Approximations de solutions d'équations du type $f(x) = a$

Méthode de Newton

Martine Bühler

Le problème suivant a été donné en devoir à la maison en terminale scientifique. Il s'agit de déterminer le nombre de solutions d'une équation polynomiale grâce à l'étude d'une fonction, puis de calculer des approximations de ces solutions par l'étude d'une suite.

La quatrième question de la partie II se traitait dans les anciens programmes à l'aide de l'inégalité des accroissements finis et peut maintenant l'être par intégration d'inégalités sur un intervalle [a ;b] avec $a \leq b$.

La dernière question fait le lien entre tangente et approximation affine d'une fonction. D'une manière générale, peu d'élèves voient ce lien (mais la situation s'améliorera peut-être avec les nouveaux programmes, la méthode d'Euler étant abondamment traitée dès la classe de première scientifique, ce qui devrait aider les élèves à mieux percevoir ce lien). Il paraît nécessaire lors de la correction d'insister sur la comparaison demandée à la toute dernière question et de réexpliquer la relation entre tangente, dérivée et approximation affine.

Texte du problème

On considère l'équation (E) : $y^3 - 2y - 5 = 0$. Le but du problème est de déterminer le nombre de solutions de (E) dans R et d'en calculer des approximations de précision donnée.

I.Nombre de solutions de (E).

1°)Soit la fonction numérique f définie sur R par $f(y)= y^3 - 2y - 5$.

a)Etablir le tableau de variations de f.

b)Montrer que (E) possède une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 2,2].

2°)a)Déterminer le signe de $f(y)$.

b)L'équation (E) possède-t-elle d'autre solution que α dans R ?

3°) Montrer que : $\alpha \leq 2,1$.

II. Méthode d'approximation de Newton.

1°)Le texte suivant est extrait de *La Méthode des Fluxions et des Suites infinies* de Newton.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à réduire en suite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne diffère pas d'une de ses dixièmes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3+6p^2+10p-1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient ; rejettez p^3+6p^2 à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui est très près de la vraie valeur de p ; c'est pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & substituant comme auparavant, j'ai $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reste $11{,}23q+0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près.

a)Reliez l'affirmation des deux premières lignes aux résultats du I.

b)Partant de l'approximation 2 de α, Newton obtient comme deuxième approximation 2,1. Puis il recommence le même type de calcul ; terminez le travail et déterminez la troisième approximation.

c)Calculez en employant la même méthode la quatrième approximation à 10^{-8} près par défaut.

2°)Reprenons le calcul de q. Au lieu de remplacer p par $0{,}1 + q$ dans l'équation $p^3+6p^2+10p-1= 0$, remplacez y par $2{,}1+q$ dans l'équation (E) : que constatez-vous ?

3°)**Formalisation de la méthode de Newton.**

On appelle u la suite des approximations de α obtenues par Newton. On a donc $u_0=2$, $u_1=2{,}1$,etc. Pour obtenir u_{n+1} à partir de u_n, on remplace y par u_n+p dans l'équation (E) et on néglige les termes en p de degré supérieur ou égal à 2. On peut alors calculer p en fonction de u_n. La relation de récurrence définissant la suite u est alors : $u_{n+1} = u_n+p$. Déterminez cette relation de récurrence.

4°)**Etude d'une fonction auxiliaire.**

Soit la fonction g définie sur [2 ; +∞[par : $g(x)=\dfrac{2x^3+5}{3x^2-2}$.

a)Vérifiez que α est un point fixe de g.

b)Montrez que, pour $x \in [\,2 ; +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{6xf(x)}{(3x^2-2)^2}$. En déduire les variations de g.

c)Soit l'intervalle I = $[\alpha ; 2{,}1]$.Montrez :

- Si $x \in$ I, alors $0 \le g'(x) \le 0{,}008$.
- Si a et b sont deux éléments de I tels que $a \le b$, alors $0 \le g(b) - g(a) \le 0{,}008(b - a)$.

5°)**Etude d'une suite.**

On définit la suite u par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour } n \text{ dans } N, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a)Montrez que, pour tout n dans N^*, $u_n \in [\alpha\ ; 2{,}1]$.

b)Montrez que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq 0{,}008(u_n - \alpha)$.(On pourra utiliser 4°)c).

c)Déduisez-en que, pour $n \geq 1$, $0 \leq u_n - \alpha \leq 0{,}008^{n-1} \times 0{,}1$.

d)Concluez sur la convergence de la suite u.

e)Déterminez un entier n_0 tel que $0 \leq u_{n0} - \alpha \leq 10^{-5}$.

III. Interprétation géométrique.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f du I dans un repère orthonormé ; pour plus de commodité, nous revenons à la dénomination x pour la variable.

1°)Soit $x_0 = 2$.

a)Déterminez une équation cartésienne de la tangente T_0 à la courbe C au point A_0 de C d'abscisse 2.

b) T_0 coupe l'axe des abscisses en un point A_1 d'abscisse x_1. Calculez x_1 .

2°)On définit la suite x de la manière suivante :

$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} \text{ est l' absisse du point d' intersection de l' axe des abscisses et de la tangente à C au point } A_n \text{ de la courbe.} \end{cases}$

Déterminez l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

3°)Comparez au résultat du II.3°) et expliquez le résultat de cette comparaison.

Le texte suivant est extrait de La méthode des Fluxions et des Suites Infinies d'Isaac Newton, paru en 1736 et traduit en français par Buffon en 1740.

On considère Newton et Leibniz comme les fondateurs du calcul différentiel et intégral. Newton(1642-1727) a peu publié, entre autres par crainte des critiques. Etudiant à Cambridge, Newton dut interrompre ses études en 1665-1666 à cause de la peste qui sévissait dans la région de Londres. C'est durant ces deux années que Newton posa les fondements de sa mécanique et conçut la théorie des fluxions. Grâce à l'insistance et l'appui de son ami Halley, Newton publie en 1687 les Principes mathématiques de la Philosophie naturelle qui contiennent toute sa théorie (gravitation universelle, lois des mouvements et leurs relations avec les forces). La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies est publiée après sa mort. Il y expose sa méthode mathématique la plus fameuse : le calcul des « fluxions » (qui correspondent à nos dérivés) et résout les problèmes de recherche de tangentes à une courbe et de « quadratures » (calcul d'aires limitées par des courbes).

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en ſuite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ſes dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, ſubſtituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cauſe de ſa petiteſſe, il reſtera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui eſt très-près de la vraie valeur de p; c'eſt pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & ſubſtituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reſte $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en diviſant 0,061 par 11,23 juſqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient excluſivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-deſſous parce que ce Terme eſt Négatif; & ſuppoſant $-0{,}0054 + r = q$, je ſubſtitue comme auparavant, & je continue ainſi l'Opération auſſi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-deſſous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544852$ $+2{,}09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
SOMME.		$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$. $+0{,}06 + 1{,}2 + 6$ $+1, + 10,$ $-1,$
SOMME.		$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q$.	$+q^3$ $+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$-0{,}000000157464 + 0{,}00087480r - 0{,}0162r^2 + r^3$ $+0{,}000183708 - 0{,}06804 + 6{,}3$ $-0{,}060642 + 11{,}23$ $+0{,}061$
SOMME.		$+0{,}0005416 + 11{,}162r$
$-0{,}00004852 + s = r$		

XXI. On peut abreger le Calcul vers la fin de l'Opération, & cela principalement dans les Equations qui ont plusieurs Dimensions; vous déterminerez d'abord jusqu'où vous voulez pousser votre Extraction, c'est-à-dire combien vous voulez que le Quotient contienne de Chiffres; ensuite vous compterez autant de Chiffres moins un après la premiere Figure du Coefficient du dernier Terme des Equations, qu'il reste de Places à remplir dans le Quotient, & vous rejetterez les Decimales qui suivent; dans le dernier Terme il faudra négliger les Decimales qui seront au-delà du nombre des Figures du Quotient; dans le Terme antepénultiéme toutes celles qui seront en-deçà de ce même nombre de Figures, en procedant ainsi Arithmetiquement, suivant l'intervalle des Chiffres; ou bien, ce qui est la même chose, vous couperez par-tout autant de Figures que dans le terme pénultiéme; de sorte que leurs Places les plus éloignées soient en progression Arithmétique, selon la suite des Termes, ou soient supposées remplies de Chiffres, lorsque cela arrive autrement. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, si je ne veux pas pousser mon Extraction, ou continuer mon Quotient plus loin que la huitiéme Figure des Decimales; lorsque j'aurai substitué $0,0054 + r$ pour q, il y aura dans le Quotient quatre Places de Decimales remplies, & autant qui demeureront à remplir; je puis donc négliger les Figures dans les cinq places les plus éloignées, & c'est pour cela que je les ai croisées de petites lignes; & à la vérité j'aurois pû négliger aussi le premier Terme r^3 quoique son Coefficient soit 0,99999, &c. Ainsi en ne tenant plus compte de ces Figures, l'on aura dans l'Opération ci-dessus $0,0005416 + 11,162r$ pour la somme, ce qui par la Division continuée aussi loin que le terme prescrit, donne pour la valeur de r, $- 0,00004852$, ce qui remplit le Quotient jusqu'au Terme prescrit; il ne reste qu'à soustraire le Négatif du Quotient de l'Affirmatif, & l'on aura 2,09455148 pour la Racine de l'Equation proposée.