FONCTIONS IMPLICITES :

de la notion au théorème

Renaud Chorlay

Ce texte est issu d'une conférence donnée à l'I.R.E.M. Paris 7. Le principe en était la lecture commentée d'une série de textes permettant de retracer l'histoire du classique théorème des fonctions implicites. Le lecteur est donc invité, au fil de l'article, à prendre le temps de lire les documents rassemblés à la fin. Rappelons pour mémoire l'énoncé du théorème, ici dans sa première version publiée :

Proposition. *Soit $f(x,y)$ une équation entre les deux variables x et y, et x_0, y_0 un couple de valeurs des variables pour lequel $f(x_0,y_0) = 0$; Supposons que la fonction et ses dérivées partielles du premier ordre sont finies et continues au voisinage du point (x_0,y_0), et que $f_y'(x_0,y_0)$ n'est pas nul ; alors il existe une et une seule fonction y de x, $y = \varphi(x)$, qui vérifie l'équation au voisinage du point $x = x_0$, i.e. on a identiquement pour chaque x, $f(x,\varphi(x)) = 0$, et qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0. Cette fonction $y = \varphi(x)$ est continue et possède une dérivée finie.*

(Genocchi-Peano 1884)

Introduction

De nombreux travaux classiques ont largement permis de baliser l'histoire de l'analyse au 19ème siècle, sous le signe d'une *rigueur* toujours croissante. On a étudié la façon dont la mise au jour de contre-exemples amène à préciser les notions de continuité, de développement en série, de convergence uniforme, de continuité uniforme, etc. On a raconté le lent passage d'une notion de fonction identifiée à son expression symbolique jusqu'à une notion abstraite de relation entre ensembles de nombres (puis d'autres choses que des nombres, avec la notion générale d'application). On sait que le rejet progressif de certaines évidences géométriques a conduit, de Bolzano à Weierstrass, Cantor, Méray et Dedekind, à une arithmétisation de l'analyse et une définition claire de l'ensemble **R**. On a suivi les avatars de la querelle des infiniment petits, l'émergence des limites, l'algébrisation des différentielles.

Le théorème des fonctions implicites, au premier abord, ne semble pas relever tout à fait de la même strate : théorème utile, certes, mais qui ne constitue pas une pierre de touche de tout l'édifice analytique ; en un mot, il ne s'agit pas de la question des fondements. Nous pensons pourtant que son étude permet de compléter les analyses classiques et de toucher par un coin différent les questions fondamentales. Ce théorème est utilisé ici comme représentant d'une large classe de théorèmes d'analyse : c'est un théorème d'<u>existence</u> fonctionnelle, et c'est un théorème <u>local</u>. On en apprend beaucoup – et peut-être autre chose que ce qu'enseigne la lecture des seules définitions - sur ce que le 19ème siècle met sous ce mot de *fonction* en se demandant depuis quand, et dans quel contexte, on cherche à établir qu'une fonction vérifiant telle ou telle propriété existe. On ne peut s'interroger sur l'émergence des problèmes de passage du local au global, centraux au 20ème siècle, sans examiner les phases préalables qui voient la prise de conscience du caractère local des principaux théorèmes d'existence.

Nous montrerons dans une première partie combien la notion de fonction implicite est, pour un large 19ème siècle, à la fois centrale et non problématique – en un mot, *familière*. Elle ne pose donc pas de problème auquel un théorème patiemment démontré viendrait répondre. Nous nous intéresserons ensuite un peu longuement au travail de Cauchy, pour montrer que si, le premier, il établit des théorèmes d'existence fonctionnelle locale, son travail ne l'amène pas à remettre en cause le cadre traditionnel dans le cas des fonctions implicites. Nous présenterons enfin deux démonstrations données à la fin du siècle d'un théorème autonome répondant à une question bien identifiée. On le voit, notre histoire sera celle du passage de la <u>notion</u> de fonction implicite au <u>théorème</u> des fonctions implicites.

Précisons d'emblée quelques limites : premièrement, nous examinerons essentiellement les sources françaises ; deuxièmement, nous n'étudierons pas les problèmes, pourtant historiquement premiers, posés par la recherche de développement en série des fonctions implicites, d'Euler à Puiseux ; enfin nous nous limiterons au cas d'une seule équation : l'identification du rôle du déterminant jacobien ne sera pas ici examinée.

I Un modèle stable

a. La classification d'Euler (1748)

Le premier document présente des extraits du premier chapitre de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* (1748)[1], chapitre consacré aux généralités sur les fonctions. La présence d'un tel chapitre dans un traité de mathématiques est en soi une nouveauté, le terme de *fonction* ne s'étant jusqu'alors pas réellement imposé ; ainsi, si Jean Bernoulli définit en 1718 :

On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

le *Lexique Mathématique* de Wolff (1716) ne retient pour l'analyse que les termes de quantité *variable* et quantité *constante*. La définition eulérienne reprend celle de Bernoulli ; encore le mot définition est-il mal adapté : dans cet ouvrage à vocation pédagogique, ce chapitre introductif est plus consacré à poser un vocabulaire qu'à réellement définir des objets. On le voit aux flottements qu'Euler admet dans la distinction entre fonctions algébriques et fonctions transcendantes : il confesse qu'on peut considérer les fonctions du type z^c, où c est un irrationnel, comme des fonctions transcendantes, même si lui préfère les inclure parmi les fonctions algébriques. La fonction *à la* Euler est avant tout une expression (déf. 3), soumise à l'opération fondamentale de substitution d'une quantité déterminée à la quantité variable (déf. 4). Le souci de définir l'égalité des fonctions lorsque plusieurs expressions formellement distinctes conduisent aux mêmes valeurs, n'est pas un souci eulérien. La notion d' « *expression analytique* » ne fait pas l'objet d'une délimitation *a priori* ; elle s'élargit lorsque le besoin s'en fait sentir, incluant en particulier, outre les symboles d'opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine), le symbole = , puisqu' « *il faut aussi considérer la résolution d'équations* » (déf. 6). Les fonctions implicites se retrouvent dans le paragraphe 7, et sont nommées au paragraphe 8. Outre l'identification d'une fonction à une expression, la notion eulérienne de fonction diffère de la nôtre sur un point essentiel : pas de domaine de définition. Euler insiste même sur le contraire : « *aucune valeur déterminée n'est exclue de celles que la fonction peut prendre, puisque la quantité variable accepte les valeurs complexes.* »... le problème en 1748 est de légitimer l'utilisation en analyse des nombres négatifs et imaginaires ; il s'agit d'ouvrir des possibilités, non de les restreindre. On ne trouve ni restriction d'existence de l'image, donc pas de délimitation d'un domaine de définition en dehors duquel le calcul d'image n'est pas possible ; ni restriction d'unicité de l'image, ainsi qu'Euler l'explicite très clairement dans le paragraphe consacré aux fonctions multivoques (ou multiformes). Cette innovation eulérienne lui permet de clore la querelle des logarithmes en désignant le caractère naturellement multiforme de l'extension au domaine complexe de la fonction logarithme, dont l'uniformité[2] sur les réels positifs n'était finalement qu'accidentelle. La multivocité était d'ailleurs inévitable une fois la notion de fonction implicite admise comme élémentaire : la fonction racine carrée, définie implicitement par $Z^2 = z$ donne naturellement deux valeurs de la fonction Z pour chaque valeur de la variable z ; la fonction Z définie au paragraphe 7 par $Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$ a aussi peu de risque d'être uniforme. On le verra, faire l'histoire de la notion de fonction implicite,

[1] Document 1

c'est faire l'histoire de la notion de fonction multiforme, et la notion de fonction implicite ne deviendra problématique (et donc susceptible d'être l'objet d'un théorème, et non d'une simple explicitation de vocabulaire), que lorsqu'on imposera aux fonctions d'être uniformes, du moins pour certaines plages de valeurs de la variable. Notons la grande stabilité du couple (fonctions implicites, fonctions multiformes), qui survit jusqu'à la fin du 19ème siècle ; qui survit en particulier à la définition des fonctions comme des expressions de calcul. Déjà Euler, dans le deuxième tome de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* associait une fonction à toute courbe tracée librement par la main dans le plan (sans lever le crayon) ; le débat sur les cordes vibrantes l'amènera dans les *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) à une formulation abstraite de la notion de fonction :

> *« Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières. »*

b. Une formule de dérivation (Lagrange, 1806).

Lagrange explique dans l'avertissement de ses *Leçons sur le Calcul des Fonctions* le souci de rigueur qui l'anime. Il s'agit de fonder en raison l'ensemble du calcul des fonctions en l'épurant de toute notion métaphysique, à savoir des notions d'infiniment petit, de limite, ou de la notion cinématique de *fluxion*. Le moyen universel en est le développement en série entière : pour toute fonction f et toute valeur de la variable x, on peut développer $f(x+i)$ en une série de puissances de i. Lagrange met au premier plan la notion de fonction dérivée d'une fonction f : dans le développement de $f(x+i)$ en puissances de i, la fonction dérivée est donnée par le coefficient de i^1 ; réciproquement, une fois connu le mode de calcul de f' à partir de f, des dérivations successives permettent de reconstituer le développement en série. L'ensemble du traité exploite cette dualité de points de vue entre la dérivation et le développement en série. En particulier, le développement en série permet d'obtenir les formules usuelles de dérivation d'une somme de fonctions, d'un produit de fonctions, d'un quotient de fonctions, etc.

On le voit, l'objectif de rigueur n'embrasse pas une remise en cause de la « définition » eulérienne de fonction. La définition de Lagrange, telle qu'on la lit dans la première leçon, ne s'écarte en rien de celle de l'*Introductio* :

« Nous appellerons donc simplement fonction d'une ou de plusieurs quantités *toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque (...). »*[3]

Pas un mot dans ce chapitre introductif sur les fonctions implicites ou le problème de la multivocité ... les fonctions implicites sont-elles pour autant bannies ? Le *suspense* ne dure guère : si elles ne font pas l'objet d'une définition, ce n'est pas parce qu'on doit les rejeter, mais parce qu'elles font partie des notions tellement communes qu'elles ne méritent pas de mention particulière. On ne parle d'elles que lorsqu'il s'agit de savoir par

---

[2] Nous suivrons l'usage du 19ème siècle en utilisant indifféremment les termes « uniforme » et « univoque »

[3] Document 2, 1er extrait.

quelle formule les dériver. L'extrait de la leçon 6 étudie ainsi le cas où « *la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation entre x et y.* »[4] Lagrange déduit la formule de dérivation de celle permettant de dériver une fonction composée. Notons qu'il esquive le passage par les fonctions de deux variables en ne donnant la formule de dérivation de $f(p,q)$ que sous l'hypothèse où p et q sont deux fonctions de la même variable x.

La plupart des traités d'analyse du 19ème siècle s'en tiendront là : il n'y a pas de problème des fonctions implicites (encore moins de théorème) ; il n'y a qu'une formule de dérivation des fonctions implicites. Ce n'est toutefois pas exactement le procédé de démonstration de Lagrange qui s'imposera. Les manuels incluront la dérivation des fonctions implicites à la fin du chapitre consacré aux fonctions de plusieurs variables : notion de dérivée partielle, notion de différentielle totale. La déduction est d'une simplicité évangélique : puisque y est fonction de x de telle sorte que $f(x,y) = 0$ soit réalisé identiquement pour toute valeur de x, on en déduit

$f'_x\, dx + f'_y\, dy = 0$, d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-f_x'}{f_y'}$.

c. Une implantation dans d'autres branches.

Si notre exposé nous conduit naturellement à suivre les manuels d'analyse, on doit élargir brièvement le champ d'étude pour se faire une image plus exacte du rôle des fonctions implicites dans l'ensemble des mathématiques du 19ème siècle. On se limitera à deux aperçus.

En 1827, Gauss renouvelle le champ de la géométrie différentielle en publiant ses *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas.* On sait qu'il y introduit la notion de courbure en un point d'une surface (plongée dans $\mathbf{R}^3$), y généralise le théorème reliant la courbure totale d'un triangle géodésique à la somme des mesures de ses trois angles, et y formule le programme de recherche sur l'étude *intrinsèque* des propriétés métriques des surfaces, considérées comme des films souples sujets à des déformations et non comme des bords de solides indéformables. Ces progrès s'appuient sur un nouveau mode de description des surfaces : là où on décrivait classiquement une surface par une équation $f(x,y,z) = 0$, Gauss utilise systématiquement une description paramétrique $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. L'étude métrique des surfaces repose sur l'étude de la forme différentielle quadratique $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, obtenue en tirant en arrière le produit scalaire de l'espace ambiant. La possibilité de passer indifféremment d'une représentation implicite à une représentation paramétrique n'est pas problématisée. Gauss note toutefois que sa théorie ne s'applique qu'aux surfaces admettant en chaque point un plan tangent, et qu'on peut toujours passer de $f(x,y,z) = 0$ à une représentation paramétrique du type particulier $z = g(x,y)$, pour peu qu'on choisisse le plan tangent comme plan (x,y). On peut certes y voir une formulation implicite du théorème des fonctions implicites ... ce n'est pas ce qu'y voient les contemporains – qui ont, il est vrai, des choses plus importantes à apprendre de ce traité. Pour prendre la mesure du passage du temps, notons qu'à la fin du siècle le traitement du problème devient explicite. Ainsi en 1895, lorsque Poincaré ouvre son article sur l'*Analysis Situs* par la définition des variétés (i.e. des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$), il appuie l'équivalence entre les deux modes de représentation des variétés sur des conditions de non-nullité de déterminants jacobiens. Notre théorème des fonctions implicites, à plusieurs variables, est donc utilisé dans

[4] Suite et fin du document 2

l'exposé comme relevant des connaissances communes. On notera par contre que Poincaré n'inclut dans ses caractérisations des variétés que des conditions locales obtenues au moyen de notions différentielles (nous dirions : conditions pour qu'une application C^∞ soit une submersion ou une immersion) : les conditions globales d'injectivité ou de propreté ne figurent pas.

Outre le champ de la géométrie différentielle, on doit avoir à l'esprit que les fonctions les plus étudiées au 19ème siècle sont les fonctions elliptiques puis abéliennes. Il s'agit, au départ, de calculer des intégrales du type $\int ydx$ où y est une fonction algébrique de x, donc définie implicitement par une équation polynomiale $f(x,y)=0$. Les questions de classification de ces « intégrales abéliennes », de décomposition en somme d'intégrales élémentaires, prennent un nouveau tour par extension au domaine complexe : il s'agit d'étudier les fonctions complexes de la forme $z \mapsto \int_{z_0}^{z} ydx$ où toujours $f(x,y) = 0$ pour un polynôme f, l'intégrale étant une intégrale curviligne. Le nombre z_0 étant fixé, cette fonction est multivoque pour deux raisons : multivocité de y, multivocité due à la multiplicité des chemins reliant z_0 à un même z. On ne peut surestimer l'importance de cette théorie : en sont sorties une bonne partie de la théorie des fonctions d'une variable complexe, une bonne partie de la topologie algébrique et de l'analyse sur les variétés (grâce à la formulation « géométrique » du problème par Riemann en 1857), une bonne partie de l'algèbre commutative (grâce aux études algébriques du corps obtenu comme extension de $\mathbf{C}(x)$ par l'équation $f(x,y) = 0$). Bien qu'à l'origine d'une grande partie des mathématiques sophistiquées du 20ème siècle, cette théorie des fonctions abéliennes – du moins des fonctions elliptiques – n'en fait pas moins partie au 19ème siècle des notions communes à tout mathématicien. Dans la deuxième moitié du siècle, une part importante des cours de Licence est en France consacrée à ce que nous nommerions des « fonctions de référence » : outre les fonctions rationnelles, circulaires, exponentielle et logarithme, sont étudiées les fonctions elliptiques. On ne peut se vanter d'avoir étudié les mathématiques sans connaître les procédés de calcul d'intégrales ou de résolution d'équations différentielles au moyen de fonctions elliptiques.

II Cauchy a d'autres chats à fouetter

La conclusion de cette seconde partie sera nette : Cauchy n'a pas démontré le théorème des fonctions implicites. Pourquoi donc s'y arrêter ? Parce que, sous la platitude apparente de cette conclusion se cachent deux thèses qu'il nous appartient d'établir : (1) c'est Cauchy qui aurait dû, le premier, démontrer ce théorème ; (2) comprendre pourquoi il ne l'a pas fait permet de cerner assez finement le mouvement général de l'analyse dans la période 1820-1870.

a. Les années 1820 : des doutes sur les fondements.

Quelques « évidences » dans les traités d'Euler ou de Lagrange soulèvent des doutes pour quelques uns des grands noms du début du 19ème siècle.

Un premier point est l'identification des fonctions à des expressions. Cauchy introduit dans son cours d'analyse à Polytechnique l'exemple de la fonction définie par $\begin{cases} x \mapsto x & si\, x \geq 0 \\ x \mapsto -x & si\, x < 0 \end{cases}$; fonction qu'Euler appelait *discontinue*, c'est-à-dire définie au moyen de plusieurs expressions. Cauchy fait remarquer que cette fonction peut aussi s'écrire au moyen de l'unique expression $\sqrt{x^2}$, faisant ressortir l'ambiguïté de la notion eulérienne.

Une deuxième interrogation remet en cause non le vocabulaire mais la méthode même de l'analyse. Ainsi Abel écrit-il en 1826 :

> *« Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du spécial au général, et ce qu'il y a de merveilleux, c'est qu'après de tels procédés on ne trouve que rarement ce qu'on appelle des paradoxes. Il est vraiment très intéressant de chercher la raison de ceci. Cette raison à mon avis il faut la voir dans ce que les fonctions dont s'est occupée jusqu'ici l'analyse, peuvent s'exprimer pour la plupart par des puissances. Quand il s'en mêle d'autres, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, on ne réussit plus guère, et pour peu qu'on en tire de fausses conclusions, il en naît une infinité de propositions vicieuses qui se tiennent les unes les autres. »*[5]

La belle confiance que Lagrange place en la représentation des fonctions par des séries entières fait aussi l'objet des critiques de Cauchy dans son avertissement du *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*[6], texte qui reprend les cours de première année de la période 1819-1823. Dualité de l'interrogation : on peut douter que la série de Taylor converge ; on peut douter, lorsqu'elle converge, que ce soit vers la fonction de départ. Le contre-exemple que Cauchy donne à ce propos à la fin de la Leçon 38 est toujours celui que nous utilisons : la fonction $exp(-1/x^2)$, prolongée par continuité en 0, a toutes ses dérivées successives nulles en 0, et n'est pourtant nulle sur aucun voisinage de 0. Ainsi que l'annonce Cauchy, l'existence de primitives à toute fonction (continue) lui paraît aussi nécessiter une démonstration. Il la donnera par un procédé que nous retrouverons bientôt : (1) utilisation d'une méthode numérique d'approximation comme procédé de démonstration d'existence d'une fonction (2) renversement de la démarche usuelle : là où l'on partait de l'existence de primitive pour expliquer le mode de calcul d'intégrales définies, démonstration de l'existence de l'intégrale définie, d'où existence de fonctions primitives obtenues en faisant varier les bornes d'intégration.

Notons que ces doutes sur la représentation des fonctions par des séries concernent aussi les séries trigonométriques : Dirichlet établit en 1829 son théorème sur les séries de Fourier.

b. A l'ombre des équations différentielles.

Avant d'aborder le cas spécifique du cours de seconde année professé par Cauchy à l'X jusqu'en 1823, il faut rappeler les éléments du contexte qui font que, jusque dans les années 1870, la question des fonctions implicites,

[5] Cité dans l'article de A. Monna.
[6] Document 3

dans les rares cas où elle se pose, n'est formulée que dans le cadre de la théorie des équations différentielles ordinaires. La raison en est triple :

- Pour peu que l'on suppose toute fonction dérivable, la formule de dérivation des fonctions implicites permet de considérer que la fonction y définie implicitement par $f(x,y) = 0$ n'est autre que la solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}$.
- Plus généralement, le flou dans la définition de ce qu'est une « expression » définissant, explicitement ou implicitement, une fonction, permet de considérer les solutions d'équations différentielles comme cas particuliers de fonctions implicites : l'expression les définissant implicitement comprend, outre les symboles algébriques et le symbole =, les symboles de dérivation ; rien là-dedans qui répugne à l'idée générale d' « implicite ». On le trouve sous la plume de Cauchy : dans le texte sur le calcul des limites[7], il présente un premier théorème concernant « *une fonction implicite u de la variable x (...) déterminée par une équation algébrique ou transcendante (...)* », puis généralise : « *Les propositions ci-dessus mentionnées peuvent encore facilement être étendues au cas où les fonctions implicites seraient déterminées par des équations aux différences finies ou infiniment petites, ou aux différences partielles, ou aux différences mêlées.* ». Réciproquement, si $f(x,y,y') = 0$ est la forme générale d'une équation différentielle ordinaire, une définition de fonction implicite au sens strict, de la forme $f(x,y) = 0$, apparaît comme un cas particulier d'équation différentielle : une équation différentielle sans différentielle !
- Le premier chapitre du cours de deuxième année[8] relie les fonctions implicites, non aux notions générales sur les équations différentielles, mais à leurs méthodes de résolution. Le procédé, classique, se trouve déjà chez Clairaut en 1740 : résoudre une équation différentielle du premier ordre $y' = f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ revient à chercher une fonction u, dont $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ soit la différentielle totale. Clairaut a montré que la condition $P_y' = Q_x'$ est nécessaire et suffisante[9] à l'existence de u. Cette fonction u définit elle-même implicitement les solutions y de l'équation différentielle initiale au moyen des équations $u(x,y) = c$, où c est une constante réelle.

On peut lire dans le chapitre 7 de ces cours de deuxième année[10] ce qui est sans doute la première démonstration abstraite d'existence de solutions à une équation différentielle ordinaire. Le simple fait de chercher une démonstration oblige à une réorganisation conceptuelle. L'idée de la démonstration consiste en ceci : partir d'un couple (x_0,y_0) arbitraire ; découper un intervalle $[x_0,x]$ en un nombre fini de sous-intervalles, sur lesquels on interpole linéairement par la méthode d'Euler ; x étant fixé, montrer que la valeur Y qui lui est associée converge vers une valeur déterminée lorsque la taille du découpage de $[x_0,x]$ tend vers 0. C'est ce que résume le théorème 3. La nécessité d'établir la convergence fait ressortir des conditions suffisantes sur le comportement de f en (x_0,y_0) (au niveau des hypothèses du théorème 4), et conduit à formuler explicitement le caractère local du

[7] Document 7
[8] Document 4
[9] Nous ne serions sans doute plus de son avis quant au caractère suffisant de cette condition !
[10] Document 5

résultat (conclusion du théorème 4). Le problème du recollement global des solutions locales est abordé très clairement dans le chapitre 8, dont nous donnons un extrait dans le document 6.

On retrouve dans ces pages historiques les traits que nous avions relevés à propos de la démonstration d'existence des primitives dans le cours de première année. Dans les deux cas Cauchy, le premier, formule explicitement le problème très abstrait de l'existence de fonctions soumises à des conditions formulées en termes généraux. Dans les deux cas il transforme une méthode numérique d'approximation en une méthode de démonstration, ce qui le conduit à chercher des fonctions particulières avant des fonctions générales : l'existence de l'intégrale *définie* est démontrée d'abord, avant de laisser varier une des bornes d'intégration pour obtenir une primitive ; l'existence d'une solution à l'équation différentielle *vérifiant une condition initiale* (problème "de Cauchy") est démontrée sans s'appuyer sur l'existence, admise jusqu'alors, d'une solution générale . Le caractère local de la solution, enfin, est clairement explicité. Les démonstrations du théorème des fonctions implicites partent du même souci et peuvent se faire par les mêmes méthodes ... mais elles ne seront pas le fait de Cauchy.

c. Sous le signe du « calcul des limites » (1831)

Les travaux de Cauchy prennent une autre direction à partir des années 1830, avec la découverte d'un merveilleux « calcul des limites ». Lisons le théorème 1 du document 7 : les méthodes usuelles de détermination des fonctions implicites y sont rappelées ; cette fonction étant supposée développable en série, le calcul des dérivées successives à partir de la formule implicite ou la méthode des coefficients indéterminés permet, théoriquement, de déterminer la fonction. Aux doutes théoriques sur la possibilité de représenter toute fonction par une série entière s'ajoute, sous la plume de Cauchy, une critique de la pénibilité de ces calculs. Cauchy nous assure que sa méthode nouvelle garantit l'existence de la série entière convergeant vers la fonction, et permet d'en calculer aisément les coefficients. En quoi consiste donc ce prodigieux « calcul des limites » ? La suite du document 7 montre qu'il s'agit des premières formules sur les fonctions que nous nommons holomorphes. Après une introduction heuristique où les coefficients d'un simple polynôme (identifiés aux coefficients du développement en série en 0) sont obtenus comme intégrales curvilignes le long d'un cercle autour de l'origine (notons que l'interprétation géométrique n'est pas, ici, donnée), Cauchy énonce la formule intégrale générale permettant de calculer $f(0), f'(0),..., f^{(n)}(0)$. De la formule intégrale on déduit, à la fin de l'extrait, le développement en série ; l'extension du « disque de convergence » fait l'objet de la dernière remarque.

On remarque l'absence de formulation géométrique ; le fait que l'on travaille dans le domaine complexe est lui même plus implicite qu'explicite – discret, à tout le moins. Le travail d'analyse de Cauchy se dirige pour de nombreuses années vers l'exploitation de ce merveilleux calcul des limites, et du « calcul des résidus » qu'on obtient par son moyen. Il serait historiquement faux de dire que Cauchy se détourne de la variable réelle pour fonder et exploiter la théorie des fonctions d'une variable complexe ... la distinction entre les deux n'est pas claire avant de nombreuses années. On assiste dans un premier temps à la formulation géométrique de la théorie de la variable complexe. Pour preuve, Cauchy donne en 1835 une nouvelle démonstration du théorème d'existence pour les équations différentielles, démonstration qui repose ... sur le calcul des limites. Là où nous verrions un autre théorème, spécifique au domaine complexe, Cauchy pense donner une nouvelle démonstration, plus rapide et élégante, du même théorème.

d. Combien de fonctions pour une fonction ?

La pièce suivante à joindre au dossier des fonctions implicites porte non pas sur un éventuel théorème d'existence, mais sur leur place parmi les fonctions – et plus généralement sur l'évolution de la notion de fonction elle-même. L'utilisation progressive du registre géométrique en théorie des fonctions conduit Cauchy à réfléchir sur ce que nous nommerions le domaine de définition, et à s'interroger sur la place des fonctions multiformes. Le document 8, extrait d'un *Mémoire sur les fonctions continues des quantités algébriques et géométriques* est à ce titre significatif. La distinction entre domaine réel et domaine complexe y est parfaitement claire, une fonction réelle reliant les mouvements de deux points mobiles sur une droite alors qu'une fonction complexe relie deux points mobiles dans le plan. Le passage reproduit ne traite que du cas réel ; Cauchy y conçoit qu'une fonction implicite pourrait avantageusement être regardée comme réunion de plusieurs fonctions explicites ... encore ne s'agit-il ici que d'une question de commodité et non d'une remise en cause théorique de la multivocité. Pour parler librement de ces différentes fonctions (explicites) cachées dans une seule fonction (implicite), c'est le registre géométrique qui fournit le vocabulaire : il y aura des « *branches* » de courbe, chacune associée à une fonction explicite. Notons que la question de la multivocité n'est pas la seule en jeu dans cette réinterprétation géométrique : ainsi une fonction réelle univoque mais discontinue présente-t-elle aussi plusieurs branches ... faut-il y voir pour autant plusieurs fonctions ? Il semble d'ailleurs dans ce passage que Cauchy utilise le terme de « fonction explicite » pour parler des « fonctions univoques ». On voit que le cœur de la réorganisation conceptuelle est la notion de fonction univoque continue ; les fonctions multivoques et les fonctions discontinues sont sur la sellette, non tant à cause de la multivocité de certaines que parce qu'elles posent le problème du prolongement par continuité. Notons que la suite de ce mémoire étend ces réflexions au domaine complexe, en proposant d'introduire des « *coupures* » dans le plan pour définir des fonctions univoques associées à une fonction multivoque.

e. Une identification tardive de la spécificité du domaine complexe.

C'est 25 ans après avoir fondé la théorie des fonctions d'une variable complexe que Cauchy explicite ce qui les distingue des fonctions d'une variable réelle... il aura fallu un siècle pour que la possibilité soulignée par Euler (« *la quantité variable accepte les valeurs complexes* ») soit problématisée. Certes les nombres complexes sont des extensions des nombres réels, mais il n'est pas vrai que la théorie des fonctions d'une variable complexe soit une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable réelle – ce qui impliquerait que tout théorème démontré dans le domaine complexe admette, comme cas particulier, un théorème réel; cette idée pourtant si évidente, si utile un siècle durant, repose sur une assimilation abusive de la dérivation complexe à la dérivation réelle. C'est de cela que Cauchy prend conscience dans *Sur la théorie des fonctions*[11] (1856) : une fonction de deux variables n'est dérivable au sens complexe en un point que si sa dérivée partielle au sens réel ne dépend pas de la direction selon laquelle on approche le point – Cauchy parle alors de fonction *monogène*. Ses réflexions sur

[11] Document 9

le registre géométrique et les questions d'existence et d'unicité de l'image lui servent ensuite à isoler la classe des fonctions simples qui doivent être au cœur de la théorie, et à partir desquelles les autres doivent être décrites : ces fonctions seront monogènes (C-dérivables), monodromes (univoques) et ne prendront que des valeurs finies ... le terme de *synectique* qu'il choisit sera bientôt remplacé, dans le traité de Briot et Bouquet (1859), par celui d'*holomorphe*.

* * *

Dans l'œuvre de Cauchy, on retrouve les fonctions implicites en de nombreux endroits, mais jamais au centre de la réflexion ... elles font partie du paysage, elles font l'objet d'une formule de dérivation bien connue de tous les étudiants et que Cauchy, à l'instar de tous ses collègues, a dû enseigner mille fois; on les retrouve dans de nombreux problèmes d'analyse pure ou appliquée. Par cette omniprésence familière, elles bénéficient de chacun des progrès de la théorie des fonctions sans jamais poser de problème spécifique : il y a chez Cauchy un problème de représentation des fonctions par des séries entières, un problème d'existence des primitives et, plus généralement, de solutions à toute équation différentielle ... mais pas de problème des fonctions implicites. Cauchy s'est approché de très près de cette question, toutefois, dans ses cours de seconde année de l'X au début des années 20, mais celle ligne de recherche se trouva marginalisée pour plusieurs raisons. Raison pratique : à partir de 1823, la direction de l'Ecole demande à Cauchy de ne plus embarrasser ses étudiants avec des sujets aussi ésotériques. Ces cours de seconde année ne seront pas publiés, ne seront pas repris dans les œuvres complètes. Ce qui aurait pu servir à tout un siècle de modèle de démonstration pour une large classe de théorèmes locaux d'existence ne fut connu que par l'ouvrage de l'Abbé Moigno (1845), rédigé d'après les cours de Cauchy, mais en affaiblissant la portée novatrice[12]. Raison théorique : dans un contexte d'indistinction des domaines réels et complexes, Cauchy pense résoudre par le calcul des limites la plupart des problèmes qu'il avait lui même soulevés dans les année 1820, légitimant après coup les méthodes usuelles de développement en série entière ou trigonométrique.

III Différentes versions d'un théorème autonome

a. Les années 1870 : un nouvel intérêt pour la variable réelle

On avait vu dans les années 1820 quelques grands mathématiciens, Abel, Dirichlet, Cauchy, exprimer des doutes sur l'universelle validité des méthodes de leurs prédécesseurs et produire des contre-exemples ; les questions en jeu étaient celle du développement en série (entière ou trigonométrique), et, dans une moindre mesure, la notion même de fonction et la définition de la continuité. La nette séparation entre les domaines réel et complexe permet de prendre conscience à partir des années 1860 de problèmes spécifiques à la variable réelle. Des contre-exemples surgissent :

[12] Le texte dont nous avons reproduit des extraits a été retrouvé au début des années 1980 par Christian Gilain.

- A propos de la définition de la continuité pour les fonctions de deux variables réelles :
  - Schwarz 1872 : $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ prolongé par 0 en (0,0). La discontinuité est manifeste si l'on pose, par exemple, $x = y$.
  - Darboux : $f(x,y) = \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^4}}$ prolongée par $f(0,0) = 0$ et $f(x,0) = 0$: la fonction n'est pas continue en 0 (regarder $x = y^2$) mais le semble lorsque (x,y) se rapproche de l'origine selon n'importe quelle droite.
- Schwarz, Thomae en Allemagne, Darboux en France soumettent à la critique la formule « usuelle » : $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$
- Pour les fonctions d'une seule variable, le *Mémoire sur les fonctions discontinues* publié par Darboux en 1875 marque une étape critique : nécessité de soumettre « *bien des points, qu'on regarderait à bon droit comme évidents ou que l'on accorderait dans les applications de la science aux fonctions usuelles, (...) à une critique rigoureuse dans l'exposé des propositions relatives aux fonctions les plus générales.* » Darboux y démontre entre autres résultats contre-intuitifs « *qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, qu'il y a des fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.* »

Notons que cet effort de rigueur n'est pas spécifique au domaine réel : les cours de Weierstrass explorent avec une rigueur toujours croissante les propriétés topologiques de la droite réelle et du plan complexe nécessaires à fonder la théorie des fonctions holomorphes.

On doit toutefois souligner la marginalité de ces travaux. Dans les seuls cours de Weierstrass, on peut suivre le progrès de la rigueur en lisant les différentes versions rédigées par les étudiants ; il ne semble pas qu'avant 1870 Weierstrass ait douté de la dérivabilité des fonctions continues. Du Bois-Reymond rapporte que, jusqu'en 1873 en Allemagne, nul ne doutait que la série de Fourier de f convergeât vers f. Pour la France, Darboux travaille dans l'isolement et une relative incompréhension : « *On raconte qu'en 1875 Darboux fut quelque peu blâmé de s'être laissé aller à étudier de telles questions.* », rapporte Lebesgue. On connaît la boutade de Hermite, écrivant à Stieltjes : « *je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.* »

Nos critiques marginaux vont toutefois enseigner et rédiger des traités ... aucun de leurs étudiants ne croira plus que toute fonction continue est dérivable. Pour illustrer le changement d'esprit très net dans cette nouvelle génération de traités d'analyse, nous avons reproduit dans le document 10 le début de la table des matières de trois traités. Le cours de Hermite, publié en 1873, est le représentant de l'ancienne génération. Les premiers traités novateurs paraissent en Italie : *Fundamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili reali*, publié par Dini en 1878 ; cours de calcul différentiel et intégral de Genocchi et Peano (1884). Malheureusement, le cours complet que Dini professait à Pise dans les années 1876-78 n'a été publié que trente ans plus tard ... la démonstration du théorème des fonctions implicites de Dini est sans doute la première exposée, mais la première publiée fut celle de Genocchi et Peano. Pour la France nous avons reproduit le début de la table des matières de la $3^{ème}$ édition du cours de calcul différentiel. L'attitude de Jordan est à cet égard significative. Nommé à l'Ecole Polytechnique, il rédige rapidement un cours à la manière classique. Ainsi le tome 1 de la première édition de son cours (1883) est-il proche de celui de Hermite ; à peine note-t-il l'existence de fonctions continues non dérivables : « *ces fonctions anormales ne seront pas abordées dans ce cours* ». La publication du $3^{ème}$ tome de la $1^{ère}$ édition, en 1887, lui donne l'occasion de revenir sur certains points admis trop rapidement en 1883 : le théorème des fonctions implicites est ainsi démontré en 1887, alors que seule la formule de dérivation avait sa place dans le traité de 1883. C'est en fait la deuxième édition « *entièrement remaniée* », en 1893, qui marque la rupture avec l'ancienne mode, et propose à la période moderne son ouvrage classique.

On peut dans ces extraits de tables des matières lire les traits caractéristiques de cette nouvelle manière. L'analyse ne repose pas sur la manipulation des infiniment petits mais sur les propriétés de la droite réelle : la notion de limite est première ; elle permet de poser le problème des bornes inférieures et supérieures, de définir l'adhérence et la frontière d'un ensemble de points. Selon les auteurs, d'autres propriétés sont mises en avant : propriétés « topologiques » (connexité, densité de certaines parties), propriétés ensemblistes (distinction cantorienne entre l'infini dénombrable et le non-dénombrable), propriétés de mesure. Viennent ensuite les fonctions, caractérisées non plus par leur expression (algébrique, rationnelle, implicite...) mais par une propriété caractéristique (continue, à variation bornée...). Un cheminement standard est adopté pour entrer dans le calcul différentiel : démonstration topologique du théorème *dit* de Rolle, théorème des accroissements finis. Ce théorème est la pierre de touche : peu de résultat qui n'en soit corollaire.

b. Les démonstrations italiennes : Dini, Genocchi, Peano.

La démonstration donnée par Jordan du théorème des fonctions implicites est la même que celle qu'on lit, pour la première fois imprimée, chez Genocchi et Peano (1884) : nous en avons donné dans le document 11 une traduction, d'après l'édition allemande de 1899. Comme depuis un siècle, ce théorème trouve sa place dans le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables ; le souci nouveau est de démontrer l'existence de la fonction puis sa dérivabilité, avant d'établir la formule usuelle de dérivation. L'idée générale est élémentaire : la condition $f_y'(x_0,y_0) \neq 0$ et la continuité de f_y' garantissent la stricte monotonie des fonctions $y \longmapsto f(x,y)$, pour les valeurs de x dans un intervalle suffisamment petit autour de x_0. La condition $f(x_0,y_0) = 0$ garantit que ces fonctions de la seule variable y changent de signe dans un intervalle suffisamment petit autour de y_0, intervalle ne dépendant pas de x. Ce théorème d'existence garantit aussi la continuité, la construction ayant lieu dans une « boîte » arbitrairement petite autour de (x_0,y_0). La dérivabilité est établie dans un deuxième temps au moyen du théorème des accroissements finis.

c. Une variété de points de vue.

L'énoncé du théorème va se stabiliser, du moins jusqu'à ce qu'on ressente le besoin de travailler directement dans tout espace de Banach. Par choc en retour, la notion même de « fonction implicite » se voit définie : une fonction implicite est ce dont parle le théorème des fonctions implicites ! Le théorème a priorité sur la notion, après plus d'un siècle où la notion commune n'avait pas semblé appeler de théorème. La démonstration donnée par Dini, puis Genocchi et Peano va elle aussi s'imposer longtemps. On peut trouver un exposé classique des différents aspects de la question dans les *Cours d'Analyse Mathématique* d'Edouard Goursat, qui font référence en France dans la première moitié du 20ème siècle. Les fonctions implicites méritent un chapitre entier, après celui consacré aux fonctions de plusieurs variables. Goursat commence par démontrer le théorème *à la* Dini, en précisant que ce théorème n'épuise pas la question : il ne donne que des « *éléments de fonctions* » et laisse entier le problème du prolongement maximal ... qui ne sera pas abordé dans ce manuel élémentaire ; est donnée ensuite une méthode numérique d'approximation des valeurs de la fonction implicite : pour une valeur de x fixée est construite une suite y_n convergeant vers $y = \varphi(x)$ (pour reprendre la notation de Genocchi) ; dans un troisième temps, deux des usages standards de ce théorème sont étudiés : application en géométrie différentielle élémentaire ; application au problème de l'inversion d'un système de n équations à n inconnues.

Nous voudrions terminer cet exposé en montrant comment deux des questions étudiées par Goursat comme subordonnées au théorème des fonctions implicites vont être appelées à passer au premier plan dans la seconde moitié du 20ème siècle. Il ne s'agit ici que d'indiquer des perspectives.

La méthode numérique d'approximation mentionnée par Goursat utilise le théorème du point fixe dans **R** : x est fixé, c'est donc la suite numérique y_n qui et construite et étudiée. Dans le traité de Hadamard[13], si l'énoncé du théorème des fonctions implicites ne change pas, le procédé de démonstration n'est plus celui de Dini, Genocchi ou Jordan. Limitons nous à une variable : au paragraphe 247bis, la recherche de y vérifiant $F(x,y) = 0$ (au voisinage du couple (a,b), annulant F) est reformulée comme un problème de point fixe $y-b=-\dfrac{1}{F_y'(a,b)}\big((F_y'(a,b)\,(b-y)+f(x,y)\big)$; en réécrivant cela $y-b=\varphi(x,y)$ où φ est continue et s'annule en (a,b), on peut choisir un voisinage de (a,b) sur lequel $|\varphi(x,y)-\varphi(x,Y)| < K\,|Y-y|$ pour une constante K strictement inférieure à 1, indépendante de x. Cette application contractante permet de construire récursivement une suite convergeant vers un point fixe y. Il est significatif que cette démonstration ne se trouve pas, dans le traité de Hadamard, dans le chapitre consacré aux fonctions de plusieurs variables mais dans le chapitre sur les théorèmes généraux d'existence pour les équations différentielles. On y voit l'influence des travaux d'Emile Picard dans ce domaine : les méthodes de point fixe, dans les espaces fonctionnels, sont entre temps devenu l'outil essentiel des démonstrations d'existence de fonction. Le rapprochement des fonctions implicites et des intégrales d'équations différentielles ordinaires n'a donc plus le sens qu'il pouvait avoir un siècle plus tôt : une équation différentielle n'est plus tant un cas particulier de définition implicite de fonction ; c'est l'existence d'un procédé général de démonstration qui fonde le rapprochement. Un point commun cependant avec la démarche du Cauchy des années 1820 : c'est un algorithme numérique classique qui change de sens pour devenir le cœur d'une démonstration d'existence. On trouvera dans le document 13 l'un des premiers articles (1891) dans lesquels Picard démontre par la méthode du point fixe qui porte son nom le théorème général d'existence pour les équations différentielles ordinaires.

On a vu que Goursat signalait, parmi les applications classiques du théorème des fonctions implicites, l'existence d'un critère différentiel simple permettant d'étudier le problème de l'inversion, i.e. de la résolution implicite

[13] Document 12

d'un système de n équations à n inconnues. Ce problème d'inversion va passer au premier plan, pour devenir le théorème d'inversion locale dont on déduira le théorème des fonctions implicites. Nous avons donné en document 14 le début d'un article novateur de Hadamard dans lequel celui-ci entreprend d'étudier les problèmes posés par le caractère *local* du théorème d'inversion ainsi obtenu. Le soin avec lequel la question est formulée suffit à montrer combien, en 1906, il n'est pas courant de s'interroger sur la surjectivité (problème d'existence) et l'injectivité (problème d'unicité) d'une application de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même. A titre heuristique, Hadamard étudie dans un premier temps la situation dans $\mathbf{R}$: la fonction dérivée étant, par hypothèse, de signe constant, l'injectivité ne pose pas problème ; la surjectivité peut être étudiée au moyen d'un critère simple : dans le cas où f est strictement croissante, f est surjective si et seulement si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. La situation dans $\mathbf{R}^n$ (n>1) connaît un curieux renversement : un critère généralisant celui donné dans 3 permet d'étudier assez simplement la surjectivité ; l'injectivité par contre, qui ne posait pas de problème dans le cas à une dimension, devient problématique en dimension n. La suite de l'article (non reproduite ici) consiste en l'étude d'un critère calculatoire permettant de passer de l'injectivité locale à l'injectivité globale.

Conclusion

Nous avons construit cet exposé autour de deux périodes, les années 1820, les années 1870, caractérisées chacune par une forme de progrès de la rigueur en analyse ... ce sont bien les périodes identifiées par les études classiques sur les fondements de l'analyse. Le fil conducteur des fonctions implicites permet d'éclairer sous un autre jour ce qui, à chaque époque, fait problème pour certains mathématiciens - souvent marginaux dans leurs scrupules de rigueur. Pour l'immense majorité des étudiants en science du 19ème siècle, les fonctions implicites ne posent pas de problème théorique : notion commune, elles font l'objet d'une formule de dérivation simple qui s'ajoute à la liste des formules usuelles (dérivation d'une somme, d'un produit ...). Dans les années 1820 se voient posés deux types de questions fondamentales à propos des fonctions : les questions d'existence et les questions de représentation. Par une ironie de l'histoire, la démonstration fondamentale donnée par Cauchy au début des années 20 d'existence de solutions au « problème de Cauchy » pour les équations différentielles ordinaires n'a pas été le point de départ d'une série de démonstrations d'existence locale en théorie des fonctions ; le manuscrit fut oublié, et Cauchy se détourna de ces questions du jour où son calcul des limites parut pouvoir résoudre plus simplement à la fois les questions d'existence et les questions de représentation par des séries entières. Pour encore cinquante ans les questions d'existence demeurent marginales[14]. Ce qui, en théorie pure des fonction, pose problème dans les années 20, c'est la continuité et jamais la dérivabilité : tant que toute fonction continue est supposée dérivable (et analytique), un éventuel problème des fonctions implicites demeure subordonné au problème des équations différentielles ordinaires. Tant que les fonctions peuvent être multivoques, la notion de domaine de définition ne peut émerger. Dans ce modeste exposé, nous n'avons pas suivi ce fil assez systématiquement pour se faire une idée nette de la montée de la condition d'univocité ; les réflexions qui ont jalonné le siècle, autour des notions de *branche*, de *coupure*, d'*élément de fonction*, de prolongement analytique ... appelleraient une étude autonome.

L'identification tardive de la spécificité des théorèmes d'analyse concernant les fonctions holomorphes fait ré-émerger un continent de l'analyse réel au relief autrement escarpé, dont une nouvelle génération de mathématiciens entreprend, dans les années 1870, l'exploration. C'est ce contexte qui voit apparaître une première démonstration d'existence locale des fonctions implicites, nos auteurs ayant soin de démontrer l'existence, puis la continuité, enfin la dérivabilité. La génération Bourbaki préférera, dans ses manuels « grand public » des années 1960, une autre voie : démonstration dans les espaces de Banach du théorème d'inversion locale, corollaire sur les fonctions implicites ... les cours d'Henri Cartan, Laurent Schwartz, Serge Lang, ou les *Eléments d'Analyse* de Jean Dieudonné en témoignent. Ce changement de perspective, dont nous sommes les héritiers, prend acte de l'émergence, dans les dernières années du 19ème siècle, d'une méthode générale et d'un méta-problème. Méthode générale de démonstration d'existence fonctionnelle par des méthodes de point fixe : la nécessité d'étendre aux ensembles de fonctions les notions de distance utilisées dans les algorithmes numériques usuels ouvre la voie à l'analyse fonctionnelle. Méta-problème : la formulation ensembliste en terme d'application fait ressortir en toute clarté les problèmes d'injectivité et de surjectivité ; les théorèmes locaux d'existence ne sont plus tant une réponse aux questions du mathématicien que le point de départ d'une recherche sur le passage du local au global.

---

[14] L'histoire du « principe de Dirichlet » compléterait cette remarque allusive.

Bibliographie

Sources primaires

A.L. Cauchy (#), *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, 1882-1974
A.L. Cauchy, *Equations Différentielles Ordinaires*, présenté par C. Gilain, Etudes Vivantes, 1981.
U. Dini ($) *Fundamenti par la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali*, T. Nistri, 1878.
U. Dini ($) *Lezioni di Analisi Infinitesimale (vol.I, Calcolo Differenziale)*, T. Nistri, 1907
L. Euler (#) *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, tome I, trad. J.B. Labey (1796), réédition ACL éditions, 1987
A. Genocchi ($) *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung (Herausgegeben von G. Peano)*, (trad. G. Bohlmann, A. Schepp), Teubner, 1899.
E. Goursat *Cours d'Analyse Mathématique (tome I)*, 5ème édition, Gauthier-Villars, 1943.
J. Hadamard *Œuvres complètes (tome I)*, éditions du C.N.R.S. 1968
J. Hadamard *Cours d'Analyse (tome II)*, Hermann, 1930.
C. Hermite *Cours d'analyse (première partie)*, Gauthier-Villars, 1873.
C. Jordan *Cours d'Analyse (tome I, Calcul Différentiel)*, 3ème édition revue et corrigée, Gauthier-Villars, 1959.
J-L. Lagrange *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, 1884.
E. Picard, *Œuvres Complètes (tome II)*, éditions du C.N.R.S., 1979.

Sources secondaires

Usuels :

J. Dieudonné (ed.) *Abrégé d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, 1978.
A.P. Yuskevich, A.N. Kolmogorov (eds.) *Mathematics in the 19th century* (3 volumes), Birkhäuser, 1996.

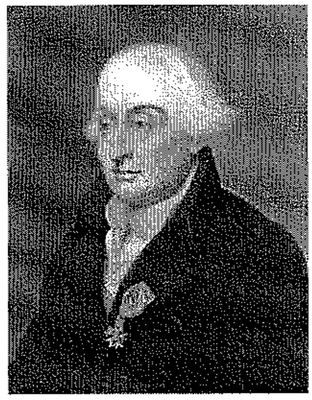
Articles :

P.Dugac *Elements d'Analyse de Karl Weierstrass*, in *Archive for History of Exact Sciences* vol. 10 (1973)
H. Gispert *Sur les Fondements de l'Analyse en France*, in *Archive for History of Exact Sciences* vol.28 (1983)
A. Monna *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Lebesgue and Borel*, in *Archive for History of Exact Sciences* vol. 9 (1972)
A.P. Youschkevitch *Le Concept de Fonction jusqu'au milieu de 19ème siècle*, (trad. J-M. Bellemin), collection *Fragments d'Histoire des Mathématiques*, brochure A.P.M.E.P. n°41, (1981)

Sources en ligne :
 # disponible sur le site de la BNF :
http://gallica.bnf.fr
$ disponible sur le site de l'Université de Cornell :
http://historical.library.cornell.edu/math
Trombinoscope réalisé grâce au site de l'Université de St. Andrews :
http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history

Trombinoscope

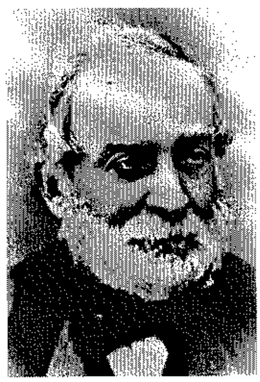
Leonhard EULER 1707-1783



Joseph-Louis LAGRANGE
1736-1813

Augustin-Louis CAUCHY
1789-1857

Ulisse DINI 1845-1918



Angelo GENOCCHI 1817-1889

Giuseppe PEANO 1858-1932

Camille JORDAN 1838-1922

Charles-Emile PICARD 1856-1941

Jacques HADAMARD 1865-1963

Document 1 : Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, 1748 Extraits du chapitre I.

7. *Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes ; les premieres sont formées par des opérations algébriques seulement, & les dernieres supposent pour leur formation des opérations transcendantes.*

Les multiples & les puissances de z sont donc des fonctions algébriques, ainsi que toutes les expressions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé ; telle est la quantité $\frac{a + bz^n - c\sqrt{(2z - zz)}}{aaz - 3bz^3}$. Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement ; telle seroit la fonction Z de z, si elle étoit exprimée par l'équation $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Car, quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égal à une expression composée de la variable z & de constantes, & que par conséquent Z est une fonction quelconque de z.

(...)

8. *Les fonctions algébriques se subdivisent en rationnelles & en irrationnelles. Dan les dernieres la variable est affectée de radicaux, & dans les premieres elle n'en est point affectée.*

(...)

Celles-ci se divisent commodément en explicites & en implicites.

Les explicites sont développées au moyen des radicaux ; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la résolution des équations. Ainsi Z sera une fonction irrationnelle implicite de z, si elle est représentée par cette équation $Z^5 = azZ^2 - bz^5$. En effet, on ne peut en tirer la valeur explicite de Z, même en admettant les signes radicaux, par la raison que l'Algébre n'est pas encore parvenue à ce dégré de perfection.

(...)

9. *Les fonctions rationnelles enfin, se divisent en entieres & en fractionnaires.*

(...)

1. *Une quantité conſtante eſt une quantité déterminée, qui conſerve toujours la même valeur.*

(...)

2. *Une quantité variable eſt une quantité indéterminée, ou, ſi l'on veut, une quantité univerſelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

(...)

3. *Une quantité variable devient déterminée, attribue une valeur déterminée quelconque.*

(...)

4. *Une fonction de quantité variable eſt une expreſſion analytique compoſée, de quelque maniere que ce ſoit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités conſtantes.*

Ainſi toute expreſſion analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités conſtantes, eſt une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az^2 + b\sqrt{aa - zz}$; c^z; &c, ſont des fonctions de z.

(...)

5. *Une fonction de variable eſt donc auſſi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même une infinité de valeurs, & il eſt impoſſible d'en concevoir aucune, dont elle ne ſoit ſuſceptible, puiſque la variable comprend même les valeurs imaginaires.

(...)

6. *La principale différence des fonctions conſiſte dans la combinaiſon de la variable & des quantités conſtantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par leſquelles les quantités peuvent être compoſées & combinées entr'elles. Ces opérations ſont l'Addition & la Souſtraction ; la Multiplication & la Diviſion ; l'Élévation aux Puiſſances & l'Extraction des Racines ; à quoi il faut ajouter encore la Réſolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a pluſieurs autres qu'on nomme tranſcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres ſans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

(...)

Document 1, fin.

10. *Il faut ensuite remarquer principalement la division des fonctions en uniformes & en multiformes.*

La fonction uniforme est celle qui n'obtient qu'une seule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable z. La fonction multiforme est celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne plusieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles soit entieres, soit fractionnaires, sont des fonctions uniformes, parce que ces sortes d'expressions, quelque soit le nombre qu'on substitue à la variable, n'obtiennent qu'une seule valeur; mais les fonctions irrationnelles sont toutes multiformes, à cause de l'ambiguité des signes radicaux, & de la double valeur qu'ils indiquent. Il y a aussi parmi les fonctions transcendantes des fonctions uniformes & multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes; tel seroit l'arc de cercle qui répondroit au sinus z, car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même sinus. Dans ce qui suit nous supposerons que les lettres P, Q, R, S, T, &c. représentent chacune des fonctions uniformes de z.

Document 2 : Lagrange, *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, 1806

Extrait du chapitre I

Nous appellerons donc simplement *fonction d'une ou de plusieurs quantités* toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entreront d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités regardées comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction sont censées pouvoir recevoir toutes les valeurs possibles.

Extraits du Chapitre VI : dérivée d'une fonction composée (p et q sont supposés fonctions de x)

Ainsi l'on aura d'abord $y' = p'f'(p)$, d'où résulte ce principe : que *la fonction dérivée d'une fonction, qui est elle-même une fonction de x, est égale au produit des fonctions dérivées de ces deux fonctions.*

(...)

Supposons ensuite que y soit une fonction de p et q, que nous désignerons par $f(p, q)$;

de sorte qu'on aura

$$y' = p'f'(p) + q'f'(q) = f'(p, q).$$

(...)

Mais la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation entre x et y. Représentons en général cette équation par

$$F(y, x) = 0;$$

l est clair que, si l'on regarde y comme une fonction de x déterminée par cette équation, et qu'on imagine cette fonction substituée au lieu de y dans $F(y, x)$, il en résultera une fonction de x qui sera identiquement nulle, quelle que soit la valeur de x, et par conséquent aussi en mettant $x + i$ à la place de x, quelle que soit la valeur de i.

Dénotons cette fonction par z, et comme x, devenant $x + i$, z devient $+ iz' + \frac{i^2}{2} z'' + \ldots$, on aura, quelle que soit la valeur de i, l'équation

$$z + iz' + \frac{i^2}{2} z'' + \ldots = 0;$$

'où l'on tire les équations

$$z = 0, \quad z' = 0, \quad z'' = 0, \quad \ldots.$$

Maintenant, z étant $= F(y, x)$, on aura, par les formules ci-dessus,

$$z' = y'F'(y) + F'(x),$$

n dénotant par $F'(y)$ la fonction prime de $F(y, x)$ prise relativement y seul, et par $F'(x)$ la fonction prime de $F(y, x)$ prise relativement à , et faisant $x' = 1$, puisque x devient simplement $x + i$.

Ainsi l'équation dérivée $z' = 0$ sera

$$y'F'(y) + F'(x) = 0,$$

où l'on tire

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Document 3 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal.* Œuvres Complètes, série II, tome IV.

AVERTISSEMENT.

Cet ouvrage, entrepris sur la demande du Conseil d'instruction de l'École royale polytechnique, offre le résumé des Leçons que j'ai données à cette École sur le calcul infinitésimal. Il sera composé de deux volumes correspondans aux deux années qui forment la durée de l'enseignement. Je publie aujourd'hui le premier volume divisé en quarante Leçons, dont les vingt premières comprennent le calcul différentiel, et les vingt dernières une partie du calcul intégral. Les méthodes que j'ai suivies diffèrent à plusieurs égards de celles qui se trouvent exposées dans les ouvrages du même genre. Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes ; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des *fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes, et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le théorème de TAYLOR semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée [*voyez* la fin de la 38.e Leçon]. Au reste, ceux qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel, et ses applications les plus importantes, peuvent être facilement exposés, sans l'intervention des séries. .

Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des *intégrales* ou *fonctions primitives* avant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion d'*intégrales prises entre des limites données* ou *intégrales définies*.

Document 4 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de $2^{ème}$ année : équations différentielles ordinaires).

Leçon 1

On nomme *équations différentielles*, celles qui établissent des relations entre une variable indépendante x, des fonctions y, z ... de cette variable, et les différentielles de ces fonctions ou leurs dérivées des divers ordres. L'ordre de la plus haute dérivée qui se trouve comprise dans une équation différentielle, sert à fixer ce qu'on appelle l'*ordre* de cette même équation. Cela posé, une équation différentielle du premier ordre entre la variable x et les fonctions y, z ... renfermera seulement avec x, y, z ... les dérivées du premier ordre y', z' ... Si les fonctions y, z... se réduisent à une seule y, l'équation différentielle du premier ordre ne contiendra plus que les trois quantités

$$x, \quad y \quad \text{et} \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Intégrer des équations différentielles, c'est trouver les fonctions qu'elles déterminent, ou du moins des équations nouvelles qui ne renferment que la variable et les fonctions dont il s'agit. Ces équations nouvelles se nomment *intégrales* ou *équations primitives*. L'intégrale d'une équation différentielle entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, ne peut contenir que les deux quantités variables x et y.

Lorsqu'une équation différentielle du premier ordre est résolue par rapport à la fonction dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$, elle fournit pour cette dérivée une ou plusieurs valeurs de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Si l'on suppose d'ailleurs $f(x, y) = -\frac{P}{Q}$, [P, Q désignant des fonctions nouvelles de x et de y], l'équation (1), multipliée par Q, deviendra $Q\frac{dy}{dx} = -P$, ou

$$(2) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Nous allons maintenant faire connaître les principales méthodes à l'aide desquelles on parvient, dans certains cas, à intégrer l'équation (2).

Intégration immédiate. Lorsque les fonctions P et Q vérifient la condition

$$(3) \qquad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

le premier membre de l'équation (2) est la différentielle exacte d'une fonction u des deux variables x et y. Alors cette équation peut être présentée sous la forme

$$(4) \qquad du = 0;$$

et, pour y satisfaire, il faut évidemment supposer

$$(5) \qquad u = \mathcal{C},$$

$\mathcal{C}$ désignant une constante arbitraire.

Document 5 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de 2ème année : équations différentielles ordinaires).

Début de la Leçon 7 : position du problème et idée de la méthode

Toutes les fois qu'une équation différentielle de la forme

(1) $$dy = f(x, y)\, dx$$

est intégrable par l'une des méthodes exposées dans les leçons précédentes, on en conclut aisément, comme on l'a fait voir, qu'il est possible d'obtenir, pour l'inconnue y, une fonction de x propre à vérifier cette équation différentielle, et de plus à prendre une valeur particulière, mais arbitraire, y_0, dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur donnée x_0. Réciproquement, il sera certain que l'équation (1) est intégrable, et qu'elle admet une intégrale générale comprenant une constante arbitraire, si l'on démontre qu'il existe une valeur générale de y propre à remplir les deux conditions énoncées. Or, on y parvient aisément, dans un grand nombre de cas, à l'aide des principes que nous allons établir.

Concevons que, X étant une nouvelle valeur particulière de x, on désigne par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots \quad x_{n-1}$$

des quantités intermédiaires entre les limites x_0, X, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. Supposons, en outre, qu'aux quantités

(2) $$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots \quad x_{n-1}, \quad X,$$

on fasse correspondre d'autres quantités

(3) $$y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots\ldots \quad y_{n-1}, \quad Y,$$

dont la première soit précisément y_0, les suivantes étant déterminées par le moyen des équations

(4) $$\left\{\begin{array}{l} y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ \&c. \ldots. \\ Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1}) f(x_{n-1} - y_{n-1}). \end{array}\right.$$

Il suffira évidemment d'éliminer, entre ces équations, $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$, pour obtenir une valeur de Y exprimée en fonction des seules quantités

(5) $$x_0; \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots \quad x_{n-1}, \quad X, \quad y_0.$$

Soit

(6) $$Y = \mathfrak{F}(x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, X, y_0)$$

cette même valeur. Elle jouira de plusieurs propriétés remarquables qui résulteront des divers théorèmes que nous allons faire connaître.

(...)

Document 5 (suite et fin) : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de 2ème année : équations différentielles ordinaires).

Fin de la Leçon 7 : énoncé des théorèmes. Les hypothèses sont la continuité de f et f'y

3.e Théorème. *Les mêmes choses étant admises que dans les théorèmes 1.er et 2.e, si l'on fait décroître à l'infini les valeurs numériques des élémens de la différence $X-x_0$, la valeur de Y déterminée par l'équation (6) convergera vers une limite qui dépendra uniquement des trois quantités*

$$x_0, \quad X \quad \text{et} \quad y_0.$$

(...)

4.e Théorème. *Les mêmes choses étant admises que dans les théorèmes précédens, désignons par $\mathcal{F}(X)$ la limite vers laquelle converge la valeur de Y, tandis que l'on fait décroître les valeurs numériques des élémens de la différence $X-x_0$, et par*

$$y = \mathcal{F}(x) \tag{45}$$

ce que devient cette limite quand on y remplace la quantité X par x. y

sera une fonction de x, qui aura la double propriété de se réduire à y_0 pour $x = x_0$, et de vérifier l'équation différentielle

$$dy = f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

en restant continue par rapport à la variable x, du moins pour toutes les valeurs de cette variable comprises entre les limites x_0 et X.

Document 6 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de $2^{\text{ème}}$ année : équations différentielles ordinaires).

Leçon 8 : formulation par Cauchy du problème de recollement des solutions locales. Ici $\chi = f_y'$

Concevons maintenant que, la quantité a étant assujettie aux conditions énoncées dans le premier, le second ou le troisième théorème, la quantité X varie entre les limites x_0, $x_0 + a$, et s'approche indéfiniment de la limite $x_0 + a$. La valeur de $y = \mathfrak{F}(x)$ correspondante à $x = X$, savoir, $\mathfrak{F}(X)$, s'approchera elle-même indéfiniment d'une certaine limite qu'on pourra désigner par $\mathfrak{F}(x_0 + a)$, et qui sera comprise entre les deux quantités $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$. Cela posé, si les deux fonctions $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ restent continues dans le voisinage du système des valeurs particulières $x = x_0 + a$, $y = \mathfrak{F}(x_0 + a)$, on prouvera, par des raisonnemens semblables à ceux dont nous avons déjà fait usage, que les théorèmes de la leçon précédente subsisteront, non-seulement lorsque la quantité X variera entre les limites x_0, $x_0 + a$, mais encore tandis que cette quantité, ayant dépassé la limite $x_0 + a$, s'approchera indéfiniment d'une nouvelle limite $x_0 + a_1$. Par suite, on pourra calculer, avec telle approximation qu'on voudra, les valeurs de $\mathfrak{F}(X)$ correspondantes à des valeurs de X comprises entre x_0 et $x_0 + a_1$.

Si d'ailleurs les fonctions $f(x, y)$, $\chi(x, y)$ restent continues dans le voisinage du système des valeurs particulières $x = x_0 + a_1$, $y = \mathfrak{F}(x_0 + a_1)$, on déterminera encore une valeur de x située au-delà de la limite $x_0 + a_1$, et vers laquelle on pourra faire converger la quantité X dans la fonction $\mathfrak{F}(X)$. Désignons par $x_0 + a_2$ cette nouvelle limite, et continuons de même. Les quantités

$$(35) \qquad x_0 + a, \quad x_0 + a_1, \quad x_0 + a_2, \quad \&c\ldots$$

formeront une série croissante ou décroissante, et leurs valeurs numériques finiront par surpasser tout nombre donné, ou par s'approcher indéfiniment d'une certaine limite. Dans le premier cas, la quantité X pourra croître ou décroître indéfiniment, de manière à devenir supérieure ou inférieure à toute quantité donnée. Dans le second cas, la quantité X pourra s'approcher indéfiniment de la limite vers laquelle convergeront les différens termes de la série (35). Soit Ξ cette même limite. La limite correspondante vers laquelle convergeront les valeurs de $y = \mathfrak{F}(x)$, pourra être désignée par $\mathfrak{F}(\Xi)$; et, pour qu'on ne puisse plus faire passer la quantité X au-delà de la limite Ξ, dans la fonction $\mathfrak{F}(X)$, il sera nécessaire, ou que la quantité $\mathfrak{F}(\Xi)$ soit infinie, ou que l'une des fonctions

$$(36) \qquad \varphi[x, \mathfrak{F}(x)], \quad \chi[x, \mathfrak{F}(x)],$$

devienne infinie pour la valeur particulière $x = \Xi$, ou enfin que l'une de ces fonctions devienne discontinue dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit.

Document 7 : Cauchy, *Résumé d'un Mémoire sur la Mécanique Céleste et sur un Nouveau Calcul appelé Calcul des Limites.* Œuvres Complètes, série II tome XII

THÉORÈME I. — *Supposons qu'une fonction implicite u de la variable x soit déterminée par une équation algébrique ou transcendante, qu'elle se réduise à u_0 pour une valeur nulle de x, et que l'on ait développé cette fonction implicite en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x par la formule de Maclaurin, de Lagrange, etc., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. La somme de cette série représentera la fonction u, si la valeur de x est tellement choisie que, la série étant convergente, la fonction explicite de x et u qui constitue le premier membre de l'équation donnée soit elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x et de la différence $u - u_0$.*

(...)

Les propositions ci-dessus mentionnées peuvent encore être facilement étendues au cas où les fonctions implicites seraient déterminées par des équations aux différences finies ou infiniment petites, ou aux différences partielles, ou aux différences mêlées. Ainsi, en particulier, on pourra énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soient données plusieurs équations différentielles simultanées entre la variable x, des fonctions inconnues $y, z, \ldots$ de cette variable, et leurs dérivées de divers ordres $y', z', \ldots, y'', z'', \ldots$. Supposons d'ailleurs que par la méthode des coefficients indéterminés on ait développé $y, z, \ldots$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Les sommes de ces séries représenteront les valeurs générales de $y, z, \ldots$, si la valeur de x est tellement choisie que, les séries dont il s'agit, et par suite celles qui représenteront les dérivées de $y, z, \ldots$, étant convergentes, les fonctions explicites de $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots$, qui constituent les premiers membres des équations données, soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, et des différences qu'on obtient en retranchant des valeurs générales de $y, z, \ldots, y', z', \ldots$ leurs valeurs initiales correspondantes à $x = 0$.*

(...)

Document 7, début du « calcul des limites »

Calcul des limites (1).

Soient p un arc réel et n un nombre entier. On trouvera, en supposant $n > 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}}\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\,dp = 0, \tag{1}$$

et, en supposant $n = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi. \tag{2}$$

Soit de plus

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

une fonction entière de la variable x. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire $\overline{x}$ dont le module soit X, en sorte qu'on ait

$$\overline{x} = \mathrm{X}\,e^{p\sqrt{-1}},$$

on tirera des formules (1) et (2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\overline{x}}\right) dp = 2\pi a_0;$$

on aura donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = 2\pi f(0). \tag{3}$$

Il est d'ailleurs facile d'étendre la formule (3) au cas où $f(\overline{x})$ cesse d'être une fonction entière de x. En effet, on a généralement

$$\mathrm{D}_{\mathrm{X}} f(\overline{x}) = \frac{1}{\mathrm{X}\sqrt{-1}}\,\mathrm{D}_p f(\overline{x}).$$

Or, si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente : 1° par rapport à X et à partir de X = 0; 2° par rapport à p entre les limites

$p = -\pi$, $p = \pi$; et si l'on suppose que la fonction de X et de p, représentée par $f(\overline{x})$, reste finie et continue (avec sa dérivée), quel que soit p, pour la valeur attribuée à X et pour une valeur plus petite, on retrouvera précisément la formule (3).

D'autre part, comme on a $d\overline{x} = \overline{x}\,dp\sqrt{-1}$, si les fonctions dérivées $f'(\overline{x})$, $f''(\overline{x})$, ..., $f^{(n)}(\overline{x})$ restent elles-mêmes finies et continues pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites, il suffira d'appliquer l'intégration par parties à l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n}\,dp,$$

pour en conclure

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n}\,dp = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\overline{x})}{\overline{x}^{n-1}}\,dp = \frac{1}{n(n-1)}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f''(\overline{x})}{\overline{x}^{n-2}}\,dp = \ldots$$

et par suite

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{x^n}\,dp = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\overline{x})\,dp,$$

ou, en vertu de la formule (3),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n}\,dp = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}. \tag{4}$$

Si la fonction $f(\overline{x})$ s'évanouit pour une valeur nulle de x, l'équation (3) donnera simplement

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = 0. \tag{5}$$

Des formules (3), (4), (5) on peut aisément déduire, comme on va le voir, celles qui servent à développer une fonction explicite ou implicite de la variable x en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable.

Si, dans la formule (5), on remplace $f(\overline{x})$ par le produit

$$\overline{x}\,\frac{f(\overline{x}) - f(x)}{\overline{x} - x},$$

x étant différent de $\overline{x}$, et le module de x inférieur à X, on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{x}f(\overline{x})}{\overline{x}-x}dp=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{x}f(x)}{\overline{x}-x}dp=f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{x}{\overline{x}}+\frac{x^2}{\overline{x}^2}+\ldots\right)dp=2\pi f(x),$$

et par suite on retrouvera la formule connue

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\overline{x}f(\overline{x})}{\overline{x}-x}dp. \tag{6}$$

L'équation (6) suppose, comme les équations (3) et (5), que la fonction de X et de p représentée par $f(\overline{x})$ reste finie et continue pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites.

Comme le rapport $\frac{\overline{x}}{\overline{x}-x}$ est la somme de la progression géométrique

$$1,\quad \frac{x}{\overline{x}},\quad \frac{x^2}{\overline{x}^2},\quad \ldots,$$

qui est toujours convergente, tant que le module de x reste inférieur au module X de $\overline{x}$; il suit de la formule (6) que $f(x)$ sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $f(x)$ (ou sa dérivée du premier ordre) cesse d'être finie et continue.

Document 8 : Cauchy, *Mémoire sur les Fonctions Continues des Quantités Algébriques et Géométriques*, Œuvres Complètes, série II tome XIV

Cela posé, pour qu'une fonction de la variable réelle x reste continue dans le voisinage d'une valeur donnée de x, il est nécessaire qu'à cette valeur de x corresponde une valeur *finie* de la fonction. Mais est-il pareillement nécessaire que, pour la valeur donnée de x et pour chacune des valeurs voisines, la fonction acquière une valeur *unique* représentée par un seul type $f(x)$? A la rigueur, cette question pourrait être résolue négativement; et, dans le cas où il s'agit d'une fonction implicite qui offre diverses valeurs représentées par divers *types*, ou, en d'autres termes, d'une fonction liée à la variable x par une équation qui admet plusieurs racines, on pourrait dire que cette fonction implicite est *continue entre des limites données de* x, lorsque entre ces limites, un accroissement infiniment petit attribué à x produit toujours un accroissement infiniment petit de l'un quelconque des types. Mais il est plus simple de considérer chacun de ces types comme une fonction déterminée de x; et pour énoncer clairement l'hypothèse admise, il suffit de dire que chacune des valeurs de la fonction implicite est une fonction explicite de x, qui reste continue entre les limites assignées à cette variable.

Ainsi, par exemple, si l'on nomme y une fonction implicite de x, déterminée par l'équation

$$x^2+y^2=1, \tag{1}$$

les deux valeurs qu'admettra cette fonction implicite, pour une valeur réelle de x, comprise entre les limites

$$x=-1, \qquad x=1,$$

seront deux fonctions explicites représentées par les deux types

$$\sqrt{1-x^2}, \quad -\sqrt{1-x^2},$$

et dont chacune restera continue entre les limites données.

Ainsi encore, si l'on nomme y une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang} y = x, \tag{2}$$

les valeurs qu'admettra cette fonction implicite, pour une valeur réelle de x, seront les fonctions explicites représentées par les divers termes de la progression arithmétique

$$\ldots, \quad -2\pi+\operatorname{arc\,tang} x, \quad -\pi+\operatorname{arc\,tang} x, \quad \operatorname{arc\,tang} x,$$
$$\pi+\operatorname{arc\,tang} x, \quad 2\pi+\operatorname{arc\,tang} x, \quad \ldots$$

et chacune de ces fonctions explicites restera continue entre limites quelconques de la variable, par conséquent entre les lim'

$$x=-\infty, \qquad x=\infty.$$

Document 8, fin.

Il n'est pas sans intérêt de rapprocher l'une de l'autre les notions de continuité dans les fonctions et de continuité dans les courbes. C'est ce que nous allons essayer de faire en peu de mots.

Concevons que, dans un plan donné, on construise une courbe dont les coordonnées rectilignes, rapportées à des axes rectangulaires ou obliques, soient la variable réelle x et une fonction réelle y de cette variable. Si l'ordonnée y, considérée comme fonction de l'abscisse x, est *explicite* et *continue* entre deux limites données

$$x = x_{\prime}, \qquad x = x_{\prime\prime},$$

la courbe sera certainement continue entre deux points qui auront pour abscisses $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$. Il y a plus ; elle offrira entre ces deux points, une seule branche correspondante à la valeur unique de la fonction y. Si, au contraire, la fonction y demeurant explicite, devient discontinue entre les limites données, pour certaines valeurs particulières x_1, x_2, ... de l'abscisse x, la courbe deviendra elle-même discontinue et se décomposera en diverses branches que limiteront des ordonnées correspondantes à ces valeurs particulières de x. Enfin, si l'ordonnée y, considérée comme fonction de x, est implicite et déterminée par une équation qui admette plusieurs racines, chacune de ces racines, quand l'équation sera résolue, deviendra une fonction explicite, continue ou discontinue, à laquelle répondra ou une seule branche de courbe, ou le système de plusieurs branches que limiteront les ordonnées correspondantes aux solutions de continuité. Donc alors des branches distinctes pourront répondre, non seulement à des valeurs diverses, mais encore à une valeur unique de l'abscisse x. D'ailleurs, dans le cas où, entre deux limites données de x, chaque valeur de la fonction implicite y est une fonction continue de x, et représente en conséquence une seule branche de courbe, il peut arriver que les diverses branches correspondantes aux diverses valeurs de y se joignent par leurs extrémités, de manière à former une courbe continue.

Document 9 : Cauchy, Œuvres Complètes, série I tome XII p.333-334

§ I. — *Considérations générales.*

Soient z, Z les affixes de deux points mobiles dans un plan. Si ces deux points se meuvent sur l'axe polaire, les variables z, Z seront réelles, et la seconde sera dite *fonction* de la première, quand le mouvement du premier point entraînera le mouvement du second. Il était naturel, il était convenable d'étendre cette définition au cas où le premier point se meut d'une manière quelconque dans le plan donné. Ce parti, que j'ai osé adopter, et qui a paru d'abord étonner quelques géomètres, est pourtant, je crois, l'unique moyen d'écarter les difficultés sans nombre qui se présentaient à l'esprit quand on méditait sur la nature et sur l'existence même de ce qu'on appelait des *fonctions de variables imaginaires*. D'ailleurs, à cette notion générale des fonctions, il importe de joindre, en l'étendant, la notion de *continuité*, telle que je l'ai donnée en 1821 dans mon *Analyse algébrique* (1), et de dire que l'affixe Z est *fonction continue* de la variable z, dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à cette variable, quand une variation infiniment petite de z produit dans ce voisinage une variation infiniment petite de Z. La limite vers laquelle converge le rapport de la seconde variation à la première, tandis que chacune des variations s'approche indéfiniment de zéro, est précisément la *fonction dérivée*, et dépend en général tout à la fois de l'affixe z et de la direction suivant laquelle se meut, quand z varie, le point dont l'affixe est z. Mais, si la fonction dérivée reprend la même valeur pour deux directions distinctes, elle deviendra complètement indépendante de la direction, et sera une *fonction monogène*. Enfin une fonction continue de la variable z est *monodrome* lorsque, pour chaque valeur de z, la valeur de Z demeure unique tant qu'elle n'est pas infinie.

Une fonction *synectique* est une fonction monodrome et monogène qui ne devient pas infinie pour des valeurs particulières de la variable.

Une fonction peut être monodrome, monogène, ou synectique seulement entre certaines limites déterminées par le système des lignes droites ou courbes qui enveloppent une certaine aire, c'est-à-dire tant que la variable z représente l'affixe d'un point renfermé dans l'aire dont il s'agit.

Ces principes étant posés, on reconnaît sans peine que les fonctions monodromes et monogènes sont précisément celles auxquelles s'appliquent les formules générales que j'ai déduites du Calcul des résidus, comme aussi celles que j'ai données pour la détermination des intégrales définies, pour l'énumération des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques ou même transcendantes, et pour le développement des fonctions explicites ou implicites en séries convergentes et en produits convergents, les fonctions implicites pouvant d'ailleurs être déterminées, soit par des équations finies, soit par un système d'équations différentielles.

Document 10

Table des matières : Dini, *Fundamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali*,

INDICE

1878

Enoncé du théorème des fonctions implicites dans Dini, *Calcolo Differenziale*, 1907 (publication des cours de 1876-78)

Se per un valore x_0 di x la equazione $f(x,y)=0$ è soddisfatta da un valore y_0 di y, e il punto (x_0, y_0) viene ad essere un punto interno al campo C nel quale è data $f(x,y)$; e se al tempo stesso esiste un intorno (che potrà essere anche assai grande) di (x_0, y_0) nei punti del quale la funzione $f(x,y)$ è finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, e la seconda di queste derivate nel punto (x_0, y_0) è anche diversa da zero, allora esisterà sempre un intervallo relativo alla variabile x (x_0-h_0, x_0+h_0) cui appartiene il punto x_0 e pei punti del quale la equazione $f(x,y)=0$ definisce completamente una funzione y di x, che oltre esser sempre finita e continua, ha anche la sua derivata prima determinata e finita, e nel punto iniziale x_0 è uguale a y_0 (*).

E in questa ipotesi *la derivata $\frac{dy}{dx}$ di questa funzione y si ottiene dalla formola $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$* che proviene da $f(x,y)$ eguagliando a zero la derivata di $f(x,y)$ calcolata colla regola di derivazione delle funzioni composte, per modo che *questa derivata $\frac{dy}{dx}$ della funzione y può anche riguardarsi come data dalla formola*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Document 10, suite.

Un exposé traditionnel : le cours d'analyse de Hermite, 1873

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PREMIERS PRINCIPES.

(...)

Le traité d'analyse de Jordan (ici, $3^{\text{ème}}$ édition).

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

VARIABLES RÉELLES.

(...)

Document 11 : A Genocchi, *Calcul Différentiel et Fondements du Calcul Intégral,* 1884. (traduction libre R. Chorlay)

§5 Fonctions implicites. Egalité entre variables.

110. Une fonction d'une ou plusieurs variables peut être donnée analytiquement, lorsque sont écrites les opérations à effectuer sur la variables indépendantes pour calculer la fonction ; on dit que cette fonction est donnée *explicitement*, ou qu'il s'agit d'une *fonction explicite*. Elle peut d'autre part être déterminée par des équations qui la lie aux variables indépendantes ; dans ce cas, elle est donnée *implicitement*, il s'agit d'une *fonction implicite*. Nous allons rechercher sous quelles conditions une ou plusieurs égalités entre variables permet d'en déterminer l'une quelconque comme fonction des autres ; lorsque c'est le cas, il reste à étudier la nature et les propriétés de cette fonction.

Proposition. Soit $f(x,y)$ une équation entre les deux variables x et y, et x_0, y_0 un couple de valeurs des variables pour lequel $f(x_0,y_0) = 0$; Supposons que la fonction et ses dérivées partielles du premier ordre sont finies et continues au voisinage du point (x_0,y_0), et que $f_y'(x_0,y_0)$ n'est pas nul ; alors il existe une et une seule fonction y de x, $y = \varphi(x)$, qui vérifie l'équation au voisinage du point $x = x_0$, i.e. on a identiquement pour chaque x, $f(x, \varphi(x)) = 0$, et qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0. Cette fonction $y = \varphi(x)$ est continue et possède une dérivée finie.

En effet, soient h_1 et k_1 deux nombres positifs, assez petits pour que pour chaque x entre x_0-h_1 et x_0+h_1 et chaque y entre y_0-k_1 et y_0+k_1 la fonction f et ses dérivées premières soient continues. On peut choisir h_1 et k_1 simultanément de sorte que $f_x'(x,y)$ soit en valeur absolue plus petit qu'un nombre fixé A, et $f_y'(x,y)$, qui ne s'annule pas pour $x = x_0$ et $y = y_0$, soit en valeur absolu toujours plus grand qu'une grandeur finie B. On peut même supposer $Ah_1 < Bk_1$.

En utilisant la formule de Taylor, en tenant compte de $f(x_0,y_0)$, on obtient :

$$f(x_0+h,y_0+k) = h\, f_x'(x_0+\theta h,y_0+\theta k) + k\, f_y'(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\ \ (0 < \theta < 1).$$

Prenons dans cette formule $|h| \leq h_1$ et $|k| = k_1$, de sorte que $x_0+\theta h$ est entre x_0-h_1 et x_0+h_1 et $y_0+\theta k$ entre y_0-k_1 et y_0+k_1 ; alors :

$$|\, f_x'(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\, | < A\ ,\ |\, hf_x'(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\, | < Ah_1$$

Par ailleurs, on a toujours $|\ k\ f_y'(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\ | > k_1B$ et donc dans l'expression pour $f(x_0+h,y_0+k)$, dans laquelle h et k sont à choisir librement parmi ceux vérifiant les conditions posées plus haut, le premier terme est en valeur absolue plus petit que le second ; par conséquent, cette somme a le signe de son second terme. Ce dernier change de signe lorsqu'on pose $k = +k_1$ et $k = -k_1$, car il en est ainsi de son premier facteur, tandis que le second $f(x_0+h,y_0+k)$ garde son signe constant. Mais si l'on regarde $f(x_0+h,y_0+k)$ comme une fonction de k, continue et prenant des valeurs de signe contraire, selon qu'on donne à k les valeurs $+k_1$ ou $-k_1$. $f(x_0+h,y_0+k)$ s'annule donc pour une valeur de k comprise entre $+k_1$ et $-k_1$. Pour h fixé, cette valeur d'annulation est unique, car des équations

$$f(x_0+h,y_0+k) = 0 \text{ et } f(x_0+h,y_0+k') = 0$$

il s'en suivrait par théorème de Rolle que pour un k'' entre k et k' on aurait $f_y'(x_0+h,y_0+k'') = 0$; ce qui contredit le fait que $f_y'(x,y)$ ne s'annule pour aucun couple de valeur de notre intervalle.

On voit que lorsque les conditions ci-dessus son vérifiées, il existe pour toute valeur arbitrairement fixée x entre x_0-h_1 et x_0+h_1 une valeur y entre y_0-k_1 et y_0+k_1 qui vérifie l'équation $f(x,y) = 0$ et qui pour $x = x_0$ prend la valeur $y = y_0$. L'ensemble des valeurs de y forme une fonction continue, étant donnée que la valeur de y diffère de y_0 de moins de k_1 et que k_1 peut être rendu arbitrairement petit.

111. La fonction y de x, déterminée de la manière précédente par l'équation $f(x,y) = 0$, possède au point $x = x_0$ une dérivée. Car si l'on donne à x la valeur x_0+h et si l'on nomme y_0+k la valeur correspondante de y, alors

$$f(x_0+h, y_0+k) = 0$$

ou encore

$$h\, f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\, f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = 0.$$

Il s'en suit :

$$\frac{k}{h} = -\frac{f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}.$$

Si on rend h nul, k devient aussi nul, car y est une fonction continue de x. De plus, pour des h s'annulant

$$\lim f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f_x'(x_0, y_0)$$

et

$$\lim f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f_y'(x_0, y_0) \neq 0.$$

Par conséquent $\frac{k}{h}$ converge vers une valeur limite déterminée et finie, et :

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x_0, y_0)}{f_y'(x_0, y_0)}.$$

Document 12 : Hadamard, *Cours d'Analyse*, 1930.

247. Application des approximations successives à la théorie des fonctions implicites. — Nous avons énoncé sans démonstration, au tome I, le

THÉORÈME. — *L'équation*

$$\text{(E)} \qquad F(x_1, x, \dots x_m, y) = 0,$$

dont on connaît une première solution $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 \dots$ $x_m = a_m$, $y = b$, *admet en* y, *pour* $|x_1 - a_1|$, $|x_2 - a_2|$, ... $|x_m - a_m|$ *suffisamment petits, une solution voisine de* b *et une seule, si la fonction* F, *supposée continue par rapport à toutes les variables dont elle dépend, admet, par rapport à* y, *une dérivée partielle également continue, différente de* o *au point* $(a_1, a_2, \dots a_m, b)$.

Dans le cas d'une seule variable indépendante x_1, ce théorème se ramène immédiatement au théorème fondamental de Cauchy, du moins en admettant l'existence de dérivées partielles continues, non seulement par rapport à y, mais par rapport à x_1 : car la recherche d'une solution de l'équation $F(x_1, y) = 0$ équivaut (en vertu de l'égalité $F(a_1, b) = 0$) à celle d'une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}$$

avec la condition initiale $y = b$ pour $x_1 = a_1$.

Nous allons, avec M. Goursat, démontrer le théorème pour m quelconque, et sous les seules hypothèses de l'énoncé, par une méthode d'approximations successives analogue à la précédente.

Considérons d'abord l'équation

$$(e) \qquad y - b = \varphi(x_1, x_2, \dots x_m, y)$$

où φ est nul au point a_1, a_2, a_m, b, continu dans le domaine

$$(\mathcal{D}) \qquad |x_1 - a_1| \leqslant \alpha, \ |x_2 - a_2| \leqslant \alpha, \ \dots \ |x_m - a_m| \leqslant \alpha,$$

$$(\Delta) \qquad |y - b| \leqslant \beta$$

par rapport à toutes les variables et, de plus, satisfait, par rapport à y, dans ce même domaine, à la condition de Lipschitz

$$(L') \quad |\varphi(x_1, x_2, \dots x_m, Y) - \varphi(x_1, x_2, \dots x_m, y)| < K|Y - y|,$$

K étant, cette fois, un nombre fixe *plus petit que* 1.

Soit à résoudre cette équation pour des valeurs données de $x_1, x_2, \dots x_m$. Soit y_0 une valeur arbitraire de y telle que $|y_0 - b| < \beta$; déduisons en une valeur y_1 par

$$y_1 - b = \varphi(x_1, x_2, \dots x_m, y_0).$$

Je dis tout d'abord que

$$|y_1 - b| = |\varphi(x_1, x_2, \dots x_m, y_0)|$$

est également inférieur à β, du moins si

$$(\mathcal{D}') \quad |x_1 - a_1| \leqslant \alpha_1, \ |x_2 - a_2| \leqslant \alpha_1, \ \dots \ |x_m - a_m| \leqslant \alpha_1,$$

α_1 étant un nombre convenablement choisi (égal ou inférieur à α).

En effet, une application de l'inégalité (L') fournit d'abord

$$|\varphi(x_1, x_2, \dots x_m, y_0) - \varphi(x_1, x_2, \dots x_m, b)| < K|y_0 - b| \leqslant K\beta.$$

D'autre part, φ étant supposé continu par rapport à l'ensemble des variables, on peut trouver un nombre fixe α_1 assez petit pour que les inégalités $(\mathcal{D}')$ entraînent, — en tenant compte de

$$\varphi(a_1, a_2, \dots a_m, b) = 0 \text{ —},$$
$$|\varphi(x_1, x_2, \dots x_m, b)| < (1 - K)\beta,$$

relation dont la combinaison avec la précédente fournit bien la conclusion annoncée.

2° Si on remplace y_0 par y_1, ce qui est possible en vertu de 1°, et qui fournit une nouvelle valeur y_2 ; puis y_0 par y_2, ce qui fournit une nouvelle valeur y_3 ; etc..., y_i étant, d'une manière générale, déduit de y_{i-1} par

$$(A') \qquad y_i - b = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_{i-1}),$$

tous ces nombres successifs vérifieront (10') et on aura

$$|y_i - y_{i-1}| < K^{i-1}|y_1 - y_0| :$$

$y_2, y_3, \ldots$ *tendront donc vers une limite* y, puisque la série $\Sigma(y_i - y_{i-1})$ sera majorée par une progression géométrique décroissante.

La limite ainsi trouvée y vérifie l'équation, comme on le déduit immédiatement de (A) en passant à la limite.

Cette solution est unique, c'est-à-dire la seule qui vérifie aussi (Δ) : car, sans même raisonner comme au n° **241**, si (e) était vérifiée par une valeur Y autre qu'y, on en déduirait, par différence, une relation en contradiction avec (L').

Elle est d'ailleurs fonction continue des x, en vertu de la convergence uniforme des approximations.

Remarque. — Ce qui précède s'applique, que les variables soient réelles — auquel cas les seules hypothèses à faire sur φ sont celles qui ont été énoncées plus haut — ; ou qu'elles soient complexes : — auquel cas φ doit être supposé holomorphe par rapport aux variables dont il dépend dans le domaine défini par ($\mathfrak{D}'$) et (Δ), notre raisonnement prouvant alors que y est une fonction holomorphe des x, en vertu du théorème du n° **186** [1].

247 *bis*. Il reste à appliquer ceci à l'équation générale (E). Mais il est facile de s'assurer que, moyennant l'hypothèse

$$F'_y(a_1, a_2, \ldots a_m, b) \neq 0,$$

on peut la ramener, et même d'une infinité de façons différentes, à la forme (e).

Soit, en effet, B la valeur de $F'_y(a_1, a_2, \cdots a_m, b)$, de sorte que

$$F = B(y - b) + G(x_1, \cdots y) \qquad \text{avec} \qquad G'_b = 0.$$

En écrivant

$$(17) \qquad y = b - \frac{1}{B} G(x_1, \cdots y),$$

on lui donne bien la forme demandée, car, en vertu de la continuité de F'_y, on peut choisir α et β assez petits pour que, dans le domaine ($\mathfrak{D}$), (Δ), $\left|\frac{1}{B} G'_y\right|$ soit constamment inférieur à un nombre fixe $K < 1$. Ceci entraîne (L') en vertu de la formule des accroissements finis [1].

Plus généralement, on arrive encore au résultat en écrivant F sous la forme

$$(17') \qquad F = B_1(y - b) + H(x_1, \ldots, y)$$

d'où

$$y = b - \frac{1}{B_1} H(a_1, \ldots, b)$$

le nombre B_1 étant choisi de manière que $\frac{1}{B_1} H'_b(a_1, \cdots, b)$ ait un module inférieur à 1, c'est-à-dire que :

$$\left[\frac{B - B_1}{B_1}\right] < 1.$$

K sera alors un nombre voisin de $\frac{B - B_1}{B_1}$ (d'autant plus voisin que α, β sont plus petits).

Document 13 : Picard 1891, Œuvres tome II.

Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires.

Dans mon Mémoire sur les équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques*, 1890), j'ai proposé incidemment une démonstration nouvelle et extrêmement simple pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. M'étant borné à l'équation du premier ordre, que j'ai d'ailleurs traitée très rapidement, je ne crois pas inutile d'exposer ici cette démonstration d'une manière complète et dans toute sa généralité.

1. Envisageons le système des m équations du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f_1(x, u, v, \ldots, w), \\ \frac{dv}{dx} &= f_2(x, u, v, \ldots, w), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dw}{dx} &= f_m(x, u, v, \ldots, w). \end{aligned}$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles $x, u, v, \ldots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$. Elles sont définies quand $x, u, v, \ldots, w$ restent respectivement compris dans les intervalles

$$\begin{aligned} &(x_0 - a, \quad x_0 + a), \\ &(u_0 - b, \quad u_0 + b), \\ &(v_0 - b, \quad v_0 + b), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(w_0 - b, \quad w_0 + b), \end{aligned}$$

a et b désignant deux grandeurs positives.

De plus, on suppose que l'on puisse déterminer m quantités positives A, B, ..., L, telles que

$$\begin{aligned} &|f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w)| \\ &\quad < A.|u' - u| + B.|v' - v| + \ldots + L.|w' - w| \end{aligned}$$

(où $|\alpha|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de α), x ainsi que les $u, v, \ldots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Il en sera évidemment ainsi, en particulier, si les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre, restant finies, par rapport à $u, v, \ldots, w$.

Ces hypothèses très générales étant faites, on veut démontrer qu'*il existe des fonctions* $u, v, \ldots, w$ *de* x, *continues dans le voisinage de* x_0, *satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant respectivement, pour* $x = x_0$, *à* $u_0, v_0, \ldots, w_0$.

2. Nous procéderons par approximations successives. Considérons d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \ldots, w_0), \quad \ldots, \quad \frac{dw_1}{dx} = f_m(x, u_0, v_0, \ldots, w_0);$$

nous en tirons, par quadratures, les fonctions $u_1, v_1, \ldots, w_1$, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \ldots, w_1), \quad \ldots, \quad \frac{dw_2}{dx} = f_m(x, u_1, v_1, \ldots, w_1),$$

et l'on détermine $u_2, v_2, \ldots, w_2$ par la condition qu'elles prennent respectivement pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$. On continue ainsi indéfiniment. Les fonctions $u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}$ seront liées aux suivantes $u_m, v_m, \ldots, w_m$ par les relations

$$\frac{du_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dw_m}{dx} = f_m(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$

et, pour $x = x_0$, on a

$$u_m = u_0, \quad v_m = v_0, \quad \ldots, \quad w_m = w_0.$$

Nous allons établir que, m augmentant indéfiniment, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ *tendent vers des limites qui représentent les intégrales cherchées, pourvu que x reste suffisamment voisin de x_0.*

Soit M la valeur absolue maxima des fonctions f, quand les variables dont elles dépendent restent dans les limites indiquées. Désignons par ρ une quantité au plus égale à a : si x reste dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, on aura

$$|u_1 - u_0| < M\rho, \quad \ldots, \quad |w_1 - w_0| < M\rho.$$

Par suite, si $M\rho < b$, les quantités $u_1, v_1, \ldots, w_1$ resteront dans les limites voulues, et il est évident qu'alors il en sera de même pour tous les autres systèmes de valeurs $u, v, \ldots, w$. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ, nous allons supposer que x reste dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

En posant

$$u_m - u_{m-1} = U_m, \quad \ldots, \quad w_m - w_{m-1} = W_m,$$

on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dU_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_1(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dW_m}{dx} = f_m(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_m(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2}) \end{array}\right\} (m = 2, \ldots, \infty).$$

Or on a

$$|U_1| < M\delta, \quad \ldots, \quad |W_1| < M\delta.$$

Les équations précédentes, pour $m = 2$, démontrent que $|U_2|$, $|V_2|, \ldots, |W_2|$ sont inférieurs à

$$(A + B + \ldots + L)M\delta^2,$$

et, d'une manière générale, de proche en proche, on voit que $|U_m|, \ldots, |W_m|$ sont inférieurs à

$$M\delta(A + B + \ldots + L)^{m-1}\delta^{m-1}.$$

Or

$$u_m = u_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_m;$$

par suite, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers une limite, si

$$(A + B + \ldots + L)\delta < 1.$$

En prenant δ assez petit, cette condition sera vérifiée. Nous voyons donc que $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers des limites déterminées $u, v, \ldots, w$, fonctions continues de x dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δ *étant la plus petite des trois quantités*

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{A + B + \ldots + L};$$

$u, v, \ldots, w$ seront représentées par des séries qui convergent à la manière d'une progression géométrique décroissante.

On a d'ailleurs

$$u_m = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1})\,dx + u_0,$$

et, puisque les $u_m, v_m, \ldots, w_m$ diffèrent de leurs limites d'aussi peu qu'on veut, pour m assez grand, quel que soit x dans l'intervalle indiqué, on aura, à la limite

$$u = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u, v, \ldots, w)\,dx + u_0;$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w),$$

et de même pour les autres équations. *Les fonctions $u, v, \ldots, w$ sont donc les intégrales cherchées.*

Document 14 : Hadamard, *Les Transformations Ponctuelles*, 1906, Œuvres Complètes, tome I p. 349

SUR

LES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 34, 1906.)

1. Soient données les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

qui peuvent être considérées comme faisant correspondre à un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un espace e_n à n dimensions, un point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'un espace analogue E_n, point que nous nommerons ici l'*image* du premier.

Ces équations sont-elles résolubles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$? A tout point de E_n, peut-on faire correspondre d'une manière univoque un point de e_n auquel il serve d'image ?

Il est clair que la question est double. Les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant données, elle consiste à se demander :

I. Si les équations (1) admettent toujours (en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) une solution; (*possibilité*)

II. S'il est impossible que ces équations admettent plus d'une solution. (*unicité*)

Les méthodes du Calcul différentiel conduisent à en chercher la solution dans les propriétés infinitésimales des fonctions f qui définissent la transformation. Une condition nécessaire bien connue est (en supposant que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ admettent des dérivées premières continues) que *le déterminant fonctionnel*

$$(2)\qquad \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

soit de signe constant.

Cette condition prise au sens étroit est d'ailleurs suffisante *localement*, c'est-à-dire que, a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant un point de e_n où le déterminant (2) n'est pas nul et A $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ son image, on peut, autour de ce dernier point, décrire une sphère assez petite pour qu'un point quelconque pris à son intérieur soit l'image d'un point et d'un seul voisin de a.

2. On a quelquefois admis que la condition précédente était suffisante d'une manière générale, c'est-à-dire que, si elle était vérifiée quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, elle entraînait, quels que soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, une réponse affirmative aux questions I et II.

Il est pourtant clair, dès le cas d'une variable ($n = 1$), que l'on n'est pas ainsi assuré de remplir la condition I. Si la fonction $X = f(x)$ admet une dérivée première f' toujours positive, l'équation

$$X = f(x)$$

considérée comme équation en x, n'admet jamais plus d'une solution, mais on peut choisir X de manière qu'elle n'en admette aucune, à moins que les deux intégrales

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{a} f'(x)\,dx, \quad \int_{a}^{\infty} f'(x)\,dx$$

ne soient infinies.

Pour n supérieur à 1, il est visible qu'il ne suffit pas de remplacer la dérivée f' par le déterminant fonctionnel (2). Par exemple, pour la transformation

$$X = f(x), \qquad Y = \psi(x)\varphi(y),$$

le déterminant fonctionnel est $f'(x)\,\psi(x)\,\varphi'(y)$; on peut, en le supposant supérieur à un nombre positif fixe et même indéfiniment croissant (et cela d'une manière aussi rapide qu'on le veut) avec x ou y, admettre néanmoins que les intégrales (3) sont finies et que, par conséquent, X n'est pas susceptible de prendre toutes les valeurs réelles. Une aire, indéfiniment étendue dans tous les sens, du plan des xy, a alors pour image une aire qui s'allonge indéfiniment dans le sens parallèle à l'axe des Y, mais qui reste comprise entre deux ordonnées fixes.

3. La quantité qu'il convient d'introduire ici, à la place du déterminant fonctionnel, est évidemment l'*axe mineur* μ *de l'ellipse* ou de l'*ellipsoïde de déformation*, c'est-à-dire la plus petite valeur du rapport

$$\sqrt{\frac{dX_1^2 + dX_2^2 + \ldots + dX_n^2}{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}},$$

et la condition qu'il y a lieu de se donner à cet égard est :

[Condition (C)], que, μ_ρ désignant le *minimum de* μ *sur la sphère*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2 \tag{4}$$

de l'espace e_n, *l'intégrale*

$$\int_0^\infty \mu_\rho \, d\rho \tag{5}$$

soit infinie.

Si cette condition est remplie, une ligne de longueur infinie tracée dans e_n ne pourra pas avoir pour image une ligne de longueur finie.

4. Mais la question est loin d'être ainsi résolue. Car, contrairement à ce qui arrive dans le cas d'une variable, on sait que le non-évanouissement du déterminant fonctionnel, dans une région finie, quelconque de e_n, *n'assure même plus l'unicité*. Les fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = f_1(x_1, x_2), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2), \end{array}\right. \tag{1'}$$

étant définies dans une région déterminée (σ) du plan des x_1, x_2 et ayant, dans toute cette région, leur déterminant fonctionnel positif et non nul, une aire s intérieure à σ, limitée par une courbe fermée unique (sans point double) γ, peut avoir pour image une aire se recouvrant partiellement elle-même, γ ayant pour image une courbe Γ à points doubles, analogue à celle qui est représentée figure 1 (1). Un même point de cette aire peut alors être l'image commune de plusieurs points de s.

En un mot, les données précédentes ne fournissent aucun renseignement sur la résolubilité des équations (1'), sauf à l'intérieur de cercles suffisamment petits — dont les méthodes classiques ne font même pas connaître explicitement le rayon (2).

Fig. 1.