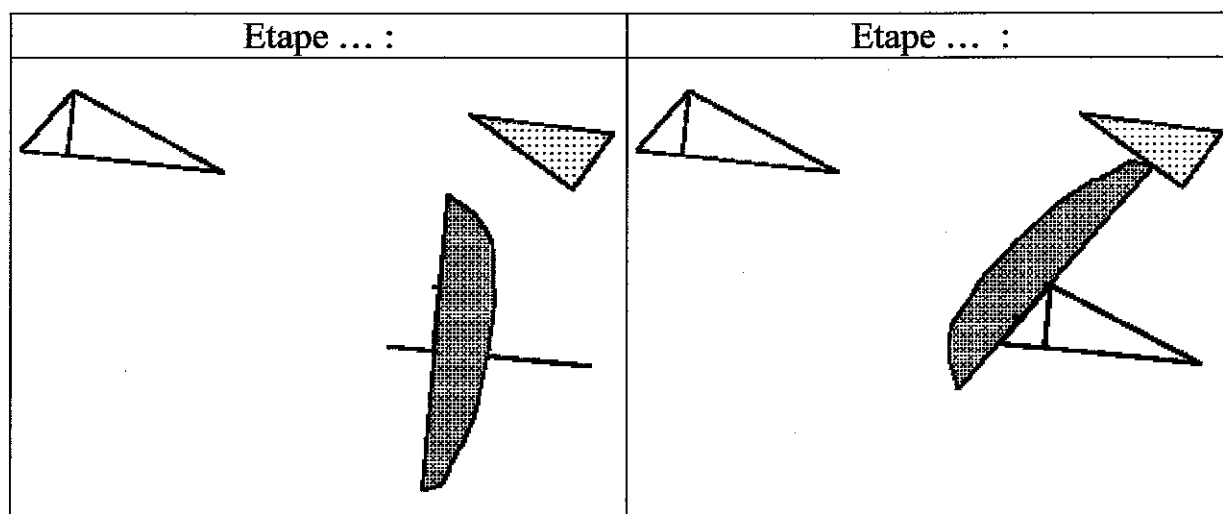
On voit qu'ici l'équerre a été utilisée comme une surface pour déplacer une partie d'une forme 2D.

Exemple de reproduction d'un triangle avec des outils de géométrie conventionnels (règle et équerre).

L'équerre, qui est un outil conventionnel permettant de tracer des éléments 1D, est un gabarit de triangle rectangle mais il ne peut déplacer aucune surface, car seuls deux côtés rectilignes sont considérés et l'on ne peut pas dessiner sur une équerre. Il n'en reste pas moins qu'un élève peut l'interpréter comme une partie d'un gabarit de carré, ou de rectangle, et l'utiliser comme un morceau d'un gabarit d'une forme 2D particulière.

OUTILS : Equerre et règle non informables ² en 2D.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	

² Une règle non informable est une règle qui ne peut être enrichie pour y faire une forme 2D, ce qui est l'usage classique. Elle peut cependant être utilisée comme outil de report de longueur et donc un outil de déplacement d'éléments 1D.



Dans cette convention, l'équerre est un instrument pour tracer des lignes perpendiculaires, c'est-à-dire des éléments 1D. Ici, l'activité de reproduction est plus complexe car **il faut faire apparaître un tracé supplémentaire sur la figure simple initiale. Cela revient à transformer cette figure simple en une figure assemblage. Le triangle doit alors être vu comme la juxtaposition de deux triangles rectangles, qui sont formellement déplaçables et reproductibles grâce à l'équerre.**

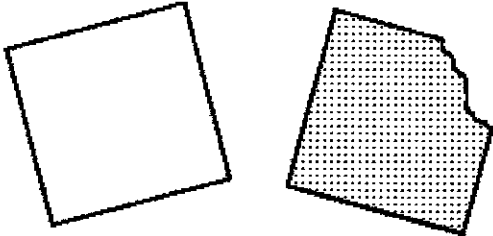
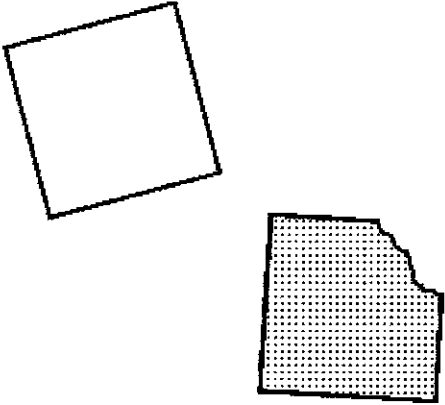
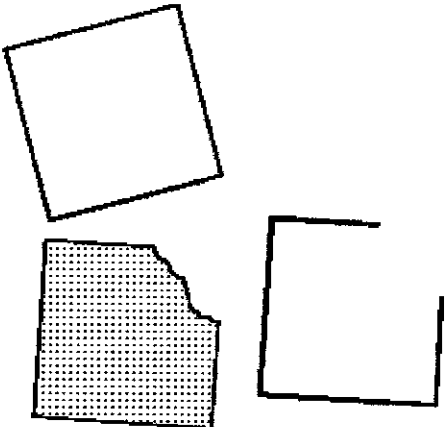
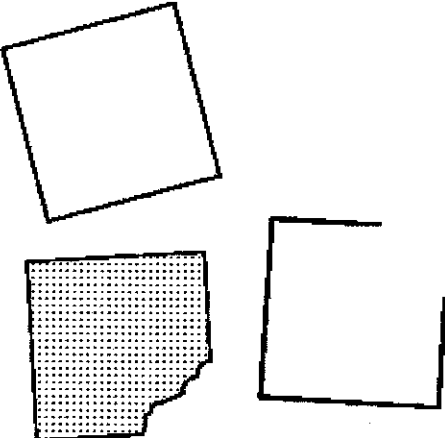
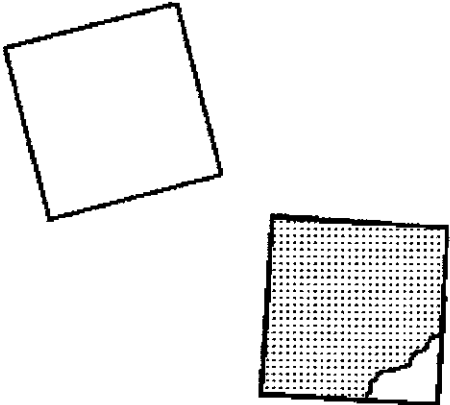
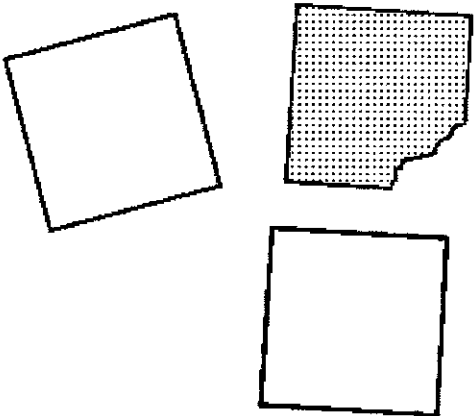
Souvent les figures données à reproduire contiennent un coin droit, deux segments perpendiculaires, ce qui ne permet pas alors d'aborder le problème du passage de 2D à 1D.

Cette ambiguïté de l'équerre conduit à s'interroger sur l'utilisation que les élèves font des instruments. Ainsi on peut se demander si les élèves n'ayant pas pris conscience du changement de regard impliqué par le passage des formes 2D aux formes 1D, ne cherchent pas aussi à utiliser les instruments de construction comme s'il s'agissait de gabarits, c'est-à-dire par superposition et donc par approximation perceptive.

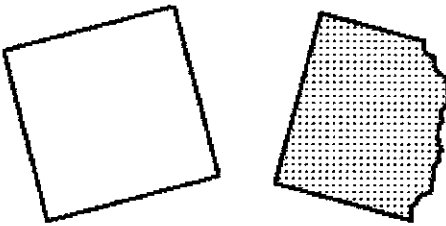
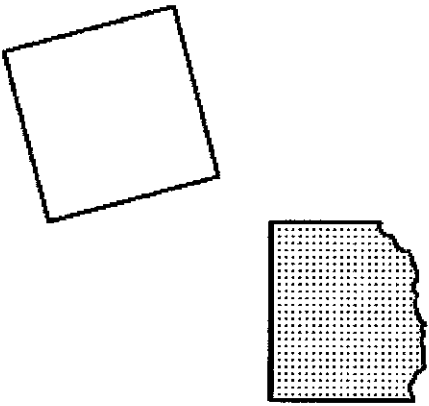
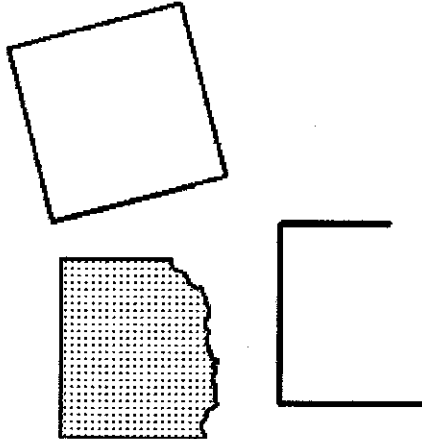
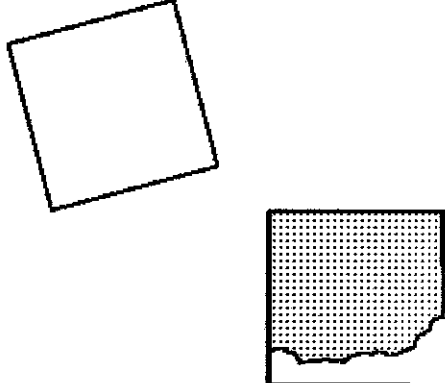
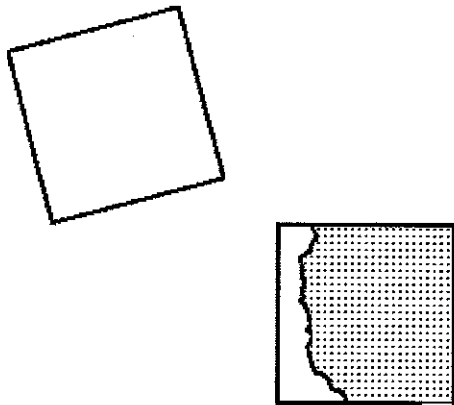
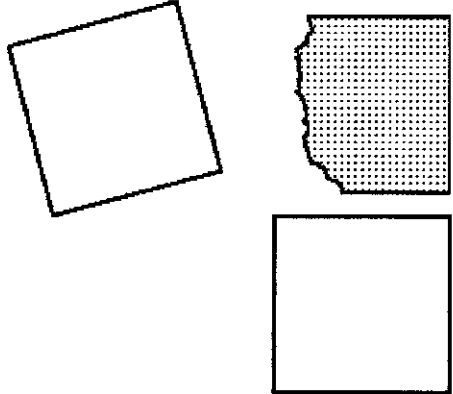
Exemples de reproduction d'un carré sans les outils de géométrie conventionnels.

Partons du gabarit complet qui donne la forme et le contour fermé de la figure. Une détérioration progressive du gabarit, *dont la matière est un morceau de fromage qu'une souris vient grignoter*, entraîne une complexité croissante pour la reconstitution du contour fermé de la figure.

Exemple A :

OUTILS : Gabarit abîmé.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	
Etape 5 :	Etape 6 :
	

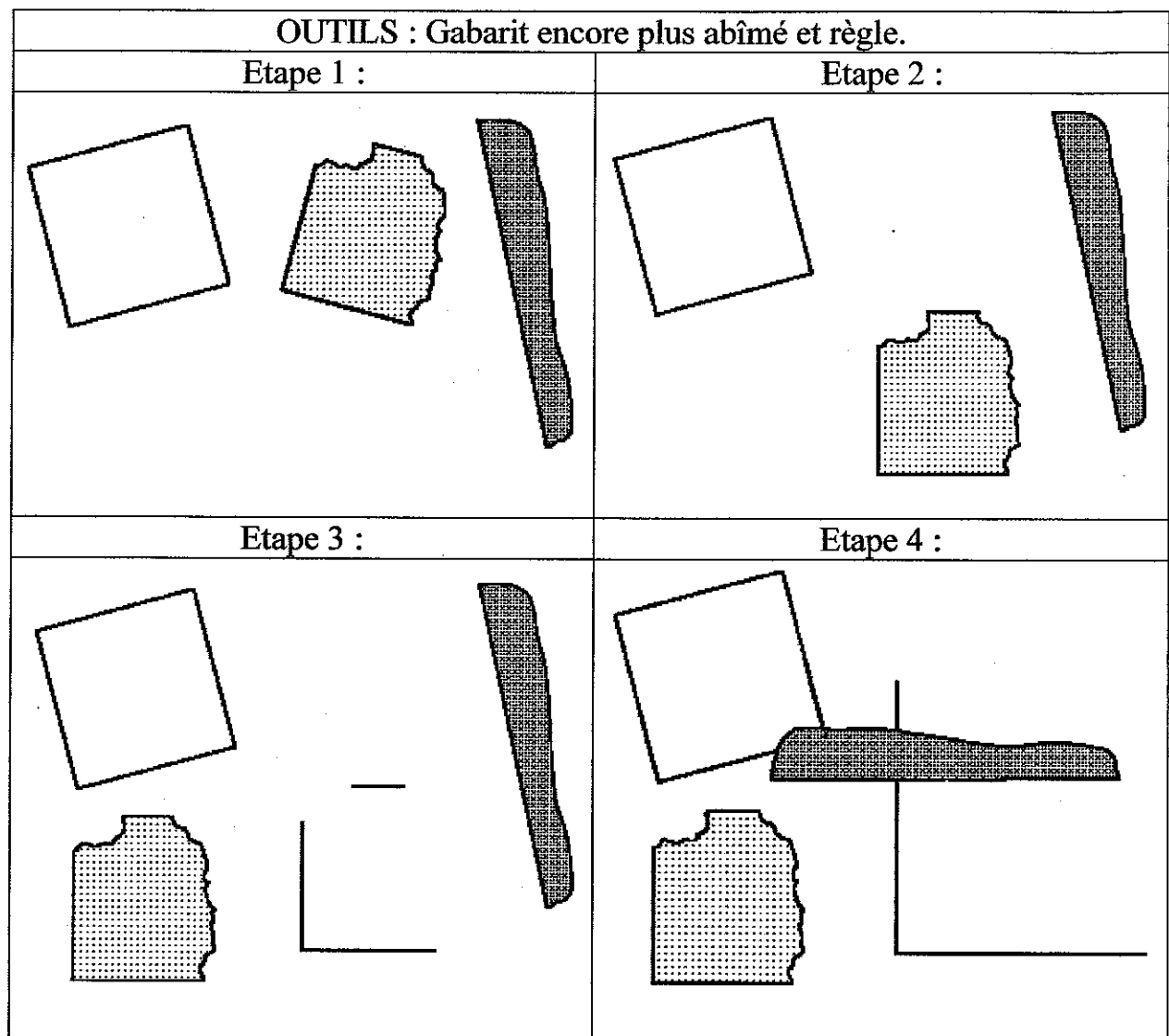
Exemple B :

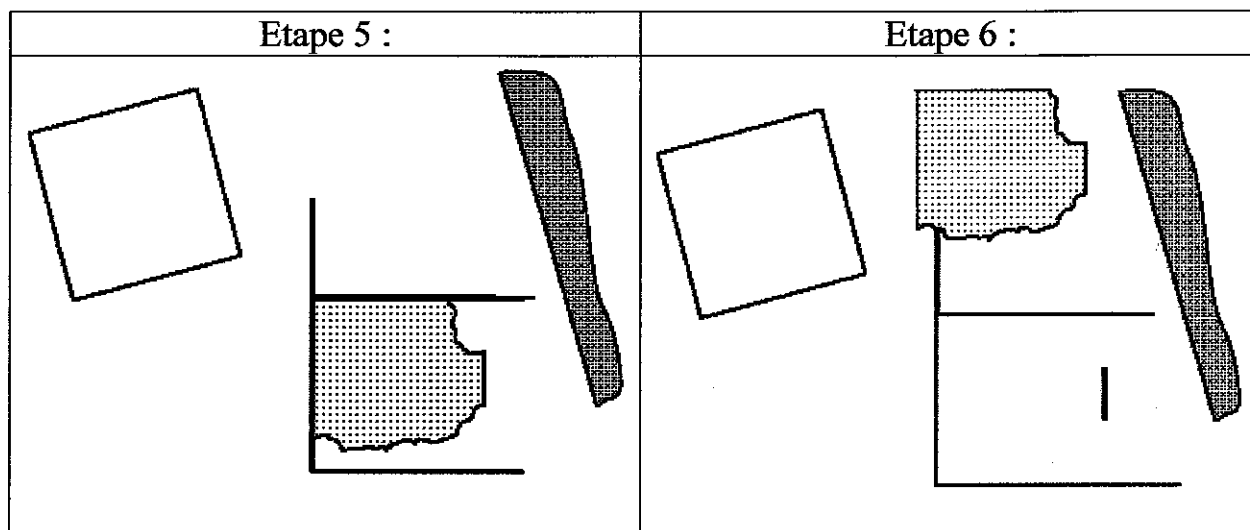
OUTILS : Gabarit bien abîmé.	
Etape 1 :	Etape 2 :
	
Etape 3 :	Etape 4 :
	
Etape 5 :	Etape 6 :
	

Notons que les activités de ces deux premiers exemples ne permettent pas de progrès pour le passage de 2D à 1D, car figure, gabarit et contour se confondent. Mais on peut y remarquer

l'intérêt de la variable : “grignotage du gabarit” pour la résolution du problème de reproduction.

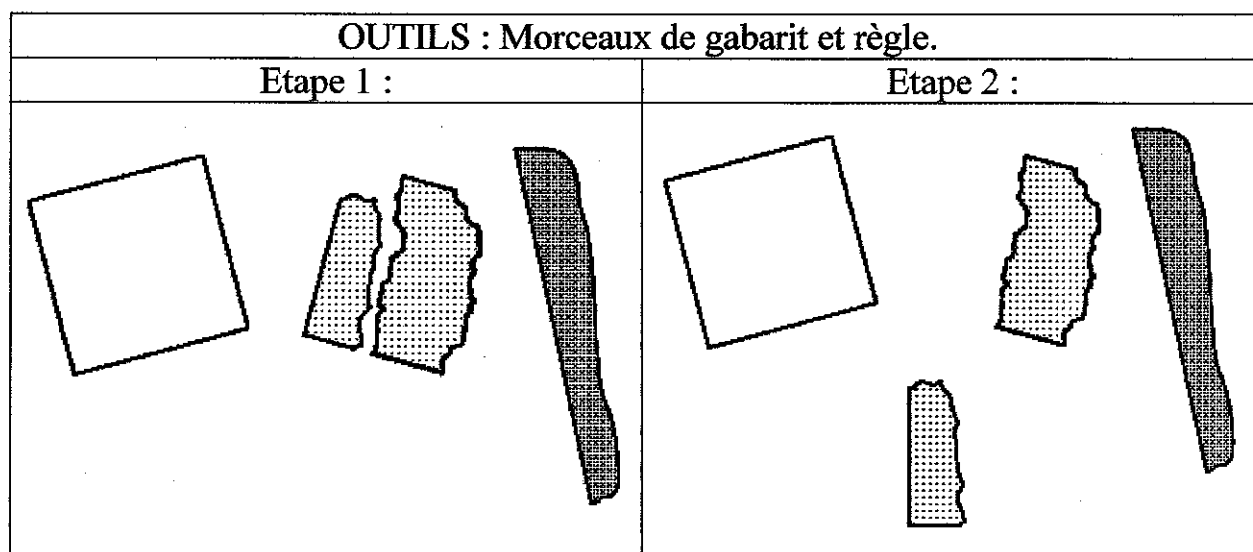
Exemple C :

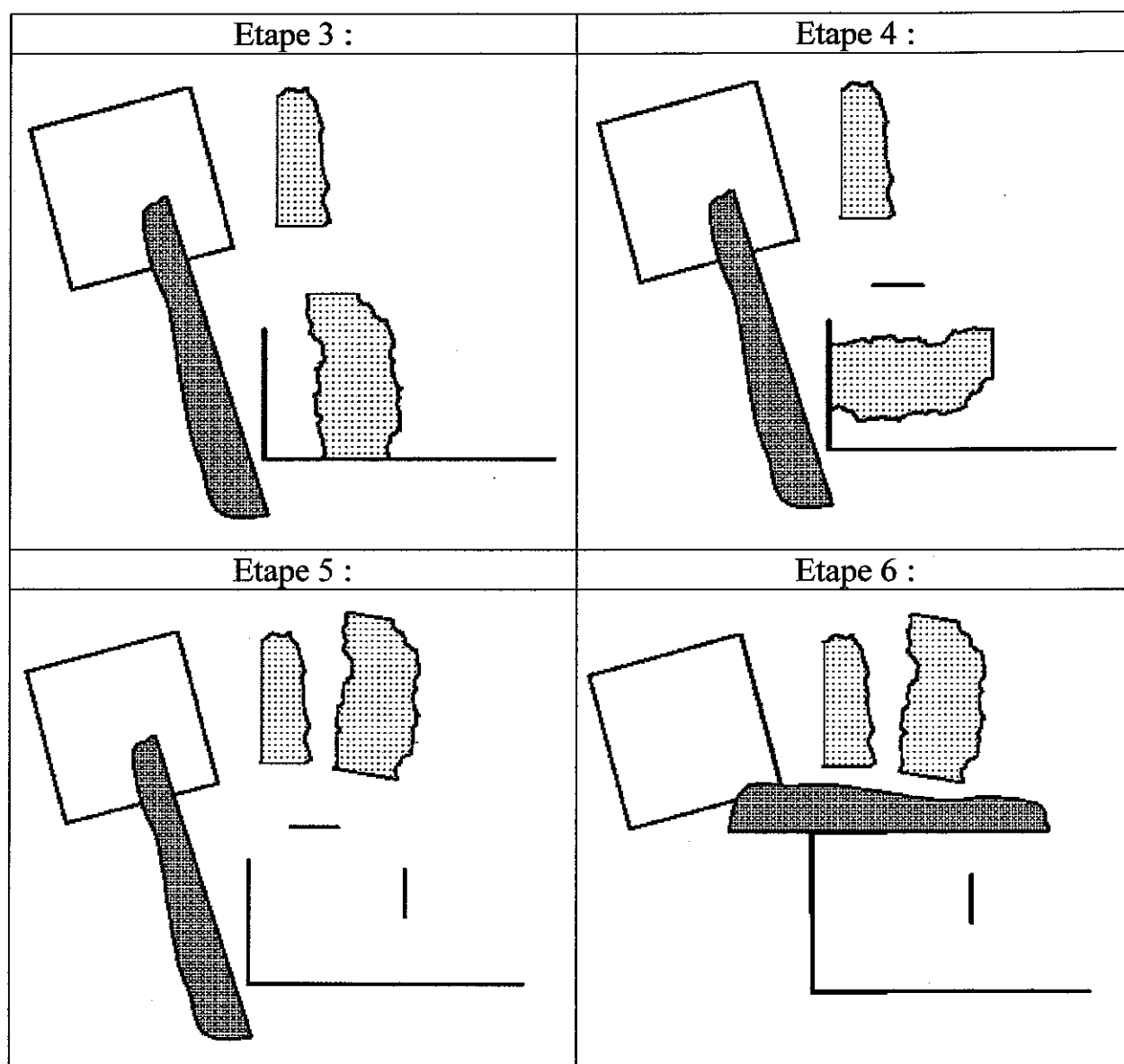




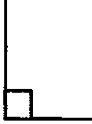
Ici nous sommes dans une phase intermédiaire, il devient presque nécessaire d'utiliser la règle en réparant le gabarit qui relève d'une visualisation 2D, **et cela sans avoir à mobiliser la notion de longueur des côtés qui, elle, relève d'une visualisation 1D.** La notion de longueur des côtés n'a pas besoin consciemment d'être prise en compte.

Exemple D :





Ici c'est comme si nous avions une règle, une équerre et un morceau de gabarit, ce qui permet de construire la notion de parallèle d'une manière moins formelle que par les définitions comme "droites qui ne se coupent pas".

Le symbole  utilisé pour désigner deux droites perpendiculaires, ou deux droites tracées avec une équerre, peut renvoyer à l'interprétation de l'équerre comme coin d'un carré c'est-à-dire comme morceau d'un gabarit de carré. L'emploi d'un tel symbole n'a pas lieu d'être tant que les élèves n'ont pas eu l'occasion de développer ce type de reproduction de figures.

III L'analyse d'une figure pour un élève et l'élaboration d'une figure pour un enseignant

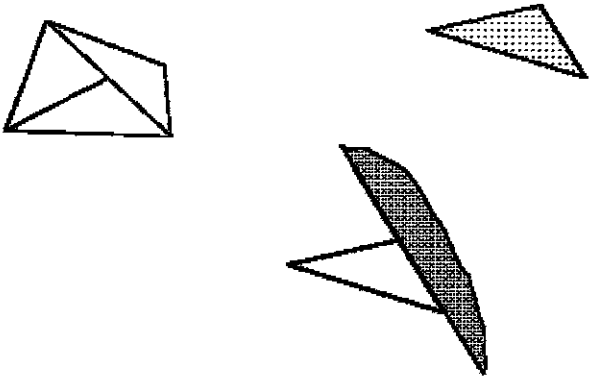
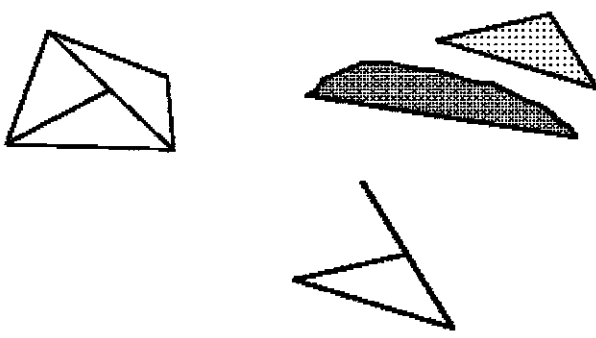
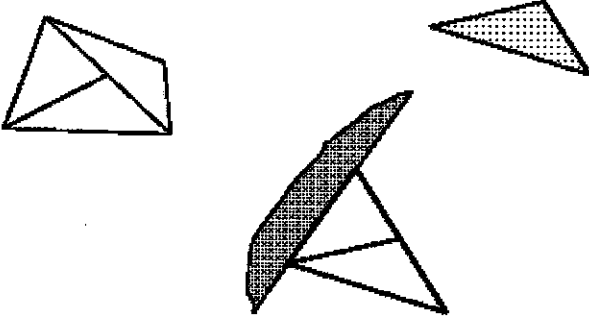
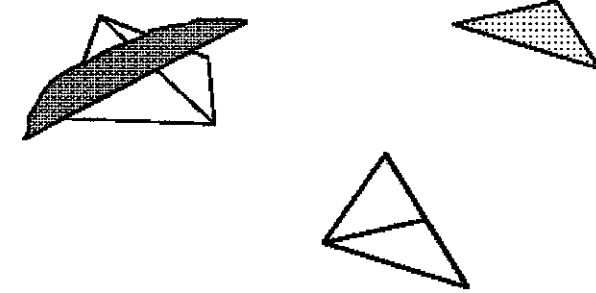
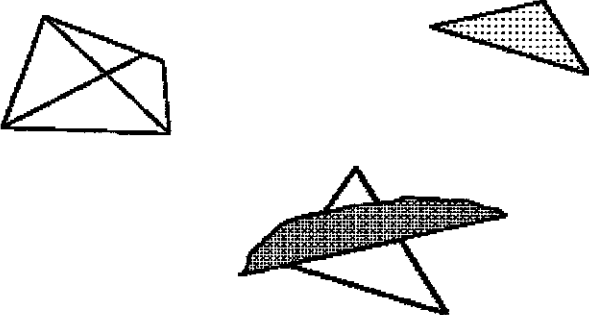
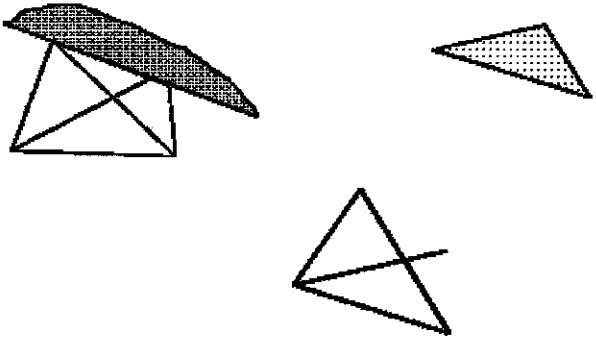
Examinons maintenant l'organisation d'une activité essentielle pour le passage d'un regard centré sur les surfaces et leur assemblage à un regard centré sur les lignes et la trame qu'elles forment. De quelles manières un enseignant peut-il voiler une propriété géométrique (le plus souvent celle d'incidence) dans une figure pour qu'en analysant la figure, les élèves dévoilent cette propriété et améliorent leurs procédures de reproduction³ ?

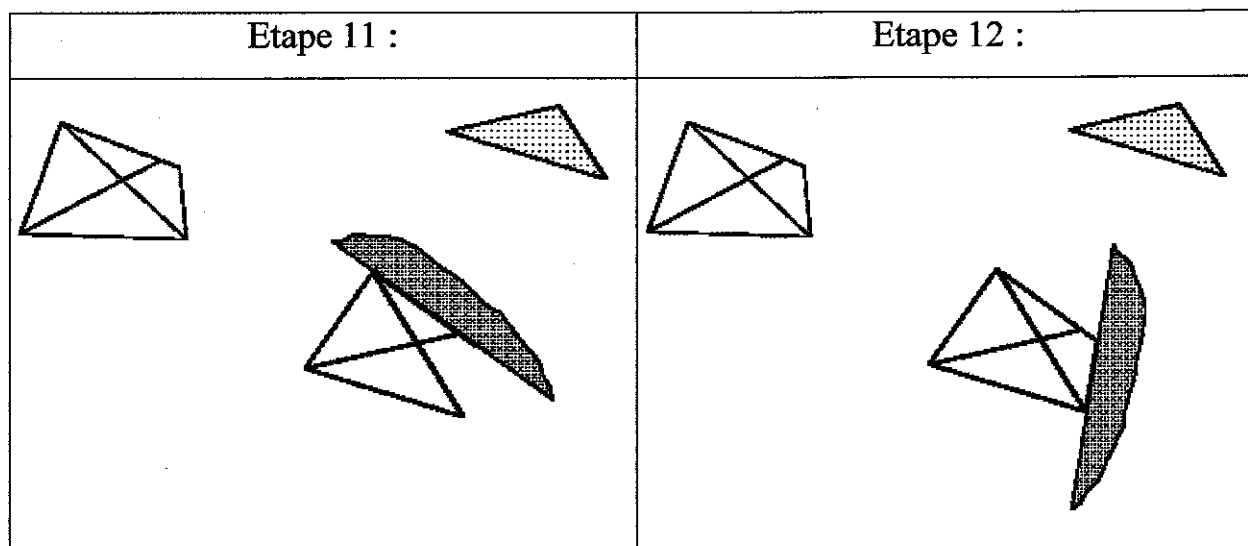
Exemple de restauration avec une figure assemblage.

Voici une activité de reproduction avec des outils 2D, un gabarit de surface est donné.

OUTILS : Gabarit d'une sous-figure et règle.	
Etape 1 :	Etape 2 :
Etape 3 :	Etape 4 :

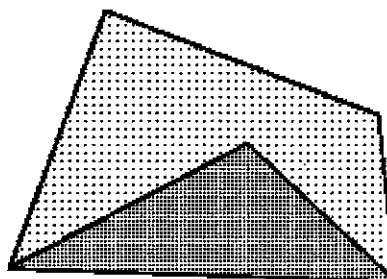
³ On peut évaluer sa procédure de reproduction par un dénombrement de malus. Un nombre de malus peut être affecté à chaque utilisation d'un instrument et vouloir dépenser le moins de malus revient à améliorer sa procédure.

Etape 5 :	Etape 6 :
	
Etape 7 :	Etape 8 :
	
Etape 9 :	Etape 10 :
	

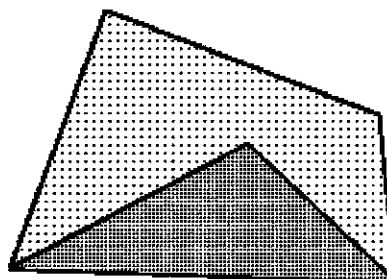


Il ne suffit pas ici de remarquer que le triangle et le quadrilatère ont un côté en commun, l'analyse de cette figure assemblage doit être poursuivie car cette relation ne saurait suffire pour la restauration de la figure; mais cela aurait pu être le cas, si les outils donnés avaient été les gabarits de ces deux figures simples. Dès l'étape 3, le gabarit de triangle ne sert plus et seuls la règle et l'outil de report de longueur pourraient être donnés, on aurait alors une tâche que l'on appelle restauration (un élément 2D de la figure à reproduire est fourni). Et à partir de cette étape, la restauration de la figure peut-être interprétée de trois manières :

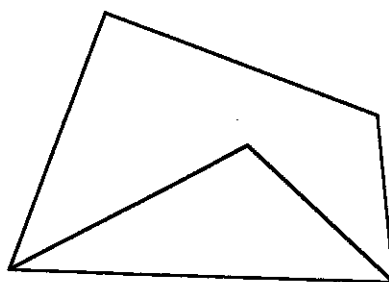
1 - Reproduire le pentagone à partir du triangle qui lui est juxtaposé, avec comme outils la règle et l'outil de report de longueur.



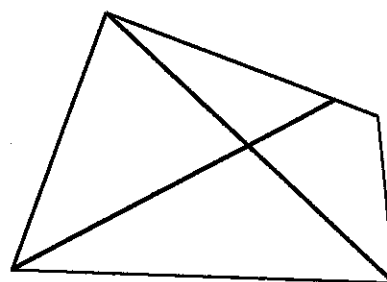
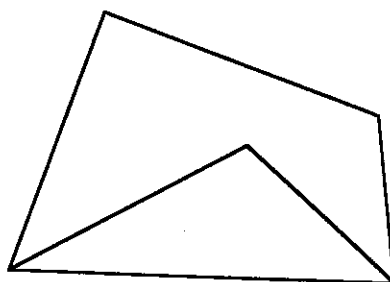
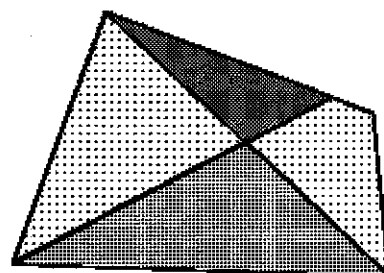
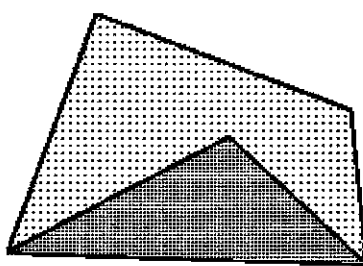
2 - Reproduire le quadrilatère à partir du triangle qui lui est superposé, avec comme outils la règle et l'outil de report de longueur.



3 - Reproduire les 3 segments manquants (côtés du quadrilatère) à partir du réseau de lignes déjà tracées, avec comme outils la règle et l'outil de report de longueur.



Dans les trois cas, les relations à déterminer sont les mêmes et il est nécessaire de passer d'un regard centré sur un assemblage d'éléments 2D, à un regard centré sur un assemblage d'éléments 1D. Ici les stratégies de reproduction se mettent en place par rapport à la totalité de la figure.

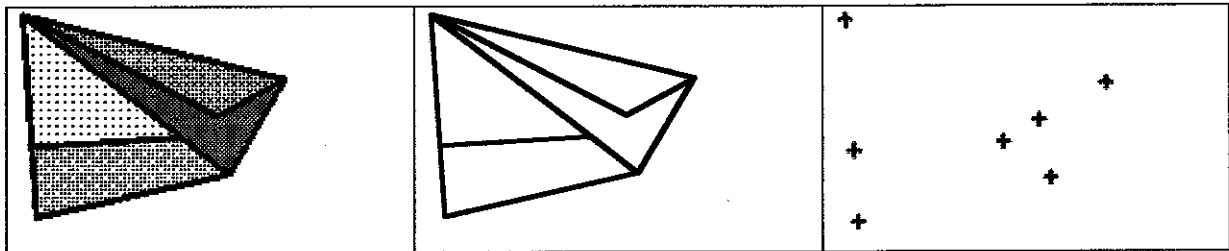


Une seule relation d'incidence émerge lors de l'analyse de la figure.

Les constructions des éléments 1D des étapes 6 et 10 sont fondamentales, c'est en construisant les deux côtés d'un triangle qu'il est possible de construire le troisième

Les différents niveaux d'analyse d'une figure :

Evidemment, l'analyse d'une figure peut se faire à différents niveaux selon le regard géométrique disponible pour celui qui la fait. De plus, cette analyse se développe le plus souvent en plusieurs temps. Nous nous contenterons d'esquisser cette idée à partir d'un exemple. Pour cela, revenons à la figure sur laquelle nous avons présenté les trois types d'assemblage au début de l'exposé.



Regardons différents niveaux d'analyse :

L'analyse commence par la recherche des propriétés d'incidence en prolongeant des lignes, puis en plongeant la figure initiale dans un réseau plus complexe, lequel à son tour peut être plongé dans un réseau plus complexe encore. L'analyse consiste donc à percevoir de nouveaux alignements dans un réseau regardé comme un assemblage de points. Cette démarche est la même que celle mobilisée pour jouer au morpion.

Mais ce type d'analyse est conditionné par la situation de reproduction. Les instruments, qui induisent telle ou telle procédure, et ne sauraient donc avoir la même valeur⁴, ont une fonction non seulement dans l'analyse de la figure mais également dans le retour vers un regard à nouveau centré sur les surfaces et les lignes pour reconnaître une autre figure dans le réseau produit par l'analyse.

Exemples de construction de base, pour une reproduction à la règle et au compas, en fonction d'analyses.			
Réseau résultant d'une analyse			
Construction de base de la figure			
	7 points	6 points	5 points

⁴ Les lignes droites et circulaires jouant un rôle privilégié, il est normal de valoriser la règle et le compas au détriment de l'équerre et autres instruments de reproduction. Il est par contre anormal de ne pas gérer les instruments dans une situation de reproduction.

Plus il est reconnu de propriétés d'incidence et plus ces constructions de base, regardées comme assemblage de points sont simples, mais la comparaison visuelle entre la figure initiale et la figure qui sert de base à la reproduction peut réserver des surprises.

L'évaluation d'une reproduction par un transparent, ou par des transparents dont les lignes auraient plus ou moins d'épaisseur, peut être complétée d'une évaluation par le comptage de malus(cf. annexe) affectés aux instruments utilisés, car l'une concerne plus la gestuelle et l'autre la procédure de résolution (voir exemple en annexe).

Conclusion

La visualisation géométrique a un fonctionnement propre qui est différent des pratiques de visualisation ordinaire, lesquelles privilégient automatiquement un regard centré sur la reconnaissance de formes 2D et donc l'interprétation en assemblage de surfaces. Pour introduire les élèves aux regards centrés sur les assemblages de lignes et les assemblages de points requis pour la reconnaissance des propriétés géométriques énoncées dans des définitions, un long travail de préparation est nécessaire.

Nous avons présenté quelques unes des activités permettant aux élèves d'entrer dans le regard géométrique. Et pour cela nous avons vu que le choix des instruments ainsi que les activités de reproduction constituaient des variables didactiques que les enseignants ne peuvent pas se permettre de négliger. Car autrement c'est l'accès à la visualisation géométrique qui risque d'être sérieusement occulté pour les élèves. C'est là un enjeu crucial pour la suite de l'apprentissage de la géométrie. Et c'est un enjeu qui est encore sous-estimé. Par exemple, une des manières catastrophiques de sous-estimer cet enjeu est d'associer presque d'emblée le travail sur les figures géométriques à un apprentissage du codage, lequel conduit à mettre en avant la connaissance d'un lexique.

L'apprentissage de la géométrie requiert plusieurs entrées en parallèle qui ne doivent pas se parasiter l'une l'autre. Elles n'ont pas toutes la même importance. Celle du codage ne peut venir que bien après celle de la visualisation géométrique dont la construction dans la " tête" des élèves se révèle longue et complexe.

ANNEXE

Un jeu des malus sur les outils : “Comment dépenser le moins de malus ?”, peut être stimulant pour améliorer une procédure de reproduction.

Affecter des malus aux instruments est une variable qui permet de valoriser ces instruments et permet d’agir sur l’analyse par un élève d’une figure.

Les malus sont attribués aux outils pour aboutir à favoriser les procédures à la règle et au compas.

Voici quelques règles pour établir l’affectation de malus:

Si un gabarit de surface permet de reproduire une figure en dessinant son contour, son usage devrait être plus coûteux qu’un gabarit déchiré dont le contour doit être complété par des tracés rectilignes à la règle.

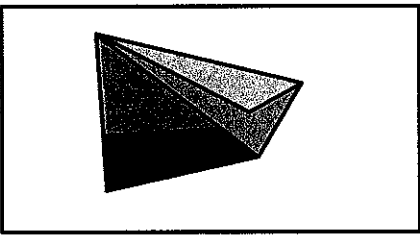
L’utilisation d’un outil 2D doit coûter bien plus cher qu’un outil 1D.

Les malus attribués à l’utilisation d’une équerre doivent plus nombreux qu’à ceux obtenus en construisant deux droites perpendiculaires à la règle et au compas.

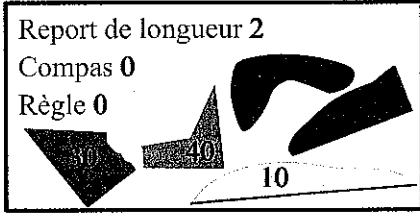
Tout ceci bien entendu pour favoriser une progression en géométrie.

Voici un exemple présenté en janvier 2004 à Jussieu dans le cadre du séminaire :

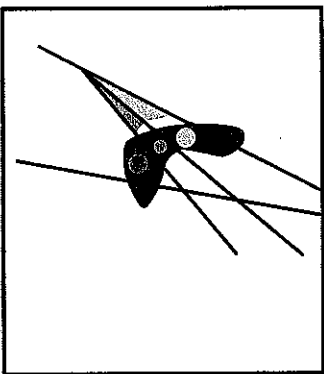
Analyser une figure ou choisir une représentation d'une figure pour résoudre un problème de reproduction.



Report de longueur 2
Compas 0
Règle 0



Règles de déplacement.



déjà 7 malus et ce n'est pas terminé !!

D. Des situations pour apprendre à regarder les figures.

Quelques résultats et perspectives

Marie-Jeanne Perrin-Glorian

IUFM Nord - Pas-de-Calais et équipe DIDIREM Université Paris 7

Dans cette dernière partie, je tenterai de caractériser la question de l'évolution du rapport à la figure en termes de milieux pour des situations permettant cette évolution, en liaison avec ce qu'a dit Marc Godin puis je donnerai quelques résultats et perspectives de travail.

1. Production ou reproduction de figures

1.1. Conditions de production : reproduction ou restauration de figure

Pour les raisons explicitées dans les exposés de Raymond Duval et de Marc Godin, nous nous intéressons particulièrement au changement de dimension dans la lecture des figures, au passage d'une vision de la figure en termes de surface à une vision en termes de lignes et de points. Les problèmes de reproduction de figure amènent un double rapport à la figure et aux instruments : celui de la lecture de la figure pour y repérer des propriétés permettant la construction avec les instruments dont on dispose et celui de la construction elle-même. Nous avons donc choisi de nous placer dans la problématique de la reproduction de figures et non de la construction de figure à partir d'un texte, ce qui signifie qu'un modèle de la figure à obtenir est fourni, mais pas nécessairement à la taille voulue. Cependant, les connaissances à mettre en jeu par les élèves dépendent encore d'un certain nombre de conditions qui sont des variables didactiques de la situation. Parmi elles, les éléments fournis pour la reproduction, en particulier début de figure déjà réalisé et instruments disponibles sont des variables sur lesquelles nous allons jouer pour faire évoluer les connaissances des élèves. Etant donnés nos objectifs, nous nous intéressons particulièrement à la dimension (2D ou 1D) des données fournies. Dans le cas où les informations et les instruments fournis permettent de reproduire la figure avec une conception de type 2D, c'est-à-dire sans mettre nécessairement en œuvre des lignes autres que des bords de surface ou des points autres que des sommets de surface, nous parlerons plutôt de *restauration* de figure comme cas particulier de la reproduction (voire de la construction) de figure.

1. 2. Les figures considérées

Il s'agit de figures planes en un sens large : aussi bien traces d'objets de l'espace que représentation d'assemblages de surfaces type puzzle ou figure comme ensemble de lignes mais dessinées sur le papier. Cela pourrait être aussi un écran d'ordinateur mais nous n'avons pas considéré ce cas qui soulève peut-être des questions particulières. Nous nous intéressons à des figures qui sont composées par juxtaposition ou superposition de figures simples, en donnant à figure simple le sens de figure qu'on peut obtenir par le tour d'un gabarit ou d'un pochoir, donc avec un bord non croisé. Ces figures peuvent relever de différents modes de production : par empreintes de solides, tour de gabarit, de pochoir, tracés à main levée ou avec des instruments usuels de géométrie. Les bords courbes, en particulier portion de cercle font partie du champ d'étude mais en fait, dans les situations mises en œuvre, nous n'avons pour l'instant considéré que des bords droits.

1. 3. Les connaissances visées

Nous nous plaçons sur le plan du dessin mais il s'agit d'un type de dessin particulier porteur potentiel de connaissances géométriques, dessin qui peut être interprété comme une figure de géométrie avec des propriétés géométriques. Pour les élèves c'est un dessin, pour le professeur c'est une figure. L'élève est dans le cadre de la géométrie 1 au sens de Houdement et Kuzniak ou plutôt de la géométrie des objets (G0) ou de la géométrie spatio-graphique G1 au sens de Parzysz.

Cependant, pour construire les figures, le maître doit se placer, lui, dans la géométrie 2 pour que les propriétés graphiques qu'utilisent les élèves correspondent à des propriétés géométriques de la figure et que la figure n'ait pas des propriétés graphiques qui ne correspondent pas à des propriétés géométriques. C'est à cette condition qu'on travaille des propriétés graphiques utiles pour l'analyse d'une figure de géométrie et en relation avec la construction des concepts géométriques. Cela suppose aussi d'autres connaissances du maître qui font partie des objets de notre recherche.

Nous visons des *connaissances spatio-graphiques* mais aussi des *connaissances géométriques* dans le sens que les connaissances spatiales ou graphiques que nous visons sont en interaction forte avec des concepts de la géométrie 2. Par exemple, si l'on veut découper une étoile sans déchirer le papier, il ne faut pas suivre le contour de l'étoile mais partir des sommets des

angles saillants vers ceux des angles rentrants et donc voir le sommet de l'angle rentrant comme intersection de demi-droites.

Les connaissances géométriques en jeu dans les situations de reproduction de figures considérées sont celles de direction, droite comme support de segment, comme passant par deux points, points comme extrémités de segments, intersections de lignes (droites ou cercles), repérages par longueurs, angles, milieu, perpendiculaire, cercle, symétrie, carré, dans leur action dans le domaine spatio-graphique.

2. Des milieux pour la reproduction de figures

2. 1. Des variables didactiques de la reproduction de figures.

Les jeux sur les variables de la reproduction et de la restauration de figures vont nous permettre d'inciter les élèves à changer leur regard sur les figures et les aider à passer d'une vision 2D (surfaces) à une vision 1D (lignes) et 0D (points). Les variables sont des caractéristiques des milieux des situations considérées ; elles concernent la figure à reproduire, les informations et les instruments fournis pour la reproduire, les règles du jeu de la reproduction (définition du but et des règles pour y parvenir). Nous en avons identifié un certain nombre, fixé certaines d'entre elles et fait varier d'autres en fonction de nos objectifs.

Éléments fixés dans les milieux considérés

- Le problème considéré est toujours de reproduire une figure donnée sur une feuille de papier.
- Le modèle est fourni, il est disponible sous les yeux des élèves et ils peuvent écrire dessus. Il peut être de la même taille que la figure à obtenir ou de taille différente.
- La figure à obtenir, le but, est disponible sur transparents pour la validation avec différentes épaisseurs de trait qui fixent un niveau de rigueur pour la reproduction. Sa présence permet aussi la dévolution du problème.
- L'existence d'une trame sous-jacente, à découvrir au moins partiellement pour reproduire la figure, garantit la présence des propriétés géométriques que l'on veut voir mettre en œuvre par les élèves. Le choix de la trame dépendra, lui, des apprentissages visés.

Éléments variables dans les milieux considérés

- Les propriétés géométriques de la figure à reproduire, en particulier la nature de la trame sous-jacente

- Les informations fournies sur la figure : partie de figure ou de réseau déjà disponible sur le papier (nous désignerons cette variable sous le nom de "données" dans la suite.
- Les instruments disponibles pour la reproduction, parmi lesquels nous distinguerons :
 - les instruments classiques : règle non graduée, équerre compas
 - les instruments liés à l'objet à reproduire : gabarit, morceau de gabarit
 - les instruments non standard : morceau de carton pour report de longueur, d'angles ou de morceaux de surface ; bande de papier qu'on peut plier pour chercher un milieu par exemple.
- La règle du jeu pour la reproduction avec éventuellement un système de points marqués (de bonus ou de malus) permettant de favoriser le recours à un instrument plutôt qu'à un autre.

Dans la suite, nous préciserons les valeurs données aux éléments variables dans quelques-unes des situations que nous avons envisagées. Ces éléments nous permettent de classer les situations.

Remarquons par ailleurs que, notamment pour le cas où la conception 2D est insuffisante, le modèle de la géométrie utilisé varie suivant les instruments autorisés : c'est celui de la géométrie projective si peut reproduire la figure en ne disposant que de la règle non graduée et celui de la géométrie euclidienne dès qu'on utilise un report de longueur ou d'angle. La géométrie affine est plus fugitive : elle correspond au cas où on a une règle non graduée et un instrument pour trouver les milieux, par exemple un morceau de papier sur lequel on peut écrire et qu'on peut plier (mais dans ce cas on pourra aussi reporter des longueurs) ou bien une règle rigide avec deux bords parallèles. Remarquons aussi que le report de longueur ou de position relative de deux segments nous amène en géométrie euclidienne mais qu'on n'introduit pas la mesure pour autant. L'idée de graduation reste à construire à partir du report de longueur et de l'ordre.

2.2. Des exemples de milieux pour la restauration de figures au cycle 2

Au cycle 2, nous gardons dans le milieu des éléments qui permettent de reproduire la figure avec une conception 2D, cependant, par le jeu sur les variables, nous la rendons plus coûteuse qu'une conception 1D et/ou 0D de manière à faire évoluer les procédures des élèves. Nous proposons ici quelques exemples de ce jeu possible sur les variables.

Exemple 0 : les puzzles

Au cycle 1, l'activité de reproduction de puzzles, en particulier sans image, permet des reproductions de figure avec une conception 2D. On dispose des pièces qui peuvent servir de gabarit, il faut les placer les unes par rapport aux autres :

- par juxtaposition (puzzles classiques)
- par superposition comme dans les exemple suivants où on dispose, pour la reproduction, du rectangle et du disque, du carré et du triangle

Ici, seules l'orientation et la position relative des pièces interviennent. Leur forme, et en particulier le nombre d'axes de symétrie dont elles disposent, est une variable importante. Des lignes et des points interviennent pour le positionnement des pièces mais ce sont des bords ou des sommets de surfaces. Les instruments se confondent avec les informations fournies sur la figure : on est dans la manipulation et le spatial et pas encore dans le spatio-graphique. Cet exemple relève entièrement de la conception 2D.

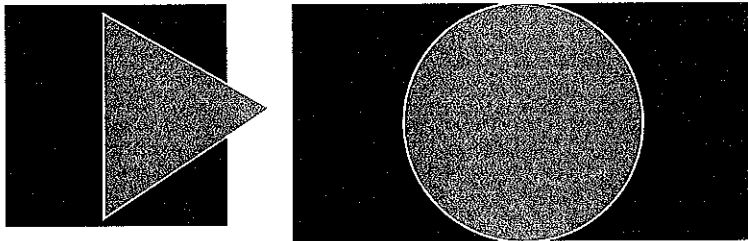


Figure 1

Exemple 1 : la reconstitution à partir d'une partie

- Informations fournies : une partie de la figure (certaines pièces de la figure vue comme juxtaposition de surfaces)
- Règle du jeu : Reproduction à l'identique.
- Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report de longueurs et/ou d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix de la figure et des informations fournies.

Exemple 1.1. La figure est une figure simple : les gabarits déchirés

- La figure à reproduire est une figure simple
- Rien n'est dessiné à l'avance sur la feuille (aucun élément graphique disponible)
- La figure est à reproduire à l'identique
- les instruments sont le gabarit déchiré de la pièce et/ou un pochoir déchiré de la pièce et/ou une règle non graduée

On peut jouer sur les variables spécifiques de ce type de situation (forme du gabarit et caractéristique du morceau fourni comme instrument) pour mettre en jeu des propriétés

géométriques plus ou moins élaborées. Suivant le morceau fourni, une conception 2D peut suffire ou non.

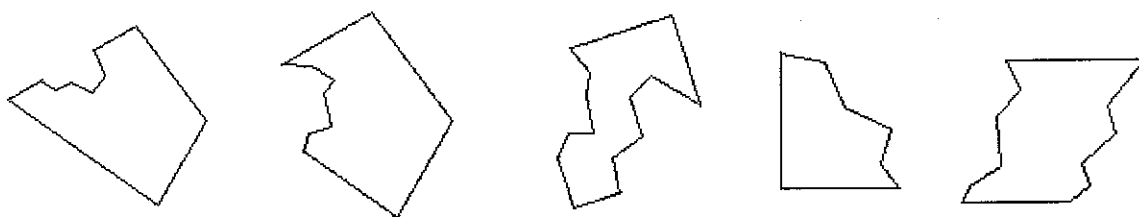


Figure 2

Ainsi, la situation est abordable dès la maternelle pour le premier exemple, gabarit d'un quadrilatère quelconque. Le deuxième (gabarit un peu plus déchiré) demande de voir le sommet comme intersection de lignes si on ne fournit qu'une règle non graduée sur laquelle on ne peut pas écrire en plus du gabarit déchiré : on peut aborder cette question en GS ou en CP. Les trois derniers exemples sont des gabarits déchirés de carrés. On peut aussi reconstituer le carré du troisième en prolongeant les lignes mais la tâche est plus difficile car les échancrures sont plus profondes, le carré se reconnaît plus difficilement ; pour le quatrième on peut faire tourner l'angle droit et le côté avec un report de longueur. Le dernier demande à mettre en œuvre les propriétés du carré (report de longueur et angle droit) et se situerait plutôt au début du cycle 3 ; le report de longueur n'est pas nécessaire mais cela demande alors une très bonne maîtrise des propriétés du carré.

Exemple 1.2. La figure est un assemblage de figures simples : restauration d'un assemblage

- La figure à reproduire (A) est un assemblage de figures simples par juxtaposition
- Une pièce est déjà dessinée (B), il faut compléter la figure
- Les instruments sont la règle non graduée et un instrument de report de longueur
- La reproduction doit se faire à l'identique (vérification par superposition)

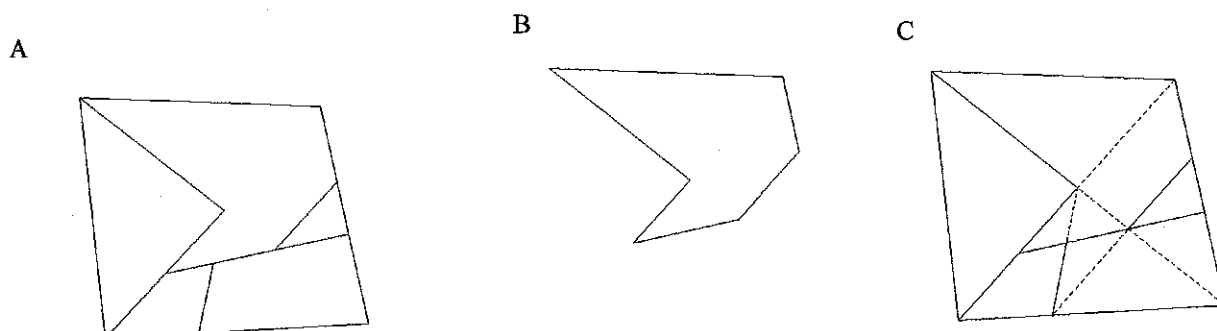


Figure 3

L'exemple ci-dessus a été utilisé en CM1, en formation de PLC2 (Ateliers de Développement de Pratiques Pédagogiques) et en formation continue par les conseillers pédagogiques.

On peut ici aussi jouer sur les variables et ajouter aux instruments un gabarit ou un gabarit grignoté d'une autre pièce qu'il faut placer par rapport à la pièce dessinée avant de compléter. Suivant le cas, il peut y avoir ou non nécessité de reports de longueur. Pour l'exemple donné ici il faut un report de longueur et cela suffit si l'on repère tous les alignements (C).

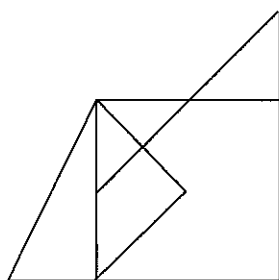
Pour le maître, la tâche consiste en l'analyse des variables, en particulier : quelles informations sont fournies suivant le choix de la pièce qui est déjà dessinée, quels points peut-on reconstruire par simple prolongement de lignes ? Que manque-t-il ?

Exemple 2. Restauration de lignes

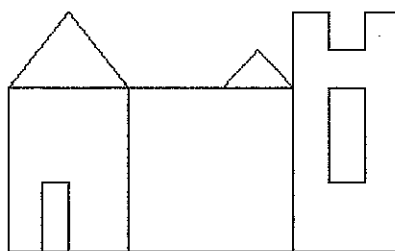
- Figure : assemblage de figures simples qui peut être vu comme des juxtapositions ou des superpositions
- Données : figure partiellement effacée (effacement de lignes).
- Règle du jeu : Reproduction à l'identique.
- Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report de longueurs et/ou d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix des éléments effacés

D'autres variables, internes à ce type de situation, interviennent encore, qui peuvent avoir un effet sur les connaissances mises en jeu par les élèves, par exemple le fait que la figure à reproduire soit abstraite ou qu'elle représente quelque chose que l'élève peut reconnaître. Nous avons par exemple utilisé les figures suivantes :

Figure 4



Exemple 2.1. Figure abstraite "Picasso"

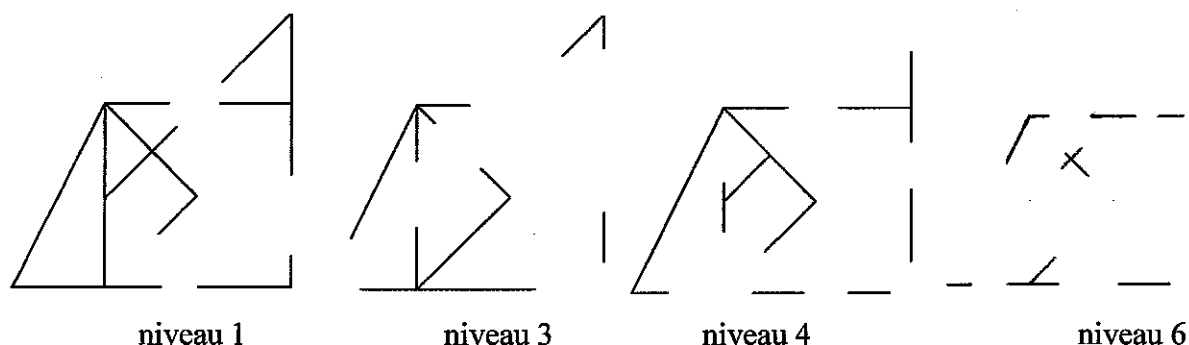


Exemple 2.2. Le château

Seuls des éléments visuels de la figure peuvent être utilisés pour la figure abstraite alors que, pour le château, les élèves reconstruisent le toit ou la porte...

Plusieurs niveaux de difficulté ont été prévus pour chacune. Par exemple, pour la figure Picasso, il y avait six niveaux de difficulté, on peut trouver ci-dessous les niveaux 1, 3, 4 et 6 :

Figure 5



A gauche la figure de niveau 1 retenue par les conseillers pédagogiques est fournie aux élèves qui ne réussissent pas après plusieurs essais ; la figure de niveau 3 est fournie à tous pour démarrer. Les tracés peuvent se faire dans n'importe quel ordre. A droite, la figure de niveau 4, niveau de complexité peu différent de la 3 : aucun segment n'est entièrement effacé mais un nœud plus complexe (3 directions) est effacé. Ordre des tracés à respecter pour deux segments si on ne veut pas trop déborder.

La figure de niveau 6 contient un segment entièrement effacé (côté gauche du carré) dont les extrémités sont encore présentes. Le côté droit du carré a disparu aussi mais la droite support n'a pas entièrement disparu. La restauration ne demande pas de report de longueur mais demande de repérer des alignements de points éloignés et de respecter un ordre complexe de tracés si on veut déborder le moins possible.

Dans la mesure où aucun report de longueur n'est nécessaire et que la règle seule suffit à la reproduction, la taille du modèle influe peu, sauf au moment de la vérification. On peut reproduire comme un ensemble de pièces juxtaposées (pièce par pièce) pour le niveau 1. C'est plus difficile pour les niveaux 3 et 4 où il faut au moins prolonger un segment dont il manque une des extrémités. Ainsi, une conception des lignes comme bords de surfaces qui correspond à une vision 2D de la figure peut encore amener à la réussite mais elle est difficile à mettre en œuvre dès le niveau 3 pour la grande oblique. Elle fonctionne un peu plus efficacement avec une vision de pièces superposées (notamment pour les triangles rectangles isocèles à l'intérieur du carré) que de pièces juxtaposées.

2.3. Des exemples de milieux pour la reproduction de figures au cycle 3

Au cycle 3, on peut encore utiliser des situations de restauration mais on peut introduire des situations de reproduction proprement dites où l'utilisation de droites et de points qui ne sont pas directement des bords ou des sommets de surface soit indispensable.

Reproduction à l'identique

- Règle du jeu : Reproduction à l'identique.
- Donnée : rien ou un segment pour fixer la position
- Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report de longueurs et/ou d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix de la figure à reproduire

Un grand nombre de variables est encore disponible aussi bien pour le choix de la figure que pour celui des instruments et des données. Puisqu'on reproduit à la même taille le report de longueurs est possible.

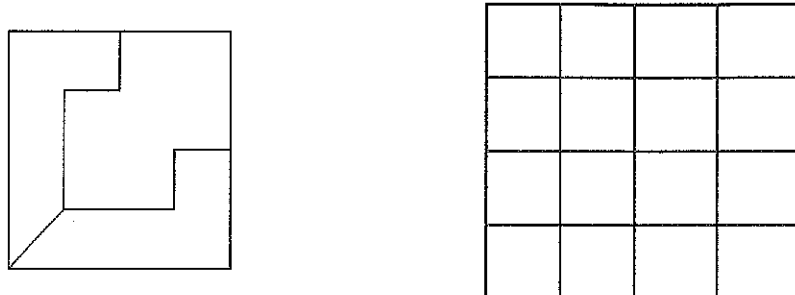
Reproduction à une taille différente

- Règle du jeu : Reproduction à une taille différente.
- Données : une partie de la figure à la taille voulue, éventuellement un segment seulement.
- Instruments : règle non graduée, éventuellement gabarits et/ou bande de papier (report d'angles, milieux), éventuellement instrument de tracé de perpendiculaires (équerre ou papier qu'on peut plier), suivant le choix de la figure et des données.

Ici on reproduit à une taille différente donc le report de longueur n'est plus possible. On peut choisir des figures et des données qui demandent le report de milieux (géométrie affine) ou d'angles droits (géométrie euclidienne) ou des figures et des données qui ne demandent que des prolongements et intersections (géométrie projective) mais qui peuvent demander de sortir du cadre de la figure.

Exemple de figure mettant en jeu des angles droits et des milieux.

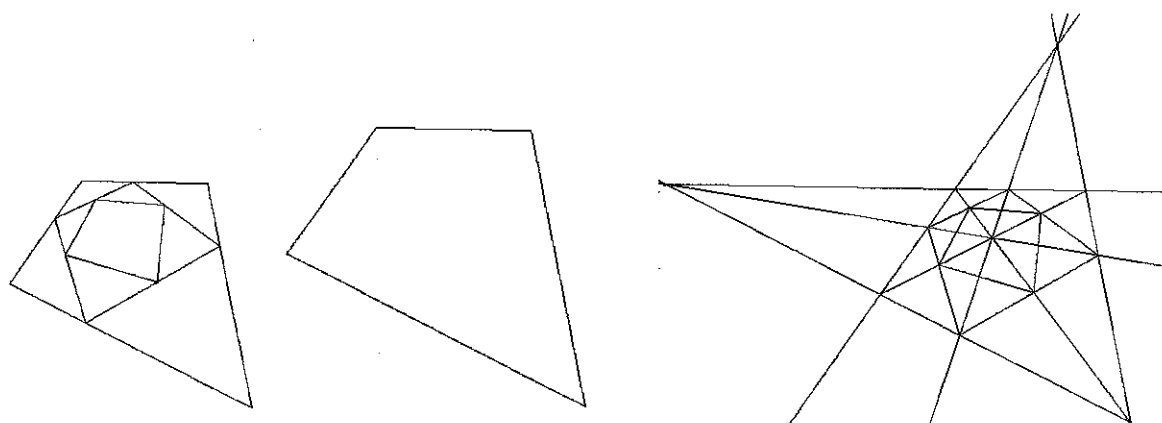
Figure 6



Pour la figure à reproduire de gauche, la donnée fournie est le cadre carré de droite, la trame qui permet de construire la figure est le quadrillage dessiné dans le carré de droite. Il est nécessaire pour la reproduire de prendre des milieux, les angles droits doivent être repérés mais ils sont fournis par des propriétés de milieux et d'alignement, l'équerre n'est pas nécessaire.

Exemple de figure ne mettant en jeu que des alignements mais demandant de sortir du cadre

Figure 7



La figure de gauche est la figure à reproduire ; celle du centre le cadre fourni pour la reproduction ; le seul instrument disponible est la règle non graduée ; la figure de droite représente la trame portant tous les tracés nécessaires pour la résolution.

Des situations de chacun de ces types, réalisées dans la classe d'un maître formateur associé à l'équipe de recherche, ont été observées et analysées. Nous n'en parlerons pas ici : nous nous contenterons de donner quelques résultats concernant la situation de restauration de lignes travaillée avec les conseillers pédagogiques.

3. Quelques résultats à propos de la restauration de lignes

3.1. Quelques précisions sur la méthode de travail

La situation de restauration de lignes a été travaillée avec les conseillers pédagogiques qui, après une observation et une analyse en commun d'une situation du même type mise en œuvre par le groupe de recherche dans un CP, ont produit les figures ci-dessus et ont implémenté les situations dans des classes de CP et de CE1. Les conseillers pédagogiques ont travaillé par deux ; chaque groupe a produit une situation expérimentée dans au moins un CP et un CE1. Pour la figure abstraite, c'est la version 3 qui était donnée aux élèves pour démarrer. Quand ils pensaient avoir fini, ils pouvaient vérifier leur production à l'aide de transparents et recommencer la restauration sur une nouvelle feuille s'ils n'étaient pas satisfaits. S'ils ne réussissaient pas après 3 essais, on leur donnait la version 1, puis la version 2 en cas de succès. S'ils réussissaient, on leur donnait la version 4 et ainsi de suite. Des gabarits étaient disponibles dans deux classes qui travaillaient sur le château. Les productions des élèves ont été relevées.

Ce travail avait pour but de tester la robustesse des situations produites et de mettre au point un document destiné aux enseignants pour les aider à identifier les variables didactiques et ainsi à choisir ou à produire des situations du même type. Nous voulions notamment produire une grille d'analyse concernant le choix de la figure et de ce qu'on peut effacer.

Une première version de la grille a été produite en commun à partir de l'analyse de la séance enregistrée sur vidéo au CP. Les conseillers pédagogiques s'en sont servi pour produire leurs figures. Ils ont mené la classe eux-mêmes et ont fait un compte rendu oral du déroulement dans le groupe de recherche qui a mené une première analyse collective des productions et du déroulement. Ils ont échangé leurs figures et repris l'autre situation, soit dans la même classe soit dans une autre classe, ce qui fait que chaque figure a été traitée par au moins quatre classes. Ces analyses de déroulement et de productions d'élèves ont donné l'occasion d'affiner la grille d'analyse des figures. Les productions des élèves ont ensuite été analysées plus finement.

3.2. Les productions des élèves

- Il faut d'abord noter d'une part la *grande richesse des productions* qui nous permettent de déceler des difficultés en général masquées, d'autre part *l'intérêt des élèves* : la plupart d'entre

eux étaient exigeants avec eux-mêmes et n'hésitaient pas à recommencer plusieurs fois une restauration pour arriver à quelque chose de plus satisfaisant.

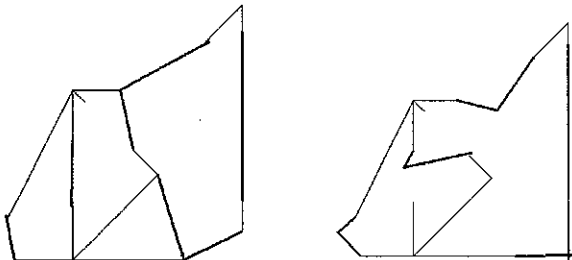
- Difficulté du « coin » : c'est l'observation et l'analyse des productions des élèves qui nous a permis de repérer la difficulté de restaurer les sommets comme intersections de côtés : les enfants ne s'autorisant pas à dépasser le point de concours, on peut observer des prolongements successifs et des raccords à main levée. Une autre variable a aussi été identifiée : la longueur de la trace visible d'un segment.

- L'observation montre aussi que les enfants s'occupent d'une zone à la fois et ne restaurent pas d'un seul coup un segment s'il comporte deux zones effacées. Ainsi la longueur des traces visibles d'un segment, le nombre de morceaux, leur éloignement sont autant de variables qui peuvent accroître la complexité de la tâche. Cela correspond bien à une vision 2D de la figure.

- Il y a de grandes variations dans les réussites entre les classes. L'utilisation de la règle reste maladroite pour beaucoup d'élèves.

- Au CP surtout, un certain nombre d'enfants cherchent à fermer la figure au plus près en reliant les extrémités de segments les plus proches, comme on peut le voir dans la figure 8 (en caractères gras une reproduction des traits ajoutés par les élèves).

Figure 8



- Pour la figure "Picasso", la restauration de la grande oblique est souvent mal réussie : elle ne délimite pas le contour d'une surface (ou alors il faut repérer deux triangles rectangles dont les hypoténuses sont alignées) et ne peut pas être interprétée figurativement.

- La restauration du château donne en général des dessins plus ressemblants que celle de la figure abstraite. Cependant, nous ne pouvons pas savoir si la meilleure réussite dans le cas du château est due à la possibilité d'interpréter, à la présence des gabarits ou même au niveau des classes. Dans les deux cas, la figure de démarrage est déjà d'une grande complexité, surtout pour les élèves de CP.

Les conditions de l'observation ne nous permettent pas de tirer des conclusions précises sur les difficultés réelles des élèves et sur la résistance de ces difficultés, notamment en ce qui concerne les "coins" et la clôture de la figure. Ces difficultés disparaissent-elles spontanément

pour des élèves plus âgés, sans apprentissage particulier, ou résistent-elles pour certains élèves ? Nous ne pouvons pas non plus interpréter les erreurs des élèves comme relevant de l'un ou l'autre des paramètres identifiés puisque souvent plusieurs d'entre eux peuvent jouer en même temps. Les productions d'élèves nous ont plutôt permis d'identifier les différentes variables sans pouvoir déterminer plus précisément leur effet. Cependant, relativement à notre problématique, un point paraît intéressant : le fait que les élèves s'occupent d'une zone à la fois plutôt que de restaurer un segment dans sa totalité. Il semble qu'une intervention du maître soit en général indispensable pour faire évoluer les élèves sur ce point. Une étude sur une plus longue durée serait bien sûr nécessaire pour voir si ce type de situation permet un apprentissage durable sur le repérage des alignements.

3.3. Une grille de complexité pour la zone effacée

La grille de complexité que nous voulions produire était in fine destinée aux enseignants pour définir des choix dans l'effacement des lignes dans des figures géométriques qu'on peut décrire par un assemblage de segments comme celles qui apparaissent dans la figure 4. La restauration d'une ligne doit s'envisager non isolément mais dans son environnement puisque, pour restaurer une partie de segment manquante, il est souvent nécessaire de faire intervenir d'autres segments, par exemple si une extrémité du segment a disparu. La définition de la complexité de la restauration est difficile parce que celle-ci dépend du regard que va porter l'élève sur la figure. Ainsi un segment peut ne pas être perçu comme tel mais comme deux morceaux de bords de surfaces différentes dont on n'a pas repéré l'alignement.

Pour traiter ce problème, nous nous sommes centrés sur les parties effacées vues comme des zones à restaurer sur une image déchirée. Les segments peuvent alors être vus comme des bords de surfaces juxtaposées, la zone à restaurer étant une zone cachée ou déchirée, comme D dans la figure 9. Nous avons ainsi envisagé la complexité de restauration en fonction de caractéristiques des zones à restaurer, notamment du nombre de segments concernés par la restauration. Nous avons ainsi considéré le couple : (n,p) = (nombre de segments qui arrivent dans la zone, nombre minimum de segments nécessaires à la restauration). Le deuxième élément du couple est inférieur ou égal au premier, il est strictement inférieur si des segments arrivant dans la zone sont alignés; suivant que l'on voie ou non l'alignement on a p ou n segments à tracer.

Par exemple, sur notre figure, on a (2,1) pour I et J, (2,2) pour A, B, C, (4,2) pour D et G, (3,2) pour E et H, (4, 3) pour F, (4,4) pour K. Quand on a une vision de la figure comme surfaces juxtaposées, la zone paraît plus complexe quand beaucoup de segments y arrivent dans la grille puisque ce sont des bords de surfaces différentes qui se juxtaposent dans la zone effacée. Ainsi D, F et K peuvent être vus comme sommets communs à 3 surfaces (en négligeant le fond, mais ce n'est pas toujours évident, par exemple selon qu'on voit des juxtapositions ou des superpositions : G est-il sommet commun à trois ou quatre surfaces ?).

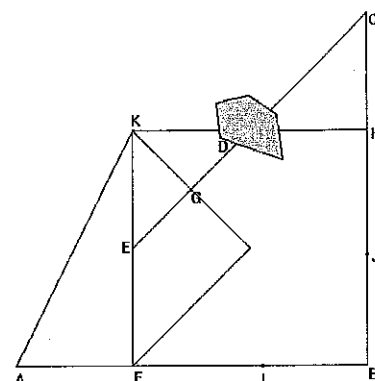


Figure 9

Nous avons donc dans un premier temps pensé à mesurer la complexité par n ou $n+p$. Cependant l'observation des élèves a montré une autre difficulté : le fait de ne pas savoir où arrêter le tracé, particulièrement dans les "coins" comme A, B, C, K. Pour restaurer un coin comme A avec une seule règle, il faut tracer un segment plus long que celui qui est désiré puis effacer ce qui dépasse quand on a déterminé l'extrémité par le tracé d'un autre segment. Les enfants ne semblent pas faire facilement usage de leur gomme dans ce cas, ils essaient de deviner où s'arrêter, font des traits trop courts qu'ils prolongent en plusieurs tracés. Il se peut que les enseignants de CP ne favorisent pas l'usage de la gomme pour diverses raisons, il nous semble cependant que cette observation peut être l'indice d'une vision 2D de la surface à restaurer. Il semble ainsi que l'égalité entre n et p contribue à augmenter la complexité de la tâche. De plus, le nombre de segments n'est pas le seul élément à considérer : dans certains cas, l'ordre du tracé a de l'importance, par exemple pour une zone (3,2) comme en E, il est plus facile de restaurer d'abord le grand triangle AKF puisque cela donne l'alignement de KE et EF et en même temps le moyen d'arrêter le tracé du dernier segment. Dans d'autres cas, l'ordre des tracés n'intervient pas, par exemple en D. Nous avons renoncé à caractériser de manière générale la complexité mais cherché à identifier des facteurs de complexité. Ainsi, trois types de jonctions élémentaires nous paraissent de complexité croissante : ligne (2,1) nœud (3,2) et coin (2,2). Nous pouvons alors considérer que les autres sont des composées de celles-là. C'est cette grille que nous avons présentée à CERME 3 (Perrin-Glorian, 2003).

Cependant, un point de vue sur la figure comme surfaces superposées modifie la définition de la complexité que nous venons de prendre. Ainsi, dans la figure de niveau 4 produite par les conseillers pédagogiques, l'effacement de F correspondait à un accroissement de la

complexité. Cependant si l'on s'intéresse à l'enveloppe de la figure ou au grand trapèze, le segment AB devient facile à percevoir, d'autant plus qu'il est horizontal et cela diminue beaucoup la complexité de restauration de la zone autour de F. Ainsi la définition de la complexité de la restauration doit se référer à plusieurs regards possibles à porter sur la figure. Nous venons de voir que le fait d'avoir à repérer des alignements obliques plutôt que des segments horizontaux ou verticaux, est un autre facteur de complexité, concernant la zone à restaurer mais aussi la figure complète. Dans le cas où un segment complet a disparu, il faut de plus prendre en compte des longueurs ou des alignements avec des points extérieurs à la zone à restaurer, cela ajoute une composante supplémentaire à la complexité.

3.4. Des variables didactiques

Nous avons dans le paragraphe précédent tenté de préciser diverses variables permettant de décrire la *complexité de la zone à restaurer*. Une autre variable est le *caractère figuratif ou abstrait de la figure* choisie : l'interprétation donnée par les élèves à la figure peut leur fournir des points de repère et, par exemple, limiter les oublis de certains segments qui peuvent avoir une interprétation dans le dessin. Cependant, le fait de mieux réussir ne signifie pas qu'ils apprennent mieux : ont-ils l'occasion de développer les mêmes connaissances ou peuvent-ils réussir avec des conceptions plus archaïques dans ce cas ?

La *longueur et la distance des traces disponibles* est un facteur qui intervient dans la perception d'un segment : il sera ainsi plus ou moins facile de mettre en relation deux zones effacées qui concernent ce qui pourrait être vu comme un seul segment. D'autres variables concernant la donnée pourraient aussi intervenir au niveau global comme le sens de lecture de la figure : de gauche à droite et de haut en bas. Il se peut qu'une zone de grande complexité se révèle plus difficile si elle est placée en haut à gauche que si elle est placée en bas à droite. *L'apparence de la figure et des parties cachées* - seulement des segments avec parties effacées ou des surfaces matérialisées avec traces de déchirures, couleurs...- peut avoir une influence sur la vision en termes de surfaces ou en termes de lignes de la figure.

Nous avons jusque là considéré les variables qui concernent la nature de la figure à restaurer et la figure donnée pour la restauration. D'autres variables concernent les autres éléments du milieu comme les instruments disponibles ou la règle du jeu, la définition de la tâche :

- le matériel fourni aux élèves pour tracer (une ou plusieurs règles, gabarits de certaines parties des figures) et pour vérifier leur production (gabarits, figure réalisée sur transparent avec des traits plus ou moins épais...)

- le fait que les gabarits aient ou non un axe de symétrie : s'ils n'en ont pas, il y a des problèmes d'orientation. Il est alors important d'avoir un moyen de distinguer les deux faces du gabarit.

- les conditions de réalisation de la tâche, par exemple modèle présent sur la table des élèves ou seulement affiché au tableau, manière dont apparaissent les parties cachées (lignes seulement ou matérialisation des surfaces déchirées, couleurs...)

Pour la réalisation en classe, il est aussi important de prendre en compte d'autres variables qui risquent aussi d'avoir une influence sur les stratégies des élèves, notamment la gestion de la classe, en particulier celle des explicitations collectives (nature, moments où elles se font, par exemple en cours de restauration ou après).

3.5. Les réactions des enseignants et des conseillers pédagogiques

Les conseillers pédagogiques avec lesquels nous avons travaillé se sont portés volontaires à l'issue d'un stage de formation de formateurs qui présentait l'esprit dans lequel nous travaillons la géométrie, et quelques situations permettant de mettre en œuvre ce type de rapport à la géométrie. Il était prévu que nous préparions les situations avec eux et qu'ils les proposent à des maîtres de CP ou CE1 de leur circonscription en observant le déroulement de la séance. Finalement, les conseillers pédagogiques ont géré eux-mêmes la séquence qu'ils avaient préparée, trouvant trop difficile de la transmettre au maître. Ils se sont donc retrouvés simultanément en position d'acteurs et d'observateurs. Cependant, ils ont noté l'intérêt des élèves pour ce travail, ce qui pourrait, d'après eux, convaincre certains enseignants peu attirés par la géométrie et ils ont organisé des stages de formation continue où ils ont utilisé les situations élaborées avec eux dans le groupe de recherche autour de la restauration de lignes.

J'ai observé un de ces stages de formation continue et j'ai pu constater que les enseignants présents manifestaient un grand plaisir dans le traitement de ce type de situations pour eux-mêmes mais qu'il leur était plus difficile d'envisager la mise en œuvre dans leur classe.

Par ailleurs, l'effet du choix d'une figure abstraite ou figurative est sans doute à considérer, non seulement du point de vue de l'apprentissage des élèves, mais aussi du point de vue des enseignants. En effet, les professeurs du primaire, surtout à ce niveau, préfèrent souvent utiliser des figures qui représentent un objet concret parce qu'ils peuvent les inscrire plus facilement dans une histoire. Dans les premières classes du primaire, les professeurs utilisent généralement, comme en maternelle, un thème de classe décliné dans la plupart des

disciplines. La question est de savoir si l'usage d'un dessin figuratif peut entraîner une meilleure réussite tout en favorisant moins l'apprentissage.

L'utilisation en classe et dans la formation de ce seul type de situations pose donc beaucoup de questions de recherche, ne serait-ce l'amélioration de la grille pour la rendre à la fois plus fiable et plus facile à utiliser pour les enseignants. Je vais maintenant essayer d'indiquer quelques perspectives pour la suite de notre travail.

4. Conclusion. Perspectives en formation des maîtres

Nous pensons continuer à étudier la possibilité de prendre en compte dans l'enseignement ordinaire l'apprentissage des connaissances nécessaires à l'analyse d'une figure géométrique, apprentissage qui est actuellement laissé à la seule responsabilité des élèves. Un point important dans notre problématique c'est que nous ne voulons pas seulement savoir si nos situations peuvent provoquer l'apprentissage visé mais aussi si elles sont viables dans des classes ordinaires, et avec quelle formation.

Nous avons d'abord besoin de mieux connaître les pratiques effectives des enseignants en géométrie. L'analyse des réponses au questionnaire que nous avons fait passer devrait nous donner quelques indications. Cependant, cela ne nous donnera pas d'information sur les possibilités de faire bouger les pratiques. Nous avons un premier éclairage sur ce point par un entretien réalisé auprès de deux enseignants qui ont suivi il y a quelques années des stages sur la géométrie développant une approche de ce type : ils font état de réactions contrastées de collègues. Il nous reste à analyser plus précisément cet entretien.

Nous pensons maintenant organiser un suivi de stages de formation continue avec des enseignants volontaires. Cependant, ces stages se situent nécessairement dans le plan de formation académique et nous n'avons que peu d'opportunités pour introduire une intervention correspondant à la démarche que nous voulons tester.

Références

Argaud H.C. (1998) *Intérêts et limites de l'environnement Cabri-géomètre en géométrie plane pour l'enrichissement de l'espace des problèmes et dans la constitution des milieux pour la validation dans des situations d'apprentissage à l'école élémentaire autour des*

- relations de parallélisme, de perpendicularité et d'égalité.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Bouleau, N. (2001) Reproduction de figures et géométrie en cycle 1 et 2. *Grand N* n°67. 15-32.
- Brousseau, G. (1983) Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, LSD-IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.
- Berthelot, R. & Salin, M.H (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- Favrat, J.F. (1991-92) Tracés aux instruments et raisonnements géométriques, *Grand N* n°49, 11-35.
- Fregona, D. (1995) *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.
- Gobert, S. (2001) *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- Houdement, C. et Kuzniak A. (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 40, 283-312.
- Houdement C., Kuzniak A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 20/1, 89 - 116.
- Laborde, C. & Capponi, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1.2), 165-210.
- Parzysz, B. (1988) Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (1), 79-92.
- Parzysz, B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse, Université Paris 7.

Parzysz, B. (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du colloque COPIRELEM de Tours.*

Perrin-Glorian, M.J. (2003) Studying geometric figures at primary school. From surfaces to points, in Dorier, J.L., Gutierrez, A., Straesser, R. *Proceedings of CERME 3, TG7 Geometrical thinking*, Bellaria (Italy) 27 Feb - 2 Mar 2003, publication en ligne. <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings>

Perrin-Glorian, M.J. (2004) Vingt ans de didactique en 1993 ! Où en est-on dix ans après ? *Actes du XXXème colloque de la COPIRELEM*, Avignon 2003, pp. 33-78, IREM de Marseille.

SUR LA NOTION D'ESPACE(S) DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE(S)

Alain Kuzniak

IUFM d'Orléans Tours. Equipe DIDIREM Paris 7.

J'ai choisi de centrer la présentation écrite de mon exposé sur la notion d'espace de travail géométrique. Cette notion s'insère dans un cadre théorique développé pour étudier la géométrie enseignée. Pour des éclaircissements sur ce cadre et plus particulièrement sur la notion de paradigmes géométriques, déjà présentée dans ce séminaire, je renvoie aux articles parus sur ce sujet et notamment à ma note d'habilitation publiée par l'IREM de Paris VII : *Paradigmes et espaces de travail géométriques*.

Introduction

Pour résoudre un problème de géométrie, l'élève doit organiser son activité dans un espace particulièrement complexe constitué d'objets visibles et tangibles comme les figures, d'outils matériels comme les instruments de dessin ou d'outils conceptuels comme les définitions ou les théorèmes. Son travail revêt alors des formes très différentes mais complémentaires : il doit tour à tour être observateur, constructeur ou rhétoricien. Pourtant le lieu où s'effectue ce travail de la géométrie, paraît si naturel et si évident qu'il en devient transparent et quasiment invisible. Préciser et mettre en relief cet espace que nous désignerons désormais sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG) constitue la matière de cet article.

De fait, il n'existe pas un seul espace de travail géométrique. Celui-ci dépend de la géométrie de référence et, même en se limitant à la géométrie élémentaire enseignée, il est nécessaire d'envisager l'influence du type de paradigme géométrique sur l'espace de travail car la géométrie mise en jeu impose ses modes d'appréhension et de traitement des problèmes. Dans un premier temps, il faut ainsi décrire un lieu optimisé et idéalisé où la résolution des problèmes de géométrie est possible de manière adéquate et sans turbulence. Cette première approche détermine des espaces de travail de référence. Mais, les utilisateurs des ETG ainsi décrits sont des individus particuliers, parfois néophytes et souvent non-experts, il importe alors d'étudier et de comprendre leur ETG personnel. Cette étude constitue un enjeu didactique.

Un exemple : de la couture à la coupe géométrique

Nous commençons par donner un exemple extrait d'un manuel de cours complémentaire pour jeunes filles publié en 1911 et qui porte le titre rare de « géométrie expérimentale » avec le sous-titre « appliquée aux travaux de la femme ». Dans cet ouvrage, l'auteur tente d'établir un pont entre la géométrie et la coupe en couture en parlant d'une « géométrie de coupe géométrique, c'est-à-dire scientifique ».

Cet appui mutuel consiste à introduire les termes et les définitions géométriques à partir de supports liés au monde de la coupe, notamment les étoffes : c'est ainsi que les plis et les fils de l'étoffe jouent un rôle prédominant.

Dans la pratique, on considère les fils de chaîne, appelés simplement fils, et les fils de trame, appelés duites, comme étant perpendiculaires les uns aux autres. Quand la droite à tracer est perpendiculaire à la chaîne ou à la trame, il suffit d'épingler un fil, une duite et leur point de croisement, pour déterminer un angle droit (p. 20).

Des expériences sont proposées pour dégager certaines propriétés comme celles des droites parallèles. Le va-et-vient entre les remarques sur les objets et les applications apparaît nettement dans les activités de construction des figures objets de la coupe comme ici le losange :

Il est facile de couper rapidement un losange de diagonale donnée, ou de côté connu. Remarquons, à cet effet, que si l'on fait tourner une portion de losange autour de l'une ou l'autre diagonale, la partie mobile recouvre exactement la partie fixe. Après deux plis à angle droit, on obtient quatre triangles rectangles superposés. Par suite, si l'on veut découper un losange dans une étoffe, on la plie sur elle-même pour former quatre angles droits autour d'un point ; puis, d'un seul coup de ciseaux, dirigé suivant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on coupe les quatre épaisseurs ; on déplie (p. 63)

Les exercices mettent en œuvre les constructions découvertes pour aboutir à des objets plus complexes.

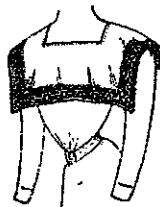


Fig. 161. — Berthe.

47. Une berthe (fig. 161) est formée d'un empiècement carré de 62^{cm} de côté ; son échancrure est un carré parallèle aux côtés de l'empiècement, qui mesure 23^{cm} de côté. La dessiner au quart de sa grandeur ; lui composer un entre-deux comme bordure. En tailler le patron.

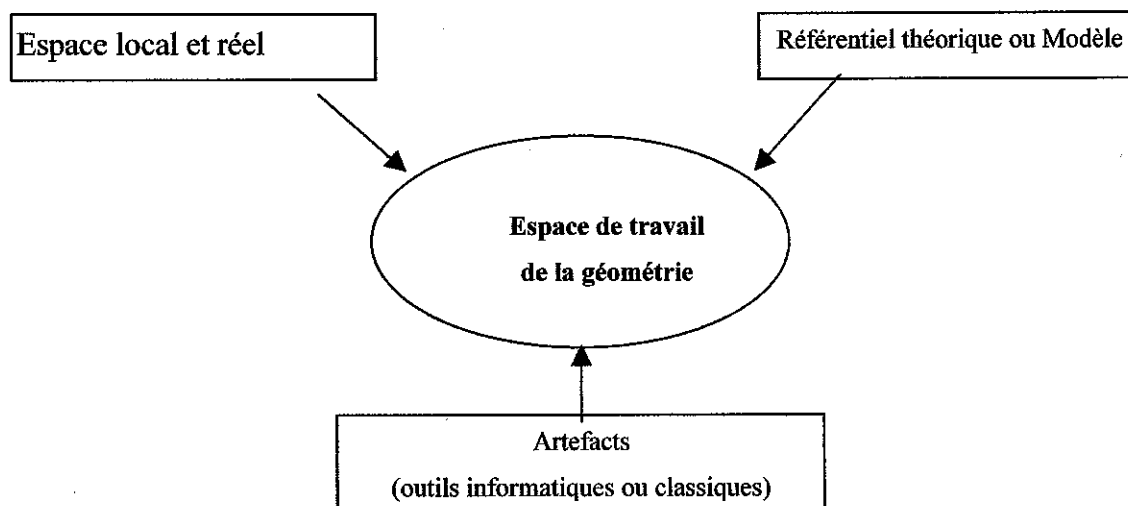
Cet exemple, volontairement choisi hors du contexte actuel, vise à dégager un certain nombre de problèmes en relation avec la définition des espaces de travail.

1. La constitution d'un espace de travail géométrique en interaction forte avec le monde réel ne risque-t-elle pas d'entraîner une confusion entre l'objet géométrique et son origine concrète¹.
2. La nature effective de cet espace n'est pas la même pour les différents usagers. Le novice risque de ne voir ici qu'un travail de couture inutilement compliqué par des considérations annexes, le maître pense faire de la géométrie de type théorique, l'expert perçoit l'oscillation entre ces deux univers.
3. L'élaboration d'un modèle théorique s'effectue à partir de la réalité et en retour il faut envisager les applications possibles de ce modèle à la réalité.

Vers une définition de l'Espace de travail

Définition de l'espace de travail

Nous appellerons espace de travail géométrique, le lieu organisé par le géomètre pour mettre en réseau les trois pôles que sont l'espace réel et local en tant que support matériel, l'ensemble des artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre et enfin un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique qui dépendra de la géométrie choisie. Ces différentes composantes de l'espace de travail seront précisées et définies en relation avec la nature de la Géométrie mise en jeu.



¹ Dans notre terminologie, il s'agit là d'un cas de Géométrie I dont l'horizon on le sait est technologique.

En effet, le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes qui en retour par leurs fonctions différentes participent à la spécificité des différents paradigmes. Nous serons souvent confrontés à cet apparent paradoxe qui fait définir comme géométrique la fonction d'un objet lorsqu'il intervient dans une géométrie que nous essayons justement de mieux définir. Le fait que la nature des composantes dépende du paradigme de référence conduit à envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, nous parlerons alors d'espace de travail géométrique de référence.

Pour éclairer notre conception de l'espace de travail, nous allons faire référence à la reconstitution dans un musée, par un ethnologue², d'un atelier de forgeron. L'ethnologue disposait de l'atelier originel non utilisé depuis la mort du forgeron. Au cours du travail de prise d'indices et de mesure, il commença à entrer dans les pas du forgeron, à comprendre l'agencement et l'économie des objets autour de la forge. Il put alors reconstituer non plus seulement un lieu inerte mais l'espace de travail de ce forgeron et ainsi expliquer l'usage de certains instruments liés à l'histoire personnelle de l'utilisateur ou à la fonction particulière de cette forge dédiée au ferrage des chevaux. L'espace de travail de la géométrie sera aussi un lieu habité que l'on peut approcher à partir de certaines de ses composantes mais dont le sens complet dépend de la fonction et de l'utilisateur.

Le travail dont nous parlons en géométrie, renvoie à une conception généralisée de cette notion : le travail³ est vu comme l'établissement d'un rapport entre un contenu et une forme. Dans notre cas, le contenu est lié à une matière visible et la forme est déterminée par le modèle de référence. Le travail ne doit pas nécessairement déboucher sur la production d'objets concrets, il s'agit d'une activité intellectuelle où l'individu organise, d'une certaine manière et avec son style propre, les relations entre objets empiriques et théoriques.

Espace local et réel

Il est bien sûr difficile de préciser l'espace qui fait l'objet de la géométrie puisqu'en quelque sorte pouvoir décrire l'espace support est l'objet premier du travail du géomètre au moins dans la conception abstraite et formelle de la géométrie⁴. Dans les autres cas, cet espace est souvent considéré comme transparent et l'utilisation même du mot espace n'a pas beaucoup de sens.

² Il s'agit de Flavio Baumann de l'Université catholique de Valparaíso.

³ Granger G.G. Essai sur une philosophie du style. p. 5 et sq

⁴ Ce que recouvre la Géométrie III.

Les objets géométriques sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent à la fois du modèle théorique qui les définit et de l'espace réel dans lequel ils se trouvent. Dans la vision abstraite de la Géométrie III, l'espace est constitué de points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Ce regard permet d'introduire les sous-parties de l'espace comme des ensembles de points. Dans la géométrie axiomatique naturelle de type Euclidien⁵, certaines sous-parties de l'espace sont en fait les objets de l'étude et l'on parlera de figures ou de configurations. En Géométrie I, il s'agit de dessins ou de maquettes. Nous reviendrons plus loin sur ce point classique de la didactique des mathématiques.

L'espace qui intervient en géométrie se construit en étroite relation avec l'espace réel qu'il reconstruit ou qu'il dévoile de manière différente suivant les divers paradigmes. L'espace réel dont nous parlons s'apparente à ce que Malafosse [2002 p. 44] décrit sous le nom d'espace de la réalité c'est à dire « *un ensemble composé des objets réels et des événements existant hors de la pensée du sujet, et sur lequel porte à la fois l'activité psychique des individus et l'activité de réflexion des communautés culturelle* ».

Un autre point important est la notion de localité ; l'espace auquel nous avons accès est de fait nécessairement local. Le détour par l'étude des conceptions de Riemann permet de mieux comprendre les liens entre la géométrie et la modélisation de l'espace. Selon lui, les hypothèses fondatrices de la géométrie résultent d'observations locales et il faut être prudent sur toute généralisation hors du champ de l'observateur. Il pose la question fondamentale de savoir si l'extension de la géométrie localement perçue comme euclidienne donne nécessairement l'espace euclidien. C'est Klein qui le premier a développé et résolu le problème de décrire tous les espaces globaux qui localement étaient indiscernables de l'espace euclidien dans le cadre de sa théorie des formes spatiales. L'intérêt de ce problème vient des méthodes développées pour le résoudre. Il est, en effet, traité en faisant appel à des techniques « géométriques » qui travaillent sur l'espace entier en laissant invariantes certaines propriétés. L'espace devient la matière même du travail géométrique, aidé en cela par les groupes de transformations. La portée de la localité devient essentielle lorsque notre étude s'étend aux géométries non euclidiennes mais même dans notre cadre, elle pose le problème de la relation des objets avec l'espace dans lequel ils sont plongés avec l'idée contemporaine d'une dépendance étroite de la matière avec la géométrie de l'espace. Des logiciels, comme LOGO, posent également le problème de la localité de manière cruciale en introduisant la possibilité

⁵ Le paradigme que nous désignons sous le terme Géométrie II.

de travailler sur des modes d'écran différents qui ne sont que localement euclidiens [Kuzniak 2003].

Les artefacts

En didactique des mathématiques, le mot artefact est compris dans le sens que lui donne Rabardel⁶ de chose ayant subi une transformation d'origine humaine. Il ajoute que cette chose doit être susceptible d'un usage pouvant s'inscrire dans des activités finalisées. Dans l'usage géométrique, ces choses seront les outils et les instruments utiles en géométrie. Rabardel précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action. L'intérêt de cette approche est d'attirer l'attention sur le processus de genèse instrumentale qui transforme un artefact en instrument avec une double orientation : l'instrumentalisation orientée vers les usages de l'artefact et l'instrumentation tournée vers l'appropriation par le sujet des schèmes d'action.

Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail puisqu'ils en constituent la face la plus visible et la plus prégnante pour l'élève. Dans le cadre euclidien classique, on sait l'importance des constructions à la règle et au compas. La règle n'est pas graduée et ainsi la Géométrie II se différencie radicalement de la Géométrie I où le mesurage peut éventuellement intervenir. Ainsi le problème de la détermination de la trousse à outils est fondamental pour toute réflexion sur les problèmes géométriques et notamment, bien sûr, ceux dits de construction.

L'introduction de nouveaux outils de type informatique a bouleversé les artefacts utilisés et créé, de fait, des nouveaux espaces de travail dont l'étude à la fois théorique et didactique a nourri les recherches en didactique des mathématiques. Cette dernière remarque nous permet d'insister sur le fait que, même dans un paradigme géométrique donné, les espaces de travail géométriques peuvent être multiples ; c'est une source de difficultés supplémentaires.

Le référentiel ou modèle théorique

Les objets et les outils de la géométrie en constituent la partie empirique, celle-ci ne prendra tout son sens qu'articulée avec un ensemble de définitions, de propriétés, de relations réunies dans une sorte de référentiel théorique que l'on peut aussi regarder comme un modèle

théorique. Le sens du mot modèle oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle et norme abstraite. Cette oscillation reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions. Dans ce qui suit, nous appellerons modèle théorique le modèle abstrait qui résulte soit d'une modélisation, soit d'une définition a priori.

Dans le premier cas, le modèle théorique résulte d'un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel dont il cherche à rendre le plus fidèlement compte. La géométrie axiomatique classique entre dans cette description et il est possible de donner l'origine *naturelle* de certaines propriétés de la Géométrie II.

Dans le deuxième cas, le modèle théorique préexiste et ce qu'on appelle modèle est cette fois une interprétation (et souvent une création) qui doit rendre compte des objets et des propriétés définis par les axiomes. Cette interprétation pourra s'appuyer sur une représentation matérielle ou virtuelle destinée à donner du sens à un système d'axiomes et d'énoncés qui est donné a priori. Cette réalisation matérielle porte également le nom de « modèle », le nom de « maquette » lui convient également⁷ et évite l'ambiguïté. Cette « maquette » éclaire donc le système d'axiomes et favorise éventuellement le développement de la théorie par le géomètre en fournissant à son intuition un cadre plus familier. La géométrie de type formaliste (Géométrie III) entretient ce rapport au modèle théorique. Ceci apparaît nettement dans les nombreux « modèles matériels » créés pour rendre compte des axiomes décrits par Hilbert, quand on ne retient pas l'axiome d'Archimède ou quand on nie l'axiome du parallélisme (rappelons, sans le développer, l'exemple du modèle de Klein pour la géométrie hyperbolique).

Dans un sens plus restreint, il faut noter que le « modèle » peut aussi désigner une réalisation matérielle d'une figure géométrique, sa maquette : il pourra alors exister une confusion entre le travail sur l'objet réel et l'objet idéal.

Le référentiel de la Géométrie I, au moins dans sa pratique élémentaire, paraît ne se référer à aucune structuration en un modèle théorique. Cependant, il est possible de développer au sein de ce paradigme un modèle de référence : c'est ce qu'a fait par exemple Hjelmslev [1939].

La géométrie que nous proposons dans ce qui suit doit avoir comme but le contrôle sensible de tous les résultats. Les définitions doivent être des définitions sensibles : c.a.d. décrire les objets dont on s'occupe de telle façon qu'on puisse reconnaître par une vérification directe si les objets ont les propriétés démontrées.

Le programme de travail est : voir et concevoir.

⁶ P. Rabardel [1995] *Les hommes et les technologies* Armand Colin p. 59

⁷ Maquette est le sens originel de « modèle »

Dans cette géométrie, par exemple, une droite n'est pas tangente en un point à un cercle mais sur une portion de cercle. Le but de Hjelmslev est de définir précisément cette géométrie étroitement liée au monde physique.

Construire l'espace de travail

L'espace de travail ne prend son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et de donner du sens aux trois pôles que nous venons de dégager. Pour réfléchir sur cette construction de l'espace de travail et même si la notion de travail que nous utilisons est relativement abstraite, il nous a semblé intéressant d'observer l'usage du terme espace de travail dans un autre domaine où il est employé à savoir celui de l'architecture ergonomique.

De manière prosaïque les architectes définissent les espace de travail comme des lieux où s'effectue le travail. Pour un auteur comme Lautier [1996] : il s'agit de mettre en place des lieux de travail pour que l'utilisateur puisse y exercer au mieux son travail. Cela nécessite de la part de ce dernier un investissement et une appropriation de ce lieu. Pour certains utilisateurs, il s'agira d'une appropriation faible limitée à une partie de cet espace, ainsi l'ouvrier spécialisé qui ne veut connaître que sa machine outil, pour d'autre d'une appropriation forte qui en fait un domaine de travail étendu comme pour le chef d'équipe conscient de l'agencement global de son lieu de travail dans un processus plus vaste de production. Le même objet aura des valeurs différentes suivant la place de la personne dans cet espace avant tout social : la passerelle des cadres devient un balcon de surveillance pour les ouvrières qui s'en protègent par des cartons.

Pour pouvoir le structurer et éventuellement le modifier, l'espace de travail est conçu dans l'étude de Lautier, comme articulé autour de trois grands pôles : un dispositif matériel, une organisation laissée à la charge du concepteur de l'espace et enfin « la représentation de cet espace » pour ses utilisateurs. Selon nous, ces trois aspects renvoient à des regards et des points de vue différents sur l'espace de travail qui peuvent nous aider à mieux comprendre la construction de l'ETG par ses différents utilisateurs. Ainsi nous commencerons par envisager l'organisation nécessaire des composantes de l'ETG pour le rendre efficient dans une institution donnée. Puis nous envisagerons la part personnelle d'appropriation de cet espace par un individu particulier.

L'enjeu didactique

Pour résoudre un problème de géométrie, l'expert dispose d'un espace de travail que nous qualifierons d'idoine. Cet ETG remplit deux conditions, d'une part, il permet de travailler dans la Géométrie correspondant à la problématique visée, d'autre part, cet ETG est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont maîtrisées et utilisées de manière valide. En d'autres termes, l'expert face à un problème peut reconnaître le paradigme géométrique utile pour la résolution, cela lui permet de l'interpréter et de le résoudre grâce à l'espace de travail de référence associé à ce paradigme. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s'effectuer dans ce que nous appellerons un ETG personnel. Ce dernier n'aura a priori ni la richesse ni la performance de l'ETG d'un expert.

Cette façon de décrire la situation nous permet de dégager un enjeu didactique global tel que nous le percevons dans notre cadre théorique. D'un cadre géométrique unique, nous sommes passés à plusieurs cadres dépendant de la Géométrie utilisée. Dans ces cadres, il est possible de résoudre des problèmes grâce à des ETG idoines. A cela s'ajoute la dimension personnelle due à un individu particulier travaillant dans son ETG personnel.

S'assurer que l'apprenant réorganise les diverses composantes de son ETG en un tout cohérent et opérationnel va constituer l'enjeu didactique. Cette question assez générale peut se décliner en un certain nombre de problèmes qui participent de l'enjeu didactique.

1. Le problème de l'existence d'un ETG idoine pour résoudre un problème ou plus généralement une classe de problèmes.
2. Les malentendus pédagogiques dus à la diversité à la fois des ETG de référence et des ETG idoines.
3. Le problème du développement individuel de l'ETG personnel.

Organisation mathématique et didactique de l'ETG idoine.

La mise en place d'un espace de travail géométrique efficient est une étape essentielle pour installer dans l'institution scolaire une organisation mathématique correspondant au modèle géométrique visé. Ce problème récurrent réapparaît à chaque réforme quand celle-ci modifie une des composantes de l'ETG. Généralement ces modifications curriculaires concernent le modèle abstrait de référence. La recherche et la description d'espaces de travail géométriques

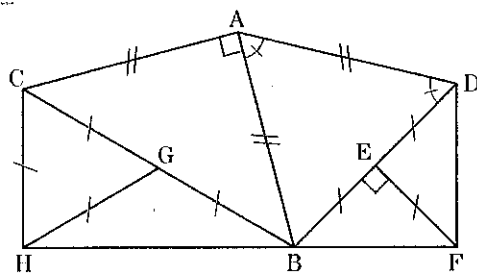
idoines avec des techniques spécifiques et justifiées peuvent utilement s'appuyer sur l'approche anthropologique développée par Chevallard. Cette approche permet d'étudier dans le détail les organisations mathématiques et didactiques mises à l'œuvre dans les manuels ou les programmes.

La modification de la structuration mathématique du modèle abstrait entraîne de fait un changement de l'espace de travail de la Géométrie et si l'on ne modifie pas les artefacts et l'espace support, cet espace de travail peut se révéler inadapté ou difficile à créer. Il nous semble que l'on peut interpréter ainsi le relatif échec de l'introduction massive des transformations géométriques dans l'enseignement de la Géométrie II au Collège et au Lycée en France. Les transformations géométriques ont été introduites dans un espace de travail de référence de la Géométrie II jusqu'alors plutôt statique (avec notamment les cas d'égalité et de similitude ses triangles), sans le modifier de façon à faciliter la réalisation de ces transformations afin qu'elles ne soient pas seulement mentales. La création de logiciels de géométrie dynamique a tenté partiellement de combler cette lacune mais avec le risque d'un glissement vers la Géométrie I du fait de la surpuissance des artefacts.

A côté de cet exemple général, il y a aussi des problèmes simples où l'existence même d'un ETG idoine pour résoudre le problème se pose réellement. Les techniques disponibles ne permettent pas à l'élève de résoudre le problème ou alors de manière trop lourde. Nous allons préciser ce point en étudiant dans ce sens un exercice extrait du manuel Décimale 4^{ème} page 139 (Belin 1998).

Dessin à main levée et place de l'oral

55 Une curieuse construction



- Reproduire la figure en construisant successivement les triangles ABC, ABD, BEF et FED (E est le milieu du segment [BD]), CGH (G est le milieu du segment [BC]) et GHB. On prendra $AB = 5$ cm.
- Démontrer que les droites (HC) et (FD) sont parallèles et que HF est la distance entre ces deux droites.

La première question invite l'élève à construire la figure et insiste sur l'importance de la mesure. L'espace de travail de cette question renvoie à la Géométrie I avec l'importance accordée aux instruments et aussi à la mesure. Or le but du problème, dans la question 2, se situe en Géométrie II, il y a là un conflit classique fréquent⁸. Mais cet exercice introduit une

⁸ Voir par exemple notre étude « Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres » *Revue Petit X* n°51. Grenoble pp 5-21

autre résistance qui porte sur la nature de l'espace de travail idoine.

En effet, la tâche demandée est particulièrement lourde puisqu'il faut repérer de nombreuses égalités d'angles pour arriver à montrer à la fois l'alignement de H, B et F et l'orthogonalité des droites (HC) et (HB) d'une part et (FD) et (BF) d'autre part. Dans l'espace de travail classique, papier crayon avec une demande de production écrite de l'enchaînement déductif, la rédaction complète prend une copie double d'élève consciencieux.

Cette fois, le maître, s'il décide de donner cet exercice, doit se poser la question de l'existence d'un espace de travail qui allège le travail de l'élève. Il pourra s'agir d'un espace qui intègre le dessin à main levée et l'expression orale des élèves supprimant par-là même deux obstacles : la construction effective et la lourde rédaction linéaire. Il se crée ainsi un nouvel espace de travail qui donne un statut précis à des notions comme le dessin à main levée ou l'oral en mathématique dont la place est souvent floue dans l'enseignement.

Un autre exemple : l'introduction des cas d'isométries en seconde

Les cas d'isométries des triangles, sous le nom de cas d'égalités, étaient une composante essentielle de l'enseignement de la géométrie dans le secondaire jusqu'en 1967, date de leur suppression sous la pression de la réforme des mathématiques modernes.

Avant cette date, ils apparaissaient dans les programmes au niveau de la classe de cinquième et leur introduction et leur usage étaient assez proche de celui d'Euclide, la terminologie et l'ordre des cas mis à part.

Dans cette approche, la reconnaissance de sous-figures dans des figures était nécessaire pour découvrir les indices nécessaires à la preuve (angles, côtés égaux). Ceci pouvait nécessiter la construction de figures auxiliaires. Lors de leur nouvelle introduction, ces cas s'insèrent dans un espace de travail défini au collège et qui privilégie les transformations géométriques. Ainsi, deux triangles isométriques peuvent être définis comme deux triangles tels qu'il existe une translation, une rotation, une symétrie ou une composition de ces transformations qui permette de passer de l'un à l'autre. Cette définition réfère aux connaissances enseignées au Collège. Elle ne peut s'appuyer sur la connaissance générale des isométries qui seront vues que par une infime partie des élèves en Terminale.

Les modalités de preuve mises en œuvre dans les deux cas sont non seulement radicalement différentes d'un point de vue mathématique mais aussi d'un point de vue cognitif. Ainsi, non seulement les connaissances mises en jeu diffèrent mais également les processus cognitifs.

Ceci nous conduit à préciser l'articulation entre les espaces de travail et ces processus cognitifs.

Le développement de l'ETG personnel

Dans les faits, l'ETG personnel de l'élève ou de l'étudiant(e) ne fonctionne pas nécessairement comme l'ETG idoine de l'expert. En effet, ce dernier ne surgit pas tout fait dans le cerveau de l'utilisateur, il est le fruit d'un long apprentissage qui met en place les différents schèmes d'action assurant la cohérence de l'ETG. D'autre part, l'élève peut rencontrer des difficultés dans son usage ou faire des erreurs comme dans tout apprentissage.

L'enseignant va devoir travailler pour que les artefacts deviennent des instruments au sens de Rabardel, pour que les divers objets de l'espace étudié deviennent familiers à l'élève et pour qu'enfin les éléments du modèle théorique puissent se structurer autour de ces objets. Le choix du milieu au sens de Brousseau et des situations didactiques visant à la structuration de cet ETG devient alors essentiel.

Mais en plus de cette entrée classique en didactique des mathématiques, le développement personnel de l'ETG suppose aussi que l'on envisage le problème dans sa dimension psychologique et cognitive. Les voies proposées ici sont évidemment très diverses et dans notre étude nous n'avons envisagé que deux pistes qui avaient déjà fait l'objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques. Il s'agit d'une part de l'aspect sémiotique avec la notion de registre de représentation sémiotique particulièrement féconde pour traiter d'une Géométrie articulée autour des figures. L'autre aspect que nous avons pris en compte est celui des niveaux de pensée de Van Hiele qui bénéficie d'un grand nombre d'approches surtout dans les mondes anglo-saxons et hispaniques.

Approche cognitive et ETG

Les études didactiques portant sur l'enseignement de la géométrie au Collège ont conduit à la nécessité de complexifier la notion de figure. Pour les élèves de Collège, la figure peut soit être un support du raisonnement, soit par son existence même la preuve cherchée. Ce double regard sur un même objet a conduit les didacticiens à tenter de distinguer par des mots ce que l'usage confond et à la suite de Parzysz, la distinction dessin-figure est devenue classique.

Dans notre approche, la définition de la figure dépend du paradigme géométrique de référence. En Géométrie I, il s'agit d'un dessin ou pour emprunter une expression allemande une figure géométrique réelle (*geometrische Realgebilde*). Cette formulation insistante porte sur deux aspects : le contexte fait que les dessins doivent être interprétés de manière géométrique (il ne s'agit pas d'art, de physique...), mais d'autre part ces objets ne sont pas des objets idéaux, ils sont réels : les traits ont une épaisseur, les outils de construction sont de vrais outils avec leur frottement, leur usure leur imperfection, leurs pannes.

En Géométrie II, la distance au réel, l'importance de la définition devient essentielle. La figure n'existe alors pas sans un texte qui la définit et qui en fixe les limites. En Géométrie II, le seul objet physique est le dessin, mais un dessin “ *controlled by its definition (though it may be inspired by a real object)* ” comme le formule Fischbein [1993] qui introduit l'idée de « figural concept » pour rendre compte de la nouvelle notion de figure.

En Géométrie III, la figure correspond à un sous-ensemble de points de l'espace ayant une propriété commune, pour certains il s'agit même de tout ensemble fini de points. Elle est aussi une réification d'une idée abstraite associée à des espaces au moins de dimension 2. Elle peut alors heureusement guider l'intuition du géomètre.

Le changement de statut de la figure est un des points les plus visibles dans l'évolution de l'ETG. Sa prise en charge est possible par la gestion des artefacts, notamment les logiciels géométriques dynamiques. Le jeu sur la figure s'articule aussi sur la liaison espace-modèle dans l'ETG et donc sur la relation entre le spatial et le théorique : préciser la gestion de cette interaction est l'objet de l'approche cognitive de Duval. Pour cela, il introduit un travail spécifique, encore un jeu, sur les registres de représentation sémiotique que sont le registre figural et le registre discursif. La connaissance du jeu entre ces deux registres est certainement un des enjeux de l'apprentissage de la Géométrie II.

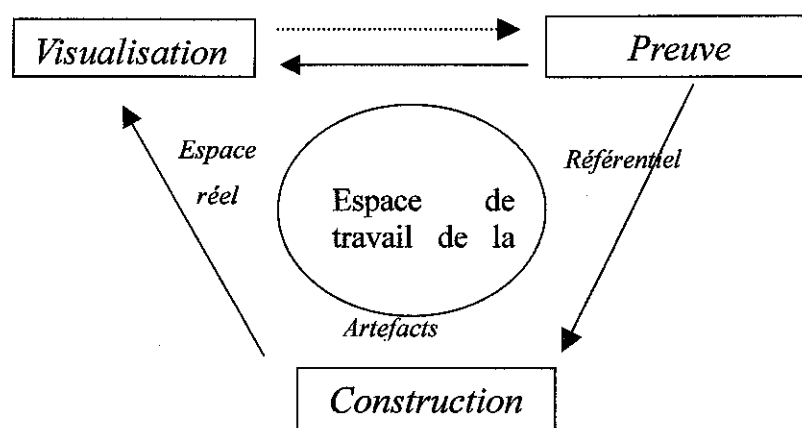
D'autre part, nous allons montrer sur cet exemple, comment une approche cognitive peut venir se superposer à l'espace de travail géométrique. Ce dernier résulte d'une réorganisation des processus cognitifs associés aux diverses composantes de l'ETG. Dans son article « *Why to teach geometry ?* » [1995], Duval introduit trois processus cognitifs.

Le processus de visualisation lié aux figures mentales ou sur un support matériel.

Le processus de construction dépendant des outils utilisés (règles, compas...).

Le processus de preuve articulé sur un discours théorique.

Il réorganise ensuite ces trois processus dans un schéma que nous superposons sur celui de notre espace de travail. Duval précise que les flèches indiquent les aides et les appuis qu'un processus fournit à un autre.



Ce modèle doit être vu de façon dynamique pour saisir l'évolution du processus cognitif global lié au travail géométrique. Les processus cognitifs relevés par Duval permettent une construction opérationnelle de l'ETG par expansion cognitive en mettant en relation de manière dynamique les différentes composantes de l'espace de travail. Les relations entre les processus cognitifs diffèrent d'une Géométrie à l'autre. L'organisation proposée par Duval s'applique plutôt à la Géométrie II. En Géométrie I, le rôle d'appui de la construction et de la visualisation pour la preuve est plus important. En Géométrie III, cette fois idéalement un système expert pourrait seul développer la preuve, mais la construction au stade de l'esquisse et la visualisation guident l'intuition et l'interprétation des résultats.

Articulation entre niveaux de pensée géométriques et paradigmes

En s'appuyant, d'une part sur la théorie de Piaget et d'autre part sur la GestaltTheorie, Van Hiele a construit une théorie du développement de la pensée géométrique chez l'enfant basée sur les différents niveaux d'appréhension perceptifs et logiques des figures. L'élève passe idéalement par cinq niveaux (numérotés de 0 à 4) qui le conduisent de la perception simple à une conception abstraite et discursive de la géométrie. Les deux premiers niveaux (visualisation⁹ et analyse) se distinguent ainsi des deux derniers (déduction formelle et abstraction). Le niveau 2 (déduction informelle) correspond à une phase de transition où s'élabore le raisonnement géométrique.

Cette conception de l'évolution de la pensée géométrique gravissant les pentes de l'abstraction et de la généralisation par les structures, rend compte du passage vers les

⁹ Nous éviterons ce terme déjà utilisé par Duval qui a bien montré que la visualisation allait bien au-delà de la simple perception visuelle retenue par Van Hiele. Nous parlerons de reconnaissance visuelle.

mathématiques évoluées définies entre autres par Tall [1995]. Nous n'entrerons pas ici dans la discussion pour savoir s'il s'agit vraiment du développement cognitif réel de l'élève. Pour nous, l'intérêt de cette approche, articulée chez Van Hiele avec une progression pédagogique, est d'avoir développé des observables portant sur des activités faciles à mettre en place et qui suivent le développement de la pensée et du raisonnement mathématique. Cela, et ce n'est pas sans un certain nombre de dérives, a permis de mettre en place des tests servant à déterminer le niveau atteint par les élèves. Nous ne reprenons pas ici cette hiérarchisation dans l'optique de classer les élèves et ceci d'autant plus que nous l'utilisons plutôt pour étudier des travaux d'étudiants qui ont déjà parcouru tout le cursus scolaire.

Nous proposons une vision bidimensionnelle des relations entre ces niveaux et les paradigmes que tente de résumer le tableau suivant.

Tableau de Synthèse

	Géométrie I	Géométrie II	Géométrie III	
Niveau 0 Reconnaissance visuelle				pôle empirique
Niveau 1 Analyse			<i>Outil heuristique</i>	
Niveau 2 Déduction informelle	Transition			(Intuition et expérience)
Niveau 3 Déduction démonstration		Transition		pôle théorique (raisonnement déductif)
Niveau 4 Abstrait Structure				
	Horizon technologique	Horizon axiomatique	Horizon formel	

Les flèches verticales indiquent les rôles différents joués par le niveau empirique dans les diverses Géométries : en Géométrie I, tout le discours théorique s'appuie sur ce fond empirique alors qu'en Géométrie III il joue essentiellement un rôle heuristique destiné à illustrer (ou à faciliter) le discours théorique. La flèche horizontale insiste sur le fait que le niveau de théorisation obtenue en Géométrie I

est partiellement le fruit de l'expansion formelle réalisée dans le cadre de la Géométrie III. Ces différentes relations permettent ainsi de préciser les différences de nature entre les ETG.

Nous avons grisé la voie privilégiée dans le cadre des mathématiques enseignées et qui associe niveau de pensée et un certain type de géométrie. Les transitions s'opèrent, dans cette conception, dès que le niveau cognitif de l'élève lui permet de maîtriser les éléments de la nouvelle Géométrie. Nous pouvons aussi visualiser cette évolution de la géométrie enseignée dans le cadre scolaire français (et nous suivons ici une idée de Parzysz [2001]) grâce au tableau suivant :

Type de géométrie	PG	G1		G2		G3
Niveaux de Van Hiele	Niveau 0	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3	Niveau 4	
Problématique	Spatiale	Spatio-géométrique	Géométrico-mathématique	Logico-mathématique	Structuraliste	

Nous avons ajouté une colonne intégrant une problématique spatiale dans une sorte de pré-géométrie (PG).

Conclusion

La géométrie élémentaire fait rencontrer un monde idéal avec un monde matériel par l'intermédiaire des objets géométriques. L'activité géométrique peut alors être conçue comme un travail qui va mettre en relation une formulation théorique et un contenu matérialisable dans l'espace réel grâce à un ensemble d'outils spécifiques. Cette réflexion nous a conduit à introduire la notion d'espace de travail géométrique basée sur la mise en réseau de trois composantes : un espace réel et local, un référentiel théorique et enfin un ensemble d'artefacts. Mais cette notion se diversifie rapidement en fonction du paradigme géométrique dominant et de son utilisateur. Cela nous conduit à définir un certain nombre d'ETG destinés à décrire ces multiples facettes de l'activité géométrique.

ETG de référence. Il s'agit d'un espace de travail défini de manière idéale en fonction de seuls critères mathématiques. Son utilisateur est un individu expert « épistémique ». Pour simplifier nous supposons que pour une géométrie donnée l'ETG de référence est unique, mais même dans le cas de la géométrie élémentaire enseignée, nous devons distinguer trois ETG de référence associés aux trois Géométries élémentaires que nous avons dégagées.

ETG idoine. L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée et pour une fonction définie. Cela

suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. Son utilisateur premier reste un expert mais il joue un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour ses utilisateurs potentiels futurs. De fait, le choix de l'adjectif *idoine* suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel, nous devrions en toute rigueur introduire d'abord l'idée d'un ETG institutionnel et poser ensuite la question de son caractère *idoine*.

ETG personnel. L'ETG *idoine* doit être utilisé par des étudiants mais aussi par leurs enseignants. Chacun se l'approprie et l'occupe avec ses connaissances mathématiques et ses capacités cognitives. Ces ETG sont ce que nous appelons des ETG personnels. Quand l'élève découvre son espace de travail, il aura tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature de l'espace de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.

L'étude de ces différents espaces de travail nous semble utile pour comprendre les difficultés des élèves et pour préciser l'origine et la nature des obstacles qu'ils rencontrent (épistémologiques, didactiques ou ontologiques).

Les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométriques fournissent un cadre pour la recherche que nous poursuivons actuellement et qui porte sur la comparaison de l'enseignement de la géométrie dans des pays différents. Cette comparaison passe par une explicitation des paradigmes privilégiés dans chaque pays et par la description des ETG considérés comme *idoin*es. Elle suppose aussi l'étude de l'appropriation et de la représentation de ces ETG par les étudiants. Il est ainsi possible d'interpréter la question du rapport des étudiants à la géométrie en termes de regards sur l'espace de travail et sur sa fonction.

Pour mener à bien ces diverses études et rendre compte des types d'ETG en précisant l'aspect de chacun, il faut noter qu'il est nécessaire de s'appuyer sur des approches qui relèvent des différents champs de la didactique des mathématiques tels qu'ils ont pu être développés en France depuis bientôt trente ans et qui se révèlent ici étonnamment complémentaires.

Références bibliographiques

- DUVAL R (1995) *Why to teach geometry* Icmi Studies on Geometry Catania
- FISCHBEIN E (1993) The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 24, n°2. 139-162. Kluwer Academic Publishers.
- GRANGER G. G. (1968) *Essai d'une philosophie du Style* Armand Colin, Paris
- GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*. Editions du Griffon, Lausanne.
- HJELMSLEV J (1939) La géométrie sensible *L'enseignement mathématique* p 7-27 et 294-322
- HOUEMENT C, KUZNIAK A, (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 20/1. pp. 89-116
- HOUEMENT C, KUZNIAK A, (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*. 40/3. pp. 283-312
- HOUEMENT C, KUZNIAK A, 1999(2003) Épistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie. In COPIRELEM *Concertum 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*. Tome 2 pp 95-106 Ed Arpeme
- KUHN T.S (1977) En repensant aux paradigmes in *La tension essentielle* Odile Jacob 1977
- KUZNIAK A, (2001) Sur une approche intrinsèque de la géométrie enseignée. Géométrie in Bulletin de l'APMEP n°435 pp. 507-518.
- KUZNIAK A, (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note d'habilitation. Université de Paris VII. ISBN 2-86612-248-8
- KUZNIAK A, RAUSCHER JC (2002) Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du colloque sur la formation des maîtres. La Roche sur Yon. Université de Nantes* pp 271-290.
- LACABE-PLEISTEING (1911) Cours de géométrie pour le cours complémentaire *Felix Juven Paris*
- LAUTIER F.(1996) Sur les espaces de travail in Cazamian et al *Traité d'ergonomie* Ed Octares.
- MALAFOSSE D (2002) Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 22/1.
- MARIOTTI M. A. (2001) La preuve en mathématique *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* vol 1.4 pp 437-458
- PARSZYSZ (2001) Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1 *Actes du colloque copirelem de Tours*. Irem de Tours
- RABARDEL P. (1995) Les hommes et les technologies page 59 Armand Colin

- RIEMANN B (1854) *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen* trad Laugel. Blanchard 1968
- RICHARD P. R (2004) L'inférence figurale : Un pas de raisonnement discurso-graphique. *Educational Studies in mathematics* 57/2 pages 229-263.
- TALL D.(1995) Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *Plenary lecture at the conference of PME*, Recife, Brazil.
- VAN HIELE, P.M. (1986) *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. Orlando: Academic Press.

De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.

Agnès Lenfant

IUFM de Reims et équipe DIDIREM Paris 7

Le travail présenté dans cet article a été mené dans le cadre de notre thèse (Lenfant, 2002). Il est centré sur l'étude de la constitution et de l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires. Nous en présenterons la problématique, ainsi que le cadre théorique et la méthodologie adoptée. Puis, nous proposerons différents résultats dans les paragraphes III et IV.

I. Problématique de la recherche

Cette recherche a son origine dans les préoccupations de l'équipe des formateurs de mathématiques de l'IUFM de Reims chargés de la formation professionnelle initiale des professeurs de lycées et de collèges stagiaires (PLC2). Lors des journées de formation en didactique des mathématiques, nous avons l'impression d'aller toujours trop vite, de vouloir en faire trop pour être réellement efficaces, de ne pas disposer des informations nécessaires pour faire des choix pertinents. Dans notre thèse, nous avons choisi de faire un pas de côté par rapport à cette formation pour étudier et déterminer quelles entrées seraient à même d'être efficaces, compte tenu des contraintes pesant sur la formation initiale. Notre recherche s'inscrit ainsi dans l'ensemble croissant des recherches sur la constitution de la professionnalité enseignante menées dans divers champs théoriques, dont celui de la didactique des mathématiques. En effet si, dans les premiers travaux de recherche, les priorités des didacticiens étaient la compréhension de la cohérence de l'élève et la construction d'ingénieries didactiques en accord avec la théorie pour instrumenter l'enseignement, les difficultés des enseignants à respecter les scénarios élaborés par les chercheurs et à reproduire ces ingénieries ont imposé progressivement l'enseignant à l'attention des didacticiens (Margolinas, Perrin, 1997). Puis la création des IUFM en France et l'implication croissante des didacticiens dans la formation des maîtres ont conduit à un accroissement des recherches sur l'enseignant. Ces recherches se réfèrent à des cadres théoriques distincts et abordent des questions riches et variées comme l'attestent les synthèses

de C.Margolinas ou M.L.Schubauer-Léoni à la 10^{ème} école d'été de didactique des mathématiques (1999). Les questions abordées pour l'étude de ce qui touche à l'enseignant en classe dans les recherches françaises actuelles sont, par exemple, la détermination des contraintes et des marges de manœuvre de l'enseignant, la recherche des caractéristiques de la position d'enseignant dans une institution didactique, l'identification des moyens utilisés par l'enseignant pour gérer son projet d'enseignement et la place laissée à l'élève dans la réalisation de ce projet, la recherche de régularités et de variabilités dans les pratiques des enseignants, la compréhension de la construction des connaissances de l'enseignant.

Malgré ce foisonnement de travaux il reste de nombreuses questions ouvertes notamment en ce qui concerne la constitution des pratiques professionnelles enseignantes. Pour contribuer à leur étude, nous avons choisi de tenter de cerner comment se construit un rapport professionnel à l'algèbre chez des enseignants stagiaires de mathématiques.

Ce choix du domaine de l'algèbre a été motivé par plusieurs raisons :

- c'est un domaine où, pour un certain nombre d'élèves, débute l'échec en mathématiques, les mathématiques cessant brutalement de prendre sens, et il est donc à ce titre crucial.
- C'est un domaine qui concerne l'ensemble de nos professeurs stagiaires : il est officiellement au cœur de l'enseignement à partir de la quatrième mais, dès la sixième, l'entrée dans l'algèbre est préparée par un ensemble d'activités relevant du pré-algébrique.
- C'est un domaine qui semble a priori facile aux étudiants. Ils se sont habitués depuis longtemps à penser algébriquement, ils maîtrisent les techniques algébriques en jeu dans l'enseignement secondaire. Comprendre les difficultés des élèves nécessite pour eux une véritable reconstruction, sans nécessiter pour autant de connaissances mathématiques nouvelles. La position d'étudiant et celle d'enseignant se démarquent donc plus visiblement dans les besoins en connaissances. La situation serait toute autre si l'on choisissait la géométrie plane ou plus encore dans l'espace, les statistiques ou les probabilités.
- C'est un domaine qui a donné lieu à de très nombreuses recherches didactiques et pour lequel l'effort de capitalisation des acquis est important. On connaît assez bien aujourd'hui les difficultés qui jalonnent l'avancée dans le champ de l'algèbre élémentaire ainsi que les dysfonctionnements de l'enseignement. On dispose de différentes ressources d'ingénierie didactique, mais l'exploitation de ces ressources par un enseignant standard et plus encore par un enseignant débutant, on le sait, ne va pas de soi.

Dans notre recherche, nous nous sommes alors proposé d'étudier les questions clés suivantes : comment se construit et évolue la vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre chez les professeurs stagiaires de mathématiques ? Comment se construit et évolue leur vision des élèves, de leurs difficultés, des obstacles qu'ils doivent surmonter ? Comment élaborent-ils des stratégies d'enseignement et quelles sont leurs priorités dans cette élaboration ? Comment analysent-ils leurs pratiques, les difficultés éventuelles qu'ils rencontrent, les décalages entre leurs attentes et la réalité de la classe ?

II. Cadre théorique et méthodologie

Le cadre théorique de cette recherche s'articule autour de deux types de travaux didactiques : des travaux plus particulièrement centrés sur l'enseignant et des travaux plus spécifiques à l'algèbre.

En ce qui concerne l'enseignant, nous avons exploité deux approches :

- la théorie anthropologique du didactique qui définit, en particulier, un cadre d'analyse des pratiques enseignantes à travers l'étude des praxéologies¹ mathématiques et didactiques mises en place par les professeurs (Chevallard, 1999) ;
- la double approche des pratiques enseignantes (Robert, Rogalski, 2002) qui s'appuie sur des travaux de psychologie ergonomique et de didactique des mathématiques et dont l'objectif est de contribuer à l'analyse et à la compréhension des pratiques des enseignants du point de vue de ce qu'elles peuvent engendrer en terme d'apprentissage des élèves et du point de vue des impératifs professionnels auxquelles elles répondent. De ce cadre nous avons retenu des hypothèses relatives aux pratiques enseignantes, qui nous semblent primordiales à prendre en compte dans l'étude des questions que nous nous posons : les pratiques enseignantes sont complexes, stables et cohérentes et elles résultent de recompositions personnelles à partir de connaissances, de représentations, d'expériences des enseignants.

En prenant en compte notre problématique et ces hypothèses, nous avons choisi une méthodologie qualitative basée sur la triangulation de données diverses, associées à différents

¹ Une praxéologie est constituée de quatre éléments : un type de tâches T , une technique τ (c'est à dire une manière d'accomplir les tâches de T), une technologie θ (un discours rationnel sur la technique τ qui peut avoir pour fonction de la justifier, l'expliquer ou de la produire), et enfin une théorie Θ qui est un discours relatif à la technologie τ et qui a le même rôle que celui joué par la technologie par rapport à la technique.

gestes professionnels, recueillies sur un long terme. Deux dispositifs méthodologiques ont été élaborés :

- durant une année, nous avons suivi individuellement onze PLC2 volontaires, enseignant à différents niveaux (de la classe de sixième à celle de première S), à travers des entretiens réguliers et le recueil de diverses données (leurs notes personnelles, les textes de contrôles, des copies et des cahiers d'élèves...) ;
- parallèlement à ce suivi individuel, nous avons mis en place, lors de notre deuxième année d'expérimentation, un dispositif "vidéo"² dans le but d'obtenir des données complémentaires relatives aux pratiques des stagiaires en classes, à leurs pratiques de préparation d'une séance et aux analyses qu'ils faisaient de leurs propres pratiques. Il s'agissait pour nous de renforcer le nombre des observables nous permettant de confronter le discours sur les pratiques et les pratiques effectives à l'intérieur de la classe. Au cours de l'année, nous avons donc demandé à chaque stagiaire de construire une séance d'algèbre que nous avons filmée. En relation avec ce film, nous avons d'abord organisé deux entretiens : le premier, quelques jours avant la séance, pour que le stagiaire nous présente son projet, et le deuxième, juste après la séance, pour obtenir sa réaction à chaud. Puis nous avons de nouveau rencontré chacun des cinq stagiaires à la fin de leur année scolaire et nous avons visionné ensemble le film. Le but de ce dernier entretien était d'accéder à l'analyse qu'ils faisaient de ce qu'ils avaient vécu. Enfin l'analyse des premiers entretiens que nous avons menés dans le cadre de notre recherche nous avait amenée à constater qu'il existait des différences entre les analyses que les stagiaires étaient capables de produire individuellement et celles qu'ils produisaient en groupe lors des journées de formation didactique à l'IUFM. Certaines choses semblaient accessibles, mais uniquement encore dans un fonctionnement social collectif. Dans le but d'obtenir des informations sur les analyses d'une séance que les cinq stagiaires étaient capables de mener entre pairs, nous avons donc complété le dispositif par une dernière phase : après avoir analysé les cinq films, nous avons sélectionné pour chacune des séances des épisodes qui nous semblaient particulièrement intéressants ; puis nous avons réuni les cinq stagiaires, qui ont visionné ensemble ces différents extraits, et nous leur avons demandé de les analyser.

Dans le cadre de notre thèse, nous nous sommes intéressée à un niveau d'enseignement, la classe de seconde, qui nous a semblé approprié à cette recherche car les professeurs doivent à la fois y organiser un travail sur des objets anciens, l'introduction de nouvelles tâches et

l'entrée dans le monde des fonctions. Nous avons donc centré notre étude sur les pratiques de quatre des stagiaires exerçant à ce niveau (Marie, Claire, Julien et Benjamin). La prise en compte des hypothèses sur la constitution des pratiques enseignantes issues de la double approche nous a amenée à choisir des PLC2 avec des caractéristiques personnelles différentes et enseignant dans des contextes différents : Marie et Benjamin ont ainsi effectué leur stage en responsabilité dans des lycées au centre de grandes villes, Claire et Julien ont, quant à eux, enseigné dans des lycées techniques.

L'étude de l'évolution du rapport à l'algèbre de ces quatre enseignants s'est effectuée à travers l'analyse de leurs gestes professionnels (élaboration d'une progression, d'un cours, d'activités, d'évaluations, gestion du travail des élèves...). Elle a été menée selon deux approches : une analyse des contenus algébriques proposés par ces enseignants et de leur organisation et une analyse de gestes professionnels plus transversaux.

Pour l'analyse du contenu algébrique et des gestes professionnels plus spécifiques à l'enseignement de ce domaine, nous nous sommes inspirée de la structure d'analyse multidimensionnelle élaborée par B.Grueon (Grueon, 1995) pour étudier les rapports institutionnels et personnels d'élèves à l'algèbre et nous nous sommes appuyée sur différents travaux didactiques et épistémologiques relatifs à l'algèbre et son enseignement. Nous avons ainsi conçu un outil méthodologique, une grille d'analyse de la compétence professionnelle en algèbre, permettant de repérer la sensibilité des PLC2 à certains savoirs relatifs à l'enseignement de l'algèbre élémentaire et de mesurer des évolutions dans leurs gestes professionnels. Cet outil est structuré autour de trois dimensions, non indépendantes, que nous avons qualifiées d'épistémologique, de cognitive et de didactique suivant que nous privilégions une entrée par le savoir mathématique lui-même, par l'élève ou une vision plus globale du système didactique. Nous n'avons pas cherché à décrire de façon exhaustive, la compétence professionnelle en algèbre élémentaire, en admettant que cela soit même possible, mais il nous a semblé plus pertinent de choisir, pour chaque dimension, quelques points particulièrement significatifs³.

² Ce dispositif "vidéo" a concerné cinq des onze stagiaires suivis.

³ Dans la dimension épistémologique, trois points sont considérés : la nature du travail algébrique et les frontières de l'algèbre, le développement du symbolisme algébrique, les rapports entre les dimensions outil et objet de l'algèbre.

Dans la dimension cognitive, nous avons choisi les trois points suivants : le rapport entre l'arithmétique et l'algèbre, des savoirs sur l'apprentissage des élèves relativement au symbolisme algébrique et le rôle de l'algèbre dans la construction de la rationalité mathématique.

Dans la dimension didactique, nous avons sélectionné trois catégories de savoirs susceptibles d'outiller la professionnalité enseignante. Ils concernent les enjeux de l'enseignement de l'algèbre et leur progression au fil

Pour expliciter notre méthode d'analyse des différentes données recueillies lors du suivi individuel des stagiaires, nous présentons dans le paragraphe suivant les résultats obtenus lors de l'étude des pratiques de Benjamin, stagiaire qui ne rencontrait pas de difficultés particulières avec sa classe en responsabilité..

III. L'étude des pratiques de Benjamin

Pour étudier la constitution et l'évolution du rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin, nous avons analysé les praxéologies mathématiques et didactiques mises en place par ce stagiaire dans le cadre de son enseignement en algèbre. Afin de mesurer d'éventuelles évolutions dans l'élaboration de ses stratégies d'enseignement au cours de l'année, nous avons considéré successivement chacun des chapitres consacrés à ce domaine, chacune de ces études étant menée suivant un questionnement spécifique à chaque chapitre, élaboré à partir des savoirs explicités dans la grille d'analyse de la compétence professionnelle et à partir de considérations didactiques plus larges. Suite à ce premier travail, il nous a semblé nécessaire de remonter de la vision fine mais locale que les analyses faites nous fournissaient à un objet plus synthétique. Pour cela, nous avons identifié quelques lignes de force par rapport auxquelles l'ensemble des analyses locales et de leurs résultats pouvaient s'organiser. Ceci a permis de rendre visibles les différentes cohérences repérées dans les pratiques de Benjamin tout au long de l'année, les évolutions observées et les raisons de ces évolutions. Enfin, nous avons complété notre recherche par l'analyse d'une séance filmée dans la classe de Benjamin. Nous présenterons dans une première partie le questionnement relatif au deuxième chapitre d'algèbre de Benjamin, centré sur les équations⁴, ainsi que les résultats obtenus suite à notre analyse. Puis, nous proposerons une synthèse des principales caractéristiques du rapport professionnel à l'algèbre de ce stagiaire. Enfin, nous aborderons l'analyse de la séance filmée.

de l'enseignement, les ressources didactiques disponibles, l'utilisation de technologies informatiques pour l'enseignement de l'algèbre.

⁴ La progression annuelle de Benjamin pour l'enseignement de l'algèbre est la suivante : chapitre 1 "Calculs numériques" (période du 7/09/99 au 27/09/99), chapitre 2 "Equations" (du 28/09/99 au 16/10/99), chapitre 3 "Inéquations" (du 23/11/99 au 4/01/00), chapitre 4 "Repères" (du 8/01/00 au 8/02/00), chapitre 5 "Fonctions" (du 29/02/00 au 25/03/00). Le travail sur les systèmes d'équations linéaires et d'inéquations à deux inconnues a été mené, quant à lui, lors de cinq séances de modules réparties sur la période du 17/12/99 au 5/05/2000.

III.1 Analyse du chapitre "Equations"

Dans cette partie, nous analysons le deuxième chapitre de l'année relatif à l'algèbre. Ce chapitre, auquel Benjamin a consacré neuf séances, est centré autour de techniques de résolution de différents types d'équations (premier et second degré) et autour de l'utilisation des équations comme outils de résolution de problèmes. L'étude des programmes de seconde en vigueur au moment de notre recherche et celle de divers travaux didactiques relatifs à l'apprentissage et à l'enseignement des équations (Vergnaud, 1987 ; Bednarz, Kieran et Lee, 1996, par exemple) nous ont conduit à dégager des questions spécifiques pour l'analyse de ce chapitre :

- un des enjeux relatifs à l'enseignement des équations en classe de seconde, clairement explicité dans les programmes, est l'articulation des deux dimensions "outil" et "objet" de l'algèbre⁵. Ceci nous a amenée à nous poser les questions suivantes : les problèmes proposés aux élèves conduisent-ils à la mise en fonctionnement d'une dialectique outil / objet ? Comment est abordé le travail algébrique dans ces deux dimensions ?
- Le travail sur les équations, débuté au collège puis repris au lycée, conduit à un travail sur des objets "anciens", déjà rencontrés par les élèves, et sur des objets "nouveaux" (par exemple, des équations plus complexes que celles étudiées au collège). Nous nous sommes donc interrogée sur la dynamique ancien / nouveau mise en place dans ce chapitre, sur le travail relativement aux objets "anciens" (comment est gérée la transition avec le collège ? Les organisations mathématiques proposées permettent-elles de faire évoluer le rapport des élèves à ces objets ?), sur l'introduction d'objets "nouveaux".

Nous proposons maintenant les résultats obtenus lors de l'étude de ces questions.

III.1.1. La dialectique outil / objet

Au vu des questions relatives à la dialectique outil / objet précisées ci-dessus, la synthèse des différents éléments, suite à l'analyse des organisations mathématiques et didactiques proposées par Benjamin, nous a amenée à dégager différents points que nous présentons dans cette partie.

⁵ "La résolution de problèmes, issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme." (Programmes de seconde, 1990).

Dans un premier temps, il apparaît que les tâches dans la dimension "objet" sont beaucoup plus nombreuses que celles dans la dimension "outil". Dans les organisations mathématiques proposées par Benjamin, nous avons relevé six types de tâches différents dans la dimension "objet" répartis de la façon suivante :

- résoudre une équation du premier degré (seize spécimens),
- résoudre une équation du second degré (dix-neuf spécimens),
- résoudre une équation dont l'inconnue est au dénominateur (neuf spécimens),
- résoudre une équation de la forme : $|x - a| = d$ (deux exercices, huit spécimens),
- choisir une forme appropriée d'une expression $A(x)$ pour résoudre une équation où cette expression intervient (quatre spécimens),
- déterminer si un nombre est solution d'une équation (un spécimen).

En revanche, seuls neuf spécimens du type de tâches "résoudre un problème conduisant à une équation" sont proposés aux élèves. Cette caractéristique des pratiques de Benjamin correspond tout à fait à la vision de l'algèbre qu'il exprime lors du premier entretien :

AL : Lors de la première séance⁶, j'avais parlé des dimensions outil et objet de l'algèbre. Pour toi, ce que tu as fait à l'université, est-ce que c'était du côté outil ou du côté objet ?

P : Objet. Parce que finalement, j'en reviens à la diagonalisation des matrices, c'est bien et puis après... Quand on m'a expliqué ça et bien après c'est tout... Après, en analyse numérique, tu diagonalises et tu appliques ça pour des algorithmes, des machins comme ça, à la limite. [...] Mais sinon... Pour moi, on faisait de l'algèbre, on se posait pas de questions.

La vision de l'algèbre comme un objet à étudier semble donc être assez forte chez Benjamin en ce début d'année de stage. Toutefois, dès le premier entretien, il exprime une nécessité d'enseigner au lycée l'algèbre plus concrètement qu'à l'université, pour que les élèves puissent comprendre les notions étudiées. Assez vite donc, il exprime une certaine sensibilité à l'intérêt d'articuler les dimensions outil et objet de l'algèbre dans son enseignement pour aider ses élèves à lui donner du sens ; cette sensibilité apparaît dans ce chapitre avec une volonté évidente d'articuler les deux dimensions outil et objet. Cette volonté apparaît notamment lors du travail sur une technique de résolution d'équations du second degré qui ne sont pas de la forme $x^2=d$. En effet, après avoir exposé cette technique dans le cours, Benjamin propose

⁶ Nous faisons ici référence à la première séance de formation en didactique de l'algèbre que nous avons animée à l'IUFM de Reims. Précisons que la formation disciplinaire dispensée aux PLC2 ayant participé à notre recherche était constituée de dix-sept séances de six heures. Deux séances de trois heures étaient plus spécifiquement consacrées à l'algèbre. Pendant la première, les formateurs avaient privilégié une entrée par le savoir mathématique avec notamment une réflexion sur les fonctionnalités de l'algèbre et des apports sur le développement historique de ce domaine. La deuxième séance avait été consacrée, quant à elle, à l'étude des

immédiatement deux exercices⁷ d'application en classe. Le premier est uniquement centré sur la mise en œuvre de la technique exposée dans le cours :

Ex n°8 p 37 : Résoudre :

a / $(x-4)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

b / $(x-1)^2 - 3 = 0$

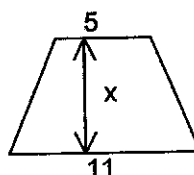
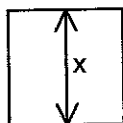
c / $(x-1)^2 - 3 = 2$

d / $-2 + (x-2)^2 = 0$

En revanche, le second présente ce type d'équation comme outil de résolution de problèmes :

Ex n°14 p 38 : Aires égales

Comment choisir x pour que le carré et le trapèze aient des aires égales ?



Notre étude des organisations mathématiques et didactiques mises en place sur ce chapitre a aussi mis en évidence la rigueur et la cohérence de Benjamin dans le choix des exercices proposés. Par exemple, lors du travail de la technique évoquée précédemment, nous le voyons clairement prendre en compte les éventuelles difficultés de ses élèves et certaines variables didactiques pour proposer des exercices d'application se complexifiant progressivement. Ainsi choisit-il dans un premier temps l'exercice 8 présenté ci-dessus car la forme de cet exercice lui semble favoriser un travail progressif de la technique, c'est ce qu'il exprime lors du premier entretien :

B : J'avais donné celui-là, d'abord parce qu'il était détaillé : il y avait $(\sqrt{3})^2$, donc ils voyaient. Après tu n'avais plus que 3. Bon, ils l'avaient fait avant, ils avaient compris. Après, tu peux passer aux autres. J'ai trouvé que cela était pas mal fait.

Puis, il prolonge le travail de la technique en proposant des exercices dans lesquels les factorisations sont plus complexes :

Ex n°7 p 37 : Résoudre :

a / $(2x+3)^2 = 16x^2$

b / $(x-1)^2 - 4 = 9x^2 - 4$

c / $9(x-3)^2 = (x+3)^2$

d / $7 - \frac{(x-2)^2}{5} = 2$

Ex n°10 p 37 : Résoudre :

a / $x + (x-2)^2 = 2$

b / $(x-1)^2 - 3 = -3x$

c / $(x-1)^2 - 4 = 2x + 2$

d / $(x-1)^2 = -5x + 5$

enjeux de l'enseignement de l'algèbre dans le secondaire avec l'analyse d'un ensemble d'activités de collège et de lycée.

Dès le premier chapitre consacré à l'algèbre, le choix des exercices montre, en fait, un réel souci d'aider les élèves à s'approprier les techniques étudiées. Ce travail des techniques est le plus souvent commencé en classe. Ce dispositif est un moyen pour Benjamin d'être présent pour aider les élèves dans cette phase d'appropriation. Dans les cas où les premiers exercices d'application sont donnés à préparer à la maison, il choisit des exercices simples qui ne devraient pas susciter trop de difficultés chez les élèves.

L'attention qu'il porte à ses élèves et le souci qu'il a de les aider à s'approprier les notions et les techniques étudiées se traduisent donc, en particulier, par des moments de travail technique, pendant lesquels Benjamin a la volonté de laisser une réelle place à ses élèves : il leur laisse du temps pour chercher, il les envoie au tableau, il prend en compte leurs réponses et leurs difficultés et il leur laisse quelques responsabilités relativement à l'amélioration de techniques.

En revanche, lors d'activités qui lui semblent plus difficiles, Benjamin choisit une gestion qui laisse peu de responsabilités aux élèves : soit il prend lui-même en charge la résolution du problème en veillant à les faire participer, soit il envoie un élève au tableau et le guide par un ensemble de questions. Par exemple, lors du travail sur la mise en équation, Benjamin a proposé à sa classe des problèmes de difficultés diverses :

Ex n°3 p 37 : Partage

Martin, qui a autant de frères que de sœurs, partage équitablement une boîte de dragées avec eux. S'il prend sa part, chaque frère et chaque sœur recevra 12 dragées. Mais il décide de laisser sa part aux autres qui reçoivent ainsi 14 dragées chacun.

a – Combien Martin a-t-il de sœurs ?

b – Combien y avait-il de dragées dans la boîte ?

Ex n° 4 p 37 : Le carré devenu rectangle

Un terrain initialement carré a vu l'une de ses dimensions augmentée de 4 m et l'autre diminuée de 2m.

Résultat : son aire a augmenté de 78 m².

Quel était le côté de ce carré ?

L'exercice 4 est a priori moins difficile que l'exercice 3 qui nécessite la traduction d'un texte relativement complexe. Notons que Benjamin est tout à fait conscient de cette différence du niveau de difficulté puisqu'il nous explique lors du premier entretien que le premier problème est "plus délicat". Cet entretien nous renseigne aussi sur la mise en place dans la classe de la séance de module pendant laquelle ces deux problèmes ont été traités. Alors qu'il fait le choix de laisser travailler ses élèves en autonomie sur l'exercice 4, il choisit pour la résolution de

⁷ Ces deux exercices sont extraits du manuel de la classe de Benjamin : BONNEFOND G, DAVIAUD D., REVRANCHE B. (1994). Mathématiques seconde, Collection Pythagore. Editions Hatier.

l'exercice 3 d'envoyer un élève au tableau et de faire participer le reste de la classe en posant un ensemble de questions :

B : Je leur ai demandé combien il y a de frères et sœurs en tout. J'avais posé x le nombre de sœurs et là tu as de tout : tu as x ou $2x$ ou... Je leur ai dit : imaginez combien les parents ont d'enfants. Ils finissent par te dire que c'est $2x+1$. Bon, après la mise en équation pose problème. Là j'ai pris un problème concret : imaginez, on a 3 enfants, on leur donne 10 dragées chacun, combien il y a de dragées ? 30. Bon là il y a $2x+1$ enfants, chacun en a douze cela fait combien ? [...] Je leur ai fait écrire les deux expressions et j'avais fait écrire : le nombre total de dragées est... Et chacune des deux expressions. Après il y en a qui disent que c'est égal. La résolution de l'équation ne pose pas de problème. [...] J'ai insisté en leur disant de bien faire étape par étape, en regardant chaque donnée l'une après l'autre.

L'analyse de cette gestion montre que, même si Benjamin a le souci de laisser une place aux élèves en envoyant une personne au tableau et en faisant participer le reste de la classe, il leur facilite la tâche et leur laisse peu de responsabilités lors de la résolution de problèmes difficiles.

III.1.2 La dynamique ancien / nouveau

Dans ce chapitre consacré aux équations, le travail mathématique est organisé autour de types de tâches que les élèves ont déjà rencontrés au collège ("résoudre une équation du premier degré" ou "résoudre un problème à l'aide d'une équation", par exemple), d'autres qu'ils ont peut-être rencontrés mais qui sont encore certainement problématiques (tels que "résoudre une équation dont l'inconnue est au dénominateur") ou de types de tâches complètement nouveaux (comme "résoudre une équation de la forme : $|x - a| = d$ ").

L'étude des types de tâches déjà rencontrés au collège a d'abord mis en évidence que le travail sur les objets anciens se caractérise par la volonté de rappeler systématiquement des définitions et des techniques déjà étudiées au collège sans mettre en place des dispositifs qui auraient pu permettre de prendre des informations sur les connaissances anciennes des élèves. Ainsi, le cours débute par un paragraphe intitulé "Rappels sur les équations" dans lequel Benjamin redéfinit certaines notions (définition de la tâche "résoudre une équation", définition d'une équation du premier degré) et reprend précisément les règles de résolution des équations du premier degré avec la volonté de restituer le sens des différents gestes à effectuer. Cette démarche qui consiste à revenir sur le sens des gestes lors de la manipulation d'écritures algébriques n'est pas systématique. En effet, pour la résolution des équations de la forme " $x^2 = d$ ", il se contente de redonner la forme générale des solutions sans aucun élément technologique pour justifier ce résultat.

En ce qui concerne les types de tâches plus problématiques ou nouveaux, il n'y a pas de moments d'élaboration de techniques avec les élèves ; il expose lui-même la technique, souvent à l'aide de "fiches-méthodes", comme dans le cas de la résolution d'équations avec une inconnue au dénominateur :

Résolution des équations dont l'inconnue est au dénominateur

Exemple : On veut résoudre l'équation $\frac{x+3}{x-5} = 4$

Il faut avant toute chose déterminer le domaine de validité de cette équation. Ce domaine est noté Dv. Dans cet exemple, x ne peut prendre la valeur ... , car cette valeur annule le dénominateur (on n'a pas le droit de diviser par zéro).

On écrit alors : Dv = ... On dit que est une valeur interdite.

On peut alors résoudre l'équation. Pour cela, il existe 2 méthodes :

1ère méthode : "tout mettre" dans le premier membre, réduire au même dénominateur et appliquer la propriété :

"Si un quotient est nul, alors le numérateur est nul."

Ainsi, $\frac{x+3}{x-5} = 4$ est équivalent à :

2ème méthode : faire un "produit en croix"

Ainsi, $\frac{x+3}{x-5} = 4$ est équivalent à :

Ne pas oublier de vérifier que la solution trouvée n'est pas une valeur interdite.

L'ensemble solution de cette équation est : S = ...

Toutefois, en choisissant de proposer une fiche avec des trous, Benjamin a tout de même le souci de laisser une certaine place aux élèves dans ce moment d'explicitation de techniques.

D'une manière générale, sur ce second chapitre, Benjamin a la volonté d'amener les élèves à disposer de méthodes, voire à acquérir des mécanismes comme il nous l'explique à propos de la résolution des équations du second degré :

B : Mon objectif est que, dès qu'ils voient une équation du second degré, ils aient le réflexe de factoriser. Ce qu'ils n'ont pas du tout : il y en a encore qui développent. Dans le cours, je leur ai détaillé la méthode en leur disant qu'il fallait se ramener à une équation du type un membre égal à 0, ensuite on factorise et on applique la propriété, etc. Mon principal objectif c'est ça, c'est que cela devienne un mécanisme.

Il semble que cet aspect des pratiques de Benjamin découle de ses caractéristiques personnelles. En effet, l'étude de son rapport aux mathématiques a montré son goût pour les démonstrations structurées et son besoin de méthodes pour réussir certains examens à l'université.

Néanmoins, malgré cette vision de l'enseignement de l'algèbre, nous le voyons aussi proposer des exercices pouvant conduire les élèves à une évolution du rapport à la notion de solution d'une équation tels que le suivant :

Ex n° 38 p 40 : Solution ou pas solution ?

On pose $f(x) = 2(3x - 1)(x - 3) - (x - 3)^2$

a / Sans résoudre l'équation $f(x) = 0$, déterminer si le nombre $-0,2$ est solution de cette équation.

b / Même question avec le nombre 4 .

c / Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Il choisit également un exercice menant à une réflexion sur le choix de formes adéquates d'expressions pour résoudre une équation du second degré :

Activité 2 p 29 : Des équations impressionnantes

Devoir pour lundi prochain

Soit $A(x) = 9 - 49x^2 - (4x + 1)(12 - 28x) - (3 - 7x)^2$

Résoudre les quatre équations suivantes :

a / $A(x) = 0$ b / $A(x) + 12 = 0$

c / $A(x) = 9 - 49x^2$ d / $A(x) = 13x^2 + 20x - 13$

A . Mises en formes

Un élève dit : " $A(x)$ nous est donné sous une forme tarabiscotée. Certaines équations seraient sans doute plus simples avec la forme développée ou avec la forme factorisée. "

Un autre répond : " Tu as raison, cherchons ces deux formes. "

1 . Développer et réduire $A(x)$.

2 . Factoriser $A(x)$.

On remarquera d'abord que $9 - 49x^2 = (...) \times (...)$ et $12 - 28x = 4 (...)$.

B . Les bonnes résolutions

En choisissant à chaque fois la forme la plus appropriée de $A(x)$, résoudre les quatre équations.

Lors de la deuxième journée de formation didactique consacrée à l'algèbre, nous avons proposé aux stagiaires d'analyser un ensemble d'exercices susceptibles d'être proposés dans une séance de module en début de seconde. Certains d'entre eux étaient assez proches de l'exercice 38 et de l'activité 2 choisis par Benjamin. En donnant ces problèmes, il veut prendre des informations sur les connaissances de ses élèves quant à la notion de solution à une équation et il cherche à tester ou confirmer les informations reçues à l'IUFM.

En conclusion, ce deuxième chapitre de Benjamin est à la fois consacré à des types de tâches relatifs à la dimension objet des équations et à d'autres relatifs à leur dimension outil. L'étude du travail mené sur la résolution des équations de degré strictement supérieur à 1 a, par ailleurs, montré le souci d'articuler ces deux dimensions.

L'étude du travail relatif à la résolution des équations fait apparaître de réels points forts :

- la volonté de mener un travail des techniques cohérent et structuré et nous avons pu pointer la prise en compte de différentes variables didactiques pour proposer des types de tâches se complexifiant progressivement,
- le désir de revenir sur le sens de certaines manipulations (par exemple pour les équations du premier degré) ou sur celui de notions (solution d'une équation),
- le souci d'amener les élèves à réfléchir sur les formes adéquates d'expressions algébriques pour résoudre des équations,
- l'attention portée aux élèves pour les aider à s'approprier les techniques

Cette analyse met aussi en évidence un point sur lequel la réflexion de Benjamin mérite d'être approfondie : la place à laisser aux élèves. En effet, il ne laisse pas de responsabilité à ces élèves pour l'élaboration de techniques et garde à sa charge leur explicitation. Cette caractéristique apparaît également dans le travail sur la mise en équation pour lequel il choisit une gestion qui facilite fortement la tâche des élèves et qui limite alors leur responsabilité.

Enfin, nous souhaitons pointer l'attention particulière portée par Benjamin aux discussions avec son conseiller pédagogique et aux informations recueillies lors des journées de formation en didactique à l'IUFM, qui est apparue à plusieurs reprises lorsque ce stagiaire nous expliquait les raisons de certains choix didactiques.

Les différentes analyses menées sur les pratiques de Benjamin font apparaître différentes caractéristiques du rapport professionnel à l'algèbre de ce stagiaire. Nous les synthétisons dans la partie suivante.

III.2 Les caractéristiques du rapport professionnel à l'algèbre de Benjamin:

Benjamin est un stagiaire qui enseigne dans de bonnes conditions et qui a su mettre en place, dès le début de l'année, une atmosphère de travail qui lui convient et il a développé, dès les premiers jours, des stratégies qui font que sa classe tourne. L'étude de ses pratiques a montré de vrais points forts. Ainsi, il s'est, immédiatement, placé dans une position d'enseignant. Ceci est particulièrement révélé par sa vision de l'algèbre qui passe très rapidement d'une vision centrée sur l'algèbre étudiée à l'université à une vision dans laquelle il intègre les objets de l'algèbre élémentaire étudiés dans le secondaire. Ce positionnement dans une posture d'enseignant se repère aussi à travers une cohérence dans les stratégies didactiques adoptées et dans les gestes professionnels qui émerge dès le début de l'année. Il adopte aussi très vite une

posture réflexive et se pose diverses questions relativement à ses propres responsabilités, le rôle d'un enseignant de mathématique, la construction d'un cours, les difficultés que rencontrent les élèves ou le choix de stratégies adaptées pour les prendre en charge. Par ailleurs, il est très ouvert et porte une attention particulière à l'expertise d'autres enseignants, ce qui se traduit par une prise en compte effective des divers conseils ou informations que peuvent lui apporter son conseiller pédagogique ou les formateurs de l'IUFM et sa volonté de vérifier ces informations.

Ce stagiaire porte une attention particulière à ses élèves. En effet, même s'il a l'impression en début d'année que l'algèbre paraît plus simple aux élèves que d'autres domaines des mathématiques⁸, il est conscient qu'ils peuvent rencontrer des difficultés qu'il doit prendre en charge. Il se montre alors, dès le début de son stage, très sensible aux difficultés de ses élèves. Lors du premier entretien, il en décrit certaines déjà très précisément et réinvestit certains aspects de la formation didactique en algèbre pour prévoir ou analyser des problèmes rencontrés par les élèves. Enfin, une cohérence apparaît au niveau des stratégies de prise en charge de ces difficultés. En effet, dès les premières heures de cours, il met en place deux grandes stratégies (la réexplication en cas de problèmes et le passage au numérique) qui resteront privilégiées jusqu'à la fin de son stage.

En début d'année, Benjamin est également conscient qu'il doit aider les élèves à s'approprier les notions étudiées. Ceci se traduit, chez lui, par le souci de les conduire à disposer de méthodes, à acquérir des réflexes et, dès le premier chapitre, il met en place une stratégie qui consiste à écrire des "fiches-méthodes" sur lesquelles sont explicitées des techniques que les élèves vont ensuite appliquer sur différents spécimens de tâches. Le travail technique qui suit la distribution de ces fiches traduit bien aussi l'attention qu'il porte aux élèves : les exercices sont choisis de manière cohérente avec une prise en compte des difficultés des élèves, de diverses variables didactiques et ils se complexifient progressivement. Par ailleurs, ce travail technique est le plus souvent débuté en classe, ce qui est pour Benjamin un moyen d'être présent pour aider les élèves à s'approprier les notions en jeu, les règles ou les techniques à s'approprier. Au cours de ces moments, il a la volonté de laisser une réelle place à ses élèves : il leur laisse du temps pour chercher, il les envoie au tableau, il prend en compte leurs réponses et leurs difficultés et il leur laisse quelques responsabilités en ce qui concerne l'amélioration de techniques.

⁸ Pour Benjamin, cette simplicité réside dans le fait que l'algèbre est dans la continuité du numérique sur lequel les élèves travaillent depuis longtemps et qu'ils maîtrisent. Cette vision de l'algèbre peut aussi s'expliquer par son propre vécu d'élève et par les difficultés qu'il nous explique avoir connues lui-même en géométrie.

Des points faibles apparaissent aussi dans les pratiques de ce stagiaire, notamment en ce qui concerne la place laissée aux élèves lors de l'élaboration de techniques ou lors du traitement de tâches plus complexes. En effet, il ne leur laisse pas de responsabilités lors de l'élaboration des "fiches-méthodes" : l'explicitation des techniques (anciennes ou nouvelles) reste complètement à sa charge et il ne ressent pas le besoin d'amener les élèves à travailler sur l'élaboration de méthodes. Par ailleurs, lors d'activités qui lui semblent plus difficiles, Benjamin choisit une gestion qui laisse également peu de responsabilité aux élèves : soit il prend lui-même en charge la résolution du problème en veillant à les faire participer, soit il envoie une personne au tableau et la guide par un ensemble de questions.

Un autre point faible, en début d'année, est relatif à un manque d'éléments pour analyser les problèmes rencontrés par ses élèves. Benjamin semble ainsi parfois désemparé devant certaines difficultés, qui résistent à ses stratégies de prise en charge, et il n'a visiblement pas de moyens pour les interpréter ou les comprendre. Ceci est particulièrement le cas lors d'un incident survenu pendant l'introduction de la valeur absolue dans son premier chapitre consacré à l'algèbre, en particulier après l'énoncé de la propriété "*Lorsque x est positif : $|x| = x$, lorsque x est négatif : $|x| = -x$* " :

B : Et quand je suis passé dans les rangs, c'est là qu'un sur deux m'interpellait : vous avez dit que la valeur absolue c'est positif, là il y a un signe moins. Bon ça je m'y attendais, mais cela a été au-delà de mes espérances. Alors à chaque fois je leur réexpliquais. Je reprenais l'exemple numérique et cela allait. Mais là, x négatif, cela ne passe plus. Alors là, moi après je ne sais plus quoi dire. Alors j'ai laissé couler. Bon quand ils me demandaient, je réexpliquais. Bon au bout d'un moment ils disent qu'ils ont compris soit par politesse, soit parce qu'ils en ont ras le bol.

En fait, ces points faibles ne viennent pas bouleverser le bon déroulement de la classe et peuvent accentuer, bien au contraire, le sentiment de confort des élèves notamment lors des aides apportées dans le traitement de tâches plus complexes. Ce stagiaire a donc trouvé assez rapidement un équilibre professionnel qui peut conduire à faire l'hypothèse qu'il n'y a pas de grands bouleversements à attendre dans ses pratiques. Mais, de par son attitude réflexive, son ouverture d'esprit envers les pratiques de son conseiller pédagogique et envers la formation, l'attention particulière qu'il porte à sa classe favorisée par des stratégies de travail qui lui permettent de voir des choses, Benjamin se questionne régulièrement sur ses propres pratiques et, en particulier, sur les problèmes que ses élèves rencontrent. Ce questionnement va notamment le conduire à certaines évolutions. La plus flagrante est relative à l'interprétation des difficultés repérées dans sa classe. En effet, il va peu à peu construire un système explicatif relativement expert. L'exemple de la compréhension des difficultés des

élèves à utiliser les lettres en algèbre nous semble tout à fait révélateur de cette évolution. Au début de l'année, Benjamin tient un discours relativement vague sur le blocage des élèves face à l'utilisation des lettres qu'il interprète comme un manque d'habitude. Mais la résistance de certains problèmes à ses stratégies de prise en charge, notamment lors du travail sur la valeur absolue, le pousse à se questionner davantage. Pendant le travail sur les équations de droites, il va repérer que ses élèves rencontrent des difficultés liées aux changements de statut de la lettre suivant les différentes tâches algébriques. Il intègre donc cette dimension dans son système explicatif. Il la prendra également en compte pour l'introduction des fonctions, où il choisira une activité qui lui semble favoriser l'appréhension de la notion de variable.

Une deuxième évolution plus subtile marque l'un des points forts des pratiques de Benjamin : l'organisation du travail technique. Sa stratégie de choix des exercices n'a jamais changé, mais la gestion de ce travail a évolué. En effet, alors que pour le premier chapitre le travail technique associé à un type de tâches spécifique est peu étalé dans le temps, dès le deuxième chapitre, Benjamin allonge clairement le temps de travail consacré aux types de tâches étudiés et l'étale davantage.

En revanche, sa vision de l'apprentissage de méthodes n'évoluera quasiment pas au cours des deux premiers trimestres et il faudra attendre le travail mené dans le cadre du dispositif vidéo pour voir émerger un questionnement chez Benjamin, comme nous allons le préciser dans la partie suivante.

III.3 L'étude de la séance filmée

Cette séance se déroule en mars 2000 au cours du chapitre sur les fonctions, dans lequel Benjamin a déjà introduit les définitions de la représentation graphique d'une fonction, des notions de croissance, de décroissance, de parité et d'imparité. Il y a également proposé un ensemble d'exercices conduisant sa classe à travailler différents types de tâches relatifs à ces notions. Pour la séance filmée, l'objectif de Benjamin est double : il veut à la fois amener les élèves à étudier la fonction "carré" et profiter de cette étude pour institutionnaliser un plan d'étude d'une fonction que les élèves pourront réinvestir lors de l'étude des autres fonctions usuelles du programme. Conformément à sa vision de l'introduction de méthodes que nous avons explicitées précédemment, Benjamin choisit d'écrire une "fiche-méthode" à compléter :

<i>Plan d'étude d'une fonction</i>	
1 –	<i>Recherche de l'ensemble de définition</i>
2 –	<i>Etude de la parité éventuelle</i> <i>Méthode :</i>
3 –	<i>Etude des variations</i> <i>Méthode :</i> <i>Remarques :</i>
4 –	<i>Tableau de valeurs</i>
5 –	<i>Tracé de la courbe</i>

Il envisage alors de commencer par faire remplir cette fiche (il pense demander aux élèves de rappeler les différentes techniques à utiliser) , puis d'amener les élèves à étudier les points du plan pour la fonction "carré" (pour chacun de ce points, il prévoit de laisser un moment pour que les élèves mettent en œuvre les techniques rappelées). Après l'étude de chaque point, un bilan dans le cours est prévu pour institutionnaliser au fur et à mesure les propriétés de cette fonction.

Dans cette partie nous étudierons le scénario prévu, puis nous proposerons des éléments d'analyse du déroulement effectif. Nous exposerons ensuite l'analyse de Benjamin sur ses propres pratiques.

III.3.1. Analyse du scénario prévu

A travers le travail de préparation de cette séance mené par Benjamin, nous retrouvons des caractéristiques qui sont apparues lors de l'analyse de ses pratiques : un scénario qui met en évidence sa volonté de faire participer ses élèves à l'étude de la fonction carré, le souci d'aider les élèves à disposer de méthodes à travers l'établissement de la fiche relative au plan d'étude d'une fonction.

Par ailleurs, la gestion prévue pour cette séance ne laisse pas réellement de grandes responsabilités à sa classe. En effet, en distribuant le plan d'étude d'une fonction, Benjamin prend de nouveau à sa charge l'élaboration d'une technique. Par la suite, la gestion choisie pour l'étude de chacun des points figurant sur ce plan limite également les responsabilités puisque, pour chacun d'entre eux, il compte amener les élèves à se remémorer les techniques à appliquer avant de les mettre en œuvre pour la fonction carré. A travers ce type de pratiques, la tâche des élèves nous paraît donc très encadrée et simplifiée.

Enfin, sa sensibilité aux difficultés des élèves se retrouve lors du premier entretien pendant lequel Benjamin s'est longuement attardé sur une analyse a priori des problèmes susceptibles d'être rencontrés au cours de cette activité et sur les prises en charge envisageables. Toutefois, il apparaît qu'il lui manque encore des éléments pour prévoir et analyser certaines difficultés notamment lors de l'étude de la parité de la fonction. En effet, il ne perçoit pas que, pour ce

type de tâches nécessitant la mise en jeu de l'algèbre comme outil de preuve, l'on peut s'attendre à des difficultés à utiliser les lettres et à des études menées uniquement à partir d'exemples numériques. En outre, l'étude de la parité met en jeu la substitution de $-x$ dans l'expression " $f(x) = x^2$ ", ce qui peut aussi poser problème aux élèves, mais chez Benjamin ce geste est complètement naturalisé et il ne prévoit pas que ce type de tâches algébrique peut être problématique chez un élève de seconde, comme le montre la citation suivante :

B : Et pour la parité, on calcule $f(-x)$, c'est du calcul algébrique assez simple en général.

Il est clair que si Benjamin guide trop fortement sa classe lors de l'étude de la parité de la fonction "carré", il risque de ne pas prendre conscience de ces problèmes.

Au cours de l'entretien de préparation, nous avons donc fait le choix de perturber un peu son projet afin qu'il donne plus de responsabilités à ses élèves. Dans cette rencontre, nous sommes d'abord revenue sur son choix de faire rappeler systématiquement les techniques pour l'étude de différentes propriétés d'une fonction avant de les mettre en œuvre pour la fonction carré :

AL : D'accord, tu veux déjà leur faire dire la méthode et l'appliquer après ?

B : Oui... Tu pensais que j'allais leur demander d'étudier la parité et, après quand tout le monde aura un peu cherché, on dégage la méthode ?

AL : Peut-être...

B : C'est vrai que je ne l'avais pas vu comme ça, ouais.

AL : En fait, moi je pense qu'il faut les laisser un peu chercher dans chacune des questions.

B : Oui, si on commence déjà par leur donner la méthode, le travail est mâché. [...] Donc oui, c'est peut-être... Pour les faire réinvestir ce qu'on aura vu [...], les laisser partir d'eux-mêmes et dégager la méthode après. Essayer de la leur faire dire, la méthode.

Suite à notre première question, Benjamin s'est donc tout de suite interrogé sur la gestion qu'il avait initialement envisagée et ce questionnement l'a conduit à pointer que ce choix va conduire à simplifier la tâche des élèves. Il envisage alors rapidement une autre gestion qui, cette fois, laisserait plus de responsabilité.

Puis, à la fin de l'entretien, nous sommes revenue sur son choix de distribuer a priori le plan d'étude d'une fonction :

AL : Mais, par rapport à ce que tu as prévu, je les laisserais parler sur ce qu'ils pensent qu'il faut étudier sur une fonction.

B : Oui c'est pas mal. C'est vrai que c'est directif ça.

AL : Toi, tu sais pourquoi tu utilises ce plan. Eux ils ne le savent pas. [...] Cela serait bien de justifier ce que tu leur fais faire.

A travers cette intervention, notre but était de l'amener à modifier le début de son scénario afin de laisser un peu de responsabilités aux élèves lors de l'élaboration de la technique

d'étude d'une fonction. Benjamin semble ici assez réceptif à cette proposition. Mais, nous n'avons pas voulu réécrire avec lui un nouveau scénario, notre but étant de repérer comment il allait réagir à ces deux perturbations.

III.3.2. Analyse de la séance

Visiblement sensible à la discussion que nous avons eue lors de l'entretien de préparation, il a modifié son scénario initial et commence cette séance par un premier épisode de huit minutes consacré à l'élaboration collective, puis à l'explicitation d'un plan d'étude d'une fonction. A la fin de cette première phase, Benjamin institutionnalise ce plan en distribuant la fiche présentée précédemment. Puis les différents points sont étudiés les uns après les autres. Pour chacun d'entre eux, il laisse un temps de recherche plus ou moins long, pendant lequel il circule, s'adresse aux élèves et prend en charge leurs problèmes éventuels. Une correction est ensuite menée par Benjamin lui-même ou par un élève envoyé au tableau et la propriété cherchée est institutionnalisée.

L'analyse de cette séance confirme certaines caractéristiques relevées lors de l'étude des pratiques de ce stagiaire à travers les chapitres consacrés à l'algèbre : l'attention particulière qu'il porte à ses élèves, la volonté de les faire participer, la prise en charge de leurs difficultés, le souci de les amener à donner du sens à certaines notions. L'étude de certains épisodes de cette séance met en évidence les gestes qu'il adopte en classe pour mener à bien ce projet :

- Benjamin choisit une gestion des interventions des élèves qui leur laisse une certaine place,
- il n'ignore pas les idées qui n'entrent pas dans son projet,
- il porte une attention particulière à amener les élèves à comprendre leurs erreurs,
- il laisse des responsabilités aux élèves dans l'application de techniques.

L'analyse de ses pratiques avait également fait apparaître des points faibles concernant, en particulier, la place laissée aux élèves lors de l'élaboration ou de l'explicitation de techniques. Cette caractéristique se retrouve au cours de cette séance. En effet, même s'il a été sensible au fait de laisser une place aux élèves lors de l'élaboration du plan d'étude d'une fonction, il garde sous sa responsabilité l'explicitation de celui-ci. Suite à une discussion entre lui et sa classe, les différents points à étudier sont apparus dans l'ordre suivant : représentation graphique de la fonction, tableau de valeurs, tableau de variations, étude de la parité, détermination de l'ensemble de définition (c'est-à-dire dans l'ordre inverse du plan prévu par Benjamin). Il propose alors sans éléments de justification l'ordre suivant :

B : Et bien faire l'étude d'une fonction, c'est chercher toutes ces choses là mais exactement dans le sens inverse où c'est marqué. On commence par chercher l'ensemble de définition pour savoir où on travaille, ensuite on va chercher la parité, le tableau de variation, le tableau de valeurs et on termine par la courbe.

III.3.3. L'analyse de Benjamin

Cette analyse s'est déroulée en deux temps : suite à la séance, nous avons pris un moment avec Benjamin pour recueillir ses impressions à chaud sur ce qui venait de se passer et ses premières analyses. Puis, nous nous sommes rencontrés environ trois mois après le tournage pour visionner ensemble le film. Le but de ce troisième entretien était d'accéder à l'analyse que faisait Benjamin avec une certaine prise de recul.

Au cours de ces deux entretiens nous avons vu naître deux questionnements nouveaux chez lui : le premier est relatif à l'élaboration des techniques et aux responsabilités à laisser aux élèves lors de ce moment didactique, le second concerne l'apprentissage de la notion de contre-exemple.

Le premier apparaît suite à une réflexion menée sur le scénario choisi. Lors de l'analyse à chaud, Benjamin regrette d'avoir explicité trop vite le plan figurant sur la fiche distribuée aux élèves. Après le visionnement de la bande vidéo, il confirmera cette impression de vitesse et expliquera que, dans la mesure où il avait déjà rajouté cet épisode, il avait peur de ne pas avoir assez de temps pour terminer l'étude de la fonction. Au cours de l'entretien qui suit immédiatement la séance, il regrette aussi de ne pas avoir pris de temps pour justifier l'ordre des points à aborder lors de l'étude d'une fonction figurant sur cette fiche. Mais, il constate alors qu'à ce moment de la séance, la justification de certains points était problématique :

B : Bon c'est pareil, ce que j'aurais bien aimé, c'est montrer le lien plus précisément entre les deux⁹ : d'abord l'ensemble de définition pour savoir où est-ce qu'on calcule... Bon je ne pouvais pas donner la justification de la parité à ce moment-là, parce que je n'avais pas encore dit que cela nous permettait de travailler sur une moitié d'intervalle, c'est dommage aussi.

Ce questionnement le conduit alors aussitôt à envisager un nouveau scénario qui laisserait plus de place aux élèves :

B : J'ai pensé que cela serait pas mal de consacrer une séance complète où ils font l'étude en vrac. [...] Suivre en fait l'idée des élèves. Tu vois, faire un peu ce qu'on avait dit au début : on va commencer par quoi, etc. Et puis à la fin construire la fiche ensemble.

Benjamin considère qu'un tel scénario lui éviterait d'inciter les élèves à étudier certains points et que l'ordre s'établirait alors naturellement à la fin de l'étude de la fonction carré, mais il émet une réserve quant à la mise en place d'un tel scénario. En effet, contrairement à ce qu'il

fait habituellement, ce scénario conduit à une séparation entre le moment d'élaboration d'une technique et l'institutionnalisation et il pense que cela occasionnerait une certaine perte de temps :

B : Mais bon ça fait perdre deux heures. Parce qu'après il faut quand même qu'ils aient l'étude de x^2 propre. Il faut la remettre en ordre après.

Au cours de l'entretien qui a lieu après le visionnement de la bande vidéo, il nous fait part d'un incident critique qui s'est déroulé quelque temps après la séance filmée et pendant lequel il prend conscience que certains élèves n'ont pas saisi l'intérêt d'étudier les différents points dans l'ordre proposé sur la fiche :

B : Bien que j'aie essayé de leur faire construire eux-mêmes le plan d'étude d'une fonction, quinze jours après quand je leur ai demandé : maintenant qu'est-ce qu'on fait ? On étudie la parité. Pourquoi ? Parce que c'est marqué sur la fiche méthode. Ça c'est décevant. Pour eux les cinq ou six minutes n'ont servi à rien. Soit il fallait pas les faire du tout, mais je ne pense pas, soit il fallait y passer plus de temps. [...] En tout cas il ne fallait surtout pas passer très vite comme je l'ai fait à la fin.

Ce constat le conforte donc dans l'idée qu'il est passé trop rapidement à l'explicitation du plan lors de la séance filmée et que la justification de l'ordre méritait qu'il s'y attarde. Il confirme alors la possibilité de fabriquer un scénario qui laisserait plus de responsabilité aux élèves. Néanmoins, en cette fin d'année de stage, il semble avoir encore des réticences à mettre en place une telle situation :

B : Je ne sais pas si je me sentirais d'attaque pour les laisser partir comme je te disais. J'ai peur c'est que, pour eux, une fois que c'est écrit... On l'a fait une fois en module, donc on peut se permettre de le refaire plus tard. C'est une sorte de module brouillon et j'ai peur que pour eux ce ne soit pas clair.

Il est clair qu'en cette fin de stage, même s'il semble avoir perçu un certain intérêt à laisser plus de responsabilité aux élèves, Benjamin éprouve encore des appréhensions face à ce type de situation. Nous repérons deux raisons qui peuvent expliquer ce sentiment. La première concerne le fait que, dans ce type de situation, les élèves sont moins cadrés et l'enseignant maîtrise moins ce qui peut se passer. Il s'avère que Benjamin avait déjà précisé qu'il n'aimait pas improviser lors des premiers entretiens de suivi, il ne semble donc pas encore prêt à "lâcher" sa classe en cette fin de stage. La seconde réside dans le fait que la mise en place de ce type de situation entraînerait un bouleversement du schéma didactique qu'il a mis en place dès le début d'année et qui lui a permis de faire tourner sa classe.

L'analyse de la séance filmée est également l'occasion de réfléchir sur la place à donner aux élèves à travers un deuxième axe, celui de la gestion des interventions. En effet, après avoir

⁹ Il fait référence ici à ce qui est ressorti de la discussion avec les élèves lors du premier épisode de la séance et le plan figurant sur la fiche distribuée.

regardé le film, Benjamin est sensibilisé par le fait que ses interventions sont parfois très directives et que cela peut être problématique, comme il le constate lors de son analyse d'un épisode pendant lequel est déterminé l'ensemble de définition de la fonction carré :

B : Là quand ils disent l'ensemble de définition c'est $[0 ; +\infty[$, je dis non et je repose la question. Alors c'est peut-être dommage d'être trop directif. Non c'est pas ça, c'est autre chose. Cela les incite à dire n'importe quoi jusqu'à ce qu'ils donnent la bonne réponse. Mais d'un autre côté, si je leur dis : calculez $(-2)^2$, est-ce que vous pouvez le faire ? Et ben, là ça fait tilt tout de suite. Ça c'est des choses vraiment pas évidentes.

Benjamin a visiblement du mal à concevoir d'autres types d'interventions et il ne lui semble pas forcément naturel de demander à ses élèves d'approfondir leurs réponses ou de leur demander de les justifier, comme le montre la suite de l'entretien :

AL : Qu'est-ce que tu pourrais faire d'autre ?

B : ... Non je vois pas. C'est le genre de choses où la réponse est donnée dans la question. [...]

AL : Mais est-ce que tu ne peux pas avoir une autre technique ?

B : ... Leur demander de choisir un nombre au hasard et de l'élever au carré. Mais je suis sûr que les seize qui sont là vont choisir un nombre positif... Ou alors, ne pas dire tout de suite non et demander : pourquoi $[0 ; +\infty[$? Demander la justification de ça. Et là normalement ils se rendent compte.

L'analyse de cette séance fait également naître des réflexions nouvelles notamment en ce qui concerne les difficultés rencontrées par les élèves lors de la mise en œuvre de l'algèbre comme outil de preuve et de leurs conséquences sur les choix didactiques. Au cours de l'entretien qui a lieu juste après la séance, Benjamin revient sur un moment où un élève propose d'étudier la parité de la fonction carré en choisissant un exemple numérique. Il confirme alors qu'il ne s'attendait pas à cette difficulté, même s'il l'avait déjà rencontrée en début d'année ("J'ai été confronté à ce problème-là, au début de l'année, pour prouver une égalité par exemple : ils t'en prennent deux et ça y est."). Mais, finalement, cette erreur ne l'a pas particulièrement dérangé ("Bon je ne m'y attendais pas plus que ça mais cela ne m'a pas tellement désarçonné. J'ai dit : non, tu ne peux pas généraliser avec un seul exemple, etc. "), même si, finalement, il ne sait pas vraiment comment la prendre en charge autrement :

B : Mais, ça, je trouve que c'est vraiment difficile à leur faire comprendre que traiter sur des exemples comme ça, ça ne généralise pas. Je ne vois vraiment pas comment on peut leur démontrer ça. A moins de donner un contre-exemple, c'est vrai. Mais euh... Ça, c'est tout ce qui me pose vraiment problème.

Après le visionnement du film, Benjamin revient sur ce type de difficulté qu'il a encore rencontré dans la suite du travail sur les fonctions lors d'études de parité, mais aussi lors d'études de variations. Il reprend alors la technique qu'il a choisie lors de la séance pour prendre en charge la réponse de l'élève qui lui propose de calculer $f(-4)$ pour étudier la parité de la fonction carré et il ne semble plus forcément convaincu de la pertinence de son choix :

B : Ça c'est pas évident de leur faire comprendre que c'est pas bon. Là j'essaie de m'en sortir en disant : tu montres un truc sur -4 , mais tu ne généralises pas. C'est quelque chose qu'ils n'ont pas, la généralisation.

Sa réflexion semble toutefois avoir évolué quant au type de contre-exemple que l'on peut proposer aux élèves pour mettre en évidence l'insuffisance de la justification à partir d'exemples :

B : Pour le "on calcule $f(-4)$ ", il y a peut-être un truc qui serait pas mal, cela serait de leur donner un contre-exemple. Si on montre quelque chose sur un seul exemple, cela ne marche pas toujours. Par exemple, si tu leur dis que 1^2 ça fait 1, donc on en déduit que pour tout x , x^2 égale x . Cela pourrait être pas mal pour leur montrer qu'il n'y a aucune généralisation avec ce qu'ils font.

Le fait d'envisager une telle prise en charge l'amène alors à s'interroger sur sa stratégie consistant à donner des exemples numériques, relevée à plusieurs reprises lors de l'étude de la vision des élèves et de leurs difficultés, et qu'il a mise en jeu au cours de cette séance pour réexpliquer aux élèves que $(-x)^2 = x^2$. Il prend alors conscience d'une certaine ambiguïté dans ses pratiques, qu'il exprime ainsi :

B : Et alors après je me contredis pas mal : quand je leur dis que pour se souvenir que x^2 égale $(-x)^2$, je leur dis de calculer $(-2)^2$. Je suis en train de prendre un exemple et de généraliser en quelque sorte. Et je leur redis en dessous : il ne faut surtout pas généraliser...

Cette réflexion se poursuit ensuite par l'analyse de la prise en charge du problème rencontré lors de l'étude des variations de la fonction carré, lorsque l'élève envoyé au tableau considère que les carrés de deux nombres a et b sont toujours rangés dans le même ordre que a et b ¹⁰ :

B : l'exemple pour les négatifs, quand on élève au carré. [...] En fait cela m'étonne qu'aucun élève ne m'ait fait la remarque. Je leur dis : ne prenez jamais un exemple pour montrer quelque chose. Et puis là c'est ce que je fais, même si moi je sais que c'est un contre-exemple. Moi je suis certain que sur les trente-trois il n'y en a pas un qui a compris la notion de contre-exemple. Et cela m'étonne qu'il y en ait pas un qui m'ait dit : vous prenez un exemple pour montrer quelque chose. Pour eux c'est sur le même plan. Et il y en a

¹⁰ Nous reprenons ci-dessous l'extrait de la retranscription de la séance qui correspond à ce moment :

L'élève écrit $a^2 \leq b^2$.

B : Donc on obtient a^2 inférieur ou égal à b^2 ...

[...]

B : D'accord. Alors, a et b on les a pris où, ça ?

E : Dans l'ensemble de définition.

B : L'ensemble de définition, c'est quoi ?

E : C'est I, R .

B : C'est I, R . Donc a et b sont deux nombres réels tout à fait quelconques. Par exemple on va prendre $a = -4$ et $b = -2$. On a bien $a \leq b$ parce $-4 \leq -2$. On élève au carré qu'est-ce qu'on obtient. $(-4)^2$ c'est combien ?

E : 16.

B : $(-2)^2$ c'est combien ?

E : 4.

B : Est-ce que $16 \leq 4$?

E : Non.

B : Pourtant c'est ce qu'on déduit de ce qui est écrit au-dessus.

[...]

pas un qui fait la remarque. C'est dommage car cela pourrait être l'occasion de dire : non ça c'est un contre-exemple.

En conclusion, nous avons retrouvé à travers l'analyse de cette séance différentes cohérences repérées lors de l'analyse des pratiques de Benjamin dans le cadre de son enseignement en algèbre. Par ailleurs, au cours des différents entretiens menés dans le cadre de ce dispositif "vidéo", nous avons vu un stagiaire s'interroger de façon pertinente, ce qui l'a conduit à prendre du recul et à avoir un regard critique sur certaines de ses pratiques.

Des analyses analogues à celles exposées dans les parties III.1 et III.2 ont été menée pour trois autres stagiaires. Elles ont été croisées afin de comparer les différents rapports professionnels à l'algèbre des quatre PLC2 considérés dans note thèse. Nous exposons maintenant les principaux résultats obtenus.

IV. Analyse croisée des rapports professionnels à l'algèbre de quatre PLC2

L'analyse croisée des études relatives à ces quatre stagiaires a mis en évidence l'existence de régularités dans la constitution et l'évolution de leur rapport professionnel à l'algèbre, mais elle a également fait apparaître une grande diversité des profils et des évolutions. C'est autour de ces deux pôles (régularités d'une part, diversités d'autre part) que nous organisons la présentation de quelques résultats.

IV.1 Les principales régularités émergeant de l'étude

Les principales régularités apparaissent à travers trois dimensions : la vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre, celles des élèves et de leurs difficultés, les stratégies d'enseignement élaborées. Nous en présentons ci-dessous quelques exemples :

IV.1.1. La vision des enjeux de l'enseignement de l'algèbre

L'analyse a clairement mis en évidence que, pour chacun des PLC2, la vision de l'enseignement de l'algèbre est fortement centrée sur la dimension objet de ce domaine des mathématiques : dans le travail algébrique proposé, ils donnent tous une place prédominante à la maîtrise des techniques de calcul. Et, même si certaines fonctionnalités de l'algèbre sont

repérées dès le début de l'année (notamment l'algèbre comme outil de résolution de problèmes via la mise en équation), d'autres fonctionnalités restent particulièrement occultées (par exemple, l'algèbre comme outil de généralisation ou de preuve).

Par ailleurs, les quatre stagiaires ont également rencontré une difficulté certaine à articuler dans leur enseignement ces deux dimensions outil et objet : les problèmes où l'algèbre est exploitée sont vus essentiellement comme des problèmes d'application, posés en fin de chapitre lorsque les techniques sont suffisamment travaillées. Ils ne servent que rarement à introduire ou à motiver le travail algébrique.

IV.1.2. La vision des élèves et de leurs difficultés

En début d'année, la vision des difficultés rencontrées par les élèves est fortement centrée sur les difficultés liées au système symbolique de l'algèbre et plus particulièrement sur celles relatives à la manipulation des écritures algébriques. Il s'avère qu'en début d'année, les PLC2 ont une faible capacité d'analyse des erreurs repérées et en restent le plus souvent à un niveau de constat. En fait leur système explicatif s'organise principalement autour de l'explication suivante : les élèves ne connaissent pas correctement les règles à utiliser. Il s'y associe alors un système d'aides consistant à réexpliquer les règles, à demander leur mémorisation et à les faire appliquer sur un nombre suffisant d'exercices afin que cette application se mécanise, devienne un "réflexe".

IV.1.3. Les stratégies d'enseignement

Au début de l'année, l'organisation didactique du travail algébrique est assez proche chez les quatre PLC2 : sans prendre d'informations sur les connaissances anciennes de leurs élèves, ils ont commencé par rappeler différents résultats ou techniques sans les justifier, puis ils ont proposé un ensemble d'exercices d'application. L'étude de ces derniers a fait apparaître chez ces quatre enseignants débutants une réflexion pertinente où apparaissaient une rigueur certaine lors de l'organisation du travail technique et une cohérence lors du choix des exercices (avec une prise en compte de différentes variables didactiques). Nous avons également pu repérer que tous ont eu assez rapidement le souci de proposer un travail se complexifiant progressivement et structuré de manière à favoriser l'appropriation des différentes techniques.

L'analyse des profils met aussi en évidence un souci commun relativement à la différenciation entre le travail sur les objets anciens et celui sur les objets nouveaux. Tous ont, en effet, formulé à un moment de l'année le souci d'amener les élèves à découvrir les nouvelles notions

ou propriétés avant l'institutionnalisation. Mais la mise en œuvre de cette volonté ne va pas de soi si elle n'est pas opérationnalisée par des moyens d'analyse permettant de distinguer ce qui peut être raisonnablement laissé à la charge des élèves et ce qui relèvera de la responsabilité du professeur. Lors de ces moments de découverte, nous avons, en effet, pu repérer dans les pratiques de chacun le peu de responsabilités mathématiques réellement laissées aux élèves. Mais ces convergences ne doivent pas masquer l'existence d'une grande diversité dans les profils de ces quatre stagiaires.

IV.2 La grande diversité des profils et de leurs évolutions

De réelles différences apparaissent en effet en ce qui concerne la vision des élèves, de leurs difficultés et l'élaboration de stratégies d'enseignement. Soulignons que ces diversités, ainsi que les évolutions repérées dans les profils sont parfois assez subtiles et il est donc difficile d'en rendre compte de manière synthétique sans perdre de leur substance. Nous n'en proposons donc ci-dessous que quelques exemples.

IV.2.1. La vision des élèves et de leurs difficultés

La diversité des profils relativement à cette dimension se traduit d'abord par une différence certaine au niveau du repérage de certains types de difficultés. Ainsi, Marie, enseignant dans un milieu très favorable, a repéré de manière très précise des erreurs concernant la manipulation d'écritures algébriques ou liées à l'articulation de divers modes de représentations des expressions algébriques. En revanche elle n'a jamais évoqué d'autres types de difficultés, à la différence des autres stagiaires qui ont repéré une plus grande diversité des types de difficultés repérées (par exemple, des difficultés à interpréter les expressions algébriques, des problèmes rencontrés lors de l'utilisation de l'algèbre pour prouver ou pour généraliser).

La diversité des profils apparaît aussi à travers les systèmes d'interprétation et de prise en charge de ces difficultés. Ceux de Marie sont toujours restés centrés sur le fait que les difficultés des élèves étaient dues à un manque de connaissance des règles à appliquer et la prise en charge se faisait à travers la production d'un cours structuré, illustré par de nombreux exemples et suivi par un travail des techniques cohérent et structuré, de manière à favoriser l'appropriation des différents résultats du cours. En revanche, Julien, qui avait des élèves en assez grande difficulté, s'est posé beaucoup plus de questions qui l'ont conduit à une réflexion sur le sens donné par les élèves aux expressions algébriques et à une prise de conscience

progressive de l'existence de difficultés liées aux différents changements du statut de la lettre lors de différentes tâches algébriques (inconnue, nombre généralisé ou variable). Ces réflexions l'ont alors conduit à modifier son système de prise en charge des difficultés (qui au début de l'année était semblable à celui développé par Marie) : ce nouveau système était alors basé sur l'articulation du registre sémiotique des écritures algébriques et celui des représentations graphiques.

IV.2.2. Les stratégies d'enseignement

La diversité des profils apparaît notamment lors des moments d'élaboration ou d'explicitation de techniques nouvelles. La comparaison des profils de Marie et de Claire fait ainsi apparaître, de fait, des visions totalement opposées. Marie n'organise pas de moment pour amener les élèves à découvrir ou élaborer de nouvelles techniques : elle garde à sa charge leur explicitation et semble peu soucieuse de proposer des éléments technologiques visant à justifier les techniques présentées. Cette conception de l'apprentissage de l'algèbre n'évoluera pas au cours de sa première année d'enseignement. En revanche, Claire a réfléchi très rapidement sur la place à laisser aux élèves lors de ces moments et a très vite pris conscience des biais d'un apprentissage par automatisme. Notons, enfin, que l'étude des profils de Julien et de Benjamin a fait aussi apparaître des questionnements relatifs aux responsabilités à laisser à la classe. La volonté de laisser des responsabilités mathématiques aux élèves est apparue très tôt chez Julien, mais des problèmes de gestion de classe ne lui ont pas permis de mettre immédiatement en place des situations prenant en compte ce souci. L'évolution de ses pratiques a donc été beaucoup plus progressive que celle de Claire. En revanche, pour Benjamin, ce questionnement est né en fin d'année et est resté ouvert, comme nous l'avons vu précédemment.

D'une manière générale, le rapport professionnel à l'algèbre des quatre stagiaires a évolué de façon très différente. Notre recherche nous a permis de pointer des raisons qui permettent d'expliquer ces différentes évolutions : une possible influence des conditions de travail, les représentations métacognitives des stagiaires relativement aux mathématiques et à leur enseignement, le rôle de certains incidents critiques, la propension des stagiaires à s'interroger sur leurs propres pratiques.

V. Conclusion

Comme nous l'avons précisé au début de cet article, l'état actuel des connaissances relatives à la formation des pratiques professionnelles est encore limité et certaines questions restent ouvertes. Cette recherche n'avait pas la prétention de répondre à toutes ces questions, mais il nous semble qu'elle apporte quelques éclairages quant au développement de compétences professionnelles relativement à l'enseignement de l'algèbre, qui pour certaines sont plus transversales. Certaines compétences sont, ainsi, plus rapides que d'autres à se développer en particulier celles relatives à l'identification des difficultés des élèves et leur prise en charge ou celles relatives au choix des exercices portant sur un type de tâches spécifique. Certains questionnements sont, en revanche, plus difficiles à faire naître notamment ceux sur les responsabilités mathématiques à laisser aux élèves ou ceux relatifs aux différentes fonctionnalités de l'algèbre.

Cette recherche illustre également des résultats obtenus dans d'autres recherches, notamment certaines menées dans le cadre de la double approche : le système des pratiques est cohérent et une certaine stabilité s'installe assez rapidement chez les débutants. Elle permet de pointer des éléments qui favorisent cette stabilité et de repérer des raisons qui peuvent conduire à des évolutions. Par exemple, le fait que la classe d'un stagiaire "tourne" peut favoriser une stabilisation rapide de certaines pratiques et empêcher que certains questionnements n'apparaissent. Il paraît donc important de créer en formation des milieux favorables pour conduire les stagiaires à s'interroger. De ce point de vue, le dispositif vidéo qui a été élaboré dans le cadre de cette thèse nous semble prometteur. Il a permis de travailler sur une réalité que les descriptions de pratiques, qu'il s'agisse de pratiques de pairs ou de pratiques d'experts, servant souvent de base à la formation, sont impuissantes à restituer. Dans cette réalité, tous peuvent se reconnaître. Les réactions des stagiaires à ce dispositif sont particulièrement intéressantes et l'on perçoit bien le travail qui pourrait s'y amorcer avec l'aide du formateur. De plus, on voit ici comment se croisent les regards venant de stagiaires qui enseignent à des niveaux divers, et ce que permet ce croisement. Ceci contraste avec l'impression que donnent assez souvent les stagiaires en formation de s'engager à minima dans ce qui ne concerne pas leur propre niveau d'enseignement. Il s'agit là cependant de circonstances très particulières et il serait peu sérieux de vouloir faire dire à cet épisode de notre recherche plus qu'il ne le peut. Mais il montre clairement, nous semble-t-il, l'accessibilité des stagiaires à une certaine forme d'analyse didactique des pratiques et la pertinence des questionnements qui sont susceptibles d'émerger. Il n'en reste pas moins que,

pas plus que les quelques séances sur l'algèbre de la formation suivie par ces PLC2, une séance ou deux de ce type ne peuvent suffire à soutenir un développement durable de la professionnalité enseignante en algèbre. La formation doit trouver les moyens de vivre dans la durée, et comme, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays, cette durée est inaccessible à la formation initiale, elle doit être pensée dans le cadre de la formation des néo-titulaires et de la formation continue.

Bibliographie

- BEDNARZ N., KIERAN C., LEE L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Kluwer Academic Publishers.
- CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 19 n°2, 221-266.
- GRUGEON B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves dans la transition entre deux cycles d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.
- LENFANT A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.
- MARGOLINAS C., PERRIN M.J. (1997). Des recherches visant à modéliser le rôle de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 17/3, 7-16.
- MARGOLINAS C. (1999). Une étude de didactique des mathématiques. Recherche de synthèse et perspectives. In BAILLEUL M. (Ed.), *Actes de la X^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*. Tome 1, 10-33. IUFM de Caen.
- ROBERT A., ROGALSKI J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2.4, 505-528.
- SCHUBAUER M.L. (1999) Les pratiques de l'enseignant en mathématiques. Modèles et dispositifs de recherche pour comprendre ces pratiques. In BAILLEUL M. (Ed.), *Actes de la X^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*. Tome 1, 34-49. IUFM de Caen.
- VERGNAUD G. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 259-288. Editions la Pensée Sauvage.

Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique

Caroline Bardini

DIDIREM Université Paris 7, bardini@math.jussieu.fr

Introduction



A propos de son tableau *La condition humaine I*, Magritte écrit : “I placed in front of a window, seen from a room, a painting representing exactly that part of the landscape which was hidden from view by the painting. Therefore, the tree represented in the painting hid from view the tree situated behind it, outside the room”. [Gablik, 1976, p.97]

A l’origine de notre problématique se trouve un constat, argumenté par les recherches que nous avons menées dans le cadre du DEA de didactique des mathématiques [Bardini, 2001] : celui de la fragilité du rapport à la factorisation des élèves en fin de Troisième.

Conformément aux hypothèses formulées dans certains travaux de didactique de l’algèbre¹, la factorisation, qui se constitue essentiellement de manipulations formelles et qui occupe une place non négligeable dans l’enseignement des mathématiques à ce niveau scolaire, s’est avérée, au vu de notre étude, très souvent dépourvue de toute signification, *lato sensu*, pour un bon nombre d’élèves. Pour la plupart, en effet, cette notion reste bien souvent associée à une tâche qu’ils accomplissent « à l’aveugle », où interviennent un certain nombre de règles « inquestionnables » vouées à transformer un ensemble d’écritures algébriques qui restent exemptes de sens.

Ainsi avons-nous été amenés, face à un tel bilan, à nous interroger sur le rapport des élèves aux expressions algébriques. Comment les élèves perçoivent-ils les expressions algébriques qu’ils manipulent ? Plus exactement, comment les élèves perçoivent-ils les éléments constitutifs de telles expressions ? En somme, et pour revenir à l’œuvre de Magritte, *que se cache-t-il, pour l’élève, derrière le symbole ?*

¹ Cf. Tonnelle (1979).

I- Les différents usages de l'histoire en didactique de l'algèbre

La question de la constitution du sens des écritures algébriques a déjà fait l'objet de nombreuses études en didactique des mathématiques, les travaux de Luis Radford en fournissant un exemple particulièrement éclairant².

C'est à travers une approche sémiotique, où l'accent est mis sur la dimension socio-culturelle du symbole³, que Radford étudie le rapport des élèves au symbolisme. Il s'intéresse notamment à créer des situations qui inciteraient les élèves à développer eux-mêmes, en reprenant ses termes, les *idées* que véhiculent les symboles, procédant ainsi à une construction personnelle de la relation symbole/ idée.

Pour ce faire, il convient, selon lui, « (...) d'identifier les idées de base de l'algèbre, les voies d'accès qui permettent aux élèves de construire des représentations externes de plus en plus complexes, les actions permettant de déboucher sur une dialectique entre les idées et leurs symboles. » [Radford, 1996, p.255]

Et c'est dans l'histoire, et plus précisément dans l'analyse de documents historiques qui manifestent l'émergence du langage algébrique, que Radford recherche des voies d'accès pour élaborer des séquences d'enseignement appropriées.

Or le recours à l'histoire dans les recherches en didactique de l'algèbre n'est pas le seul fait d'un chercheur comme Radford. Au fil de notre étude [Bardini, 2003], nous avons montré que l'histoire a constitué un point d'entrée pour de nombreux travaux dans ce domaine, qu'ils s'inscrivent dans une problématique directement liée au symbolisme algébrique ou dans un questionnement plus large à propos de l'enseignement/apprentissage de l'algèbre.

C'est notamment le cas des travaux de Carolyn Kieran⁴, qui se sert de l'histoire afin de bâtir une analogie entre l'évolution au cours de l'histoire et au cours de l'apprentissage de quelques concepts algébriques. Sans toutefois vouloir faire de celle-là le modèle de celui-ci, elle perçoit dans cette approche historique un double intérêt : non seulement elle lui permet d'approfondir son analyse de la construction par les élèves de concepts donnés (fonction, variable, etc.), mais elle sert également à identifier les différents modes de raisonnement (arithmétique ou algébrique) susceptibles d'être mis en oeuvre lors de la résolution de problèmes posés aux élèves.

² Cf. Radford (1996, 1999, 2002).

³ Surtout en ce qui concerne les travaux les plus récents de Radford.

⁴ Cf. Kieran (1981, 1996).

Les recherches d'Anna Sfard offrent également une coloration historique. Cependant, contrairement à Kieran, l'usage qu'elle en fait est moins spécifique à un domaine mathématique donné. En effet, c'est en s'appuyant sur des données historiques qu'elle identifie, dans un premier temps, les deux dimensions : opérationnelle et structurale, constitutives, selon elle, des notions mathématiques. Les différentes étapes organisatrices de l'édification de celles-ci que l'histoire lui permet de repérer en termes d'opération-objet lui servent ensuite à modéliser les différentes strates constitutives de la construction par les élèves de concepts mathématiques en général.

L'histoire peut également présenter un intérêt méthodologique. Harper, par exemple, s'intéresse à repérer les similitudes et les différences entre l'ordre d'acquisition de concepts algébriques par les élèves et l'évolution historique de ces mêmes concepts. C'est en reprenant le découpage de l'algèbre proposé par Nesselmann, selon lequel l'évolution historique de l'algèbre se présenterait selon un schéma ternaire (rhétorique-syncope-symbolique), qu'elle décrit les modes de résolution employés par certains élèves face à un problème donné. Ainsi repérera-t-elle, par exemple, les réponses qui relèvent de méthodes qu'elle classe en tant que « rhétoriques », « diophantiennes », ou « vietnamiennes ».

Cet intérêt méthodologique de l'histoire est également une caractéristique des travaux de Radford qui, nous l'avons vu, s'en sert notamment pour construire des séquences d'enseignement. Cependant, l'usage qu'il en fait paraît organisé autour d'une analyse qui dépasse le cadre d'une étude purement historique. Lorsqu'il affirme : « (...) un symbole ("x" ou autre) est le symbole de quelque chose, d'une idée », cela semble indiquer que son regard ne porte pas uniquement sur les différentes marques historiques de l'édification d'un symbole, mais qu'il s'intéresse, au-delà, à ce que nous appellerons ici, de façon intuitive, l'« essence » d'un symbole.

Cet élargissement du questionnement développé par Radford n'est certes pas propre à ses travaux, cependant il nous semble lié à l'objet même de son questionnement. En effet, notre étude a révélé que, plus les travaux portaient sur les symboles mathématiques en soi, plus les analyses prenaient source dans des domaines autres que l'histoire, et en particulier dans la philosophie.

En analysant différentes études se rapprochant de notre thème, *i.e.* le symbolisme algébrique, nous avons en effet constaté que bon nombre de recherches, didactiques ou cognitives, renvoient à des textes philosophiques de Gottlob Frege, et plus précisément aux notions de *sens* et *dénotation* qu'il introduit.

II- L'étude du symbolisme en didactique des mathématiques

Frege entend par signe « toute manière de désigner qui joue le rôle d'un nom propre » [Frege, 1971, p.103], pouvant être un nom, un groupe de mots ou de caractères. Un signe est composé, d'après lui, de deux éléments : son sens et sa dénotation. La dénotation d'un signe est précisément ce qu'il désigne et son sens est le mode de donation. Empruntons un exemple cité par Frege : « Soient a , b , c les médianes d'un triangle. Le point d'intersection de a et de b est le même que celui de b et de c » [ibid., p. 103]. Le point d'intersection des médianes peut être désigné de plusieurs façons différentes ; ici ce sont les différentes constructions géométriques qui servent de mode de donation (« point d'intersection de a et de b », par exemple). Ces différentes désignations sont ce que Frege appelle les sens. Et si d'un côté le signe a plusieurs modes de donation, plusieurs sens (car plusieurs expressions permettent de le décrire, telle « point d'intersection de a et de b »), il ne possède qu'une dénotation : c'est l'objet déterminé ; ici, le point en question. De même, les expressions « l'élève de Platon » et « maître d'Alexandre le Grand » ont des sens différents, cependant une seule dénotation : toutes les deux se réfèrent à Aristote.

En didactique, l'interprétation et l'emploi de ces deux notions présentent des variations selon les auteurs, qui en ont parfois adapté la définition à leurs besoins. Si certains, comme Raymond Duval ou Jean-Philippe Drouhard, se sont montrés fidèles aux termes frégeens (le second rajoutant toutefois les notions de *connotation* et d'*interprétation*), d'autres s'en sont éloignés, comme le montrent les travaux de Ferdinando Arzarello qui, d'une part, dédouble la notion de sens d'une expression algébrique pour définir ce qu'il nomme *sens algébrique* et *sens contextualisé* d'une expression¹ et, d'autre part, « contextualise » la notion de dénotation.

III- Ecrits épistémologiques autour de l'algèbre

La prégnance des références philosophiques dans ces travaux didactiques sur le symbolisme nous a montré que, pour aborder la question du rapport des élèves au symbolisme algébrique, une investigation théorique préalable sur celui-ci était fondamentale. Ainsi nous est-il paru primordial de compléter l'analyse développée par les auteurs mentionnés *supra*, relative aux

¹ Le sens algébrique, par exemple, correspond à la façon dont l'objet nous est donné, plus particulièrement à travers les règles explicites dans l'expression. Tandis que les expressions $n(n+1)$ et n^2+n dénotent, selon lui, la même fonction, elles possèdent des sens algébriques différents.

termes frégeens de *sens* et *dénotation*, par une mise en perspective de différents écrits philosophiques apparus comme des références incontournables dans l'étude de l'algèbre.

La lecture des textes choisis s'est essentiellement articulée autour de deux pôles, selon que les réflexions développées par les auteurs autour de l'algèbre étaient d'ordre général ou, au contraire, spécifiques aux symboles de celle-ci.

C'est ainsi que nous avons regroupé, dans une première partie, les textes de Jules Vuillemin (1962) et Gilles Gaston Granger (1994), en retenant de ceux-ci une authentique analyse des éléments constitutifs de l'algèbre et de leurs articulations avec la philosophie. Les réflexions menées par les deux auteurs nous ont cependant paru clairement distinctes. Tandis que le premier se réfère au domaine algébrique, essentiellement dans le but d'établir des rapports entre les mathématiques et la philosophie, en insistant sur l'étude des méthodes qui lui sont spécifiques, à partir d'une analyse des processus employés par divers mathématiciens, nous retrouvons dans l'ouvrage de G-G Granger un discours davantage bâti autour de la question de la *pensée formelle* et plus précisément sur les corrélations entre les couples forme/contenu et opération/objet.

Le deuxième pôle s'est organisé autour des écrits de Désiré André (1909), Charles Babbage (1821), Marcelo Dascal (1978), et enfin de Florian Cajori (1928) dont le texte, bien que ne relevant pas d'une analyse philosophique, s'avère une référence incontournable pour toute étude relative aux symboles mathématiques.

En analysant la *caractéristique géométrique* leibnizienne, par exemple, Dascal observe : « Mais le but principal d'une telle notation n'est pas de servir pour la *description* des choses – auquel cas il serait mieux d'avoir des *reproductions* de ces choses ou les choses elle-mêmes – mais plutôt servir au raisonnement (...) » [Dascal, 1978, p. 216]. Il analysera cependant surtout le caractère *autarcique* des notations mathématiques dans les conceptions de Leibniz : « Avec l'aide d'un tel système de signes, les déductions et démonstrations, les vérifications et épreuves, ainsi que d'autres opérations logiques, se font sans onérer nos pouvoirs de raisonnement et jugement. Tout s'y fait à partir des caractères, et tout se déroule au niveau des caractères eux-mêmes.

Mais si la lecture de ces différents écrits philosophiques a, conformément à notre dessein, incontestablement approfondi l'analyse théorique relative à l'algèbre et à ses constituants amorcée par l'étude des textes de Frege, ces écrits se sont révélés cependant insuffisants pour nourrir épistémologiquement notre étude didactique du rapport au symbolisme algébrique, en particulier parce que le discours constituant la plupart des travaux

épistémologiques précités relevait plutôt d'une réflexion philosophique d'ordre général que d'une pensée épistémologique spécifique de l'écriture symbolique.

Si l'on voulait étudier les symboles algébriques et le rapport au symbolisme en s'appuyant sur les expériences à partir desquelles ils s'édifient, il nous semblait primordial que l'étude théorique susceptible de charpenter notre recherche fut sous-tendue par un examen de la genèse des symboles, ceux-ci étant perçus en tant qu'éléments actifs de l'édification des mathématiques. C'est pourquoi, pour approfondir notre réflexion épistémologique, nous nous sommes intéressés aux travaux de Michel Serfati, lequel fait référence à certaines questions épistémologiques soulevées par les auteurs cités *supra*, tout en proposant une réflexion rétrospective, d'un mathématicien, relative à la mise en place de l'écriture algébrique.

Dans le cadre de sa thèse de doctorat intitulée *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Michel Serfati explicite « en quoi l'écriture symbolique a décisivement contribué à l'invention en mathématique même ». Il y fait une étude épistémologique, par le biais de son évolution historique, de la constitution de l'écriture symbolique mathématique. Michel Serfati propose un découpage de l'organisation symbolique en six volets, dénommés *figures de la représentation* -un découpage exhaustif pour la description de la symbolique en vigueur après Descartes. En empruntant les termes de M. Serfati, ce sont : la représentation du requis (c'est-à-dire l'inconnu), celle du donné (les analyses épistémologiques soulignent toutes les difficultés sous-jacente à la conception relative à une telle représentation), celle des instructions opératoires élémentaires, de l'enchevêtrement des instructions (à travers notamment la mise en place des parenthèses), enfin de la mise à égalité et de la représentation des concepts composés -un problème résolu après Descartes, seulement.

Cette étude a montré à quel point la conception et la mise en place de ces différentes figures de loin n'a pas été de soi. Dû aux limitations du présent article, nous n'en présenterons que quelques facettes dans ce qui suit.

IV- Articulation entre didactique et épistémologie

IV.1 - Une (re)lecture épistémologique de quelques travaux didactiques

La lecture de ces différents écrits philosophiques et épistémologiques ne pouvait se faire sans pointer certaines résonances avec quelques écrits didactiques explorés auparavant.

Notre problématique s'est ainsi trouvée naturellement évoluer au fil de la recherche, d'une étude du rapport des élèves au symbolisme algébrique à l'articulation des réflexions didactiques et épistémologiques relativement au symbolisme.

Nous avons alors procédé, dans un premier temps, à une relecture épistémologique des travaux didactiques menés dans le domaine du symbolisme, en nous servant du découpage des figures de la représentation proposé par M. Serfati comme grille d'analyse. Cette examen, qui a consisté à mettre en regard, pour chaque figure de la représentation, les travaux didactiques associés, nous a notamment permis de déceler dans des réponses d'élèves, des modes de raisonnement similaires à ceux mis en évidence par les travaux épistémologiques. Ainsi, par exemple, avons-nous exploré, sous une perspective épistémologique, la difficulté de certains élèves à aborder la question de la représentation d'un nombre « arbitraire mais fixé » ou encore les réticences, bien repérées, de certains autres à percevoir la symétrie que véhicule la représentation de la mise à égalité. L'exemple que nous détaillons ci-après est relatif à la représentation du requis.

De l'analyse épistémologique relative à la représentation de l'inconnu, nous retenons une double conception de l'« inconnu ». Face à la présence de l'« inconnu » dans un texte mathématique, il convient de distinguer, comme le note Serfati, la **part d'inconnu** que le texte recèle et la **substance inconnue** qu'il contient. En d'autres mots, un texte mathématique peut comporter dans sa structure quelque chose qui n'est pas donnée, que le lecteur ne connaît pas (c'est la part d'inconnu dans le texte). Mais cet inconnu est différent de la substance inconnue dans la mesure où celle-ci est précisément « la valeur d'une grandeur, permanente dans le texte, mais inconnue » [Serfati, 1997, p.45]. Comme l'observe Serfati :

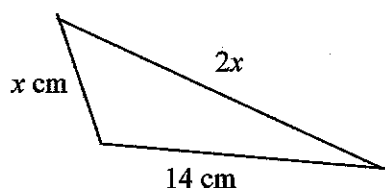
« Si seule la seconde interprétation nous paraît aujourd'hui aller de soi, la confusion entre les deux conceptions est à la fois constante et implicite chez Diophante qui (...) n'utilise jamais qu'un seul signe pour désigner l'inconnue (ou l' "inconnu"). (...) En vérité, Diophante, pour qui le z est à la fois un signe et une marque dans le texte — signe d'une grandeur inconnue d'une part, marque d' "inconnu", d'autre part — se trouva ainsi contraint à ce que nous considérons aujourd'hui comme de véritables acrobaties dans le calcul. » [Ibid., p. 45]

Si Serfati affirme que « seule la seconde interprétation nous paraît aujourd'hui aller de soi », c'est sans doute parce que le « nous » auquel il se réfère c'est le « nous, mathématiciens ». Toutefois, à travers les travaux de K. Stacey et M. MacGregor [1997], nous verrons que cette confusion n'est pas rare parmi les élèves, qui ont souvent tendance, un peu comme Diophante, à associer au signe d'inconnu de multiples référents.

Afin d'étayer nos propos nous nous intéresserons à trois énoncés de problèmes (nommés, comme dans l'original, problèmes TRIANGLE, MARK et BUS) proposés à des étudiants australiens âgés de 13 à 15 ans. Ces problèmes se veulent, selon Stacey et MacGregor, conforme aux problèmes fréquemment posés lors de l'introduction de l'algèbre au collège. Nous analyserons plus précisément les réponses de quelques élèves recueillies lors d'entretiens ultérieurs à la résolution des problèmes¹.

Problème TRIANGLE

The perimeter of this triangle is 44 cm. Write an algebraic equation and work out x .



..... $x = \dots\dots$

Problème MARK

Some money is shared between Mark and Jan so that Mark gets \$5 more than Jan gets. Jan gets \$ x . Use algebra to write Mark's amount. If the money to be shared is \$47, how much would Jan get? How much would Mark get?

Problème BUS

A bus took students on a 3-day tour. The distance travelled on Day 2 was 85 Km farther than on Day 1. The distance travelled on Day 3 was 125 Km farther than on Day 1. The total distance was 1410 Km. Let x stand for the number of Km travelled on Day 1.

Use algebra to work out the distance travelled each day.

Observons que tous les problèmes indiquent (plus ou moins explicitement) l'inconnue² à prendre en compte (dans les problèmes MARK et BUS la dénomination est d'ailleurs explicite). Toutefois, les élèves ne respectent pas toujours ces indications et souvent résolvent les problèmes en accordant au signe de l'inconnue (fourni par l'énoncé) différentes interprétations.

Plus précisément, pour le problème BUS, Stacey et MacGregor soulignent que quelques élèves ont écrit l'équation $x + 85 + 125 = 1410$ pour le résoudre, indiquant ainsi, selon elles, que la lettre x représente pour ces élèves toutes les quantités inconnues du problème.

¹ Nous invitons le lecteur à se reporter au document original pour une description plus précise de l'expérimentation.

² Observons que l'inconnue ne correspond pas au requis dans tous les problèmes (notamment dans le problème BUS, où il est demandé de trouver la distance parcourue chaque jour).

Pour illustrer cette même catégorie d'interprétation, les auteurs de l'expérimentation citent également la réponse de l'élève Dean, que nous retranscrivons ci-après.

« For TRIANGLE, he works out x to be 10 but writes down his solution as $x = 30$. He then says that is wrong, and writes $x = 10 \times 3$ as his final answer to the problem. He explains, "It is three lots of 10". » [K. Stacey et M. MacGregor, 1997, p. 194]

Selon Stacey et MacGregor, même si Dean semble savoir que la longueur représentée par x cm mesure 10 cm et que celle représentée par $2x$ mesure 20 cm, la lettre x sert à représenter, pour lui, tout ce qui n'est pas explicitement donné dans le problème. En d'autres mots, la lettre x sert à représenter la part d'« inconnu » du problème.

IV.2 - L' épistémologie en tant qu'outil dans la conception de tâches³

Mais la contribution des travaux de M. Serfati à notre étude ne s'est pas limitée à cette mise en regard des deux champs de recherche. Après avoir étudié, à travers divers exemples, dans quelle mesure l'analyse épistémologique pouvait apporter des éléments nouveaux à l'étude didactique de certaines productions d'élèves, il convenait d'approfondir cette analyse, en proposant des tâches, *lato sensu*, susceptibles d'enrichir nos connaissances concernant le rapport des élèves au symbolisme.

Pour cela, nous nous sommes détachés d'une analyse « linéaire » des différentes « figures de la représentation » pour amorcer une étude « transversale », en dégagant quelques idées repérées et décrites de façon plus ou moins explicite tout au long de l'étude de chacune de ces figures. Et, plutôt que d'envisager des exercices destinés à caractériser chaque figure, nous avons choisi d'élaborer des situations « diagonales » vouées à illustrer trois idées dégagées de l'analyse épistémologique du symbolisme algébrique. En particulier, nous nous sommes intéressés à examiner la question des deux démarches théoriques d'exploration d'une écriture symbolique (la démarche analytique —qui est celle théoriquement adoptée par l'auteur— et la démarche synthétique —qui est celle théoriquement adoptée par le lecteur), ainsi que la question de l'usage de lettres dans la résolution d'un problème mathématique et enfin celle de substitution dans la manipulation de symboles algébriques. L'analyse épistémologique s'est avérée, à ce stade de notre recherche, fondamentalement architectonique : nous avons associé, à chaque idée épistémologique, différents « types de tâches », en mettant l'accent sur différents volets de chaque idée. Nous commencerons, dans le présent article, par examiner la dernière question *supra* citée en présentant les caractéristiques mises en exergue par l'étude

épistémologique de la substitution, opération qu'on dirait aujourd'hui banale en mathématiques, apparue avec Leibniz et qui constitue une part de la puissance de la méthode mathématique. Nous traiterons ensuite de la question relative à la double démarche d'exploration de l'écriture symbolique en pointant les diverses articulations avec la didactique.

IV.2.1 - L'Art Combinatoire

Prenons par exemple⁴, l'équation algébrique suivante, et intéressons-nous à la recherche de ses racines multiples:

$$4. (x+1)^3 - 4.x^3 - 1 = 0$$

Après quelques manipulations algébriques, nous constatons que cette équation, en fait du second degré admet une racine double de valeur $-\frac{1}{2}$.

A présent, appliquons-lui une première substitution, et plus précisément une littéralisation⁵. Aux lieux occupés par le nombre de signe 3, vient s'inscrire la lettre n , signe d'une valeur fixée mais quelconque. Nous nous retrouvons ainsi face à une équation de degré $n-1$:

$$4. (x+1)^n - 4.x^n - 1 = 0$$

A travers la littéralisation, non seulement un nouvel objet a été créé (une équation de degré $n-1$) mais la problématique qui lui était associée a également été modifiée. Sur l'objet d'abord : l'équation obtenue, qui est une forme canonisée de l'équation de départ, se veut une équation dite « indéterminée ». En remplaçant le nombre de signe 3 par la lettre n , non seulement nous obtenons une nouvelle équation, mais toute une famille d'équations. Comme le note Serfati, la substitution, dont la motivation se plaçait initialement purement au niveau combinatoire (remplacer le chiffre 3 par la lettre n , à chaque occurrence), aura transformé un unique individu en toute une espèce, l'équation ainsi obtenue étant une extension de la première (et en sens inverse, l'équation initiale étant un cas particulier de sa transformée, une instantiation). En même temps que l'objet a subi une modification, la problématique initiale a été elle aussi transformée. A présent, nous pouvons reformuler notre questionnement initial comme ceci : peut-on choisir l'entier indéterminé (de signe n) pour que la nouvelle équation admette aussi une racine multiple ?

³ Dans le sens large du terme.

⁴ Cet exemple, ainsi que son analyse est discuté avec plus de détails dans [Serfati, 1997].

⁵ Terme introduit par M. Serfati dans [Serfati, 1997] pour indiquer la substitution, dans le texte, d'un chiffre par une lettre.

Toujours dans une perspective d'extension, nous aurions très bien pu, plutôt que littéraliser à la place de l'exposant (en remplaçant le nombre de signe 3 par la lettre n), littéraliser à la place du nombre de signe 1, c'est-à-dire attribuer au lieu du second 1 de l'équation un paramètre de valeur fixée mais indéterminée. Nous obtiendrions alors :

$$4. (x+1)^3 - 4x^3 - a = 0$$

Nous avons encore affaire ici à une équation de degré deux, dépendante à présent d'un paramètre de signe a . A l'instar de la première substitution, nous pouvons dire que le résultat de celle-ci est une extension de l'originale, de même que l'équation de départ se veut une instantiation numérique de la première (où la valeur de a est égale à 1). La question concernant les racines multiples se traduit désormais par : peut-on déterminer les nombres indéterminés de signe a pour tels que l'équation admette une racine multiple ?

Finalement, nous appliquerons une dernière substitution à l'équation de départ, la composée des deux substitutions précédentes, une succession de deux littéralisations, au terme desquelles nous obtenons :

$$4. (x+1)^n - 4x^n - a = 0$$

En interprétant n comme donné et a comme requis. la question des racines multiples de cette nouvelle équation de degré $n-1$ peut se traduire par : peut-on déterminer les nombres de signe a pour que, l'entier de signe n étant donné, l'équation admette une racine multiple ?

A travers ces différents exemples de substitution, nous avons voulu souligner l'importance de cette opération, impossible dans l'univers des énoncés rhétoriques et si commune dans les pratiques mathématiques d'aujourd'hui. En effet, à travers une double littéralisation, l'équation de départ, presque entièrement chiffrée, a acquis un nouveau statut : elle représente une classe d'équations de paramètres n et a . La question initiale des racines multiples a, en conséquence, aussi été élargie et, comme le souligne Serfati :

« (...) [elle] trouve alors une réponse non triviale et satisfaisante⁶, ce qu'on n'avait pas observé dans les tentatives intermédiaires. La réussite obtenue dans la transformée ultime se subsume en la création d'un

⁶ En effet, l'équation $4. (x+1)^n - 4x^n - 1 = 0$ n'admet de racines multiples que lorsque $n = 3$. De la même façon, l'équation $4. (x+1)^3 - 4x^3 - a = 0$ n'admet de racines multiples que si $a = 1$. Par contre, l'équation $4. (x+1)^n - 4x^n$

$- a = 0$ admet des solutions non triviales. n étant fixé, on trouve $a_k = \frac{(-1)^{k+n-1} i^{n-1}}{\left(2 \sin \frac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}}$, pour $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$.

Nous renvoyons le lecteur aux travaux de M. Serfati pour plus de détails. Note de l'auteur.

problème neuf, intéressant, et qui ne résultait nullement ni de l'examen initial, ni d'une interprétation naturelle de la source. » [Serfati, 1997, p. 307].

Et, plus loin, il conclut :

« (...) la transformée (...) montre alors comment la réussite est en fait venue couronner un certain nombre d'essais, au hasard, portant substitution à presque tous les lieux possibles occupés par des chiffres dans *Béta*⁷. Un exemple qui illustre donc l'intérêt de la pratique aveugle des métamorphoses, à l'effet de créer des problèmes neufs à résoudre. » [ibid., p. 308]

Si cette série de substitutions semble à nos yeux aller de soi, elle n'était pas pratique courante au XVII^e siècle. En effet, l'idée qu'une écriture symbolique puisse être à l'origine de nouvelles constructions mathématiques était quasiment inconcevable avant Leibniz, ses prédécesseurs ayant seulement envisagé une direction unilatérale (du registre des significations vers le symbolique). Leibniz fut le premier à pratiquer cette « nouvelle démarche », procédant à des manipulations symboliques sans y apporter constamment des significations. Cette manipulation « à l'aveugle », une procédure entièrement mise en oeuvre dans le registre symbolique (ce que Leibniz désigna sous le nom d'Art combinatoire), vint donc conférer au texte symbolique une puissante caractéristique : son autonomie. A ce sujet, Serfati observe :

« Ainsi avait-il [Leibniz] reconnu au texte symbolique cette faculté cruciale de "véhiculer essentiellement des combinaisons d'informations portant sur [sa] propre structure", que souligne G. Granger⁸. Quoi qu'il en soit, agissant de la sorte, Leibniz fut conduit à prendre en compte le registre symbolique en tant que tel, c'est-à-dire pourvu d'une existence certaine *per se* : dès lors, l'autonomisation du texte symbolique et l'élargissement, ainsi compris, de la pratique de l'Art combinatoire, furent à l'évidence, historiquement liés de façon indissoluble. » [ibid., p.375. Italiques dans l'original]

Ainsi avons-nous vu, à travers l'analyse épistémologique, à quel point la procédure de substitution s'est révélée cruciale à l'avancement des mathématiques. Un bon géomètre doit, Leibniz aurait sûrement acquiescé, avoir la faculté de se détacher (tout du moins momentanément) du monde des significations se permettant, dans un premier temps, de produire « automatiquement » des formules sans égard à leur signification et dont la validation éventuelle se ferait, dans un second temps, par l'auteur lui-même ou la

⁷ Notation utilisée par M. Serfati qui renvoie à l'équation de départ. Note de l'auteur.

⁸ in *Essai d'une philosophie du style*. Armand Colin. Paris 1968, page 22. Note dans l'original.

communauté scientifique. C'est dans cette perspective de l'Art combinatoire et toute la puissance qu'il révèle⁹ que nous avons développé l'exercice suivant.

Imaginez-vous dans un monde sans grandes puissances : où les carrés, les cubes, etc. n'existent pas. Un monde où toutes les puissances sont écrites en fonction de la seule puissance existante : celle du premier degré. En d'autres mots, c'est un monde où x existe, mais où x^2 , x^3 , x^4 , etc. n'existent pas. Dans ce monde où x est la référence absolue, on n'a qu'une information : on sait que $x^2 = 2x - 2$.

a) Dans ce monde, comment peut-on écrire x^3 ?

b) Complétez le tableau de multiplication suivant :

	1	x	x^2	x^3
1	1	x	$2x - 2$	
x				
x^2				
x^3				

c) A l'aide du tableau précédent, pouvez-vous déterminer combien vaut, dans ce monde, la somme :

$$-x^3 + 2x^2 - 2x ?$$

d) Dans ce monde, comment peut-on exprimer une puissance quelconque de x ?

Précisons que notre démarche, en construisant cet exercice, était de traduire, dans la pratique, l'idée leibnizienne d'Art combinatoire. Certes l'exercice à développer se devait d'évoquer la substitution ; cependant, afin de traduire toute la puissance de cette manipulation (plus précisément en ce qui concerne le « calcul aveugle »), les tâches ne pouvaient être trop « simples », telle la substitution d'un chiffre par une lettre dans une expression algébrique (la littéralisation, qui peut être abordée par des élèves de collège) ou l'application numérique d'une écriture algébrique (l'instanciation, souvent rencontrée en 2^{nde}, à travers des tâches relevant du calcul d'une expression pour une valeur donnée de la variable en jeu).

Notre projet était en fait ici de dépasser le seul cadre d'instanciation-extension, dont l'intérêt est au demeurant non négligeable, et de proposer un exercice de substitution où le principe de manipulation quasi aveugle des expressions algébriques est davantage mis en évidence.

⁹ Leibniz parle d'ailleurs d' « autarcie ».

Le principe de « substitution à l'aveugle » doit cependant être ici compris avec une certaine réserve. Si les manipulations combinatoires présentées jusqu'alors dans l'analyse épistémologique révélaient en quelque sorte une manipulation « automatisée » (à chaque lieu du signe 3 venait, par exemple, s'inscrire la lettre n), la substitution dans cet exercice n'est pas immédiate. En ce qui concerne notamment la première question (et cela s'étendra aux questions suivantes), le seul examen visuel de l'écriture symbolique (x^3) ne suffit pas pour « annoncer le besoin de substitution ». Une étape intermédiaire de ré-écriture (explicite ou non) s'avère nécessaire : il faut, en effet décomposer x^3 en produit de x par x^2 pour, ensuite seulement, substituer au lieu de x^2 l'expression $2x-2$, aboutissant à l'expression factorisée $x(2x-2)$. Or cette étape n'est pas ultime dans la résolution et le reconnaître est à nos yeux une des difficultés essentielles de cet exercice. Il s'agit ici en effet de reconnaître x^2 dans l'expression factorisée (c'est-à-dire prévoir son développement : $2x^2-2x$) pour ensuite substituer au lieu de x^2 l'expression $2x-2$, aboutissant à l'expression finale de x^3 « selon les règles du jeu », *i.e.* $2x-4$.

L'application successive de substitutions n'est pas non plus spécifique à l'expression x^3 . En effet, plus les puissances de x seront élevées, plus la résolution de la question demandera des substitutions successives (surtout si l'on ne réinvestit pas les réponses précédemment obtenues). A l'origine de cette difficulté en est une autre, à notre sens centrale dans l'exercice : sa résolution exige qu'à tout moment, l'élève ne perde pas de vue l'objet à remplacer, ceci demandant de sa part une capacité à repérer cet objet dans la totalité du texte symbolique, qu'il soit immédiatement visible ou masqué par des manipulations algébriques que l'élève devra alors pré-voir.

Enfin, comme le note Serfati, « Et le résultat de la substitution combinatoire peut parfois paraître stupéfiant à son auteur même, découvrant une propriété à laquelle il n'aurait jamais pensé » [ibid., p. 376]. Quelle surprise l'élève n'aura pas lorsqu'il découvrira que, dans ce monde, x^4 est tout simplement -4 ¹⁰!

IV.2.2 - Auteur/lecteur d'une expression algébrique

Dans l'édition de 1526 du *Behennde unnd hüpsch Rechnüg auff allen Kauffmanschafften*, premier traité imprimé (d'Arithmétique) contenant les signes de la croix (+) et du trait (-), Widmann met à la disposition du lecteur une succession d'assemblages

¹⁰ On reconnaît ici la construction de l'anneau quotient $\mathbb{R}[x]/x^2-2x+2$.

élémentaires et leur « traduction ». Ainsi, à côté de l'assemblage élémentaire $3 + 30$, se trouve l'explication de sa notation : « Ajoutez le nombre 30 au nombre 3 ». Il en va de même pour l'expression $4 - 17$, que le lecteur devait interpréter, selon Widmann, comme l'instruction : « Retranchez le nombre 17 du nombre 4 ».

Sous la plume de Clavius, dans l'*Algebra* (1608), nous retrouvons à nouveau des instructions d'addition ou soustraction, cette fois-ci cependant agrémentées de signes cossiques. Ainsi, l'expression $120 - 7$, par exemple, devait s'interpréter, si l'on reprend l'explication première des « figures » symboliques fournie par Widmann, comme l'instruction suivante : « De la valeur de l'inconnue, retranchez le nombre 7 ».

M. Serfati résume, dans les deux cas, la visée de l'auteur :

« (...) fournir au lecteur la représentation symbolique d'une *instruction* élémentaire, c'est-à-dire d'une règle pour l'exécution d'une action ou opération (ici la soustraction) portant sur deux quantités, qui sont, soit des nombres connus, soit des grandeurs inconnues. » [Serfati, 1997, p.57].

Ainsi, dès la fin du XVI^e siècle, le lecteur placé devant des assemblages élémentaires tels ceux précités, était en mesure de les interpréter, c'est-à-dire, de leur apporter des significations.

Une telle interprétation rhétorique s'étendit aux assemblages de niveau supérieur à un¹¹, une fois prescrit un ordre¹² aux assembleurs, *i.e.*, aux signes opératoires. Ainsi, face à l'expression : « $(2 + x) \cdot 3,5$ », le lecteur interprétait : « Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe x . Multiplier ensuite le résultat obtenu par le nombre de signe 3,5. »¹³ De façon générale,

« (...) l'interprétation des assemblages dûment complétés ainsi élaborés s'est donc trouvée être l'exécution d'instructions composées, c'est-à-dire d'une succession d'instructions élémentaires dans un ordre séquentiel prescrit. » [ibid., pp.74-75]

L'expression rhétorique de l'interprétation de l'écriture symbolique (appliquée par le lecteur) s'est caractérisée, nous l'avons vu, par une succession d'instructions prescrites dans un ordre bien défini. En effet, pour déchiffrer une expression algébrique, le lecteur part des

¹¹ Reprenons la définition de niveau d'un assembleur fournie par M. Serfati : « les premiers [assembleurs d'une Forme *a priori* syntaxiquement correcte] à être considérés sont ceux de premier niveau, c'est-à-dire ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant et sans qu'il existe d'autres assembleurs avec cette propriété. L'assemblage et la Forme associée sont alors dits de premier niveau. Les assembleurs de second niveau sont ensuite ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant, et tels qu'entre eux, il n'existe que des assemblages de premier niveau¹². Ainsi définit-on assemblages et Formes de second niveau Et ita porro... » [Serfati, 1997, pp. 179-80]. [12] Ou des Lettres-Chiffres ; il faudra néanmoins qu'au moins un assemblage de premier niveau soit effectivement présent. Note dans l'original.

¹² Afin de lever toute ambiguïté.

¹³ Exemple cité dans [Serfati, 1997, p.74].

assembleurs de plus bas niveau, les plus internes et reconstruit progressivement la hiérarchie, appliquant une démarche synthétique¹⁴ (cf. Serfati). Ainsi, l'expression $[5(2+x)]^2$ sera interprétée rhétoriquement par le lecteur à travers la série d'instructions: « Ajoutez le nombre de signe 2 au nombre de signe x. Multipliez le résultat par le nombre de signe 5. Elevez le dernier résultat au carré ».

Or l'expression rhétorique de l'interprétation d'une écriture symbolique, bien que conforme à la visée de l'auteur, révèle un ordre de description inverse à l'expression rhétorique de celle-ci. Prenons l'exemple précité. En effet, si le déchiffrement de l'écriture symbolique par le lecteur commence par l'interprétation des assembleurs de plus bas niveaux (l'instruction d'addition), la volonté première de l'auteur est de représenter symboliquement un « carré » (dont l'exponentié est lui-même le résultat de la multiplication de deux facteurs, etc.), signe qui structure l'expression. En d'autres mots, si l'auteur d'une écriture algébrique est guidé par la signification de celle-ci, le lecteur, quant à lui, l'aborde en commençant par les assembleurs les plus internes, les plus immédiatement reconnaissables sur le plan combinatoire¹⁵.

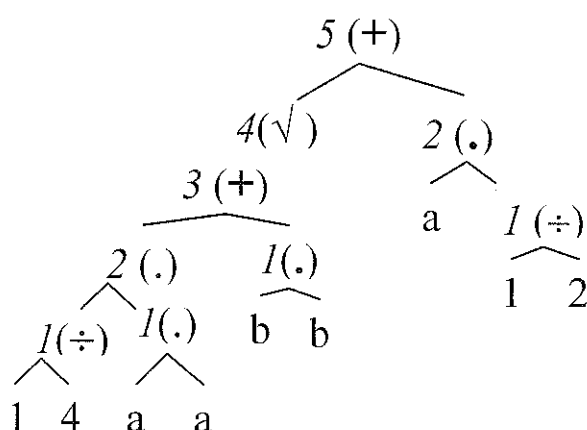
Nous pouvons illustrer cette double démarche, analytique et synthétique, à travers l'examen de ce qu'on appellera « arborescence combinatoire »¹⁶ d'une expression donnée. Prenons, par exemple, l'expression fournie par Descartes de la racine de l'équation $z^2=az+bb$, et l'arborescence correspondante à cet assemblage¹⁷ :

¹⁴ Une démarche qui se veut, soulignons-le-le, purement théorique, rarement effectuée dans la pratique.

¹⁵ Cette double ordination, rattachée aux démarches de reconstruction et de décomposition, traduit deux démarches théoriques, dont la mise en pratique n'est dans les faits ni purement synthétique ni purement analytique. Comme le note Serfati, la lecture effective d'une écriture symbolique relève d'un mélange entre analyse et synthèse, « (...) la synthèse venant après-coup consolider localement les avancées de l'analyse. » [Serfati, 1997, p.101]. De la même façon, pour ne pas perdre de vue la totalité de son expression, l'auteur doit également considérer les assembleurs de plus bas niveau en même temps que ceux conceptuellement plus importants.

¹⁶ Ailleurs repérée.

¹⁷ Nous avons rajouté à l'expression originale des points multiplicatifs afin de faciliter l'analyse syntaxique, et avons également indiqué les niveaux associés à chaque assembleur.



$$\frac{1}{2}.a + \sqrt{\frac{1}{4}.a.a + b.b}$$

1 2 5 4 1 2 1 3 1

Le diagramme présente une racine, correspondant à la représentation de l'assembleur de plus haut niveau puis des branches et feuilles, celles-ci correspondant aux assembleurs de plus faibles degrés (un, dans le cas du signe a , ou zéro).

Les deux démarches évoquées *supra* correspondent alors à deux façons d'explorer l'arborescence.

La procédure analytique, théoriquement propre à l'auteur de l'expression, consiste tout d'abord à examiner la racine, ici de niveau cinq, puis à décrire l'assembleur dont le niveau lui est directement inférieur (c'est-à-dire le signe relatif à racine carré – de niveau quatre – ou celui de la multiplication – de niveau deux). Il s'agit ensuite de choisir, arbitrairement, celle des deux feuilles associées à cet assembleur qu'on va décrire, en commençant, par exemple, par celle de droite, où figure le signe opératoire représentant la multiplication (de niveau deux), puis par la lettre de signe a , pour ensuite remonter à l'assembleur de niveau deux, puis alors descendre au signe opératoire de niveau un et à ses feuilles. Après l'examen de l'assembleur de plus faible degré, l'auteur doit remonter à la racine pour décrire la branche gauche, en commençant par l'assembleur de niveau quatre, puis trois, etc. Soulignons ici que, comme le note Serfati: « la procédure décroissante¹⁸ ne pourra être purement analytique, au sens usuel de ce terme: pour « descendre » de la racine aux feuilles, il faut en effet chaque fois remonter à des niveaux supérieurs intermédiaires ».

D'un autre côté, la procédure synthétique du déchiffreur consiste à examiner en premier lieu toutes les feuilles associées aux assembleurs combinatoirement immédiats, puis à explorer tous les assemblages de niveau deux. Or les feuilles ne sont pas toujours « voisines » sur l'arborescence; ainsi, la procédure ascendante n'est pas davantage purement synthétique dans

¹⁸ Nous dirons descendante. Note de l'auteur.

la mesure où elle ne peut être décrite par un chemin direct, partant des feuilles et « visant » la racine.

Dans l'exercice que nous avons conçu, reproduit ci-après, non seulement la visée de l'auteur (exprimée en langage naturel) est fournie, mais l'expression algébrique correspondante l'est également. Le travail de l'élève consiste alors à mettre en relation l'expression algébrique et sa description rhétorique (deux « produits » théoriquement fournis par l'auteur), parmi un choix d'expressions et de phrases données. L'enjeu de cet exercice se traduit alors, dans le contexte de la double démarche d'exploration d'une écriture algébrique, comme suit: dans quelle mesure un élève¹⁹ qui *a priori* est placé en position de lecteur (puisque'il est face à des écritures symboliques déjà fournies), parvient à se dégager de l'ordre de l'interprétation qu'il en fait pour reconnaître la « structure » de l'expression qui lui est donnée et donc se placer en tant qu'auteur de l'expression ?

Pour les questions suivantes, associer, à chaque expression mathématique, la phrase qui la décrit. Si vous associez « autre », à une expression, préciser la phrase qui la décrit dans le rectangle prévu :
a et *b* représentent deux nombres non nuls.

Question 1

A= $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$:

n°1 : L'inverse du carré de la somme de *a* et *b*

B= $\frac{1}{a^2 + b^2}$:

n°2 : La somme des inverses des carrés de *a* et *b*

C= $\frac{1}{(a + b)^2}$:

n°3 : Le carré de la somme des inverses de *a* et *b*

n°4 : Autre(s) :

¹⁹ L'expérimentation menée dans le cadre de notre thèse montre que cet exercice, présenté tel quel, peut être abordé par des élèves dès la classe de 4^{ème}.

Question 2

$$A = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 : \boxed{}$$

n°1 : Le tiers de la somme des carrés de a et b

$$B = \frac{a^2 + b^2}{3} : \boxed{}$$

n°2 : La somme des carrés des tiers de a et b

$$C = \frac{(a+b)^2}{3} : \boxed{}$$

n°3 : La somme des tiers des carrés de a et b

$$D = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} : \boxed{}$$

n°4 : Le tiers du carré de la somme de a et b

n°5:Autre(s) :

Question 3

$$A = \frac{1}{ab} : \boxed{}$$

n°1 : L'opposé de l'inverse du produit de a et b

$$B = \frac{1}{-a-b} : \boxed{}$$

n°2 : L'inverse du produit des opposés de a et b

$$C = \frac{-1}{ab} : \boxed{}$$

n°3 : L'opposé du produit des inverses de a et b

n°4 :Autre(s)

IV.3 - L' épistémologie en tant qu'outil dans l'analyse de l'accès au symbolisme

Certaines des tâches citées *supra*, dont la conception repose, nous l'avons vu, essentiellement sur les analyses épistémologiques portant sur le symbolisme algébrique, ont été présentées à des élèves de 4^{ème}, dont l'introduction au symbolisme est très récente, et également à des élèves de 2^{nde}, *a priori* déjà familiers avec l'écriture symbolique. Nous explorerons à présent la contribution épistémologique dans l'étude des résultats des expérimentations menées, en commençant par l'examen des réponses apportées à l'exercice ci-dessus mentionné par un élève de 4^{ème} lors d'un entretien individuel²⁰.

L'idée épistémologique liée à la double ordination de l'exploration d'une écriture symbolique nous a en effet permis, entre autres choses, d'analyser, sous le prisme des démarches analytique et synthétique, la « reconstruction » des expressions algébriques par l'élève de 4^{ème}, fussent-elles données en français ou sous forme symbolique.

Considérons dans un premier temps la démarche adoptée par l'élève lorsqu'il cherche à traduire en français l'expression : « $\frac{1}{a^2 + b^2}$ », c'est-à-dire, lorsque l'élève adopte une

démarche allant de la synthèse vers l'analyse. En lisant à haute voix l'expression fournie, dit : « *La somme du carré de a plus b au carré. L'inverse de la somme du carré de a et b* ». Ainsi, lorsque l'élève doit adopter la position d'auteur, il ne traduit pas exactement la démarche théorique de l'auteur, en ce sens où il n'attribue pas immédiatement les différents niveaux aux assembleurs associés. L'élève commence certes par traduire l'assembleur de plus haut niveau en langage naturel (« l'inverse »), mais la suite de sa traduction est encore fortement influencée par sa position de lecteur. En effet, lorsque l'élève aborde la suite de l'expression, sa traduction s'avère un mélange entre analyse et synthèse (« la somme de a au carré plus b au carré »). L'élève commence par traduire, dans une démarche d'auteur, l'assembleur de niveau deux (la somme), mais abandonne momentanément cette position pour traduire l'expression telle qu'il la lit (« a au carré plus b au carré »). Ce n'est que dans un second temps que l'élève homogénéise sa « position » et propose la phrase attendue en suivant le modèle des autres phrases proposées dans l'énoncé : « l'inverse de la somme du carré de a et b ».

²⁰ Nous invitons le lecteur à se reporter à l'intégralité de notre travail [Bardini, 2003] pour plus de détails concernant l'expérimentation menée.

D'un autre côté, lorsque l'élève adopte la démarche inverse, partant de l'analyse vers la synthèse²¹, cherchant à traduire symboliquement l'expression fournie en français : « La somme des tiers des carrés de a et b », dit : « *Et après le D c'est... la somme... des tiers... donc la somme. Donc deux expression mis... divisées par 3 avec un plus au milieu. Après il y a a au carré et b au carré.* »

L'élève ne traite pas l'intégralité de la phrase (« c'est la somme... des tiers... donc la somme. ») et semble avoir besoin, pour poursuivre sa lecture, non seulement de représenter l'assembleur principal et ses arguments (« Donc la somme. Donc deux expressions mis... »), mais toute la syntaxe de l'expression. Une fois les assembleurs de niveau 3 et 2 déterminés (même si ce dernier est une simple ébauche : « deux expressions »), l'élève est capable de saisir l'allure générale de l'expression algébrique, partant de l'assembleur de niveau 2 («... divisées par 3 ») et rappelant l'assembleur principal (« avec un plus au milieu »). En dernier lieu, l'élève traite l'assembleur de niveau 1, qui semble venir comme accessoire dans la composition de l'expression algébrique (« après il y a a au carré et b au carré ») dont le dessin général paraît pour lui tout à fait clair.

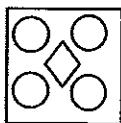
L'analyse épistémologique nous a également conduit à mettre en lumière un type de description intermédiaire entre le rhétorique et le symbolique, présent dans quelques réponses d'élèves, qui tient compte non seulement de la présence de symboles dans le texte produit, mais qui considère aussi l'ordre dans lequel apparaissent les traductions des différents « assembleurs » d'une expression algébrique. Ceci nous a permis de distinguer entre des réponses d'élèves qui auraient pu être, à première vue, mises sur le même plan.

Nous pouvons illustrer ceci en examinant quelques réponses d'élèves de 4^{ème} et de 2^{nde} à la question d de l'exercice reproduit ci-après.

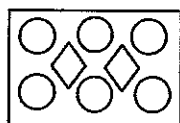
²¹ Un démarche qui ne se veut pas unilatérale : l'édification de l'expression algébrique se révèle le produit d'un constant aller-retour entre la phrase rhétorique et les composantes de l'expression algébrique progressivement assemblées.

Exercice

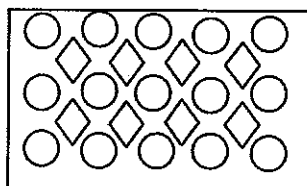
Une marque de chocolat propose des tablettes de différentes tailles, contenant toutes des pépites de chocolat et des noisettes disposées ainsi :



tablette 2x2



tablette 3x2



tablette 5x3

et ainsi de suite.....

Légende : Les cercles représentent les noisettes, les losanges les pépites.

La 1^{ère} tablette est notée 2x2 car il y a 2 noisettes en longueur et 2 noisettes en largeur.

La 2^{nde} tablette est notée 3x2 car il y a 3 noisettes en longueur et 2 en largeur ; et ainsi de suite...

a) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans chacun de ces 3 exemples ?

Tablette 2x2 : Tablette 3x2 : Tablette 5x3 :

b) Combien y a-t-il de pépites de chocolat dans une tablette 11x9 ?

c) Et dans une tablette 20x17 ?

d) Si on ne connaît que le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, peut-on calculer le nombre de pépites d'une tablette? Expliquer (au dos)

e) Existe-t-il des tablettes contenant 12 pépites de chocolat ? Si oui, lesquelles ?

Soit la réponse de l'élève de 4^{ème} : « On peut connaître le nombre de pépite en soustrayant un à la largeur de la plaquette et faire pareil sur la longueur puis les multiplier ensemble car il y a toujours une rangée de moins de pépite que de noisette et une colonne de moins. ». Cet élève fournit une description rhétorique exhaustive de la méthode permettant d'obtenir le nombre de pépites d'une tablette, une fois le nombre de noisettes donné. Or il n'a pas été rare de trouver, parmi les réponses données par les élèves de 2^{nde}, des descriptions également entièrement écrites en français. Cependant, les deux types « rhétoriques » de réponses apportent des renseignements différents quant au rapport des élèves à la formule attendue. Comparons la réponse de l'élève de 4^{ème}, précitée, à celle de l'élève de 2^{nde} : « Il suffit de prendre le nombre de noisettes en longueur moins une noisette pour le bord et multiplier par le nombre de noisettes en largeur moins une pour le bord. » Cette réponse, même si elle est

également écrite entièrement en français, est sensiblement différente de la réponse donnée par l'élève de 4^{ème}. En effet, tandis que ce dernier décrit la formule plutôt comme un processus, l'élève de 2^{nde} la décrit comme s'il lisait, de gauche à droite, la formule attendue. Nous retrouvons un cas similaire illustratif du mode « quasi-littéral » de description entre pépites et noisettes dans la réponse de l'élève de 2^{nde}, qui se rapproche davantage de la formule attendue: « *Si on connaît le nombre de noisettes en longueur et le nombre de noisettes en largeur, en faisant le nombre de noisettes en largeur-1 (car pour chaque rangés de noisettes on enlève une pépite ex : 3 noisettes -> 2 pépites) x nombre de noisettes en longueur-1 = nombre de pépite dans une tablette* ». Ici, non seulement la réponse s'éloigne de la description de type procédural retrouvée dans la majorité des réponses rhétoriques employées par les élèves de 4^{ème}, mais est également composée de symboles lettrés et opératoires. Ainsi, nous dirons qu'elle s'avère véritablement intermédiaire entre rhétorique et symbolique, non seulement de par sa forme mais également de par (l'ordre de) son contenu.

V - Perspectives pour une application dans les EIAH²²

A travers l'analyse de la conception des exercices envisagés, nous avons été conduits, entre autres choses, à considérer la complexité des différentes expressions algébriques proposées, en suggérant notamment que cette notion est intimement liée au type de tâche instancié par l'exercice, ainsi qu'à l'environnement dans lequel celui-ci est proposé (papier-crayon, informatique, etc.).

L'analyse de la complexité des expressions proposées dans les différents types de tâches semble ainsi nous conduire vers un questionnement plus spécifique, relatif aux divers éléments constitutifs des expressions algébriques²³, mettant en rapport trois éléments qui sont apparus, dans le chapitre précédent, comme étant intimement liés : le type de tâche envisagé, la nature des éléments constitutifs des expressions en jeu et la complexité de celles-ci. Ce questionnement peut s'étayer par les interrogations suivantes: un type de tâche étant donné, quelle(s) complexité(s) peut-on envisager pour les expressions en jeu? Quels sont les éléments qui déterminent cette complexité (niveau de l'expression, ramification de son arborescence,

²² Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain.

²³ Nous regrouperons les différents éléments des expressions algébriques en deux catégories : les assembleurs (qui, ici, n'excéderont pas le niveau trois) et les « formes » venant occuper les places ouvertes par ces assembleurs, pouvant être des lettres ou des nombres.

etc.)? De façon plus précise : quelles sont les "variables"²⁴ des expressions algébriques sur lesquelles nous pouvons jouer de façon à garder une certaine pertinence à la tâche proposée et dans quelle mesure les variations apportées sur certains éléments d'une expression algébrique influent-elles sur la complexité de celle-ci ? Finalement, en reprenant la problématique posée dans le chapitre précédent : quelles sont les limites des instanciations de certains types de tâches proposés et dans quelle mesure peut-on, à partir d'un modèle donné, en générer d'autres?

Ce questionnement multiple s'est par ailleurs vu trouver un champ d'application de toute autre nature. L'analyse approfondie de certains types de tâches et du niveau de complexité des expressions qui les composent ont en effet suscité l'intérêt de chercheurs en EIAH qui, travaillant sur la modélisation et le développement d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage de l'algèbre (projet *Lingot*), ont perçu dans cette analyse un point d'appui qui semblait leur permettre de générer de façon automatique un ensemble de tâches susceptibles d'être proposées à des élèves.

Étant donné les différents types d'éléments constitutifs des expressions algébriques, les modifications sur celles-ci peuvent se faire à deux niveaux différents: sur les assembleurs, d'une part ou sur les formes, de l'autre. Prenons un exemple : pour l'expression de niveau deux « $(a+b)^2$ », nous pouvons aussi bien envisager des modifications affectant les assembleurs (remplacer le signe d'addition par celui de la division) que celles affectant les formes (remplacer la lettre a , par exemple, par un nombre donné).

L'analyse que nous avons engagée nous a donné la possibilité d'entrevoir des « familles » de substitutions, en fonction de leurs implications. En effet, selon que les incidences de la génération automatique pouvaient porter sur la traduction rhétorique, le niveau des expressions ou encore la « nature » des assembleurs, certaines classes de substitutions ont dû être écartées.

En ce faisant, prenant en compte le caractère didactique de cette étude (et en particulier l'idée de la pertinence de certaines expressions algébriques pour des élèves que l'application informatique nous a amené à considérer), nous avons été conduits à considérer l'aspect « sémantique » des expressions, ce qui avait été écarté par principe dans les analyses épistémologiques relatives à la substitution.

²⁴ En ce sens qu'elles varient.

Conclusion

Les quelques éléments déjà obtenus semblent finalement ouvrir des perspectives de recherches encourageantes. En effet, le domaine choisi pour amorcer le prolongement de notre travail, les EIAH, nous paraît particulièrement bien adapté pour apporter des réponses à quelques interrogations découlant du présent travail. Sur le plan théorique, tout d'abord, nous avons vu que cette application nous a conduit à raffiner la question de la complexité des expressions algébriques: guidés par le pôle didactique de notre étude, nous avons par exemple vu que le concept de « niveau » d'une expression algébrique a dû être complété par la prise en compte des ramifications de l'arborescence combinatoire de celles-ci. Dans la pratique, ensuite, nous devons souligner que l'environnement informatique permet d'envisager différents « habillages » pour les types de tâches considérés. Or, non seulement nous pouvons diversifier les scénarios pour un même type de tâche, mais aussi les organiser autour de diverses autres activités algébriques où différentes compétences des élèves peuvent être étudiées.

Partant d'un questionnement purement didactique, notre recherche s'est vue progressivement caractérisée par la mise en regard de deux domaines, didactique et épistémologie –leur réunion nous étant apparue incontournable à l'édification de notre projet. Le prolongement de celui-ci semble toutefois pointer vers la mise en rapport de trois champs de recherche, la composante informatique venant s'assembler (*sumballein*) aux deux autres. Une question qui nous semble désormais naturellement émerger est la suivante : comment ces trois champs d'études, didactique, épistémologie et informatique peuvent-ils s'articuler au sein d'une même recherche ? Quelles limites et quelles perspectives se dessinent d'une telle conjonction ?

Bibliographie

- [1] André, D. (1909). *Des notations mathématiques. Énumération, choix et usages*. Paris, Gauthier Villars.
- [2] Babbage, C. (1821). On the influence of Signs in Mathematical Reasoning. *Transactions of Cambridge Philosophical Society (vol.II)*, 325-375. Cambridge.
- [3] Bardini (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique: une approche didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat. Université Paris7.
- [4] Bardini, C. (2001). *Le rapport des élèves à la factorisation en fin de Troisième*. Cahier Didirem 35. IREM Paris 7.

- [5] Cajori, F. (1928). *A History of mathematical notations* (vol. I et II). La Salle, Illinois. The Open Court Publishing Company.
- [6] Dascal, M. (1978). *La sémiologie de Leibniz*. Paris. Aubier-Montaigne.
- [7] Frege, G. (1971). *Ecrits Logiques et philosophiques*. Traduction de Claude Imbert. Paris. Seuil.
- [8] Gablik, S. (1976). *Magritte*. Boston. NY Graphic Society.
- [9] Granger, G-G. (1994). *Formes, opérations, objets*. Vrin. Paris.
- [10] Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Education Studies in Mathematics* 12(3), 317-326.
- [11] Kieran, C. (1996). Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*, 3-12. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.
- [12] Radford L. and Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation* 22(2), 253-276.
- [13] Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra. una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática*. 11(3), 25-53.
- [14] Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics* 22(2), 14-23.
- [15] Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Thèse de Doctorat. Université Paris I.
- [16] Stacey K. and MacGregor M. (1997). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. In E. Pehkonen (Ed.). *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4), 190-197. Lahti.
- [17] Tonnelles, J. (1979). *Le Monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA. IREM d'Aix-Marseille.
- [18] Vuillemin, J. (1962). *La philosophie de l'Algèbre (tome I)*. Paris. Presses Universitaires de France.

SPECIFICITES ET POTENTIALITES DE L'ARITHMETIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

Véronique BATTIE

Equipe DIDIREM - Université Paris 7 ; IUFM de Bretagne

Dans l'enseignement secondaire français, la place de l'arithmétique, arène des nombres par excellence, a fortement varié qualitativement et quantitativement dans l'histoire des programmes. Après des années de purgatoire, elle a réapparu en 1998 en terminale scientifique, dans le cadre de l'enseignement de spécialité et depuis, les classes de troisième et seconde se sont trouvées aussi concernées. Cette réintroduction a été en partie motivée par l'idée que l'arithmétique pouvait favoriser un travail sur le raisonnement mathématique. Une telle évolution curriculaire induit inévitablement des questions didactiques, notamment les suivantes : l'arithmétique des programmes actuels de terminale favorise-t-elle réellement un travail sur le raisonnement mathématique et, si oui, quelles en sont les spécificités ? L'arithmétique enseignée actuellement à ce niveau permet-elle effectivement ce type de travail ? Ce sont ces questions didactiques qui sont au cœur de notre recherche de thèse (Battie, 2003) mais, pour les aborder, un travail épistémologique préliminaire nous a semblé s'imposer afin d'étudier préalablement les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.

De nombreuses recherches didactiques ont abordé, depuis plus de vingt ans, des questions relatives au raisonnement mathématique et à la preuve, c'est-à-dire à la rationalité mathématique. Certaines d'entre elles ont bien mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves et étudiants (cf. par exemple (Dreyfus, 1999), (Hanna, 2000) pour deux publications récentes) ainsi que des spécificités de la rationalité mathématique suivant les domaines (*International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (<http://www-didactique.imag.fr/preuve>)). Cependant, même si, comme nous l'avons mentionné plus haut, le discours « noosphérien » tend à considérer comme une évidence les potentialités offertes par ce champ pour l'apprentissage de la rationalité mathématique, nous n'avons pas directement répondu aux questions que nous nous posons. En effet, au niveau relativement avancé que nous considérons ici, ces potentialités nous semblent avoir été moins systématiquement explorées que ce n'a été le cas pour la géométrie. Il y a à cela des raisons

culturelles évidentes comme l'ont bien montré Grenier et Payan (1998) dans leur travail concernant modélisation et preuve en mathématiques discrètes. C'est pourquoi il nous a semblé nécessaire d'articuler analyses épistémologique et didactique.

L'analyse épistémologique a pour fonction de nous aider à étudier les spécificités des modes de raisonnement qui mettent en jeu les notions d'arithmétique en jeu à ce niveau¹ : divisibilité dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne (algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD), congruences dans $\mathbb{Z}$, entiers premiers entre eux, nombres premiers (existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers), PPCM, théorèmes de Bézout et Gauss. Cette analyse est basée sur l'étude de preuves arithmétiques, historiques et actuelles. Dans un premier temps, nous introduirons, à l'aide d'une démonstration historique, un outil qui en est issu : la distinction, dans le raisonnement, de deux dimensions que nous appelons « organisatrice » et « opératoire » et l'identification des spécificités de ces deux composantes. Cette distinction et ces spécificités nous ont servi à évaluer, a priori, les potentialités de ce champ pour l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement mathématique.

L'analyse didactique a quant à elle pour but d'étudier l'écologie des potentialités révélées par l'analyse épistémologique dans le contexte curriculaire que nous envisageons. Effectuée en s'appuyant sur les résultats et outils issus de l'analyse épistémologique, elle est menée, dans notre recherche de thèse, suivant deux axes principaux : via l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire et via celle de travaux d'élèves. Et, pour chacune de ces analyses, nous avons choisi deux types contrastés de corpus, opposés en quelque sorte si l'on considère les contraintes institutionnelles auxquelles ils sont assujettis : les corpus en jeu pour le premier axe d'analyse sont les sujets du baccalauréat et des brochures destinées aux enseignants et, pour le second axe, il s'agit des copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat et les transcriptions d'une séance de recherche en groupes en classe de terminale scientifique (TS). Nous n'abordons ici que l'axe relatif à l'analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques en nous centrant sur la séance de recherche qui a été proposée aux élèves d'une classe de TS en collaboration avec leur enseignante animatrice à l'IREM Paris 7. A travers cet exemple nous montrerons la pertinence didactique de l'outil d'analyse issu du travail épistémologique.

¹ A propos de ces modes de raisonnement, nous parlerons dans la suite de *raisonnement en arithmétique*, pour bien les distinguer du *raisonnement arithmétique* identifié dans les recherches sur l'algèbre et notamment sur la transition arithmétique-algèbre (Schmidt (2002)). Pour ces raisonnements en arithmétique, le symbolisme algébrique fonctionne comme un outil supposé suffisamment maîtrisé par ces élèves de terminale scientifique.

1. Dimensions organisatrice et opératoire du raisonnement en arithmétique

1.1. “ Il n'existe pas de triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un carré ”.

Nous avons choisi d'introduire la distinction entre dimension organisatrice et dimension opératoire à l'aide du résultat énoncé ci-dessus concernant les triangles rectangles en nombres (c'est-à-dire dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers). Nous proposons ci-après une démonstration de ce résultat inspirée de la preuve de Frenicle (1605 ?-1675), étudiée, en particulier, avec l'aide de l'ouvrage de Goldstein (1995). Malgré l'antériorité de la preuve de Fermat (1601-1665), nous avons choisi celle de Frenicle parce qu'elle nous semble plus adéquate pour illustrer notre propos. Nous aurons besoin, pour cette preuve, des deux résultats suivants :

Théorème fondamental : Si le produit de deux nombres entiers a et b premiers entre eux est un carré, il en est de même de ces deux nombres.

Démonstration : On pose $ab=c^2$ et on écrit la décomposition en facteurs premiers de c comme suit : $c=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Dans la décomposition en facteurs premiers de c^2 , l'exposant de chaque facteur premier est pair. a et b étant premiers entre eux, chaque nombre de la forme $p_i^{2\alpha_i}$ ($i \in I=\{0, \dots, n\}$) est un diviseur de a ou, de manière exclusive, de b . On en déduit que a et b sont donc des carrés.

Paramétrisation : Pour que trois entiers x , y et z supérieurs ou égaux à 1, constituent une solution primitive (x , y et z premiers entre eux dans leur ensemble) de l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, avec par exemple x pair, il faut et il suffit qu'il existe deux entiers p , q supérieurs ou égaux à 1 avec $p > q$, premiers entre eux et de parité différente, tels que, à l'ordre près des deux premiers termes, on ait $x=2pq$, $y=p^2 - q^2$, $z=p^2 + q^2$.

Démonstration : La condition est clairement suffisante ; elle est aussi nécessaire. En posant $x=2x'$, on a $(2x')^2=(z - y)(z + y)$. Les deux facteurs de droite ont 2 pour seul diviseur commun, car un tel diviseur doit diviser leur somme $2z$ et leur différence $2y$, or y et z sont impairs et premiers entre eux. Le produit $\frac{z-y}{2} \times \frac{z+y}{2}$ est donc le produit de deux entiers premiers entre eux et il est égal à un carré x'^2 . Donc d'après le théorème fondamental, chaque

facteur est égal à un carré, soit : $\frac{z-y}{2}=q^2$ et $\frac{z+y}{2}=p^2$, et finalement : $y=p^2-q^2$, $x=2pq$, $z=p^2+q^2$; il est facile de vérifier de plus que les nombres p et q sont premiers entre eux et de parité différente.

Venons-en maintenant à la démonstration proprement dite dont le lecteur trouvera en annexe un organigramme partiel (première étape).

Préliminaires : on raisonne par l'absurde : Soit $T1=(x,y,z)$ un triangle rectangle en nombres entiers (c'est-à-dire tel que x, y et z soient des entiers vérifiant : $x^2+y^2=z^2$), premiers dans leur ensemble (triangle primitif), et d'aire carrée. Il s'agit d'obtenir, dans la première étape de la démonstration, un deuxième tel triangle noté $T2=(X,Y,r)$, tel que $r < z$.

Avant cela, démontrons que x et y sont de parité différente :

- Si x et y étaient pairs tous les deux, il en serait de même de z . 2 serait alors un diviseur commun de x, y et z , contrairement au fait que x, y et z sont premiers dans leur ensemble.
- Si x et y étaient impairs tous les deux, ils seraient, ainsi que leurs carrés, congrus à 1 modulo 2. On aurait alors z^2 congru à 2 modulo 4, ce qui est impossible pour un carré.

x et y sont donc de parité différente et nous pouvons supposer x pair.

Première étape (construction d'une solution plus petite) : nous considérons le triangle $T1=(x,y,z)$, introduit en préliminaire :

- (1) x, y et z sont premiers dans leur ensemble avec x pair et tels que : $x^2+y^2=z^2$.
- (2) Il existe un entier k tel que $xy=2k^2$.

D'après (1), nous avons la paramétrisation suivante :

$$x=2pq \quad y=p^2-q^2 \quad z=p^2+q^2,$$

avec p et q entiers premiers entre eux et de parité différente (on suppose q pair dans la suite).

Comme x est pair, il existe x_1 tel que $x=2x_1$, et donc, d'après (2), $x_1y=k^2$. Alors, d'après le théorème fondamental, comme y et x_1 sont premiers entre eux, il existe a et b entiers tels que : $x=2a^2$ et $y=b^2$. On en déduit d'une part, que $pq=a^2$ et donc, à nouveau par le théorème fondamental, qu'il existe r et s entiers tels que $p=r^2$ et $q=s^2$, d'autre part que $y=b^2=p^2-q^2$, donc que $p^2=b^2+q^2$. On obtient alors grâce à la paramétrisation, puisque p, b et q sont premiers dans leur ensemble, l'existence de X et Y , entiers premiers entre eux tels que :

$$q=2XY \quad b=X^2-Y^2 \quad p=X^2+Y^2.$$

On a : $p=r^2=X^2+Y^2$. Le triangle (X,Y,r) est donc rectangle en nombres entiers premiers deux à deux. De plus, comme q est pair, s est pair. On pose $s=2s_1$. Ainsi $q=2XY=(2s_1)^2$ d'où $XY=2s_1^2$ et le triangle (X,Y,r) est d'aire carrée. En conclusion, le triangle (X,Y,r) , que l'on notera T_2 , est primitif d'aire carrée et tel que $r < z$.

Deuxième étape (la descente) : en répétant le procédé, on construit une suite strictement décroissante de triangles d'aire carrée, donc d'entiers naturels (en considérant la longueur de l'hypoténuse de chacun de ces triangles), ce qui est impossible. En conclusion, il n'existe pas de triangle primitif rectangle en nombres dont l'aire soit un carré.

Troisième (et dernière) étape : il reste à montrer que s'il n'existe pas de triangle primitif rectangle en nombres d'aire carrée, alors il n'existe pas de triangle rectangle en nombres d'aire carrée ; ce qui ne pose pas de difficulté.

1.2. Analyse en termes de dimensions organisatrice et opératoire

Selon nous, la démonstration précédente offre l'avantage de bien mettre en évidence la distinction entre deux dimensions dans le raisonnement en arithmétique, que nous choisissons d'appeler *dimension organisatrice* et *dimension opératoire*. Cette distinction est particulièrement claire ici parce que les deux dimensions ne font pas appel au même type de propriétés. En effet, dans $\mathbb{Z}$ on peut distinguer deux types de propriétés selon l'ordre envisagé :

- nous parlons de *propriétés de divisibilité* en référence à l'*ordre divisibilité*, partiel, auquel est associé la structure d'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$,
- nous parlons de *propriétés topologiques* en référence à l'*ordre naturel*, total, auquel est associé l'ensemble bien ordonné $(\mathbb{Z}, \leq)$,

la relation d'ordre naturel étant compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$ et la multiplication dans $\mathbb{N}$. Dans la démonstration envisagée ici, alors que les techniques de calcul rencontrées dans la démonstration reposent sur des propriétés de divisibilité, le raisonnement sur lequel elle repose s'appuie essentiellement sur la propriété topologique : « Toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie ».

D'une manière générale, selon cette distinction :

- *la dimension organisatrice* s'identifie au raisonnement global (on pourrait parler du « squelette » de la démonstration) qui traduit la mise en acte d'une visée. Ce raisonnement organise et structure les différentes étapes ; il nous permet de comprendre l'idée générale de la démonstration. Dans la démonstration présentée ici, celle-ci s'identifie à la descente infinie, célèbre invention de Fermat. Outre cette méthode et les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde, très présent, on identifie essentiellement au niveau de la composante organisatrice le raisonnement par récurrence qui constitue, de même que la descente infinie, un mode d'exploitation dans le raisonnement de la propriété de bon ordre de l'ensemble N , les raisonnements par disjonction de cas et par recherche exhaustive² avec ou non limitation préalable du nombre de cas à étudier. L'analyse a aussi permis de mettre en évidence une méthode propre aux anneaux factoriels³ que nous dénommons « jeu d'extension-réduction ». Cette appellation renvoie à son principe (on pourrait parler de méta-méthode) qui se retrouve dans d'autres champs des mathématiques tels l'analyse ou l'algèbre linéaire.
- *La dimension opératoire* : il s'agit de tout ce qui relève des techniques de calcul utilisées au fil de la démonstration qui permettent de mettre en œuvre les différentes étapes du raisonnement suivi. L'analyse du côté opératoire est menée dans notre recherche de thèse en prenant en compte à la fois l'utilisation de théorèmes-clefs, les différentes manipulations algébriques, les formes de représentations des objets employées et la structure de Z qui est privilégiée (articulation entre la structure d'anneau de $(Z, +, \times)$ et celle d'ensemble bien ordonné de $(Z, \leq)$ relative aux deux ordres divisibilité et ordre naturel). Dans la démonstration que nous venons d'exposer, chacun de ces quatre pôles sont en jeu. Les deux premiers pôles mentionnés (utilisation de théorèmes-clefs et manipulations algébriques) apparaissent à la lecture de l'organigramme que nous

² Dans le cadre de la résolution d'un problème, on appelle *méthode de recherche exhaustive* une méthode où l'on teste successivement, après les avoir identifiées, toutes les solutions potentielles. Nous distinguons la *recherche exhaustive au sens large* de la *recherche exhaustive au sens strict* au sens où la première comporte un travail préalable de limitation de la recherche.

³ Elle intervient lorsqu'il s'agit de montrer qu'une propriété est vraie pour tout élément n de l'anneau Z . Cet anneau étant factoriel, si l'on montre que la propriété est multiplicative (au sens où si elle vraie pour deux éléments de Z , alors elle est encore vraie pour leur produit) et qu'elle est vraie pour tout nombre premier, alors elle sera vraie pour tout entier.

avons proposé. Et, ce qui est « encapsulé » dans les deux théorèmes en jeu renvoie pour l'un (la paramétrisation) au pôle algébrique et l'autre (le théorème fondamental) à la structuration autour des nombres premiers. L'articulation entre $(\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{Z}, \leq)$ est présente au niveau de la mise en acte de la visée de construire une solution plus petite (au sens de l'ordre naturel) : l'emploi de la paramétrisation introduit un diviseur-clef qui, par définition, est plus petit que l'un des objets initiaux (le diviseur en question est l'entier noté p , racine de la mesure de l'hypoténuse du deuxième triangle, et l'objet initial est l'entier noté x , mesure de la longueur d'un des côtés autre que l'hypoténuse du premier triangle ; la relation en jeu est $x=2pq$). L'autre élément opératoire intervenant dans la construction d'un objet plus petit correspond à une simple manipulation algébrique ($x < x^2+y^2$).

Cette distinction entre composantes organisatrice et opératoire ne sous-entend en aucun cas que les différents calculs excluent le raisonnement. Dans une démonstration arithmétique, chaque sous-étape met en jeu des raisonnements, qui, a priori, sont propres à la dimension opératoire. Ces raisonnements sont souvent loin d'être triviaux, et parfois même plus complexes que ceux relatifs à la dimension organisatrice, le cas de la preuve proposée en est un exemple éclatant.

Soulignons également que la distinction explicitée ici n'est pas, non plus, a priori, propre à l'arithmétique, mais ce qui nous intéresse, ce sont ses spécificités dans le champ de l'arithmétique.

L'existence, au sein du raisonnement en arithmétique, des grandes catégories organisatrices mentionnées précédemment contribue sans aucun doute aux potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage de la rationalité mathématique. Mais les potentialités de ce champ nous apparaissent aussi liées, à l'issue de l'analyse épistémologique, à la diversité des outils arithmétiques susceptibles d'intervenir dans les phases opératoires du raisonnement et à celle de leur combinatoire possible (la démonstration ci-dessus en donne un aperçu), ainsi qu'aux interactions entre les deux dimensions dans un raisonnement donné. En effet, les deux composantes explicitées ici ne doivent pas être vues comme indépendantes : elles interagissent et le travail que nous avons fait par exemple sur le thème « sommes de deux

carrés »⁴, montre que les imbrications peuvent être très complexes. A chaque sous-dimension organisatrice est associée une dimension opératoire ; au sein de chaque méthode, on trouve tout un jeu opératoire, qui lui-même peut mettre en scène d'autre(s) méthode(s) pouvant être vue(s) comme de nouvelle(s) dimension(s) organisatrice(s). Autrement dit, on observe que des sous-dimensions organisatrices naissent dans le jeu opératoire qui règne au sein d'autres dimensions organisatrices, s'imbriquant les unes dans d'autres. Ces interactions deviennent particulièrement visibles quand on compare plusieurs démonstrations différentes d'un même résultat⁵.

Il y a donc là, à propos d'un univers familier pour les élèves du secondaire: celui des nombres entiers où de nombreuses questions peuvent se formuler et comprendre aisément, un univers du raisonnement, à la fois solidement structuré, qui peut être instrumenté par des outils opératoires efficaces, avec une marge de jeu dans la complexité tant dans les deux dimensions distinguées que dans leur interaction qui ouvre effectivement a priori des potentialités intéressantes à l'apprentissage et l'enseignement de la rationalité mathématique. Qu'en est-il de ces potentialités a priori, si l'on analyse le fonctionnement d'élèves dans le cadre des programmes et de l'enseignement actuel ? C'est la question que nous abordons dans la partie suivante, en nous basant sur des données recueillies dans une classe de terminale S. D'un point de vue plus théorique, cette expérimentation en particulier a été pour nous l'occasion de tester la pertinence didactique des outils issus de l'analyse épistémologique que nous venons de présenter, comme nous allons essayer de le montrer à présent.

2. Exploitation Didactique : analyse du processus de production d'une preuve arithmétique par des élèves

Comme nous le précisons en introduction, nous avons choisi pour l'analyse didactique de contraster les corpus et, pour l'analyse de travaux d'élèves en particulier, nous avons d'une part analysé des copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat et d'autre part préparé, en collaboration avec une enseignante animatrice à l'IREM Paris 7, une

⁴ **Théorème** : Soit n un entier naturel non nul et $n = \prod_{p \in P} p^{v_p(n)}$ sa décomposition en nombres premiers (P est l'ensemble des nombres premiers). On pose $\Sigma = \{a^2 + b^2 ; a, b \in \mathbb{N}\}$. Les conditions $n \in \Sigma$ et $v_p(n)$ est pair pour tout $p \in P$ tel que $p \equiv 3 [4]$ sont équivalentes.

activité de recherche sur une question de rationalité et observé son déroulement dans la classe de cette enseignante. En organisant cette expérimentation, nous avons cherché à observer les élèves dans un cadre aussi peu contraint que possible. Mais nous avons aussi choisi de proposer aux élèves des tâches se situant quelque peu aux limites de la culture d'enseignement étudiée dans cette recherche. Cette stratégie de recherche consistant à se situer à la marge du système que l'on étudie est assez fréquente en didactique. Elle a l'avantage de permettre d'observer des phénomènes intéressants qui seraient moins visibles dans des situations plus ordinaires et c'est pourquoi nous l'avons retenue. Le corpus correspondant est constitué des productions écrites des groupes d'élèves ainsi que des transcriptions de l'enregistrement audio des discussions au sein des groupes et des brouillons. Les deux types de corpus envisagés pour l'analyse de travaux d'élèves permettent également d'avoir accès dans la recherche à deux types de production différents : dans le premier cas, nous avons accès à un produit fini réalisé pour l'enseignant, dans le second cas, nous avons également accès à ce produit fini mais aussi à l'intimité du processus de recherche ; étant donné le lissage et la concision attendues d'une démonstration mathématique écrite ainsi que les contraintes institutionnelles qui pèsent sur ce type d'objet, on peut penser que les interactions entre dimensions organisatrice et opératoire vont être plus visibles dans le second cas.

D'un point de vue méthodologique, pour chacun des deux groupes d'élèves étudiés, nous avons, après avoir analysé la production écrite remise à l'enseignante à la fin de la recherche, précisé l'itinéraire suivi. Puis, dans un troisième temps, nous avons procédé à des « zooms » localisés à partir de l'analyse des éléments mentionnés précédemment.

Les tâches en jeu sont les suivantes : production d'une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, passage à l'étude de $\sqrt{3}$, comparaison de leur preuve de $\sqrt{2}$ à trois preuves fournies (par descente infinie, par l'absurde et minimalité, en utilisant la structuration autour des nombres premiers), production de preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et généralisation à partir du support des preuves fournies. Ainsi, ce que nous proposons aux élèves, à l'exception de la première tâche qui correspond à un problème déjà rencontré en classe, est en rupture avec ce qui

⁵ La comparaison de preuves de Fermat et Frenicle du résultat présenté ici nous a permis dans notre travail de mettre en évidence un des aspects de ces interactions en pointant un élément essentiel y participant : les objets sur lesquels porte le travail opératoire ont une influence directe sur l'organisation des preuves.

« vit » dans l'enseignement où, généralement, le niveau organisateur n'est pas sous leur responsabilité pour les tâches non routinières⁶.

Nous nous centrerons ici sur l'étude de la rationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$; le texte proposé aux élèves était le suivant :

Rationnel ou irrationnel ?

On rappelle qu'un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers a et b ($b \neq 0$) tels que $x = \frac{a}{b}$. Etudier la rationalité d'un nombre x , c'est s'intéresser à la question « x est-il rationnel ou irrationnel ? ». Problème : Etudier la rationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

Après avoir indiqué des éléments d'analyse a priori centrés sur notre analyse mathématique en termes de dimensions organisatrice et opératoire, nous présenterons les points forts de l'analyse de cette première partie de la recherche des deux groupes d'élèves en les éclairant si besoin à l'aide de l'analyse a posteriori du reste de cette recherche.

2.1. Eléments de l'analyse a priori.

Avec la définition d'un nombre rationnel (celle-ci est rappelée aux élèves), il est naturel de supposer que le nombre envisagé est rationnel, que l'on ait ou non une opinion quant à la rationalité de ce nombre ; supposer le contraire semble en effet difficilement exploitable étant donné que cela correspond à une non-existence d'objets. Dans le cas d'un nombre irrationnel, les preuves correspondantes ont donc pour pensée organisatrice générale un raisonnement par l'absurde.

Un élément entre en jeu au niveau de cette organisation générale : la fraction $\frac{a}{b}$ est-elle choisie irréductible ? Selon que l'on particularise ou non ainsi cette fraction, la contradiction (visée dans le cas où l'on conjecture que le nombre est irrationnel) à laquelle on aboutit en suivant un raisonnement par l'absurde ne sera pas, *a priori*, la même. On peut aussi prévoir des différences induites au niveau opératoire. Pour cette raison en particulier, nous proposerons au moins deux preuves, pour envisager ces deux possibilités.

⁶ Nous renvoyons en particulier à notre analyse des sujets du baccalauréat (Battie, 2003).

Du côté opératoire, la conscience du champ concerné par l'arithmétique (enseignée en TS) amène à élever au carré les deux membres de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. En effet, face à la question « x est-il un nombre rationnel ou irrationnel ? », les outils de l'arithmétique ne sont pas à disposition. L'égalité à partir de laquelle le travail va se poursuivre est donc $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ou encore $2b^2 = a^2$.

A partir de là, différentes preuves sont possibles et, dans ce qui suit, nous allons rendre compte de cette variabilité dans le cas où $x = \sqrt{2}$. Nous étudierons dans un second temps le passage à l'étude de $\sqrt{3}$.

2.1.1. Différentes preuves de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

A partir du traitement opératoire initial (élever au carré), plusieurs preuves sont possibles. Nous considérons tout d'abord une preuve utilisant le caractère factoriel de l'anneau $\mathbb{Z}$ que nous dénommons fondamentale ; comme nous le verrons par la suite, celle-ci se généralise bien. « Voir les entiers sous leur forme factorisée » définit l'élément essentiel de l'opérateur qui est d'écrire les entiers sous leur forme factorisée. Cette « écriture » peut être opérationnalisée avec la notation de la valuation 2-adique et la preuve est alors la suivante :

Preuve fondamentale

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. D'où : $2b^2 = a^2$ et en prenant la valuation 2-adique :

$$1 + 2 v_2(b) = 2 v_2(a)$$

D'où une contradiction.

Soulignons que cette preuve ne suppose pas la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible.

Malgré son caractère économique, ce n'est pas cette preuve que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire. Celle qui existe est plus liée à une dimension historique (Euclide) et privilégie un travail en termes de divisibilité.

Deux lectures possibles en termes de divisibilité

A partir de l'égalité $2b^2 = a^2$ ou $2 = \frac{a^2}{b^2}$, on peut raisonner en termes de divisibilité sans faire appel à la décomposition en facteurs premiers. Les preuves correspondantes se généralisent plus difficilement et la composante opératoire se complexifie, ce dont notre

analyse mathématique rend compte. Si, par exemple, on travaille à partir de $2b^2=a^2$, deux sens de lecture en termes de divisibilité sont possibles :

- 2 et b^2 divisent a^2 . Cette lecture est la plus fréquente. Elle découle directement de la définition de la divisibilité.
- a^2 divise $2b^2$. Cette lecture est tout à fait extra-ordinaire : elle ne vit pas dans l'institution scolaire en particulier. Elle correspond à une perte d'information : a^2 est égal à $2b^2$ donc en particulier a^2 divise $2b^2$.

Pour éliminer un cas de la première lecture et poursuivre si l'on adopte la deuxième, il est judicieux de supposer a et b premiers entre eux ; on particularise la pensée organisatrice en supposant la fraction irréductible. Remarquons que ce caractère d'irréductibilité correspond à une pratique usuelle lorsque l'on travaille sur les rationnels ; dans l'enseignement secondaire en particulier, cela relève presque de l'automatisme.

Supposons que a et b sont premiers entre eux et poursuivons en reprenant les deux lectures possibles. Elles nous conduisent respectivement à :

- 2 divise a^2 ou encore a^2 est pair : il s'agit alors de raisonner en termes de parité.
- Le théorème de Gauss permet d'en déduire que a^2 divise 2.

L'inversion dans le sens de lecture se retrouve dans ces deux conclusions.

A noter que dans les deux cas est intervenu le résultat « si deux entiers sont premiers entre eux, leurs carrés le sont aussi ».

La première lecture correspond à la preuve dite classique : de l'égalité $2b^2=a^2$ on déduit que a^2 est pair donc que a est pair, puis que b^2 et b le sont aussi ; la contradiction est établie relativement au caractère irréductible de la fraction.

La deuxième lecture quant à elle conduit à une preuve que l'on peut qualifier d'originale et que nous présentons à présent.

Une preuve originale

Pour la suite du traitement de la deuxième lecture, nous renvoyons à l'article de Henry, *Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ?!* (2001). Reprenons là où notre développement s'était arrêté (a^2 divise 2) ; $a^2 \in \{1, 2\}$:

- $a^2=2$ est exclu car 2 n'est pas un carré parfait.
- Si $a^2=1$, $b^2=\frac{1}{2}$; ce qui est impossible par définition de b .

Dans les deux cas, on aboutit donc à une contradiction. Et on constate que le caractère irréductible de la fraction n'intervient plus dans la formulation de la contradiction.

L'«aveu» que Henry fait dans la conclusion de son article, témoigne de l'originalité du mode de lecture qui a donné naissance à cette preuve, au-delà de l'institution scolaire :

«Je dois maintenant un aveu aux lecteurs (lectrices) qui ont bien voulu me suivre jusqu'ici. J'ai trouvé la petite démonstration de cette propriété dans une copie de CAPES interne. [...]

Le candidat devait montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Sans doute encore stressé en début d'épreuve, partant de l'égalité $a^2=2b^2$, au lieu de remarquer que 2 est diviseur de a^2 , il considérait maladroitement a comme diviseur de $2b^2$. Obtenant finalement une contradiction, il concluait que l'hypothèse $\sqrt{2}$ rationnel absurde, sans faire intervenir la parité de a et b , comme il se doit dans la démonstration classique. J'allais conclure à la faiblesse de son argumentation (et à un méchant 0 à la question) et passer à côté d'un joli résultat. Mais, pris d'un doute, j'ai relu attentivement la copie.» (Henry, 2001)

L'exemple de la copie de CAPES en question illustre comment le développement d'un traitement opératoire (lecture en termes de divisibilité) peut amener à une preuve, et donc en particulier à une organisation, qui ne vit pas dans une institution donnée.

Dans le cadre d'un travail en termes de divisibilité, nous avons jusqu'à présent supposé la fraction en jeu irréductible, ce que nous ne faisons plus à présent.

Descente infinie

En spécifiant le raisonnement par l'absurde qui constitue l'organisation générale, on peut parvenir autrement à une contradiction qu'en supposant la fraction en jeu irréductible ; les preuves données ci-après le montrent bien. Nous proposons dans un premier temps une preuve par descente infinie et nous utilisons ensuite un raisonnement par l'absurde et minimalité⁷, logiquement équivalent à la méthode de descente infinie :

Preuve par descente infinie

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe alors a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

De même que dans la preuve dite classique, on montre que a et b sont pairs.

Ainsi à partir du couple (a,b) on obtient le couple (a',b') d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}.$$

$$a' < a$$

⁷ Admettre l'existence d'un représentant irréductible pour toute fraction permet de ne pas avoir recours à ces deux catégories d'organisation.

$$b' < b$$

On peut donc construire une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante (en considérant par exemple la suite des abscisses des couples obtenus), ce qui est impossible puisque toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

Preuve par l'absurde et minimalité

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, l'ensemble E des entiers naturels a tels qu'il existe b (entier naturel non nul) tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ n'est pas vide. Ainsi, cet ensemble admet un plus petit élément que l'on note a_0 .

Comme dans la preuve dite classique, on montre que a_0 et b_0 sont pairs.

On obtient donc a_0' appartenant à E tel que $a_0' < a_0$, ce qui contredit le caractère minimal de a_0 .

Nous pouvons réécrire la preuve par descente en explicitant l'ensemble E pour mettre en évidence le lien entre ces deux preuves. De plus, nous pouvons écrire une démonstration par récurrence en prenant pour hypothèse de récurrence :

$P(n)$: « Il n'existe pas d'élément x de l'ensemble E tel que $x < n$. »

Le caractère héréditaire est établi par contraposée en reprenant ce qui a été fait dans la preuve par descente ; la pensée organisatrice est différente de celle structurant les preuves données jusqu'à présent : le raisonnement par l'absurde disparaît.

Ainsi, la spécification de la pensée organisatrice donne naissance à des preuves par l'absurde distinctes ; cette spécification se lit en particulier au niveau de la contradiction établie. Les preuves concernées ici (y compris la preuve par récurrence) se différencient donc aux niveaux organisateur et opératoire mais ont en commun l'étape opératoire aboutissant au résultat : « si le carré d'un nombre est pair alors il est lui-même pair ». Celle-ci est analysée lors de l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ que nous abordons à présent.

2.1.2. De $\sqrt{2}$ à $\sqrt{3}$: seul l'opérateur varie

Si l'on reprend les preuves données précédemment, on peut décontextualiser les différentes organisations pour démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Une adaptation est à faire néanmoins du côté opératoire. En mettant momentanément la preuve dite fondamentale de côté, nous avons besoin d'établir que « si le carré d'un nombre est divisible par trois alors il est lui-même divisible par 3 », correspondant au résultat « si le carré d'un nombre est pair alors il est lui-même pair » dans le cas de $\sqrt{2}$. Ce dernier peut être démontré de différentes manières :

- Par contraposée : la dimension opératoire dépend alors du type de traduction du caractère impair de x . Considérons par exemple les trois traductions suivantes : $x \equiv 1[2]$, il existe un entier k tel que $x = 2k + 1$, l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de x est nul, le travail correspondant sur x^2 est différent dans chaque cas.
- Par disjonction de cas sur l'ensemble des entiers, basée sur la relation de congruence modulo 2 : on retrouve la même discussion que précédemment ; la résolution antérieure est un des cas de la disjonction envisagée ici. La différence se situe essentiellement au niveau organisateur : on travaille sur l'implication à établir directement et non en utilisant sa contraposée.

Dans le cas de $\sqrt{3}$, la dimension organisatrice se complexifie : en suivant un raisonnement par contraposée, on est amené à faire une disjonction de cas sur l'ensemble des entiers non multiples de 3 (pour $\sqrt{2}$, elle se réduit à l'examen du cas impair), basée sur la relation de congruence modulo 3. Si l'on choisit d'utiliser la décomposition en facteurs premiers pour traiter ce sous-problème, aucune sous-dimension organisatrice n'apparaît. Ce phénomène ne doit pas nous étonner puisque plus on est proche du ressort fondamental du résultat général sous-jacent (caractère factoriel de l'anneau $\mathbb{Z}$), moins des adaptations sont à faire pour passer d'une preuve à l'autre. Cela se retrouve d'ailleurs lorsque l'on revient à la preuve fondamentale : il suffit de remplacer la valuation 2-adique par la valuation 3-adique ; l'égalité permettant d'aboutir à une contradiction devient $1 + 2 v_3(b) = 2 v_3(a)$.

2.1.3. Vers une généralisation

Il est mathématiquement naturel d'inscrire les études de rationalité de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ dans un questionnement plus large : l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ peut être vue comme cas particulier du résultat général « Soit a et b deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel si et seulement si a et b sont des carrés ». L'explicitation du ressort fondamental joue un rôle essentiel puisque c'est elle qui donne accès à une preuve de ce résultat général :

La condition « a et b sont des carrés » est clairement suffisante ; montrons qu'elle est nécessaire : Supposons donc que $\sqrt{\frac{a}{b}}$ est rationnel, il existe deux entiers naturels non nuls x et

y tels que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y}$. D'où : $ay^2 = bx^2$ (*). Supposons par l'absurde que a ne soit pas un carré, il existe p premier tel que $v_p(a)$ soit impair. a et b étant premiers entre eux, $v_p(b)$ est nul. Ainsi, on obtient à partir de (*) $v_p(a) + 2v_p(y) = 2v_p(x)$, D'où une contradiction ($1 \equiv 0$ [2]).

Ainsi, si on en revient au travail sur les études particulières de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$, on constate que la dialectique qui s'opère entre dimensions organisatrice et opératoire peut fonctionner dans les deux sens :

- « De l'opératoire vers l'organisateur » : l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers au niveau de l'étape opératoire peut mettre sur la voie, non seulement d'une autre preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (preuve dite fondamentale), mais sur celle d'une preuve du résultat général en jeu. Les autres traductions (il existe un entier k tel que $x = 2k + 1$ et $x \equiv 1$ [2]), en revanche, n'aident pas directement à l'élaboration d'une telle preuve, même si elles donnent les éléments pour démontrer l'irrationalité de la racine d'un entier autre donné (non carré parfait).
- « De l'organisateur vers l'opératoire » : comme nous l'avons déjà vu, lorsque l'on raisonne par l'absurde, le fait de considérer la fraction envisagée comme irréductible implique des traitements opératoires autres que ceux rencontrés dans un raisonnement où l'irréductibilité n'intervient pas.

Cette analyse mathématique en termes de dimension organisatrice et dimension opératoire amène à s'interroger particulièrement sur les points suivants :

- Des éléments organisateurs ou opératoires de la preuve attendue par l'enseignante vont-ils apparaître ? Cette preuve va-t-elle émerger complètement dans la recherche des élèves ?
- Trouve-t-on des éléments nouveaux, tant du côté opératoire qu'organisateur, dans la recherche des élèves ? Ceux-ci conduisent-ils ou conduiraient-ils à une autre preuve que celle attendue par l'enseignante ?
- D'une manière générale, où se situent les difficultés rencontrées par les élèves dans le processus de construction d'une preuve ?
- Comment interagissent les dimensions organisatrice et opératoire, que ce soit lors de l'étude de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ ou de $\sqrt{3}$, ou, lors de l'éventuel passage d'une étude à l'autre ?

2.2. Eléments de l'analyse a posteriori.

La preuve naturellement attendue par l'enseignante pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est la preuve euclidienne classique ; cette preuve a en effet déjà été rencontrée en classe. Soulignons tout d'abord que, contrairement à l'image donnée par les productions écrites, l'étude de la recherche des élèves montre clairement que lorsque l'« écriture » de cette preuve passe sous leur responsabilité, les choses deviennent problématiques. De plus, la diversité des résolutions possibles pointée par l'analyse mathématique émerge comme nous allons le détailler un peu dans ce qui suit.

Comme nous le prévoyions *a priori*, le texte fourni aux élèves introduit naturellement l'objet fraction dans le travail des élèves. Nous avons eu confirmation que les rationnels sont envisagés automatiquement par les élèves à travers leur représentant irréductible. Certains éléments d'analyse *a posteriori* conduisent d'ailleurs à se demander si cet automatisme n'est pas vu par certains comme une véritable obligation. Mais il faut aussi souligner que cette introduction de l'objet fraction irréductible, induite par l'énoncé et l'usage, n'est pas d'emblée associée consciemment à la mise en acte d'une visée, et en particulier d'une visée de raisonnement par l'absurde. Et l'on voit bien par ailleurs, à plusieurs reprises dans les corpus, comment, lorsque cette visée devient consciente, la conviction que se sont forgée les élèves que $\sqrt{2}$ est irrationnel, perturbe la mise en œuvre du raisonnement hypothético-déductif ici nécessaire ; l'extrait qui suit en témoigne :

Extrait 1

B1 : Eh déjà on a triché parce qu'on est parti sur le fait que c'est irrationnel. Faut partir sur le fait qu'on sait pas.

B3 : Ouais ben oui de toute manière c'est ça qui faut montrer. A mon avis faut que tu/

B2 : Attends, si.

B3 : Partes du fait qu'on sait pas et ensuite on arrive à démontrer que c'est.

B1 : Inaudible.

B2 : Ouais mais non, je vois pas, je vois pas où il est le problème d'arithmétique en fait dedans c'est ça le le problème.

B1 : Si parce que/

B3 : Ben justement une fois que tu arrives à cette équation là, ça devient un problème d'arithmétique parce que t'es obligé d'utiliser le théorème de Gauss, le théorème de Bézout alors qu'euh/

B2 : Ouais mais ensuite/

B3 : Le tout c'est de démarrer.

B2 : Ca donnera quoi le résultat de l'utilisation des théorèmes si racine de 2 il est irrationnel? Tu sais c'que ça va faire toi?

B1 : Théoriquement on sait pas que c'est irrationnel donc ça compte pas c'que tu sors.

B2 : Non ben si. Nous on le sait que c'est irrationnel mais faut le démontrer.

B1 : On est pas censé le savoir.

B2 : Oui on n'est pas censé le savoir, on n'est pas censé le savoir mais euh, le théorème de Gauss il va marcher avec les nombres entiers pas avec les, les nombres rationnels

La mise en œuvre du raisonnement hypothético-déductif impose en effet de distinguer clairement entre la valeur épistémique de l'énoncé : « $\sqrt{2}$ est rationnel » qui est la valeur « Faux » et sa valeur logique au moment où il est engagé dans la preuve, à savoir la valeur « Vrai » qu'on lui attribue pour aboutir ensuite à une contradiction. Et ceci leur semble particulièrement difficile. On sent bien que l'entrée dans le raisonnement par l'absurde serait pour eux plus facile si un doute subsistait sur la valeur épistémique de l'énoncé, rendant l'opposition de valeurs moins flagrante. Cet extrait montre aussi une conception de l'arithmétique comme un domaine où il faut utiliser des théorèmes arithmétiques (théorèmes de Gauss et Bézout en particulier), enfin comme un champ qui porte sur les entiers.

L'élévation au carré, quant à elle, n'est pas non plus quelque chose d'automatique et ce traitement opératoire apparaît même relativement tardivement dans la recherche des élèves. La situation est cependant différente selon les groupes.

Dans un groupe (groupe A), l'émergence du traitement opératoire initial ne s'inscrit pas apparemment dans le fil d'un développement mathématique ; l'idée d'élever au carré intervient initialement de façon brutale et non argumentée, telle une réminiscence. Elle est ensuite abandonnée puis reprise et ce n'est qu'après intervention de l'enseignante que le travail se stabilisera sur l'égalité associée, sans retour cette fois à l'objet racine. Au sein de ce groupe, malgré une attention évidente portée à la nature des nombres en jeu, nous avons observé l'absence d'une claire conscience du champ concerné par l'arithmétique enseignée à ce niveau (cf. extrait 2). L'autre groupe (groupe B), quant à lui, est très vite attentif à la nécessité de travailler sur des entiers (cf. extrait 1) et l'élévation au carré naît véritablement de leur travail mathématique. On observe malgré tout un retour à l'objet racine suite aux interventions de l'enseignante qui propose aux élèves de déduire de l'égalité portant sur les carrés de a et b , des propriétés de ces nombres eux-mêmes, ce qui correspond au passage crucial de a^2 à a dans la preuve attendue. Il semble en effet alors naturel aux élèves de

réintroduire l'objet racine pour répondre à la demande de l'enseignante qui pointe les objets et non leurs carrés. Une preuve de ce groupe, sans cette intervention de l'enseignante qui n'a que partiellement connaissance de la recherche des élèves, aurait sans doute privilégié un raisonnement sur les carrés jusqu'au bout, utilisant le résultat énonçant que *si deux nombres sont premiers entre eux alors il en est de même de leurs carrés* : a^2 étant pair, b^2 serait alors impair d'où une contradiction lorsque l'on traduit opératoirement le caractère pair de a . Précisons que pour le groupe A également, le passage de a^2 à a est suscité par l'enseignante ; sans l'intervention de cette dernière, le groupe aurait privilégié un raisonnement sur les carrés.

Un autre phénomène est, nous semble-t-il, frappant dans cette première phase de leur recherche : pour les deux groupes, la traduction opératoire du caractère pair d'un nombre a par l'égalité $a=2q$ est visiblement une connaissance mobilisable mais non disponible. Dans les deux groupes, cette traduction opératoire, essentielle à la mise en œuvre du raisonnement, n'entre en effet dans le milieu que suite à une intervention de l'enseignante. Précisons que cette intervention n'a pas besoin d'être lourde tout en étant nécessaire ; cette connaissance rendue disponible fait rapidement progresser la recherche des élèves.

L'analyse de la recherche des élèves relative à l'étude de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ met bien en évidence l'influence de certaines caractéristiques de la culture d'enseignement sur leur recherche et les raisonnements qui la sous-tendent. Le fait d'envisager d'emblée la fraction a/b comme irréductible en est une première manifestation qui relève de la culture numérique au sens large et non de la seule culture arithmétique, mais nous voudrions nous centrer ici sur un des objets qui sont au cœur de l'arithmétique qui est enseignée en terminale S et dont l'influence sur la recherche menée a été bien plus importante que nous ne l'avions prévu, et s'est effectuée sous des formes partiellement au moins inattendues. Il s'agit du théorème de Gauss.

Pour les deux groupes, la présence simultanée d'une égalité comportant un produit et une relation de primalité entre deux des entiers intervenant respectivement dans les deux membres de l'égalité, semble amener à un traitement opératoire quasi automatique sur le théorème de Gauss. Voici un extrait correspondant à la première apparition de ce traitement dans la recherche du groupe A :

Extrait 2

A : Donc a il divise racine de 2 puisque a et b sont premiers entre eux donc a il divise pas b et a divise b racine de 2. C'est pas le théorème de Gauss ?

A1 : Mmm ? Si ça fait penser à Gauss quoi mais euh /

A : Donc a il divise racine de 2.

A1 : Non. Non, non non.

A : Mais si !

A1 : C'est racine de 2 qui divise.

A : a il divise b racine de 2, t'es d'accord ? !

A1 : (Rires), elle va me taper. Mais non parce que c'est a égal /

A : Oui mais il divise ça !

A1 : Mais non ! C'est ça qui divise a. Racine de 2 divise a ! C'est pas a qui... a il est tout seul là. C'est pas. T'aurais b égal à racine de 2 a et ben là ça s'rait a euh ça s'rait racine de 2 il divise b et a divise b s'ils étaient pas premiers entre eux.

A : Mais il divise les deux ! Si tu mets les deux /

A1 : Non, tu peux pas inverser ! Parce que si tu dis que. En fait ça c'est plus grand que racine de 2 et ça c'est plus grand que b. Et donc a il ne peut pas diviser un nombre plus petit.

A' : Ben oui.

A1 : Donc, j'ai raison, comme dab, J'ai toujours raison, (rires). -- Donc c'est racine de 2 qui divise a.

A : Oui mais.../

A1 : Parce que regarde euh quand tu divises a/

A : Ah oui ! a et b sont premiers entre eux donc c'est racine de 2 qui divise a.

A1 : Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/

A : C'est bon j'suis d'accord.

Deux avis, « a divise $\sqrt{2}$ » et « $\sqrt{2}$ divise a », s'opposent dans ces échanges à propos de l'interprétation de l'égalité $a = \sqrt{2} b$. C'est avec le premier avis que l'on identifie le traitement opératoire annoncé ; le raisonnement en jeu ici est le suivant : comme $a = b\sqrt{2}$, en particulier a divise $b\sqrt{2}$, d'où a divise $\sqrt{2}$ d'après le théorème de Gauss puisque a et b sont premiers entre eux (le théorème de Gauss est mentionné mais n'est pas associé clairement à ce raisonnement par les élèves). La lecture particulière qui est faite ici en termes de divisibilité correspond à un embryon de la preuve originale présentée dans l'analyse mathématique (cf. § 2.1.1) et donc en particulier une pensée organisatrice distincte de celle attendue par l'enseignante.

Comme nous le précisons antérieurement, cet extrait met en évidence l'absence d'une claire conscience que l'arithmétique (enseignée en TS) concerne les entiers et que celle-ci n'exclut pas qu'une certaine attention soit portée à la nature des nombres en jeu. L'absence d'une

claire conscience du champ concerné par l'arithmétique est identifiée dans cet extrait au niveau de la définition de la relation de divisibilité employée ainsi que dans l'utilisation du théorème de Gauss. Les deux lectures de l'égalité en jeu renvoient à une extension de la définition de la divisibilité. Pour la lecture « $\sqrt{2}$ divise a », en particulier, la spécificité entière n'est conservée que pour le quotient : « Quand tu divises a par racine de 2, t'as un nombre entier donc/ » ; et c'est à travers cette conservation que l'attention portée à la nature des nombres en jeu se manifeste.

L'utilisation du théorème de Gauss par les élèves induit un traitement opératoire original qui pourrait conduire à des preuves différentes de celles attendues mais tout à fait valides. Nous observons cependant que ces preuves ont des difficultés à émerger, que les conclusions à tirer en termes de divisibilité sont facilement inversées ou remises en cause comme l'illustre les extraits de la production écrite du groupe B donnés ci-dessous :

Production écrite du groupe B

Extrait 3

[...] $3b^2 = a^2$

⁸Si 3 ne divise pas a^2 alors a^2 divise b^2 (Thm de Gauss). Or a et b premiers entre eux donc 3 divise a^2 donc a^2 s'écrit $3q$.

Extrait 4

[...] $b^2 = 3q^2$ or b^2 et q^2 sont premiers entre eux donc 3 divise b^2 (Th de Gauss).

D'une part, il peut y avoir des réticences, même si elles restent implicites, à déduire de l'égalité : $a^2 = 3b^2$, lorsque a et b sont premiers entre eux, que a^2 divise 3, alors que, dans les raisonnements usuels, le nombre 3 a généralement le statut de diviseur, et ceci peut avoir contribué aux glissements observés au niveau des conclusions, d'autre part, comme cela apparaît dans l'extrait 2 avec le cas de $\sqrt{2}$, pour résister à l'objection selon laquelle, 3 étant plus petit que a^2 , il est impossible que a^2 divise 3, il faut un raisonnement particulièrement sûr, ce qui n'est visiblement pas encore le cas pour ces élèves. Malgré ces difficultés, assez étrangement, cette lecture tend à prédominer sur la lecture attendue d'une égalité comme $a^2 = 3b^2$, à savoir justement que 3 divise a^2 .

Soulignons pour finir que différents éléments d'analyse *a posteriori* conduisent à émettre un doute quant à la pertinence de la règle de contrat en jeu (il n'est pas attendu que le

⁸ Ce sous-extrait est barré par les élèves, ce que n'avons pas reproduit pour une lecture aisée.

résultat « si le carré d'un entier est pair alors ce nombre l'est aussi ») relativement à la capacité des élèves à démontrer le résultat en jeu et même à le considérer comme allant de soi. Tout d'abord, l'étape opératoire relative à $\sqrt{3}$ est pointée par l'enseignante pour les deux groupes : sans l'intervention de cette dernière, les élèves ne se seraient pas engagés dans une démarche de preuve du résultat « si le carré d'un nombre est multiple de 3, alors ce nombre l'est aussi ». De plus, la tâche de comparaison de preuves (comparaison de leur preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ avec trois preuves fournies de ce même résultat dont les preuves par descente infinie et par l'absurde et minimalité présentées lors de l'analyse mathématique (cf. § 2.1)) nous permet de penser que les élèves ne se sont pas rendus compte que l'implication non démontrée dans leur preuve l'est dans deux des trois preuves fournies. Enfin, comme l'illustrent les extraits donnés ci-après, traduire la dichotomie pair / impair en termes de divisibilité afin de faire le lien avec celle de nombre divisible par 3 est problématique pour les élèves :

Extrait 5

A2 : [...] Pour $\sqrt{3}$ c'est pas pareil puisque on n'a pas prouvé qu'il est pair. Avec les trucs pairs/

A : Oui je sais.

A2 : Ca a cun rapport.

Extrait 6

B3 : Mais ça marche pas, ça marchera jamais... Puisque c'est un problème de divisibilité donc c'est pas montrons a et b sont pairs, c'est un problème de divisibilité pour 3, on n'a pas du tout fait de la même manière.

Extrait 7

B3 : Mais ils montrent que a et b sont pairs c'est ça qui me, qui me trouble.

B1 : Normal les deux ils sont impairs.

B3 : Ah ben oui, c'est assez logique ouais.

B1 : Donc on fait comme si les deux ils étaient impairs et puis c'est tout.

Extrait 8

B1 : Parce qu'en fait là y'a une grosse connerie là, en fait c'est pair c'est divisible par 2. Là ça devient nettement plus clair. Donc en fait c'est ça faut montrer que a et b sont divisibles par 3. Voilà!

3. Conclusion

A l'articulation entre analyses épistémologique et didactique, notre recherche de thèse cherchait à identifier les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique et à étudier l'écologie de celles-ci au niveau de la classe de terminale scientifique. L'enquête épistémologique nous a permis d'identifier des spécificités du raisonnement en arithmétique, tant dans ses dimensions organisatrice qu'opératoire, et donc des potentialités a priori pour l'apprentissage du raisonnement mathématique dans l'institution scolaire (classe de terminale scientifique). Ces potentialités ont été ensuite confrontées à la contingence didactique et nous nous sommes interrogée sur la pertinence des analyses menées et des outils construits pour étudier l'écologie possible, au lycée, des potentialités identifiées a priori. Lors du séminaire national, nous nous sommes centrée sur la présentation des outils issus de l'analyse épistémologique, ainsi que sur l'illustration de leur mise en fonctionnement au service de l'analyse didactique suivant un des axes en jeu dans notre recherche (analyse de raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques).

En ce qui concerne l'expérimentation en classe de terminale S, les outils d'analyse construits nous ont permis de situer les difficultés des élèves dans la résolution des problèmes envisagés et également de mettre en évidence une créativité certaine des élèves. Les éléments de l'analyse que nous avons présentés ici illustrent les limites d'une analyse qui ne prendrait en compte que les productions écrites des élèves. Comme le montre notre travail de thèse, nos outils offrent un accès à la dynamique du processus de production d'une preuve arithmétique.

Au delà de cet exemple nécessairement limité, l'exploitation des outils épistémologiques pour l'analyse de copies d'élèves issues d'une épreuve d'entraînement au baccalauréat, nous a en particulier permis de préciser où l'institution situait leur autonomie suivant que les tâches pouvaient être considérées ou non comme routinières, de mettre en évidence une créativité au niveau organisateur dans un contexte apparemment verrouillé de ce point de vue et de faire des hypothèses sur les ressorts de cette créativité. Au service de l'analyse institutionnelle, nos outils nous ont aidé à prendre la mesure du champ réellement exploité par l'enseignement par rapport aux potentialités identifiées a priori, tant dans les dimensions organisatrice, opératoire que dans leur interaction. En analysant d'une part la partie arithmétique des sujets de baccalauréat⁹ et d'autre part des ressources moins contraintes

⁹ Depuis la réintroduction de l'arithmétique en terminale.

et susceptibles de nous montrer, à l'inverse des sujets de baccalauréat, l'ouverture maximum du champ des possibles¹⁰, nous avons montré l'existence de réductions et de verrouillages mais aussi de ressorts et ressources au sein même de l'institution scolaire.

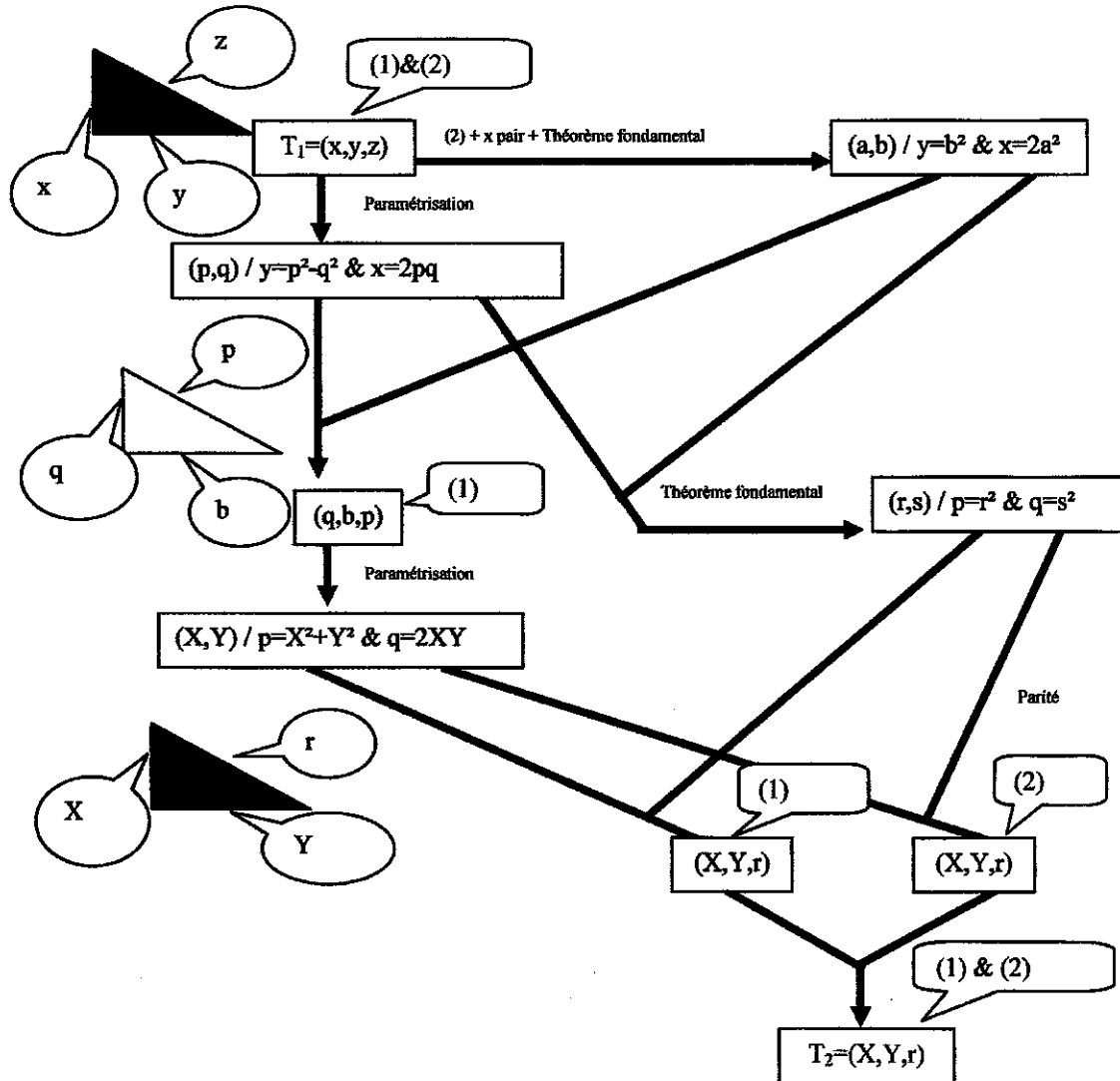
Concourant avec ceux obtenus dans nos autres travaux, les résultats présentés lors du séminaire national tendent à montrer la pertinence de nos outils épistémologiques pour l'analyse didactique et une perspective de prolongement possible de cette recherche s'en déduit : réinvestir cet outil et tester sa pertinence pour l'analyse didactique à d'autres niveaux d'enseignement, en particulier au niveau universitaire, ainsi que pour étudier la transition dans ce domaine entre enseignement secondaire et université. Dans l'enseignement secondaire français en effet, malgré la créativité dont les élèves peuvent être capables, l'autonomie dévolue par l'institution scolaire à l'élève se situe essentiellement au niveau opératoire. Où se situe l'autonomie de l'élève dans le supérieur ? Y a-t-il un saut lors de la transition ? Comment par ailleurs les composantes organisatrice et opératoire, ainsi que leurs relations dialectiques, se complexifient-elles ? Ce sont pour nous des questions ouvertes.

Références bibliographiques

- Battie, V. (2003). Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique. Thèse de doctorat. Université Paris 7, Paris.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1/3), 85-109.
- Goldstein, C. (1995). *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*. Presses Universitaires de Vincennes, Saint-Denis.
- Grenier D., Payan Ch. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/1, 59-100.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration : an overview, *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.
- Henry, M. (2001). Le théorème de Gauss dans les Eléments d'Euclide ?!. *Bulletin de l'APMEP* (433), 204-218.
- Schmidt, S. (2002) Arithmetical and algebraic types of reasoning used by pre-service teachers in a problem-solving context in *RCESMT* (2.1); University of Toronto Press Journals Division, Toronto.

¹⁰ Nous nous sommes centrée sur des publications IREM et APMEP.

ANNEXE 1 : Organigramme de la première étape de la démonstration inspirée de celle de Frenicle



(1) : Le triangle est rectangle en nombres entiers premiers dans leur ensemble. (2): Le triangle correspondant est d'aire carrée. Parité : Comme q est pair, s est pair : $s = 2s_1$. D'où $XY = 2s_1^2$. L'aire de (X, Y, r) est bien un carré.

DES PROGRAMMES A LA CLASSE : ETUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE INTERNE

Exemple de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique

Laetitia Ravel-Bueno

Equipe DAEST, IUFM d'Aquitaine

L'objet de ce séminaire était la présentation de mon travail de thèse (Ravel 2003a) qui porte sur une étude de la transposition didactique interne, dans le cas particulier de la réintroduction de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique en 1998.

Après avoir introduit la problématique et le cadre théorique que j'ai utilisé pour mener à bien cette recherche, je commencerai par présenter une analyse de l'enseignement d'arithmétique dans son ensemble. Puis, en suivant une méthodologie d'analyse par zooms successifs, je m'intéresserai plus particulièrement à l'enseignement de la division euclidienne avant de terminer par une analyse de deux démonstrations du théorème de la division euclidienne faites dans deux classes de terminale.

I. PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

A l'origine de ce travail se trouve une série de questions naïves sur l'enseignement des mathématiques et plus spécifiquement sur l'arrivée d'un nouvel objet de savoir dans les programmes d'enseignement. Comment le système d'enseignement « réagit » face à cette arrivée ? Autrement dit, pour cet objet de savoir, comment se fait le passage du texte officiel du programme à la classe ? Ce passage va-t-il le modifier ou non ? Si oui, quels sont les acteurs du système d'enseignement qui opèrent ces modifications ? Dans quel(s) système(s) de contraintes et de libertés agissent-ils ? Pour problématiser et traiter l'ensemble de ces questions, il m'a semblé pertinent d'utiliser le concept de transposition didactique introduit dans la communauté didactique en 1980 par Chevallard.

I.1 La transposition didactique interne

Comme le souligne Conne, la transposition didactique est un « processus qui fait que les objets du savoir mathématique savant sont transformés en savoirs à enseigner, inscrits dans le projet d'enseignement, puis en savoir d'enseignement » (Conne 1992, p. 266). Le passage du savoir savant au savoir enseigné peut donc se décomposer en « deux étages », le passage du savoir savant au savoir à enseigner, suivi du passage du savoir à enseigner au savoir enseigné.

Notons que Chevallard (1991) introduit également la notion de « texte du savoir » pour évoquer le savoir à enseigner et fait remarquer que ce texte n'est nulle part écrit noir sur blanc. On le trouve explicitement dans le programme officiel d'enseignement mais il comprend également une partie d'implicites liés à des habitudes d'enseignement du savoir en jeu ainsi que les interprétations courantes du programme scolaire.

Dans un premier temps, Conne (1992) précise que dans le processus de transposition, « les objets du savoir mathématique savant sont transformés ». Qui a en charge ces transformations ? Chevallard montre que dans ce processus de transposition didactique, un rôle central est joué par la noosphère :

« C'est elle [la noosphère], [...] qui va procéder à la sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme « savoir à enseigner », seront alors soumis au travail de transposition ; c'est elle, encore, qui va assumer la partie visible de ce travail, ce qu'on peut appeler le travail externe de la transposition didactique¹, par opposition au travail interne, qui se poursuit, à l'intérieur même du système d'enseignement, bien après l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. » (Chevallard 1991, p. 31)

Il oppose ici un travail externe, sous la responsabilité de la noosphère à un travail interne, qui se poursuit bien après la rédaction du programme. C'est ce travail interne qui m'intéresse dans le cadre de cette thèse.

Si Chevallard souligne que les transformations du savoir lors du passage du savoir savant au savoir à enseigner sont sous la responsabilité de la noosphère, je fais pour ma part l'hypothèse que celles inhérentes au passage du savoir à enseigner au savoir enseigné sont sous la responsabilité des enseignants et des auteurs de manuels. En effet, pour prendre l'exemple des enseignants, lorsqu'un professeur prépare son cours, le texte du savoir à enseigner est pour lui, à ce moment précis, temporairement stable. Cependant, ce texte offre encore à chaque enseignant une grande variété de choix, choix qui modifient le savoir à

¹ C'est nous qui soulignons.

enseigner. Par ailleurs, les projets de cours construits à la suite de ce premier travail de l'enseignant seront eux aussi transformés lors de la réalisation de ce projet devant une classe. En reprenant le terme « d'apprêt didactique » proposé par Chevallard (1991), j'ai alors introduit la notion d'apprêtage² didactique du savoir afin de tenir compte du travail transpositif des enseignants et des auteurs de manuels. Ceci me permet de compléter le schéma proposé par Arsac (1989) en ajoutant une étape dans le processus de transposition didactique interne :

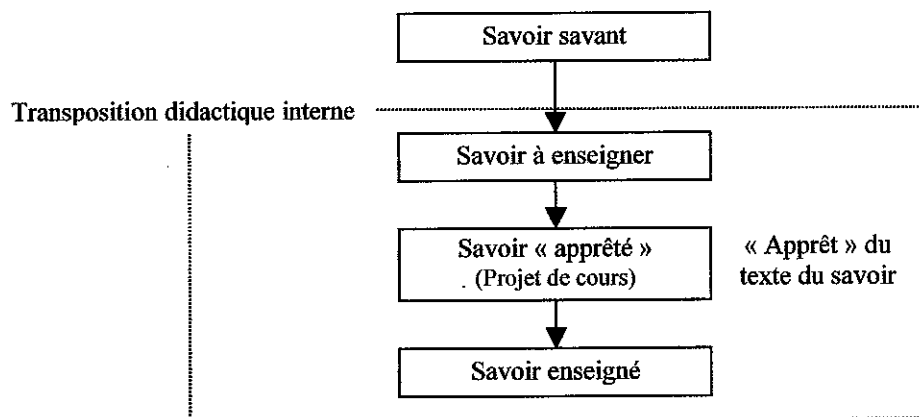


Fig. 1 : Les deux étages de la transposition didactique interne

J'entends par savoir apprêté par un enseignant, le savoir produit par celui-ci dans une perspective d'enseignement du savoir à enseigner, à la suite de ses choix tant mathématiques que didactiques. Il faut souligner que, pour les auteurs de manuels, le processus de transposition didactique interne s'arrête généralement au savoir apprêté et ce n'est que pour les enseignants qu'il se poursuit jusqu'à son terme. De plus, pour les auteurs de manuel, cet apprêtage ne s'effectue pas dans le même système de contraintes que pour les enseignants.

Pour étudier le processus de transposition didactique interne, j'ai choisi dans un premier temps d'analyser une perturbation du système d'enseignement en m'intéressant à la réintroduction de contenus d'arithmétique dans le programme de terminale S spécialité mathématique en 1998. En effet, cette réintroduction s'est faite non seulement après une vingtaine d'année d'absence mais également de façon isolée par rapport au reste du programme de terminale S. Nous pouvons donc penser que les professeurs de spécialité

² Je nomme « apprêtage » l'action de l'enseignant qui « apprête » le savoir à enseigner et « apprêt » le résultat de cette action.

mathématique disposent d'une grande liberté de choix dans leur enseignement d'arithmétique, ce qui me permet de poser l'hypothèse d'une forte variabilité dans les choix des professeurs.

J'ai ensuite choisi d'observer de façon « naturaliste » (sans intervention dans la classe) deux classes ordinaires afin de pouvoir étudier le processus de transposition didactique interne dans son ensemble. Pour ce faire, j'ai observé pendant une année entière l'intégralité des cours d'arithmétique de deux enseignantes P1 et P2 en procédant à un entretien avec chacune d'entre elles en fin d'année et en recueillant l'ensemble des copies corrigées des différents devoirs d'arithmétique qui ont eu lieu dans ces deux classes.

Mon étude de la transposition didactique interne se scinde ainsi en deux grandes parties, comme le montre le schéma ci-dessous :

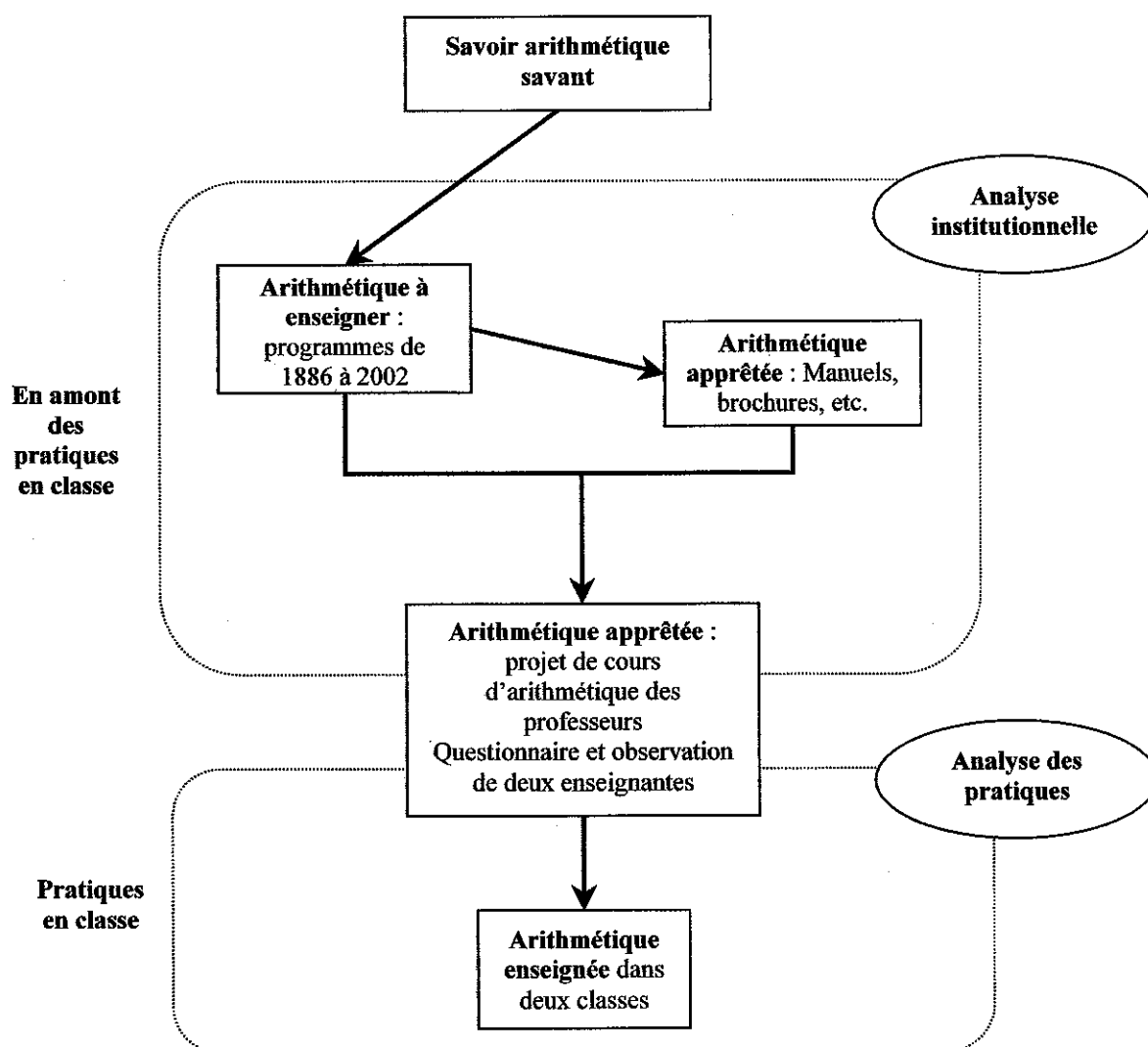


Fig. 2 Etude de la transposition didactique interne de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique.

Les raisons de ce découpage découle de ma problématique. En effet, l'analyse institutionnelle permet d'identifier un système de contraintes et de conditions pesant essentiellement sur l'appropriation didactique du savoir tandis que l'analyse des pratiques permet, à partir de deux exemples de mise en œuvre spécifique d'un enseignement d'arithmétique, d'analyser le passage du savoir approprié au savoir enseigné.

I.2 Outils théoriques et questions de recherche

Comme la plupart des travaux existant sur la transposition didactique, je me suis placée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) développée par Chevallard. Dans cette approche, les différents acteurs intervenant dans le processus de transposition sont modélisés comme sujets d'une institution – généralement, de plusieurs institutions. Ce point de vue amène à définir le rapport institutionnel à un objet de savoir comme renvoyant à un ensemble de pratiques sur cet objet au sein de l'institution considérée. Se poser la question de la transposition d'un objet de savoir revient à questionner la nature de cet objet transposé, question qui renvoie « au problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé, problème auquel il faut répondre en termes d'organisation praxéologique » (Bosch & Chevallard 1999, p. 88). On est alors amené à s'interroger sur l'écologie des organisations praxéologiques mathématiques liées à cet objet de savoir. Dans le cadre de la TAD, la problématique écologique me conduit à me poser une première série de questions de recherche :

Q₁ : Quel est l'ensemble de contraintes et de conditions qui pèsent sur la transposition didactique interne de l'arithmétique ? Quelles sont les origines et les causes de cet ensemble de contraintes et de conditions ? Quelles conséquences sur la nature de l'arithmétique enseignée par rapport à l'arithmétique à enseigner ?

Par ailleurs, pour tenir compte du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne, je me suis également placée dans le cadre de la TAD. Cette approche modélise l'activité de l'enseignant en terme d'organisation mathématique (OM) construite par l'enseignant pour l'étude d'un objet de savoir et d'organisation didactique (OD) utilisée par le professeur pour mettre en place cette OM. Il existe un principe de codétermination des OM et des OD car « l'OD dépend fortement de l'OM que cette OD vise à mettre en place. Et réciproquement, l'OM est déterminée, à son tour, par l'OD qui la met en place » (Bosch 2002, p. 29). Il s'agit alors d'analyser les déterminations réciproques entre OM et OD afin de mettre en évidence les

choix faits par l'enseignant et d'identifier dans quel système de contraintes et de conditions se sont faits ces choix. Ceci me permet de reformuler mon questionnement initial par la série de questions de recherche suivante :

Q₂ : Quels sont les assujettissements institutionnels d'un enseignant ? Quel système de contraintes et de conditions pesant sur les choix mathématiques et didactiques de ce dernier ces assujettissements définissent-ils ? Quel est le « poids » de l'OD sur la détermination de l'OM qu'elle doit mettre en place ? Réciproquement, quel est le « poids » de l'OM sur la détermination de l'OD visant à la mettre en place ?

Cependant, pour identifier cet ensemble de contraintes et de conditions, il faut dans un premier temps pouvoir décrire les OM et les OD. Or ce point se révèle délicat pour les OD. J'ai donc été amenée à reprendre à mon compte la série de questions posées par Bosch (2002) :

Q₃ : Comment décrire les composants et la structure des OD au niveau d'un domaine d'étude ? Comment décrire la « dynamique » de ces OD ?

Je vais maintenant présenter la méthodologie d'analyse que j'ai construite pour répondre à la question Q3.

I.3 Méthodologie d'analyse par zooms successifs

Pour décrire les OM et les OD quelque soit le niveau d'analyse, je me suis appuyée sur l'échelle de hiérarchie des niveaux de détermination didactique de Chevallard (2002). En effet, questionner les OD ou OM existantes nécessite d'analyser l'ensemble des contraintes pouvant peser sur ces organisations praxéologiques, de la plus générique à la plus spécifique. En effet, comme le souligne Chevallard (1999) :

« [...] les problèmes spécifiques de l'étude d'une organisation mathématique locale particulière restent en général mal posés tant qu'on n'analyse pas les « choix » didactiques, conscients ou non, faits à des niveaux organisationnels de moindre spécificité. » (Chevallard 1999, p. 246)

Il propose une échelle de hiérarchie des niveaux de détermination de ces contraintes³ qui permet « un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire » (Chevallard 2002, p. 42). Cette échelle compte huit niveaux dont chacun impose un système

³ Pour une analyse de la dialectique des choix effectifs d'un enseignant et des choix possibles en identifiant les niveaux de détermination didactiques dont relèvent ces choix, voir Noïrfalise & Wozniak (2002).

de contraintes aux OM et aux OD tout en permettant les conditions nécessaires à leur mise en place :

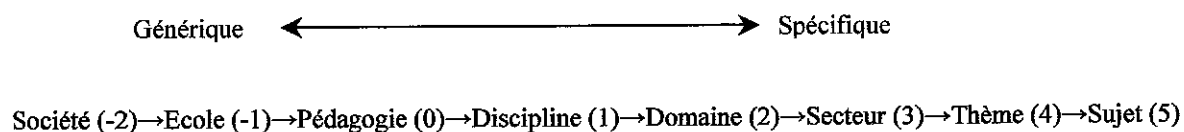


Fig. 3 : Echelle de hiérarchie des niveaux de détermination surdidactiques et mathématiques

Cette échelle commence donc du niveau de généricité le plus élevé, le niveau -2, celui de la société pour descendre vers des niveaux de spécificité mathématique de plus en plus forte jusqu'au niveau 5, celui du sujet d'étude. Elle peut être mise en relation avec les niveaux de détermination mathématique utilisées dans cette théorie. Ainsi, une OM ponctuelle, organisée autour d'un unique type de tâche, est un sujet d'étude. Une OM locale, organisant le groupement d'un ensemble de types de tâches autour d'une technologie, est un thème d'étude. Une OM régionale, organisée par un amalgame d'OM locales autour d'une théorie, est un secteur d'étude. Et enfin, l'arithmétique qui est une OM globale, organisant plusieurs OM régionales, est un domaine d'étude.

Pour pouvoir me déplacer dans cette échelle de niveaux et tirer des résultats quelque soit le niveau d'analyse choisi, j'ai repris les hypothèses sur les pratiques enseignantes utilisées dans la lignée des travaux de Robert (2001), à savoir que celles-ci forment un système complexe (les différentes dimensions de ces pratiques ne sont pas indépendantes), stable (il existe des choix globaux, stables sur une période de temps donnée, qui « président aux singularisations des déroulements en classe ») et cohérent (il existe une unité derrière les choix des enseignants, quel que soit le niveau où ces choix ont été faits).

Je procède donc par zooms successifs sur l'enseignement de l'arithmétique en descendant vers des niveaux mathématiques de plus en plus spécifiques et ces hypothèses me permettent de reconstruire une cohérence articulant les analyses menées lors de ces zooms.

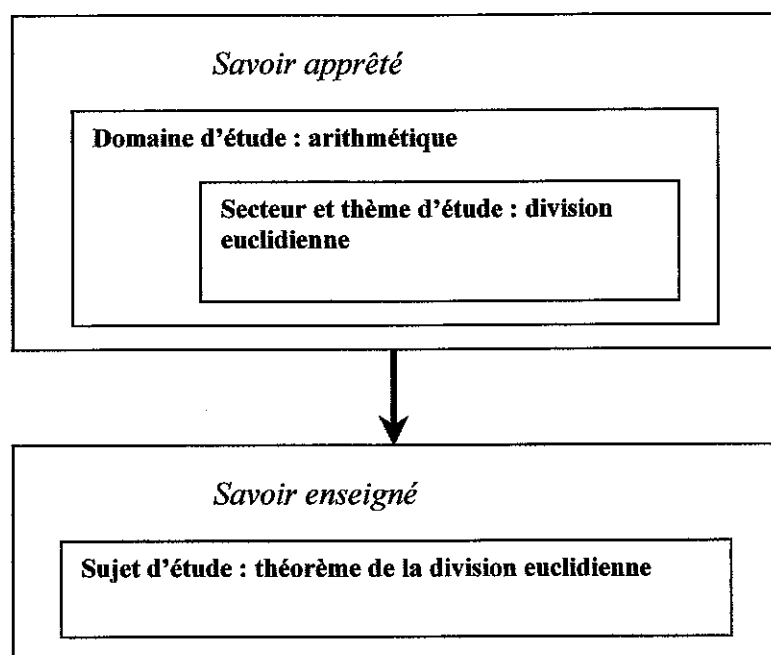


Fig. 4 : Zooms successifs sur les niveaux de détermination mathématique dans le cadre de la transposition didactique interne

Lors de chaque zoom, pour caractériser le savoir apprêté et enseigné, j'ai tenté d'articuler l'analyse des OM et des OD en mettant en évidence les choix faits par les différents acteurs du système d'enseignement ainsi que les conditions et les contraintes pesant sur leurs choix.

Je commence tout d'abord par analyser les pratiques de P1 et P2 sur un domaine d'étude dans son ensemble : l'arithmétique. Pour les OM, j'ai tout d'abord mené une analyse écologique comparative des différents programmes d'arithmétique de 1886 à 2002 et mis en évidence le découpage mathématique du savoir apprêté. Pour décrire et analyser les OD à ce niveau, j'ai introduit la notion de mode de fonctionnement didactique⁴ et j'ai décrit le découpage didactique du savoir apprêté pour le mettre en parallèle avec le découpage mathématique.

Je « zoome » ensuite sur la division euclidienne en analysant les OM locales et régionales construites autour du théorème de la division euclidienne par P1 et P2. Celles-ci sont également comparées à celles présentes dans le programme et les manuels. A ce niveau, pour les OD, je me suis intéressée plus particulièrement aux choix relatifs aux démonstrations et à l'évaluation des deux enseignantes observées sur la division euclidienne.

Je « zoome » finalement sur l'OM locale de la division euclidienne et, plus précisément, sur le moment de la démonstration du théorème de la division euclidienne. Je tente alors d'identifier

⁴ Cette notion est définie dans la suite de cet article.

le savoir enseigné afin de le comparer au savoir apprêté et de mesurer la distance éventuelle entre les deux. Par ailleurs, les choix didactiques sont analysés à ce niveau en terme d'OD ponctuelles tout en faisant des « emprunts » à la théorie des situations didactiques, notamment la notion d'effets Topaze et de contrat didactique.

II. L'ARITHMETIQUE EN SPECIALITE MATHEMATIQUE : UN DOMAINE D'ETUDE

Lorsqu'un enseignant construit son cours, une des références à laquelle il est fortement lié est le programme. En effet, celui-ci précise dans un premier temps ce que l'enseignant est tenu d'enseigner au niveau des contenus. Pour pouvoir analyser la transposition didactique interne actuelle de l'arithmétique, j'ai procédé à une analyse écologique comparée des programmes d'arithmétique des classes de terminale scientifique depuis 1886. Cette comparaison des programmes, en pointant les différences, les similitudes et les évolutions des différents programmes, permet « d'éclairer » le processus de transposition didactique qui a eu lieu ces dernières années et de déterminer les conditions écologiques actuelles de vie de l'arithmétique dans l'ensemble du corpus d'enseignement.

II.1 L'arithmétique à enseigner : analyse écologique de programmes

Notre étude comparative est découpée en cinq périodes :

1. La période classique : de 1886 à 1971

Pour l'analyse des programmes de cette période, je m'appuie sur les travaux d'Assude (1998). De 1886 à 1971, malgré quelques changements, le contenu du programme d'arithmétique reste relativement stable. L'arithmétique occupe la niche « calcul numérique » du fait de la place importante dans les programmes des opérations sur les fractions. Par ailleurs, la vie de cette niche était renforcée par la présence des sections *nombre réels*, *progressions arithmétique et géométrique* et *calculs approchés* qui faisaient partie, à cette époque, des contenus d'arithmétique.

Par ailleurs, comme le souligne Assude (1998), une autre niche est également occupée par l'arithmétique dans les programmes de cette période ; la niche « théorie des nombres » qui « consiste à donner à l'arithmétique une consistance théorique par rapport à l'algèbre » (Ibid., p. 108).

2. La période de la réforme des mathématiques modernes : de 1971 à 1983

Le programme d'arithmétique précédent va être bouleversé par la réforme des mathématiques modernes. Alors que l'arithmétique soutenait et contrôlait auparavant le calcul numérique, la disparition de la racine carrée et des problèmes de représentations décimales des rationnels et des irrationnels des contenus d'arithmétique contribue à rendre difficile la vie de la niche « calcul numérique » dans les programmes. Par contre, l'arithmétique devient à cette époque l'occasion de revoir et d'approfondir l'étude des structures algébriques ainsi que de compléter l'étude des ensembles de nombres. L'arithmétique occupe donc de façon préférentielle la niche « structurelle ».

3. La période de la contre-réforme : de 1983 à 1998

Au moment de la contre-réforme, les contenus de l'enseignement secondaire sont remaniés et l'arithmétique disparaît totalement des programmes du lycée dans un premier temps, puis de ceux du collège à partir de 1985. Cependant, après une quinzaine d'années d'absence, l'arithmétique va être réintroduite dans les programmes de l'enseignement secondaire : à la rentrée 1998 en terminale S spécialité mathématique, en 1999 en troisième et en 2001 en seconde.

4. La période contemporaine : de 1998 à 2002

L'arithmétique a été réintroduite dans le programme de terminale S spécialité mathématique avec une volonté marquée de mettre en avant son aspect algorithmique⁵. Par ailleurs, les concepteurs du programme ont souligné que l'arithmétique méritait de retrouver une place dans l'enseignement du fait de son importance dans l'histoire des mathématiques. En 1998, l'arithmétique occupe donc deux niches : la niche « algorithmique » et la niche « culturelle ».

5. Le dernier programme d'arithmétique : 2002

En 2002, un nouveau programme est entré en vigueur. Une des différences essentielles par rapport à celui de 1998 se situe au niveau des contenus : les congruences remplacent les opérations sur les restes. On constate également un renforcement de la niche algorithmique par le biais de l'apparition d'exemples d'utilisation d'outils informatiques dans le texte du programme et d'une articulation entre raisonnement et démarches algorithmiques :

« C'est le lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement » (Introduction du paragraphe « enseignement de spécialité »)

Deux niches sont donc occupées par l'arithmétique dans le nouveau programme de 2002 : la niche « algorithmique » et la niche « raisonnement ».

Je tiens à souligner que la séparation des niches « algorithmique » et « raisonnement » n'est a priori pas pertinente⁶ mais existe dans les faits. C'est pourquoi j'ai choisi de les différencier afin d'identifier les contraintes qui pèsent sur les choix des professeurs et des auteurs de manuels en ce qui concerne ces deux niches.

II.2 L'arithmétique apprêtée : un espace de liberté

Dans la suite de ce travail, je me suis plus particulièrement intéressée à la vie de la niche « algorithmique » dans les manuels et les projets de cours des enseignants de spécialité mathématique. J'ai identifié trois moyens de faire vivre la niche « algorithmique » à ce niveau :

- Proposer des démonstrations constructives des théorèmes d'arithmétique ;
- Intégrer l'outil informatique par le biais de la programmation informatique des algorithmes du cours d'arithmétique et l'intégration, à un corpus d'exercices plus classiques, d'exercices à résoudre à l'aide d'outils informatiques ;
- Proposer des exercices dans lesquels les algorithmes sont soit des outils efficaces de résolution soit des objets d'étude.

Une analyse écologique et praxéologique de trois manuels⁷ de 1998 et 2002 et une analyse des réponses de 43 enseignants à un questionnaire sur leur cours d'arithmétique a permis de montrer que (Ravel 2002) :

- au niveau des démonstrations constructives, celles-ci étaient peu proposées par les manuels mais plus souvent choisies par les enseignants ;
- que ce soit dans les manuels ou dans les classes, les programmes informatiques étaient donnés aux élèves déjà écrits dans un langage de programmation ; par ailleurs, un seul manuel propose des exercices à résoudre avec ordinateur, exercices qui ne sont pas repris dans les classes ;

⁵ Notamment par le biais de l'étude de l'algorithme d'Euclide, de celui de la division euclidienne, du test de primalité etc.

⁶ En effet, mettre en œuvre une démarche algorithmique revient à utiliser un type de raisonnement particulier.

- en ce qui concerne les algorithmes, ceux-ci ne sont jamais, dans le cadre des exercices, un objet d'étude et il existe une technique algorithmique stéréotypée qui est la résolution d'équations diophantiennes du type $au+bv=d$.

Nous voyons bien que les choix faits par les auteurs de manuels et les enseignants modifient le savoir à enseigner. Ils font vivre de façon préférentielle la niche raisonnement contrairement aux attentes du programme qui est de favoriser l'approche algorithmique de l'arithmétique.

Voici maintenant un exemple qui illustre ce fait, expliquant également pourquoi j'ai décidé de séparer les niches « algorithmique » et « raisonnement » dans ma recherche. Il s'agit des réponses des enseignants à la dernière question du questionnaire que je leur ai adressé. L'exercice proposé était extrait du manuel Déclic de 1998 :

« Voici l'énoncé d'un exercice :

'Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair $n \geq 5$ peut s'écrire sous la forme $n=2p+q$, avec p et q premiers. Par exemple : $51=2 \times 23+5$. Ecrire un programme permettant pour un entier impair $n \geq 5$ donné, de déterminer un couple (p,q) de nombres premiers tels que $n=2p+q$. (Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)'

Jugez-vous que cet exercice soit un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?

Poseriez vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ? »

Sur 43 enseignants, 22 pensent que cet exercice est un exercice d'arithmétique, 13 pensent que ce n'est pas un exercice d'arithmétique, 6 ne se sont pas prononcés et 2 n'ont pas souhaité répondre à cette question. En ce qui concerne la seconde partie de la question, 22 enseignants pourraient poser cet exercice aux élèves, sous conditions pour certains, 19 ne le poseraient pas et 2 n'ont pas répondu à la question. Ces réponses peuvent s'expliquer par le fait qu'ici, l'arithmétique est un outil de résolution et non l'objet de l'exercice. Par ailleurs, le raisonnement à mettre en œuvre pour résoudre l'exercice est également éloigné des raisonnements « classiques » d'arithmétique. Il s'agit en effet d'écrire un programme et de se faire une idée sur la véracité d'une conjecture non encore démontrée.

⁷ Il s'agit des manuels de la collection Déclic, Terracher et Transmath.

A la suite de cette question, les enseignants interrogés ont majoritairement fait des commentaires libres sur cet exercice et leur conception de l'arithmétique. Voici trois extraits pris dans ces nombreux commentaires :

« Je ne poserai pas un tel exercice à mes élèves. Je n'ai pas de passion particulière pour les outils de calcul et je préfère toujours ce qui s'obtient par la réflexion et le raisonnement sans qu'il soit nécessaire d'utiliser une machinerie lourde. »

« Ce cours d'arithmétique est un lieu privilégié pour apprendre à raisonner »

« Le programme de spé math c'est le meilleur tremplin qu'on puisse trouver pour une Math Sup MPSI. »

Les enseignants font donc une différence profonde entre l'aspect algorithmique et l'aspect raisonnement de l'arithmétique. Leurs différentes réponses montrent qu'ils s'octroient une marge de liberté importante par rapport aux exigences officielles du programme concernant la niche « algorithmique ».

Ces analyses ont également permis de mettre en évidence différentes contraintes didactiques et conceptions idéologiques qui ont pesé sur l'apprêtage de l'arithmétique et qui peuvent expliquer pourquoi la niche « algorithmique » vit mal dans les projets de cours des enseignants et les manuels :

- des contraintes institutionnelles fortes comme le temps dont disposent les enseignants, la nécessité d'avoir à préparer les élèves aux épreuves du baccalauréat, la difficulté d'avoir accès à des moyens informatiques dans les établissements scolaires etc. ;
- la difficulté de trouver des références d'exercices mettant en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique ;
- le niveau de formation insuffisant des enseignants en programmation ainsi que les niveaux très hétérogènes des élèves en programmation ;
- la représentation dominante que les enseignants ont sur les mathématiques qui leur fait préférer le raisonnement à l'approche algorithmique des mathématiques ;
- et enfin la spécificité de la classe de spécialité mathématique dont la plupart des élèves se destinent à des études scientifiques universitaires. Les enseignants souhaitent les former au mieux pour le post-bac en insistant sur le raisonnement en arithmétique.

Remarquons pour terminer que toutes ces contraintes favorisent la vie de la niche raisonnement au détriment de la vie de la niche algorithmique.

II.3 Mode de fonctionnement didactique de P1 et P2

Après avoir décrit et analysé les choix mathématiques d'apprêtage de l'arithmétique de trois auteurs de manuels et d'une quarantaine d'enseignants, je vais maintenant m'intéresser aux choix des deux enseignantes que j'ai observées pendant une année entière. Se pose alors la question de la mise en œuvre de ces choix en classe, c'est-à-dire le problème de la description des choix didactiques des enseignants au niveau de l'enseignement de l'arithmétique dans son ensemble. Pour se faire, j'ai introduit la notion de **mode de fonctionnement didactique** d'un enseignant pour décrire une certaine « façon de faire » très générale que je définis provisoirement comme un ensemble de routines qui caractérisent l'activité de l'enseignant indépendamment (du moins en partie) du contenu mathématique enseigné. Je fais également l'hypothèse que ces modes de fonctionnements didactiques contraignent les choix mathématiques de l'enseignant.

Il s'agit maintenant de décrire le mode de fonctionnement didactique de P1 et P2, en décrivant le déroulement habituel des séances dans ces deux classes.

Cas de l'enseignante P1 :

Cette enseignante commence en général les séances de deux heures par quarante minutes de cours magistral (l'enseignante est au tableau) puis distribue des fiches d'exercices que les élèves résolvent de façon autonome pendant qu'elle passe dans les rangs.

L'organisation pédagogique de l'activité mathématique mise en place par P1 se caractérise par une dichotomie très marquée du point de vue de la topogenèse : les élèves et l'enseignante occupent à tour de rôle l'ensemble de l'espace par rapport au savoir. Leurs places sont clairement définies : c'est tout d'abord à P1 de gérer le cours avant de disparaître et de donner à l'élève la responsabilité de l'avancée du travail, de façon individuelle. Cette topogenèse organise la chronogenèse. En effet, les choix pédagogiques structurent, dans cette classe, l'avancée du temps didactique : il s'agit d'organiser chaque séance de 2 heures avec un minimum de cours pour pouvoir garder un maximum de temps pour les exercices. Nous parlons alors d'organisation centrée sur la praxis et non sur le logos (les exercices sont le moteur de l'activité de cette classe).

Ce choix permet à P1 de répondre à deux contraintes très fortes qui pèsent sur tout enseignant de spécialité : préparer les élèves au baccalauréat et au post-bac. En effet, le travail sur fiches d'exercices permet de faire travailler chaque élève en autonomie et de proposer un nombre

d'exercices couvrant à la fois les exigences du baccalauréat et permettant d'aller plus loin que le programme.

Cas de l'enseignante P2 :

Dans la classe de P2, les séances de deux heures sont organisées de la façon suivante : un cours « dialogué » (avec questions à l'ensemble de la classe) et des exercices qui suivent les principaux théorèmes. Ces exercices sont intégrés au cours, les élèves les notent et les résolvent dans leur cahier de cours. Pendant ces exercices, les élèves disposent en général d'un temps de recherche personnel variant entre 5 et 10 minutes pendant lesquelles P2 passe dans les rangs.

Dans cette organisation pédagogique, les topos respectifs de l'enseignante et des élèves ne sont pas aussi marqués que dans la classe de P1. Pour P2, c'est la chronogenèse qui organise la topogenèse de la classe. En effet, son activité est centrée sur le logos : elle accorde une place centrale au cours qui est le moteur de l'avancée du temps didactique. Les exercices ne sont là que pour illustrer le cours. Pour P2, tout se passe comme si, dans une organisation centrée sur le logos, le cours « dialogué » lui permettait de répondre à l'impératif didactique qui est d'aménager une place aux élèves.

II.3 Mode de fonctionnement didactique : contraintes et libertés pour l'enseignant

Je viens de montrer que P1 et P2 ont des modes de fonctionnements très différents. Quel va être l'impact de ce mode de fonctionnement ? Autrement dit, observe-t-on des différences entre le savoir apprêté par P1 et celui apprêté par P2 ? Ces différences sont-elles liées à des choix mathématiques ou didactiques ? Quel est le poids du mode de fonctionnement didactique sur ces choix ? Pour répondre à cet ensemble de questions, je vais poursuivre la description des OD et des OM mises en place par ces deux enseignantes en menant tout d'abord pour les choix didactiques, une comparaison des découpages en chapitres du savoir apprêté par P1 et P2 puis pour les choix mathématiques, une analyse écologique du savoir apprêté par P1 et P2.

Découpage en chapitres du savoir apprêté par P1 et P2 :

Le découpage en chapitres de l'enseignement d'arithmétique de P1 et P2 est présenté ci-dessous. On constate que P1 a un découpage en chapitres qui est plus « fin » qu'un découpage

en secteurs d'étude⁸. En effet, les chapitres sur la division, le pgcd et le ppcm sont des thèmes d'étude (Ravel 2003). P2, de son côté, a un découpage en chapitres plus « gros » qu'en secteurs d'étude.

Le mode de fonctionnement didactique est une contrainte qui peut permettre d'expliquer ces choix de découpage. Par exemple, pour P1, étant donné que les exercices sont le moteur de l'avancée du temps didactique, il faut prévoir de petites unités de cours, centrées sur des thèmes d'étude, afin de pouvoir proposer de grandes plages de travail sur fiches centrées sur ces thèmes. On constate donc ici une « atomisation » des OM dans le cas de l'enseignante P1.

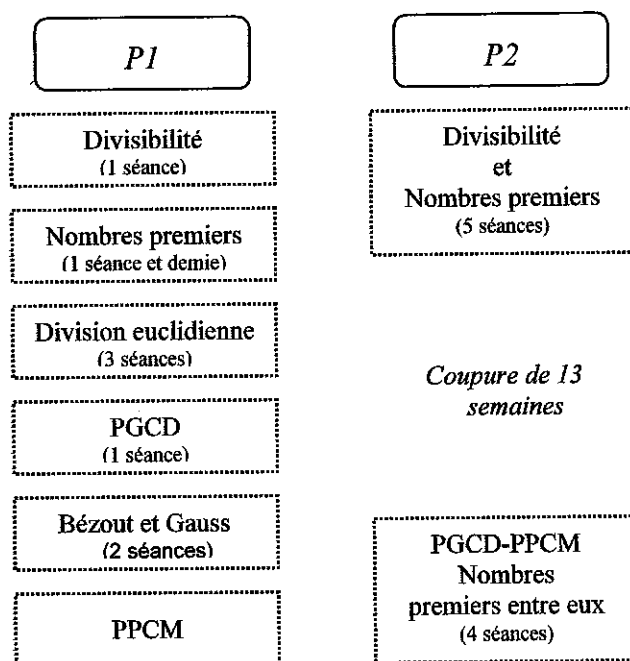


Fig. 5 : Découpage en chapitres du cours d'arithmétique de P1, P2

Analyse écologique du savoir appréhété par P1 et P2 :

Par manque de temps, je soulignerai seulement qu'au niveau des choix mathématiques, l'analyse écologique du savoir appréhété par P1 et P2 m'a permis de montrer que ces deux enseignantes sont représentatives des deux grandes tendances de professeurs que nous avons identifié à la suite de l'analyse de notre questionnaire. P1 utilise l'arithmétique pour mettre en avant à la fois ses aspects « algorithmique »⁹ et « raisonnement » tandis que P2 ne fait vivre que la niche « raisonnement » de l'arithmétique dans son projet de cours

⁸ Le programme propose un découpage en quatre secteurs d'étude : divisibilité, nombres premiers, division euclidienne et algorithme d'Euclide, Théorèmes de Bézout et de Gauss.

⁹ En introduisant notamment des notions de programmation informatique dans son cours.

Dans cette partie, je viens de montrer qu'au niveau du domaine d'étude, P1 et P2 ont fait des choix mathématiques et didactiques différents. Elles n'ont pas le même découpage didactique du savoir et ne mettent pas en avant les mêmes fonctions de l'arithmétique dans leur cours. Je vais poursuivre l'analyse de ces choix en effectuant un premier zoom sur l'enseignement de la division euclidienne.

III. LA DIVISION EUCLIDIENNE : UN SECTEUR ET UN THEME D'ETUDE

Pour comprendre le rôle des enseignants dans le processus de transposition didactique interne, je vais comparer le savoir apprêté par P1 et P2 autour de la division euclidienne à celui que l'on trouve dans le savoir à enseigner, c'est-à-dire à celui que l'on peut reconstruire à partir du programme.

III.1 Savoir à enseigner : OM régionale autour de la division euclidienne

Voici les OM locales et régionales autour de la division euclidienne proposées dans le programme de 1998 :

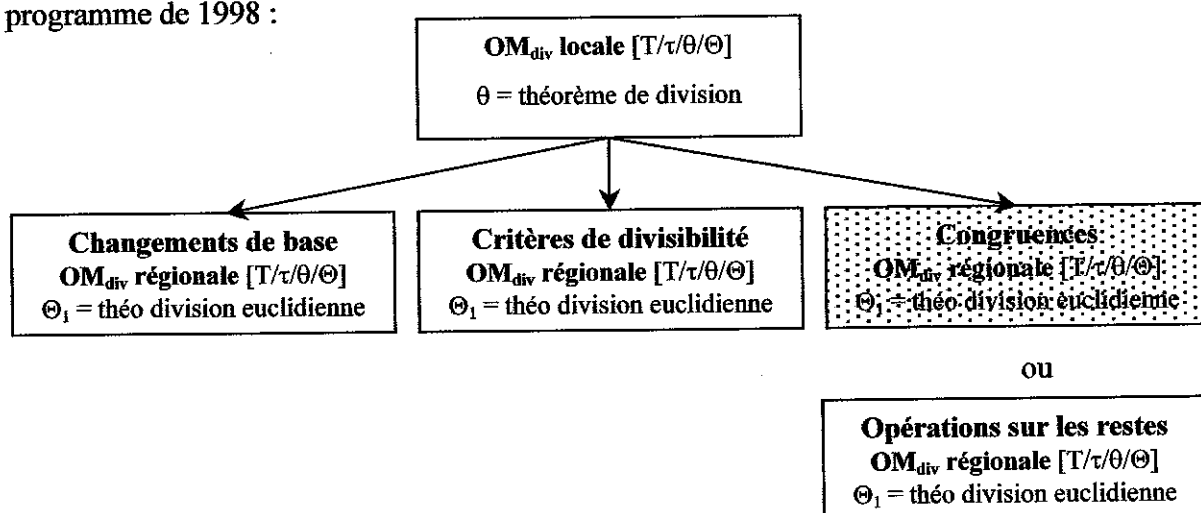


Fig. 6 : Structure du secteur d'étude autour de la division euclidienne dans le programme de 1998

Tout d'abord, soulignons que le programme ne précise pas si le théorème de la division euclidienne est à énoncer dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{Z}$. Ce choix est laissé à l'appréciation des enseignants, de même que le choix de la démonstration.

Les commentaires indiquent que deux OM_{div} régionales peuvent être construites autour de la division euclidienne : une OM_{div} régionale sur les changements de base et une autre sur les critères de divisibilité. L' OM_{div} régionale sur les congruences n'est pas explicitement au programme qui laisse toutefois la possibilité aux enseignants de l'introduire. Quoiqu'il en soit, cette OM_{div} régionale doit rester dans un état de développement incomplet, autour du bloc $[T/\tau]$, sans qu'aucune connaissance ne puisse être exigée à ce propos. Elle peut cependant être remplacée par une OM_{div} régionale sur les restes qui permet d'énoncer, de démontrer et d'utiliser les opérations possibles entre les restes. Cette façon de procéder est beaucoup plus lourde que d'utiliser les congruences. Je tiens à préciser que les commentaires du programme sont également explicites sur un point : dans le cas des OM_{div} régionales, l'aspect algorithmique sera privilégié.

Je vais maintenant décrire quels sont les choix de P1 et P2 autour de la division euclidienne afin de voir si ceux-ci sont conformes à ceux présentés dans le programme.

III.2 Savoir apprêté par P1 : OM régionale autour de la division euclidienne

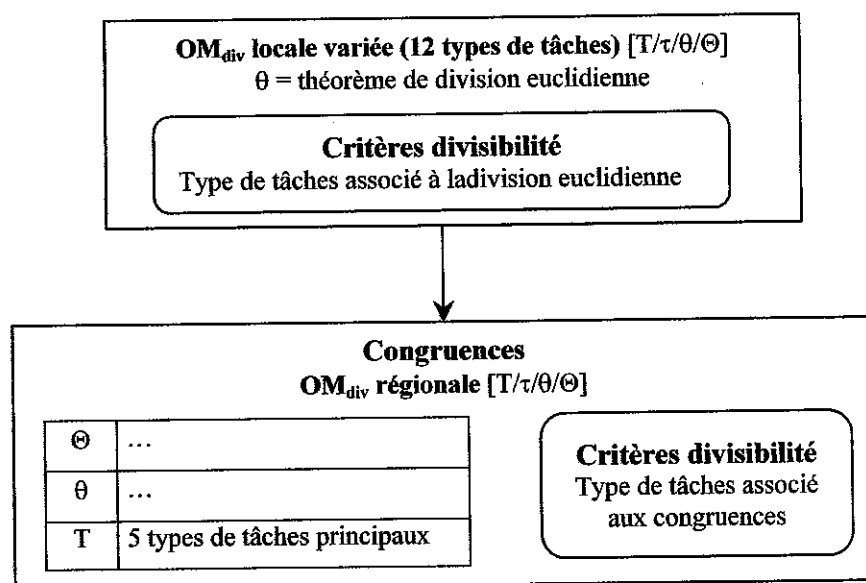


Fig. 7 : Structure du secteur d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P1

La variété des types de tâches proposée par P1 dans l'OM_{div} locale est facilitée par le fonctionnement de P1 à l'aide de fiches d'exercices. Notons que P1 ne consacre pas de séance particulière aux critères de divisibilité. En effet, le type de tâches *Etablir un critère de divisibilité* apparaît aussi bien dans l'OM_{div} locale comme type de tâches isolé que dans l'OM_{div} régionale sur les congruences, où il fait l'objet de plusieurs exercices.

Contrairement au programme, P1 ne propose qu'une OM_{div} régionale : les congruences. Cependant, conformément aux exigences de ce dernier, aucun résultat technologique n'est institutionnalisé sur les critères de divisibilité. Par ailleurs, P1 n'aborde pas les changements de base de numération dans son cours. L'OM_{div} régionale sur les changements de base est donc absente.

Pour finir, au niveau des choix de P1 concernant l'évaluation, notons que celle-ci porte essentiellement sur les types de tâches de l'OM_{div} locale vu dans les exercices donnés en classe.

III.3 Savoir apprêté par P2 : OM régionale autour de la division euclidienne

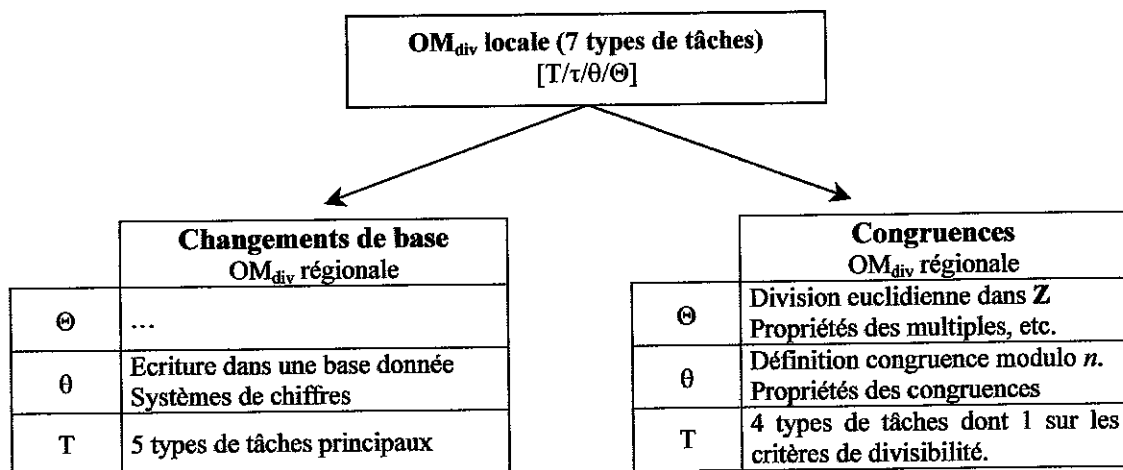


Fig. 8 : Structure du secteur d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P1

Les choix de P2 autour de la division euclidienne sont différents de ceux du programme et de P1. On trouve moins de types de tâches proposés du fait du mode de fonctionnement de P2 : elle donne moins d'exercices que P1 car ceux-ci sont insérés dans le cours.

On constate également, par rapport au programme, l'absence de l'OM_{div} régionale sur les critères de divisibilité. Cela est dû au fait que P2 a fait dépendre cette OM de la notion de divisibilité de deux entiers et non de celle de division euclidienne. Contrairement à P1, les OM_{div} régionales sont ici presque complètes car elles font partie intégrante du cours : les théorèmes sur les changements de base ou les congruences sont donc énoncés, voir démontrés.

Pour finir, notons que l'évaluation de P2 porte d'une part sur les changements de base de numération et sur l'OM_{div} locale, mais essentiellement sur des types de tâches qui n'ont pas été vus en exercices.

Pour conclure sur les choix d'apprêtage au niveau des secteurs et thèmes d'étude, je veux souligner le fait que le mode de fonctionnement didactique est une contrainte interne, de niveau pédagogique, qui contraint fortement les choix mathématiques et didactiques des enseignants. En effet, il détermine en partie la présence et le degré de développement des OM_{div} régionales et pèse également sur la variété des types de tâches proposés et évalués. Cela induit donc des choix mathématiques et didactiques différents qui transforment de façon significative le savoir à enseigner lors de son apprêtage.

IV. LE THEOREME DE LA DIVISION EUCLIDIENNE : UN SUJET D'ETUDE

Je vais maintenant descendre à nouveau d'un niveau dans les analyses, en me centrant sur la démonstration du théorème de la division euclidienne faite par P1 et P2 en classe. Les projets de démonstration de ces deux enseignantes ont été confrontés à des projets de démonstrations reconstruits à partir des programmes, des différents manuels analysés et de brochures¹⁰ à destination des enseignants. Cette méthodologie me permet, à chaque pas de la démonstration, d'identifier les choix mathématiques et didactiques faits par P1 et P2 et par là, d'essayer d'explicitier le système de contraintes et conditions dans lequel ces décisions ont été prises.

¹⁰ Il s'agit d'une brochure du CRDP d'Auvergne (CRDP Auvergne (1998). Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité nouveau programme, *CRDP Auvergne (ed.)*) et d'une autre de l'IREM de Poitiers (BONNEVAL, L.-M. & al (2000). *Enseigner l'arithmétique*, IREM de Poitiers (ed.)).

IV.1 Choix mathématiques et didactiques de P1

P1 choisit d'établir le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

« **Théo et déf :**

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un couple (q, r) unique avec $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < b$ tel que $a = bq + r$

a = dividende, b = diviseur

q = quotient, r = reste. » (Cours n°4 de P1)

Elle choisit de démontrer ce théorème en s'appuyant sur l'axiomatique des propriétés des parties non vides de $\mathbb{N}$ qu'elle a mise en place dans le premier cours d'arithmétique :

« **Dem : Existence**

1^{er} cas : $a \in \mathbb{N}$

$E = \{n \in \mathbb{N}, nb > a\}$. $E \neq \emptyset$ car $\lim nb = +\infty$ (ou $n > a/b$ réalisé si $n > \text{partie entière de } (a/b) + 1$). Pour n assez grand, $n \in E$. E admet un plus petit élément Q . $0 \notin E$ donc $Q \neq 0$.

Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $Q = q + 1$. $(q + 1) \in E$ et $q \notin E$. $qb \leq a < (q + 1)b$

$a = bq + r \Leftrightarrow r = a - bq$. $0 \leq a - bq < b$

Donc $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

2nd cas : $a < 0$ $(-a) > 0$

En utilisant le 1^{er} cas, $-a = bq' + r'$ avec $q' \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r' < b$

$a = b(-q') - r'$ $-b < r' \leq 0$

α) Si $r' = 0$, $a = b(-q') - 0$

β) Si $r' \neq 0$, $a = b(-q') - b + b - r' = b(-q' - 1) + b - r'$ avec $b - r' \in]0, b]$

Unicité

$a = bq + r = bs + t$ avec $(q, s) \in \mathbb{Z}^2$, $0 \leq r < b$ et $0 \leq t < b$

$b(q - s) = t - r$

$0 \leq t < b$

$-b < -r \leq 0$

$-b < t - r < b$ et $(t - r)$ multiple de b d'où $t = r$; d'où $bq = bs$; $q = s$ car $b \neq 0$. »

Trois points ressortent de cette démonstration.

Tout d'abord, P1 choisit de démontrer l'inégalité $qb \leq a < (q + 1)b$, quitte à introduire une complexité au niveau du raisonnement qui n'est pas habituelle pour les élèves auxquels ce cours s'adresse. En effet, le plus petit élément de l'ensemble E n'est pas le nombre cherché dans cette démonstration –le quotient– mais le quotient augmenté d'une unité. L'introduction de q comme étant l'entier précédant Q est motivée par l'inégalité à laquelle on veut aboutir : $qb \leq a < (q + 1)b$. Ce passage est délicat et très formel d'un point de vue mathématique. Il répond entièrement à la volonté de P1 de former les élèves aux mathématiques du supérieur.

Par ailleurs, en choisissant d'établir le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et en tenant à faire des « démonstrations nettement plus rigoureuses » en arithmétique, P1 est amenée à faire une démonstration de l'existence par disjonction de cas. Pour démontrer l'existence de r dans le cas $a < 0$, elle doit faire une seconde disjonction de cas sur les valeurs possibles de r : $r = 0$ et $r \neq 0$. Nous avons donc ici une imbrication de raisonnements par disjonction de cas qui,

dans leur déroulement, nécessitent la mise en œuvre de connaissances extrêmement techniques sur la manipulation d'entiers relatifs et de leurs opposés. Soulignons qu'en choisissant n dans $\mathbb{Z}$ dans la définition de l'ensemble E , elle aurait pu éviter la démonstration technique du cas $a < 0$.

Enfin, P1 choisit de démontrer l'existence du couple (q,r) en distinguant la partie existence de la partie unicité. Or, en se basant sur la propriété d'Archimède et les propriétés des parties de $\mathbb{N}$, l'existence et l'unicité de q et r peuvent s'obtenir simultanément. On peut se demander pourquoi P1 décide de séparer la démonstration de l'existence et celle de l'unicité. Tout d'abord, comme cela est souligné dans le cours de l'IREM de Poitiers, c'est l'occasion de mettre en œuvre un raisonnement intéressant –le raisonnement par l'absurde– et d'utiliser une propriété spécifique à l'arithmétique (pour montrer qu'un nombre est nul, montrer que c'est un multiple de b strictement compris entre $-b$ et b). Faire ce choix permet donc de répondre à l'un des objectifs de P1 : la formation des élèves au raisonnement. De plus, distinguer la démonstration de l'existence de celle de l'unicité répond également à un second objectif de P1 : préparer les élèves aux mathématiques du supérieur.

Tout ceci montre la cohérence des choix de démonstration de P1 pour le théorème de la division euclidienne avec ses objectifs d'enseignement par rapport au raisonnement. Par ailleurs, son mode de fonctionnement didactique sous forme de cours magistral lui permet de proposer une démonstration aussi « formelle ».

IV.2 Choix mathématiques et didactiques de P2

Comme P1, elle choisit également d'établir le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Voici la démonstration qu'elle propose pour ce théorème :

« Dem :

Existence

Soit $a \in \mathbb{Z}$, soit $b \in \mathbb{N}^*$. Encadrons a par deux multiples consécutifs de b .

Soit $q \in \mathbb{Z}$ tel que $bq \leq a < b(q+1)$ (remarque : $q \leq a/b < q+1$ $q = E(a/b)$)

$a = bq + a - bq$ avec $r = a - bq$.

Comme $bq \leq a < b(q+1)$, on a $0 \leq r < b$

Unicité

Soit (q,r) et (q',r') deux couples solution. On a $\begin{cases} a = bq + r & \text{avec } 0 \leq r < b, \\ a = bq' + r' & \text{avec } 0 \leq r' < b \end{cases}$

$\begin{cases} 0 \leq r < b \\ -b < -r \leq 0 \end{cases}$ donc $-b < r - r' < b$

De plus, $bq + r = bq' + r'$ donc $r - r' = b(q' - q)$ avec $q' - q$ entier, donc $r - r'$ multiple de b

D'où $r - r' = 0$ donc $r = r'$, donc $q' - q = 0$ donc $q' = q$ d'où l'unicité. »

Quatre points se dégagent à l'analyse de cette démonstration.

Premièrement, P2 ne prouve pas que a peut être encadré par deux multiples consécutifs de b . Cet encadrement semble aller de soi. Tout comme l'IREM de Poitiers, elle prévoit de s'appuyer sur « le bon sens commun » et sur le fait que « les élèves utilisent spontanément [ce] résultat » (Ibid., p. 245).

Par ailleurs, P2 fait une remarque sur la partie entière de a/b qui peut paraître surprenante. En effet, l'utilisation de la partie entière aurait pu permettre de prouver l'existence de q et d'obtenir de façon « rigoureuse » l'inégalité recherchée.

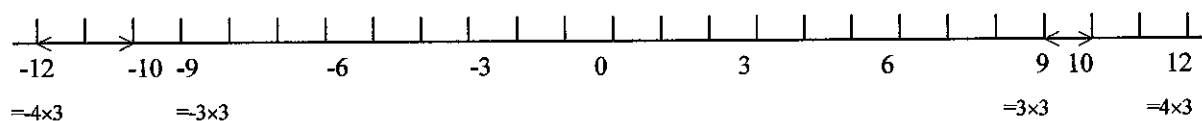
De plus, alors que P2 a choisi d'établir le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, elle ne fait pas de disjonction de cas selon le signe de a . Elle évite de la sorte un passage technique de la démonstration en introduisant l'inégalité $qb \leq a < (q+1)b$ directement avec a et q à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Notons que l'utilisation de la partie entière permet aussi d'éviter de distinguer le cas a positif du cas a négatif.

En introduisant la partie entière, P2 aurait pu faire simultanément la démonstration de l'existence et de l'unicité du quotient et du reste. Cependant, de même que P1 et l'IREM de Poitiers, elle choisit de prouver séparément l'existence et l'unicité de (q,r) . Tout comme P1, P2 a également comme objectif de former les élèves au raisonnement en arithmétique.

IV.3 Savoir enseigné dans la classe de P1

Je vais maintenant présenter la réalisation de la démonstration faite en cours par P1. Au sein de l'ensemble du protocole, je m'intéresse plus particulièrement à la démonstration difficile du cas $a < 0$ dans la partie sur l'existence du quotient et du reste d'une division euclidienne.

Avant de donner l'extrait de protocole, précisons tout d'abord la situation de ce passage par rapport à l'ensemble de la séance. Il se déroule en introduction du théorème, avant la démonstration de l'existence. La démonstration en tant que telle du théorème n'a pas encore débuté. P1 s'appuie sur le schéma ci-dessous. Ce schéma permet d'illustrer l'existence de q et l'inégalité $qb \leq a < (q+1)b$ quand $a=10$ et $a=-10$ et quand $b=3$. Il permet également de visualiser le reste.



26	P : [...] Donc pour les nombres positifs je dirai qu'il n'y a pas de nouveauté, ce qui m'intéresse juste, que vous ayez compris en préliminaire, c'est que le quotient on va le trouver par l'inégalité sur ... en plaçant le nombre par rapport aux multiples de 3.	

P1 fait le bilan du travail qu'elle vient d'effectuer sur 10 divisé par 3 en pointant l'élément essentiel sur lequel reposera la démonstration à venir : la place de 10 par rapport aux multiples de 3. Cependant, le fait que P1 reprenne sa phrase « le quotient on va le trouver par l'inégalité sur ... en plaçant le nombre par rapport aux multiples de 3 » est symptomatique de l'attitude de P1, toujours en tension avec ce qu'elle est en train de faire et ce qu'elle a prévu de faire par la suite. Dans son bilan, elle se reprend car elle commence à fournir une explication dans le cadre théorique (l'inégalité centrale dans la démonstration : $qb \leq a < (q+1)b$) alors qu'elle se situe encore dans le cadre de l'application numérique.

27	P : Alors pour les nombres négatifs, il y a juste une histoire de convention. La convention importante c'est que par convention le reste est un nombre positif.	
28	P : Donc -10, donc le raisonnement est le même, -10 il est entre -4 fois 3 et -3 fois 3. Mais si je prenais ce nombre là, -9, si je veux aller de -9 à -10 le problème c'est qu'il faut soustraire -a ou rajouter enfin soustraire a ou rajouter -a. Donc par définition, la division de -10 par 3 on va écrire que -10 c'est plutôt -4 par 3 plus quelque chose et donc ce quelque chose ce qu'on trouve là cad c'est le +2.	(Voir schéma)
29	P : Donc la division ça va s'écrire -10 égal -4 fois 3 plus 2 donc voilà le quotient et voilà le reste.	(P écrit au tableau) -10 divisé par 3 $-10 = -4 \times 3 + 2$ $-10 = -3 \times 3 - 1$

Après avoir traité le cas 10 divisé par 3, P1 passe au cas -10 divisé par 3. Elle suit le même ordre que celui choisi dans la démonstration ($a \geq 0$ puis $a < 0$). Elle indique auparavant le point qui va permettre de déterminer si l'égalité trouvée est bien une égalité de division euclidienne : « la convention sur le reste ». Elle écrit d'ailleurs au tableau les deux égalités que l'on peut obtenir, suivant que l'on choisisse -3 ou -4 comme quotient et barre celle qui ne vérifie pas la condition sur le reste. Ce choix d'écrire les deux égalités permet de montrer aux élèves qu'il existe différentes égalités qui peuvent avoir la forme d'une égalité de division euclidienne mais que seule celle qui vérifie la condition $0 \leq r < b$ représente une égalité de division euclidienne.

30	P : Ca c'est un exemple numérique pour vous expliquer comment on va faire cette démonstration.	

P1 explique à nouveau le mode de fonctionnement qu'elle a décidé d'adopter pour cette démonstration : travailler sur des exemples numériques permettant de comprendre la démonstration délicate.

31	P : La démonstration va être faite en 2 temps.	
32	P : Premier temps on va pas s'occuper du cas où a est négatif [...].	
33	P : Dans un deuxième temps, on se servira de la démonstration qu'on a faite du côté positif pour passer du côté négatif.	

P1 doit ici résoudre le type de tâche « Introduire la démonstration ». Elle va utiliser pour cela la technique didactique « Donner la structure de la démonstration ». Elle indique que la démonstration va se faire en deux temps : le cas $a \geq 0$ puis le cas $a < 0$. Or, au niveau du projet de cours de P1, cette distinction de cas n'intervient que dans un second temps, après la distinction faite entre la démonstration de l'existence et celle de l'unicité. Deux hypothèses permettent d'expliquer cet oubli de P1 :

- Soit elle est toujours dans une dynamique d'anticipation qui la conduit à « brûler » des étapes ;
- Soit elle est encore « accrochée » à l'exemple numérique qu'elle vient d'exposer et sur lequel elle a introduit la distinction des cas $a \geq 0$ et $a < 0$ sans évoquer explicitement la question de l'existence et de l'unicité du couple (q,r) .

Nous constatons donc que P1 donne beaucoup d'explications qui portent essentiellement sur la structuration du cours et des aller-retour entre le schéma et la démonstration théorique afin de créer une place aux élèves dans le cadre d'un cours magistral. Par ailleurs, la tension apparente entre le déroulement effectif de la démonstration et la difficulté à venir freine l'avancement de la démonstration. Ce poids du projet et de l'anticipation de la difficulté joue également sur la gestion du temps. Seules cinq minutes sont consacrées dans cette séance à la démonstration de l'unicité du quotient et du reste – démonstration tout de même délicate – contre trente minutes pour la présentation de la démonstration et la preuve de l'existence.

IV.4 Savoir enseigné dans la classe de P2

Voici la démonstration faite en cours par P2. Je me centre ici sur la démonstration de l'existence du quotient à l'aide de la partie entière. Précisons la position de ces extraits de protocole par rapport à l'ensemble de la séance. Après avoir vérifié la validité de

l'encadrement de a par deux multiples consécutifs de b , P2 inscrit l'inégalité portant sur a/b ($q \leq a/b < q+1$) et demande aux élèves :

41	P : [...] Qu'est-ce que ça caractérise ça ?	
42	Els : ...	
43	P : Quelqu'un a une idée ?	
44	Els : ...	
45	P : q et $q+1$ sont des entiers consécutifs. Donc, vous connaissez la définition, vous connaissez ça, ça doit vous rappeler quelque chose.	
46	El : c'est divisible par b	
49	P : [...] Non.	

Aucun élève ne reconnaît dans cette inégalité une caractérisation qui définit la partie entière de a/b . Pour faire reconnaître cette caractérisation, P2, en précisant que q et $q+1$ sont des entiers consécutifs, ferme la question. En effet, elle livre aux élèves des éléments sur l'inégalité $q \leq a/b < q+1$ dont elle attendait auparavant qu'ils les tirent par eux-mêmes. Elle désigne par ailleurs cette inégalité particulière comme étant une définition connue des élèves. Par effet de contrat, un élève répond que « c'est divisible par b », sans préciser ce qui est divisible par b . Pour donner sa réponse, cet élève se place dans le cadre des cours d'arithmétique et, parmi les différentes notions vues par la classe dans ce cours (diviseurs, multiples, divisibilité et nombres premiers), la réponse la plus plausible est le fait que l'inégalité $q \leq a/b < q+1$ représente une relation de divisibilité¹¹.

53	P : [...] On l'utilise assez fréquemment cette fonction parce que c'est la seule qui marche pas comme les autres. Elle a des tas de petites propriétés qui sont anachroniques. Je veux dire : elle est pas continue, elle est pas toujours dérivable la fonction qu'il y a là dessous.	
54	Els : ...	
55	P : Non, vous connaissez pas de fonctions qui ... un petit peu bizarres ?	
56	El : la fonction inverse ?	
63	P : [...] En d'autres termes, q c'est le plus grand entier inférieur ou égal à a/b . Oui, non ?	
64	El : Oui	

P2 se trouve toujours confrontée au fait de devoir « Raviver une connaissance non mobilisable chez les élèves ». Mais la première technique didactique « Fermer progressivement les questions » qu'elle a mise en œuvre pour y répondre n'a pas fonctionné. Elle essaie donc une nouvelle technique « Faire appel à diverses propriétés de la connaissance que l'on souhaite mobiliser » pour sortir la classe de l'incompréhension dans laquelle elle

¹¹ Il existe en effet une proximité symbolique entre la fraction « a/b » et de la relation « $a | b$ » introduite en début de cours ; proximité symbolique qui peut entraîner des confusions car les rôles de a et de b sont inversés d'une expression à l'autre.

semble se trouver. P2 décide alors de donner des indications aux élèves en posant des questions dans le cadre fonctionnel. Mais la distance entre les écritures habituellement rencontrées dans ce cadre et l'écriture $q \leq a/b < q+1$ que les élèves lisent au tableau est trop importante. Les élèves ne peuvent donc pas répondre aux questions de P2.

Il n'y a plus de logique épistémologique dans les questions que P2 pose aux élèves au sujet de la partie entière ; la situation se transforme alors en un jeu de devinette. C'est un indice du fait que P2 n'a pas réellement problématisé le rôle de la partie entière dans cette démonstration ; elle s'attendait sûrement à ce que cette connaissance soit disponible sans difficulté chez les élèves.

Pour gérer cette situation où la classe n'arrive pas à décrypter ses attentes, P2 a le choix entre donner la réponse exacte ou continuer à essayer de faire trouver aux élèves la réponse qu'elle attend. Elle opte pour la seconde possibilité et abandonne le cadre fonctionnel pour se centrer sur les propriétés de la partie entière qui sont en jeu dans la démonstration :

74	P : [...] Quel est le plus grand entier inférieur ou égal à 3,5 ?	
83	Els : [...] La partie entière	(Classe)
84	P : C'est la partie entière.	(P écrit au tableau) $q = E(a/b)$

Finalement, plusieurs élèves affirment que c'est « la partie entière » et P2 conclut rapidement sur le fait que q est la partie entière de a/b , sans revenir sur le fait que cela permet d'assurer l'existence du quotient.

Ces extraits de protocole montrent que le problème d'anticipation de la difficulté relative à la partie entière contraint P2 à gérer la situation par une succession d'effets Topaze. Sa gestion didactique consiste tout au long de ce passage à faire participer les élèves jusqu'à obtenir la réponse exacte, d'où une atomisation de la tâche parfois peu reliée au contenu. P2 ne s'autorise pas à donner la bonne réponse. De fait, la dévolution de ses choix de démonstration aux élèves est rendue difficile.

Pour conclure sur l'analyse a posteriori des extraits de protocoles de P1 et P2, je souhaite insister sur deux points.

Tout d'abord au niveau des techniques didactiques, on constate que P1 et P2 utilisent un panel de techniques didactiques relativement restreint pendant la séance. Par ailleurs, l'utilisation de ces techniques se révèle stable tout au long du cours. Le mode de fonctionnement didactique de P1 et P2 permet d'expliquer en partie ce choix de techniques. Pour P1, par exemple, il

s'agit de recréer dans le cadre d'un cours magistral une place à l'élève pour essayer de s'assurer de leur compréhension. D'où une utilisation de techniques didactiques qui permettent à P1 de structurer son cours.

Ensuite, au niveau du savoir enseigné, on a montré que dans le cas de l'enseignante P1, il existe peu d'écart entre le projet initial et sa réalisation en classe, si ce n'est la mise en exergue de la division euclidienne d'un nombre négatif. Ceci n'est pas le cas dans la classe de P2. Les baisses successives d'exigence que l'on lit dans les questions de P2 conduisent à une atomisation du projet en tâches isolées et l'absence de conclusion lors des différentes étapes de la preuve ne lui permet pas de reconstruire une cohérence de la démonstration.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

J'espère avoir montré tout au long de ce séminaire ce que peut apporter la notion de savoir apprêté pour analyser les processus de transposition didactique interne. Cet outil méthodologique me paraît pertinent pour décrire et analyser le travail fait en amont des classes. Il permet tout d'abord de distinguer le rôle des différents acteurs intervenant dans ce processus et ce à différents niveaux d'analyse. Par ailleurs, la comparaison des différents apprêts du savoir est un moyen d'identifier les choix tant mathématiques que didactiques fait par les auteurs de manuels ou les enseignants.

Pour conclure, je souhaite revenir sur deux points : la viabilité de la niche « algorithmique » et le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne.

Mon travail de thèse a permis de montrer que le choix noosphérique de réintroduire l'arithmétique en mettant en avant son aspect algorithmique s'est fait en rupture avec la représentation de l'activité mathématique qui domine dans le système d'enseignement. Dans le cadre actuel, cette niche de l'arithmétique ne vit ni dans les manuels, ni dans les classes. Deux pistes nous semblent intéressantes pour transformer cet état de fait. En dehors des questions de formation des enseignants, un travail peut être fait au niveau des manuels. Les manuels peuvent être considérés comme des institutions de formation pour les enseignants d'après les travaux de Neyret (1993, 1995). Ainsi, proposer dans ces derniers, une véritable réflexion didactique sur l'utilisation des outils informatiques permettrait, a priori, de fournir des conditions davantage favorables à la vie de l'aspect algorithmique de l'arithmétique en classe.

En ce qui concerne l'analyse du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne, j'ai présenté une boîte à outil méthodologique¹² permettant d'analyser les choix de l'enseignant quelque soit le niveau d'analyse souhaité. Cependant, la question de la description des OD, de leur dynamique et de leur détermination réciproque avec les OM demande à être retravailler, sûrement par le biais d'une articulation avec la théorie des situations didactiques.

Pour finir, je veux souligner que, dans le cadre particulier de cette étude, je me suis limitée à l'analyse du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne. Or, comme l'a montré Conne (1992), l'élève joue un rôle dans ce processus. Je n'ai pas abordé ce point dans ma recherche. En effet, le mode de fonctionnement didactique des deux enseignants observées ne m'a pas permis d'avoir accès au travail des élèves. Ce point mériterait d'être abordé dans de nouveaux travaux.

BIBLIOGRAPHIE

- ARSAC, G. & al. (1989). La transposition didactique en mathématiques, In IREM et LIRDIS de Lyon (eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie*, (pp. 3-36). Lyon
- ASSUDE, T. (1998). Evolution de l'enseignement de l'arithmétique et formation des maîtres, *Actes du XXVème Colloque COPIRELEM*, Loctudy, 103-118.
- BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77-123.
- BOSCH, M., GASCON, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories et empiries. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 23-40) Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage éd. (1^{ère} édition : 1985).
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

¹² Méthodologie d'analyse par zooms successifs articulant notamment les niveaux de détermination didactiques et mathématiques de Chevallard (2002).

- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulations. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12(2.3)**, 221-270.
- NOIRFALISE, R., WOZNIAK, F. (2002). Structure, fonctionnement et écologie des organisations didactiques. A propos de statistique en 2^{de}. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11^e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 65-74). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- RAVEL, L., (2002). Arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques : quel(s) enseignement(s) ?, *Repères - IREM n°49*, 93-116.
- RAVEL, L., (2003a). *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.
- RAVEL, L., (2003b). Raisonnement et nombres entiers. Comportements d'élèves de terminale S spécialité mathématique en arithmétique, *Bulletin de l'APMEP*, **n°49**, 93-116.
- ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21(1.2)**, 57-80.

La résolution de problèmes arithmétiques : une étude longitudinale au CE1

Rémi Brissiaud

Laboratoire CNRS FRE2627 "Cognition & Usages", IUFM de Versailles

Deux variables didactiques “ classiques ” : le type du problème et la taille des nombres

La taille des nombres d'un énoncé de problème arithmétique est une variable didactique “ classique ”. En effet, lorsque les nombres de l'énoncé des problèmes sont de petites tailles, les enfants d'âge scolaire sont susceptibles de résoudre un grand nombre de ces problèmes avant tout enseignement des opérations arithmétiques (Vergnaud et Durand, 1976). Pour cela, ils se livrent à une sorte de simulation des situations décrites dans les énoncés soit en utilisant du matériel (leurs doigts, éventuellement), soit en exécutant un dessin schématique. Ceci s'observe pour toutes les opérations arithmétiques (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993a). Considérons ainsi le problème : “ Eric avait 5 billes ; il en gagne ; maintenant il en a 8. Combien de billes vient-il de gagner ? ”. Pour le résoudre, l'élève peut mettre en œuvre la stratégie de simulation suivante : avec un matériel comme des jetons, il forme une collection de 5 objets ; puis il en ajoute d'autres jusqu'à en avoir 8 en tout et il compte enfin combien d'objets il vient d'ajouter. De manière équivalente, il peut aussi faire un dessin schématique en tenant le même raisonnement (il dessine 5 ronds, etc.).

En utilisant ces stratégies, tous les enfants ne réussissent évidemment pas d'emblée. Dans le cas du problème précédent, par exemple, l'erreur la plus fréquente chez les élèves de C.P. consiste à répondre “ 8 ” parce que l'élève ne distingue pas les éléments qui viennent d'être ajoutés de ceux qui correspondent à l'état initial (Riley & Greeno, 1988). Cependant, si l'on s'intéresse à d'autres types de problèmes comme la recherche du résultat d'un ajout ou celui d'un retrait, par exemple, ils sont, eux, bien réussis dès le CP. Le type du problème est, lui - aussi, une variable didactique “ classique ”.

Une nouvelle variable didactique : la concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique

Puisque l'usage des stratégies qui conduisent au succès semble nécessiter des petits nombres et / ou la disponibilité d'un matériel, le chercheur peut évidemment s'interroger sur ce qui se passe lorsqu'on augmente la taille des nombres et lorsqu'on ne suscite plus l'usage d'un matériel. Or, dans ces conditions, tous les problèmes ne deviennent pas plus difficiles de façon uniforme. Considérons les problèmes suivants (Schliemann, Araujo, Cassundé, Macedo & Nicéas, 1998) :

M1 : Quel est le prix de 3 chocolats à 50 cruzeiros l'un ?

M2 : Quel est le prix de 50 chocolats à 3 cruzeiros l'un ?

Schliemann et al. les ont proposés à des sujets non scolarisés de 12 ans environ qui vivent dans les rues de Récife, en vendant des bonbons aux feux rouges de la ville. Les énoncés de ces problèmes sont rédigés avec les mêmes mots, on y trouve les mêmes nombres 3 et 50, et pourtant, M1 conduit à 75 % de réussite environ alors que M2 conduit à 0 % de réussite ! Lorsque la taille des nombres augmente, à l'intérieur d'un même type de problèmes, certains restent donc bien réussis, alors que d'autres qui utilisent des nombres de même taille, provoquent un échec massif. Les variables didactiques que sont la taille des nombres et le type du problème, prises isolément, ne permettent pas d'expliquer un tel phénomène.

De même, Brissiaud (1995) a montré qu'un même problème additif peut, lorsque la taille des nombres augmente, soit rester bien réussi par les novices (cas de : "Eric a 44 billes ; il en gagne et après il a 47 billes. Combien a-t-il gagné de billes ?"), soit être massivement échoué (cas de : "Eric a 3 billes ; il en gagne et après il a 47 billes...")¹. Ce n'est donc pas nécessairement le problème qui utilise les plus grands nombres qui est le moins bien réussi. Ces résultats conduisent à étudier une nouvelle variable didactique, différente de la taille des nombres et différente du type du problème. Cette variable rend compte de la façon dont la taille des nombres interagit avec le type du problème pour expliquer le comportement des novices : je l'ai appelée concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique (Brissiaud, 2000, 2002a, 2002b).

¹ Les taux de réussite sont de 54% et 10% respectivement chez des élèves de CP qui n'ont jamais étudié la soustraction.

En effet, comment expliquer que la réussite au problème M1 : “ Quel est le prix de 3 chocolats à 50 cruzeiros l'un ? ” ne nécessite pas de fréquenter l'école, contrairement à la réussite à M2 : “ Quel est le prix de 50 chocolats à 3 cruzeiros l'un ? ”.

Ce fait s'explique si l'on considère que, chez les enfants, la représentation initiale du problème active une stratégie qui reste très proche d'une stratégie de simulation, bien qu'elle n'utilise pas de matériel. S'il en est ainsi, les enfants cherchent combien font “ 3 fois 50 ” dans le cas de M1 et combien font “ 50 fois 3 ” dans celui de M2. Dans le premier cas, la procédure activée ($50 + 50 + 50$) conduit facilement à la solution numérique (50 et 50, 100 ; et encore 50, 150) alors que dans le second ($3 + 3 + 3 + 3 + \dots$), cette solution numérique est très difficilement accessible (3 et 3, 6 ; et encore 3, 9 ; et encore 3, 12 ; etc.). Dans le cas de M1, on peut dire qu'il y a concordance entre la représentation initiale de ce problème et l'économie de sa résolution numérique alors que dans celui de M2, il y a discordance.

De même, concernant le problème : “ Eric a 44 billes ; il en gagne et après il a 47 billes. Combien a-t-il gagné de billes ? ”, les enfants disent souvent : 44 puis lèvent 3 doigts : 45 (1), 46 (2), 47 (3). La simulation de ce qui est dit dans l'énoncé par une procédure de comptage conduit presque d'emblée à la solution numérique : il y a dans ce cas concordance entre la représentation initiale du problème et l'économie de sa résolution numérique. Avec 3 et 47, les enfants s'y prennent de la même manière : 3, 4 (1), 5 (2), 6 (3), 7 (4)... mais la longueur de cette procédure rend difficile son aboutissement et ils échouent. Il y a alors discordance entre la représentation initiale de ce problème et l'économie de sa résolution numérique.

Le phénomène de concordance / discordance et l'étude de la conceptualisation arithmétique

L'étude de ce phénomène permet d'adopter un point de vue sur le progrès des enfants différent de celui selon lequel ils apprennent progressivement à résoudre de nouveaux types de problèmes. En effet, pour un élève, progresser signifie aussi devenir capable de se comporter différemment face à un même type de problème, c'est-à-dire accéder à un comportement stratégique face à un problème arithmétique (pour le problème “ Eric ” et avec les nombres 3 et 47, les élèves progressent en découvrant qu'ils peuvent aussi compter à rebours et, de même, pour le problème des 50 objets à 3 cruzeiros l'un, ils progressent en

découvrant qu'ils peuvent calculer 3 fois 50). Le progrès dépend donc de l'appropriation par les élèves d'équivalences entre procédures².

Ce point de vue peut être adopté non seulement pour étudier la résolution de problèmes de soustraction et de multiplication, mais aussi celle de problèmes de division (Brissiaud, 2002a) ainsi que pour étudier la compréhension des fractions (Brissiaud, 2001, 2002b). Ces recherches ont permis de : 1°) Montrer que les problèmes correspondant à des cas de concordance sont réussis avant tout enseignement alors que ceux correspondant à des cas de discordance sont massivement échoués. 2°) Vérifier que des adultes cultivés (i.e. qui ont reçu un enseignement arithmétique) réussissent les problèmes correspondant à des cas de discordance.

Cette même comparaison des performances dans les cas de concordance et de discordance, si elle était effectuée dans le cadre d'une étude longitudinale, serait évidemment susceptible de conduire à une étude plus précise du phénomène de conceptualisation arithmétique. En effet, le progrès observé dans les problèmes correspondant à des cas de concordance peut s'interpréter comme résultant essentiellement du développement de compétences assez générales : meilleure compréhension des énoncés verbaux en général, meilleure compréhension de la "règle du jeu" inhérente à la résolution de ce type de problèmes arithmétiques, etc.. Dans les cas de concordance, la mise en œuvre de la procédure activée par l'énoncé permet l'obtention de la solution numérique. En revanche, le progrès observé dans les problèmes correspondant à des cas de discordance peut s'interpréter comme résultant à la fois du développement des compétences assez générales précédentes et comme résultant de l'appropriation des "équivalences entre procédures" dont l'usage permet de surmonter la difficulté engendrée par la discordance. Cette différence de progression entre les problèmes pour lesquels il y a discordance et ceux pour lesquels il y a concordance peut ainsi servir d'indicateur lorsqu'on cherche à étudier la conceptualisation. De plus, dans le cadre d'une approche longitudinale, cette étude de la conceptualisation peut se faire en relation avec l'enseignement des opérations arithmétiques qui a cours dans les classes concernées.

² Vergnaud parlerait de "théorèmes en actes".

Présentation de l'étude longitudinale au CE1³

110 élèves appartenant à 5 classes de CE1 ont été soumis aux mêmes problèmes en octobre-novembre 2002 et en juin 2003 (les élèves qui avaient un an de retard ont été exclus de l'étude parce qu'ils risquaient de ne pas être d'"authentiques novices"). Chaque élève a participé à deux séances de 12 problèmes en octobre-novembre et aux deux mêmes séances en juin. La série de ces 12 problèmes a été construite en faisant varier : s = la structure du problème (s1 = structure multiplicative et s2 = additive), c = le contexte (images ou gâteaux dans le cas des problèmes multiplicatifs, billes ou euros dans celui des problèmes additifs) et t = le type du problème. Dans le cas des problèmes multiplicatifs, cette variable prend les valeurs : t1 = recherche du résultat d'une itération (combien vaut a fois b ?), t2 = recherche du résultat d'une partition (valeur d'une part quand on partage a en b parts égales ?) et t3 = recherche du nombre de groupes dans un problème de quotition (en a, combien de fois b ?). Dans le cas des problèmes additifs, cette variable prend les valeurs : t1 = recherche du résultat d'une diminution, t2 = recherche de la valeur d'un ajout et t3 = recherche d'un état initial dans le cas où celui-ci est transformé par un ajout. Enfin, une dernière variable, d, prend la valeur d1 dans les cas de concordance et d2 dans les cas de discordance. Voici par exemple une série de problèmes qui a été utilisée avec un groupe d'élèves lors d'une séance :

s1 : structure multiplicative

s1 c1 t1 d1 : Combien y a-t-il d'images dans 4 paquets de 10 images ?

s1 c2 t1 d2 : Combien y a-t-il de gâteaux dans 10 paquets de 4 gâteaux ?

s1 c1 t2 d1 : Madame Durand a 30 images. Elle partage ces images entre 3 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?

s1 c2 t2 d2 : Monsieur Dupont a 30 gâteaux. Il partage ces gâteaux entre 10 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien de gâteaux chaque enfant va-t-il recevoir ?

s1 c1 t3 d1 : Madame Lebris a 20 images. Elle fait des paquets de 10 images. Combien de paquets peut-elle faire ?

s1 c2 t3 d2 : Monsieur Dulac a 20 gâteaux. Il fait des paquets de 2 gâteaux. Combien de paquets peut-il faire ?

³ Celle-ci (Brissiaud et Sander, sous presse) a été menée dans le cadre d'un contrat de recherche Cognitive : "Les apprentissages et leurs dysfonctionnements". Elle sera, dans la mesure du possible, poursuivie avec les mêmes sujets au CE2.

s2 : structure additive

s2 c1 t1 d1 : Nicolas va en récréation avec ses 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien Nicolas a-t-il de billes maintenant ?

s2 c2 t1 d2 : Léa a 31 euros dans sa tirelire. Pour s'acheter un jouet, elle sort 27 euros de sa tirelire. Combien Léa a-t-elle d'euros maintenant dans sa tirelire ?

s2 c1 t2 d1 : Luc va en récréation avec ses 38 billes. Pendant la récréation, il gagne d'autres billes. Maintenant, il a 41 billes. Combien Luc a-t-il gagnées de billes pendant la récréation ?

s2 c2 t2 d2 : Marie a 3 euros dans sa tirelire. Pour son anniversaire, elle reçoit d'autres euros et elle les met dans sa tirelire. Maintenant, elle a 41 euros dans sa tirelire. Combien Marie a-t-elle reçu d'euros pour son anniversaire ?

s2 c1 t3 d1 : Annie va en récréation avec ses billes. Pendant la récréation, elle gagne 3 billes. Maintenant, elle a 42 billes. Combien Annie avait-elle de billes avant la récréation ?

s2 c2 t3 d2 : Julien a des euros dans sa tirelire. Pour son anniversaire, il reçoit 39 euros et il les met dans sa tirelire. Maintenant, il a 42 euros dans sa tirelire. Combien Julien avait-il d'euros avant son anniversaire ?

En octobre-novembre comme en juin, l'élève qui avait reçu un problème si ti di dans l'un des contextes Ci lors de la 1e séance, était confronté au même problème dans l'autre contexte lors de la 2e séance. Par ailleurs, pour varier les données et les réponses, les valeurs numériques de chaque problème ont été obtenues à partir des triplets (2, 10, 20), (3, 10, 30) et (4, 10, 40) pour les problèmes multiplicatifs et les triplets (3, 38, 41), (3, 39, 42) et (4, 27, 31) pour les problèmes additifs. Les passations sont collectives mais par petits groupes. Comme les élèves de chaque classe sont répartis en 3 sous-groupes, le plan expérimental est équilibré du point de vue des valeurs numériques utilisées au sein des protocoles d'une même classe : pour un problème donné et une séance donnée, chacun des trois problèmes qu'il est possible de construire à partir des trois triplets de valeurs numériques est soumis à un tiers de l'effectif de chaque classe. De même, l'ordre d'apparition de chaque problème au sein des protocoles d'une même classe a été équilibré : 1/3 des élèves le rencontrent dans le 1er tiers du protocole, 1/3 dans le 2e et 1/3 dans le 3e. Par ailleurs, cet ordre est tel que les problèmes additifs et multiplicatifs alternent.

Les énoncés sont donnés sous forme orale : l'expérimentateur lit l'énoncé deux fois et laisse une minute environ pour fournir la réponse numérique (aucune justification n'est demandée). Les sujets doivent l'écrire sur une page d'un livret qu'ils ont reçu en début de séance. La minute achevée, l'expérimentateur leur demande de tourner la page. Pour réguler cette

passation, les 12 pages des livrets sont repérées par les lettres A à L (1^e séance) ou K à X (2^e séance). La durée d'une minute a été choisie parce que, dans les cas de discordance, elle semble à la fois : 1°) suffisamment longue pour permettre aux sujets qui ont accès au "théorème en acte" conduisant à la solution de calculer celle-ci et 2°) suffisamment courte pour interdire aux sujets qui n'ont pas accès à un tel "théorème en acte" de réussir en manipulant leurs doigts par exemple.

Bien que cela ne soit pas exploité dans la suite de ce texte, signalons enfin que l'examen des manuels utilisés dans les différentes classes, conduit a priori à penser que l'enseignement des théorèmes en acte nécessaires à la résolution des problèmes s1t1d2 (recherche du résultat d'une itération dans un cas de discordance) et s2t1d2 (recherche du résultat d'un retrait dans un cas de discordance) est plus explicite dans trois des classes de l'échantillon que dans les deux autres : on peut évidemment faire l'hypothèse que les élèves de ces classes progresseront plus rapidement concernant ces problèmes au moins. Mais dans les limites de ce texte, les seules hypothèses qui vont être examinées sont les suivantes :

1°) Hypothèse 1 : Les problèmes correspondant à des cas de concordance seront mieux réussis en octobre-novembre que ceux correspondant à des cas de discordance. Cette hypothèse vise à tester la généralité du phénomène de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Jusqu'ici, en effet, aucune étude n'a tenté de mettre en évidence ce phénomène concernant les problèmes additifs de recherche d'un état initial. Par ailleurs, concernant les problèmes de quotition et de partition étudiés ici, le phénomène de concordance / discordance n'a été mis en évidence qu'au niveau du CE2 (Brissiaud, 2002a). Enfin, concernant les problèmes de recherche du résultat d'une itération, c'est seulement dans le cadre de l'étude des "mathématiques de la rue" (Schliemann et al, 1998) qu'il a été mis en évidence.

2°) Hypothèse 2 : Comme, en France, la multiplication est étudiée au CE1 alors que la division ne l'est pas, le progrès s'effectuera différemment dans le cas des problèmes de type s1t1 (combien vaut a fois b ?) que dans celui des problèmes de type s1t2 (partition) et s1t3 (quotition). En effet, pendant leur scolarité au CE1, les écoliers français apprennent la commutativité de la multiplication : a fois b est égal à b fois a . S'ils sont confrontés en fin d'année à un problème où l'on demande combien il y a d'unités dans 10 groupes de 4 (cas de discordance), ils sont donc susceptibles de remplacer le calcul de 10 fois 4 par celui de 4 fois 10. En revanche, la division, elle, n'est pas enseignée au CE1 : les élèves n'y apprennent pas que le résultat de a unités partagées en b parts égales s'obtient également en cherchant : "En a , combien de fois b ?". C'est pourquoi, si les élèves sont confrontés en fin d'année à un

problème où l'on cherche le résultat d'un partage de 40 unités en 10 parts égales (cas de discordance), ils sont moins susceptibles de remplacer cette recherche par celle, plus simple, de : " En 40, combien de fois 10 ? ". En résumé, concernant les problèmes s1t1 le progrès chez les élèves devrait être avoir une dimension spécifiquement conceptuelle alors que concernant ceux de type s1t2 et s1t3, le progrès pourrait au contraire avoir une dimension générale, qui ne s'observe pas dans les cas de discordance du fait d'un défaut de conceptualisation.

La situation est différente concernant les problèmes relevant d'une structure additive (S2). En effet, ce sont tous des problèmes de soustraction. Or, cette opération arithmétique est au programme du CE1 et les trois types de problèmes s2t1, s2t2 et s2t3 sont travaillés dès ce niveau de la scolarité dans le cadre de cet enseignement. Avec ces problèmes, il est donc moins probable qu'on puisse attribuer le progrès de manière spécifique à l'une des deux dimensions étudiées (progrès conceptuel vs. développement de compétences générales) et il est moins probable que, selon les problèmes, ce ne soit pas la même dimension du progrès qui domine.

Une présentation succincte des résultats de novembre

Les réponses aux problèmes additifs étaient notées 1 en cas de réponse exacte à une unité près (erreur qui correspond le plus souvent à un comptage en avançant ou en reculant mal positionné), et 0 sinon. Dans le cas des problèmes multiplicatifs, seule la réponse exacte était notée 1. Chaque élève ayant passé chacun des problèmes dans chacun des deux contextes associés, il lui est attribué pour chaque problème la somme de ces deux notes. Les pourcentages de réussite en novembre sont les suivants (Figures 1a et 1b) :

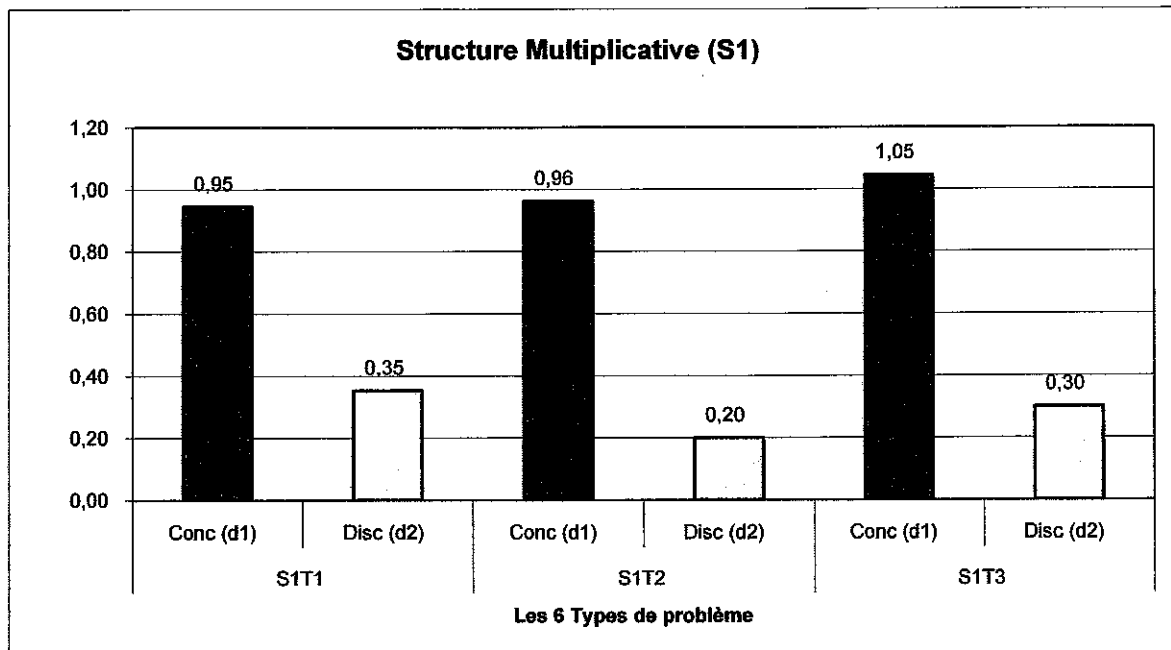


Figure 1a : Performances en novembre pour la structure multiplicative

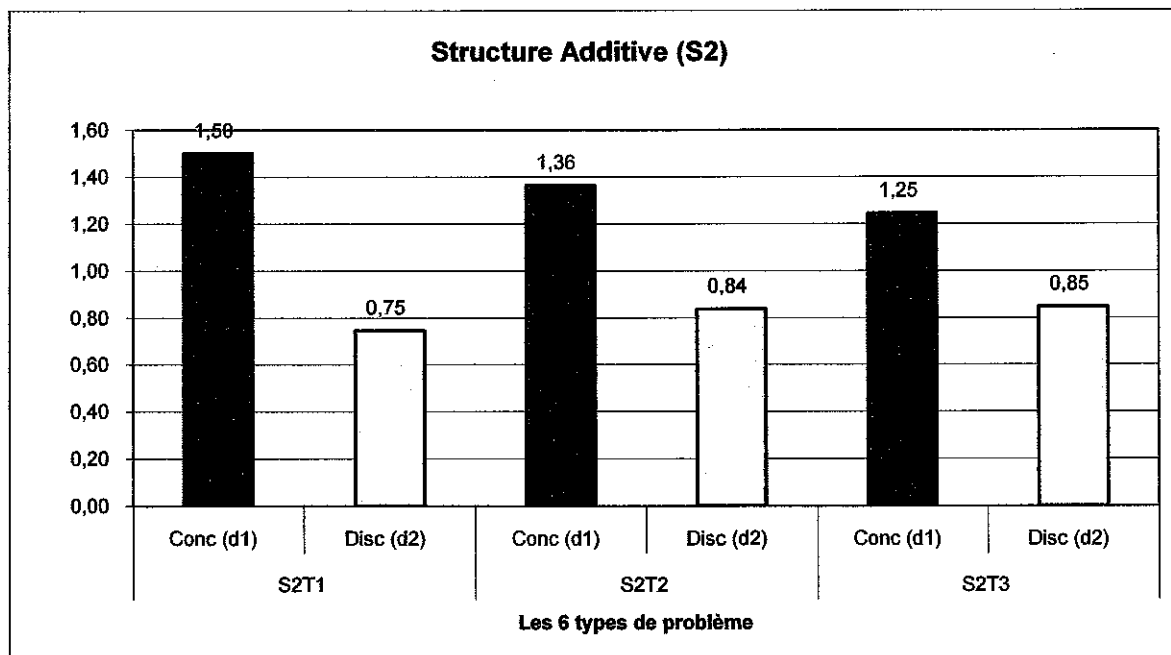


Figure 1b : Performances en novembre pour la structure additive

Les problèmes codés d2 (cas de discordance) sont systématiquement et de manière significative moins bien réussis que les problèmes correspondants codés d1 (cas de concordance) : $23,43 < F(1,109) < 83,38$; $p < 0,0001$. Dans le cas des problèmes multiplicatifs, le type du problème n'a pas d'influence sur la réussite ($F(2) = 1,65$; NS) et

seul le phénomène de concordance / discordance explique les différences de performances ($F(1) = 126,43$; $p < 0,0001$).

En outre, une analyse intra sujet permet de vérifier que les cas de réussite à la condition discordance sont généralement conditionnés par la réussite à la condition concordance du même problème. Pour chacun des problèmes, le tableau croisé des réussites / échecs en fonction de la concordance / discordance prend la forme suivante (l'exemple donné est celui des problèmes slc1t1d1 et slc1t1d2 pour lesquels 17 élèves réussissent les deux problèmes, 48 échouent les deux, etc.) :

		10 paquets de 4 images (discordance)	
		Réussite	Échec
4 paquets de 10 images (concordance)	Réussite	17	41
	Echec	5	48

Pour chacun des problèmes, la deuxième diagonale du tableau ainsi construit (5 et 41, dans l'exemple précédent) est fortement déséquilibrée : très peu d'élèves (5 ci-dessus) réussissent le cas de discordance alors qu'ils échouent au cas de concordance (le khi 2 de Mac Némard est pour les 12 couples de problèmes significatif à .01).

Quels progrès entre novembre et juin ?

En Juin, les pourcentages de réussite sont les suivants (Figures 2a et 2b) :

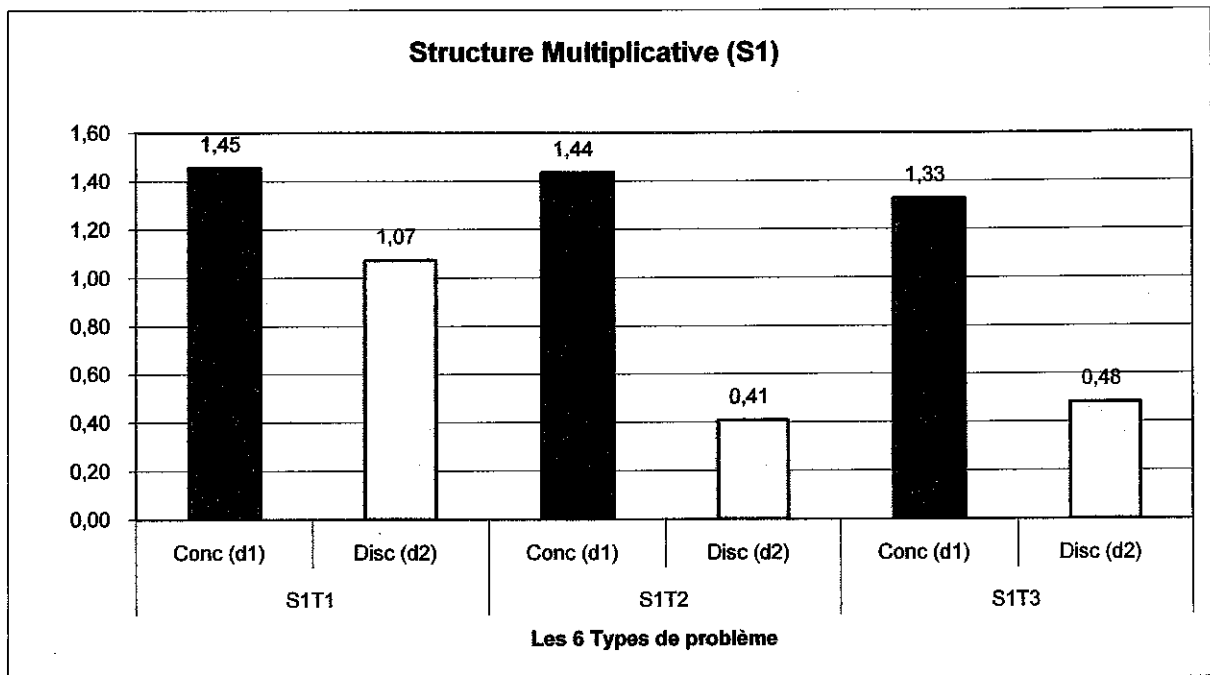


Figure 2a : Performances en juin pour la structure multiplicative

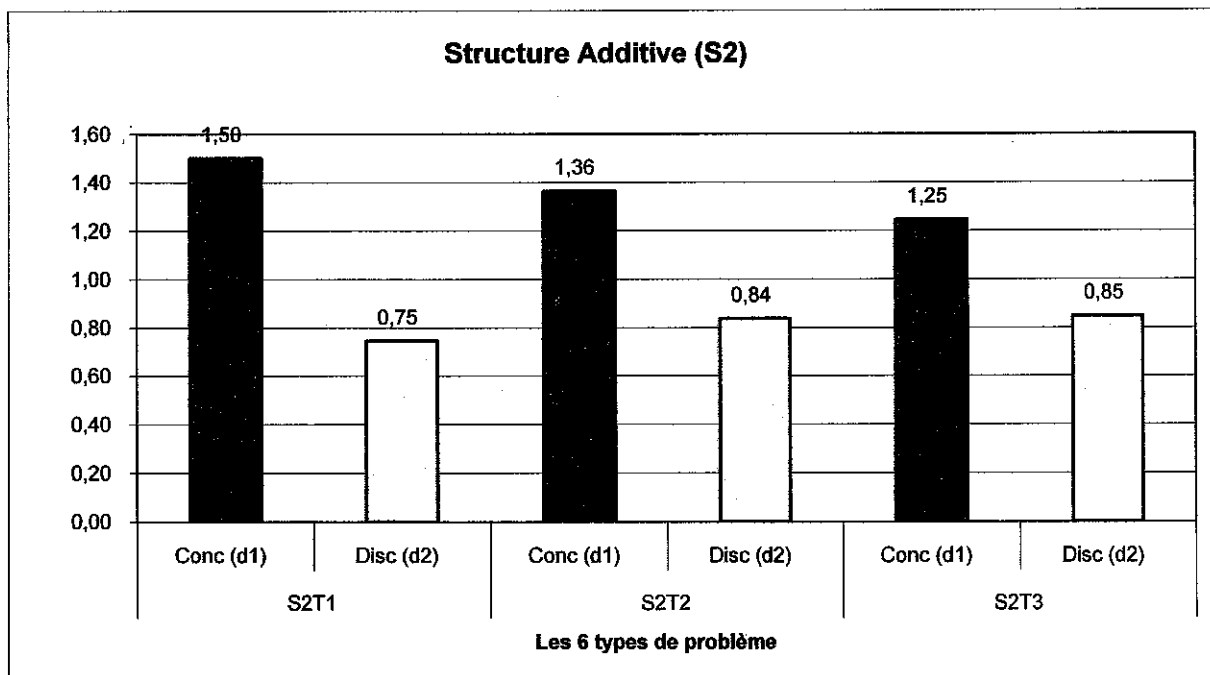


Figure 2b : Performances en juin pour la structure additive

A l'exception de s2t1d1, les élèves ont progressé de manière significative pour chacun des problèmes : $2,7 < t(109) < 9$; $p < 0,01$). Dans le cas de s2t1d1 : $t(109) = 1,742$; $p = 0,0843$. Les problèmes pour lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de leur résolution numérique restent significativement moins bien résolus :

$20,32 < F(1,109) < 152,59$; $p < 0,0001$. Par ailleurs, les khi 2 de Mac N  mar sont significatifs à .01 pour 11 couples de problèmes sur les 12.

Par ailleurs, conformément à l'hypothèse faite, le progrès s'est effectué différemment pour les problèmes multiplicatifs et les problèmes additifs et, au sein des problèmes multiplicatifs, pour les problèmes de recherche du résultat d'une itération par rapport aux problèmes de partition et de quotition. Les Figure 3a et 3b, où sont consignées les moyennes obtenues en calculant pour chaque enfant et chaque problème la différence entre la note de Juin et celle de Novembre, le suggère : les seuls problèmes pour lesquels le progrès est significativement plus important dans le cas de discordance que dans le cas de concordance sont ceux de type S1T1 (Combien fait a fois b ?) ($F(1,109) = 4,43$; $p < 0,05$). Pour ce type de problèmes, un progrès de nature conceptuelle apparaît clairement et distinctement d'un progrès de nature plus générale. En revanche, concernant les problèmes de types S1T2 et S1T3, le progrès est plus important dans les cas de concordance que dans ceux de discordance et pour ceux de type S1T2, cette différence est significative ($F(1,109) = 5,65$; $p < 0,05$). Dans le cas de ces problèmes S1T2, il apparaît clairement qu'un progrès découlant de meilleures compétences générales ne peut pas s'observer dans les cas de discordance du fait d'un défaut de conceptualisation.

Concernant les problèmes relevant d'une structure additive (S2), aucune des deux dimensions du progrès ne s'observe isolément de l'autre.

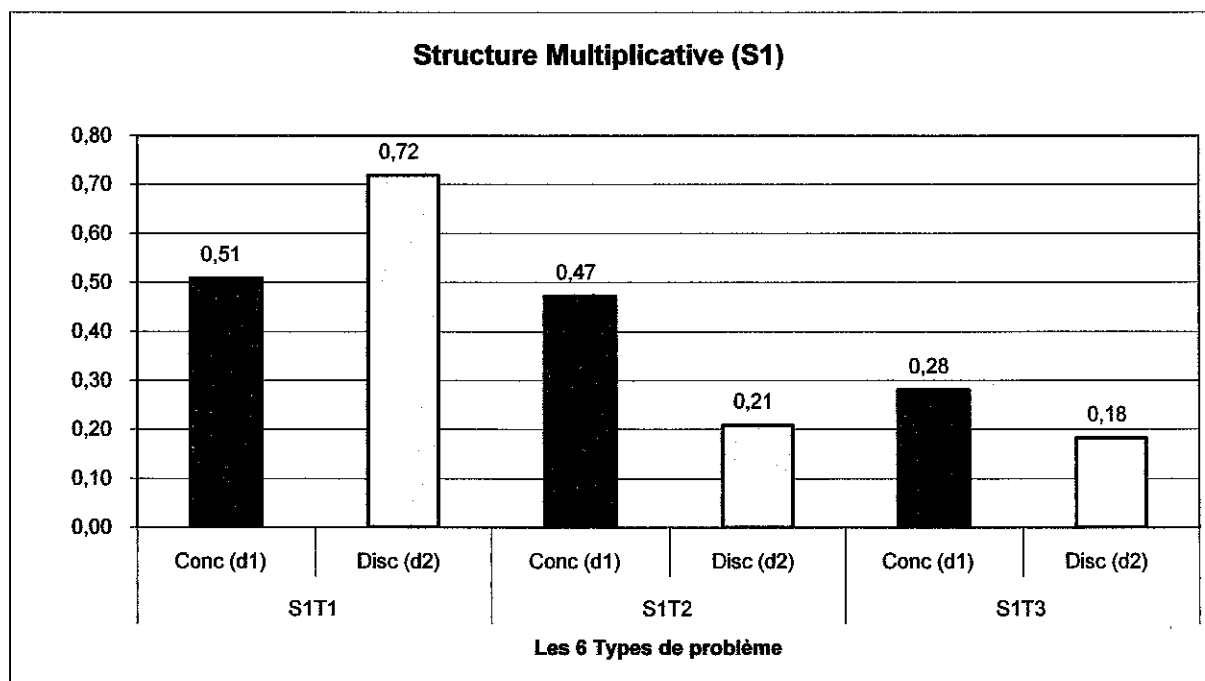


Figure 3a : Progrès entre novembre et juin pour la structure multiplicative

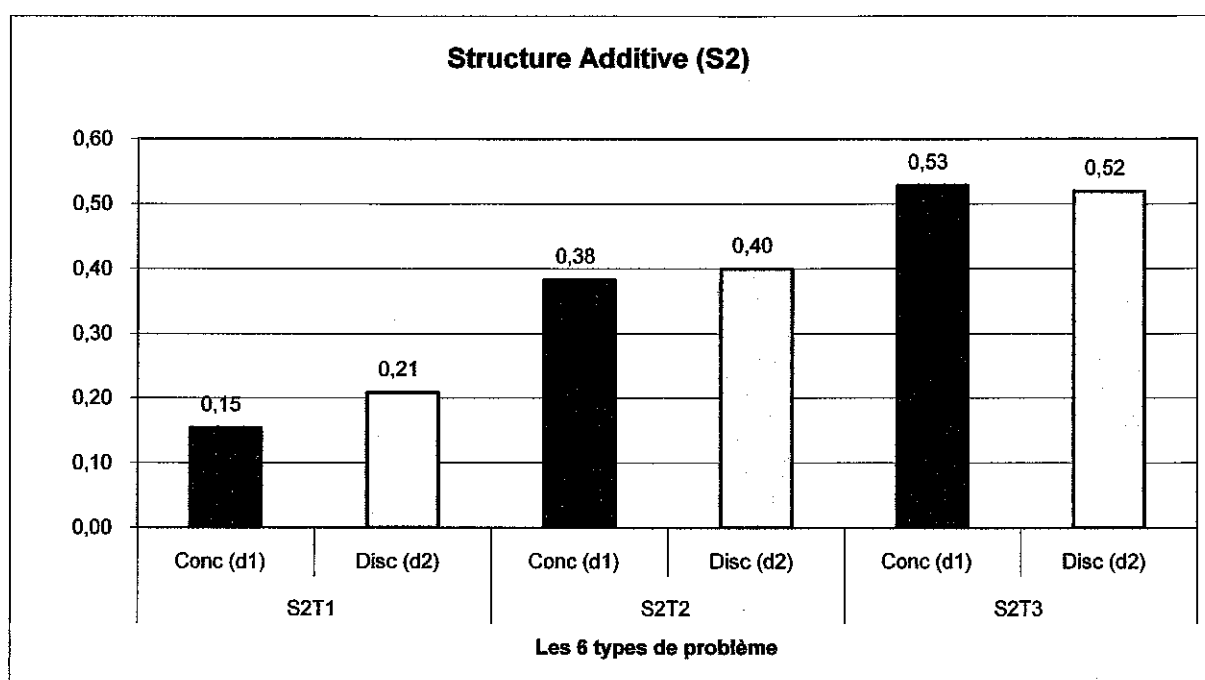


Figure 3b : Progrès entre novembre et juin pour la structure additive

Conclusions générales

En premier lieu, cette étude a permis de mettre en évidence la généralité du phénomène de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Concernant les problèmes de recherche du résultat d'une itération (Combien font a fois b ?), cette étude généralise les résultats obtenus par Schliemann et al. (1998) au cas d'élèves scolarisés mais qui n'ont pas encore eu de leçon sur la multiplication. Cette recherche a également montré qu'on observe le phénomène de concordance / discordance dès le CE1 concernant les problèmes de quotition du type : en a combien de fois b ? et ceux de partition du type : combien vaut a partagé en b parts égales ? Concernant les problèmes additifs, elle a confirmé qu'on observe ce phénomène concernant les problèmes de recherche du résultat d'une diminution et ceux de recherche de la valeur d'un ajout. De plus, elle a montré qu'on l'observe également concernant les problèmes de recherche d'un état initial (cas où celui-ci est suivi d'un ajout).

Mais cette recherche souligne surtout l'intérêt d'un tel phénomène pour l'étude de la conceptualisation arithmétique : lorsque les élèves progressent significativement plus dans la résolution des problèmes correspondant à des cas de discordance que dans la résolution des

problèmes correspondant à des cas de concordance, cela peut servir d'indicateur de l'appropriation d'équivalences entre procédures dont dépend la conceptualisation. Des arguments en faveur de cette thèse ont été avancés ici du fait que les résultats obtenus reflètent bien le statut particulier qu'ont les problèmes de recherche du résultat d'une itération au sein du programme de CE1. D'autres analyses qui n'ont pas été rapportées ici, montrent que ce type d'étude permet également d'étudier les effets de pratiques pédagogiques contrastées ou encore l'influence du contexte (billes ou euros ?) sur la résolution des problèmes additifs.

Dans "L'enfant, la mathématique et la réalité", Vergnaud (1981) recensait les différentes sources de difficulté des problèmes additifs : le type ou la classe du problème (la variable T dans cette étude), la plus ou moins grande facilité du calcul numérique nécessaire, l'ordre et la présentation des informations, le type de contenu envisagé (i.e. le contexte du problème). Concernant les six problèmes qu'il est possible de construire à partir d'une situation de type "état initial – transformation – état final" (trois seulement d'entre eux ont été envisagés ici), G. Vergnaud concluait ainsi (p. 143) : " Il existe ainsi de multiples sources de diversité et de complexité des problèmes à l'intérieur de la seule catégorie état-transformation-état. Mais la source principale, celle qui éclaire d'ailleurs toutes les autres, tient à l'existence de six classes de problèmes et de six formes de calculs relationnels d'inégale difficulté ". Il est clair, comme l'affirme Vergnaud, que le type du problème est une variable didactique. Par ailleurs, il est tout aussi clair que la taille des nombres en est une autre. Cependant, l'étude présentée souligne qu'une troisième variable permet d'expliquer plus finement que les précédentes, la difficulté des trois types de problèmes additifs et, plus encore, des trois types de problèmes multiplicatifs étudiés ici. Cette variable, la concordance / discordance entre la représentation initiale du problème et l'économie de sa résolution numérique, a partie liée avec les précédentes mais elle en diffère parce qu'elle est de nature interactionnelle. De façon plus générale, la méthodologie utilisée dans cette étude apparaît comme un moyen d'étudier la conceptualisation chez les élèves, en liaison avec l'étude de l'enseignement des opérations arithmétiques qui a cours aux différents niveaux de la scolarité.

Bibliographie

Brissiaud R. (1995) *Enseignement et développement des représentations numériques chez l'enfant*. Thèse de psychologie (nouveau régime). Université Paris 8

Brissiaud R. (2000), Apprendre l'arithmétique élémentaire : les cas de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. *Actes des Journées Internationales d'Orsay de Sciences Cognitives (JIOSC 2000) : L'Apprentissage. Une Approche transdisciplinaire* - décembre 2000 (pp. 105-110), 2000.

Brissiaud R. (2002a) Le phénomène de concordance/discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique : le cas de la division euclidienne. *Poster présenté au Colloque Cognitique : Les apprentissages et leurs dysfonctionnements*. 17-18 Juin. Paris.

Brissiaud R. (2002b) Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds) : *Traité des Sciences Cognitives - Le développement des activités numériques chez l'enfant*, 265-291. Paris : Hermes

Brissiaud, R., & Sander, E. (sous-presse). Conceptualisation arithmétique, résolution de problèmes et enseignement des opérations arithmétiques à l'école : une étude longitudinale au CE1. *Acte du Colloque " Les processus de conceptualisation en débat : Hommage à Gérard Vergnaud "*. Clichy-La Garenne. 28-31 Janvier 2004. 10 pages.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving : a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428-441.

Riley, M., & Greeno, J. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, 5 (1), 49-101.

Schliemann A. D., Araujo C., Cassundé M.A., Macedo S. & Nicéas L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

Vergnaud G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang

Vergnaud G. & Durand C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique, *Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

Une analyse comparative des gestes de l'étude : le cas des mathématiques et de l'histoire

Christine Félix

Équipe UMR ADEF , IUFM Aix en Provence

Le travail de recherche que je vais vous présenter est le reflet d'un travail de thèse, soutenue en décembre 2002 et dont l'ambition est de contribuer à une meilleure connaissance des conditions faites à l'étude extra scolaire par un système didactique donné. En d'autres termes, ce travail s'intéresse essentiellement à l'étude extra-scolaire ou ce que l'on appelle le travail personnel ou, plus communément encore, les devoirs à la maison (Félix, 2002 a).

Plusieurs angles d'approches sont envisageables pour aborder cette question et j'ai fait le choix de m'intéresser aux gestes de l'étude requis et mis en œuvre par les élèves dans deux disciplines scolaires au collège, les mathématiques et l'histoire. Autrement dit, j'ai cherché à décrire, interpréter et comprendre ce que font les élèves lorsqu'ils accomplissent quotidiennement leurs devoirs scolaires hors de la présence du professeur. Car, si on connaît de mieux en mieux les gestes d'aide à l'étude mis en œuvre par les enseignants, notamment à travers les observations de situations de classe auxquelles ont recours un grand nombre d'enquêtes¹, on sait peu de choses concernant les gestes de l'étude accomplis par les élèves sur une autre scène que la scène officielle de la classe.

Il faut préciser d'emblée qu'il ne s'agit pas ici d'alimenter un vieux débat sur le caractère obligatoire ou facultatif des devoirs à la maison, mais bien de placer au centre des préoccupations de cette thèse ce que l'école a ou déclare avoir d'essentiel, le travail personnel des élèves.

Il faut cependant préciser que si les injonctions ministérielles confirment le caractère prioritaire accordé à cette dimension de l'étude, un rapide survol historique sur la place qu'occupe le travail des élèves dans la formation scolaire m'a amenée à constater un

¹ Quel que soit le champ disciplinaire des sciences sociales et humaines (sociologie, psychologie, didactique), on trouve des études qui sont amenées à observer et faire état, par exemple, de la mobilisation des enseignants au service du collège unique, de leur investissement dans la lutte contre les inégalités scolaires ou l'échec répété de certains élèves dans l'apprentissage des disciplines de base telles le français ou les mathématiques.

« déperissement » progressif de l'étude au profit de l'enseignement. Or, ce lent mouvement, pour le moins paradoxal dans un contexte de massification de l'accès à l'enseignement secondaire, laisse entrevoir des contradictions multiples qui ne rendent que plus difficiles la définition et la compréhension de ce que les élèves sont supposés faire chez eux pour que ce travail leur soit scolairement utile.

De quelles contradictions s'agit-il ? Prenons quelques exemples :

Si l'on regarde du côté des pouvoirs publics, les instructions officielles ne cessent de rappeler le rôle prépondérant que l'école doit jouer dans le suivi et l'accompagnement des élèves afin de ne plus laisser au seul investissement personnel et familial la prise en charge de ce travail. Pour exemple, les seuls B.O concernant les rentrées 2001, 2002 et 2003 précisent que l'aide à l'étude doit faire l'objet d'un dispositif intégré dans le projet d'établissement de chaque collège. Et ces injonctions se traduisent, par exemple sur le terrain, par toute une série de dispositifs d'aide à l'étude, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur des établissements scolaires.

Tout porte à croire qu'il y a ici une volonté forte, à la fois, de reconstruction de l'espace de l'étude qui dépasserait le seul cadre de la classe et de sensibilisation des acteurs du système quant à la nécessité d'organiser autrement l'étude personnelle. Or, malgré cette volonté politique clairement affichée d'organiser l'aide à l'étude personnelle, lorsque l'on interroge les acteurs du système, et principalement les enseignants et les élèves, on remarque que demeure une certaine opacité autour du sens des activités exigées en dehors de la classe, des apprentissages à effectuer et des savoirs à mobiliser par les élèves lorsqu'ils sont seuls, chez eux, pour s'acquitter de leurs devoirs scolaires. A ce niveau d'opacité, de « mal-entendus » de ce que les uns ont à dire aux autres du travail fait ou à faire, on pourrait même ajouter le peu d'intérêt que suscite cette partie intensive de l'étude parmi la plupart des travaux de recherche en sciences de l'éducation, y compris parmi ceux qui entendent montrer que certains contextes d'enseignement/apprentissage ne favorisent ni l'égalisation des chances scolaires ni l'intégration de certains élèves dans la société.

Mais que sait-on et que peut-on dire exactement des manières de travailler à la maison et de leur efficacité possible ? Que sait-on de ce qui produirait des effets différenciateurs dans ces manières de faire, renforçant les inégalités entre diverses catégories d'élèves ? Pour aborder ce questionnement, j'ai choisi de structurer mon exposé autour de quatre questions :

- Qu'ai-je voulu montrer à travers cette recherche ?
- Quelle a été ma démarche pour mener ce travail à bien ?
- Quels sont les résultats saillants auxquels cette recherche permet d'aboutir ?
- Quelles perspectives ce travail permet-il d'envisager ?

Qu'ai-je voulu montrer à travers cette recherche ?

Si je conserve l'ordre de ces quatre grandes questions, je dirais que mon travail de thèse s'attache à montrer que l'étude personnelle, le plus souvent décrite en termes de méthodes générales, dans une forte autonomie avec la nature du travail fait en classe, est assez mal connue si l'on veut bien se défaire des jugements a priori et particulièrement normatifs qui décrivent ce que l'élève est supposé faire pour que ce travail lui soit scolairement utile (Blondin, Detheux et Landshere, 1990). Or, si cette partie de l'étude est supposée répondre aux besoins engendrés par le travail fait en classe, il me semble nécessaire de cerner au plus près la nature de ce travail dans ses relations avec les savoirs en jeu à l'école.

Par ailleurs, on constate que la demande de travail exigée hors présence du professeur n'est pas sans poser problème à une certaine catégorie d'élèves, du moins les plus distants vis à vis de l'univers scolaire (Prost, 1983). Il convient alors de mettre au grand jour la diversité des modes différentiels de travail personnel et repérer si ces différences sont déterminées par des positions d'élèves distinctives au sein de la classe, et uniquement par cela, ou si cette diversité est également dépendante de la spécificité des contenus d'enseignement en jeu au moment de l'étude. Pour ce faire, plusieurs cadres théoriques sont envisageables, issus par exemple de la sociologie ou de la psychologie.

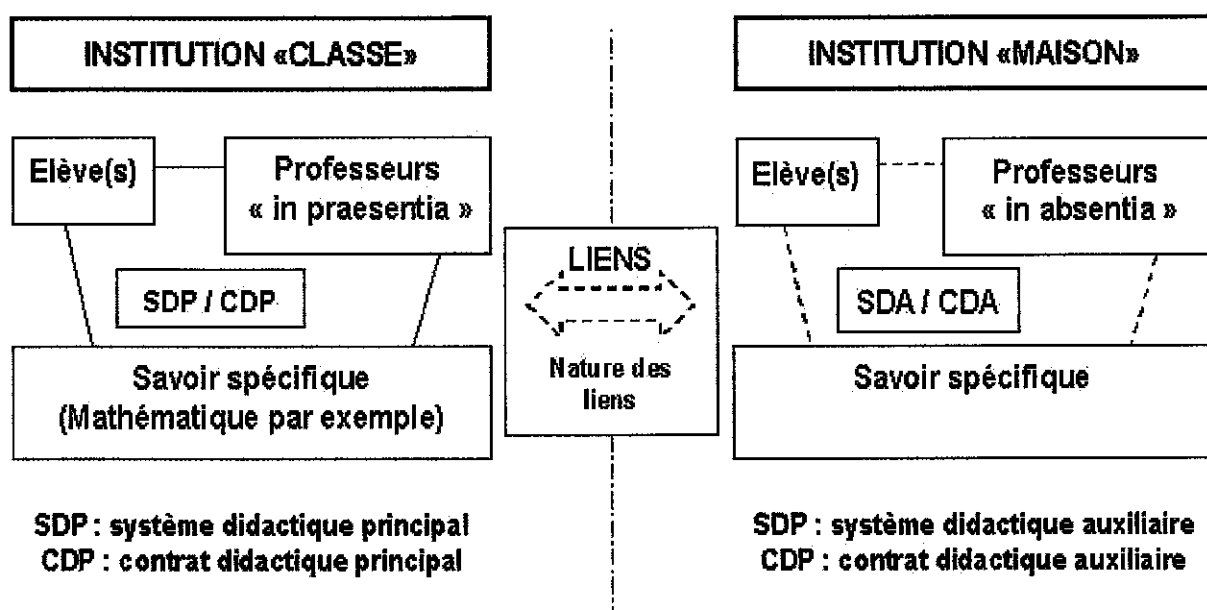
Sans sous estimer leur intérêt et leur contribution indéniables dans cette recherche, j'ai fait le choix d'inscrire cette thèse dans une perspective de didactique comparée à partir d'un ensemble conceptuel issu principalement de la didactique des mathématiques. Les éléments théoriques et empiriques produits au sein de certains travaux me paraissent plus adaptés pour montrer que l'étude —même privée— ne peut se construire en dehors des occasions que lui fournit l'enseignement dispensé.

Comme le soulignent S. Johsua (1998, 1999) ainsi que certains travaux effectués par l'équipe ESCOL dont ceux de B. Charlot (1997, 1999) ou d'E. Bauthier et JY Rochex (1992, 1998), si la réussite scolaire se joue au plus près des enseignements et des actes éducatifs, dans la construction d'une relation adéquate aux savoirs en jeu à l'école, la visée comparatiste de cette thèse est double :

- D'une part, tenter d'élucider la part consubstantielle des gestes de l'étude dans le processus d'enseignement/apprentissage de deux disciplines scolaires, les mathématiques et l'histoire, suffisamment éloignées dans la tradition scolaire pour donner lieu à des comparaisons intéressantes.
- D'autre part, sortir la notion d'étude de son acception courante pour la repenser dans la dialectique entre la classe et le domicile de l'élève.

Et c'est en ré-élaborant une théorisation des phénomènes de reconstruction et d'aménagement du milieu pour l'étude, en fonction des conditions d'usage et des lieux institutionnels mis en contraste dans cette thèse, que cette approche entend se donner un outil de comparaison pour caractériser les conditions faites à l'étude dans une institution, à propos d'un système d'objets culturels enseignés/appris.

La schématisation du dispositif de recherche montre le cadre problématique retenu et l'enjeu de cette thèse :



- **L'étude selon une visée comparatiste**

Ce dispositif, construit selon la double visée comparatiste énoncée, permet de penser la notion d'étude dans la dialectique entre un système didactique principal, la classe et un système didactique auxiliaire, le domicile de l'élève, où sont au minimum et conjointement présent un pôle enseigné, un pôle enseignant et un savoir spécifique, enjeu de la relation didactique. Et dire du travail à la maison qu'il est un système didactique auxiliaire ne revient pas à examiner des phénomènes annexes ou accessoires de l'étude mais permet de penser et d'interpréter le travail personnel de l'élève en intégrant, dans une même catégorie, un même espace didactique, ce qui se passe hors et dans la classe.

Dans cette vision des choses, on peut dire alors que les différentes composantes du travail demandé aux élèves et accompli par eux, se partagent entre deux temps et deux espaces, de sorte que même seul, lorsque l'élève fait ses devoirs à la maison, il pense et se comporte conformément à ce qu'il croit être les comportements exigés par la relation didactique, sous couvert d'un contrat didactique en vigueur au moment de l'étude. Dit autrement, si la responsabilité finale de l'étude appartient à l'élève, il n'en demeure pas moins vrai que cette activité didactique est fortement déterminée par son insertion dans un espace organisateur de l'étude, où sont désignés des objets de savoirs proprement dits ainsi que des objets pertinents à l'étude de ces savoirs.

C'est cet espace, cet environnement du système didactique où le triptyque « professeur/élèves/savoirs » déploie ses effets, que j'ai désigné sous le terme de « milieu pour l'étude » (Johsua et Félix, 2002).

- **Travail personnel et milieu pour l'étude**

L'hypothèse dans cette thèse que c'est le milieu pour l'étude qui fait le lien entre les deux systèmes me permet de dire que c'est au sein de cette dialectique, entre les deux milieux didactiques -principal et auxiliaire-, que prennent place de possibles et nécessaires gestes de l'étude.

Sans négliger tous les travaux qui ont abordé cette question du milieu, je voudrais présenter ici quelques caractéristiques principales de l'approche que je propose, en partie différente de celle de Guy Brousseau (1990, 1995 et 1998) qui, le premier, a insisté sur l'idée que l'on ne

peut saisir complètement les rapports bâtis entre les élèves et les savoirs si l'on ne tient pas compte du milieu où vivent ces savoirs.

Dans cette approche, je propose d'élargir la notion de milieu en questionnant des objets plus vastes que les seuls objets présents in situ (Margolinas, 1995) et les objets familiers à partir desquels les élèves s'appuient pour étudier. Si ces objets font incontestablement partie du milieu, il faut bien que l'enseignant introduise des objets nouveaux pour l'étude de la notion en jeu, c'est à dire qu'il propose un milieu, en partie, modifié pour qu'une adaptation nouvelle se produise. En partie seulement, car les éléments pérennes du contrat restent évidemment dominants en nombre et en qualité. Il n'empêche que parmi ces objets introduits dans le nouveau milieu par le professeur, certains sont labiles et peuvent donc être considérés, du point de vue de l'élève, comme un manque à savoir, un « trou », pris au sens métaphorique d'une ignorance à combler que l'enseignant veut faire travailler par les élèves.

Cette thèse vise ainsi à produire une théorisation qui permet de traiter à égalité des objets descriptibles en positif comme les ignorances et de considérer le « milieu pour l'étude » où manquent certains objets et rapports à ces objets. Sinon pourquoi faudrait-il étudier et où seraient les apprentissages nouveaux ?

Mais tous les objets ne peuvent être introduits dans le milieu. En nombre illimité, il revient au professeur d'écarter la plupart d'entre eux, tout en sachant qu'à tout moment, des « trous » non prévus d'avance peuvent pénétrer le milieu. Il est donc nécessaire que s'établisse, entre le professeur et les élèves, une base préalable pour le partage de l'intention d'enseigner afin que la relation didactique soit maintenue. Mais cela ne signifie par pour autant que le milieu est construit une fois pour toute. Il ne cesse d'évoluer au fur et à mesure de l'avancée du temps didactique et de la présentation des objets de savoirs nouveaux. Et c'est dans la collectivité qu'institue la classe, que se co-construit le milieu pour l'étude, que professeur et élèves, redéfinissent ses frontières géographiques, en négociant ce qui est à combler et doit être présent dans le milieu et ce qui doit rester, pour un temps au moins, hors de ces limites. Dans ces conditions, le milieu est plus qu'un simple espace dans lequel va pouvoir se déployer l'investissement personnel de l'élève. Il constitue un guide, une aide à l'étude dans la mesure où il permet, par la co-construction des enjeux didactiques réels entre professeur et élèves, que s'opèrent des tris pertinents quant aux objets à étudier, en classe comme à la maison. Une des hypothèses que j'ai explorée dans cette thèse est que les élèves « forts », n'étudient pas à

la maison exactement les mêmes objets de savoir que les élèves jugés en difficulté. Toute la question consiste alors à comprendre comment se re-construit, s'aménage le milieu didactique auxiliaire à partir des objets du milieu construits didactiquement en classe.

Ce questionnement m'amène au deuxième point de mon exposé, à savoir quelle a été ma démarche pour conduire ce travail ?

Quelle a été ma démarche pour conduire ce travail ?

En d'autres termes, quelle a été ma démarche pour décrire quels gestes correspondent au travail personnel à la maison et comprendre comment s'actualisent les modes différentiels du travail personnel des élèves dans des lieux institutionnels différents ? Pour cela, Je me suis appuyée sur le cadre donné par la théorie anthropologique du didactique développée par Y. Chevallard (1992, 1999 et 2002). Je suis partie de l'hypothèse très générale qui rend le travail scolaire dépendant de techniques assez balisées et repérables dans un système didactique donné. Ces techniques, à leur tour, se laissent décrire à partir d'un ensemble de gestes relatifs à des tâches et à des moments durant lesquels se réalisent ces mêmes tâches (Mauss, 1936/1997).

• Variables didactiques et sociologiques

J'ai retenu, dans le cadre de cette thèse, trois grands types de tâches ainsi que deux moments de l'étude :

- Apprendre ses leçons,
- Faire ses devoirs,
- Réviser un contrôle

Et deux moments de l'étude :

- les moments ordinaires qui jalonnent toute la durée d'une séquence d'enseignement/apprentissage
- les moments héroïques qui marquent la préparation et la réalisation toujours sensible d'un contrôle venant clore une leçon et où sera évalué, examiné ce que *vaut* ce qui a été appris.

A ces premières variables didactiques, sont croisées des variables sociologiques en termes de positions que les élèves viennent occuper dans l'espace scolaire. Attribuées de fait ou légalement, explicitement ou implicitement par l'institution, ces positions concernent :

- le rang scolaire : « bons », « moyens » et élèves « faibles » et les termes sont volontairement flous pour conserver la manière de dire « légale » de l'institution
- le genre des élèves : filles et garçons
- le niveau scolaire : principalement des élèves de 3^{ème} (353 élèves) et quelques élèves de 6^{ème} (148) et de 2nd (100).

Le choix et l'articulation de ces variables entre elles me permettent de construire une typologie des gestes de l'étude engagés par les élèves pour accomplir, à l'occasion de moments ordinaires ou héroïques, trois tâches supposées communes aux deux disciplines retenues. Il faut néanmoins indiquer ici que l'effet différenciateur que ces variables sont supposées jouer dans la diversité des modes de travail, me permet de construire et traiter cette typologie comme un révélateur, un émergent du double fonctionnement didactique et non comme des caractéristiques personnelles des élèves.

• Différentes approches

Ce point de vue suppose de se rendre sensible aux différences mais suppose également de se rendre sensible aux similitudes, et que l'une et l'autre ne soient pas postulées a priori, de manière à identifier et comprendre des pratiques de l'étude telles quelles, sans les évaluer à l'aune de ce qu'elles devraient être ou de ce qu'une perspective normative fixerait comme efficace. Cette démarche m'amène à recourir, d'un point de vue méthodologique, à différentes approches conjuguant des entrées diverses.

Une première approche quantitative est construite à partir d'un questionnaire dont la forme me paraît la plus adaptée pour faire surgir des types de gestes et construire une première typologie. Distribué à quelques 600 élèves répartis selon les trois niveaux scolaires retenus, ce questionnaire est organisé autour de deux axes de questionnement :

l'organisation générale des conditions de l'étude (en termes d'espaces lieux/ temps dédiés à l'étude et de degré d'autonomie de l'élève au travail),

l'organisation des conditions de l'étude des mathématiques et de l'étude de l'histoire en termes de pratiques préférentiellement déclarées par les élèves.

A ce premier niveau d'enquête est articulée une approche plus qualitative des gestes de l'étude, essentiellement construite à partir d'entretiens conduits auprès de huit élèves de 3^{ème} et de deux professeurs, à propos d'un contrôle venant clore la fin d'une leçon en mathématiques et en histoire. Les entretiens menés avec les professeurs se déroulent en trois temps : avant la leçon, après la leçon et avant le contrôle, et après le contrôle. Les entretiens conduits avec les élèves se déroulent dans les deux jours au plus tard qui suivent la réalisation en classe du contrôle. L'ensemble des propos professeurs/élèves est alors croisé et examiné en regard de textes divers produits par l'institution : principalement des extraits de bulletins trimestriels mais également des extraits de programmes et de textes officiels concernant l'organisation et le travail des élèves dans les deux disciplines retenues. Enfin les sujets de contrôles, les textes des deux leçons et les copies d'élèves contribuent, dans ce dispositif, à situer le discours des protagonistes.

Il faut néanmoins préciser ici que ces approches et les entrées qu'elles supposent, bien que travaillées dans leurs mises en tension les unes par rapport aux autres, souffrent d'une limite importante puisque je ne traite en toute rigueur que des déclarations d'élèves -et partiellement de leurs professeurs- et non de l'observation de leur travail effectif. Sauf à me fier à ce qu'ils m'en disent, je ne sais ni ce qui se passe réellement au domicile de l'élève ni ce qui se passe en classe.

Par ailleurs, l'analyse comparative rapportée à deux disciplines ne permet en aucun cas de rendre compte de l'ensemble des exigences scolaires. Toutefois, ces limites n'empêchent nullement d'élaborer une première typologie des gestes ni de faire apparaître, quand elles existent, des différences entre les catégories d'élèves. Ceci m'amène donc au dernier point de mon exposé, à savoir : quels sont les résultats saillants auxquels cette perspective comparative me permet d'aboutir ?

Des résultats saillants

Deux grandes catégories de résultats émergent de cette recherche :

- D'une part des similitudes en termes de gestes ou de pratiques de l'étude communément partagés par la grande majorité des élèves
- D'autre part, des différences en termes de gestes différentiels selon les positions ou place distinctives des élèves et la nature des objets enseignés/appris

- **Des similitudes ou gestes ou des pratiques de l'étude communément partagés**

Concernant la 1^{er} catégorie de résultats, on constate d'un point de vue quantitatif général que :

- 93 % des élèves déclarent s'être toujours ou presque toujours acquittés de leurs devoirs
- 90 % des élèves prétendent effectuer leur travail scolaire à la maison
- 74 % effectuent ce travail dans un espace personnel (chambre) plutôt qu'un espace lieu de vie (cuisine, salle à manger, etc.)
- 75 % des élèves affirment se mettre au travail dès la sortie de l'école
- 83 % disent consulter leur agenda pour organiser leur temps de travail
- 70 % des élèves révèlent travailler au moins 1 heure par soir

Pour ce qui est du travail en mathématiques ou en histoire, on constate, toujours d'un point de vue quantitatif général que 95 à 98 % des élèves interrogés déclarent des pratiques de travail dans chacune de ces deux disciplines respectives

Pour ce faire, ils mettent en œuvre des gestes répartis selon 4 grands types de pratiques de l'étude des mathématiques ou de l'histoire :

- Pratiques de mémorisation : par cœur de tout ou partie de la leçon
- Pratiques de lecture : de la leçon à partir du cahier et plus rarement du manuel scolaire
- Pratiques d'écriture : essentiellement en termes de résolution d'exercices mathématiques ou de réalisation de fiches synthèse en histoire
- Pratiques d'oralité : principalement orientées vers le commentaire oral de documents

Ces quelques résultats, bien que très généraux, confirment néanmoins l'existence de gestes repérables et descriptibles dans une institution donnée, des gestes limités en nombre et se

conformant globalement aux attentes et injonctions institutionnelles qui déterminent une certaine forme de rapports au travail.

Or, comme le souligne Anne Barrère (1997, 2003) dans son étude sur les lycéens au travail, c'est au sein de cette similitude ou de **cette apparente similitude de rapports au travail** que s'affirment les contrastes les plus discriminants. Mon travail de recherche confirme que des contrastes apparaissent lorsqu'on met en regard le niveau de performance des élèves et la nature des objets enseignés/appris.

- **Des différences ou gestes différentiels selon les positions distinctives des élèves et la nature des objets enseignés/appris**

Pour rendre compte de cette 2^{ème} catégorie de résultats, je prendrai ici quatre extraits issus des entretiens conduits auprès d'élèves supposés m'expliquer comment s'est déroulé le contrôle qu'ils viennent d'effectuer en classe et de quelles manières ils s'y sont pris pour le préparer à la maison. Il s'agit de 4 élèves de 3^{ème} : Emilie, Rémi, Arnaud et Elodie. Si Emilie et Rémy, deux bons élèves respectivement désignés par leur professeur de mathématiques et d'histoire, déclarent n'avoir consacré que très peu de temps à la préparation du contrôle, l'un et l'autre expliquent qu'il n'ont pas été surpris par le sujet. A cela, ils donnent plusieurs explications mais toutes vont dans le même sens :

E. : // parce que je travaille en classe...j'ai pas travaillé sur les exercices pour le contrôle...j'ai compris la leçon...//... parce on fait quand même de bons exercices en classe...enfin on a aussi un bon prof qui nous fait travailler...// c'est tout pareil de toutes façons...là c'était la hauteur d'un triangle et en classe...l'aire d'un rectangle...tout est pareil sauf que ce n'est pas les mêmes nombres...tous les exercices qu'il nous demande on les a faits en cours...//

E : // en fait il faut écouter en classe...comprendre...et après cela revient tout seul...// dimanche soir j'ai relu...c'est tout j'ai tout compris au fur et à mesure donc c'est juste me remettre en tête...car en fait on les apprend en cours...//

R. : ...//...d'abord je sais que tous les vendredis on a contrôle donc j'ai révisé mercredi après-midi...jeudi j'ai pas le temps...j'ai lu l'essentiel la frise de la Vème République et les explications de 44 à 58 et de 58 à 69 ... c'est divisé par tranche ... c'est chronologique ... après il y a toutes les dates

les personnages importants mais là je me suis contenté de les lire ... c'est suffisant car on les a déjà vues en cours plusieurs fois...//...le prof l'a dit...pendant le cours en classe on travaille...on a des documents et des questions et on y répond...puis on les corrige avec le prof et elle nous explique...//
R. : ...//...le contrôle c'est exactement pareil...c'est toujours la même façon de faire...3 questions...3 documents...1 paragraphe...bien sûr ce qu'il y a à l'intérieur des documents ça change mais on peut s'entraîner...c'est toujours la même méthode...la même technique...// le travail est toujours le même...//

Mais avant tout commentaire, observons rapidement les extraits d'entretien conduits auprès d'Arnaud et d'Elodie, deux élèves faibles. Contrairement à Emilie, Arnaud a été surpris par le sujet donné à ce contrôle de mathématiques :

A. : ...//...j'avais l'impression que ce n'était pas en rapport avec ce qu'on avait fait...enfin certains trucs oui...mais y avait des trucs que...//...pour moi ce n'était pas censé être dans le contrôle...moi tout ce que j'avais révisé en exercice...tout ça...cela n'avait rien avoir avec ce que j'ai fait...//

Or, si manifestement son professeur est convaincu de l'absence totale de travail, Arnaud s'efforce d'expliquer :

A. : ...//...alors moi en premier...d'abord j'ai repris ma leçon...j'ai lu...j'ai appris...les formules...tout ce que...l'essentiel...//...là par exemple, j'ai repris les démarches...j'ai fait des systèmes d'inéquations, j'ai repris...en général ceux qu'on avait faits et puis après j'ai refait des plus durs...//

Elodie, quant à elle, n'est pas surprise par les questions posées à ce contrôle d'histoire :

E. : ...//... comme les autres c'était difficile...//... parce que je n'arrive pas à comprendre comment faire pour arriver à mieux apprendre ou apprendre différemment...// ...dans ce contrôle c'est le paragraphe que j'ai pas compris parce que le paragraphe en question on l'avait pas fait en cours...il fallait le faire nous même...moi je l'avais pas fait...//...moi j'ai fait plusieurs fois les synthèses mais bon...//...et puis en histoire on peut pas réviser car on sait jamais sur quoi ça va tomber...les textes ils parlent pas toujours de la même chose...c'est toujours différent pas comme en math...quand on a compris une méthode c'est toujours la même...//

Et malgré la note très faible qu'elle a obtenue à ce contrôle (1/20), tout comme Arnaud en mathématiques, Elodie déclare travailler à la maison :

E. : « ben...au cours de la leçon...on a fait les différentes parties de la leçon...et ça reprend la leçon...à ce qu'on a fait...moi j'ai recopié et j'essaie de comprendre...//... ben je recopie et là je recopie aussi l'essentiel...des biographies de Staline par exemple à la page 42...celle de Trotski...c'est important de le savoir...// ».

En conclusion

Ces 2 grandes catégories de résultats soulignent plusieurs points essentiels sur lesquels je souhaiterais revenir.

Dans le cadre interprétatif de cette thèse, on peut dire que pour ces deux bons élèves, l'essentiel de l'étude se déroule en classe, et que c'est à partir des objets construits didactiquement en classe qu'ils reconstruisent et aménagent le MDA. En acceptant le collectif que fonde la classe comme espace principal de l'étude, ils acceptent de se laisser désigner les ignorances à combler, d'entrer dans l'organisation didactique et épistémologique, et d'y entrer de manière adaptée, à chacune des deux disciplines étudiées. Ce sont ces pratiques de travail qu'ils mettent à « leur main » durant les moments ordinaires de l'étude, qu'ils importent à la maison dans le SDA et qu'ils convoquent durant la préparation et de la réalisation du contrôle. En revanche, pour les élèves en difficulté, l'essentiel de l'étude ne semble pas exactement se dérouler en classe. Pourtant, on constate que c'est bien une tentative désespérée de reconstruire, à partir du travail fait en classe, un milieu pour l'étude à la maison qui est la marque des plus faibles. N'ayant pas totalement réussi à se mettre d'accord sur la nature des objets à étudier, ils se croient dans l'obligation d'inventer des gestes d'étude vis à vis desquels ils ont le sentiment de n'avoir été ni préparés ni entraînés. Contrairement au principe de continuité synchrone construit par les bons élèves de collège, les élèves en difficulté élaborent une vision de l'étude découpée en une succession de moments et de tâches disjointes. Et cette vision diachronique de l'étude les amène à reconstruire et aménager un MDA qui prend alors des allures de simulacre de l'étude, n'ayant que l'apparence de ce qu'ils prétendent comprendre et interpréter du contrat didactique en vigueur au moment de l'étude.

Dans ces conditions, on peut raisonnablement penser que ce ne sont pas sur des critères quantitatifs que se construisent les différences les plus discriminantes entre élèves mais bien sur des critères plus qualitatifs, au plus près des enseignements et des savoirs en jeu à l'école.

Autrement dit, l'ensemble de ces résultats confirme que c'est dans la gestion des rapports spécifiques (aux contenus) et institutionnels (le SDP) que les différences sont les plus fortes.

Je conclurai cet exposé en soulignant combien l'approche didactique comparée s'est avérée productive dans la compréhension des modes différentiels du travail personnel des élèves. En favorisant la mise à l'épreuve d'un système de concepts didactiques en dehors des temps et espaces à proprement parler scolaires, l'analyse comparative permet :

- d'une part, d'éclairer le fonctionnement et les modes de relations qu'établissent les élèves entre les deux systèmes didactiques.
- d'autre part, elle contribue à mieux penser, dans ce qu'elle a de commun et de spécifique, l'activité didactique des élèves dans le cas de différentes disciplines scolaires.

Et comparer les marges de manœuvres pour bâtir son propre milieu à la maison s'avère particulièrement pertinent pour comprendre la dialectique entre les deux composantes, privée et publique, du travail d'étude. De ce point de vue, si l'approche comparatiste n'épuise pas la question de l'étude personnelle et encore moins celle de la production des inégalités scolaires, elle permet néanmoins de mettre à jour la nature de certaines difficultés scolaires, en montrant notamment que les élèves faibles ne parviennent que difficilement à discerner les aspects génériques des aspects plus spécifiques relevant de l'organisation ou de l'enseignement des disciplines scolaires. Et si l'on admet que cette difficulté les enferme dans un « mal-entendu » des règles implicites qui font le quotidien du travail scolaire, il y a fort à parier que tant que ce problème ne sera pas résolu en classe, il le sera difficilement à la maison.

Perspectives

Ce constat relance, d'une certaine manière, le débat sur le principe et les modalités des dispositifs d'accompagnement scolaire, et plus largement relance le débat concernant la part de prise de responsabilité que l'école peut et doit assumer dans l'aménagement des conditions de l'étude aidée en vue de permettre aux élèves de gagner en autonomie. On voit bien ici toute la pertinence d'insister sur la dimension collective de l'étude. Dans ce cadre, il apparaît alors tout à fait pertinent de s'interroger sur ce qui se dit en classe de ce qu'il convient d'étudier et de comment il convient de l'étudier. En d'autres termes, peut-on repérer les objets qui sont désignés par la communauté discursive, au sens de J.P.Bernié (2002), comme étant

nécessaires à l'étude des objets en jeu au moment de l'étude ? Question qui suppose que l'on s'intéresse à la manière dont le professeur, à travers les actes d'enseignement, désigne ces objets d'étude :

Comment le professeur indique t-il ces objets ?

- Fait-il appel à la mémoire des séances précédentes ?
- Dicte t-il certains passages de la leçon ?
- Demande t-il le silence ?

Et si l'on admet l'idée de la co-activité entre le professeur et les élèves, il est pertinent de s'interroger sur ce que font précisément les élèves au moment où l'enseignant *indique* les « bons » gestes de l'étude.

- Reconnaisent-ils les gestes accomplis par le professeur ?
- Sont-ils simplement attentifs en classe ?
- Anticipent-ils l'avancée du temps didactique ?

On pourrait affiner ce questionnement en observant, par exemple, ce que fait l'enseignant lorsque l'élève pose une question ?

- Peut-on repérer un traitement différentiel des modes d'exploitation des questions et des réponses des élèves par le professeur ?
- Y a t-il une répartition différentielle des tâches selon les positions d'élèves dans l'excellence scolaire ou selon qu'ils sont filles ou garçons ?
- Que peut-on dire des comportements d'aide à l'étude organisés par le professeur à l'égard de certaines catégories d'élèves : sont-ils de nature à favoriser ou à freiner les stratégies d'engagement de l'élève dans l'activité ?

Il s'agirait moins de s'intéresser ici au « langagier » que de tenter, à partir du concept de « milieu pour l'étude » et dans une perspective didactique à visée comparatiste, d'affiner la notion de gestes de l'étude comme support d'apprentissage et, pourquoi pas, d'y donner un statut didactique. On pourrait, par exemple, retravailler la question selon laquelle le professeur de mathématique semble construire, du moins dans le dispositif construit pour cette thèse, les DS dans le seul respect des règles les plus formelles du contrat. Il me semble qu'une reprise de ce dispositif à partir d'une analyse a priori des enjeux cognitifs et didactiques inhérents au devoir de contrôle donné par les deux professeurs –mathématiques et histoire- devrait permettre, en autres choses, de travailler la question de la professionnalité enseignante.

- Le professeur procède-t-il par « réduction du milieu pour l'étude » au point de réduire les choix des élèves, leur degré d'implication dans l'étude personnelle ?
- Ce geste est-il une adaptation des exigences à la composition de la classe ?
- S'agit-il d'un genre professionnel ?

On serait alors moins du côté de l'étude et des gestes de l'étude que des gestes de l'aide à l'étude. On voit bien ici tout l'intérêt de poursuivre cette recherche aussi bien du point de vue théorique en retravaillant cette question des gestes et du milieu que, par exemple, du point de vue de l'exploitation de ce travail auprès des IUFM. Evidemment, cela demande ici de conduire toute une réflexion à propos de la construction connaissances didactiques pour la formation ou la recherche. Cela suppose donc de conduire toute une réflexion à propos de la l'articulation possible entre les savoirs issus de la recherche et les savoirs pour la formation à l'action enseignant, une transformation possible des objets de savoirs issus de cette thèse en objets d'étude pour la formation enseignante.

Références bibliographiques

- BARRERE A. (1997), *Les lycéens au travail*, PUF, Paris.
- BARRERE A. (2003), *Travailler à l'école, Que font les élèves et les enseignants du secondaire ?*, PUF, Paris.
- BAUTIER E. et ROCHEX J-Y. (1998), *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification ?*, Armand Colin, Paris.
- BERNIE JP. (2002), L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? In Mercier A., Schubauer-Léoni ML. et Sensevy G., *Vers une didactique comparée*, *Revue Française de Pédagogie*, Octobre, Novembre, Décembre, N°141, pp. 77-88, INRP, Paris.
- BLONDIN C., DETHEUX M. et DE LANDSHEERE V. (1990), *Questionnaire sur les méthodes de travail des élèves*, Liège : Service de Pédagogie expérimentale de l'Université de Liège.
- BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, VOL. 9/3, La Pensée Sauvage, GRENOBLE, PP. 309-336.
- BROUSSEAU G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, in R. Noirfalise, MJ Perrin-Glorian (eds), IREM de Clermont-Ferrand, pp. 3-46.

- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CHARLOT B. (1997), *Du rapport au savoir*, Anthropos, Paris.
- CHARLOT B. (1999), Le rapport au savoir, In *Education et formations : recherche et politiques éducatives* (dir. Jean Bourdon), Editions du CNRS, 1999, pp. 17-34.
- CHARLOT B., BAUTIER E. ET ROCHEX J-Y (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues ... et ailleurs*, Armand Colin, Paris.
- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 12/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 73-112.
- CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19/2, , pp. 221-266.
- CHEVALLARD Y. (2002), Organiser l'étude, Ecologie et Régulation, *Actes de la XXI^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, in Dorier L., La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 3-23.
- FELIX C. (2002a), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire*, Thèse de 3^{ème} cycle, Université d'Aix-Marseille I.
- FELIX C. (2002b), L'étude à la maison : un système didactique auxiliaire, *Revue des Sciences de l'Éducation*, Vol. XXVIII, n°3, pp.483-505, Québec/Montréal, Canada.
- JOHSUA S. (1998), *Des « savoirs » et de leur étude : vers un cadre de réflexion pour l'approche didactique*, L'année de la recherche en sciences de l'éducation, pp. 79-97.
- JOHSUA S. (1999), *L'école entre crise et refondation*, Paris, La Dispute.
- JOHSUA S. ET FELIX C. (2002), Le travail à la maison, un milieu pour l'étude, In Mercier A., Schubauer-Léoni ML. et Sensevy G., Vers une didactique comparée, *Revue Française de Pédagogie*, Octobre, Novembre, Décembre, N°141, pp. 89-97, INRP, Paris.
- MARGOLINAS C. (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in « *Les débats de didactiques des mathématiques, Actes du séminaires national 1993-1994* », La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 89-102.
- MAUSS M. (1936/1997), *Les techniques du corps*, In M. Mauss (1997), Sociologie et anthropologie, PUF, Paris, pp. 365-386.
- PROST A. (1983), *Les lycéens et leurs études au seuil du XXI^{ème} siècle*, CNDP.

La résolution de problèmes professionnels, une modalité de formation continue des enseignants

Éric Roditi

IUFM du Nord – Pas-de-Calais, équipe DIDIREM

L'objectif de la recherche rapportée dans ce texte est double : en se fondant sur l'étude d'un exemple, il s'agit d'une part de mieux comprendre ce qui peut favoriser ou ce qui peut freiner l'évolution des pratiques enseignantes, et d'autre part de montrer que la résolution d'un problème professionnel est une modalité pertinente pour la formation continue des enseignants. La recherche porte sur une expérience de formation de professeurs de différentes disciplines qui ont la charge d'une même classe d'élèves de Sixième. La modalité de cette formation est la création et la mise en œuvre d'un dispositif d'aide au travail personnel pour résoudre le problème de la gestion du travail personnel jugé insuffisant par les professeurs. La recherche porte sur une année scolaire complète de travail, elle repose sur des données concernant les enseignants et les élèves. Pour les enseignants, il s'agit du contenu d'un cahier journal tenu par le groupe de professeurs et d'une trentaine d'heures de réunion ; pour les élèves, les données sont principalement des évaluations de compétences disciplinaires.

Après avoir présenté le problème professionnel rencontré par les professeurs (I), nous indiquons le cadre théorique adopté pour analyser les pratiques enseignantes (II) puis nous proposons des hypothèses sur la formation continue (III) et sur l'évaluation de l'évolution des pratiques (IV). La problématique et la méthodologie de la recherche sont développées avec la présentation du dispositif de formation mis en œuvre (V). La présentation et la discussion des résultats obtenus distinguent ceux qui concernent la formation, les pratiques des professeurs et le travail des élèves (VI) et ceux qui concernent l'effet de la formation sur les pratiques des professeurs et les conséquences sur les apprentissages des élèves (VII).

I. Présentation du problème professionnel

Le problème rencontré par les professeurs s'inscrit dans le contexte général des « réseaux d'éducation prioritaire » (REP) qui regroupent des élèves en difficulté sociale et/ou scolaire.

1. Contexte professionnel du problème

Durant les trois dernières décennies, et avec des adaptations régulières, la France a tenté d'élargir et de démocratiser l'accès à l'éducation en accueillant dans un même type d'établissement, le collège unique, tous les élèves de la 6ème à la 3ème. Poursuivant des objectifs d'égalité entre les élèves, le ministère décide de limiter le travail à la maison donné par les enseignants du premier degré à un travail oral ou à des leçons à apprendre. Le travail écrit à la maison a été supprimé dans l'enseignement primaire mais pas dans l'enseignement secondaire. Parallèlement à ces mesures égalitaires, des moyens spécifiques sont créés pour aider les établissements où les difficultés sociales et scolaires sont concentrées. Malgré un bilan globalement positif quant à l'augmentation du niveau général de la formation des jeunes, les débats sont alimentés par la gestion délicate de l'hétérogénéité des élèves et la difficulté à dépasser des résultats contrastés quant à la démocratisation de l'enseignement.

2. Le problème identifié par les professeurs

L'action de formation sur laquelle s'appuie notre recherche concerne un groupe de professeurs d'un collège de milieu urbain appartenant à un réseau d'éducation prioritaire. Ces enseignants attribuent les problèmes scolaires de nombreux élèves de sixième à une mauvaise articulation entre le travail en classe et le travail à la maison. Ils ont tenté d'adapter leurs exigences à l'incapacité de travail personnel de certains élèves à l'entrée en sixième, mais ils constatent l'insuffisance des résultats. D'après les recherches menées par Félix (2002) sur le travail à la maison des collégiens, le problème identifié par les professeurs de ce collège est bien réel, mais la façon de le poser ne prendrait pas suffisamment en compte le fait que, dans les relations entre le travail à la maison et le travail en classe, ce soit surtout le travail en classe qui conditionne le travail à la maison et l'apprentissage plutôt que l'inverse.

L'insuffisance des apprentissages se traduit par un bilan scolaire jugé très faible en fin d'année scolaire pour de nombreux élèves. Néanmoins, et cela rend plus aigu le problème, les contraintes de gestion des flux des élèves imposent de laisser passer ces élèves dans la classe de niveau supérieur alors même que leurs compétences ont été jugées inadaptées pour y suivre convenablement l'enseignement qui sera dispensé. Certains professeurs ont voulu tenter de résoudre ce problème, ils ont accepté que l'expérience menée s'accompagne d'un dispositif de formation qui les conduise éventuellement à faire évoluer leurs pratiques d'enseignement.

3. Des questions de recherche sur les pratiques et sur la formation

L'objectif majeur de la recherche a été de construire et de valider un dispositif de formation continue des professeurs de cet établissement qui vise la résolution de leur problème professionnel. Les questions qui nourrissent la problématique portent sur les pratiques enseignantes et leur évolution, nous allons présenter maintenant le cadre théorique utilisé pour aborder les pratiques professionnelles des professeurs.

II. Cadre théorique d'analyse des pratiques d'enseignement

La recherche étudie les pratiques enseignantes liées au travail à la maison des élèves, elle se situe à l'échelle des professeurs d'une même classe, dans un même collège, pendant une année scolaire donnée. Les discours de ces professeurs évoquent souvent leurs choix concernant les contenus enseignés, les méthodes mises en œuvre pour les enseigner, leur adaptation aux élèves, etc. Cela explique, dans cette recherche, les références à la didactique, et en particulier à celle des mathématiques car c'est principalement pour cette discipline que les problèmes relatifs aux contenus enseignés sont traités. Leurs discours évoquent aussi des contraintes personnelles ou relatives au métier. Pour aborder les activités professionnelles des enseignants, à la fois personnelles et collectives, nous utilisons des concepts issus de la psychologie du travail et en particulier de la psychologie ergonomique.

1. Une double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes

D'une façon générale, nous considérons que les pratiques enseignantes des professeurs de l'enseignement secondaire ¹ visent principalement l'apprentissage de contenus et de méthodes spécifiques aux disciplines enseignées, mais aussi que ces pratiques participent d'une activité professionnelle avec ses normes, ses habitudes et ses contraintes. Cela explique le choix d'un cadre théorique double pour mener ce travail de recherche.

L'approche théorique mise au point par Robert et Rogalski (2002), qui mènent respectivement des recherches en didactique des mathématiques et en psychologie ergonomique, propose une

¹ Des travaux menés sur les professeurs de l'enseignement primaire par Peltier-Barbier (2004), et d'autres membres de l'équipe DIDIREM de Paris 7, montrent qu'à l'école primaire, les pratiques sont influencées par des objectifs éducatifs, surtout dans des écoles appartenant à un réseau d'éducation prioritaire.

entrée sur les pratiques enseignantes selon laquelle le professeur exerce un métier fondé sur des savoir-faire communs où chaque professionnel développe des moyens pour concilier des fins pédagogiques et des impératifs qui s'expriment par rapport à lui, et pas seulement par rapport à ses élèves. Les deux auteures admettent que les pratiques enseignantes forment un système complexe, cohérent et stable. Cette entrée est particulièrement adaptée à notre recherche car elle permet de traiter de manière imbriquée les pratiques « tournées vers les élèves » et leur apprentissage, et les pratiques enseignantes « tournées vers l'enseignant » lui-même, ces deux aspects pouvant être complémentaires mais aussi, parfois, concurrentiels.

Dans ce cadre, les pratiques enseignantes sont étudiées selon cinq composantes. Les deux premières sont directement liées au contenu enseigné et aux élèves : la composante *cognitive* résulte de l'analyse de ce qui est planifié par le professeur pour agir sur les connaissances mathématiques des élèves, la composante *médiative* renseigne sur les médiations qu'il entretient avec ses élèves ou qu'il organise entre ses élèves. Les trois autres composantes concernent le professeur en tant que professionnel. La composante *institutionnelle* rend compte du fait que les activités des enseignants dépendent de contraintes liées à la culture du pays, à ses choix en matière d'éducation, aux institutions qui organisent l'enseignement et la formation des enseignants ainsi qu'à l'histoire de l'enseignement de leur discipline. La composante *sociale* des pratiques comprend les spécificités de l'établissement dans lequel les professeurs exercent, ainsi que les conditions sociales et culturelles de leurs élèves. La composante *personnelle* rend compte de l'histoire du professeur (notamment son expérience antérieure d'élève, sa formation, ses premières années d'exercice), de ses représentations (des mathématiques, de leur enseignement et de leur apprentissage), du travail qu'il mène sur ses propres pratiques (y compris en complétant sa formation disciplinaire et didactique ou sa connaissance des élèves), de conditions personnelles (comme sa tolérance à la fatigue, au risque, etc) mais aussi, comme l'avait déjà souligné Leplat (1997), du fait que son activité réalise des intérêts d'épanouissement personnel ou de carrière. Dans les recherches fondées sur ce cadre théorique, les analyses selon les différentes composantes sont croisées pour reconstruire ce qui apparaît des pratiques étudiées.

2. Le genre d'une activité professionnelle

Au centre de la recherche se trouve une activité professionnelle précise, celle de l'enseignant qui donne du travail à la maison à ses élèves. Cette activité n'est pas limitée à la dictée d'une série de consignes : le professeur a préparé une progression dans laquelle le travail de l'élève

à la maison s'inscrit précisément, il adapte en classe son enseignement pour que les élèves puissent utilement effectuer ces devoirs, il évalue la pertinence de ses choix lorsqu'il les corrige en classe. L'activité professionnelle du professeur qui nous intéresse ici est donc particulière parce qu'elle concerne les élèves en classe, mais aussi en dehors de l'établissement lorsque le professeur n'est pas avec les élèves. La description sommaire que nous venons de faire de l'activité qui consiste à donner du travail à la maison à ses élèves montre à la fois le caractère singulier de l'activité – tel travail, pour tel contenu, pour telle classe, et par tel professeur – et son caractère générique. Si les professeurs restent en difficulté face au problème que nous avons décrit, c'est parce qu'il n'a pas suffi de modifier la longueur de la leçon à apprendre, le nombre d'exercices à résoudre ni leur difficulté. Notre hypothèse est qu'il y a quelque chose de partagé à faire évoluer pour résoudre le problème.

C'est bien ici la dimension collective de l'activité du professeur qui nous intéresse. La tâche prescrite est redéfinie, au sens de Leplat, personnellement et collectivement. Collectivement parce qu'il existe dans tous les groupes de travail *« des règles qui ne sont pas écrites, qui sont conçues par les agents, négociées entre eux et, éventuellement, avec la hiérarchie »* (Leplat 1997, p. 31). L'activité, selon Clot (1999), est tournée vers l'objet de la tâche et vers l'activité des autres portant sur cet objet. Autrement dit, il considère aussi l'activité d'un agent en ce qu'elle vient de l'activité d'un collectif et, réciproquement, pour ce qu'elle a comme incidence sur l'activité du collectif. Il définit pour cela les notions de styles et de genre d'une activité professionnelle.

Un genre est constitué de règles et de langage, de formes de vies et d'actions professionnelles communes élaborées et renforcées par l'usage ; à la fois, le genre contraint l'agent dans son activité et le genre le soulage en lui évitant les erreurs. *« Car un genre est fait justement pour s'y tenir, à tous les sens du terme. Avec lui on parvient à se mettre au diapason professionnel. Chaque fois qu'il fait défaut ou qu'il se trouve maltraité, la vie psychique personnelle s'en trouve atteinte. »* (p. 41). Et Clot élabore une première définition d'un genre d'activité : *« Ce sont des règles de vie et de métiers pour réussir à faire ce qui est à faire, des façons de faire avec les autres, de sentir et de dire, des gestes impossibles dirigés à la fois vers les autres et vers l'objet. Finalement, ce sont les actions auxquelles nous invite un milieu et celles qu'il nous désigne comme incongrues ou déplacées : le système social des activités reconnues ou interdites dans un milieu professionnel donné. »* (p. 44).

En se référant au concept de genre d'une activité, notre recherche vise une compréhension et une explicitation de *règles de métier* qui contraignent et supportent l'activité des professeurs, cette activité qui consiste à donner du travail à la maison à leurs élèves.

III. Des hypothèses sur la formation des enseignants

Le cadre théorique sur lequel nous fondons notre recherche suppose la stabilité des pratiques enseignantes, une stabilité renforcée par leur cohérence. Pourtant, les pratiques d'un professeur qui travaille dans un établissement sensible évolueront vraisemblablement s'il est muté dans un établissement sélectif. Sous certaines conditions, sans doute difficiles à réunir, la formation aussi peut faire évoluer les pratiques.

Pour construire le dispositif de formation par la résolution du problème professionnel rencontré par les professeurs avec lesquels nous avons travaillé, nous nous sommes appuyés sur des hypothèses qui concernent la formation continue des enseignants, certaines sont empruntées à Robert (2004), elles sont parfois interdépendantes. Ces hypothèses sont encore à confirmer, notre recherche ne prétend pas le permettre mais simplement y contribuer par la validation du dispositif mis en œuvre.

1. Des activités réelles qui répondent à des besoins authentiques

L'hypothèse la plus importante et qui explique que la formation s'appuie sur la conception et la mise en œuvre d'un dispositif pour résoudre un problème professionnel des enseignants est que les formateurs proposent aux stagiaires des activités réelles qui répondent à des besoins authentiques. Dans la formation analysée ici, l'encadrement de l'étude est une activité réelle qui va perturber les activités professionnelles habituelles liées aux devoirs à la maison, elle est motivée par la résolution du problème professionnel rencontré par les professeurs.

2. Un travail simultané sur au moins deux composantes des pratiques

À cause de la complexité des pratiques, nous pensons qu'il est très difficile de faire évoluer les pratiques d'un professeur en intervenant seulement sur l'une des composantes. Cela nécessite en effet un travail d'adaptation et de recomposition sans lequel l'effet de la formation sur les pratiques effectives peut être annulé, même si les intentions de l'enseignant avaient été de changer. Robert (2004) fait l'hypothèse qu'il est nécessaire de travailler souvent simultanément sur les contenus mathématiques à enseigner et sur les déroulements des séances. Nous supposons, nous aussi, que deux composantes au moins doivent être travaillées simultanément pour aider la recomposition. Dans la formation que nous rapportons

ici, où les professeurs travaillent sur un dispositif nouveau dans leur établissement, les composantes cognitive et sociale, ou médiative et sociale sont travaillées simultanément.

3. Un travail coopératif où chacun est engagé

Les changements de pratiques sont parfois imposés par une modification importante du contenu enseigné (par exemple après la réforme de la mathématique moderne), ou des formes de travail (par exemple avec l'introduction des Travaux Personnels Encadrés). Les enseignants doivent alors, ensemble, conformer leur activité à la nouvelle demande. Parce que, comme l'explique Clot (1999), l'activité d'un agent est liée à celle des autres agents, nous supposons qu'en l'absence de fortes contraintes personnelles, les pratiques des professeurs peuvent évoluer à condition que cette évolution soit construite collectivement.

En croisant l'hypothèse d'activité réelle et celle de construction collective, nous supposons qu'un travail de type coopératif où chacun est engagé peut conduire à créer les conditions d'une évolution des pratiques. Cette supposition se fonde sur les travaux de Vygotski qui relie, dans l'activité, la pensée, le langage et les émotions du sujet, et qui montrent l'apprentissage et le développement comme issus d'un double processus : un processus intersubjectif (entre personnes) dans un milieu où les rapports sont normés et socialement construits, et un processus intra-subjectif d'appropriation et d'intériorisation.

4. Un travail qui s'inscrit sur une durée assez longue

Nous supposons les pratiques complexes et cohérentes, nous les supposons stables lorsque les conditions de travail ne changent pas, aussi faisons-nous l'hypothèse qu'une formation qui vise une évolution des pratiques doit être suffisamment longue. L'évolution des pratiques nous semble nécessiter un travail riche qui intègre une réflexion sur ses propres pratiques et sur celles des autres, nécessiter aussi éventuellement des connaissances nouvelles qui doivent être suffisamment acquises pour peser sur le renouvellement des pratiques. Une formation de trop courte durée risque à nos yeux de perturber les pratiques d'un professeur sans lui permettre de construire un nouvel équilibre. Il risque alors de revenir à ses pratiques antérieures qui se retrouveront renforcées par l'échec de la tentative d'évolution.

5. Expliciter les contraintes pour faire apparaître les marges de manœuvre

Les pratiques des professeurs sont soumises à des contraintes institutionnelles et sociales, à des règles de métier et à des habitudes qui limitent les possibilités d'agir d'un professeur, mais aussi qui l'aident à savoir ce qu'il doit faire, à savoir ce que d'autres feraient s'ils étaient à sa place. Il existe cependant une diversité des pratiques qui montre que si tout n'est pas possible, des marges de manœuvre laissent à chacun un éventail de possibilités pour agir.

Marges de manœuvre et genre d'activité professionnelle ne sont pas incompatibles. D'après Clot (1999), le genre ne réduit pas les initiatives et les innovations, il n'interdit pas les variantes : *« En définissant le genre comme un système de variantes et non comme une norme achevée, nous croyons possible d'envisager la participation active des stratégies défensives à sa vitalité. La plasticité d'un genre repose sur la diversité des variantes qui se disputent le premier rôle dans le maintien d'un équilibre toujours transitoire. »* (p. 40). Nous pensons qu'une formation qui vise une évolution des pratiques doit rechercher l'explicitation des contraintes et faire apparaître les marges de manœuvre pour aider chacun des professeurs à construire personnellement et collectivement des pratiques renouvelées.

6. L'importance des contenus et des modalités de formation

Pour décrire une formation, on peut d'une part définir ce qui est travaillé (contenu disciplinaire, savoir didactique, savoir-faire professionnels...) et d'autre part les modalités mises en œuvre (exposés, production d'outils, analyse de production d'élèves, échanges de parole, pratique elle-même et analyse de pratique...). Nous pensons que le choix des modalités en fonction des contenus a un impact considérable sur la formation. Ce couplage conditionne l'engagement des participants dans les activités proposées et dans les échanges avec les autres, engagement qui est indispensable à nos yeux pour que les pratiques évoluent dans un contexte de stabilité des conditions de travail. Nous reprenons ainsi l'hypothèse de Robert (2004) selon laquelle les modalités de travail durant les séances de formation sont déterminantes sur la formation elle-même.

IV. Comment évaluer l'évolution des pratiques d'enseignement

Ces hypothèses sur la formation continue des enseignants demandent à être validées. La recherche que nous rapportons ici n'a pas une telle ambition, aussi l'évaluation de l'effet de la formation proposée sur les pratiques des professeurs nous apparaît-elle indispensable. L'évaluation de l'évolution des pratiques enseignantes soulève une question, théorique et pratique, nous nous proposons de l'aborder dans ce paragraphe et de justifier nos choix pour la formation proposée aux professeurs avec lesquels nous avons travaillé.

1. Évaluer l'évolution des pratiques pose des problèmes théoriques

L'évaluation des pratiques pose un problème théorique du fait de leur complexité. Prenons un exemple, pas complètement fictif, puisque nous l'avons en partie rencontré durant la formation que nous décrivons.

Le professeur de mathématiques cherche à laisser aux élèves davantage d'initiative dans la résolution des problèmes qu'il propose en classe. Il assure avoir changé sa manière d'écrire des énoncés, ce que confirme l'analyse des textes des exercices qu'il propose à ses élèves. Pourtant une analyse de la gestion en classe du démarrage de la phase de recherche de problèmes montre que ce professeur ne laisse pas aux élèves une durée suffisante pour construire une démarche de résolution : après seulement quelques secondes, il indique la marche à suivre à l'ensemble de la classe. La pratique a changé, mais on observe une compensation de l'ouverture des énoncés par une fermeture de la gestion. Que faut-il alors conclure quant à l'évolution des pratiques de ce professeur ?

Poursuivons l'exemple et supposons encore que ce changement de pratique concerne aussi les exercices donnés pour le travail à la maison. Certains élèves pourraient renoncer devant la difficulté supplémentaire qu'ils n'ont pas appris à gérer en classe, d'autre pourraient au contraire persévérer (ou être aidés par leur famille) et apprendre à construire une démarche de résolution. Que faut-il finalement conclure ?

Cet exemple rend compte de problèmes que pose l'évaluation de l'évolution des pratiques du fait de leur complexité. Les composantes des pratiques et les modalités d'évaluation (s'appuyer sur la parole des enseignants, sur l'analyse de leurs pratiques et sur les productions de leurs élèves) semblent devoir être croisées pour évaluer l'évolution des pratiques enseignantes.

2. Les choix effectués pour cette recherche pour évaluer l'évolution des pratiques

Nous avons tenté de savoir à la fois si les pratiques des professeurs dont nous avons suivi la formation ont effectivement évolué et, dans l'affirmative, si les élèves ont bénéficié de cette évolution. Pour ce faire nous avons croisé des données sur les pratiques déclarées des professeurs et des données concernant les élèves.

2.1. Les paroles des professeurs, premiers indicateurs de l'évolution des pratiques

Nous avons recueilli – sous forme de notes écrites – et nous avons analysé les paroles qui ont été échangées au cours de l'élaboration du dispositif et pendant les réunions consacrées à la régulation du dispositif et à la formation, cela représente au total une trentaine d'heures de réunion. Afin de garder une trace de ce qui a été vécu au quotidien durant les études, les professeurs disposaient d'un cahier journal sur lequel ils pouvaient écrire librement, ce cahier journal était utilisé pendant les réunions comme mémoire d'événements survenus, de questions soulevées ou de problèmes rencontrés. Le contenu de ce cahier a été incorporé aux échanges recueillis pour la recherche.

Pour rendre compte des pratiques enseignantes tournées vers les élèves ou tournées vers les professeurs eux-mêmes, nous distinguons deux catégories d'échanges, d'une part ceux qui concernent plus ou moins directement les élèves et d'autre part ceux qui concernent les règles, les normes ou les contraintes du métier. Dans l'analyse, nous distinguons les propos tenus par un professeur au nom d'un collectif impersonnel représentant la norme ou l'habitude, et les propos tenus pour interroger, critiquer ou défendre des règles du métier.

2.2. L'effet sur les élèves, deuxième indicateur de l'évolution des pratiques

Nous avons évalué les effets sur les élèves de l'éventuelle évolution des pratiques des enseignants. Deux critères ont été retenus : les apprentissages et le comportement des élèves au sein de l'établissement. Le dispositif pour résoudre le problème de travail à la maison a été expérimenté dans une des classes de sixième de l'établissement. L'évaluation repose sur une comparaison de cette classe aux autres classes de sixième selon les deux critères.

Pour ce qui concerne l'apprentissage, nous avons utilisé les évaluations nationales passées en début d'année, en mathématiques et en français, nous avons comparé les résultats obtenus à l'entrée en sixième et, un an après, à l'entrée en cinquième.

Le comportement des élèves est un critère important pour les professeurs et les autres agents d'un établissement scolaire. Les indicateurs généralement retenus pour l'évaluer sont les absences et les incivilités (insolences, insultes, obscénités, dégradations, violence, etc). Devant la fragilité du second indicateur, nous avons préféré tenir seulement compte des absences et de leur motif. Comme précédemment, nous avons comparé la classe qui a bénéficié de l'étude aux autres classes de sixième du collège.

V. Une ingénierie de formation : le double dispositif « étude/formation »

La recherche consiste donc à concevoir et mettre en œuvre une ingénierie de formation par la résolution d'un problème professionnel et à en tirer des conséquences sur la formation, sur les pratiques enseignantes et sur le travail à la maison des élèves. Avec les professeurs, il a été décidé de travailler dans deux directions : sur leurs pratiques et sur le travail des élèves. Il s'agit donc d'un double dispositif dont les deux parties sont présentées successivement.

1. Le dispositif « formation »

Par la formation, il s'agissait d'aider les professeurs à mieux comprendre comment préparer leurs élèves à recevoir du travail personnel, à mieux définir le travail à leur donner et à mieux gérer, en classe, les corrections des devoirs effectués à la maison. Une réunion mensuelle a permis aux enseignants d'exprimer les difficultés rencontrées durant l'année scolaire et d'élaborer des réponses adaptées, mais aussi de procéder à un travail sur leurs activités professionnelles.

Nous leur avons proposé d'élaborer un dispositif d'encadrement des devoirs à la maison par les professeurs eux-mêmes pour que la compréhension qu'ils visent se nourrisse de l'observation effective de leurs élèves pendant qu'ils font leurs devoirs plutôt que sur une représentation *a priori* de leur activité. Le principe majeur de cette formation est que l'association de ce travail d'encadrement à des rencontres régulières de régulation du dispositif et de travail sur les pratiques, aidera les professeurs engagés dans le dispositif à

faire émerger ce qui doit et ce qui peut changer. En outre, nous pensions que ces rencontres étaient nécessaires pour que leurs pratiques évoluent parce que les pratiques enseignantes sont à la fois individuelles et collectives, et doivent être validées collectivement.

Le dispositif vérifie nos hypothèses sur la formation. Le projet n'aurait pu fonctionner sans être validé par l'institution de formation et par le conseil d'administration de l'établissement, sans être explicité à toute l'équipe éducative et aux parents d'élèves. Ainsi le travail a-t-il porté sur les composantes institutionnelle et sociale des pratiques en amont du dispositif, et sur leurs dimensions sociale, cognitive et médiative durant sa mise en œuvre. Parce qu'ils devaient encadrer l'étude en prenant en charge les devoirs demandés dans toutes les disciplines, et parce que les réunions de formation avaient pour vocation d'élaborer des réponses aux difficultés et aux questions rencontrées, les professeurs ont été engagés dans un travail de type coopératif qui s'est déroulé durant toute l'année scolaire, travail qui reposait sur des activités réelles en réponse à des besoins authentiques.

2. Le dispositif « étude »

La seconde composante du dispositif était d'accompagner une classe d'élèves dans leur apprentissage de l'étude autonome. Dans le cadre du travail préliminaire, les professeurs ont élaboré un projet visant trois objectifs et intitulé « Apprendre à prendre son cartable » destiné à une classe de sixième composée d'élèves susceptibles de rencontrer des difficultés de travail personnel. Le premier objectif est d'apprendre aux élèves à effectuer leur travail personnel. Tous les soirs et durant 1h30, une « étude » (c'est le mot que nous utiliserons dans la suite du texte pour désigner ces séances d'encadrement du travail personnel des élèves) est assurée par deux adultes : un professeur et un aide éducateur. Progressivement, le dispositif « d'étude » évoluera pour permettre aux élèves d'accéder à l'autonomie nécessaire à une scolarité réussie. Le deuxième objectif est d'aider les parents à mieux soutenir leurs enfants. Le troisième objectif est la formation des enseignants, il a été développé précédemment.

VI. Des résultats sur la formation, sur les pratiques et sur le travail des élèves

La recherche porte sur les pratiques des enseignants et leur évolution suite à la formation qui a été proposée. Dans ce paragraphe VI, nous allons présenter les résultats révélés par le

dispositif sur la formation elle-même, sur les pratiques enseignantes et sur le travail à la maison des élèves. L'évaluation des effets du dispositif sur les pratiques des professeurs et sur les élèves (apprentissage et comportement) fera l'objet du paragraphe VII.

Le travail sur le corpus composé des échanges entre les professeurs et des remarques consignées dans le cahier journal est de nature qualitative, la présentation des résultats est imbriquée aux analyses. Les faits qui objectivent les analyses sont des citations : l'icône [●] indique des paroles exprimées durant les réunions de préparation, de régulation et de formation, l'icône [□] indique des écrits tirés du cahier journal. Chaque citation est précédée de sa date.

1. Des résultats sur la formation : le dispositif développe un travail sur différents registres, l'action, l'émotion, le langage et la réflexion

Pour chacun des professeurs qui a participé au double dispositif « étude/formation », le travail sur ses pratiques d'enseignement a sollicité l'action, la pensée, le langage et l'émotion.

L'action d'abord parce qu'il a bien fallu faire, et faire face, avec le dispositif d'étude qui n'avait jamais fonctionné dans cet établissement. L'encadrement de l'étude pose une difficulté professionnelle particulière : celle de la responsabilité du professeur sur le travail des élèves. Lorsque les professeurs encadrent l'étude et que les élèves acceptent de travailler, qui est responsable lorsque le travail demandé n'est pas fait ? Celui qui encadre l'étude ? Celui qui a donné le travail ? L'élève qui n'a pas le niveau requis ? C'est ainsi que nous interprétons les paroles suivantes des professeurs où le verbe faire est employé avec une certaine ambiguïté, concerne-t-il les élèves ou le professeur ?

[●02/10] C'est quoi, avoir fait son travail ? Pour les exercices, faut-il absolument qu'ils aient juste quand ils quittent l'étude ?

[●19/10] À l'étude, il faut choisir entre tout faire et bien faire, les élèves ne peuvent pas faire les deux, vu ce qu'on leur demande.

Il en est autrement pendant un cours, ainsi, en reprenant les termes de Clot (1999), le professeur qui encadre une étude ne peut pas se référer au genre de la situation d'enseignement, mais le genre de la situation d'encadrement de l'étude fait défaut. Il a fallu construire une référence, localement, entre professeurs participant au dispositif.

Les références appartenant au registre des émotions ont aussi été perturbées pour deux raisons au moins : les professeurs ne pouvaient pas gérer la discipline des élèves comme dans leur classe, et la responsabilité de l'échec des élèves n'est plus partagée comme à l'ordinaire.

[□14/09] Ils ont travaillé convenablement pendant une heure sans trop de bruit, mais la dernière demi-heure était vraiment très difficile !

[□17/09] Trop de bruit ! Et souvent, ils disent qu'ils n'ont plus rien à faire...

[■19/10] « À l'étude, on peut aider les élèves à travailler sur leurs erreurs. Il faudrait qu'on arrive à dissocier la qualité de la production de l'élève d'un jugement de valeur : c'est juste / c'est bien ; c'est faux / c'est mal »

La référence aux émotions n'est pas toujours prise en compte dans les recherches sur les pratiques enseignantes, ce registre de perception et d'expression mérite sans doute d'être travaillé davantage car les professeurs semblent y référer beaucoup dans leur pratique.

Des mots, pour décrire ce qui est vécu pendant les séances d'étude, pour confronter les points de vue, pour se mettre d'accord sur ce qu'il faut faire et sur les moyens pour le faire, ont été exprimés de manière informelle en salle des professeurs et plus formellement dans le cadre des réunions de régulation et de formation.

[■14/12] « C'est fou tout ce qu'on a à dire sur cette classe, il ne se passe pas une journée sans qu'on entende parler d'eux. »

Les réunions ont donné du temps pour la réflexion et pour l'échange. Ils expriment des besoins de connaissances théoriques, notamment sur l'apprentissage, l'hétérogénéité et la différenciation, et l'envie d'échanger avec des professeurs d'autres établissements qui auraient tenté des expériences analogues. Les professeurs comparent leurs manières de faire en étude et essaient de s'accorder tout en acceptant les différences, dont l'origine est attribuée aux personnes ou aux disciplines qu'elles enseignent. Autrement dit, ils élaborent entre eux une pensée *sur* et *pour* l'action de chacun.

2. Des résultats sur les pratiques : contraintes institutionnelles et règles du métier

La préparation et la mise en œuvre du projet a nécessité des négociations avec différents partenaires, ces négociations ont révélé des contraintes institutionnelles et des règles du métier. La composante « étude » a été présentée au conseil d'administration pour que la mise en œuvre du projet soit acceptée, que les moyens nécessaires soient attribués, et que la classe

d'élèves soit constituée et confiée aux enseignants participant à cette action. La composante « formation » a été soumise à l'institution organisatrice de la formation continue pour qu'un stage soit proposé aux professeurs durant l'année où l'étude a été encadrée. La préparation de ce double dispositif a montré que des règles du métier s'imposent dans l'établissement, notamment sur les composantes institutionnelle et sociale des pratiques.

2.1. Une règle de partage équitable des moyens de fonctionnement de l'établissement

Les discussions et les négociations sur les moyens nécessaires à l'expérience ont fait émerger une règle de métier fondée à la fois sur une tradition égalitaire de l'École de la République et sur une présomption, celle de la nécessité de moyens supplémentaires pour réduire l'hétérogénéité des résultats des élèves : l'ensemble des heures d'enseignement dont dispose l'établissement doit être partagé équitablement entre toutes les classes, un projet pédagogique ne peut puiser sur ces ressources de façon excessive. Le dispositif nécessitait une heure et demie d'étude chaque jour du lundi au vendredi ; pour être acceptée par le conseil d'administration, l'organisation suivante a été proposée : les trois heures d'aide et l'heure et demie de méthodologie sont transférées au dispositif et l'étude ne sera pas assurée le mercredi ; le besoin complémentaire s'élevait ainsi à seulement une heure et demie par semaine. La demande a été acceptée car toutes les classes de sixième de l'établissement bénéficiaient d'une dotation analogue pour la mise en œuvre d'un projet.

2.2. Une règle de partage des difficultés et des satisfactions

Les discussions et les négociations ont révélé une autre règle de vie sociale et professionnelle de l'établissement quant à la constitution des classes qui conduit au partage des difficultés et des satisfactions professionnelles. Sans doute cette règle est-elle issue du contexte général difficile d'un établissement en REP où la gestion des élèves est souvent éprouvante. La règle pourrait s'énoncer ainsi : la constitution et la répartition des classes ne doivent pas favoriser certains professeurs plus que d'autres parmi ceux qui enseignent depuis déjà quelques années dans l'établissement. La dernière précision cherche à tenir compte d'une pratique connue qui consiste à confier les classes les plus difficiles aux professeurs débutants ou remplaçants, signalons toutefois que cette pratique n'a pas été observée dans l'établissement où notre recherche a été menée.

Pour constituer la classe qui a bénéficié de l'étude, la règle de « partage des difficultés et des satisfactions » et les directives institutionnelles qui invitent à ne pas constituer de classes en

regroupant les élèves par niveau scolaire ont conduit à choisir les élèves en fonction de leur besoin d'une telle structure. Les dossiers scolaires des élèves ont été consultés pour les seules appréciations concernant le travail personnel et l'autonomie. La classe a finalement accueilli les élèves qui manquaient de méthodes de travail ou qui vivaient dans des conditions peu favorables au travail scolaire. La classe n'a pas bénéficié d'un effectif allégé.

2.3. Une obligation de prise en compte des contraintes institutionnelles

Dans le cours des discussions, une objection a été opposée au dispositif d'étude : il n'apporte pas d'aide spécifique aux élèves les plus en difficulté de la classe, ce qui est contraire à la demande institutionnelle. Une fois encore, remarquons l'importance accordée par les personnels de l'établissement à la réglementation officielle. Dans une recherche antérieure (Roditi 2003), nous avons montré que les professeurs préparent leurs cours en tenant compte des textes officiels à la fois pour le contenu et pour le rythme de l'enseignement. Afin de répondre à cette objection, un aide éducateur a participé à l'étude pour permettre au professeur de s'occuper particulièrement de ces élèves en grande difficulté.

2.4. S'occuper du travail à la maison des élèves, est-ce bien l'affaire des professeurs ?

Le projet, dès son origine, n'a pas fait l'unanimité à cause d'une opposition de principe : l'aide aux devoirs à la maison et leur vérification seraient d'abord de la responsabilité des parents, pas de celle des professeurs. Un volet concernant les parents a été élaboré dans le dispositif pour les aider à mieux soutenir leur enfant. Un casier a été mis à disposition de chaque élève, il y range son matériel scolaire, il apprend à préparer son cartable car tous les soirs, il rentre à la maison avec ses affaires pour le lendemain. Ainsi, ses parents peuvent contrôler que le cartable a été bien préparé, ils peuvent consulter le carnet de correspondance et le cahier de textes, et vérifier ce qui a été fait à l'étude. Des rencontres entre les professeurs et les parents sont organisées à chaque moment important de l'année.

Ce volet du projet ne correspondait pas à une préoccupation majeure des professeurs mobilisés pour aider leurs élèves à apprendre à faire leur travail à la maison. Dans cet exemple comme dans ceux qui ont été étudiés précédemment, des règles socioprofessionnelles généralement implicites ont influencé l'élaboration du projet. Comme résultat de recherche, nous retenons les règles qui ont été énoncées, mais aussi que le projet des professeurs s'est conformé à ces règles après les avoir bousculées quelque peu. Cela leur a permis de conserver des repères pour travailler au quotidien.

3. Des résultats sur le travail des élèves

Comme ils s'y attendaient, les enseignants ont pris conscience de certaines difficultés rencontrées par les élèves qui entrent en sixième, mais ils ont aussi découvert certains malentendus entre eux et leurs élèves sur la nature du travail demandé ou sur le sens des mots utilisés dans les consignes.

3.1. Des difficultés matérielles ou d'organisation

Les professeurs ont pris la mesure des difficultés des élèves quant à la gestion de leur agenda : le travail n'est pas toujours noté correctement, par inattention, parce que les élèves ne notent pas ce qui leur semble évident au moment où ils écrivent, ou parce que ceux qui écrivent lentement sélectionnent parmi les informations et consignes. La gestion du matériel scolaire demande aussi un apprentissage.

[□10/09] Ils ont du mal à préparer leur cartable : pour aller en étude ils ont tout mis !

L'effort des professeurs, et des élèves, a produit des résultats en un trimestre environ :

[●19/11] C'est beaucoup moins le bazar, de plus en plus d'élèves savent ce qu'ils ont à faire.

3.2. Les élèves ne peuvent parfois pas répondre aux attentes des professeurs

Les professeurs ont appris que les difficultés d'organisation de leurs élèves de sixième sont importantes. Ils ont aussi pu prendre la mesure du temps qu'ils mettent à effectuer leur travail. Les professeurs avaient estimé que six heures d'étude devaient suffire, ils ont été contraints de revoir leurs exigences à la baisse :

[●19/10] À l'étude, il faut choisir entre tout faire et bien faire, les élèves ne peuvent pas faire les deux, vu ce qu'on leur demande.

Un équilibre a été atteint par l'adaptation des professeurs et les progrès des élèves, un équilibre toujours instable car les progrès des élèves appellent une demande plus importante :

[●14/12] Il y a une meilleure gestion du temps de l'étude par les élèves, globalement.

[□07/02] L'ambiance de travail était plutôt bonne. Ils ont fait le Français et les Mathématiques ou l'Anglais, éventuellement les deux.

Malgré les efforts de leurs professeurs, certains élèves refusent de se mettre véritablement au travail et adoptent une attitude qui leur permet d'en faire le minimum sans être sanctionné :

[■30/01] On constate une hétérogénéité des élèves face à l'étude, certains cherchent surtout à détourner ce temps.

On retrouve ici une attitude déjà constatée (Roditi 2004) chez des élèves qui évitent la confrontation en travaillant *a minima*.

3.3. Des malentendus sur le sens des consignes, et sur le travail scolaire

En encadrant l'étude et en corrigeant le travail en classe, les professeurs ont compris qu'aux difficultés matérielles, d'organisation et de gestion du temps s'ajoutaient des malentendus quant à la nature même du travail demandé. Pour de nombreux élèves, pas forcément rétifs à l'étude, le travail à la maison constitue une sorte de tâche à accomplir, une tâche limitée à une action, une tâche qui ne débouche pas sur une réflexion et un apprentissage. Ainsi, un professeur remarque qu'une recherche de vocabulaire n'est pas accomplie pour que les mots soient compris ni pour que leur sens soit retenu :

[■14/12] Pour ces élèves, faire une recherche sur un mot, c'est copier tout ce qu'il y a sur ce mot dans les documents consultés...

Les élèves ont « fait » le travail demandé, ils ont « écrit » une définition ! D'autres chercheurs ont réalisé des constats analogues, citons Charlot, Bautier et Rochex (1992) : « *Ces éléments semblent caractéristiques du rapport au savoir des élèves en difficulté. (...) Le niveau local, celui de l'activité ponctuelle, de l'exercice, est à lui-même sa propre fin, ce qui gêne l'appréhension du sens de la discipline en tant que savoir.* » (pp 196-197).

En s'appuyant sur des anecdotes relatées sur le cahier journal, la formation a aidé les professeurs à prendre conscience de la mesure de ce phénomène. Voyons quelques exemples. Deux élèves interpellent le professeur qui encadre l'étude et elles lui demandent s'il faut sauter des lignes pour pouvoir relever les détails du texte. Après discussion, le professeur comprend que les deux élèves ont pris le verbe relever au sens de « remettre plus haut » et qu'elles s'apprêtaient à recopier le texte en écrivant plus haut les détails demandés. Elles trouvaient alors plus commode d'espacer les lignes. Le professeur leur indique que le sens du mot relever n'est pas compris correctement dans ce contexte et les élèves demandent à consulter un dictionnaire pour connaître les sens différents de ce verbe :

[□22/10] Point positif : É... et S... ont réclamé un dictionnaire que l'on a ouvert, elles n'avaient pas compris le mot relever les détails !

Cet événement a suscité une discussion en réunion : le verbe « relever » ne dit rien de la tâche matérielle que l'élève doit accomplir, contrairement au verbe « recopier » par exemple. Fallait-il utiliser un verbe qui focalise sur l'action plutôt que sur la lecture ? Un tel choix ne renforcerait-il pas les difficultés des élèves en confortant leur conception du travail scolaire qui doit justement évoluer ? Un travail au quotidien d'explicitation de ce que recouvre le travail scolaire s'avère bien nécessaire :

[■19/11] Il est grand temps qu'on mette à plat nos méthodes et nos exigences, en distinguant les disciplines. Et ça, il faut le faire tous les jours.

À l'époque de cette formation, l'étude de Félix et Johsua (2002) n'était pas publiée mais on voit ici combien le travail avec les élèves en étude a permis aux professeurs de comprendre combien le travail à la maison est conditionné par ce qui a été fait en classe.

Autre exemple. La prise d'indices verbaux aide à comprendre la consigne, mais parfois elle cause une difficulté insurmontable. Dans un texte, les élèves devaient déterminer les étapes, et en particulier, la situation initiale. Le professeur qui encadre l'étude note une difficulté :

[□12/02] Ils n'arrivent pas à trouver les étapes. Par exemple, pour Z..., la situation initiale sont les premières lignes du texte, il n'a pas compris que ça peut englober tout le texte.

Pour certains élèves, le texte n'est pas une production à partir d'une histoire (réelle ou fictive) mais le récit fidèle de son déroulement, la transcription de cette histoire. L'élève Z... a compris le sens du mot initial, mais l'adjectif porte sur la situation et Z... l'interprète comme une indication sur le texte lui-même. En vain, l'élève cherche, au début du texte, les informations sur la situation initiale.

Ces exemples illustrent quelques malentendus perçus par les professeurs durant l'étude. De tels malentendus révèlent une représentation du travail scolaire courante pour beaucoup d'élèves en difficulté, les professeurs ont pu mesurer les problèmes qu'elle engendre.

L'encadrement des études et les séances de formation semblent avoir changé les conceptions des professeurs sur le travail à la maison. Ils paraissent mieux cerner les capacités nécessaires d'organisation et de travail, pas toujours acquises à l'entrée en sixième. Ils semblent avoir appris que les élèves peuvent comprendre ce qui leur est demandé et le faire, mais que leurs manières de le comprendre et de le faire ne correspondent pas forcément à ce qui est souhaité. Ce problème des malentendus dépasse largement le seul cadre du travail à la maison, il a globalement des implications sur les pratiques enseignantes. Nous ne prétendons pas que la connaissance des malentendus suffise à éliminer les difficultés qu'ils provoquent, mais leur méconnaissance n'aide sans doute pas à les réduire.

VII. Effets de la formation sur les pratiques et conséquences sur les élèves

Un objectif de la formation était d'aider les professeurs à mieux comprendre comment leurs élèves de sixième travaillent lorsqu'ils ne sont plus en classe, à modifier leurs pratiques concernant les devoirs à la maison pour qu'elles prennent mieux en compte le travail effectif des élèves. Notre recherche conduit à dresser un bilan de l'effet de la formation sur les pratiques des professeurs en nous fondant sur l'analyse de leurs paroles et de leurs écrits. Nous avons croisé ce bilan avec une analyse des conséquences sur l'apprentissage et sur le comportement des élèves.

1. Effet de la formation sur les pratiques déclarées des professeurs

Les résultats montrent que ce dispositif a permis aux professeurs de travailler sur leurs propres pratiques en tenant compte du milieu professionnel dans lequel ils travaillent.

1.1 . Des pratiques plutôt stables selon la composante cognitive

Les professeurs ont exprimé leurs réflexions, leurs évolutions et leurs questions sur leur travail. Leurs paroles concernent peu la stabilité de leurs pratiques aussi les données recueillies ne permettent pas de savoir ce qui a pu résister à une évolution envisagée et pourquoi. Les visites effectuées dans les classes ne montrent pas de changement didactique majeur durant l'année. En mathématiques, le professeur suit la même organisation qu'auparavant, une organisation qu'il adopte pour toutes ses classes et qui est conforme aux programmes et aux manuels scolaires. Cependant, en accompagnant la résolution d'exercices pendant l'étude, les professeurs ont remarqué que l'investissement des élèves est souvent plus important lorsqu'ils peuvent s'approprier rapidement l'objectif du problème.

[14/12] Finalement, la décomposition des problèmes posés aux élèves est une source de difficultés, ils travaillent mieux quand ils ont le problème entier à chercher. C'est quoi alors une question ?

Comme nous l'avons déjà indiqué, le professeur de mathématiques de la classe a été influencé par ce constat, il essaie de proposer des exercices ne comportant qu'une seule question et d'encadrer, en classe, le travail de décomposition de la question globale en plusieurs sous-questions. Cette évolution de ses pratiques a été discutée en formation, notamment pour savoir qui, au bout du compte, avait la charge de la décomposition des questions. Il nous a

semblé que les tâches proposées aux élèves n'avaient pas subi de changement majeur, les professeurs ayant beaucoup exprimé leur souci de ne pas changer leur demande, de ne pas trop baisser le niveau de leurs exigences afin de ne pas pénaliser les élèves.

1.2. Une évolution des pratiques qui porte principalement sur la composante médiative

D'après leurs déclarations, la formation a eu un effet sur les pratiques des professeurs.

a) Un effet sur la communication au sein de l'équipe

Les réunions de régulation et de formation ont développé la communication entre les professeurs, y compris en dehors de ces séances. Les professeurs qui animent l'étude et d'autres personnels du collège ont utilisé le cahier de liaison pour correspondre avec les membres de l'équipe. Si les effets du développement de la communication au sein de l'équipe ont été jugés bénéfiques, il nous semblerait hâtif, et même risqué sur le plan scientifique, d'en déduire une évolution des pratiques sur le long terme. Sauf à intégrer des réunions de concertation régulières dans les services des professeurs, il nous semble raisonnable de penser que cette évolution des pratiques restera conjoncturelle.

b) Une attention plus grande au travail réel des élèves

Les mots des professeurs témoignent d'une attention plus importante qu'auparavant sur le travail réel des élèves et leurs différences.

[□11/09] Je ne suis pas certaine qu'ils ont pu faire leur travail en histoire, ils avaient déjà beaucoup trop à faire.

[□28/01] D... ne travaille pas seule. A... travaille bien au début et ne parvient plus à rester concentrée très vite

Cela pose très tôt des problèmes professionnels relatifs à la dimension institutionnelle des pratiques. Ils craignent de ne pas pouvoir traiter correctement l'ensemble du programme et que, finalement, les élèves en pâtissent. La question est posée sur le plan professionnel de façon très directe, à la manière d'un défi :

[●19/11] Est-ce qu'on peut vraiment faire cours en faisant attention aux élèves ?

Nous n'avons pas développé les moyens méthodologiques qui permettraient de poursuivre le travail sur cette question que nous percevons comme un problème issu de la rencontre entre deux références parfois concurrentes : les règles du métier et les capacités des élèves.

c) Une évolution des pratiques pour une meilleure adaptation, constats et interrogations

Les professeurs déclarent aussi que l'attention aux élèves plus grande que par le passé leur a permis de développer des moyens différents d'enseignement et que leurs pratiques se sont davantage adaptées à ce que les élèves pouvaient comprendre, produire et apprendre. Ils ont proposé de nouvelles formes d'activités en classe qui préparent le travail à la maison :

[□31/01] L'histoire a été faite en classe au brouillon. Obligation de mettre le travail au propre !
Est-ce que ce sera fait ?

Ces nouvelles formes d'activités rejoignent ce que Félix et Johsua (2002) appellent co-construction d'un milieu pour le travail à la maison.

d) Une évolution des modalités de travail des élèves

Les observations en classe et pendant l'étude montrent que le travail des élèves est devenu un peu moins individuel au profit d'un travail en binômes, mais les professeurs ne proposent que très peu de séances en petits groupes. Les modalités de travail des élèves sont donc devenues assez proches en classe et en étude. Nous avons remarqué aussi une analogie entre la classe et l'étude qui concerne cette fois le travail du professeur. Au début de chaque séance d'étude, le professeur commence par faire le point avec les élèves sur le travail demandé. La mise au point dure une dizaine de minutes, le professeur se tient au tableau, interroge des élèves pour savoir ce qu'ils ont copié sur leur agenda. Cette entrée en matière ressemble fort à celle d'un cours où le professeur interroge les élèves sur leur travail à la maison. Nos questions à ce sujet n'ont pas obtenu de réponses exploitables, une étude plus approfondie avec une méthodologie adaptée serait nécessaire pour traiter cet aspect des pratiques. Une hypothèse nous semble vraisemblable, ces premières minutes de début des cours ou des séances d'étude sont une forme de rituel qui définit la place de chacun : la place des élèves et celle du professeur.

En conclusion de l'effet du dispositif « étude/formation » sur les pratiques des enseignants, nous retiendrons l'absence de bouleversement des pratiques selon les composantes institutionnelle et sociale, selon la composante cognitive avec néanmoins, dans certaines disciplines, une augmentation des problèmes où les questions sont moins décomposées. Nous retiendrons également, et cela ne nous semble pas négligeable, une évolution des pratiques dans les médiations professeur/élèves pour une meilleure adaptation de l'enseignement aux élèves ainsi qu'un développement des médiations élève/élève par le travail en binôme.

2. L'effet sur les élèves : objectif et révélateur de l'évolution des pratiques

Les professeurs avaient le sentiment que beaucoup d'élèves ne tiraient pas assez profit de l'année de sixième, que le niveau pour réussir dans la classe supérieure n'était pas atteint et que cela venait de l'insuffisance de leur travail personnel. Pour évaluer l'effet de la formation sur les élèves, nous avons procédé par comparaison entre les élèves de la classe dont les professeurs ont participé au double dispositif « étude/formation », et les autres élèves de sixième du collège. Deux critères ont été retenus : le comportement scolaire, traduit par les absences et leur motif, et les apprentissages repérés par l'évolution des performances aux évaluations nationales à l'entrée en sixième et en cinquième.

Deux classes (6^{ème} 1 et 6^{ème} 3) regroupaient les élèves dont les résultats scolaires étaient les meilleurs à la fin de la scolarité primaire. Le projet « apprendre à prendre son cartable » qui a conduit au dispositif « étude » concernait les élèves de la 6^{ème} 4, il a conduit à rassembler des élèves ayant des difficultés de méthode et d'autonomie. Les deux autres classes (6^{ème} 2 et 6^{ème} 5) ont été conçues avec les autres élèves, répartis de façon hétérogène. Les comparaisons nous amèneront donc à distinguer deux types de classes : les classes « sélectives » (6^{ème} 1 et 6^{ème} 3), et les classes « ordinaires » (6^{ème} 2, 6^{ème} 4 et 6^{ème} 5). Afin de faciliter la lecture, la classe de 6^{ème} 4 sera distinguée des classes ordinaires par la dénomination : classe « étude ».

2.1. Effet du dispositif sur le comportement scolaire des élèves

Nous avons distingué les absences « avec motif » qui sont indépendantes des élèves (maladie ou raison familiale) et les absences « sans motif » qui témoignent sans doute d'un désintérêt pour l'école. Les absences non excusées ont été classées dans la catégorie « sans motif ». Deux questions vont guider l'analyse : les élèves sont-ils plus ou moins absents suivant leur classe ? les absences sans motif sont-elles plus ou moins fréquentes suivant les classes ?

a) Nombre d'absences, comparaison en fonction des classes

Considérons dans un premier temps la variable aléatoire qui à chaque élève associe le nombre de ses absences. Les moyennes par classe figurent dans le tableau suivant.

Classe	Type	Effectif	Abs/élève	É. type
6 ^{ème} 1	Sélective	25	3,4	4,1
6 ^{ème} 2	Ordinaire	25	7,8	6,8
6 ^{ème} 3	Sélective	28	3,5	4,5
6 ^{ème} 4	Étude	26	4,7	6,6
6 ^{ème} 5	Ordinaire	27	7,6	8,9

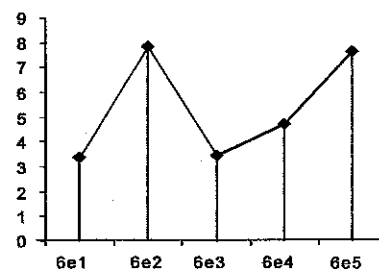


Tableau 1 : Nombre d'absences par élève, répartition.

Les tests statistiques ne montrent pas de différence significative entre les deux classes sélectives, ni entre les deux classes ordinaires qui n'ont pas bénéficié de l'étude, ils montrent une différence entre ces deux groupes ainsi qu'entre la classe « étude » et le groupe des deux autres classes ordinaires mais ils ne montrent pas, en revanche, de différence significative entre la classe « étude » et le groupe des classes sélectives. En résumé, il y a un effet classe sur le nombre d'absences par élève : les élèves qui ont suivi l'étude sont moins absents que ceux des autres classes ordinaires et le nombre moyen d'absences par élève de la classe « étude » n'est pas significativement différent de celui des classes sélectives.

b) Nature des absences, comparaison en fonction des classes

Déterminons si les motifs des absences révèlent ou non un désintérêt pour l'école différent selon les classes. On considère, pour chaque classe, le nombre d'absences avec ou sans motif. La répartition observée conduit au tableau des fréquences suivant :

Classe	Type	Avec Motif	Sans Motif
6 ^{ème} 1	Sélective	71%	29%
6 ^{ème} 2	Ordinaire	36%	64%
6 ^{ème} 3	Sélective	72%	28%
6 ^{ème} 4	Étude	41%	59%
6 ^{ème} 5	Ordinaire	42%	58%

Tableau 2 : Nature des absences, répartition observée des fréquences.

Le tableau précédent montre un pourcentage d'absences sans motif d'environ 30% dans les classes sélectives, et d'environ 60% dans les classes ordinaires. Le dispositif n'a donc pas eu d'effet sur la cause des absences.

2.2. Effet du dispositif sur la construction de compétences disciplinaires.

Pour procéder à des comparaisons pertinentes des résultats aux évaluations nationales à l'entrée en sixième et en cinquième, les classes numérotées de 1 à 5 que nous avons considérées ne sont pas exactement les classes constituées par l'administration de l'établissement : dans notre étude, tout élève d'une classe de 6^{ème} donnée qui n'a ni redoublé ni changé d'établissement a été affecté à la classe de 5^{ème} portant le même numéro. En outre, pour les classes de sixième, seuls ont été considérés les élèves qui ont passé les évaluations les deux années dans l'établissement. Cela explique la modification des effectifs des classes de sixième par rapport à l'étude des absences qui était fondée sur les données de l'établissement. Ainsi pouvons-nous véritablement comparer les classes selon les résultats à l'entrée en sixième et à l'entrée en cinquième.

a) Comparaison des classes à l'entrée en sixième

La moyenne arithmétique des pourcentages de réussite en français et en mathématiques à l'entrée en sixième a été calculée pour chaque élève, cette valeur constitue sa performance à l'entrée en sixième. Les moyennes de ces performances par classe ont été calculées pour comparer les classes à l'entrée en sixième.

Classe	Type	Effectif	Perform.	É. type
6 ^{ème} 1	Sélective	24	74,79	10,20
6 ^{ème} 2	Ordinaire	19	56,11	16,93
6 ^{ème} 3	Sélective	27	74,76	8,01
6 ^{ème} 4	Étude	25	50,09	10,63
6 ^{ème} 5	Ordinaire	20	52,62	13,92

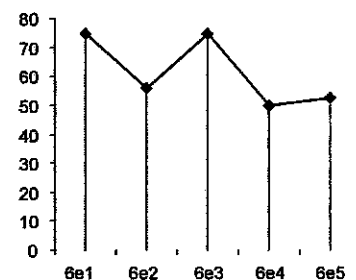


Tableau 3 : Évaluation à l'entrée en sixième, résultats moyens par classe.

L'analyse statistique menée sur les résultats rend compte de l'effet de la constitution des classes sur les performances à l'entrée en sixième : sans que l'on constate de différence significative entre les deux classes sélectives, ni entre les trois classes ordinaires, les classes sélectives obtiennent une performance moyenne de 75% qui est, de manière significative, supérieure à celle des classes ordinaires qui n'obtiennent que 55% environ. On remarque aussi que la sixième « étude » est plus homogène que les autres sixièmes ordinaires et qu'elle

détient la performance la plus basse du collège. La moyenne nationale ² est d'environ 70% et la moyenne en ZEP est 61% environ ; les deux classes sélectives ont donc des performances légèrement supérieures à la moyenne nationale alors que les trois classes ordinaires ont obtenu des résultats sensiblement inférieurs à celui des ZEP. Globalement, la moyenne du collège est 62% c'est-à-dire environ la moyenne nationale en ZEP.

b) Comparaison des classes à l'entrée en cinquième

Une étude analogue a été effectuée avec les évaluations à l'entrée en cinquième.

Classe	Type	Effectif	Perform.	É. type
5 ^{ème} 1	Sélective	24	58,52	11,34
5 ^{ème} 2	Ordinaire	19	38,97	12,44
5 ^{ème} 3	Sélective	27	62,26	11,18
5 ^{ème} 4	Étude	25	40,15	10,05
5 ^{ème} 5	Ordinaire	20	38,83	12,20

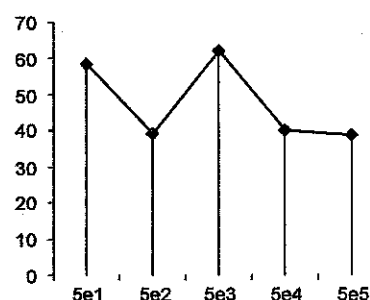


Tableau 4 : Évaluation à l'entrée en cinquième, résultats moyens par classe.

Les résultats moyens sont beaucoup plus faibles qu'ils ne l'étaient à l'entrée en sixième, cela tient à la difficulté des évaluations qui n'a pas été constante d'une année à l'autre. L'analyse statistique des résultats confirme l'effet des types de classes : les élèves des classes sélectives sont plus performants que les élèves des classes ordinaires avec une performance de 60% contre 40% environ ; les classes sélectives ne se distinguent pas, ni les classes ordinaires. La sixième « étude » est la classe la plus homogène du collège mais elle n'obtient plus la performance la plus basse, elle est même passée en tête des classes ordinaires. La moyenne nationale ³ est d'environ 54% de réussite et la moyenne en ZEP est 45% ; on retrouve ainsi un bilan analogue à celui dressé en sixième.

2.3. Comparaison des évolutions de performance de la sixième à la cinquième

L'analyse statistique ne montre donc pas de différence significative entre la sixième « étude » et les classes ordinaires quant aux performances à l'entrée en sixième et à l'entrée en cinquième. Nous avons remarqué cependant qu'au sein de ce groupe la classe passe de la

² Voir : Direction de la Prospective et du Développement, Note d'Information n°01.59 de décembre 2001.

³ Voir : Direction de la Prospective et du Développement, Note d'Information n°03.21 d'avril 2003.

dernière position à la première. Les analyses statistiques étaient fondées sur des comparaisons de moyennes qui tiennent compte de la variance des valeurs, l'absence de différence significative entre les moyennes s'explique aussi par leur grande dispersion.

La question que nous nous posons maintenant est de savoir si cette dispersion ne masque pas les progrès et les reculs des performances des élèves. Pour y répondre, nous allons analyser l'évolution des performances entre l'entrée en sixième et l'entrée en cinquième. Cette évolution a été calculée pour chaque élève de manière à neutraliser la différence de difficulté entre les évaluations : à la performance de chaque élève a été associé son indice (base 100) par rapport à la moyenne nationale. Pour chaque élève, la variation de l'indice a été calculée : un élève qui passe de l'indice 90 à l'indice 110 a réalisé un progrès de 20 points d'indice, la valeur de la variation est +20. Les moyennes par classe de ces variations d'indices ont été calculées et comparées. Les classes sont notées 6/5^{ème} et numérotées de 1 à 5.

Avant d'aborder la comparaison des classes, étudions le collège dans son ensemble, c'est-à-dire l'évolution de la moyenne des indices des 115 élèves qui ont passé les deux épreuves. Cette moyenne est de 89,24 en sixième et de 90,28 en cinquième. Ces résultats inférieurs à la base 100 de l'indice montrent que le niveau du collège est inférieur au niveau national moyen, à l'entrée en sixième comme à l'entrée en cinquième. La comparaison des moyennes à l'entrée en sixième et à l'entrée en cinquième ne montre pas de variation significative : globalement les élèves n'ont ni progressé ni régressé après leur première année de collège.

Examinons maintenant les classes séparément. Les résultats obtenus sont les suivants.

Classe	Type	Effectif	Évolution	É. type
6/5 ^{ème} 1	Sélective	24	+ 1,53	12,29
6/5 ^{ème} 2	Ordinaire	19	- 7,98	13,93
6/5 ^{ème} 3	Sélective	27	+ 8,50	15,4
6/5 ^{ème} 4	Étude	25	+ 2,79	13,06
6/5 ^{ème} 5	Ordinaire	20	- 3,27	14,14

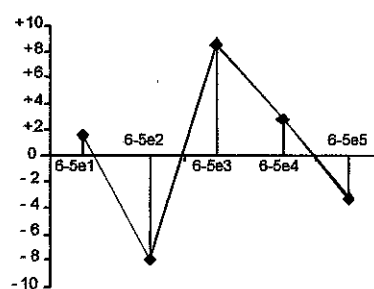


Tableau 5 : Évolution des indices de performance entre la sixième et la cinquième.

Pour situer la classe « étude » par rapport aux classes du collège, nous distinguons deux groupes, le groupe formé par les classes sélectives et la classe « étude » qui conservent le niveau à l'entrée en sixième ou qui progressent et le groupe des deux classes ordinaires qui n'ont pas bénéficié de l'étude et qui régressent. L'analyse statistique confirme le classement.

La recherche permet donc de tirer un bilan de l'effet du dispositif « étude/formation » sur les apprentissages des élèves. Les élèves de la sixième « étude » sont arrivés aux collèges avec un niveau de compétence faible (inférieur au niveau moyen en ZEP) analogue à celui des deux autres classes ordinaires du collège ; les classes sélectives obtiennent en revanche, à l'entrée en sixième, des résultats supérieurs à la moyenne nationale. Après une année de mise en œuvre du dispositif, la classe « étude » reste faible (le niveau est toujours inférieur au niveau moyen en ZEP) et elle ne se distingue toujours pas des deux autres classes ordinaires ; les classes sélectives obtiennent toujours des résultats supérieurs à la moyenne nationale. Le dispositif n'a donc pas permis de combler l'écart entre la classe « étude » et les classes sélectives. L'analyse de l'évolution des performances de chaque élève entre la première et la seconde évaluation permet cependant de nuancer le bilan. Les classes ordinaires qui n'ont pas bénéficié du dispositif « étude » ont régressé alors que les classes sélectives et la classe « étude » ont progressé. Finalement, si le dispositif n'a pas permis de combler les écarts, il a tout de même évité que ces écarts ne se creusent. Le bilan initial des professeurs est confirmé : dans leur établissement, les élèves en difficulté en sixième terminent l'année avec des résultats encore plus faibles que ceux qu'ils avaient en arrivant au collège. La recherche montre aussi que le dispositif « étude/formation » a permis d'enrayer ce processus.

VIII. Conclusions

La recherche porte sur la conception d'un dispositif de formation *pour* et *par* la pratique, et sur l'évaluation de ses effets. Ce dispositif visait la résolution d'un problème professionnel rencontré par les professeurs d'un collège.

1. Présentation des résultats de la recherche

Trois types de résultats organisent les conclusions : des résultats sur les pratiques et leur évolution, des résultats sur la pertinence de modalité de formation adoptée, et des résultats sur l'évaluation des effets de la formation.

1.1. Les composantes institutionnelle et sociale des pratiques enseignantes sont marquées par des règles de métier.

La conception et la mise en œuvre du dispositif d'aide à l'étude des élèves ont perturbé les pratiques ordinaires de gestion du travail à la maison des élèves par leurs professeurs. Cette perturbation a révélé des règles implicites de cette activité professionnelle.

Les rôles respectifs des enseignants et des familles ont été précisés pour que les professeurs puissent encadrer le travail personnel des élèves sans dépasser les limites de leur activité professionnelle en se substituant aux parents. La mise en œuvre de ce dispositif pédagogique a révélé, une fois encore, l'importance de la conformité des pratiques enseignantes aux textes officiels qui régissent l'enseignement. Cette conformité contraint les pratiques, mais aussi elle confère aux professeurs une légitimité qui assure leurs pratiques professionnelles tout en leur laissant certaines marges de manœuvre.

Des règles sociales de vie professionnelle au sein de l'établissement scolaire ont émergé lors de la conception du dispositif, elles montrent combien le professeur n'est jamais vraiment seul avec ses élèves. Les classes sont composées et réparties entre les enseignants pour partager équitablement les satisfactions et les difficultés du métier. Les moyens d'enseignement sont également distribués selon ce principe, cela met en outre sur un pied d'égalité tous les projets pédagogiques conformes aux normes institutionnelles.

1.2. La résolution de problèmes professionnels est une modalité de formation qui aide à l'élaboration de variantes au sein d'un genre d'activité professionnelle.

Les premières discussions avec les professeurs étaient focalisées sur l'apprentissage des élèves, sur l'inadéquation de leur travail personnel et sur les efforts que les professeurs avaient pourtant déjà consentis pour adapter leur demande. La proposition de formation par la résolution du problème professionnel consistait à demander à chacun des professeurs de s'engager dans une pratique nouvelle, l'encadrement des séances d'étude, de tenter de mettre en cohérence ses pratiques d'enseignement avec le travail mené en étude et de participer à la régulation collective de ces nouvelles pratiques.

Les professeurs associés au dispositif ont donc vécu une année de formation *pour* la pratique et *par* la pratique. Une formation *pour* la pratique car les analyses et les discussions menées en formation portaient beaucoup sur les moyens de réaliser l'objectif du dispositif : que les élèves étudient mieux. C'est plus précisément sur les composantes sociale et médiative des

pratiques que la formation a porté : comment, tout en exerçant son métier de professeur, assurer une meilleure prise en compte des possibilités réelles des élèves, adapter l'enseignement proposé et différencier les aides offertes aux élèves ? Une formation *par* la pratique car c'est en s'appuyant sur ce que chaque enseignant a vécu pendant une année complète et sur différents registres (les émotions, l'action, le langage et la réflexion) que la formation a tenté d'avoir un effet sur les pratiques. Une formation *par* la pratique, aussi parce que les questions et les difficultés soulevées par les pratiques nouvelles ont été traitées sur le lieu de travail des professeurs, avec leurs collègues, en considérant les rapports qu'entretiennent les pratiques de chacun avec les règles et les habitudes collectives.

1.3. L'évaluation de la formation a montré des effets sur les pratiques enseignantes et sur l'apprentissage des élèves.

Le bilan des analyses menées sur les déclarations des professeurs montre que les pratiques enseignantes ont évolué pour s'adapter davantage à la réalité des possibilités des élèves mais qu'elles n'ont pas changé quant à l'organisation didactique globale de l'enseignement proposé. La prise en compte des élèves a porté sur l'organisation matérielle, sur le rythme de travail, et sur le rapport au travail scolaire. L'adaptation de l'enseignement proposé s'est traduit par un renouvellement des outils mis à disposition des élèves, une réorganisation de l'articulation entre l'activité en classe et l'étude à la maison, une attention nouvelle à la formulation des consignes de travail, une explicitation plus précise des attentes et une différenciation plus importante des aides. En outre plusieurs professeurs, dont celui de mathématiques, déclarent proposer aux élèves des problèmes moins segmentés qu'auparavant et encourager davantage le travail en binôme plutôt que le travail individuel.

Les analyses des données concernant les absences (pour rendre compte du comportement scolaire des élèves) et les résultats aux évaluations nationales (pour rendre compte de leur apprentissage) montrent un effet du dispositif. L'absentéisme des élèves de la classe « étude » était analogue à celui des élèves des classes sélectives, c'est-à-dire bien inférieur à celui des élèves des classes ordinaires. Les résultats obtenus aux évaluations par les classes sélectives sont meilleurs que ceux des classes ordinaires en début d'année de sixième, et ils le restent en début de cinquième. L'étude de l'évolution des résultats d'une année à l'autre montre aussi que les classes sélectives maintiennent leur niveau ou progressent alors que les classes ordinaires régressent sauf celle qui a bénéficié du dispositif expérimental. Le dispositif n'a donc pas permis, en une année, de combler l'écart entre les classes sélectives et les classes ordinaires mais il a néanmoins évité que cet écart ne se creuse.

2. Limites et perspectives de la recherche

La recherche ne porte que sur une seule formation à laquelle ont participé les professeurs d'une seule classe de sixième. Il s'agit là des premières limites de cette recherche dont les résultats sont difficilement généralisables. L'exemple témoigne cependant de la pertinence d'une formation par la résolution d'un problème professionnel malgré des contraintes qui apparaissent assez lourdes. D'autres limites viennent de l'évaluation qui porte seulement sur des pratiques déclarées sans qu'on sache véritablement ce qui a pu évoluer dans les classes. En ce qui concerne les apprentissages des élèves, le choix d'utiliser des évaluations nationales avait l'avantage d'éviter certains biais mais il avait aussi l'inconvénient de laisser peut-être dans l'ombre des difficultés persistantes ou des progrès réalisés par les élèves sur des compétences qui ne sont pas évaluées à l'échelle nationale. Les résultats nuancés qui ont été obtenus quant à l'effet de la formation sur les élèves soulèvent des perspectives de recherche plus larges que la question du choix de la modalité de l'évaluation. Le travail de l'année de formation a concerné principalement les composantes sociale et médiative des pratiques. Pour obtenir un effet plus important sur les apprentissages des élèves, il faut peut-être que le travail porte aussi sur la composante cognitive.

La résolution d'un problème professionnel apparaît finalement comme une modalité pertinente pour la formation, elle ouvre aussi des perspectives de recherche notamment quant à la relation entre les composantes des pratiques enseignantes qui sont travaillées en formation et les objectifs qui peuvent être atteints sur l'enseignement et sur l'apprentissage.

Références bibliographiques

CHARLOT B, BAUTIER E, ROCHEX J-Y (1992), *École et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris : Armand Colin.

CLOT Y (1999), *La fonction psychologique du travail*, Paris : PUF.

LEPLAT J (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail - Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF.

FELIX C, JOHSUA S (2002), Le travail des élèves à la maison : une analyse didactique en termes de milieu pour l'étude, *Revue française de pédagogie*, n° 141.

PELTIER-BARBIER M-L, BUTLEN D, MASSELOT P, NGONO B, PEZARD R, ROBERT A, VERGNES D, *Dur d'enseigner en ZEP, Analyse des pratiques de professeurs d'école*

enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire, Grenoble : La pensée Sauvage.

ROBERT A, ROGALSKI J (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol 2/4, pp 505-528.

RODITI E (2004 A), *Le théorème de l'angle inscrit au collège. Analyse d'une séance d'introduction et perspectives pour la formation*, Cahier DIDIREM n° 45, Paris : IREM de Paris 7.

RODITI E (2003), Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol 23/2, pp 183-216.

ROGALSKI J (2003), Y a-t-il un pilote dans la classe, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 23/3, pp 343-388.

Étude des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP

Effets éventuels de ces pratiques sur les apprentissages

Bernadette Ngonu

IUFM de l'Académie de Rouen. Équipe DIDIREM Paris 7-

Introduction

Il existe de nombreux travaux tant anglo-saxons que français qui se sont attachés à décrire la réussite différenciée des élèves en fonction de leur appartenance sociale. Ainsi, B.Charlot, E.Bautier et A.Rocheix de l'équipe ESCOL¹² ont envisagé comme explication éventuelle de cette réussite différenciée le rapport au savoir, le rapport aux disciplines, au langage, à l'école que développent les élèves en fonction de leur appartenance sociale. Le rapport au savoir est défini par Charlot comme : « ensemble organisé de relations qu'un être humain entretient avec tout ce qui relève de l'apprendre et du savoir ». (Charlot Bautier Rocheix 1992).

En didactique des mathématiques les travaux de Perrin-Glorian³ [1992], ceux de Butlen et Pézard⁴ [1997], ont décrit avec précision la nature des difficultés des élèves en mathématiques. Ces travaux signalent en particulier une carence dans les représentations mentales, l'absence de liens entre les expériences et les apprentissages, l'oubli de ce qui est appris, et proposent dans certains cas une intervention didactique visant à réduire une partie de ces difficultés. Certains de ces travaux envisagent déjà l'idée d'un lien éventuel entre les pratiques des enseignants et la moindre réussite de leurs élèves. Par ailleurs, le rapport

¹ CHARLOT B., (1999), *Le Rapport au Savoir en milieu populaire – une recherche dans les lycées professionnels de banlieue*, Paris, Anthropos

² CHARLOT B., BAUTIER E., ROCHEIX J.-Y., (1992), *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, A. Colin

³ PERRIN-GLORIAN M.J., (1992), *Aires des surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6^{ème}*, Thèse de Doctorat d'Etat, Paris, Université de Paris VII.

⁴ BUTLEN D., PEZARD M., (1997), Deux exemples de situations d'enseignement de mathématiques s'adressant à des élèves en difficulté, in IREM Paris VII, *Actes du stage national de Rennes organisé par la COPIRELEM – « Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques »*, Tome V, pp. 9-21

Moisan⁵ [1997] a mis en évidence certains déterminants de la réussite en ZEP et le fait que l'échec des élèves n'y était pas inéluctable. A milieu socio-économique égal, certaines ZEP réussissent mieux que d'autres. De plus, les enfants scolarisés dans certaines écoles de ZEP réussissent mieux que d'autres scolarisés hors ZEP.

Dans mon travail, j'ai cherché à mieux comprendre comment des enseignants d'une ZEP font avec les difficultés de leurs élèves et ce qui détermine certaines de leurs décisions dans ce contexte.

I. Cadre théorique et méthodologique

Mon cadre théorique général est celui de la didactique des mathématiques, en particulier la théorie des situations de G.Brousseau.

J'admets comme hypothèses de départ que les pratiques d'un enseignant sont stables, complexes et cohérentes, et que tout enseignant est soumis à des contraintes sociales et institutionnelles. Ces contraintes sont probablement particulières en ZEP. Enfin, les choix fondamentaux d'un enseignant ne sont pas déconnectés de l'environnement dans lequel ils prennent place.

Dans mon travail, j'ai cherché à tester l'hypothèse selon laquelle les pratiques des enseignants de ZEP, à travers leurs confrontations à diverses contraintes, peuvent contribuer par certains aspects à limiter voire à réduire les chances d'apprentissage des élèves. En même temps, j'ai cherché à déterminer comment ces pratiques se structurent dans le contexte où elles prennent place.

Pour étudier les pratiques, j'ai utilisé la double approche proposée par A.Robert⁶ et J.Rogalski⁷. Cette approche conjugue les résultats de la didactique des mathématiques et ceux de l'ergonomie du travail. Elle consiste à étudier les pratiques du point de vue des apprentissages qu'elles induisent, tout en considérant l'enseignant comme un professionnel exerçant un métier. Je retiens aussi de ces travaux la distinction entre tâche et activité, entre tâche prescrite, attendue, redéfinie ou effective. A.Robert propose de lire les pratiques d'un

⁵ MOISAN C., SIMON J. (1997), *Les déterminants de la réussite scolaire en zone d'éducation prioritaire*, Paris INRP

⁶ Robert, A. et Rogalski, J. (2002) : le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et des technologies*.

⁷ Robert A., (2001), Recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 21.1.2.

enseignant selon cinq composantes afin de les analyser. Les composantes institutionnelles et sociales permettent d'approcher la manière dont les enseignants assument et négocient leur assujettissement aux contraintes sociales et institutionnelles. Par cette négociation implicite, chaque enseignant se détermine ainsi une certaine marge de manœuvre. L'investissement de cette marge se définit à l'aide d'éléments relevant des composantes cognitive, médiative et personnelle, la composante médiative concernant tout ce qui est relatif aux modes d'interaction des différents acteurs en classe. Ces composantes permettent d'analyser de quelle manière, sous ces contraintes, les enseignants observés élaborent des itinéraires cognitifs pour les élèves. Elles permettent également d'analyser la manière dont les enseignants interagissent avec les élèves tant au niveau du savoir que du comportement. Certains des choix des enseignants sont mis en lumière à l'aide d'éléments de leurs conceptions sur leur rôle, sur le public auquel ils s'adressent, sur les mathématiques et sur leur enseignement. Ce cadre méthodologique permet d'analyser finement différents aspects du métier des enseignants observées, et aide à restituer en partie la cohérence et la complexité des pratiques effectives.

Ma recherche a concerné les enseignantes du cycle 3 d'une école très populaire de la banlieue rouennaise. Avec en moyenne cinq années d'ancienneté, leurs pratiques m'ont semblé suffisamment stables pour les buts de ma recherche.

Dans cette école, en 1998, les résultats des élèves aux évaluations nationales de CE2 en mathématiques étaient de 20 à 30 points en dessous de la moyenne nationale, alors que pour les ZEP on constate généralement un écart moyen de 10 points. Ces élèves pouvaient donc être considérés comme étant en difficulté.

Dans cet exposé, j'ai choisi de présenter en détail un dispositif méthodologique de recueil de données qui m'a permis d'accéder aux composantes des pratiques étudiées. En même temps, je le considère comme un résultat méthodologique de la recherche. Il s'est construit au fur et à mesure de la recherche, par ajustements successifs non prévisibles avant cette recherche.

Pour illustrer en quoi ce dispositif s'est avéré important, je présenterai dans cet article trois résultats qu'il m'a permis d'obtenir, ainsi qu'une synthèse des résultats de ma thèse faisant intervenir les cinq composantes à la fois, avant de conclure.

Une analyse des pratiques prenant en compte l'ensemble des dimensions décrites par Aline Robert impose au minimum des observations des séances de mathématiques dans une ou plusieurs classes. Ces observations et analyses peuvent donner accès aux composantes cognitive et médiative, voire personnelle. Il m'a semblé que dans le contexte d'une école primaire située en ZEP, l'accès aux significations élaborées par les enseignantes pour construire leurs pratiques favoriserait l'accès à la cohérence et la stabilité de ces dernières. Ces significations elles-mêmes doivent être considérées comme des phénomènes privés, donc difficilement accessibles..

Par exemple, si les professeurs observés interagissent avec leurs élèves, Ils interagissent aussi les uns sur les autres. D'une certaine manière, l'action d'un seul peut être regardée comme la création mutuelle de plusieurs professeurs en interaction, qui partagent différents aspects de leur métier. Ils ont les mêmes élèves, ont reçu la même formation à l'IUFM ou à l'école normale, dépendent de la même institution. Leurs âges sont proches. Ils partagent éventuellement les mêmes valeurs qui guident la plupart de leurs actions.

Il m'est donc apparu important d'accorder une place au point de vue des professeurs, de repérer le sens que les enseignants assignent aux mathématiques et à leur enseignement aux élèves dans le contexte social de leur école ceci afin de mieux préciser ce qui cimente leurs pratiques.

Pour recueillir ces données , il fallait au moins avoir accès à des classes, pouvoir observer des séances ordinaires sur une longue période, enregistrer des discours dans et hors de la classe d'un enseignant, mais aussi de plusieurs enseignants en train d'échanger sur leurs pratiques, sur leurs élèves, sur l'institution ; de même j'ai souhaité avoir accès à des documents personnels comme des préparations écrites, des cahiers d'élèves...). D'une certaine manière, j'ai cherché à gagner la confiance des enseignants.

Dans l'équipe de recherche à laquelle j'appartiens, nous avons mis au point une méthode d'observation en deux temps, d'abord une observation participante des enseignantes dans le cadre d'un projet de cycle, suivie d'une observation faiblement participante des séances ordinaires. Les données ainsi recueillies ont été complétées par d'autres issues de réunions de travail avec les enseignantes. Certaines de ces réunions visaient à améliorer leurs pratiques.

J'ai regroupé l'ensemble de ce dispositif de recherche en contexte alternant observations de séances et réunions sous le terme d'accompagnement.

II. Description du dispositif

Comme le montre le tableau ci-dessous, ce dispositif comporte deux phases, la première a eu lieu au cours de l'année 98/99, la deuxième a duré deux ans de 99 à 2001.

	Diversité de contextes d'observation	Diversité de postures pour les enseignantes	Processus observés
Premier type d'accompagnement (1998-1999)	Réunions de travail (phase de décisions)	Des enseignantes autour d'un projet	Environnement mathématique prévu pour les élèves (discours)
	Ateliers de jeux mathématiques : séances extraordinaires	Une enseignante - avec ses élèves - avec divers élèves	Activité potentielle puis activité réelle des élèves
	Réunions de travail (bilans et ajustements du projet)	Des enseignantes autour d'un projet	Décalages entre décisions et mise en œuvre du projet
	EVALUATION - MAI 99		
Deuxième type d'accompagnement (1999-2000 et 2000-2001)	Séances ordinaires dans une classe (CE2-CM1)	Une enseignante et ses élèves(CE2-CM1)	Activité potentielle des élèves (division euclidienne) -
	Réunions de travail sur les séances ordinaires	Des enseignantes échangeant sur leurs pratiques ordinaires avant, pendant, après formation	Évolution de divers points de vue des enseignantes
	Séances ordinaires dans une classe CE2-CM1 CM1-CM2	une enseignante dans une classe à double niveau	Activité potentielle des élèves sur des éléments de la formation

Chaque phase comporte trois étapes qui peuvent être caractérisées par le contexte de mes observations, la posture des enseignantes, les processus observés en liaison avec ma recherche.

Première phase du dispositif

Ainsi, la première phase correspond à une négociation que nous avons dû accepter pour entrer dans l'école. Les enseignantes nous demandaient de les aider à élaborer et à mettre en œuvre un projet d'ateliers de jeux mathématiques destiné à l'ensemble des élèves du cycle 3. Les trois étapes concernent les réunions de travail avec les enseignantes en vue d'élaborer le projet, la mise en œuvre du projet dans les classes ; la troisième étape correspond aux bilans et à la prise de nouvelles décisions ou l'abandon des premières, c'est à dire aux modifications du projet par les enseignantes. L'alternance entre ces étapes, en particulier entre les deux dernières m'a permis de voir les enseignantes dans divers rôles.

Tout d'abord, les enseignantes ne nous ont pas autorisé l'accès aux séances ordinaires. C'est pendant ces séances que les élèves concevaient leurs jeux. Par contre elles nous autorisaient à accéder aux ateliers de jeux. Lors des réunions de travail, je pouvais observer les échanges entre les enseignantes ou dans les ateliers de jeux, en face d'élèves qui n'étaient pas tous les leurs. C'est à travers leurs discours ou à travers divers documents qu'elles m'ont fournis que j'ai eu accès à leur rôle dans les séances ordinaires de conception de jeux. Je pouvais aussi repérer ce rôle en étudiant les jeux présents dans les ateliers de jeux. Mon propre rôle était celui d'une personne-ressource pour les enseignantes tout en conservant pour moi-même les buts de ma recherche. J'ai ainsi pu commencer à repérer l'environnement mathématique potentiel que les enseignantes envisageaient pour leurs élèves à travers leurs discours, tout en étudiant la partie visible de l'activité réelle des élèves lors des phases de jeux. Cette activité était réduite dans de nombreux cas : lorsque les tâches étaient trop pauvres, les enfants y prenaient du plaisir, mais ils n'apprenaient pas. Quand les tâches étaient plus complexes, les enfants ne disposaient pas des connaissances nécessaires. Ils n'arrivaient pas à répondre, et perdaient donc ainsi à la fois le bénéfice du jeu pour le plaisir et le bénéfice des jeux pour les apprentissages. Il me semblait qu'une partie de ce qui se manifestait pouvait être lié à une articulation insuffisante entre les séances ordinaires et les séances extraordinaires. Il me semblait aussi que les enseignantes semblaient vivre une contradiction entre la logique de la socialisation et la logique des apprentissages au détriment de la seconde. Afin d'aider les enseignantes à mieux prendre en compte la nécessité de l'articulation entre séances ordinaires

et séances extraordinaires, et donc de donner plus de poids aux apprentissages, j'ai proposé pour tous les élèves du cycle une évaluation reprenant des items de jeux. Cette évaluation a eu lieu au mois de mai 1999. Elle reprenait des items régulièrement présents dans les jeux. J'ai analysé les résultats pour les enseignantes. L'échec des élèves à certains de ces items, la présence de certaines erreurs pouvant être rattachées à la fréquentation des jeux ont suscité un questionnement des enseignantes sur leurs pratiques ordinaires. Elles ont alors demandé notre aide pour une meilleure articulation entre les séances ordinaires et les jeux mathématiques, et nous avons ainsi pu négocier notre entrée dans les classes pour observer des séances ordinaires. C'est à ce niveau que démarre la deuxième phase du dispositif.

Deuxième phase du dispositif

Cette deuxième phase, comme la première comporte aussi trois étapes, mais avec une différence notable dans le déroulement.

Dans la première phase, des réunions de travail avec les enseignantes ont précédé mes observations des séances extraordinaires. Par contre, dans cette deuxième phase, j'ai observé les séances ordinaires d'une enseignante de CE2-CM1, Stéphanie, et j'ai travaillé sur les transcriptions de ces séances avant le début des réunions de travail avec les enseignantes sur les séances ordinaires. D'une part j'ai ainsi pu étudier les pratiques de Stéphanie avant toute formation. Par ailleurs, en procédant ainsi, je pouvais agir sur les échanges au cours des réunions pour avoir des explications sur certains phénomènes observés dans la classe de Stéphanie, repérer à travers les discours des enseignantes leurs propres opinions sur ces phénomènes. Ceci me permettait d'avoir des explications collectives sur des phénomènes en apparence singuliers. Par ailleurs, les demandes de formation des enseignantes, leurs réactions face à nos propositions ont constitué une autre source d'information sur leurs pratiques. Après formation, les observations dans les classes me permettaient d'en repérer l'impact éventuel. Les réunions qui suivaient donnaient de nouveau accès aux points de vue des enseignantes.

Ce dispositif méthodologique m'a permis de décrire le plus finement possible le quotidien que je souhaitais comprendre et d'analyser les pratiques en faisant aussi décrire par les enseignantes leurs élèves, leur quotidien. J'ai pu accéder à la manière dont les enseignantes analysent ce quotidien afin de prendre des décisions, en fonction du contexte, de leur définition de ce contexte. J'ai pu par exemple repérer leur interprétation des programmes de mathématiques, leur idée de la manière dont leurs élèves apprennent, voire leur conception

des mathématiques et de leur enseignement à leurs élèves. Ce dispositif m'a permis de recueillir en partie leur façon de raisonner, de réagir face à certaines contraintes, ainsi que les solutions qu'elles inventent.

L'observation des séances dans une classe, complétée par les échanges avec les enseignantes, m'a donné accès à ces solutions à partir de l'analyse de leurs choix de situations mathématiques, de gestion des séances (interactions didactiques), leurs pratiques d'oral et d'écrit (cahiers d'élèves...), leurs pratiques d'évaluation, les formes de travail qu'elles privilégiaient. L'étude de leurs réactions face à certaines solutions proposées en réponse à leur demande de formation, mais aussi celle des adaptations qu'elles ont effectuées dans leurs classes à partir de ces éléments de formation m'ont permis d'analyser cette formation en terme d'effets à court et moyen terme. J'ai pu ainsi confirmer le caractère stable de leurs pratiques. C'est en cela que je considère le dispositif méthodologique utilisé comme essentiel pour ma recherche, puisqu'il m'a ainsi permis d'avoir accès aux cinq composantes. Les parties qui suivent illustrent des résultats obtenus à l'aide de ce dispositif. Ils portent sur des contradictions entre certaines logiques et la logique des apprentissages, et sur la manière dont ces contradictions, renforcées par les conceptions des enseignantes sur les élèves, influe sur certains de leurs choix. Je montrerai aussi certains effets de la formation que j'ai menée sur ces pratiques.

III. Illustration de certains résultats obtenus à l'aide du dispositif

Le premier résultat que je vais présenter met en évidence la primauté de la logique de l'innovation sur celle des apprentissages. Je me situe sur la phase 1 de mon dispositif, relatif au projet d'ateliers de jeux mathématiques.

1. Mise en évidence de la primauté de la logique de l'innovation sur celle des apprentissages

Comme je l'ai signalé, les enseignantes souhaitaient mettre en place un projet d'ateliers de jeux mathématiques dans le but de pallier les difficultés comportementales et cognitives de leurs élèves.

Les décisions prises par les enseignantes

Les enseignantes avaient prévu une progression commune afin que tous les élèves travaillent sur les mêmes thèmes mathématiques devant intervenir dans les jeux. Pour chaque thème, elles avaient prévu d'élaborer une liste de compétences à développer en classe et devant intervenir dans les jeux. Afin de faciliter le suivi des élèves, elles envisageaient des grilles d'observation et d'évaluation au cours des jeux.. Notamment, elles souhaitaient repérer à quel jeu les élèves avaient joué et comment ils avaient effectué les tâches mathématiques qui leur étaient proposées. Elles avaient aussi prévu de mener une évaluation ponctuelle permettant de savoir s'il y avait acquisition et transfert.

Les décalages entre les décisions des enseignantes et la mise en œuvre effective du projet

Des décalages entre les décisions et la mise en œuvre effective se sont manifestés tout au long de l'année. La progression commune n'a pas été élaborée. Pour ce qui est de la mise en œuvre du projet, j'ai eu accès aux phases de conception par les descriptions que les enseignantes en ont faites.

Qu'il s'agisse du domaine numérique ou du domaine géométrique, le déroulement s'effectuait ainsi. Les groupes de concepteurs s'organisaient librement autour d'un modèle de jeu de société. Ils en élaboraient les règles, le fabriquaient. Les enseignantes proposaient hâtivement des éléments de connaissances pour permettre à certains élèves de concevoir leurs jeux, et permettaient à d'autres plus avancés de choisir des items dans des livres mis à cet effet à leur disposition. Une conséquence en est que des élèves d'une même classe pouvaient avoir des connaissances isolées sur une notion mathématique, recevoir une aide de l'enseignante sur cette notion sans que cette dernière n'ait fait partie de la progression de la classe. Le choix laissé aux élèves les conduisait parfois à anticiper sur des compétences non encore travaillées en classe. Les enseignantes se refusaient à intervenir sur ces choix estimant qu'elles risquaient ainsi de « trahir les élèves ».

Dans les ateliers proprement dits et que j'ai observés, j'ai constaté que les enseignantes ne disposaient pas des grilles d'évaluation prévues, qu'elles ne pouvaient donc pas savoir à quel jeu tel élève avait joué ni comment il avait résolu les tâches proposées dans les jeux. Elles jouaient essentiellement un rôle d'animateur afin de maintenir une atmosphère sereine dans les classes. Par ailleurs de nombreux élèves découvraient au cours des jeux des exercices

mathématiques auxquels ils n'avaient pas nécessairement été entraînés lors des séances ordinaires.

Lors des réunions de bilan, il m'est apparu que les enseignantes semblaient considérer les ateliers de jeux suffisants pour certaines acquisitions. Notamment elles nous ont dit ne pas revenir sur certaines notions travaillées par les jeux ni pour évaluer ponctuellement les acquis des élèves, ni pour envisager d'autres situations pour renforcer ces acquisitions.

Un exemple permet de repérer que l'activité développée au cours des jeux n'a pas permis les acquisitions souhaitées pour de nombreux élèves.

Exemple d'un jeu conçu par les élèves sur la géométrie plane

Au cours des mois de septembre et d'octobre 99, les enfants ont conçu et construit des jeux numériques auxquels ils ont joué à partir du mois de septembre, jusqu'au mois de mars 2000. Ils ont conçu des jeux géométriques en janvier et février qui sont venus compléter le stock initial. Les jeux étaient construits en autant d'exemplaires que de classes, pour en faciliter la rotation à l'intérieur d'une classe tout au long de l'année.

Voici par exemple des items extraits d'un jeu relatif aux figures planes et qui a eu beaucoup de succès. Trois variantes de ce jeu ont été construites dans les classes de CM sous forme de jeux de piste ou sous forme de cartes.

Exemple de questions intervenant dans le jeu « géoloie » conçu par les élèves :

	Items
1	<i>V ou F ? Le triangle fait partie de la famille des quadrilatères</i>
3	<i>Reproduis un parallélogramme</i>
4	<i>Reproduis un triangle quelconque $AB=4\text{ cm}$ $BC=3\text{ cm}$ $AC=7\text{ cm}$</i>
6	<i>Qui suis-je ? (carré)</i>
7	<i>Donne deux propriétés du carré</i>
8	<i>Qui suis-je ? (parallélogramme)</i>
9	<i>Qui suis-je ? (rectangle)</i>
10	<i>Je suis une figure à 5 côtés</i>
12	<i>V ou F ? Le trapèze est un quadrilatère</i>
13	<i>Qui suis-je ? (triangle rectangle isocèle)</i>
14	<i>Dessine un polygone sur une feuille blanche</i>

16	Qui suis-je ?(triangle isocèle)
17	Trace un carré dont les côtés font 7 cm
18	J'ai trois côtés de même longueur et 3 sommets. Qui suis-je ?
20	Reproduis un triangle rectangle sur une feuille de brouillon
21	Qui suis-je ? (losange)
22	Donne le nom de 3 figures à 4 côtés
24	Je suis une figure géométrique et j'ai 8 côtés. Qui suis-je ?
25	Dessine un hexagone
26	Qui suis-je ? (trapèze rectangle)
27	J'ai trois côtés dont deux seulement sont de même longueur. Qui suis-je ?

Certains items sont accompagnés de figures dessinées (entre parenthèses dans le tableau).

Ce jeu est d'abord une production d'élève dans une tâche mathématique que lui propose l'enseignante, avant d'être un matériel pédagogique destiné à l'ensemble des élèves. Ce double aspect permet de l'analyser du point de vue des compétences développées par les concepteurs, qui peuvent être distinctes de celles à développer chez le joueur. C'est aussi ce double aspect qui rend complexe la tâche de l'enseignant. Ainsi, les concepteurs ont effectué des tâches de reproduction et/ou de construction de figures usuelles, et des tâches de description de ces figures. Le soin des figures présentes indique une certaine maîtrise des instruments de tracé (règle graduée, équerre et compas) et une prise en compte des propriétés des figures (angles droits, côtés parallèles, égalités des longueurs...). Les descriptions sont diversifiées. Certaines font intervenir la classe des figures (quadrilatères), les propriétés relatives au nombre de côtés, aux longueurs de côtés, aux sommets, ainsi que des programmes de construction de figures usuelles. Le vocabulaire des actions à mener est varié (reproduis, trace, dessine). Malgré la confusion entre reproduire et construire, la diversité de ces verbes montre que les élèves concepteurs ont pris conscience de l'existence de plusieurs verbes d'action en géométrie. Le vocabulaire des objets géométriques est tout aussi varié.

Les joueurs ont quant à eux des tâches d'identification et de construction des figures. L'identification de figures peut se faire par la perception accompagnée éventuellement d'instruments, à partir des propriétés ou par la reconnaissance de la classe à laquelle ces figures appartiennent. Cependant, certaines difficultés peuvent limiter les possibilités d'une

validation laissée à la charge des partenaires au cours du jeu. Dans cette école l'étude des triangles se fait au CM, ce qui limite le jeu pour des élèves de CE2, voire pour ceux de CM n'ayant pas encore fait l'étude des différents triangles. Certaines figures ne font pas partie des figures usuelles des programmes, même si elles peuvent apparaître de manière occasionnelle au cours d'une activité de classe (trapèze rectangle isocèle, octogone).

Enfin, les joueurs ont à construire des figures, ce qui suppose lors de la phase de jeu que les élèves exécutent cette tâche avec des instruments et que les partenaires attendent que le joueur ait réalisé sa construction et disposent de critères efficaces pour valider les constructions exécutées, vérifient que les contraintes de la consigne sont respectées. Si nous nous intéressons à ces items, nous avons un triangle pour lequel les points sont alignés (avec $AB=4$ cm, $BC=3$ cm $AC=7$ cm, $AB + BC= AC$). Les élèves que nous avons observés obtenaient malgré tout un triangle « légèrement » aplati, les autres élèves ne remettant pas en question l'existence de ce triangle.

Si l'on compare la tâche des concepteurs à celle des joueurs, on constate que les premiers ont pu se confronter à une réelle activité géométrique : reproduction, construction, description de figures planes. L'on peut penser que pour les concepteurs, ont eu lieu certaines acquisitions au cours de cette phase de conception.

Les joueurs sont *a priori* l'ensemble des élèves du cycle 3. Un premier intérêt pour ces élèves consiste à voir concentrés sur un tableau de jeu des exercices relevant de la géométrie plane dans deux champs principaux d'activités : construire et identifier. Cependant, si les élèves apprécient ce jeu par les nombreuses actions qu'ils ont à mener, l'activité mathématique elle-même est finalement réduite.

L'absence de lien entre activités de classe et jeu contribue à réduire les possibilités d'apprentissage. Soit les notions ne relèvent pas du niveau des élèves (CE2), soit elles n'ont pas fait l'objet d'activités construites lors de séances ordinaires dans les classes. Ceci a des conséquences sur la validation des réponses, les élèves enregistrant de nombreux termes sans que leur sens ne leur ait été enseigné.

Ces aspects permettent d'analyser le rôle de l'enseignante.

Le contrôle de la production des concepteurs en ce qui concerne le soin des figures construites, les formulations, l'orthographe semble avoir été effectué par l'enseignante. Il semble cependant qu'elle n'ait pas anticipé sur la phase de jeu, en limitant par exemple le nombre d'items nécessitant l'utilisation d'instruments de géométrie, ou en proposant des

feuilles de résultats pour faciliter la validation. Enfin, on peut relever la non-intervention de l'enseignante sur le choix de figures comme le trapèze rectangle ou l'octogone.

Si l'on considère le rôle de l'enseignante dans les phases de jeu, il consiste surtout à gérer des problèmes de comportement, à répondre aux sollicitations diverses des élèves mais non à contrôler que les élèves exécutent de manière appropriée les tâches mathématiques qui leur sont données dans le jeu.

Dans l'évaluation finale (juin 2000) j'ai proposée, l'exercice 2 décrit ci-dessous reprenait un item de ce jeu ou de ses variantes. Il montre que la présence régulière de ces jeux dans les ateliers, dans les conditions que j'ai décrites, ne pouvait pas suffire pour qu'il y ait acquisition des compétences

♦ Exercice 2. Entoure la réponse qui convient.

Je suis un polygone de 4 côtés. Qui suis-je ?

un triangle - un quadrilatère - un pentagone - un cube

Voici les résultats des élèves dans cet exercice . (en % de réussite)

Réponse attendue	CE2 28 él.	CM1 35 él.	CM2 27 él.
Ex .2	35.7%	48.6%	37%

Plus de la moitié des élèves échouent à identifier le quadrilatère comme polygone à 4 côtés alors même que la réussite aux items du jeu décrit précédemment supposait de savoir classer les figures dans la famille des quadrilatères. Si nous nous intéressons à leurs réponses, nous constatons que 41 élèves sur les 86 du cycle 3 ayant participé à l'évaluation donnent le cube comme réponse, et 17 élèves considèrent le pentagone comme polygone à 4 côtés.

erreurs	CE2A 14 él.	CE2B 14 él.	CM1A 17él ;	CM1B 18 él.	CM2A 13	CM2B 14	Total 86 él.
Cube	7	4	9	8	7	6	41
Pentagone	5	0	1	1	2	3	12
Triangle	1	2	2	0	0	0	4

L'évaluation spécifique aux élèves de CM permet de relever d'autres remarques..

Evaluation CM – Mai 99 - Géométrie

♦ Exercice 2.

- Je suis un triangle. J'ai 2 côtés de même longueur. Qui suis-je ?
.....
- Je suis un triangle. J'ai 3 côtés de même longueur. Qui suis-je ?
.....
- Je suis un triangle. Je possède un angle droit. Qui suis-je ?
.....

Rappelons que le jeu décrit a été conçu par des élèves de CM2. Si l'on constate dans le tableau des résultats un écart de réussite entre les classes de CM2 et celles de CM1 dans ce tableau, ce qui frappe, c'est la chute brutale des performances dans la reconnaissance du triangle équilatéral par les élèves des deux niveaux. Pour cette question, on trouve comme réponses triangle, triangle pentagone, parallélogramme, imperméable, - quadrilatéral, triangle rectangle, 'impairméral', quelconque, autant de réponses qui attestent la confusion née de la profusion de vocabulaire rencontré au cours des jeux.

		% de réussite	
Réponse attendue		CM1 34 élèves	CM2 23 élèves
Ex. 2	Triangle isocèle	44.1	60.9
	Triangle équilatéral	17,6	26.1
	Triangle rectangle	52.9	73.9

Ces erreurs montrent qu'il y a non-compréhension des critères de classement des figures planes, et qu'il n'y a pas eu d'apprentissage.

Le dispositif présenté nous a donné accès à la manière dont les enseignantes ont modifié les décisions initiales.

Ces modifications se caractérisent par exemple par l'abandon régulier de certaines décisions initiales au fur et à mesure de l'avancement du projet. Notons que les enseignantes ont semblé ne pas analyser même a posteriori l'effet de ces modifications sur les apprentissages visés. En effet il semble qu'elles ont massivement pensé que les élèves tiraient bénéfice de ces ateliers parce qu'elles ont confondu le processus en apparence vécu par les élèves et l'activité mathématique réelle de ces élèves. En effet, les élèves dans leur majorité semblaient apprécier ces moments de jeu.

J'ai ainsi commencé à envisager l'idée que les enseignantes semblaient vivre une contradiction entre une logique de l'innovation et celle des apprentissages, mais aussi entre une logique du relationnel et une logique des apprentissages, et que les premières semblaient prendre le pas sur la seconde.

Je vais maintenant présenter un deuxième résultat obtenu à l'aide du dispositif. Il montre que cette importance accordée aux aspects relationnels peut se retrouver dans les séances ordinaires à travers ce que j'ai désigné par l'expression « réussite immédiate des élèves ».

2 Mise en évidence de la primauté de la logique de la réussite immédiate sur celle des apprentissages

Dans la deuxième phase du dispositif, j'ai pu observer la classe de CE2-CM1 de Stéphanie avant d'avoir le point de vue de l'ensemble des enseignantes sur certains phénomènes observés dans les classes.

Afin d'illustrer ce que j'entends par réussite immédiate, je vais prendre appui sur la progression de Stéphanie sur la division euclidienne, ainsi que sur une séance d'évaluation observée dans sa classe en juin 2000.

Une simplification des tâches prescrites aux élèves

J'ai pu observer 4 séances sur la division euclidienne dans cette classe. Le tableau ci-dessous reprend les situations proposées aux élèves par Stéphanie lors de ces séances.

Date	Tâches proposées
11/01/00 au tableau	1. Un jeu de cartes comprend 56 cartes. 7 joueurs se les partagent. Combien chacun en reçoit-il ?
	2. J'ai 40 francs. Je partage cette somme entre 3 enfants. Combien chacun aura-t-il ?

	3. Rim a acheté 3 cassettes pour 72 F. Combien coûte une cassette ? 4. Marie a préparé 125 truffes. Elle les met dans des boîtes contenant 5 truffes. (pas de question car il n'y a plus de place au tableau.)	
18/01/00 au tableau	1. Mme N. a effectué des réparations sur sa R5. La facture s'élevait à 3012 F. Mme N a payé en 3 fois. Le montant sur le chèque était le même. Quel était ce montant ? 2. Roseline a acheté 6 chaises pour 672F. Combien coûtait une chaise ? 3. Les 824 passagers d'un TGV n'ont pas pu partir. (tempête). Combien de cars de 50 personnes a-t-il fallu pour les transporter ?	
8/02/00 au tableau	2. pour Sandra, Laura, et Joe. « Les 187 élèves de l'école avec 18 accompagnateurs partent en voyage ; combien de personnes partent en tout ? Combien faudra-t-il louer de cars s'il y a 55 places dans chaque car ? »	Pour les autres élèves : des écritures de la division euclidienne à compléter.
7/03/00 sur fiche	« Les 387 élèves de l'école partent en voyage de fin d'année. Il y aura 18 accompagnateurs. Combien faudra-t-il louer de cars s'il y a 55 places dans chacun d'eux ? »	

Comme le montre ce tableau, les premières situations relatives à la division euclidienne sont très simples, avec des nombres de petite taille. Les tâches progressent du simple au complexe à l'intérieur d'une séance, mais aussi d'une séance à l'autre. Le nombre d'énoncés diminue au fur et à mesure que la taille des nombres augmente, jusqu'au problème unique du 7 mars 2000. De même, on a des divisions avec reste nul, puis des divisions où le contexte nécessite d'ajouter un au quotient pour déterminer la réponse attendue. Le contexte des énoncés est souvent proche du quotidien (partage de 40 F entre 3 enfants, réparation de sa voiture par Stéphanie...).

L'observation et l'analyse des séances menées ont permis de repérer la manière dont Stéphanie procède pour limiter la confrontation éventuelle des élèves à toute difficulté.

Toutes les tâches prescrites ne sont pas effectuées par les élèves. Ainsi, dans les trois premières séances, les derniers énoncés comportant une taille de nombre plus élevée n'ont pas été résolus par les élèves, alors même qu'ils auraient permis l'utilisation de procédures plus élaborées. Stéphanie a arrêté la recherche dès les premières manifestations d'agitation ou d'incompréhension dans la classe.

Les dividendes de grande taille (3012, 672) sont associés à des diviseurs facilitant la recherche (3, 6). Dans le cas de situation complexe comme l'énoncé du 7 mars, Stéphanie

apporte un étayage consistant auprès des élèves, étayage au cours duquel des procédures, voire des solutions peuvent être suggérées aux élèves bloqués. Les séances se terminent systématiquement par une correction que j'ai caractérisée de publique, au cours de laquelle certains élèves donnent leur solution, et en cas d'erreur, Stéphanie elle-même apporte cette solution.

Enfin, les séances se terminent sans phase de synthèse permettant aux élèves d'identifier l'enjeu des situations proposées. Ainsi, l'écriture de la division euclidienne n'a quasiment jamais accompagné les solutions au tableau. Cet aspect est à relier au fait que parfois, le contexte comporte des risques d'éloignement de la notion visée.. Ainsi, la solution validée par Stéphanie dans le problème du partage a conduit à un quotient de 13 francs et trente-trois centimes, et à un reste de un centime.

La répétition des tâches caractérisée ici par la présence de contexte identique (voyage) avec un diviseur parfois identique (55 places) semble suggérer un retour sur ce qui a été vu au cours des séances précédentes. Or outre le fait que certaines de ces situations ne sont pas été résolues par les élèves, aucun retour n'est fait dans les séances observées sur ce qui a été vu, donnant ainsi l'impression de tâches morcelées, sans lien. Une conséquence en est que de nombreux élèves conservent des procédures primitives pouvant aller jusqu'au dessin de 387 croix pour représenter la situation des cars par exemple.

Cette simplification des tâches proposées aux élèves peut avoir lieu même dans des séances relatives à l'évaluation de leurs compétences, renforçant encore cette primauté de la réussite immédiate des élèves.

Exemple d'une séance d'évaluation

Cette séance d'évaluation finale a eu lieu dans la classe de Stéphanie au mois de juin 2000.

L'évaluation porte sur la numération et les techniques opératoires pour les deux classes (CE2 et CM1), certains exercices étant destinés uniquement aux élèves de CM1. Je présente la partie de cette évaluation qui fait intervenir des connaissances identiques pour les deux classes, les élèves ayant à déterminer des nombres à partir de leurs différentes expressions.

« Qui suis-je ? »

CE2 : 12 dizaines ; 34 dizaines ; 5dizaines et 3 centaines ; 4 centaines ; 5centaines et 13 dizaines ; 6 milliers ; 4 milliers 3 centaines ; 12 unités de mille, 8 centaines ; 9 centaines 10 dizaines ; 3 unités de millions ; 7 centaines de mille.

CM1 : 34 milliers et 2 centaines ; 4 unités de millions et 5 centaines de mille 3 dizaines et 56 centaines ; 6 unités de milliards ; 4 centaines de mille et 10 centaines.

Avant la distribution du travail aux élèves, Stéphanie s'est assurée à l'aide d'un exemple numérique (2478) que les élèves distinguaient bien le chiffre des unités, celui des dizaines, des centaines et des unités de mille. Une fois les fiches distribuées, Stéphanie a fait résoudre collectivement un deux exemples proches des expressions de la fiche (une centaine et quinze dizaines, puis 5 centaines). Les élèves devaient expliciter la procédure utilisée.

Au cours du travail individuel, Stéphanie a continué à aider particulièrement une élève de CM1 en grande difficulté. Elle lui a fourni la solution pour deux expressions, 6 milliers d'une part, puis 34 milliers et 2 centaines. Par une succession de questions-réponses, elle a essayé de lui indiquer la démarche à suivre. Mais en même temps, ces explications données à voix haute amenaient les autres élèves à se sentir concernés, à tenter de répondre à la place de l'élève aidé.. Les discours ainsi entendus pouvaient soit les aider, soit les gêner dans l'exécution des tâches prescrites. Enfin, Stéphanie a invité l'ensemble des élèves à prendre appui sur un tableau de numération qu'elle a construit au tableau., tout en rappelant comment on lit les nombres dans ce tableau.

A la fin du travail individuel, une correction collective a lieu sur les exercices résolus. Des élèves sont venus à tour de rôle corriger au tableau. Ceux qui n'ont pas bénéficié de l'aide pouvaient ainsi accéder aux réponses correctes. Stéphanie a enfin ramassé les copies des élèves, elles les a évaluées, et c'est cette évaluation qui a été ensuite rendue aux élèves.

J'ai pu accéder à une production d'élève de CM1 (cf. annexe). On ne peut pas savoir si les réponses correctes correspondent réellement à son travail ou s'il a profité de la correction au tableau. De plus, Stéphanie n'a pas signalé certaines erreurs de cette copie. Ainsi, l'élève répond 5 650 pour 5 dizaines et 3 centaines, au lieu de 350, 6 000 000 pour 6 milliers, 6 300 pour 4 milliers et 3 centaines. Des résultats sont absents. Dans l'exercice 2. l'élève ne répond qu' à une expression. Malgré les nombreuses erreurs, malgré ces non-réponses, l'élève reçoit un A.

Des élèves ainsi aidés massivement , dont on ne sait pas si ils ont pris en compte les éléments de correction se voient attribuer cette bonne note. C'est ce que j'appelle réussite immédiate car les élèves quittent la classe en ayant l'impression qu'ils ont réussi le travail qui leur était proposé, alors que tout laisse à penser qu'il y a de fortes chances que pour un bon nombre d'entre eux il n'y a pas eu acquisition. On peut avoir des doutes quant aux compétences ainsi évaluées car il est difficile de faire la part entre ce qui est propre aux élèves et ce qu'ils réussissent grâce aux interventions de la maîtresse tout au long de la séance.

Comment procèdent les autres enseignantes ?

Lors des réunions de travail avec les enseignantes, j'ai tenté de comprendre comment elles justifiaient certains de leurs choix.

Les enseignantes expliquent que leurs élèves sont incapables d'affronter seuls certaines tâches. Ils s'agitent, demandent de l'aide, ce qui rend difficile la gestion des séances. Favoriser à tout prix leur réussite permettrait ainsi de contrôler leur frustration et de leur renvoyer une image de soi positive, car comme « on leur dit souvent qu'ils ne sont pas intelligents », disent les enseignantes, sans préciser l'auteur de ce discours.

Il se crée ainsi un cercle vicieux. les élèves s'habituent à réussir, sans toutefois avoir affronté un ensemble d'obstacles dont le franchissement est considéré incontournable pour la construction des connaissances relatives aux notions étudiées. Face à une tâche ultérieure faisant intervenir ces connaissances, ils échouent de nouveau et les enseignantes mettent de nouveau en œuvre les mêmes stratégies d'étayage important pour que les élèves réussissent. Mais plus le temps passe, moins les enfants investissent sur le plan cognitif les activités proposées. Ils ont de plus en plus de mal à donner un sens à ces activités.

Il m'a semblé que cette réussite immédiate recherchée par les enseignantes pouvait être en partie liée au fait qu'elles ne considéraient l'activité de l'élève que du point de vue du résultat juste ou faux, sans tenir compte du processus conduisant à ce résultat.

J'ai ainsi profité des séances de formation que permettait le dispositif pour tenter d'amener les enseignantes à changer le regard qu'elles portaient sur l'activité des élèves.

3 Exemples d'effets en cascade d'une modification des pratiques sur les enseignantes

Dans la classe de CE2-CM1 de Stéphanie, même à partir de situations simples, les élèves pouvaient proposer des procédures diverses auxquelles l'enseignante semblait accorder relativement peu d'importance. Notamment elle ne menait pas de mise en commun, elle ne suscitait pas de débat sur ces procédures, les phases collectives ne servant qu'à la correction des exercices.

Au cours des réunions de travail avec les enseignantes, j'ai pu repérer qu'elles semblaient assez démunies pour analyser les procédures des élèves et évaluaient globalement l'activité de l'élève en terme de juste ou faux.

Exemples d'éléments de formation sur la résolution des problèmes

Il s'agissait de faire accepter l'idée que la résolution des problèmes vise à développer chez les élèves un comportement qu'on pourrait qualifier de chercheur, et que de ce point de vue, les procédures des élèves, correspondant à la trace de leur activité de recherche, sont tout aussi importantes que les résultats proprement dits.

Ainsi, comme les enseignantes privilégiaient des nombres de petite taille dans les énoncés qu'elles proposaient, il m'a semblé opportun de leur suggérer de faire résoudre oralement des problèmes aux élèves pour les aider à se construire une représentation mentale des situations évoquées, à développer des compétences dans le domaine de l'anticipation et de la mémorisation. Pour les aider à se constituer cette banque d'énoncés, je leur ai fourni les typologies proposées par G. Vergnaud sur les problèmes additifs et multiplicatifs. Les enseignantes ont réalisé que même pour les situations familières, la taille des nombres ne suffisait pas pour caractériser la complexité d'un problème. Par ailleurs, le nécessaire passage à l'écrit a permis de montrer le rôle des variables didactiques usuelles. Je leur ai suggéré d'enrichir peu à peu les problèmes, ceci en gérant diverses variables telles que la taille des nombres, l'ordre d'apparition des données, l'absence ou non de questions intermédiaires. A cet effet, nous avons procédé à un inventaire des procédures mises en oeuvre dans la division euclidienne et la soustraction. Ces éléments de formation ont eu un certain effet sur les pratiques des enseignantes, notamment sur celle de Stéphanie.

Prise en compte de la formation par les enseignantes

A côté des situations simples qu'elle continuait à proposer, Stéphanie proposait des situations plus riches. Sur les fiches, les élèves disposaient d'un cadre pour leurs essais ainsi qu'une ligne pour la formulation de la phrase-réponse. Les discours des enseignantes au cours des réunions de travail ont révélé que cet aspect méthodologique était désormais pris en compte par toutes. Ainsi elles décrivaient avec plus de détail les stratégies des élèves. Mais simultanément elles se posaient d'autres questions.

Les effets d'une modification de leurs pratiques sur les élèves et sur les enseignantes.

Ces questions concernaient certaines compétences non encore acquises par les élèves comme formuler une réponse, laisser apparents les traces de sa recherche. Elles semblaient étonnées que les élèves fassent de nombreux essais dans le cadre prévu, les effacent ou écrivent de plus en plus petit. Elles constataient que d'autres éprouvaient des difficultés à formuler une phrase réponse alors qu'ils avaient trouvé le résultat. Finalement, elles se demandaient si un cahier du jour pouvait comporter des ratures. Certaines proposaient des feuilles de brouillon aux élèves en leur demandant de ne reporter leurs essais qu'une fois le problème résolu. Mais cette organisation soulevait d'autres problèmes. Par exemple certains élèves peu sûrs de leur travail hésitaient à reporter leurs essais et leur réponse sur le cahier du jour.

Ainsi avec de nouvelles exigences vis à vis des élèves, les enseignantes constataient que certaines compétences relevaient d'un apprentissage et nécessitaient aussi du temps pour se construire. Ces nouvelles questions semblent indiquer une certaine prise de conscience des compétences à développer chez les élèves à travers la résolution des problèmes.

Mais en même temps, on peut se demander si le coût de ce changement sur le rôle des enseignantes en les déstabilisent ainsi, ne risque pas à plus long terme de provoquer un retour aux pratiques anciennes. Car, par exemple, modifier simplement le rapport à l'écrit des élèves induit une remise en cause de l'ensemble des exigences qu'elles se définissent. Par ailleurs, les discours des enseignantes évoquent régulièrement la nécessité de tenir compte du contexte, et des éventuelles difficultés comportementales et cognitives de leurs élèves.

Finalement, à travers leurs choix et la manière dont elles les argumentent, il est possible d'établir une relation entre les contraintes sociales, telles qu'elles sont perçues par les

enseignantes, les contraintes institutionnelles, à travers ce que les enseignantes en font, et les choix qu'elles effectuent.

IV. Une pédagogie centrée sur le passe des élèves, adaptée aux représentations sur les élèves et justifiable par les injonctions institutionnelles

Le comportement entre inhibition et violence des élèves et leurs conditions de vie parfois défavorables voire contradictoires avec leur métier d'élèves mettent les enseignantes dans l'obligation de prendre en compte leur rôle d'éducateur. Ce rôle est par ailleurs régulièrement interpellé dans divers textes ministériels. D'autres injonctions institutionnelles insistent sur des actions à mettre en œuvre pour améliorer les apprentissages de leurs élèves comme c'est le cas pour l'innovation, la pédagogie du projet, la différenciation, etc.

La manière dont les enseignantes gèrent les contraintes sociales et institutionnelles permet d'analyser leurs pratiques du point de vue des composantes personnelles, sociales et institutionnelles

1. Une pédagogie centrée sur le passe de l'élève

Les enseignantes expliquent constamment qu'elles ont reçu une formation mais qu'elles s'adaptent au terrain. Elles revendiquent une forme de légitimité acquise de l'expérience du contexte dans lequel elles exercent leur métier, qu'il s'agisse de ce qu'il faut à leurs élèves en terme de contenus mathématiques, de formes de travail, voire de langage.

Les descriptions qu'elles font de leurs élèves m'ont amenée à désigner ces derniers par l'expression « élèves de ZEP ». Ainsi, pour les enseignantes « l'élève de ZEP » cumule de trop nombreuses lacunes, oublie tout ce qui est appris. Son temps de travail est court, ce qui favorise son échec dans les évaluations nationales dont le temps de passation est fixé d'avance. Son potentiel de développement est limité. ses valeurs culturelles ne sont pas reconnues par l'institution. Comme les manuels représentent d'une certaine manière l'institution, les situations qu'ils proposent ne conviennent pas aux élèves en particulier parce qu'elles sortent de leur vécu. « L'élève de ZEP » a finalement un comportement imprévisible, il faut régulièrement contrôler sa frustration.

Pour cet élève aux connaissances lacunaires, les enseignantes appliquent ce que j'ai désigné par l'expression « pédagogie centrée sur le passé de l'élève, dans une perspective de remédiation ». Tout se passe finalement comme si les enseignantes, même face à des connaissances nouvelles anticipaient sur les erreurs et oublis futurs des élèves pour envisager son enseignement. Partant de là, les enseignantes détournent alors les ressources institutionnelles pour rationaliser leurs pratiques face à leur traduction des contraintes sociales.

2. Des choix réducteurs

Le recours à l'innovation et la pédagogie du projet s'avèrent un moyen de remédier aux difficultés cognitives et comportementales des élèves, en vue de leur socialisation. D'autres injonctions institutionnelles portent sur le langage, l'individualisation et la différenciation des apprentissages, Il est possible de montrer comment les composantes sociales se déclinent au niveau cognitif, et comment une analyse des pratiques tenant compte des composantes cognitive et médiative fait apparaître le fait que les enseignantes font comme un détournement des injonctions institutionnelles.

Les élèves d'une classe de niveau n travaillent sur des tâches simples, isolées, bien souvent de niveau de classe $n-1$ voire $n-2$.

L'observation longue des classes, accompagnée de l'étude des cahiers d'élèves m'ont permis de repérer le fait que les enseignantes créent de manière quasi systématique les situations qu'elles proposent à leurs élèves. Tout se passe comme si elles faisaient un inventaire a priori personnel des catégories qu'il faut avoir pour penser et agir comme l'élève de ZEP. Par exemple, les énoncés de problèmes ont pour acteurs soit des élèves de l'école, soit leurs collègues, soit elles-mêmes. Parfois aussi, les enseignantes transforment linguistiquement et même par suite mathématiquement des situations de manuels, ce qui amène les élèves à résoudre les problèmes selon la logique du quotidien, à conserver des procédures par le dessin, à se priver de certaines connaissances mathématiques. Les enseignantes aménagent ainsi les tâches de manière à réduire la responsabilité de l'élève et de manière à éliminer les obstacles comme je l'ai montré notamment à travers l'exemple sur la séance de l'évaluation.

D'une certaine manière les enseignantes profitent du droit à l'innovation. Cette innovation peut aller jusqu'au décalage des parties du programme puisque dans l'école, l'étude de la division commence au CM1 et non en CE2 comme conseillé dans les Instructions Officielles, celle de la multiplication peut commencer en CE2 au lieu du CE1.

3. Les aides proposées s'avèrent faiblement vecteurs d'apprentissage

Toutes les enseignantes de l'école pratiquent une individualisation des apprentissages. Elles expliquent qu'elles peuvent ainsi intervenir à juste titre auprès des élèves en difficulté. Effectivement on constate un étayage consistant au cours du travail individuel.

Rappelons que l'étayage est lié au concept de ZPD de Vygotski et que Bruner indique plusieurs tâches pour le tuteur lors de cet étayage. Je retiens en particulier, que le tuteur doit laisser l'élève mettre au point les routines constitutives auxquelles il peut parvenir. Il doit le maintenir dans le « champ » de la tâche, de multiples façons, et lui procurer une information sur l'écart qui subsiste entre sa production et ce qui peut être considéré comme correct. Mais dans les classes observées, cet étayage peut ne pas toujours profiter à tous les élèves. En effet au cours des échanges duels, les enseignantes posent des questions auxquelles elles finissent par répondre, elles exécutent éventuellement la tâche à la place de l'élève. .

Les enseignantes appliquent aussi une forme de différenciation, permettant malgré tout à certains élèves d'avoir accès à des tâches plus complexes, les autres élèves n'étant pas obligés de les effectuer. Ainsi, dans certaines classes, seuls quelques élèves ont droit à des problèmes à résoudre, pendant que l'enseignante aide les autres à améliorer leurs compétences sur les techniques opératoires

Ainsi, c'est cette individualisation et cette différenciation nécessaires qui sont invoquées par les enseignantes pour expliquer l'absence de phase de synthèse et de structuration des connaissances.

Finalement, il y a différents moyens d'apprendre dans ces classes.

- Les élèves peuvent apprendre au cours de l'exécution de micro-tâches qui leur sont proposées.
- Une deuxième source d'apprentissage se produit quand la maîtresse leur fournit des explications en individuel.
- Une troisième source est l'écoute des explications de la maîtresse à un autre camarade.
- Une dernière source se trouve dans la coopération spontanée entre élèves, quand les élèves écoutent les explications d'un camarade. Au cours de cette coopération certaines connaissances se diffusent, mais cette diffusion n'est pas contrôlée par les enseignantes.

D'une certaine manière, tout ceci semble montrer que c'est essentiellement par de l'oral que les élèves accèdent à bon nombre de connaissances. Mais cet oral s'avère particulier. On a soit

un oral de type maître vers élève, soit un oral de type élève-élève parfois non contrôlé, mais peu d'oral de type élève vers maître. Il n'y a pas une co-construction d'un oral qui serait un oral permettant un écrit de type aide-mémoire. En effet, les écrits que produisent les élèves ne servent pas à des phases de formulation de leurs procédures par exemple, puisqu'en fait il ne leur est quasiment jamais demandé d'expliquer comment ils ont procédé, mais de donner les résultats. Ces procédures oralisées ne sont pas prises en compte pour un écrit collectif de type aide-mémoire.

Les phases collectives ne servent généralement qu'aux corrections. J'ai caractérisé ces phases apparemment collectives de débat public au sens de Vion, c'est à dire au sens où seuls quelques élèves y participent et tous avec pour seul interlocuteur le maître

4. Les conceptions gagnent sur ce qui est proposé

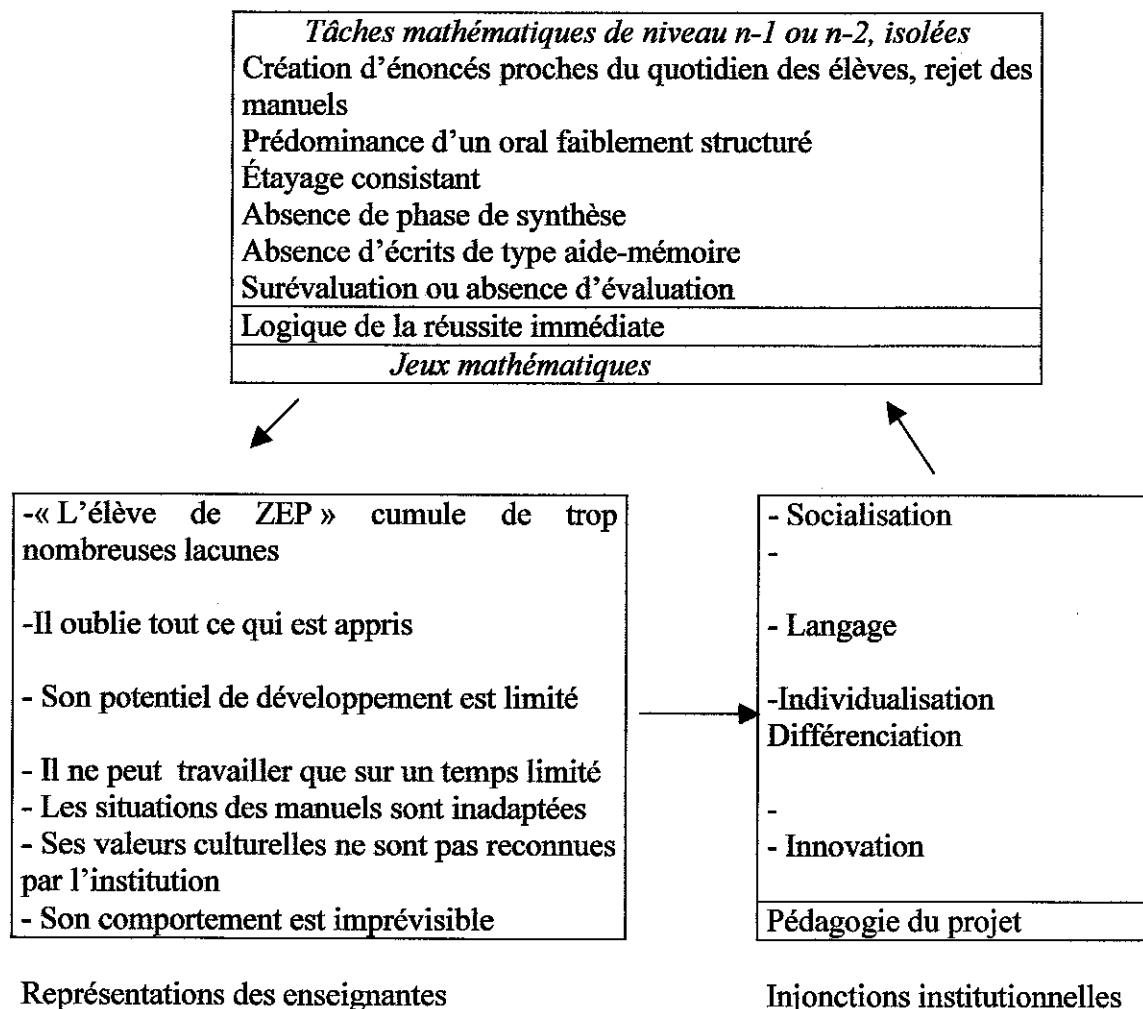
D'une certaine manière les conceptions des enseignantes contribuent à limiter l'effet de ce qui est proposé. En effet, même en ayant recours à la remédiation, il manque pour rendre cette remédiation efficace, le point essentiel qui est le repérage précis des erreurs sur lesquels portera la remédiation.

Même en mettant en place l'individualisation ou la différenciation, les enseignantes ne se donnent pas suffisamment de moyens par exemple pour pouvoir évaluer régulièrement les élèves et différencier les tâches, et rendre l'individualisation efficace ; même en ayant recours à la nécessité de travailler sur le langage, les enseignantes détournent cette injonction institutionnelle par les pratiques langagières qu'elles privilégient. En ce qui concerne l'étayage, c'est aussi sur de nombreux points que l'on observe des dysfonctionnements. Tout cela reste en liaison avec leurs représentations sur les élèves.

5. Les choix sont justifiés par les injonctions institutionnelles

Je pourrai indiquer un cercle vicieux dans lequel se trouvent finalement entraînées les enseignantes. Pour illustrer ce schéma, je dirais que d'une certaine manière, les représentations des enseignantes sur les élèves, sur les mathématiques qu'il faut enseigner à ces élèves, sur la manière dont il faut enseigner à ces élèves, sur le langage qui leur convient les poussent à aller rechercher dans le réservoir des injonctions institutionnelles des ressources leur permettant d'effectuer des choix. Ces choix dont j'ai exposé certains se retrouvent dans le tableau ci-dessous.

Les choix des enseignantes



Cependant ces choix s'avèrent finalement peu vecteurs d'apprentissage. Les élèves vont de nouveau échouer., ce qui va renforcer les représentations des enseignantes, qui de nouveau vont essayer d'aller rechercher des ressources dans les injonctions institutionnelles.

Conclusion

A travers cet article, j'ai voulu surtout mettre en évidence un certains résultats qui me paraissent essentiels pour illustrer le fait que certaines pratiques risquent d'hypothéquer les chances d'apprentissage de nombreux élèves, et ce d'autant plus que dans mon travail, j'ai montré que ces pratiques sont stables.

Le dispositif que j'ai utilisé m'a permis de mettre en évidence le réel investissement des enseignantes dans la recherche de solutions visant à améliorer les apprentissages des élèves aussi bien sur le plan comportemental que cognitif.

En même temps, tout se passe comme si leurs propres représentations sur l'élève de ZEP pesaient sur les solutions qu'elles inventent, ce qui, in fine, contribue à limiter l'effet des dispositifs qu'elles mettent en place. On peut penser que dans certaines classes dites ordinaires, des maîtres peuvent avoir ce type de fonctionnement mais pas avec tous les élèves. Cependant si nous tenons compte des rapports au savoir, à l'école, aux disciplines qui semblent caractériser les élèves des milieux populaires, il me semble que les effets de ces pratiques comportent des risques plus importants que dans les classes ordinaires, compte tenu des écarts signalés dans de nombreuses recherches entre les valeurs de l'école et celles de certaines familles des milieux socio-culturels défavorisés.

Bibliographie

BUTLEN D., PEZARD M., MASSELOT P., PELTIER M-L., NGONO B., DUBUT A. (2002). Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire : cohérence et contradictions. Une première catégorisation. INRP, Paris.

NGONO B. (2003) Étude des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP, effets éventuels de ces pratiques sur les apprentissages, doctorat de didactique des mathématiques, Université Paris VII, IREM Paris 7

PELTIER BARBIER M-L.(sous la direction de)(2004) *Dur d'enseigner en ZEP.*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble

PELTIER-BARBIER M-L., NGONO B. (2003) Modifier ses pratiques, c'est difficile ! Effets d'une formation sous forme d'accompagnement sur les pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques dans les classes de REP, *Recherche et Formation* n° 44, INRP, Paris.

ROBERT A. ROGALSKI J. Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. (2002) *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*3.

ROBERT A., (2001), Recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 21.1.2.

ROGALSKI J. (1999) : Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant.
Pp. 45-66. *Actes du XXVIème colloque inter-IREM de la COPIRELEM*. IREM de Limoges

Annexe

La réussite immédiate : exemple d'une production d'élève

(A)

Numération

1) Qui suis -je ?

12 dizaines : 120	4 milliers 3 centaines : 4300
34 dizaines : 340	12 unités de milles : 12000
5 dizaines 3 centaines : 5650	8 centaines : 800
4 centaines : 400	9 centaines 10 dizaines : 9100
5 centaines et 13 dizaines : 630	3 unités de millions : 3000000
6 milliers : 6000000	7 centaines de mille : 700000

CM1

* 2) 34 milliers et 2 centaines : 34200

4 unités de millions et 5 centaines de mille :

3 dizaines et 56 centaines :

6 unités de milliards :

4 centaines de mille et 10 centaines :

Etude du curriculum de mathématiques entre changements et résistances. Liens entre écologie et économie didactique.

Teresa Assude

UMR ADEF, IUFM d'Aix-Marseille

1 - Positions et cheminements

La didactique des mathématiques étudie les processus de circulation et de diffusion des savoirs et pratiques mathématiques. Le curriculum de mathématiques est un moyen social de penser et d'organiser cette diffusion des savoirs : qu'étudie-t-on ? Comment étudie-t-on ? sont deux des questions essentielles auxquelles la conception et le développement d'un curriculum doivent répondre.

Le travail que j'ai mené depuis une dizaine d'années a comme fil directeur l'étude du curriculum défini comme l'ensemble de ce qu'on étudie, les formes d'étude, et les réseaux de savoir constitués pour l'étude à un moment donné dans une institution donnée. Mon travail a consisté à étudier le curriculum officiel, celui des programmes et des textes officiels mais aussi le curriculum réel et le curriculum « caché » à travers les pratiques qu'on peut observer dans les classes ou inférer de l'étude des manuels ou autres documents.

Le problème de départ qui est déjà ancien (Chevallard 1985) est celui de l'origine et de la référence du savoir existant dans un système d'enseignement, problème qui a été abordé en didactique des mathématiques à partir de la notion de transposition didactique. Mon travail s'appuie sur ce cadre théorique ainsi que sur ses développements dans deux voies complémentaires : l'approche écologique et l'approche anthropologique. Tout en me situant dans ce cadre théorique, j'ai pu utiliser d'autres approches théoriques notamment la « triple approche » ou la théorie des situations didactiques. Ce métissage « théorique » est l'un des fondements de ma pratique de recherche et m'a permis d'imbriquer une dimension institutionnelle (étude du curriculum en tant que système par le biais des textes officiels), et une dimension personnelle (rôle des acteurs) dans l'étude du curriculum des mathématiques.

Le croisement de ces deux approches, l'approche écologique en tant que « manière de problématiser le réel didactique » et l'approche anthropologique par le biais de la notion de

praxéologie, m'a permis de mettre en œuvre une méthodologie de questionnement et de recherche à plusieurs niveaux :

- le niveau de l'existence par l'établissement d'inventaires : d'habitats, de niches, de praxéologies ;
- le niveau des réseaux : structurels ou fonctionnels. Ces réseaux permettent de voir les différents contextes dans lesquels les objets vivent et comment ils y vivent ;
- le niveau temporel qui permet de voir les évolutions, les dynamiques sur le long terme.

Cette méthodologie qui est justifiée théoriquement a montré sa pertinence et son efficacité pour mettre en évidence des faits et des phénomènes didactiques. En outre, cette mise en œuvre a permis de questionner et a mis à l'épreuve la théorie elle-même. Par exemple, la seule référence savante est insuffisante pour analyser les différents facteurs d'émergence d'un dispositif comme les travaux pratiques et d'autres références doivent être convoquées : la théorie doit pouvoir identifier ces références.

J'ai structuré mon travail d'analyse en trois plans : le premier plan est celui des faits et des observations, le deuxième celui des phénomènes et des explications et le troisième plan est celui des interprétations ou des catégories interprétatives qui permettent de regarder à travers les phénomènes spécifiques ce qu'ils peuvent comporter de phénomènes génériques. Je vais présenter quelques exemples de mise à l'œuvre de cette méthodologie et de ces trois plans d'analyse.

2 - Le temps comme variable ou la longue durée

Les questions auxquelles mes travaux répondent peuvent être posées d'une manière générale telles que : pourquoi un objet est-il présent ? Pourquoi tel autre est-il absent ? Quelles sont les conditions de possibilité et de fonctionnement d'un certain objet de savoir ou d'une forme d'étude ? Ces questions générales ont été déclinées dans les questions spécifiques suivantes : pourquoi l'arithmétique a-t-elle disparu des programmes de l'enseignement secondaire et a-t-elle continué à vivre dans la formation des professeurs d'école ? Quel est le statut actuel de l'objet « racine carrée » au Collège ? Quels sont les facteurs qui ont permis l'émergence du dispositif « travaux pratiques » au Collège et pourquoi a-t-il disparu des programmes ? A-t-il vraiment disparu des pratiques actuelles dans l'enseignement au Collège ? Quelles sont les conditions et les contraintes de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement primaire ? Quelle a été l'évolution de

l'enseignement des inéquations pendant le XX^{ème} siècle ? Comment se concilient la tradition et l'innovation ?

Ces questions montrent une variété dans les objets de savoir étudiés (la racine carrée, les inéquations, l'arithmétique ou la géométrie) mais aussi dans les dispositifs d'étude (les travaux pratiques au Collège, des dispositifs intégrant des nouvelles technologies). Les objets de savoir et les formes d'étude sont ici des analyseurs du curriculum, et à partir de la spécificité des faits et des phénomènes, des phénomènes génériques ont pu être dégagés. Lorsqu'on observe le curriculum à partir de la racine carrée au Collège, un fait apparaît qui est l'existence d'un flou institutionnel autour de cet objet : nombre, opération, fonction ? Comment peut-on expliquer ce flou ? Ce flou est une conséquence d'un phénomène d'arrêt de la transposition didactique car la racine carrée a cessé d'être la cinquième opération de l'arithmétique et elle n'a pas pu se stabiliser en tant que fonction. Par contre, la vie de l'objet « inéquation » qui est aussi présent dans l'enseignement au Collège pendant le XX^{ème} siècle a évolué différemment dans le cadre de plusieurs contextes : d'un contexte équationnel à un contexte « fonctionnel et structurel », puis à un contexte actuel empirique et de modélisation. Dans ces contextes, j'ai observé une variété de types de tâches et de techniques et cette existence peut être expliquée par un phénomène d'expansion et de réduction des buts et des moyens présents dans l'enseignement.

D'autres phénomènes ont été dégagés dans mes travaux comme le primat des besoins théorico-professionnels qui permet d'expliquer pourquoi l'arithmétique (dans son versant « théorie des nombres ») n'a pas disparu de la formation des maîtres tout en ayant disparu de l'enseignement au Collège et au Lycée. Ou encore la « quasi disparition » des travaux pratiques attendu qu'ils se naturalisent en une forme d'étude qui met en avant la notion d'activité, ou la « juste distance » entre l'ancien et le nouveau comme condition d'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire.

Voyons rapidement l'exemple des travaux pratiques au Collège. Cette étude nous intéressait car elle permettait d'analyser le curriculum à partir d'une forme d'étude et non d'un objet ou domaine de savoir en posant ainsi de nouveaux problèmes, notamment celui des références. Quelles références doit-on prendre en compte pour penser le problème de la transposition didactique des formes d'étude ? Des références savantes mathématiques, oui mais pas seulement : on doit penser à d'autres pratiques sociales et à d'autres domaines notamment philosophiques ou pédagogiques.

Les faits sont les suivants : les « travaux pratiques » en tant que dispositif d'étude sont apparus officiellement en 1957, et ils ont disparu explicitement dans les textes officiels pendant la réforme de 1977. Ils ont eu une « vie institutionnelle » pendant une vingtaine d'années. Je vais préciser les raisons qui ont permis l'émergence de ce dispositif, et voir quelles sont les conséquences de l'oubli de certaines de ces raisons dans la « quasi disparition » de ce dispositif.

Pour qu'un dispositif d'étude puisse émerger et vivre dans une institution, il est nécessaire qu'il remplisse un certain nombre de fonctions (sociales, didactiques, épistémologiques ou autres) et qu'il soit porteur d'un certain nombre de légitimités (épistémologiques, cognitives, sociales,...) et d'une certaine pertinence (utilité sociale ou didactique, utilité culturelle ou éducative,...). Mais ces conditions ne sont pas forcément suffisantes pour que le dispositif perdure vraiment dans l'institution : des conditions liées à l'implémentation dans les classes doivent être vérifiées ainsi que des moyens techniques de mise en œuvre. La mise à l'épreuve dans la classe et sur le long terme va être déterminante pour la vie et la stabilité d'un dispositif.

Les travaux pratiques apparaissent comme un moyen, un dispositif qui permet de changer l'enseignement des mathématiques. Pourquoi ce type de dispositif répond-il à ces besoins ?

Une première fonction des TP est *sociale* : il s'agit d'inciter les élèves à suivre des études scientifiques pour satisfaire un besoin social, économique et scientifique : combler le manque de scientifiques, de techniciens, d'ingénieurs. Or la question du comment inciter les élèves se pose car d'une part l'enseignement des sciences et des mathématiques a une part minime dans l'enseignement en général, d'autre part l'enseignement des mathématiques est considéré socialement comme très dogmatique.

Une deuxième fonction des TP est *éducative*. L'influence de l'évolution de la société sur les conditions de l'enseignement doit être prise en compte. Les méthodes doivent être révisées pour se mettre en conformité avec les buts éducatifs de l'école : préparer les jeunes à vivre dans la société actuelle, à comprendre et éventuellement à dominer les grands problèmes de l'actualité. Ces problèmes sont bien ceux d'une société où les sciences et les technologies ont une part importante et non ceux qui régissaient une société dans laquelle le modèle de l'« homme » était celui des humanités classiques. Comme le soulignent les Instructions du 12 août 1957 :

“ L'intensité du mouvement scientifique contemporain, l'extraordinaire développement et la rapide évolution des techniques ne peuvent manquer d'avoir une influence sur les conditions mêmes de notre enseignement ; car, s'il ne peut être question de modifier l'essence et la nature des éléments dont la présentation méthodique est la mission de nos professeurs, il n'en reste pas moins que les moyens d'accès aux notions de base, ainsi que l'apprentissage de leur mise en œuvre, peuvent et doivent être révisés, en essayant de les mettre en harmonie avec le rythme de la vie moderne, puisqu'il s'agit pour nous de préparer les jeunes à comprendre, et, si possible, à dominer les grands problèmes qui se poseront à eux dans un très proche avenir. ”

Or les moyens qui sont ensuite précisés trouvent leur expression dans le dispositif TP : trouver de nouvelles formes d'étude à partir de l'observation et de l'expérience pour venir ensuite à l'abstraction et aux formes logiques de la pensée :

“ C'est pourquoi le libellé des nouveaux programmes de Sixième et de Cinquième comporte une rubrique “ travaux pratiques ” ; on marque par là que cet enseignement d'initiation ne doit point se borner à une simple présentation théorique (même active, même vivante) des notions énumérées dans les divers paragraphes : chaque acquisition nouvelle, qu'il s'agisse d'une définition ou d'une propriété, doit être précédée, ou accompagnée, d'une prise de contact avec un fait, ou un événement réel, ou réalisable, ou observable. ”

Dans cette nouvelle forme d'étude on apprendra à l'élève à regarder, à réfléchir, à observer, à expérimenter, à réaliser des tracés, à procéder à des comparaisons, à des mesures, à vérifier, à constater des relations numériques mais “ il va de soi que l'interprétation de faits ainsi obtenus “ expérimentalement ” devra toujours faire ressortir leur caractère particulier et restreint qui n'autorise pas la généralisation, mais qui peut suggérer ou orienter une recherche. ”

Ces deux fonctions prennent appui sur d'autres fonctions, notamment épistémologiques et pédagogiques. Les travaux pratiques de mathématiques ont une forte légitimité épistémologique car ils sont fondés sur des arguments relatifs à la nature du travail mathématique (les mathématiques comme science expérimentale), arguments avancés par plusieurs acteurs – mathématiciens, enseignants – et par des injonctions institutionnelles pour affirmer cette légitimité (les programmes de 1957). Les méthodes actives ont une forte pertinence sociale et culturelle : “ à science vivante, enseignement neuf ”. Selon les textes officiels, la mise en œuvre des T.P. ouvre la possibilité de faire travailler les élèves au plus proche de ce qu'est la nature du travail mathématique en suivant les préceptes d'une

pédagogie de l'action : les élèves agissent, observent, induisent des lois, généralisent, arrivent à des notions abstraites qui ensuite peuvent être appliquées.

L'imbrication des mathématiques comme science expérimentale et des méthodes actives est le fondement même de l'argumentaire pour la mise en œuvre des travaux pratiques à partir de la classe de sixième. Mais d'autres facteurs sont aussi évoqués comme les facteurs d'ordre cognitif ou des facteurs liés au contexte international.

Cette « petite réforme », légitimée par la conjonction de plusieurs facteurs, présente d'autre part l'intérêt d'être très économique :

- l'organisation des TP pour toutes les classes de sixième et ensuite de cinquième est immédiate avec des coûts minimes ;
- les programmes n'ont pas besoin de changer, seules les méthodes changent ;
- l'institution témoigne par là de sa capacité à répondre efficacement à des besoins urgents de la société.

L'économie de cette " petite réforme " est aussi accompagnée de certaines conditions matérielles qui ne sont pas négligeables notamment l'augmentation d'une heure de l'horaire de mathématiques. Cette heure était revendiquée par l'APMEP depuis quelques années mais comme elle a été prise à l'enseignement du latin, cela a provoqué beaucoup de résistances dans le camp des défenseurs des " humanités classiques ".

Les T.P., leurs objectifs et leur implémentation, ouvrent la voie à un changement des organisations didactiques (au sens de Chevallard) car ils permettent non seulement de faire travailler les élèves au plus proche de ce qu'est la nature du travail mathématique (selon les textes officiels) mais aussi de suivre les préceptes d'une pédagogie de l'action : l'enseignement ne doit plus être dogmatique mais il doit organiser la rencontre personnelle de l'élève avec le réel et la mathématisation.

Les difficultés d'une telle mise en œuvre ne sont pas niées. Les professeurs disent qu'ils ne savent pas quoi faire dans les séances de travaux pratiques et l'une des conditions d'implémentation est celle de trouver quoi faire faire aux élèves : trouver des organisations didactiques, trouver de nouvelles formes d'étude. Or comme nous l'avons dit, les professeurs ont utilisé ce qu'ils savaient déjà faire (au moins certains d'entre eux), c'est-à-dire ont mis en œuvre des dispositifs de travail dirigé qui insistent sur les méthodes actives et l'activité de l'élève. En mettant l'accent sur les méthodes actives, et en donnant une importance aux facteurs cognitifs (les travaux de Piaget sont pris en compte explicitement à partir de la réforme des mathématiques modernes) les travaux pratiques se sont naturalisés « partiellement » par le biais de la notion d'activité. L'évolution des TP se fait par le

déplacement de l'activité de l'élève à la notion d'activité qui devient un noyau de l'organisation didactique de l'enseignement au collège. Cette notion est partout présente : activités de découverte, activités préparatoires à la découverte d'un concept, activités de réinvestissement, etc. Nous voyons dans ce passage un changement dans la manière d'organiser l'enseignement : l'organisation didactique n'est plus « cours plus exercices » mais elle est actuellement du type « activités plus synthèses plus exercices ». De ce fait quand les TP disparaissent dans les textes officiels, il s'agit en réalité d'une « quasi-disparition », c'est-à-dire qu'ils ne sont plus nommés en tant que dispositif d'étude mais qu'ils sont à l'origine de l'organisation didactique actuelle où la notion d'activité est prépondérante.

Or cette évolution ne va pas se faire sans perte. La mise à l'épreuve des TP dans les classes et sur le long terme montre que les raisons d'être de ce dispositif, notamment des raisons épistémologiques et des raisons sociales, n'ont pas résisté aux changements de programmes qui ont mis l'accent plutôt sur des raisons pédagogiques (l'action de l'élève) et des raisons cognitives (l'importance de l'activité de l'élève). La « quasi-disparition » des TP des programmes s'est faite par une naturalisation de la composante pédagogique et cognitive de ce dispositif : l'accent va être mis plus sur l'activité de l'élève que sur la nature de l'activité mathématique.

Nous interprétons les résultats d'un questionnaire donné à des jeunes enseignants par Suzette Rousset-Bert (2001) à propos de ce qu'ils pensaient des activités, comme un indice de cette « quasi disparition » des TP et de ce changement « d'état d'esprit ». Elle affirme que “ Les premières analyses des réponses données par les jeunes enseignants nous montrent que le choix de proposer aux élèves des activités est justifié par des arguments tels que le rejet du cours magistral, la motivation des élèves, la nécessité de faire du concret plus que par la prise en compte des conditions d'apprentissage des connaissances scientifiques. ” Remarquons que ces résultats se rapprochent de certaines raisons qui ont motivé l'introduction des travaux pratiques mais que la réflexion épistémologique est absente.

Notre hypothèse explicative en ce qui concerne les TP au Collège est que ce dispositif a disparu officiellement mais que certaines composantes du dispositif se sont naturalisées dans une autre forme didactique organisée autour de la notion d'activité : nous disons alors que cette naturalisation « partielle » des TP est une « quasi disparition » car ce dispositif continue à vivre mais pas forcément en ayant les mêmes raisons d'être.

J'ai pu mettre en évidence ces phénomènes de la vie des savoirs et des dispositifs en prenant le temps comme variable et le long terme est alors apparu comme un élément

essentiel. Cette approche temporelle permet de placer l'étude du curriculum non seulement dans son historicité mais aussi dans son devenir. La prise en compte du long terme dans le passé, le présent et le futur m'a permis de montrer les continuités et les ruptures de l'évolution curriculaire, de comprendre le présent du curriculum comme l'état d'une évolution et de mettre en évidence des contraintes lorsqu'on s'intéresse au développement curriculaire. Le problème du découpage temporel s'est posé comme faisant partie intégrante du travail. Le découpage peut être événementiel autour d'un moment qui est le repère (la réforme des maths modernes), le découpage peut être institutionnel correspond aux découpages donnés par l'institution (les différentes réformes) ou le découpage peut être fonctionnel lorsqu'il répond à une fonctionnalité en lien avec les questions posées dans la recherche. Ce problème du découpage temporel pose les questions du repérage des organisations, de la stabilité d'une organisation, du repérage des changements. L'institution scolaire, par les réformes successives, indique un certain nombre de changements, surtout ceux qui sont identifiés et voulus, mais les changements « invisibles » dans un premier temps ne sont pas forcément visibles et repérés par l'institution ou par les acteurs. Dans ce cas, le découpage doit être fait autrement. Cette problématique temporelle nous amène au troisième plan d'analyse qui est celui des interprétations ou des catégories interprétatives. L'une de ces catégories est le couple changement/résistance.

Le changement est au cœur de l'organisation du curriculum sur le long terme, non seulement dans le passé mais aussi pour les évolutions futures lorsqu'on cherche à intégrer de nouveaux outils, de nouveaux objets ou de nouveaux instruments. Mais la résistance au changement est elle présente aussi : une force active lorsqu'on veut préserver quelque chose ou une organisation qui est stable et économe, une force d'inertie lorsqu'on s'oppose au changement soit d'une manière active soit d'une manière passive.

Les changements curriculaire peuvent être pris au double sens de l'acte de changer et de l'état qui résulte de cet acte. Le premier sens correspond à des questions comme : pourquoi change-t-on ? Que change-t-on ? Comment change-t-on ? questions qui se rapportent aux raisons d'être, aux objets et aux formes du changement. Le deuxième sens répond à des questions comme : les effets attendus des changement ont-ils été observés ? Y a-t-il d'autres effets inattendus ? questions qui correspondent aux résultats, aux effets du changement.

Dans mes travaux, les raisons d'être des changements semblent relever autant du paradigme de l'équilibre que de celui du conflit. Par exemple, les raisons d'être des travaux pratiques dans les programmes sont à la fois des raisons sociales – former plus de

scientifiques et de techniciens -, des raisons épistémologiques – les mathématiques comme science expérimentale –, des raisons éducatives – former les élèves à une culture scientifique – et des raisons pédagogiques – changer les méthodes d’enseignement. Ces raisons d’être se rapportent à des besoins qui ont été identifiés dans la société, des besoins qui rentrent en conflit avec les principes et les méthodes qui présidaient à l’enseignement à l’époque et notamment la prégnance de la culture des humanités. Cette “ petite réforme ” de l’introduction des travaux pratiques apparaît comme le résultat d’une négociation et d’un compromis entre l’ancien et le nouvel état de l’enseignement des mathématiques et plus généralement de l’enseignement scientifique : des humanités “ modernes ” ont commencé ainsi à co-exister avec les humanités “ classiques ”. Des régulations ont été faites pour trouver un équilibre sans changer radicalement l’enseignement qui devait répondre à des besoins urgents de la société.

Actuellement l’une des raisons d’être du changement est l’émergence dans la société et dans les pratiques sociales de nouveaux outils de calcul. Les changements induits dans les programmes et dans certaines pratiques des acteurs montrent qu’une stratégie d’ajustement entre le savoir scolaire et le savoir savant, entre les pratiques scolaires et les pratiques sociales se met en œuvre pour trouver une « juste distance » entre l’ancien et le nouveau.

Le curriculum change plus lentement que ce qu’on aurait pu croire en voyant les changements fréquents des programmes. Ce n’est pas parce que les programmes changent que les pratiques changent et parfois les petits changements ont un impact plus durable que ce qu’on aurait pu prévoir. Dans mes travaux, je me suis intéressée aux changements qui étaient induits par les programmes ou les instructions officielles mais aussi aux changements induits par les acteurs. Le *degré de ces changements* n’est pas le même : des « petits changements » aux « grandes réformes ». Des réformes « politiques » lorsqu’il s’agit d’ajustements entre les savoirs scolaires et les nouvelles finalités de l’école ou de l’institution, des réformes « scientifiques » lorsqu’il s’agit d’ajustements entre les savoirs scolaires et les savoirs savants. Des « petits changements » lorsqu’il s’agit d’ajuster les pratiques des acteurs aux contenus ou buts de l’enseignement, ou encore lorsqu’il s’agit d’innover dans une classe en introduisant des objets ou outils nouveaux. Là encore des ajustements entre les anciennes pratiques et les nouvelles se mettent en œuvre pour trouver une « juste distance », comme j’ai pu l’observer dans le travail sur l’intégration de Cabri-géomètre. La recherche de la « justesse » apparaît comme un élément important du changement curriculaire à tous niveaux : depuis le niveau global jusqu’au niveau « ponctuel » des acteurs et des pratiques. Par exemple dans le cas des inéquations, le changement s’est fait par petites variations dans le choix des types de tâches et dans les techniques disponibles. Cette évolution peut se comprendre comme un ajustement à

la fois aux contextes savant et scolaire et comme un ajustement des possibles à la réalité des pratiques telles qu'elles se donnent à voir dans les manuels.

J'ai identifié un certain nombre de types de changements : des arrêts, des disparitions, des transformations, des mutations, des évolutions, des innovations, des variations. Il existe des liens entre les changements (voulus ou non) et les résistances des traditions, des acteurs, des forces d'inertie des systèmes. Ces résistances peuvent être actives ou passives, peuvent être des obstacles mais aussi des leviers pour trouver de nouveaux équilibres ou pour garder des équilibres structurels ou fonctionnels.

Le curriculum officiel à un moment donné est le résultat d'un certain nombre de négociations entre acteurs sociaux qui légitiment politiquement ou "scientifiquement" les choix des contenus et les formes d'étude. Mais la recherche d'un équilibre et d'une stabilité sur le long terme apparaissent comme des facteurs essentiels dans l'implémentation d'un curriculum malgré les résistances ou les adhésions des acteurs. Les tendances du changement se dessinent effectivement lorsque ce curriculum est mis à l'épreuve de la classe. Quels sont les effets des changements ? Les effets attendus se sont-ils produits ? Y a-t-il d'autres effets inattendus ?

La disparition de l'arithmétique au collège (dans son versant théorie des nombres et ses objets emblématiques comme les nombres premiers, pgcd, ppcm ou divisibilité) n'a pas entraîné la disparition de l'arithmétique dans la formation des professeurs des écoles. La résistance active à cette disparition est due au fait qu'il existe une tradition très forte des pratiques anciennes dans cette institution, pratiques qui sont motivées par des besoins théoriques et professionnels bien identifiés et stabilisés. La résistance active des acteurs et l'absence d'un programme détaillé et précis ont permis ce non-changement dans une institution alors qu'on aurait attendu le contraire vu le changement dans l'autre institution de référence.

Dans l'exemple des inéquations, les discours officiels mettent l'accent sur l'activité conceptuelle des élèves. Or la réduction des moyens techniques du travail des élèves, notamment la réduction du nombre de techniques de résolution des inéquations est un élément inhibiteur dans le choix des activités des élèves. Cette contradiction entre les buts affichés et les moyens réels mis à disposition des élèves provoque des effets que j'ai désigné par *effets "malgré soi"*. Dans le cas des travaux pratiques, l'un des effets de ce dispositif a été la naturalisation de nouvelles pratiques mathématiques des élèves autour de la notion d'activité ce qui peut être vu comme un effet inattendu.

Ces effets sont des actions ou des régulations qui peuvent permettre une “juste distance” entre le possible et le réel, entre ce qu’on aurait voulu faire et ce qu’on peut faire effectivement, entre l’ancien et le nouveau de manière à ne pas mettre en danger le projet même du curriculum (celui de la transmission culturelle et de la diffusion des savoirs et des pratiques) et les acteurs concernés.

L’étude de la dynamique d’un curriculum sur le long terme permet de repérer certains effets des changements qu’on ne verrait pas forcément en étudiant statiquement le curriculum à un moment donné. Cette étude nous permet de mieux situer le travail de compréhension des facteurs qui président à l’organisation et à l’implémentation d’un curriculum par rapport à un travail de développement curriculaire ou une action dans le présent.

3 - Temps des savoirs, temps des systèmes

Si le temps est une variable dans l’étude du curriculum dans le premier mouvement, dans le second il est pris comme un objet en soi qui permet de spécifier un rapport particulier aux savoirs dans un curriculum. Je me suis intéressée aux fonctions du temps didactique dans l’organisation d’un curriculum à travers les textes du savoir. Le découpage du savoir dans un programme et ensuite en séquences ou en activités détermine un temps propre au système d’enseignement ou aux systèmes didactiques. Ce temps didactique est une contrainte très forte dans l’action des professeurs et des élèves, contrainte qui se manifeste usuellement dans la phrase si souvent répétée par les professeurs “il faut que je finisse le programme” ou encore “on perd beaucoup de temps quand on veut faire travailler les élèves à partir des activités”. Comment les acteurs et notamment les professeurs gèrent-ils cette contrainte ? Le texte du savoir apparaît comme un facteur important dans la gestion de l’avancement du savoir et du contrat didactique, ainsi que dans l’organisation et l’implémentation d’un curriculum. Pour analyser le rôle et les fonctions du texte du savoir, je me suis intéressée à certains objets absents du texte du savoir ou à l’absence de texte du savoir. A partir des analyses de ces absences, j’ai pu observer le rôle des acteurs pour mettre en œuvre des dispositifs qui prennent en charge des objets absents en institutionnalisant notamment des connaissances instrumentales (connaissances liées au logiciel Cabri) ou des connaissances d’ordre deux (des connaissances liées aux règles du « jeu mathématique ») dans le dispositif que nous avons mis en place dans le cadre du travail CESAME.

L'absence de texte du savoir m'a permis d'identifier un certain nombre de stratégies de la part de l'enseignant pour gérer l'avancement du savoir dans la classe. Dans le travail d'intégration de Cabri, les enseignantes ont reconstruit un temps didactique au fur et à mesure en produisant un texte du savoir par l'ajustement du texte de savoir ancien aux besoins de la prise en charge de la dimension instrumentale et des nouvelles praxéologies. La maîtrise de ce texte du savoir la deuxième année a permis aux enseignantes d'avoir des moyens de gestion de l'avancement du savoir et de pouvoir anticiper sur les difficultés des élèves. Cette maîtrise du temps a permis aussi aux enseignantes de mettre en œuvre un certain nombre de stratégies d'économie temporelle qui permettent de gagner du « capital-temps » en associant de manière fine le rapport individuel/collectif ou en utilisant des ostensifs ou en sachant aller à l'essentiel.

4 - Un domaine d'horizon à explorer

Le domaine de recherches qui concerne l'étude du curriculum (officiel, mais aussi « caché » et réel) à partir des deux problématiques temporelles est ouvert depuis un certain nombre d'années mais il n'a pas été très développé en tant que tel. C'est là que mon travail se situe et que je pense mettre au travail des étudiants de troisième cycle. Comment se concilient tradition et innovation ? Il me semble opportun de partir maintenant des catégories interprétatives pour les mettre à l'épreuve avec d'autres réalités (d'autres objets de savoir, d'autres formes d'étude). La recherche des « petits » changements m'apparaît aussi importante que les grandes réformes qui sont induites par l'institution. Je fais l'hypothèse que certaines de ces grandes réformes ont été « préparées » par ces « petits riens » qui ne sont pas reconnus tout de suite ni par l'institution ni par les acteurs, et il me semble important d'aller regarder ce qu'il en est. La recherche des effets des changements : les voulus et les non voulus qu'on aurait pu prévoir et aussi les effets malgré soi, me semble une piste à explorer d'une manière plus systématique. Quelle est la place et le rôle des acteurs dans ces effets-là ? Quelles sont les conditions et les contraintes institutionnelles ? Les résistances aux changements peuvent être des résistances actives ou passives, et les acteurs ont un rôle à jouer non seulement dans l'implémentation d'un curriculum mais aussi dans sa conception ou dans son développement. Le temps des acteurs, le rôle et l'adhésion des acteurs dans la production de dispositifs innovants cherchant une « justesse » par rapports aux buts poursuivis m'apparaît aussi comme une autre piste à explorer.

Le domaine d'horizon à explorer peut être nommé comme celui de l'étude des mouvements curriculaires dans une double approche institutionnelle et personnelle ainsi que dans une double approche écologique et économique, mouvements qui mettent l'accent sur les changements et les résistances.

5 - Un débat toujours à recommencer

Se poser la question des fondements épistémologiques d'un domaine de savoir n'est pas l'apanage des domaines récents. Même un domaine comme les mathématiques vieux de nombreux siècles n'échappe pas à cette remise en cause périodique. Lorsque le domaine est récent l'exercice n'est pas sans danger : pourquoi a-t-on besoin de réaffirmer son existence ? Je veux poser ici le problème récurrent des fondements épistémologiques de la didactique des mathématiques pour questionner et revenir au projet initial de constitution de cette discipline et réaffirmer les intuitions fortes qui guident encore ces travaux même si des évolutions se dessinent.

Disons d'avance que ce problème est souvent réduit à un autre problème qui est celui de l'appartenance de la didactique au champ des mathématiques, ou au champ des sciences humaines et sociales ou au champ des sciences de l'éducation.

Il existe des réponses personnelles, institutionnelles et politiques à ce problème d'appartenance. Réponses personnelles et institutionnelles car l'appartenance des chercheurs-didacticiens aux mathématiques ou aux sciences de l'éducation est possible et non contradictoire, cela dépendant de l'histoire de chacun et de son ancrage dans des équipes de recherche proches de laboratoires de mathématiques ou de laboratoires de sciences de l'éducation. Réponses politiques car il y a un choix volontariste de la part des acteurs impliqués dans la vie de la recherche, dans le choix des thèmes ou des questions de recherche mais aussi dans les processus de validation de ces mêmes recherches. Par contre, il me semble que les réponses se fondent moins sur des critères épistémologiques, ce qui me fait parler de « l'incertitude épistémologique » de la didactique des mathématiques. Et d'ailleurs les didactiques ne sont pas forcément les seuls domaines dans ce cas. Je vais essayer de préciser pourquoi je parle de cette « incertitude épistémologique ».

Pour aborder ce problème je vais m'intéresser à trois dimensions qui permettent de construire l'espace de recherche de ce domaine de savoir qu'est la didactique des mathématiques : l'objet d'étude ou la réalité-cible, les méthodes et outils, et les savoirs

produits. Ces trois dimensions sont imbriquées et cette imbrication est nécessaire pour essayer de dégager la spécificité de cette discipline.

L'objet d'étude de la didactique des mathématiques, ce sont bien les mathématiques qui vont être étudiées, enseignées, apprises. Cette réalité d'étude n'est pas spécifique de la didactique car d'autres domaines s'y intéressent : l'épistémologie mais aussi la sociologie du curriculum ou l'histoire de l'enseignement mathématique. Mais cette réalité est devenue incontournable dans le projet initial de la constitution de la didactique des mathématiques qui se démarquait ainsi de la pédagogie ou de la psychologie piagétienne par sa spécificité liée au contenu. Cette réalité-cible est l'objet d'étude de la didactique des mathématiques au double sens qu'elle existe en tant que cible mais aussi qu'elle se construit au fur et à mesure que des savoirs se construisent sur elle. Ce regard porté à une réalité-cible est spécifique par les constructions permises, par les méthodes utilisées et par les savoirs produits sur elle.

Le mot méthode, qui vient du mot grec « *methodos* », signifie initialement « cheminement, poursuite », « direction qui mène au but ». Ce sens lié à « marcher » est utile pour penser que les méthodes utilisées en didactique des mathématiques sont diverses et qu'elles s'adaptent au but visé, à la marche qu'on veut suivre et imprimer à son travail. Ces méthodes, cliniques ou expérimentales, quantitatives ou qualitatives, ne sont pas spécifiques de la didactique. L'ingénierie didactique, en tant que méthode d'observation et d'analyse didactique, a été considérée comme une méthodologie propre aux didacticiens. Cette méthodologie, qui associe méthode et étude de la méthode par la mise en évidence de l'importance de l'analyse a priori et des variables didactiques, a été le chemin qui s'imposait lorsqu'on s'intéressait à l'apprentissage de l'élève dans le contexte de la classe comme certains des premiers travaux en didactique des mathématiques. Actuellement cette méthode existe à côté d'un certain nombre d'autres méthodes car le chemin suivi dépend des problématiques et des buts qu'on se donne. Par exemple, beaucoup de travaux actuels s'intéressent à l'observation et à l'analyse de classes ordinaires où l'observateur n'intervient pas en tant que concepteur d'une ingénierie didactique : celle-ci en tant que méthode n'est peut-être pas la plus pertinente pour ce cas-là. La méthode permet-elle de spécifier un domaine d'étude ? Dans le cas de la didactique des mathématiques, ce n'est pas la méthode utilisée qui permet par elle-même de distinguer cette discipline d'une autre discipline comme la sociologie ou d'autres sciences de l'éducation mais son imbrication avec la réalité-cible et les savoirs.

Revenons alors à la troisième dimension : les savoirs produits en didactique des mathématiques. Or quels sont ces savoirs-produit ?

Cette production de savoirs peut se décliner selon trois moments qui ne sont pas chronologiques :

- le premier moment est celui de la production de résultats, de phénomènes qui doivent pouvoir résister à la confrontation avec la réalité. Leur mise à l'épreuve doit être faite par des observations ou des expérimentations contrôlées, et ils doivent résister aux perturbations auxquelles on peut les soumettre ;
- le deuxième moment est celui de l'organisation de ces résultats dans un ensemble structuré, cohérent et consistant : une théorie qui permet non seulement de justifier et de rendre compte des technologies mais qui s'autonomise par rapport à la réalité. La mise à l'épreuve des théories est faite selon des critères structurels, des critères de cohérence : est-ce que l'organisation des résultats dans une théorie ne recèle pas des incohérences entre ces résultats ? Les résultats deviennent des objets d'étude par eux-mêmes et leur agencement permet aussi de produire des savoirs ;
- le troisième moment est celui des applications des théories ou des technologies à la réalité étudiée. Cette deuxième mise à l'épreuve permet de préciser les domaines de validité des savoirs produits en les confrontant à d'autres réalités et à des cas limites. Dans ce cas, quelqu'un peut se placer dans un cadre théorique donné et l'utiliser pour étudier d'autres domaines ou activités mathématiques que ceux à l'origine des technologies ou des théories.

Ces trois moments sont imbriqués les uns dans les autres et ce qui fait la spécificité des didacticiens des mathématiques est non seulement de produire des savoirs sur une réalité en utilisant des méthodes adaptées mais surtout de produire un corpus théorique qui rende compte de la réalité et qui puisse devenir un outil d'analyse.

Tout projet didactique vise l'étude, l'enseignement, l'apprentissage et la diffusion des savoirs mais ce projet existe avant même qu'un projet social de constitution d'une science existe. Il me semble qu'il faut distinguer là le projet social de transmission de savoirs d'un autre projet social qui est de s'intéresser, en tant qu'objet d'étude, aux institutions ou aux situations qui accomplissent ce premier projet.

Or si le projet social de la didactique des mathématiques est bien encore celui de ses fondateurs, pourquoi parlons-nous d'incertitude épistémologique ? L'incertitude épistémologique de la didactique des mathématiques vient de son statut théorique : quelle est la nature des savoirs-produits ou des corpus théoriques produits ? Sont-ils mathématiques ? C'est une tautologie de dire que la science didactique est l'ensemble de savoirs didactiques et de théories didactiques correspondant à une réalité-cible (l'étude des mathématiques)

construite à partir de méthodes propres aux sciences de l'éducation et plus généralement aux sciences humaines, sociales ou cognitives. Or ces savoirs sont hétéroclites : certains sont mathématiques (ou supposés être mathématiques) comme certaines descriptions de l'organisation des savoirs en termes de situations ou de praxéologies mathématiques. Mais la plus grande part des résultats, et surtout du corpus théorique n'est pas mathématique. L'incertitude épistémologique vient du fait que la réalité-cible étant mathématique on aurait pu penser que les savoirs didactiques seraient mathématiques mais actuellement ce n'est pas le cas d'une manière générale. Cette réponse n'est pas définitive. Nul ne pourra dire si dans le futur les corpus théoriques produits par les didacticiens ne seront pas mathématiques.

La spécificité de la didactique des mathématiques est double : elle donne au champ des mathématiques le regard de l'humain et de l'activité humaine dans le cadre d'institutions ; elle donne au champ des sciences de l'éducation et des sciences humaines le regard d'une spécificité mathématique et épistémologique. Cette double donation est-elle une faiblesse ou une force de notre champ ? La didactique des mathématiques est au carrefour d'un certain nombre de chemins : il est évident qu'individuellement nous ne pouvons pas suivre tous les chemins, des choix doivent être faits, mais il est aussi évident que collectivement nous ne pouvons tourner le dos à aucun des chemins. La didactique des mathématiques, malgré son incertitude épistémologique, est assez robuste pour que le « métissage théorique » ne soit pas considéré comme un danger pour sa spécificité, son évolution et son développement.

Mes travaux s'inscrivent pleinement dans ce domaine de savoir qu'est la didactique des mathématiques. Actuellement, en présentant cette HDR, j'inscris mes travaux au champ des sciences de l'éducation. Cette donation a été faite au départ pour des raisons personnelles et institutionnelles mais je sais (puisque je l'ai déjà vécu lors du travail conjoint avec d'autres chercheurs en sciences de l'éducation) que les conditions existent pour que je puisse continuer à produire, à questionner mon domaine à partir de problématiques génériques, tout en apportant un regard spécifique au champ des sciences de l'éducation. Ce don va-t-il être accepté ? Les sciences de l'éducation vont-elles accepter d'être questionnées et nourries par ce regard didactique ? Plusieurs attitudes peuvent exister : des attitudes frileuses et fermées (comme celles de certains mathématiciens vis-à-vis des didacticiens), des attitudes méfiantes (comme celles de certains chercheurs des sciences de l'éducation qui se méfient des didacticiens), des attitudes ouvertes. Même si certains chercheurs questionnent la pertinence des didactiques dans l'étude des problèmes de l'éducation, la tendance actuelle est de penser que les sciences didactiques ont une place dans ce monde de l'éducation en apportant un regard qui est spécifique. La question posée aux didactiques est alors : en quoi et comment les

interactions relatives aux situations d'étude sont-elles spécifiées par les savoirs ? Cette question me paraît essentielle mais je voudrais aussi la retourner en la posant autrement : si les situations d'étude ne sont pas spécifiées par des savoirs, qu'est-ce qu'on ne pourra pas observer comme formes d'étude ou comme moyens d'interaction ? En ce qui concerne mes travaux, j'ai pu montrer comment l'absence d'un texte du savoir empêche l'enseignant d'avoir les moyens de gestion de l'avancement de la relation didactique et d'anticiper sur les difficultés des élèves. Mon travail sur le dispositif « travaux pratiques » montre aussi le glissement qui se produit dans les formes d'étude (remplacement d'un dispositif où la dimension expérimentale du travail mathématique est présente à un autre où on insiste sur l'activité des élèves sans lien avec les contenus) lorsque la dimension épistémologique est absente et que les raisons d'être sont essentiellement pédagogiques. Ces exemples me permettent de penser que mon travail peut apporter des éléments de réponse à ces questions essentielles posées aux didacticiens par d'autres chercheurs en sciences de l'éducation.

Je fais donc confiance aux entrelacements des différentes disciplines et à la co-disciplinarité qui ne peuvent que créer une extensivité des domaines dans le but de comprendre mieux le réel. Voilà le but essentiel qui guide et guidera mes travaux et je m'engage à rendre possible cette extensivité de la didactique des mathématiques en symbiose avec les autres sciences de l'éducation et avec les mathématiques.

Bibliographie succincte

ASSUDE T (2002), Un phénomène d'évolution curriculaire : le cas de l'objet " inéquation " au Collège, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22.2-3, 209-236.

ASSUDE T, GELIS J.M (2002), Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics*, 50, 259-287.

ASSUDE T. (2002), Travaux pratiques au Collège ? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif, *Actes des journées sur les " Nouveaux dispositifs d'étude " organisées par la Commission Inter-IREM Didactique*, Dijon.

ASSUDE T (2003), Estudo do currículo de matemática : abordagem ecológica e alguns resultados, *Actes do XIV SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática)*, edition APM, pp.29-44.

ASSUDE T & GISPERT H (2003), Le recours à la pratique: une finalité ou une démarche de l'enseignement mathématique?, in Denis D & Kahn P (eds), *L'école républicaine revisitée*.

Enquête sur les disciplines scolaires dans le Dictionnaire de Pédagogie de Ferdinand Buisson, Editions du CNRS, Paris, p.175-196.

ASSUDE T (2003), *Etude du curriculum de mathématiques entre changements et résistance. Liens entre écologie et économie didactique*, Document de synthèse pour l'HDR (non publié)

ASSUDE T & PAQUELIER Y (2004), Souvenirs et approche temporelle des apprentissages mathématiques, *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, accepté

ASSUDE T (2004), Time management in the work economy of a class, *Educational Studies in Mathematics*, accepté

CHEVALLARD Y (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROUSSET-BERT S (2001), Les activités: un thème à retravailler, *Petit x*, 56, 61-79.

SACKUR C, ASSUDE T, DROUHARD J.Ph, MAUREL M., PAQUELIER Y (2004), Expérience de la nécessité épistémique , article soumis à la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Construction de Définitions / Construction de Concept : vers une Situation Fondamentale pour la Construction de Définitions en Mathématiques – un Aperçu

Cécile Ouvrier-Bufferet

Laboratoire Leibniz – IMAG

E-mail : cecile.ouvrier-bufferet@imag.fr

1. Introduction

Nous avons voulu ce texte aussi proche possible de l'exposé présenté au séminaire ; de plus, nous avons cherché à en rendre la lecture aisée, tout en voulant donner un aperçu global de notre thèse. En conséquence, nous renverrons à la thèse pour certains points spécifiques, absents du présent article.

Notre étude sur la définition a été motivée par le double constat :

- quand on **expose** un concept, on laisse croire que définir ne pose pas de problème : « *le premier piège est de croire facile à acquérir ce qui est simple à énoncer* »

(Kahane, 1999, p.12) ;

- quand on **construit** un concept, il existe une dialectique entre la construction du concept et la construction de sa définition (ceci est à l'œuvre dans la recherche mathématique) : « *A definitional procedure is a procedure of concept formation* » (Lakatos, 1961, p. 54)

Ceci nous a conduit à la problématique de recherche suivante : nous sommes partis de l'hypothèse que la construction de définitions est essentielle à la construction d'un concept et soutenons la thèse qu'il est possible de faire la dévolution de la construction de définitions d'un concept mathématique auprès d'étudiants (ceci appartenant à l'entrée dans une démarche scientifique).

De vastes questions de recherche se posent alors, à commencer par « qu'est-ce qu'une définition en mathématiques ? ». Il n'est bien évidemment pas raisonnable de penser trouver une unique réponse à cette interrogation. Notre étude épistémologique, via les conceptions,

apportera un éclairage substantiel sur ce point. Puisque nous parlons semble-t-il naturellement de « construire des définitions », et ainsi de Situations de Construction de Définitions (SCD) en mathématiques, il nous faudra en présenter les principales caractéristiques. Et nous interroger également sur les apprentissages en jeu dans de telles situations. Bien sûr, notre but est de déterminer les conditions pour la dévolution de SCD, celles-ci apparaissant prometteuses et ouvrant une nouvelle voie pour un travail sur la formation de concepts chez l'apprenant.

Rappelons brièvement que nous avons identifié des types de problèmes pouvant relever de la construction de définitions dans des travaux didactiques. Il s'agit en fait de *redéfinir* des objets connus dans des contextes différents (MATH.en.JEANS, 1997 ou Borasi, 1992), ou d'*inventer* des définitions (Freudenthal, 1973) lors de situations de classification de quadrilatères en géométrie, voire de *définir* à partir d'exemples et contre-exemples (Fletcher, 1970, sur la convexité). Cependant, aucun de ces travaux ne s'attache à la caractérisation du processus de construction de définitions.

Les objets de notre recherche sont ainsi d'élaborer une typologie de SCD, de modéliser des invariants pour les SCD que nous avons expérimentées, d'identifier et de décrire des conceptions dites significatives (nous retiendrons les conceptions aristotélicienne, poppérienne, lakatosienne) : ce dernier point en particulier s'intéresse spécifiquement au processus de construction de définition et tend à le caractériser. Pour cela, nous présenterons succinctement le cadre théorique qui nous a permis cette caractérisation. Nous concluons sur le point suivant : notre recherche tend à l'élaboration d'une situation fondamentale pour la construction de définitions ; nous donnerons les résultats de notre thèse qui s'inscrivent dans cette perspective. Les situations expérimentées dans cette thèse l'ont été avec des étudiants de première année d'université¹.

2. Aperçu Epistémologique sur le Concept de Définition

La nécessité d'une étude épistémologique approfondie sur le concept de définition nous est rappelée par Robinson², qui souligne l'importance de comprendre l'acte définissant. Une telle

¹ Placés par groupe de 2, 3 ou 4, dans un module "Jeux mathématiques" de Deug ou hors contexte.

² *Definition is indefinable. This may be defended on the ground that "you cannot define anything until you already understand defining"* (Robinson - 1954)

étude nous conduit naturellement à la détermination de plusieurs « types » de définitions, qu'ils s'agissent de définition lexicale, nominale, essentielle ou autre. Comprendre la construction même de définitions requiert alors un questionnement tel celui-ci : quelles sont les **origines** de ces différents types de définition ? Dans quels **types de problèmes** interviennent-ils ?

La formation des concepts mathématiques est bien sûr au centre de notre questionnement : si la présentation synthétique de différents aspects propres à une définition en mathématiques est accessible, la caractérisation du processus de construction de définitions ne l'est pas.

Certaines études (Shir, 2004, par exemple) ont montré la fréquence de certaines conceptions³ sur ce que doit être et ce que permet une définition en mathématiques : ainsi, les deux principales fonctions d'une définition concernent la dénomination et l'élaboration d'une théorie ; de plus, une « bonne » définition en mathématiques doit montrer l'existence de l'objet défini, son unicité, être minimale (non redondante), précise voire élégante ! Ces fonctions et conceptions ne nous renseignent cependant pas sur le processus même de construction de définition. Pour comprendre un tel processus, nous avons conduit une étude épistémologique via trois auteurs : Aristote, Popper, Lakatos. Ceux-ci nous permettent de visiter différents « lieux » impliquant la construction de définitions à savoir : la *classification*, l'élaboration de *théories* et la *résolution de problèmes* (au sens de Lakatos). Nous ne relaterons pas ici la méthodologie de recherche qui nous a conduit à retenir ces trois auteurs, pas plus que le débat philosophique en amont opposant essentialistes aux nominalistes. Mais nous avons là trois grands axes de travail sur la construction de définition. Le premier concerne Lakatos et la preuve : les « *Problem-Situations* » lakatosiennes soulignent la dialectique entre construction de définitions et formation de concept. Apparaissent alors différents types de définitions qui sont autant de balises marquant le processus de formation de concept. Nous y reviendrons ci-après. Le deuxième axe s'intéresse à Aristote, et ainsi aux aspects langagiers et logiques du concept de définition. Le principal processus définissant aristotélicien est dit par *genre et différences spécifiques* : il est effectif sur des situations de « *Classification* ». Le troisième axe s'attèle à la « *construction théorique* », Popper étant l'auteur alors retenu. Nous ne pouvons revenir ici sur l'intégralité de ces axes de réflexion sur le concept de définition. Mais présentons notre typologie de SCD, découlant de l'étude épistémologique. Nous avons caractérisé dans la thèse trois types de SCD, dans les termes suivants :

³ Conception est ici employé dans son acception courante

- des SCD **CLASSIFICATION** (qui renvoient à la conception aristotélicienne) : il s'agit de situations de classification, où la demande d'une définition peut être explicite (les objets mathématiques en jeu permettent, dans ce genre de situation, une appréhension en *extension*⁴, du fait de leur accessibilité par leurs représentations). Nous ne développerons pas ici le domaine général de la taxinomie dont relève ce type de SCD.
- des SCD **RESOLUTION DE PROBLEME** (qui renvoient principalement à la conception lakatosienne) : ce type de SCD a été induit par les « *Problem-Situations* » lakatosiennes, sur lesquelles nous reviendrons en détail ci-après.
- des SCD **MATHEMATISATION/MODELISATION** (qui renvoient aux conceptions poppérienne et lakatosienne, et accessoirement à la conception aristotélicienne) : la caractérisation de ce type de SCD est initiée par sa dénomination même. En voici un exemple : « quelle est la structure mathématique commune au monde végétal ? »⁵.

Nous préférons nous concentrer ici sur le type de situation proposé par Lakatos, ce dernier opposant le point de vue heuristique au point de vue théorique. Nous apporterons ainsi une conception véritablement innovante sur la définition.

Notre tâche est alors de caractériser simultanément le type de problème de construction de définitions lakatosien, ainsi que le processus définissant à l'œuvre. C'est ce que nous permet la détermination de la conception lakatosienne - 'conception' étant maintenant employé dans une acception théorique - par le modèle cK ϕ .

2.1. Considérations théoriques

Le modèle cK ϕ (Balacheff, 2003) n'est bien évidemment pas le seul outil théorique utilisé. Notre méthodologie comprend une modélisation de connaissances sur la définition, d'où l'usage de cK ϕ par le quadruplet (P,R,L, Σ) pour la caractérisation des conceptions aristotélicienne, poppérienne et lakatosienne. La notion de *concept image* (Vinner, 1991) a complété notre utilisation de ce modèle. Pour la présentation de cK ϕ , nous préférons renvoyer à Balacheff, 2003 et Ouvrier-Buffet, 2003. Les emplois des termes du quadruplet (notamment *opérateurs* et *contrôles*) se feront par la suite de manière plus intuitive.

⁴ L'appréhension en *extension* se rapproche du concept de définition *nominale* suivant Leibniz : connaître en extension un objet X signifie savoir reconnaître (au sens faible du terme) ce qu'est ou n'est pas X.

⁵ Il peut s'agir du concept d'arbre.

Par ailleurs, l'élaboration et l'analyse des SCD s'est faite sous l'éclairage de la Théorie des Situations Didactiques. Nous renvoyons à la thèse pour l'ensemble de la présentation méthodologique.

Cependant, nous tenons à souligner ici un aspect particulier de l'étude des protocoles : les situations observées étaient conduites par un Gestionnaire-Observateur (noté GO) qui intervenait en qualité de chercheur expérimenté⁶. Le GO disposait d'un fil conducteur épistémologique concernant le concept de définition : ce dernier lui permettait en partie de gérer la situation, voire de la relancer, sans évaluer ni institutionnaliser les productions des étudiants (que celles-ci concernent le concept de définition ou le concept mathématique en jeu dans la situation). Notre travail de thèse ne nous a pas permis d'approfondir l'étude de la posture du GO : l'étude du GO est actuellement en cours (Ouvrier-Buffet, 2004).

2.2. La conception lakatosienne

Le travail de Lakatos (1961, 1984) a pour cadre général la méthode des *preuves et réfutations*. Ce qui suit consiste en la spécification de la conception lakatosienne. Nous ne modéliserons pas intégralement celle-ci par cK ϕ , afin de laisser transparaître davantage le cheminement des idées lakatosiennes.

Des interrogations inhérentes à la linguistique et l'axiomatique viennent naturellement s'inscrire dans le débat proposé par Lakatos, mais c'est surtout l'heuristique qui est au cœur du questionnement. L'axiomatique est en effet marquée par la rigueur et l'accroissement du contenu. Considérant de plus le théorique et l'heuristique comme deux points de vues différents, Lakatos prône la recherche d'un contexte dit *problématique*, afin de travailler sur la formation de concept et la construction de définition, et ainsi échapper à la présentation axiomatique.

Et il semble « si naturel » à l'auteur qu'« *il existe d'autres voies pour communiquer que les définitions. Je peux initier mes élèves à des problem-situations⁷ non pas par des définitions, mais en leur montrant un cube, un octaèdre et en leur montrant que pour ceux-ci $S-A+F=2$. Alors, je leur demande le domaine de validité de cette formule. Croyez-moi, cela est suffisant pour un début* » (Lakatos, 1961, p. 69)

⁶ Ce qui pose bien sûr la question de la « dévolution » de telles situations auprès d'enseignants (désireux d'utiliser des SCD ou autres situations fondamentales en classe)

⁷ Nous n'avons, pour des raisons évidentes, pas traduit ce terme.

Un type de problème se dessine déjà dans cette situation : il s'agit de construire une classe d'objets à partir d'une "formule", la *formule d'Euler*, à savoir $S - A + F = 2$ pour les polyèdres, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Lakatos nous rappelle, avec des jalons historiques, l'insuffisance de la seule considération du nombre de faces pour l'établissement d'une classification de polyèdres, puis l'invention des concepts de *sommets* et d'*arêtes*, et ainsi présente le problème sous la forme : tous les polyèdres satisfont-ils cette formule ? Nous avons là une première idée des types de problèmes historiques étudiés par Lakatos et l'amorce de la résolution de ceux-ci.

Quant au processus même de construction de définition et de sa dialectique avec la formation de concept, Lakatos nous donne des éléments permettant de le baliser. Il s'agit en fait de trois types de définitions : les définitions *naïves*, les *zéro-définitions* et les *proof-generated definitions*. Ces différents types sont caractérisés principalement par la **fonction** et le **devenir** de telle ou telle définition. Les fonctions des définitions mises alors en avant concernent la communication, la dénomination et la preuve.

Nous allons reprendre les caractéristiques de ces types de définition, telles qu'elles ont été exposées par Lakatos. L'exemple du problème des polyèdres nous servira d'illustration et nous ferons ressortir la dialectique entre formation de concept et construction de définition : la principale difficulté en est la généralisation que nous devons entreprendre. Concernant cette dernière, nous renvoyons, pour plus de détails, à la thèse (Ouvrier-Buffet, 2003, chapitre II).

Les définitions *naïves*, comme leur nom l'indique, peuvent être posées dans une première intention. Mais l'essence même d'une définition *naïve* est de ne pas avoir d'évolution.

En revanche, les *zéro-définitions* ne sont pas des définitions nulles et non avenues : elles sont « zéro » car marquent le début du processus de recherche. Leur fait est attesté par la présence de lemmes vrais, par un manque de contre-exemple, par la justification « générale » de la conjecture de départ. Elles sont vouées à l'évolution vers une *proof-generated definition* (voir ci-après) ou à la disparition. De plus, quelque soit la *zéro-définition*, le domaine de la preuve n'est pas affecté.

Les deux principales règles concernant ce type de définition se résument à :

- ne pas être trop indulgent avec les définitions trop vastes
- développer des *zéro-définitions* si une plus large idée de la preuve en découle.

Les *proof-generated definitions* s'inscrivent dans le cadre de la catalyse de la preuve et de la dialectique entre construction de définition et formation de concept. La principale question demeure : quand apparaissent-elles ? Ce moment où émergent des *proof-generated definitions* est en effet difficile à déterminer. Partant d'une *zéro-définition*, une *proof-generated definition* alors naissante déterminera la solution du problème considéré. Il est bien évident que la dépendance de la construction de définition, des *zéro-définitions* aux *proof-generated definitions*, à la situation de départ est décisive.

La modélisation que nous avons entreprise dans la thèse permet de mettre en relief cette dépendance et de souligner ce que nous prendrons dans une acception simple ici des *opérateurs* et *contrôles*⁸ marquant le processus de construction de définitions.

Pour souligner le rôle et la place des *zéro-définitions* et *proof-generated definitions*, reprenons l'exemple de "*Preuves et Réfutations*".

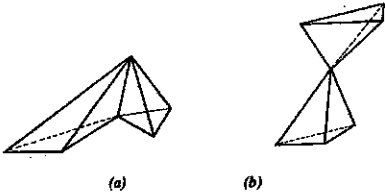
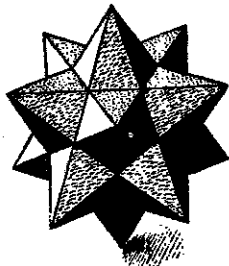
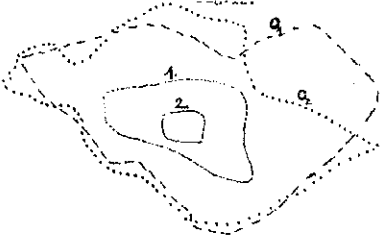
La situation de départ comprend en fait une appréhension en extension du concept de polyèdre (connaissance *naïve*), la formule d'Euler, ainsi que l'idée d'une preuve en trois étapes (celle de Cauchy).

La construction de définitions dans cette situation va principalement évoluer relativement aux points suivants : une définition n'est pas discutée s'il n'y a pas de contre-exemples ... et la falsification par des contre-exemples dépend de la définition des concepts alors en jeu. La méthode des *preuves et réfutations* se dessine, et, dans ce cas, conduira à la redéfinition des concepts de polygone, sommet et arête.

Nous allons dans un premier temps reprendre les balises marquantes du début de la construction du concept de polyèdres (Lakatos, 1961), puis reviendrons, dans un second temps, sur l'aspect construction de définitions, et les balises qu'il est possible d'en donner, en prenant l'exemple de Lakatos comme une méthode de la connaissance.

L'exemplification est la suivante (le concept de polyèdre est bien sûr l'objet des *zéro-définitions*) :

⁸ Nous renvoyons à Balacheff (2003) et Ouvrier-Buffet (2003).

<i>Zéro-définitions</i>	Enoncés	Méthode de preuve et réfutation
Z-déf O1	solide dont la surface est constituée de faces polygonales	Contre-exemple à Z-déf O1 : cube creux
Z-déf O1bis	surface constituée d'un système de polygones	Contre-exemples à Z-déf O1bis pour lesquels $S-A+F=3$ 
Z-déf O2	surface constituée d'un système de polygones tel que : - exactement deux polygones sont adjacents à chaque arête ; - il est possible d'aller de l'intérieur d'un polygone à l'intérieur de n'importe quel autre par un chemin qui ne coupe jamais une arête en un sommet.	Contre-exemple à Z-déf O2, pour lequel $S-A+F = -6$ 
Nouveau problème: (re)définir polygone	Zéro-définition de polygone: système d'arêtes arrangées de telle façon que: - deux arêtes (et deux seulement) sont adjacentes à chaque sommet ; - les arêtes n'ont pas de points communs en dehors des sommets	
	Lakatos propose alors : ▪ une définition de polyèdre (dit « simple ») (1) ▪ ... restreinte par des faces simplement connexes (2) et l'illustre par le dessin ci-contre, marquant ainsi un processus de resserrement (c'est la <i>proof procedure</i>), partant des <i>zéro-définitions</i> O1 et O2.	
	Il s'agira alors de redéfinir : polygone,	sommet, arête

Il apparaît ainsi bien qu'une définition (*zéro-définition* en l'occurrence) n'est pas discutée s'il n'y a pas de contre-exemple ... et la falsification par les contre-exemples dépend de la définition des concepts en jeu. Faire reconnaître un contre-exemple permet de tendre à l'élaboration de *proof-generated concept*.

Apparaissent alors des *opérateurs* que nous proposons sous forme listée : accéder à une plus large idée de la preuve ; générer et utiliser des exemples et contre-exemples ; écrire une *zéro-définition*. Pour ce dernier point sont alors mobilisés des *opérateurs* et *contrôles* d'ordre langagier et logique (nous renvoyons pour cela à la conception aristotélicienne, Ouvrier-Buffer, 2003, p.50s).

Les principaux *contrôles* proviennent du manque de contre-exemples (ce qui signifie en fait que la *zéro-définition* en cours est « bonne », c'est-à-dire, proche d'une *proof-generated definition*), ainsi que de la preuve elle-même (il s'agit d'une validation par la preuve).

Ce processus de preuve et réfutation, appliqué à la construction de définitions, laisse une question sur les *contrôles* relativement ouverte : existe-t-il un marqueur de fin spécifique à la construction de définition ? Lakatos évacue volontairement la problématique axiomatique et théorique et laisse au lecteur la citation suivante :

« (...) nous devons certainement arrêter l'extension de concepts là où elle cesse d'être un engrais pour devenir un herbicide total (...) **Mais une recherche scientifique "commence et finit par des problèmes"** » (Lakatos, 1984, p. 131)

Ainsi le manque de contre-exemple apparaît comme *contrôle*, avec toute la difficulté inhérente à celui-ci, telle qu'elle a été soulignée par Popper (cf. Ouvrier-Buffer, 2003, p. 52s sur la conception poppérienne). De toute évidence, ni Popper, ni Lakatos ne propose un critère de fin manifeste pour la formation de concept. Il serait alors nécessaire de se plonger dans une perspective axiomatique, voire dans le problème du choix d'une théorie parmi des théories concurrentes mettant en jeu le concept alors construit.

3. Les SCD Expérimentées : Présentation

Nous avons conduit trois situations expérimentales, en accord avec notre typologie de SCD (voir ci-dessus) et avec les valeurs de variables locales suivantes : le type d'objet mathématique à définir, la présence ou non d'un référent, la demande explicite de définition ou non et les fonctions de la définition dans le problème considéré.

Trois types de situations, avec trois objets mathématiques discrets (arbre, déplacements sur un plan discret, droite discrète) furent conçues. Nous les exposons brièvement ici : ceci nous permettra de conclure sur l'aspect « situation fondamentale » pour la construction de définitions.

3.1. Une SCD de type CLASSIFICATION

La première situation expérimentée fut de type CLASSIFICATION, avec un objet mathématique (l'arbre) propice aux SCD. En effet, l'appréhension en extension de cet objet, par ses représentations, est aisée (à partir d'exemples et contre-exemples de celui-ci, désignés comme tels), à l'image des polyèdres de Lakatos. Une demande explicite de définition a été formulée. De plus, l'arbre est très riche en terme de définitions⁹, et par ailleurs, il est possible de réaliser des SCD des trois types identifiés (CLASSIFICATION, RESOLUTION DE PROBLEMES et MATHEMATISATION/MODELISATION).

Voici l'énoncé de la SCD CLASSIFICATION (en deux temps) :

- *Première partie*

			1. Comment définiriez-vous l'objet mathématique « truc » sachant que : T1, T2, T3 et T4 sont des représentations de « truc », T5 et T6 n'en sont pas.

- *Seconde partie* : 2. Soit G un graphe (ensemble de points et de traits reliant ces points) connexe (en un seul morceau). Démontrer qu'il existe un arbre couvrant tous les sommets.

Les productions des étudiants ont montré un processus définissant par *genre* et *différences spécifiques* de nombreuses *zéro-définitions*, marquées par une évolution sous le coup d'*opérateurs* et *contrôles* langagiers et logiques, mais aussi par la réalisation de tests sur les définitions produites via la recherche de contre-exemples (*opérateur* lakatosien s'il en est !).

3.2. Une SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES

Il s'agit ici de considérer des déplacements sur un plan discret. Par exemple, prenons l'ensemble de déplacements suivant : $\{d_1 : 2 \text{ carreaux à droite et } 3 \text{ carreaux en haut} ; d_2 : 5 \text{ carreaux à gauche et } 2 \text{ en bas} ; d_3 : 5 \text{ carreaux à droite et } 3 \text{ en bas} ; d_4 : 1 \text{ carreau à droite}\}$.

La question est alors : est-il possible d'atteindre, avec cet ensemble de déplacements, tous les points de la grille ?¹⁰ Une seconde question concernerait la suppression d'un des déplacements initialement donné : qu'en est-il des points alors atteints ?

Ceci en réfère au problème mathématique complexe et non intégralement résolu de Froebénius (Ramirez-Alphonsin, préprint).

Il est possible, dans ce contexte, de trouver un ensemble de déplacements aussi grand que l'on veut, générateur et minimal (pour les points de la grille discrète), alors que dans $\mathbb{R}^2$, il existe des systèmes générateurs minimaux de même cardinal ainsi que la définition de *base*. Il y a alors (au niveau de première année d'université) un questionnement sur les concepts en jeu (générateur, minimalité et dépendance) et des relations entre eux. Il s'agit effectivement d'une SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES, car la problématique de preuve est effective, et des conjectures sont accessibles. De plus, la problématique de définition concerne les concepts « générateur » et « minimalité ». Cette situation comprenant plusieurs parties, nous renvoyons à la thèse (Ouvrier-Buffet, 2003, chapitre VIII) pour l'analyse mathématique et didactique.

La troisième SCD expérimentée fait l'objet du paragraphe suivant.

4. Etude d'une SCD : les Droites Discrètes

4.1. Présentation de l'objet mathématique et du type de SCD expérimentée

L'objectif de ce paragraphe est de souligner les potentialités de l'objet mathématique « droite discrète » pour une situation de construction de définitions : nous les présenterons avec le concept de *zéro-définition*, afin de montrer l'amorce et l'évolution d'un processus de construction de définition pour les droites discrètes.

⁹ Différents types de définition peuvent être décrits dont des définitions par induction notamment.

¹⁰ Seules les combinaisons entières positives de ces déplacements sont « autorisées ».

4.1.1. Deux problématiques autour de l'objet « droite discrète »

- La problématique « droite réelle »

La considération d'une droite discrète (simplement par coloration de carreaux – ou pixels – d'une grille régulière) peut conduire à faire référence au concept de « droite réelle », et ainsi à des définitions de celles-ci (géométriques et/ou analytiques) dans le but de définir le même objet dans un contexte discret. Nous avons ainsi appelé cette problématique « droite réelle ». En référer aux droites réelles implique naturellement dans un premier temps le tracé de celles-ci. Cette approche pose déjà une réelle problématique de définition, avant même que référence à une définition de « droite réelle » ne soit formulée. En voici une illustration ci-dessous (figure 1) : prenons une droite réelle. Quels carreaux 'choisir' parmi ceux traversés par cette droite ? Des critères de choix sont alors requis et ainsi se présentent différentes *zéro-définitions*, amenées à évoluer.

Figure 1



Voici les *zéro-définitions* en question (les termes entre guillemets soulignent les potentialités d'évolution de celles-ci) :

Zdéf1 : ensemble de pixels traversés par une droite réelle.

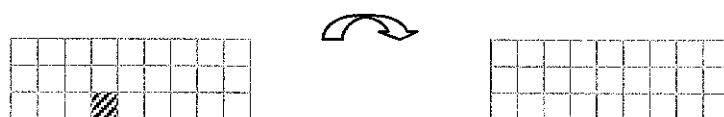
Zdéf2 : ensemble de pixels les "plus près" d'une droite réelle donnée.

Zdéf3 : ensemble de pixels situés "à l'intérieur" d'une bande d'épaisseur e .

- La problématique « régularité »

La seconde problématique consiste en la recherche d'une régularité des séquences constitutives de droites discrètes, en référence à la perception que nous avons de la régularité d'une droite réelle, régularité que nous ne définissons en fait pas. L'illustration (figure 2) ci-après montre la nature de cette problématique : comment modifier une séquence donnée pour obtenir une « meilleure » régularité ?

Figure 2



Deux *zéro-définitions* découlent de cette approche. Là encore, les guillemets soulignent ce qui est amené à évoluer :

Zdéf 4 : une droite discrète est une séquence de paliers vérifiant "certaines propriétés".

Zdéf 5 : une droite discrète est une séquence de pixels ayant une répartition « uniforme » de paliers qu'on ne peut plus améliorer du point de vue de la "régularité".

4.1.2. Une SCD sur « droite discrète »

L'objet géométrique "droite discrète" pourrait faire l'objet d'une situation de type CLASSIFICATION : en effet, c'est un objet accessible et il est envisageable de réaliser une situation analogue à la situation "arbre", à partir d'exemples et contre-exemples identifiés ou non. Cependant, "droite discrète" est un concept encore en construction dans la recherche actuelle, plus problématique que "arbre". De plus, un référent extérieur est dans ce cas désigné (droite euclidienne), contrairement à la situation "arbre" qui n'impliquait pas de référent particulier. Ainsi, une SCD de "droite discrète" de type CLASSIFICATION est possible, mais déjà plus problématique mathématiquement, qu'une demande explicite de définition soit formulée ou non.

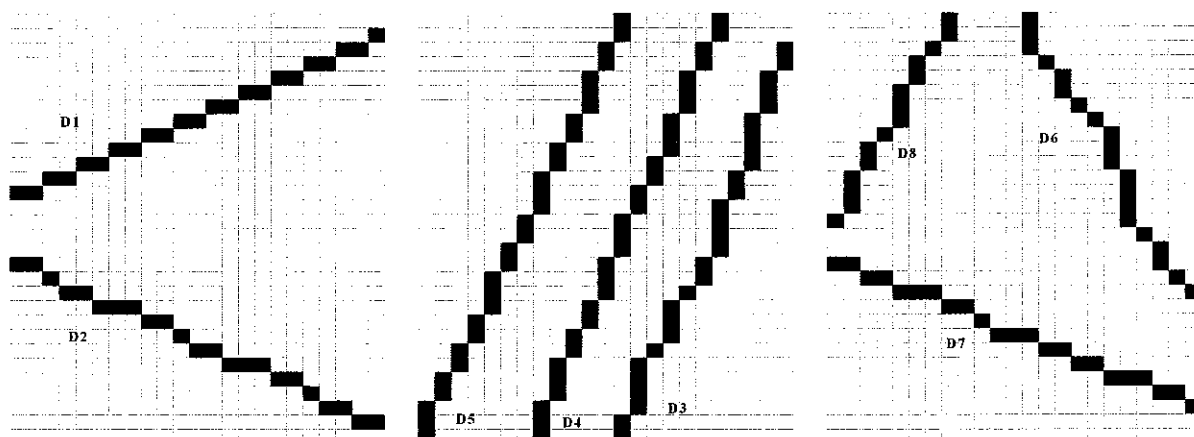
Un référent extérieur étant naturellement désigné (droite euclidienne) dans une étude de l'objet géométrique "droite discrète", une SCD de type MATHEMATISATION/MODELISATION peut être conçue. Différentes problématiques (de construction, de reconnaissance et concernant l'axiomatique) existent autour de l'objet "droite discrète" (pour situer la problématique axiomatique par une simple question : quid de l'intersection de deux droites discrètes ?). Celles-ci permettent de concevoir des problèmes dont la résolution nécessite une construction de définition de "droite discrète", c'est-à-dire des SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES. Par ailleurs, la discrétisation en jeu dans le passage du discret au continu (considérant une droite réelle comme point de départ) implique le type MATHEMATISATION/MODELISATION.

Nous avons retenu pour cet article une SCD de type CLASSIFICATION, avec demande explicite de définition, précédée d'une SCD (des autres types) concernant les triangles discrets, que voici.

- **Les triangles discrets** - *On veut colorier des carreaux d'une grille régulière. Dessinez des triangles (en coloriant des carreaux). Expliquez votre construction.*

- **Les droites discrètes** - La consigne orale suivante fut donnée aux étudiants : *voici des objets qui sont des droites, et d'autres qui n'en sont pas. Dans ce contexte, on colorie des carreaux.*

La question que l'on se pose est la suivante : comment définir « droite » à partir de ces éléments ?



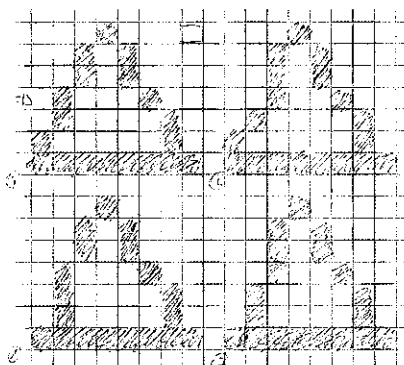
4.2. Processus et productions des étudiants

Les problématiques « droite réelle » et « régularité » décrites dans le paragraphe précédent furent abordées par les étudiants : plus précisément, la question de la « régularité » s'intéressa à la modification et à la répétition d'une séquence de paliers. Ceci a conduit à plusieurs *zéro-définitions* co-existantes (et évolutives). Ainsi, les zéro-définitions **Zdéf2** et **Zdéf3** apparurent, dans la première séance sur les triangles discrets :

68.N: *Moi, je me suis dit que un triangle c'était trois traits ... plus ou moins épais. (...)*

77.N: *Voilà, c'est tout bien ... et après quand j'ai des angles divers, je trace les trois droites, et par où passe la droite, je colorie. Je colorie les cases qui sont touchées par la droite ... enfin, par une des droites.*

177.Re: *Déjà, celui qui est traversé, il faut le regarder, celui qui ne l'est pas, il faut le laisser tomber. Après, il faut regarder s'il est traversé un tout petit peu, il faut peut-être pas en tenir compte ; s'il est traversé beaucoup, il faut plus le regarder.*



De plus, des *zéro-définitions* concernant la « régularité » émergèrent également (d'où des *zéro-définitions* de natures différentes co-existantes, en concurrence), à l'image de celle proposée par Nicolas ; il s'agit de modifier les paliers d'une séquence de pixels :

463 N : *J'ai essayé une autre technique. Là, au lieu d'en mettre 3, 3, 3 et 1, j'ai fait 3, 2, 3, 2.*

Il est à noter, que, dans le groupe dont nous proposons des extraits, une règle « arithmétique » fut formulée et les *zéro-définitions* (faisant appel à la « droite réelle » et au « couloir ») faisaient office de *contrôle* des tracés obtenus par la règle arithmétique. L'évolution des *zéro-définitions* produites dans ce groupe fut dépendante du changement de situation (passage de la situation des triangles discrets, sans demande explicite de définition à la situation de CLASSIFICATION des droites discrètes, avec demande explicite de définition dans le but de délimiter les objets proposés). Les valeurs différentes des deux variables globales 'demande explicite de définition ou non' et 'reconnaissance ou construction d'objets' apparaissent cruciales eu égard au processus de construction de définitions. Il apparaît ainsi que la « demande explicite de définition » semble favoriser le travail de mise en relation entre différentes définitions et mobilise des *opérateurs* et *contrôles* de différents types (langagiers, logiques et lakatosiens -génération d'exemples et de contre-exemples en particulier-) qui agissent dans les caractérisations du concept en jeu. De plus, notre expérimentation a fait ressortir une variable didactique non prévue dans notre analyse préalable : le type de fonction de la définition. Cette variable prenait ici deux valeurs : définir pour construire, dans la situation « triangles discrets » et définir pour reconnaître dans la situation « droite discrète ». Les étudiants ne traitent pas simultanément ces deux fonctions (construction et reconnaissance).

Néanmoins, dans les situations expérimentées, la dévolution a été favorisée par la facilité d'accès aux objets (arbre, droite discrète) de par leurs représentations, et aussi par la possibilité d'énoncer des *zéro-définitions* basées sur la perception ou la description physique de ces objets. La richesse des productions dans les situations « droite discrète » témoigne de la capacité des étudiants à adopter des points de vue différents sur un même objet. De plus, ces points de vue sont proches de ceux de la communauté scientifique.

5. Conclusion

5.1. Des organisations didactique et mathématique spécifiques

La mise en place dans la classe de situations de construction de définitions nécessite des organisations mathématiques et didactiques spécifiques (Bosch, Gascon 2001). En particulier, dans une organisation mathématique usuelle, la définition du concept qui va être étudié est donnée d'emblée (et est en général unique) : ceci est incompatible avec la négociation d'une situation de construction de cette définition. De plus, le fonctionnement d'une SCD nécessite la mise en place d'une organisation didactique non usuelle qui laisse suffisamment de temps à l'élève pour construire des définitions.

En particulier, l'organisation sociale des étudiants en **groupes** s'avère être une valeur d'une variable didactique déterminante pour les SCD. Le GO doit négocier avec cette composante, en acceptant aussi des phases de recherche plus individuelles. Le rôle du GO s'avère spécifique et doit être étudié de manière plus approfondie (étude en cours, Ouvrier-Buffet, 2004).

5.2. Vers une situation fondamentale pour la construction de définitions

Des trois types de SCD expérimentés, le type CLASSIFICATION se révèle facilement dévoluable. Dans les autres types de situation, la dévolution dépend de la demande explicite de définition (variable didactique), mais pas seulement. Soulignons que la demande explicite de définition favorise en particulier la mobilisation d'*opérateurs et contrôles* spécifiques qui vont avoir un rôle réflexif sur la construction de définitions. Ceux-ci permettent aux étudiants de prendre de la distance par rapport au concept mathématique en jeu et favorisent ainsi l'évolution de *zéro-définitions* vers des définitions abouties.

Par ailleurs, notons que la situation « Déplacements sur une grille », relevant du type RESOLUTION DE PROBLEMES, sans demande de définition, et mobilisant des concepts abstraits, a abouti sur une production de définitions sous forme de *définitions-en-acte et propriétés-en-acte* (Vergnaud, 1991) : celles-ci se sont révélées suffisantes pour avancer dans la résolution du problème.

Nous pouvons affirmer que les trois situations étudiées dans la thèse constituent des éléments d'une situation fondamentale pour l'apprentissage de la construction de définitions. Cet

apprentissage s'inscrit dans quelque chose de plus général, à savoir la pratique d'une démarche scientifique :

une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories ... (Brousseau, 1982, p.186).

La mise en place d'une situation fondamentale repose notamment sur les hypothèses formulées par Brousseau. Relativement à ces hypothèses, dans les situations que nous avons expérimentées, nous avons noté des changements de points de vue chez les étudiants, tant sur le concept de définition que sur les objets mathématiques en jeu. Ceci n'était a priori pas évident dans la mesure où « définir » ne correspond pas au rôle usuel de l'étudiant (dans une institution « enseignement »).

Soulignons que la construction de définitions apparaît effectivement comme *réponse adaptative optimum* (pour reprendre l'expression de Brousseau) pour le chercheur dans son activité mathématique ; ceci peut effectivement se produire chez des étudiants, dans une SCD de type RESOLUTION DE PROBLEME ou MATHEMATISATION/MODELISATION, mais pas dans une SCD CLASSIFICATION.

Enfin, il semble bien difficile de réaliser la condition de Brousseau suivante : « *s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer par ce système de variables tous les problèmes culturellement connus où la connaissance intervient* » (SIC, Brousseau, 1982), c'est pourquoi Legrand propose « la nécessité de clôture de la situation fondamentale » c'est-à-dire, pour répondre aux exigences concernant les variables d'une situation fondamentale : « *la situation sous laquelle la connaissance se présente doit contenir en germe (sans devoir être déconstruite) les potentialités d'évolution du savoir et rendre possible de nouveaux apprentissages* » (Legrand, 1996, p.237). Les variables d'une situation fondamentale *changent le statut cognitif de la connaissance visée, en tant que moyen de contrôle de l'action, moyen de communication, moyen de preuve, algorithme de référence etc.* (Brousseau, 1982, p.198). Il s'agit maintenant d'effectuer un retour expérimental à la situation fondamentale (à savoir les trois SCD expérimentées) dans le but d'explicitier les variables de celle-ci en question. Peut-être pourrions-nous ouvrir encore davantage la discussion sur les situations fondamentales, en évoquant le titre d'un séminaire Didatech à venir (Grenoble, 2005) de G.Brousseau : « *Les situations fondamentales, fantômes ou réalités ?* » ...

Il est ainsi nécessaire pour nous de réétudier et d'enrichir les caractéristiques des situations (correspondant aux variables didactiques que nous avons identifiées), en particulier pour des SCD de type RESOLUTION DE PROBLEMES.

Puisque ce qui nous concerne est la co-construction d'un concept et de ses définitions, il pourrait être intéressant de proposer de telles situations avec des concepts soit déjà institutionnalisés, soit naturalisés : il faudrait alors étudier tout d'abord la « désinstitutionnalisation » ou la « dénaturalisation » de ces concepts, rechercher à la rendre possible. Nous pouvons d'ores et déjà suggérer quelques pistes à ce propos : il pourrait s'agir de construire une SCD mettant en jeu, de manière problématique, des objets mathématiques déjà institutionnalisés c'est-à-dire : soit les dits objets ne sont pas reconnaissables, soit la définition existante, supposée connue des étudiants, s'avère inefficace. Un travail de définition sur un objet déjà institutionnalisé peut contribuer à la « désinstitutionnalisation » en question s'il s'avère déstabilisant : ceci est bien sûr à étudier.

Bibliographie

- Balacheff, Nicolas : 2003, "cK ϕ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques". *XIIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques* (à paraître). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Borasi, Raffaella : 1992, *Learning mathematics through inquiry*, Heinemann, New Hampshire.
- Bosch, M. & Gascon, J. : 2001, "Organiser l'étude – Théories et empiries". *Actes de la XIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, 23-40. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.
- Brousseau, Guy : 1982, "Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie." *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, n°45, 183-226. LSD2-IMAG. Grenoble.
- Brousseau, Guy : 1997, *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Fletcher, T.J. : 1970, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui – Essai d'une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré*. 4^{ème} Edition. OCDL. Paris.
- Freudenthal, Hans: 1973, *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.
- Kahane, J-P. : 1999, "Quelques aspects des définitions mathématiques", *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, n°189, 10-14.
- Lakatos, Imre : 1961, *Essays in the logic of mathematical discovery*, Thesis, Cambridge University Press.

- Lakatos, Imre : 1984, *Preuve et réfutations*, Cambridge University Press.
- Legrand, Marc : 1996, "La problématique des situations fondamentales". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°16-2, 221-279. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Leibniz : 1993, Discours de métaphysique. Collection Agora. Pocket.
- MATh.en.JEANS : 1997, "Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? " *Actes MATH.en.JEANS*, 175-176. Ed. MATH.en.JEANS, Paris.
<http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/97175175.pdf>
<http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/97175176.pdf> (Présentation du sujet & fiche d'accompagnement pédagogique).
- Ouvrier-Bufferet, Cécile : 2003, *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. Etude épistémologique et didactique de la définition. Etude théorique et expérimentale de la dévolution de problèmes de construction de définitions, auprès d'étudiants de 1ère année d'université*. Equipe CNAM - Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble. Sous la direction de Denise Grenier et Charles Payan.
- Ouvrier-Bufferet, Cécile : 2004, "Dévolution et gestion de Situations de Construction de Définitions en Mathématiques". *Symposium Travail du professeur et dévolution dans les classes ordinaires*, C.Margolinas. Présenté au colloque de l'AECSE. Paris, septembre 2004 (à paraître).
- Ramirez-Alphonsin, JL. : 2002 soumis, "The Diophantine Frobenius Problem", 190 p. (preprint Laboratoire Combinatoire & Optimisation Discrète, CNRS & Université Paris 6).
- Robinson, Richard : 1954, *Definition*. Oxford at the Clarendon Press.
- Vergnaud, Gérard : 1991, "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°10/2.3, 133-169.
- Vinner, Shlomo : 1991, "The role of definitions in teaching and learning of mathematics". In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer.
- Zaslavsky, Orit & Shir, Karni : 2004, "Students' Conceptions of a Mathematical Definition", *Journal for Research in Mathematics Education* (en cours de publication).

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

<http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html>

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE

ACTES DU SEMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES . ANNEE 2004

AUTEUR (S)

Corine CASTELA et Catherine HOUEMENT (EDS)

RESUMÉ

Ces actes recouvrent presque tous les textes correspondant aux communications faites lors des trois séances du séminaire national de didactique des mathématiques. Ces séances se sont tenues à Paris les 23 et 24 janvier, 26 et 27 mars et 22 et 23 octobre 2004.

Les thèmes suivants sont abordés : enseignement de l'algèbre, de l'arithmétique, de la géométrie, construction de définitions, gestes d'étude des élèves, pratiques d'enseignants en ZEP, écologie et économie du curriculum mathématique.

MOTS CLES

Didactique des mathématiques

Algèbre

Arithmétique

Géométrie

Définitions

Travail personnel des élèves

Dispositifs d'étude

Pratiques de l'enseignant

Enseignement en ZEP

Curriculum

Éditeur : IREM

Université Paris 7- Denis Diderot

Directeur responsable

de la publication : R.CORI

Case 7018 – 2 place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : mars 2005

ISBN : 2-86612-264-X