

Guillaume Gosselin, algébriste de la Renaissance

Odile KOUTEYNIKOFF
 Groupe M.:A.T.H.



MNEMOSYNE

UNIVERSITE PARIS VII-DENIS DIDEROT

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;
de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : "La mémoire"
gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

Guillaume Gosselin,
Algébriste de la Renaissance
Traduction du latin en français, introduite et commentée,
des livres III & IIII du *De Arte Magna*

GVLIELMI
GOSSELINI CADOMEN-
SIS BELLOCASSII DE ARTE
magna, seu de occulta parte nume-
rorum, quæ & Algebra, & Almuca-
bala vulgo dicitur,

LIBRI QVATVOR.

*In quibus explicantur equationes Diophanti, Regu-
la Quantitatis simplicis, & Quantitatis surdæ.*

Ad Reuerendissimum in Christo Patrem
REGINALDVM BEALNAEVVM,
Mandensem Episcopum, Illustrissimi
Ducis Alenconij Cancellarium, Comi-
tem Geuodanum, atque in sanctiori &
interiori consilio Consiliarium.



V. 2174

P A R I S I I S
Apud Aegidium Beys, via Iacobæa,
ad insigne Lilij albi.
M. D. LXXVII.

1577

Ce numéro spécial de Mnemosyne reprend un mémoire pour le Diplôme d'Etudes Approfondies d'Histoire des Sciences de l'Université Paris VII Denis Diderot, dirigé par Monsieur Christian Houzel, soutenu en octobre 2003 devant Messieurs Christian Houzel et Roshdi Rashed. Je les remercie.

Je remercie Henry Plane et Frédéric Métin, qui m'ont fait connaître les textes de référence.

Je remercie Marie-Hélène Depardon, latiniste, pour les précieux conseils qu'elle m'a donnés.

EDITORIAL

Jean-Luc Verley

L'Ecole algébriste française du XVI^e siècle est souvent sous-estimée – voire niée – par rapport aux grands auteurs italiens dont le nom est resté associé, dans tous les textes traditionnels, à l'histoire de la théorie des équations du troisième et du quatrième degré et, par là-même, à la boîte de Pandore des nombres dits imaginaires. Les histoires schématiques des mathématiques parachutent alors François Viète et René Descartes.

Viète n'est pourtant pas sorti de rien, en tout cas, pas de l'Ecole italienne. Il y a eu, tout au long du XVI^e siècle, une Ecole algébriste française très riche. Son originalité est d'être associée au mouvement humaniste de la Renaissance. Faut-il rappeler que le mathématicien Jacques Pelletier du Mans était un poète qui faisait partie de la Pléiade, groupe articulé autour de Pierre Ronsard ? L'exigence humaniste s'applique aussi à l'Algèbre.¹

A partir de 1550, apparaît tout autant sur le plan artistique (peinture, architecture) que sur le plan scientifique, ce que l'on a appelé la seconde Renaissance. L'auteur étudié par Odile Kouteynikoff, Guillaume Gosselin de Caen, est caractéristique, par ses préoccupations, de ce deuxième versant du XVI^e siècle. Bien que son style reste globalement rhétorique, il utilise des abréviations et des signes efficaces et fait ainsi un pas vers la notation symbolique qui permettra à l'Algèbre de devenir une « science briefve et claire ». Il s'emploie à rendre simple la présentation qu'il donne à ses contemporains des textes de Tartaglia et de Diophante. Le choix qui a été fait de traduire les livres III et VIII de son *De Arte Magna* montre clairement ces préoccupations. Le commentaire dégage bien l'importance du mathématicien allemand Xylander, le héraut de Diophante, et celle de Pedro Nuñez, personnage charismatique des sciences portugaises de cette époque, au côté des auteurs italiens.

Nos amis de Mnémosyne découvriront avec autant de plaisir que moi, j'en suis sûr, ce texte mathématique de la deuxième Renaissance en France.

¹ On peut sur cette question consulter : *Les algébristes français du XVI^e siècle, Exposition*, Bibliothèque nationale, Paris, 24 avril – 31 mai 1991. Notice de G. C. Cifoletti.

Extrait du Priuilege du Roy.

IL est permis à Gilles Beys, Libraire
liuré en l'Vniuersité de Paris, d'im-
primer ou faire imprimer, & exposer
en vente ce present liure, intitulé *Gu-*
lielmi Gosselini Cadomensis Bellocassij de
Arte Magna, seu de occulta parte numero-
rum, quæ & Algebra, & Almucabala vul-
go dicitur Libri Quatuor, &c. Et defen-
ses sont faites à tous autres Libraires &
Imprimeurs, n'en imprimer, ny vëdre
d'autre impressïon, que de celle dudit
Beys, ou de son consentement, iusques
à neuf ans entiers, finis & accomplis, a-
pres la premiere impressïon qui en se-
ra faite : A peine de confiscation, & d'a-
mende: cõme plus amplement est por-
té par les Letres sur ce donnees à Paris
le 17 Septemb. 1577.

Signé YVER

SOMMAIRE

<i>Operis in cap. Distributio.....</i>	<i>p. 6</i>
<i>Introduction</i>	<i>p. 9</i>
<i>Traduction des livres III et IIII du De Arte Magna</i>	<i>p. 17</i>
<i>Commentaire historique et mathématique.....</i>	<i>p. 41</i>
<i>Annexe 1 : Ecriture symbolique actuelle des problèmes de Gosselin</i>	<i>p. 61</i>
<i>Annexe 2 : Le texte latin du livre IIII</i>	<i>p. 75</i>
<i>Catalogue du groupe M. : A.T.H.....</i>	<i>p. 83</i>



OPERIS IN CAP. DI-

STRIBVTIO.

Primi libri Cap. sunt XVII.

DE quantitate cap. i

De ratione numerandi

cap. ii

Quid sit Algebra cap. iii

Quis Algebrae fuerit inuentor cap. iiii

Quis sit Algebrae finis cap. v

De numerorum nominibus cap. vi

De ratione vestigandi lateris Cubici

nostra cap. vii

De proportionem in genere cap. viii

De proportionem Arithmetica cap. ix

De proportionem Geometrica cap. x

De componendis rationibus cap. xi

De rationum deductione cap. xii
 De rationū multiplicatione cap. xiii
 De rationum diuisione, & septem
 ad hanc problematis cap. iiii
 De Regula simplicis hypothesis, tri-
 bus ad hanc problematis, & demō-
 stratione nostra cap. xv
 De Regula duplicis hypothesis, duo-
 bus problematis, & demonstratione
 nostra cap. xvi
 Regulae duplicis vsus in quantitatibus
 continuis in qua Cubi duplicā di ra-
 tio Mathematica demōstratur, tri-
 busque aliis ad hanc problematis,
 hucusque desideratis cap. xvii

Libri Secundi Cap. sunt XIII.

De valore nominum siue quantitatum
 huius artis cap. i
 De additione & subductione nomi-
 num cap. ii

De nominum multiplicatione cap. iii
 De nominum diuisione cap. iiii
 De integrorum additione cap. v
 De integrorum deductione cap. vi
 De integrorum multiplicatione, & de
 monstratione nostra cap. vii
 De integrorum diuisione cap. viii
 De particulis cap. ix
 Quid sit latus, & quotuplex cap. x
 De laterum multiplicatione cap. xi
 De laterum additione cap. xii
 De laterum deductione cap. xiii
 De laterum diuisione cap. xiiii

Liber Tertii cap. sunt XII.

De æquatione cap. i
 Quotuplex sit æquatio cap. ii
 De æquatione simplice, duobus ad hanc
 problematis, & demonstratione nostra
 cap. iii
 De æquatione secunda, & tribus cano-

nibus cum demonstrationibus no-
stris Arithmeticis, & tribus ad hanc
problematis cap. iiii

De æquatione ad hanc proportionali,
& vno ad hanc problemate cap. v

De reductione Quadratorum ad vnū
Quadratum, & vno ad hanc pro-
blemate cap. vi

Quomodo reuocentur quantitates ad
minorem valorem, & vno ad hoc
problemate cap. vii

De infinitis harum æquationū digno-
scendarum rationibus cap. viii

Quomodo in particulis & lateribus
fieri debeat æquatio, & tribus ad
hoc problematis cap. ix

De Aequatione tertia seu Cubica ca. x

De fictitia Diophanti equatione, &
quinque ad hanc problematis
cap. xi

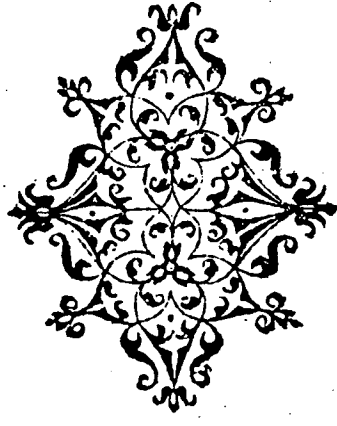
De duplicata Diophanti æqualitate, &
vno ad hanc problemate cap. xii

Dati cuiuscunque Potygoni lateris in
quirendi generalis nostra ratio &
facilis cap. xiii

Libri Quarti Cap. sunt II.

De quantitate Absoluta seu simplice,
& quinque ad hanc problematis
cap. i

De quantitate surda, & quatuor ad hanc
problematis cap. ii



INTRODUCTION

On ne sait presque rien de Guillaume Gosselin, si ce n'est qu'il est « de Caen », mort vers 1590, et qu'il a fait paraître, à Paris, chez Gilles Beys, rue Saint Jacques, à l'enseigne du Lis blanc, en 1577 et en 1578 respectivement, à une époque où il était encore jeune,

une Algèbre en latin, dite le « *De Arte Magna* » dont des exemplaires sont répertoriés à Anvers, Auxerre, Caen, Grenoble, Lille et Paris :

*Gulielmi Gosselini Cadomensis Bellocassii de arte magna, seu de occulta parte numerorum, quæ & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur, libri quatuor, in quibus explicantur æquationes Diophanti, Regulæ Quantitatis simplicis, & Quantitatis surdæ.*¹

Quatre livres de Guillaume Gosselin sur le grand art ou la partie cachée des nombres, qu'on appelle couramment Algèbre et Almucabale, dans lesquels sont expliquées les égalisations de Diophante, les règles de la quantité simple et de la quantité sourde.

et une traduction en français de *l'Arithmétique* de Nicolo Tartaglia (~1499-1557), composée de deux parties qui sont, ainsi que le précise Gosselin, les deux premières du *Traité general des nombres & mesures* de cet auteur,² dont l'édition de 1560 comporte six parties :

*L'Arithmetique de Nicolas Tartaglia Brescian, grand Mathematicien, et Prince des Praticiens, divisée en deux parties, ... recueillie, & traduite d'Italien en François, par Guillaume Gosselin de Caen : avec toutes les demonstrations Mathematiques : & plusieurs inventions dudit Gosselin , esparses chacune en son lieu, ...*³

¹ G. Gosselin, *De arte magna*, Paris, 1577. (BnF V. 20151).

² *Il General Trattato de Numeri et Misura* de Nicolo Tartaglia, Venise, 1556 -1560.

³ *L'arithmetique de Nicolas Tartaglia*, ... recueillie, & traduite d'Italien en François, par Guillaume Gosselin de Caen, Paris, 1578. (BnF V. 19197).

Gosselin a également écrit en latin un petit livre sur la raison d'étudier et d'enseigner les mathématiques, paru en 1583, dont un exemplaire, le seul existant peut-être, est abrité dans les réserves profondes de la Bibliothèque Nationale de France.⁴

Gosselin travaille en même temps à son *De Arte Magna* et à la traduction de l'*Arithmétique* de Tartaglia, puisque les deux réservations de droits sont datées du même 17 septembre 1577, et les deux ouvrages ne sont pas indépendants.

Dans la partie de son traité traduite par Gosselin, qui date de 1556, Tartaglia fait des références explicites à des prédécesseurs illustres, tels que Leonardo Fibonacci (Leonard de Pise, ~1170 ~1240) ou Lucas Pacioli (Frère Luc du Bourg, ~1445-1514), mais ne semble pas connaître le mathématicien grec Diophante d'Alexandrie (peut-être 3^{ème} siècle de notre ère), bien que le moine byzantin Maxime Planude (~1260 ~1310) et l'astronome allemand Regiomontanus (1436-1476), auxquels Gosselin, lui, rend hommage, aient chacun en leur temps attiré l'attention de leurs contemporains sur l'œuvre de Diophante.

En 1577, Gosselin connaît le texte de Diophante et y porte grand intérêt. Parce qu'il ne cite Raffaele Bombelli (1522-1572)⁵ dans aucune de ses préfaces parmi les « modernes qui ont écrit sur la science des nombres », on peut penser qu'il ne connaît pas l'*Algebra* (Bologne, 1572) dans laquelle Bombelli a intégré des transcriptions de nombreux problèmes de Diophante ; il est probable en revanche que Gosselin a disposé rapidement du texte de Xylander (Wilhelm Holzmann, 1532-1576), paru à Bâle en 1575, qui offre la première traduction du grec en latin des six livres alors connus des *Arithmétiques* de Diophante. Malgré la difficulté du texte la diffusion des *Arithmétiques* en Europe fournit brutalement une source importante de problèmes nouveaux et de méthodes nouvelles, à Gosselin et à ses successeurs immédiats, Simon Stevin (*Arithmétique*, Leyde, 1585), François Viète (*L'art analytique*, Tours, 1591-1593), Albert Girard (*L'invention nouvelle en algebre*, Amsterdam, 1629), qui,

⁴ G. Gosselin, *De Ratione discendæ docendæque mathematices repetita prælectio*, Paris, 1583. (BnF V. 1991).

⁵ Bombelli est le premier à avoir ouvert le manuscrit des *Arithmétiques* de Diophante de la bibliothèque du Vatican, en 1570, mais au lieu d'en éditer une traduction comme il en avait d'abord eu le projet, il a intégré dans l'édition tardive de son *Algebra* (Bologne, 1572) les transcriptions de nombreux problèmes de Diophante, sans les distinguer des siens propres.

en cette fin de Renaissance, œuvrent à l'élaboration d'une Algèbre simple et efficace. Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638), lui, fera un travail important pour tenter de restituer fidèlement le manuscrit de Diophante et en donnera une nouvelle traduction, commentée, éditée à Paris en 1621.

Le *De Arte Magna* est l'œuvre d'un algébriste de la Renaissance, désireux de former son lecteur à la méthode algébrique que lui livrent ses prédécesseurs immédiats et qu'il s'approprie. Gosselin fait des références explicites à Michael Stifel (*Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1544), Jérôme Cardan (*Ars Magna*, Nuremberg, 1545), Jacques Peletier du Mans (*L'Algebre*, Lyon, 1554), Pierre Forcadel (*L'Arithmétique*, Paris, 1556), Jean Borrel (*Buteo*, *Logistica*, Lyon, 1559), et surtout Pedro Nuñez (*Libro de Algebra*, Anvers, 1567), dont il est très proche. L'ouvrage tire aussi une valeur spécifique de ses liens tant avec l'*Arithmétique* de Tartaglia que Gosselin diffuse qu'avec les *Arithmétiques* de Diophante qu'il découvre.

Gosselin synthétise lui-même ces liens puisque l'adresse au « Lecteur Benevole », dont il fait précéder la traduction de la première partie du traité de Tartaglia, se termine par la recommandation d'assimiler d'abord les règles de l'Arithmétique et de passer ensuite à l'étude de l'autre partie des nombres que l'on appelle Algèbre, qui est le « Grand Art par lequel il rend Diophante facile ». Les deux ouvrages que Gosselin fait éditer en même temps s'avèrent donc complémentaires.

Sommairement, et sans les nuances d'expression qu'une analyse plus fine imposerait, nous dirons que les deux premiers livres du *De Arte Magna* contiennent les préliminaires usuels d'une Algèbre du XVI^e siècle, à savoir les règles Arithmétiques qui fondent les règles de l'Algèbre : les calculs additifs sur les rangs des proportions géométriques, les extractions de racines de différentes multiplicités et les calculs sur les expressions irrationnelles, les notations et les dénominations des objets de l'Algèbre. Classiquement aussi, le livre III est consacré aux règles pour la résolution des équations à une inconnue, simples et quadratiques, ou s'y ramenant ; les équations cubiques sont abordées. Au livre IIII, Gosselin résout des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Dans tout son ouvrage, Gosselin décrit en extension les raisonnements et les opérations qu'il conduit et, bien qu'il insère dans ses

phrases des abréviations et des signes intéressants et efficaces son style reste globalement rhétorique.

Nous proposons ici une traduction des livres III et IIII du *De Arte Magna*. On y trouve des énoncés et des démonstrations d'algorithmes algébriques, des illustrations de ces règles par des exemples, et leur application à la résolution de nombreux problèmes. Certains de ces problèmes sont déjà traités par une méthode arithmétique classique dans l'*Arithmétique* de Tartaglia où Gosselin accompagne alors sa traduction d'une remarque sur l'efficacité de l'Algèbre renvoyant à la solution algébrique qu'il donne dans le *De Arte Magna* ; certains des problèmes, et parfois les mêmes, se trouvent dans les *Arithmétiques* de Diophante et Gosselin souligne alors dans le *De Arte Magna* soit l'originalité de la méthode de l'auteur grec soit à nouveau la simplicité des solutions apportées par l'Algèbre. Les problèmes relatifs aux nombres polygonaux et aux nombres congruents, en particulier, font l'objet, dans le *De Arte Magna*, de résolutions algébriques d'autant plus efficaces qu'elles s'appuient sur des études arithmétiques pertinentes du traité de Tartaglia, en plusieurs cas approfondies par Gosselin qui, sortant de son seul rôle de traducteur, insère des reprises ou des remarques complémentaires dont il précise qu'il est l'auteur.

Sur quelques choix de traductions.

La question que nous nous sommes plusieurs fois posée est celle du choix du terme français actuel juste, pour rendre le sens du mot latin dans le *De Arte Magna*, indépendamment du mot français que Gosselin lui-même peut utiliser à l'époque, dans sa traduction de Tartaglia par exemple, avec une signification alors différente de celle qu'il a prise aujourd'hui.

Le mot « æquatio » pose le problème de façon exemplaire. Pour la traduction de la phrase

Æquatio autem est duarum quantitatum diversi nominis & valoris ad unam æstimationem reductio,

le mot « équation » est mal adapté, dans la signification spécifique dans laquelle il est maintenant figé. La locution « mise en équation » conviendrait ici, mais il est difficile de lui faire traverser tout le texte. Nous avons donc choisi le terme non usé de « égalisation » qui nous semble cumuler l'avantage de rendre correctement le sens de « æquatio » dans le texte de Gosselin, en ne contenant pas d'indication trop précise sur la nature des objets dont l'égalité est posée, et celui de transposer en français entre les mots « égalisation, équaler, être égal à, ... » la communauté de radical qu'il y a en latin entre les mots « æquatio, æquari, æquatus esse ... ». Ce qui donne pour la phrase ci-dessus :

Or l'égalisation est la réduction à une seule estimation de deux quantités de dénominations et de valeurs différentes.

Nous nous sommes attardé également sur l'expression « fictitia æquatio », dont Gosselin fait le titre du chapitre XI du livre III : *De fictitia Diophanti æquatione*. La question de ce qui est sous-jacent se pose avec d'autant plus d'acuité que dans l'introduction à son édition annotée de 1926 des œuvres connues de Diophante, Paul Ver Eecke traduit ce titre par : *De l'équation de fausse position*,⁶ en se référant en note à la « fausse position » des arithméticiens, encore employée au XVI^e siècle, ajoute-t-il. Il ne semble pas pourtant que la démarche décrite au chapitre XI ait à voir avec cette méthode arithmétique, que Gosselin traite par ailleurs aux chapitres XV, XVI et XVII de son livre I, employant alors les termes tout à fait parlants de « regula simplicis hypothesis » et « regula duplicis hypothesis ». Et quand, dans sa traduction du traité de Tartaglia, il renvoie à « la fiction de l'équation de Diophante » pour améliorer le traitement des problèmes sur les nombres carrés ou les nombres congruents, il explicite qu'il s'agit d'une méthode algébrique.

Quelle est donc la portée mathématique du terme « fictitia » sous la plume de Gosselin ? A la même époque, on parle aussi de « nombres fictifs » pour désigner des nombres imaginés, nombres négatifs ou fractions de l'unité, introduits pour leur efficacité, même si

⁶ Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes, par Paul Ver Eecke, Bruges, 1926, introduction p. 73.

l'impossibilité de leur donner un sens mathématique admis par tous les prive du statut d'objets mathématiques ayant une réalité.⁷ Nous avons recensé les différents mots latins utilisés par Gosselin pour signifier l'hypothèse heuristique et nous avons choisi de rendre « facere » par « poser », « fingere » par « supposer » et « effingere » par « introduire ». Pour « fictitia aequatio », nous avons alors hésité entre les locutions « égalisation artificielle » et « égalisation avec supposition », que nous avons finalement gardée. La méthode algébrique inspirée de la méthode de Diophante, que Gosselin explique au chapitre XI, repose bien sur une conjecture, sur l'introduction d'apparence arbitraire d'une expression contenant l'inconnue, que l'on peut faire varier librement pour générer les solutions des problèmes indéterminés.

Sur quelques termes de signification mathématique ambivalente.

Le mot : « valor » que nous avons systématiquement traduit par « valeur » prend un sens différent selon ses occurrences.

Gosselin utilise les lettres L, Q et C pour abrégier les termes qui désignent les trois espèces numériques, Latus, Quadratus et Cubus, que nous avons traduits par Lé, Quarré et Cube.⁸ Il nous indique que les « valeurs » en sont respectivement 1, 2 et 3. Il s'agit donc de leurs rangs dans la suite des dénominations, qu'il note ainsi :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
L	Q	C	QQ	RP	QC	RS	QQQ	CC

Dans ces conditions un « nombre absolu » est « dépourvu de valeur ».

Il apparaît que les signes associés aux dénominations se fabriquent multiplicativement : QC, qui est le signe associé à la sixième dénomination, désigne le carré (de valeur 2) du cube de valeur 3), pareillement CC dont la valeur est 9 désigne le cube du cube. Des signes

⁷ On peut consulter par exemple : Michael Stifel, *Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1544, livre III, ff. 249-250.

⁸ Nous choisissons de traduire le mot latin *latus* par « lé » pour réserver, comme Gosselin, la lettre C que suggérerait le mot « côté » à la désignation du Cube.

spécifiques sont donc nécessaires pour les rangs qui sont des nombres entiers premiers : RP, abréviation pour « relate premier » est le signe associé au rang 5, qui est le premier nombre entier premier, RS est le signe associé au rang 7, qui est le second nombre entier premier.

Bien que Gosselin ne fasse pas apparaître les valeurs des dénominations dans les notations, il leur applique correctement la règle de composition des rangs. Par exemple, au chapitre III sur l'égalisation simple, il explique que pour ramener l'égalisation : 1C égale 4L à l'égalisation : 1Q égale 4, il suffit de retrancher la valeur de L soit 1 des valeurs de C et de L, justifiant hardiment cette façon de faire par l'axiome qu'il énonce ainsi : *Si de quantités égales on retire des quantités égales, celles qui restent sont égales.*

Le mot : « valeur » peut aussi avoir son sens usuel de valeur numérique, connue ou inconnue, d'une quantité. A ce propos, les « démonstrations arithmétiques » que Gosselin donne des algorithmes de résolution des équations quadratiques, au chapitre IIII, sont propres à retenir notre attention. S'intéressant par exemple à l'équation : 10 L plus 1 Q égalent 56, Gosselin n'effectue pas d'opérations arithmétiques sur les signes choisis pour dénommer les espèces et ne procède à aucun calcul avant d'avoir introduit un A, par lequel il note la valeur numérique de la grandeur inconnue. A est un nombre absolu et dépourvu de valeur, au sens précédent, qui doit vérifier la relation : $A(10+A) = 56$; Gosselin déduit de cette égalité des égalités nécessaires successives qui conduisent à une valeur numérique dont il vérifie qu'elle convient.

Cette dernière remarque sur la séparation opérée par Gosselin entre désignation de l'inconnue et valeur numérique inconnue constitue peut-être une piste pour comprendre la partition du livre IIII, qui est tout entier consacré à des résolutions de problèmes à plusieurs inconnues, en deux chapitres intitulés respectivement : *La quantité absolue* et *La quantité sourde*.

Certes l'expression : « quantité absolue » est vraisemblablement empruntée à Nuñez qui, sous le titre : *De la regla de la cantidad simple, o absoluta, con sus casos*, consacre le chapitre 6 de la partie III du *Libro de Algebra* à la résolution de problèmes du premier degré à plusieurs inconnues. On sait aussi que Pacioli (*Summa*, Venise, 1494), lui, utilise le terme de

« quantité sourde » quand il fait le choix de désigner une deuxième inconnue. Alors quel est le projet de Gosselin quand il rapproche les deux termes pour les distinguer ?

Au chapitre I, intitulé *La quantité absolue*, il conduit et explicite, avec une maîtrise parfaite, plusieurs résolutions par combinaisons linéaires de ce que nous appellerions aujourd'hui des systèmes linéaires de deux, trois ou quatre équations, à deux, trois ou quatre inconnues. Pourquoi donc ce titre ? Peut-être parce que, comme plus haut pour les démonstrations arithmétiques des algorithmes, Gosselin considère que les lettres A, B, C, D, qu'il introduit et avec lesquelles il calcule, représentent les valeurs numériques des grandeurs inconnues, et ne sont pas des désignations d'inconnues, mais seulement des nombres absolus et « dépourvus de valeur » dont on cherche la valeur.

Au chapitre II en revanche, intitulé *La quantité sourde*, Gosselin procède à la mise en équation des problèmes en introduisant le signe 1 L, classique chez lui pour désigner l'inconnue, et un deuxième signe, 1 q, qui se présenterait donc comme une deuxième inconnue, et il calcule sur ces signes, par substitution. Il se limite à ces deux signes, que le problème comporte deux, trois ou quatre inconnues. Cette restriction conduit à des solutions très lourdes, comparées à celles du chapitre I, voire à des acrobaties. Ainsi au problème IIII, le même signe 1 q désigne successivement deux grandeurs inconnues différentes dans la même résolution.

Le chapitre I empêche pourtant de penser que l'habileté de calculateur de Gosselin soit ici en cause. L'introduction d'une deuxième inconnue constituerait-elle en soi un pas conceptuel assez difficile à franchir pour que Gosselin n'envisage pas d'introduire plus de deux signes à la fois ? La question resterait alors de savoir si 1 L et 1 q sont deux quantités sourdes, en tant que signes désignant des inconnues, ou si 1 q seulement est la quantité sourde, en tant que deuxième inconnue, ou bien en tant que désignation flottante d'une quantité à trouver, variable en fonction de l'état d'avancement de la résolution. Alors même que Gosselin maîtrise parfaitement la technique du calcul par les combinaisons linéaires pour des systèmes de quatre équations à quatre valeurs inconnues, l'utilisation de la « quantité sourde » serait une hardiesse théorique, par laquelle il aurait choisi de terminer son livre.

TRADUCTION

QUATRE LIVRES
DE GUILLAUME GOSSELIN VEXINOIS DE CAEN,
SUR LE GRAND ART OU LA PARTIE CACHEE DES NOMBRES,¹
QU'ON APPELLE COURAMMENT & ALGEBRE & ALMUCABALE,

*dans lesquels sont expliquées les égalisations de Diophante,
les Règles de la Quantité simple & de la Quantité sourde.*

Au très Révérend Père dans le Christ RENAUD DE BEAUNE, Evêque de Mende,
Chancelier du très Illustre Duc d'Alençon, Comte de Gévaudan,
et Conseiller au conseil des affaires sacrées et intérieures.

A PARIS, chez Gilles Beys, rue Saint Jacques, à l'enseigne du Lis blanc,
MDLXXVII.²

¹ On trouve le terme « la partie cachée des nombres » chez Jacques Peletier du Mans qui, lui-même, l' emprunte sans doute à Michael Stifel.

² Guillaume Gosselin, *De Arte Magna*, frontispice.

LE TROISIEME LIVRE
DE GUILLAUME GOSSELIN DE CAEN
SUR LE GRAND ART OU LA PARTIE CACHEE DES NOMBRES,
QU'ON APPELLE COURAMMENT & ALGEBRE & ALMUCABALE.³

L'égalisation. Ch. I.

Comme cet art très supérieur consiste presque entièrement en l'égalisation et l'extraction des lés,⁴ et que dans les livres précédents nous avons parlé tant de la recherche des lés que de ce qui devait précéder l'égalisation, nous avons jugé opportun, une fois toutes ces choses traitées, d'en venir à l'égalisation en tant que faite et sommet de cette science : elle est en effet ce sans quoi les choses précédentes seraient sans utilité, et ne peut non plus d'aucune manière se constituer sans elles. Nous l'expliquerons donc avec la plus grande clarté possible. Or l'égalisation est la réduction à une seule estimation de deux quantités de dénominations et de valeurs différentes, comme quand nous disons qu'un Quarré est égal à quatre lés, l'égalisation se fait entre 1 dénommé par Quarré et 4 semblablement dénommé par lé, et si un Quarré est 16, nécessairement quatre lés aussi seront égaux à 16 et, partant, un lé sera 4.

Quelle multiplicité d'égalisation. Ch. II.

Ils ne manquent pas, ceux qui ont corrompu cet art tout entier par une multitude extravagante de règles, qu'ils appellent des chapitres. D'autres ont accepté deux règles seulement et pas plus, comme si notre Algèbre était contenue dans les bornes tellement étroites des lés et des Quarrés. Mais les Arithméticiens assurément très supérieurs Lucas Paccioli & Léonard de Pise, qui ont étudié la chose un peu plus habilement, ont mis en évidence que l'on ne peut donner ni deux, ni une infinité de règles, mais de même que toute quantité continue est soit ligne, soit surface, soit solide (et en effet le lieu ne se distingue pas de la surface), de même ont-ils déclaré que cet art s'occupe de ces trois espèces, ou de ce qui leur correspond dans les nombres, à savoir lé, Q<uarré>, C<ube>, ce pourquoi ils ont voulu qu'on puisse édicter aisément trois règles, précisément la simple & linéaire, la seconde plane qui opère sur les Quarrés, enfin la troisième solide sur les Cubes ; mais on ne voit pas non plus tout à fait nettement quelle opinion ils soutiennent, s'ils entendent les trois règles qui se rapportent aux Quarrés, ou si ce sont les trois qui se rapportent aux lés, quarrés & Cubes ; quoi qu'il en soit c'est notre opinion que nous démontrerons plus loin avec l'assistance de Dieu.

³ Guillaume Gosselin, *De Arte Magna*, f. 53.

L'égalisation simple. Ch. III.

On parle de l'égalisation simple quand deux quantités ou deux nombres de dénominations & de valeurs différentes se présentent finalement égaux entre eux. Donc quand nous serons parvenus à cela, nous partagerons le nombre de la quantité qui a la dénomination et la valeur les plus petites en <autant de parts que> le nombre de la quantité de dénomination et de valeur plus grandes. Nous retrancherons alors la dénomination la plus petite de la plus grande et nous noterons la valeur restante. Car si la valeur qui reste après que la plus petite a été retranchée de la plus grande est 1, le quotient sera la valeur du lé, car 1 est la valeur de L ; et s'il subsiste la valeur 2, le quotient sera la valeur du Quarré, & le lé du quotient la valeur du lé, puisque 2 est la valeur de Q ; s'il subsiste 3, le quotient sera la valeur du Cube, & son lé-Cubique la valeur du lé, et ainsi en avançant. Soient 40 égal à 10 L, parce que 40 est la quantité de dénomination la plus petite, je partage 40 en 10, le quotient est 4, puis je retranche la dénomination la plus petite de la plus grande, la dénomination de 40 est 0, la dénomination de 10 L est 1, dont en soustrayant 0 il reste 1, valeur dont la quantité est L, nous dirons alors que 4 est la valeur du lé ; soient 20 C égaux à 40 Q, nous partagerons 40 qui est le nombre de la plus petite dénomination en 20, le quotient sera 2, puis nous retrancherons la valeur de Q, soit 2, de la valeur de C, soit 3, il restera 1 valeur de L, nous dirons alors que 2 est la valeur de L ; soient 3 QQ égaux à 24 L, je partage 24 en 3, le quotient est 8, je retire la valeur de L, soit 1, de la valeur de QQ, soit 4, il reste 3, valeur dont la quantité est le Cube, 8 est donc la valeur du Cube, & 2, le Lé-Cubique de 8, la valeur du lé.

Axiomes.

Les quantités qui sont égales à une même quantité, sont égales entre elles.

II.

Si à des quantités égales on ajoute des quantités égales, les sommes seront égales.

III.

Si de quantités égales on retire des quantités égales, celles qui restent sont égales.

Notre démonstration de l'égalisation simple.

A quoi bon démontrer cette égalisation par de longs détours et non par un seul geste, grâce aux proportions, puisqu'il ne s'agit de rien d'autre que du troisième axiome ? Si en effet 1 Q est égal à 6 L, enlevons de part et d'autre des quantités égales évidemment la valeur 1, de l'un assurément du Quarré il reste la valeur de L, de l'autre le nombre, et ainsi 1 L sera 6 ; soit encore 1 C égal à 4 L, enlevons de part et d'autre la valeur 1, cela fera 4 égal à 1 Q, 2 sera donc la valeur du lé, & ainsi de suite.

⁴ Le mot latin *latus* devrait être traduit par « côté » et non par « lé », mais dans le texte de Gosselin, *latus* génère l'abréviation-symbole L que nous souhaitons garder, d'autant plus que nous allons, comme Gosselin, réserver la lettre C que suggérerait le mot côté à la désignation du Cube.

L'utilisation de l'égalisation simple.

Problème I.

Quatre hommes, leurs soldes reçues, sont entrés dans une taverne, et finalement ivres, ils ont mélangé leurs soldes. Le second cependant n'ignorait pas qu'il avait reçu le double de la solde du premier & 4 pièces d'or en plus, le troisième qu'il avait de même reçu le triple du second & 6 pièces d'or en plus, le quatrième enfin le double du troisième & 5 pièces d'or en plus. Mais un différend étant finalement survenu entre eux on en vint à ceci : un Arithméticien serait requis qui rendrait à chacun sa part. Il vint & ayant trouvé que la somme des pièces d'or était 120, il rendit à chacun son bien. Quelle fut la part de chacun ? [1]⁵

Posons que le premier a eu 1 L, le second a donc eu 2 L P 4, le troisième 6 L P 6, le quatrième 12 L P 5. Faisons la somme, il en résultera 21 L P 15 qui sont égaux à 120 ; enlevons 15 de part et d'autre, il restera 21 L égaux à 105 ; partageons 105 en 21, le quotient sera 5, et c'est le nombre de pièces d'or qu'a emporté le premier, le second 10 P 4 soit 14, le troisième 30 P 6 soit 36, le quatrième 60 P 5 soit 65 ; & 5, 14, 36, 65 réunis font 120.

Problème II.

Deux hommes ont une somme de pièces d'or inconnue de moi. Le premier a dit au second, si tu me donnes le Lé-Quarré de tes pièces d'or j'en posséderai trois de plus que toi, mais (a dit le second) si tu me donnes le lé-Quarré des tiennes, j'en aurai 5 de plus que toi : Combien de pièces d'or l'un et l'autre possédaient-ils dans leur cassette ? [2]

Supposons que le second avait 1 Q ; qu'il donne son L au premier, il lui restera 1 Q M 1 L, & parce que le premier doit avoir 3 de plus que le second, le premier aura donc 1 Q M 1 L P 3 ; qu'il rende alors au second 1 L qu'il a reçu de lui, il lui restera 1 Q M 2 L P 3, & le second aura 1 Q ; mais le second, d'après l'hypothèse, a avec le lé de l'avoir du premier 5 de plus que le premier ; que le premier donne alors son lé au second, soit LV 1 Q M 2 L P 3,⁶ le second aura 1 Q P LV 1 Q M 2 L P 3, & il restera au premier 1 Q M 2 L P 3 M LV 1 Q M 2 L P 3 ; mais le second avec le lé du premier doit avoir 5 de plus que le premier, ainsi le premier montant sera inférieur au second de 5 ; ajoutons alors 5 au premier, le premier devient 1 Q M 2 L P 8 M LV 1 Q M 2 L P 3, qui sera égal au second montant, précisément 1 Q P LV 1 Q M 2 L P 3, & en soustrayant 1 Q de part et d'autre, il restera LV 1 Q M 2 L P 3 égal à 8 M 2 L M LV 1 Q M 2 L P 3, & en ajoutant LV qui manque dans l'une des deux parties d'après l'axiome 3, il restera 8 M 2 L égaux à 2 LV 1 Q M 2 L P 3 ; doublons donc LV, il en résultera LV 4 Q M 8 L P 12, égal à 8 M 2 L, & en Quarrant les parties, 4 Q M 8 L P 12 égalent 64 M 32 L P 4 Q ; retranchons de part et d'autre 4 Q & 12, il restera 52 M 32 L égal à M 8 L ; enlevons de part et d'autre M 8 L, il subsistera 52 M 24 L égal à rien ; ajoutons de part et d'autre 24 L qui manquent dans l'une

⁵ Les numéros entre crochets renvoient aux résolutions transcrites en écriture symbolique actuelle, rassemblées dans le document annexe.

⁶ Le signe LV, abréviation de « lé universel », désigne la racine-carrée de tout ce qui suit, à la différence de L qui porte uniquement sur le signe suivant.

des parties, il résultera 52 égal à 24 L, & l'égalisation se traite ainsi : partageons 52 en 24, le quotient sera $2\frac{1}{6}$, soit la valeur de L, donc le second dont nous avons posé qu'il avait 1 Q, a eu le Quarré de $2\frac{1}{6}$, soit $4\frac{25}{36}$, et le premier 1 Q M 2 L P 3, soit $3\frac{13}{36}$. Et nous avons fait ceci pour deux raisons, la première pour mettre en évidence l'utilisation de LV, la seconde pour montrer que ce que disent Stifel et Peletier est faux, à savoir qu'il faut toujours supposer 1 L pour la chose inconnue ; car comment est-ce qu'en introduisant ce seul L, l'égalisation se traitera-t-elle ? Et quand bien même elle se traiterait, nous serions entraînés dans des lés plus généraux qu'il ne conviendrait, dont pas même le fil d'Ariane ne nous dégagerait, et cette question est difficile et supérieurement digne d'être examinée.

La seconde égalisation, que l'on nomme composée. Ch. IIII.

On parle de la seconde égalisation, quand l'une de ces quantités, que sont quarrés, lés, & nombres, se présente finalement égale aux deux autres, et comme elle peut prendre trois formes différentes, nous donnerons aussi trois règles, que nous démontrerons séparément.

La première règle.

On parle de la première règle de la seconde égalisation, quand un nombre est égal à 1 Q & des lés. Nous prendrons alors le quarré de la moitié du nombre des lés, que nous ajouterons au nombre absolu et dépourvu de valeur, nous chercherons le lé-Quarré de cette somme, de ce lé nous retrancherons la moitié du nombre des lés, le reste sera la valeur d'un lé : soient 40 égal à 1 Q & 6 L, nous ajouterons 9, Quarré de 3, moitié du nombre des Lés, à 40, il en résultera 49, somme dont le lé-quarré est 7, dont nous retrancherons 3 moitié du nombre des lés, il restera 4, et c'est la valeur d'un lé, car le Quarré de 4 est le nombre 16, 6 L, soit six fois 4, sont 24, qui avec 16 font 40.

Notre démonstration Arithmétique de cette règle. [3]

Soient 10 L P 1 Q égaux à 56, & soit le nombre A la valeur du lé, donc le produit de ce nombre A par 10 & A, soit dix fois ce nombre A & le quarré de A, sont égaux à 56 ; or, le produit de A par 10 est égal au produit de A par 5 & 5 parties de 10 d'après la première <proposition> du second <livre> d'Euclide. Nous partagerons alors 5 P A en 5 & A ; ainsi, d'après la quatrième <proposition> du second <livre>, le Quarré de 5 P A sera égal aux Quarrés de 5 & de A & au double du produit de 5 par A ; mais le double du produit de 5 par A & le Quarré de A sont égaux à 56 par hypothèse, donc le quarré de 5 P A est égal à 56 & au quarré de l'une des parties 5 qui est 25 ; ajoutons-les à 56, il en résultera 81, à savoir le Quarré de 5 P A ; ainsi, le lé de 81, soit 9, est égal à 5 P A ; de ces quantités égales enlevons des quantités égales, 5 de part et d'autre, il restera 4 égal à A, le nombre inconnu est donc 4, & 10 L sont 40, 1 Q est 16, lesquels ajoutés font 56.

L'utilisation de cette règle. Problème.

Cherchons deux nombres tels que, si ces nombres eux-mêmes sont soustraits de leurs carrés, il reste 48, & que s'ils sont ajoutés au résultat du produit de l'un par l'autre, il en sorte 31. [4]

Posons que les nombres ajoutés sont 1 L ; 48 P 1 L sera donc égal à leurs Carrés, & 31 M 1 L sera égal au produit de l'un par l'autre, & ainsi 62 M 2 L au double du produit ; mais d'après la quatrième <proposition> du second <livre> d'Euclide, les Carrés des parties avec le double du produit de l'une par l'autre sont égaux au Carré du tout ; or, le tout est le nombre qu'on a supposé être 1 L, donc 48 P 1 L P 62 M 2 L est égal à 1 Q, soit 110 M 1 L égal à 1 Q, & en ajoutant de part et d'autre 1 L qui manque dans une des parties, 110 sont égaux à 1 Q P 1 L ; et ainsi l'égalisation se traite selon cette règle : la moitié du nombre des lés 1 est $\frac{1}{2}$, le Carré $\frac{1}{4}$, ajoutons-le à 110, il en résultera $\frac{441}{4}$, dont le Lé-Carré est $\frac{21}{2}$, enlevons la moitié de 1 soit $\frac{1}{2}$, il restera $\frac{20}{2}$, soit 10, & c'est la valeur du lé, donc la somme des nombres que nous avons posée être 1 L est 10, ainsi le produit de l'un par l'autre est 31 M 10 soit 21. Pour connaître ces nombres séparément, nous partagerons 10 en deux parties de façon que le produit de l'une par l'autre soit 21 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier, & ces parties seront les nombres 3 & 7 qu'il fallait trouver, & cette méthode est beaucoup plus aisée que celle qui est rapportée par Peletier à la question 5 de l'égalisation composée.

La seconde règle.

On fait appel à la seconde règle de la seconde égalisation, quand 1 Q est égal aux lés & aux nombres. Alors, nous calculerons le Carré de la moitié du nombre des lés, auquel nous ajouterons le nombre absolu ou dépourvu de valeur, nous extrairons le Lé-Carré de cette somme, auquel nous ajouterons la moitié du nombre des lés, cette dernière somme sera prise comme valeur d'un lé : soit 1 Q égal à 4 L P 12, nous ajouterons 4 Carré de 2 moitié du nombre des lés 4 au nombre dépourvu de valeur 12, il en résultera 16, somme dont le Lé-Carré est 4, auquel nous ajouterons 2 moitié du nombre des lés, la somme sera 6 à savoir la valeur du lé, et c'est un fait que 4 L sont 24, qui ajoutés à 12 font 36 Carré du lé 6.

Notre démonstration Arithmétique de la seconde règle. [5]

Soient 6 L P 16 égaux à 1 Q. Il apparaît de façon manifeste que le lé inconnu est plus grand que le nombre des lés 6 : si en effet il était ou égal ou plus petit, alors la partie serait égale au tout, ce qui est absurde, à savoir 36 P 16 égaux à 36. Soit donc 6 P A ce nombre inconnu, le Carré de ce nombre est ainsi égal au produit de 6 par 6 P A & 16 ; mais le carré de ce nombre 6 P A est aussi égal au produit de 6 par 6 P A & de A par 6 P A d'après la première <proposition> du second <livre> d'Euclide, et ainsi le produit de 6 par 6 P A & 16 sont égaux au produit de 6 par 6 P A & de A par 6 P A ; des quantités égales enlevons de part et d'autre des quantités égales, le produit de 6 par 6 P A, les quantités restantes seront 16 égal au produit de A par 6 P A. Ceci étant ainsi établi, séparons 6 P 2 A en A & 6 P A, la moitié de

6 P 2 A est 3 P A, donc, d'après le cinquième théorème du second <livre> d'Euclide, le produit de A par 6 P A avec le Carré de l'écart entre 6 P A et 3 P A est égal au Carré de la moitié du tout, soit de 3 P A ; mais le produit de A par 6 P A est le nombre 16, comme cela a été démontré, l'écart entre 6 P A et 3 P A est la moitié de 6 donc 3, car l'écart entre A et A est 0, le Carré de cet écart 3 est 9, ajoutons-les à 16 il en résultera 25, qui sont égaux au Carré de la moitié de 6 P 2 A donc de 3 P A, ainsi les lés seront aussi égaux, le lé de 25 est 5, nombre qui est finalement égal à 3 P A ; de quantités égales retirons des quantités égales, 3 de part et d'autre, il restera A égal à 2, donc le lé inconnu que nous avons posé être 6 P A était 6 P 2, soit 8, puisque 6 L seront 48, qui avec 16 font 64 Carré du lé 8, ce qu'il fallait démontrer.

L'utilisation de cette règle. Problème.

Partageons 12 en deux parties de façon que le Carré de l'une avec l'autre fasse 54. [6]

Soit 1 L l'une des parties, l'autre sera donc 12 M 1 L, ajoutons le Carré de 1 L, soit 1 Q, à 12 M 1 L, il en résultera 1 Q P 12 M 1 L égaux à 54, ajoutons 1 L de part et d'autre, il en résultera 1 Q P 12 égaux à 54 P 1 L, ôtons 12 de part et d'autre, il restera 42 P 1 L égaux à 1 Q, et l'égalisation se traite selon cette règle : nous ajouterons donc le carré de la moitié de 1 soit $\frac{1}{4}$ à 42, il en sortira $\frac{169}{4}$, dont le lé sera $\frac{13}{2}$, ajoutons $\frac{1}{2}$ moitié du nombre des lés 1, il en résultera $\frac{14}{2}$, soit 7, et c'est la valeur du lé, alors la partie de 12 que nous avons posée être 1 L était 7, donc l'autre 5, ou 12 M 7 soit 5, & assurément 49 & 5 font 54.

La troisième règle.

Il s'agit enfin de la troisième règle de la seconde égalisation, quand des lés sont égaux à 1 Q & un nombre. Nous calculerons alors le Carré de la moitié du nombre des lés, dont nous retrancherons le nombre dépourvu de valeur, nous chercherons le lé-Carré du reste, ou bien nous l'ajouterons à la moitié du nombre des lés, ou bien nous l'en retrancherons si c'est ce qui convient, on aura la valeur d'un lé. Soit 6 L égal à 1 Q P 8 : nous retrancherons 8 de 9, Carré de 3, moitié du nombre des lés 6, il restera 1, reste dont le lé-Carré est 1 ; nous ajouterons 1 à 3 moitié du nombre des lés 6, il en résultera 4, à moins que nous ne retranchions 1 de ce 3, il restera 2 ; nous dirons alors que la valeur d'un lé est soit 4 soit 2, 4 assurément, parce que six lés sont 24, 1 Q est le nombre 16, lequel nombre 16 avec 8 fait les mêmes 24, et le lé est tout autant 2, le Carré de 2 est 4, s'il est ajouté à 8, la somme est 12, et c'est ce que font six lés, 12 n'est-ce pas.

Et s'il arrive que le nombre proposé soit égal au carré de la moitié du nombre des lés, alors la moitié du nombre des lés sera la valeur d'un lé : soient 6 L égaux à 1 Q P 9, je dis que 3 est la valeur d'un lé, car d'après la règle précédente, nous retrancherons le Carré de 3 soit 9 de 9, et il restera rien, dont le lé-Carré est rien, et comme il est impossible d'ajouter ou de retrancher rien de 3 puisqu'il est rien, 3 sera de l'une et l'autre manière la valeur d'un lé.

Notre démonstration Arithmétique de la troisième règle. [7]

Soient 32 P 1 Q égaux à 18 L. Ou bien le lé inconnu est plus grand que 18, ou bien égal, ou bien plus petit. On démontre qu'il n'est ni plus grand, ni égal : pas plus grand assurément, parce que s'il est plus grand, il est sûrement égal à 18 P A, & alors 18 P A multipliés par 18 seront égaux à 18 P A multipliés par 18 P A, soit la partie au tout, ce qui serait contraire à la raison ; et il n'est certainement pas égal non plus, car s'il était égal, 18 multipliés par 18 seraient égaux à 18 multipliés par 18 & 32, ce qui est absurde. Il s'ensuit donc que le lé inconnu est plus petit que 18, que ce soit donc le nombre B : & ainsi le nombre B multiplié par 18 sera égal au Carré du nombre B, soit B multiplié par B, & 32, & puisque ce nombre B est plus petit que 18, comme cela a été démontré, enlevons-le de 18, le reste sera 18 M B ; ainsi, d'après la première <proposition> du second <livre> d'Euclide, le produit de B par 18 sera égal au produit du même B par les parties de 18 soit le nombre B & 18 M B ; mais alors le produit de B par B, soit le Carré du nombre B & 32 sont égaux au produit du nombre B par 18, donc le produit du nombre B par B, soit le Carré de B, & 32 sont égaux au produit de B par B & au produit de B par 18 M B ; enlevons de part et d'autre le Carré de B, soit le produit de B par B, il restera 32 égaux au produit de B par 18 M B, et comme le nombre 18 a été séparé en B & 18 M B, il s'ensuit que 32 est le nombre produit d'une partie de 18 par l'autre. Maintenant donc nous séparerons 18 en deux parties de façon que le produit de l'une par l'autre soit 32 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier, et les parties seront 2 & 16, & l'une et l'autre sont valeur du lé inconnu.

L'utilisation de la troisième règle. Problème.

Cherchons deux nombres dont la différence soit 7, & dont les Carrés ajoutés soient égaux au Carré de 13, soit 169. [8]

Posons que l'un des nombres est 1 L, l'autre sera donc 1 L P 7, leurs Carrés sont 1 Q & 1 Q P 14 L P 49 dont la somme est 2 Q P 14 L P 49, égale à 169 ; enlevons 49 de part et d'autre, il restera 2 Q P 14 L égaux à 120, donc la moitié sera égale à la moitié, précisément 1 Q P 7 L égal à 60, et ainsi l'égalisation se traite par la première règle, applique-la & tu trouveras que la valeur du lé est 5, & que l'autre nombre est 7 P 5 donc 12, cela va sans dire.

Partageons 17 en deux parties de façon que la somme des Carrés soit 169.

Nous avons auparavant posé que l'une des parties est 1 L, donc l'autre 17 M 1 L, la somme des Carrés est 2 Q M 34 L P 289 égale à 169 ; enlevons 169 de part et d'autre & ajoutons 34 L, il en résultera 34 L égaux à 2 Q P 120, et bien sûr la moitié sera égale à la moitié, soit 17 L égaux à 1 Q P 60, et ainsi l'égalisation se traite selon cette règle : la moitié de 17 est $\frac{17}{2}$, son Carré $\frac{289}{4}$, dont je retranche 60, le reste est $\frac{49}{4}$ dont le lé est $\frac{7}{2}$, que je l'ajoute ou que je le retranche de $\frac{17}{2}$, il en sort les parties 5 & 12 comme précédemment.⁷

⁷ C'est la version corrigée du « 5 & 7 » erroné du texte original.

L'égalisation proportionnelle à la précédente. Ch. V.

Presque tous ont fait une troisième égalisation des quantités proportionnelles à l'égalisation précédente, telles que QQ, Q & le nombre, QC, C & le nombre, et une infinité de ce genre, quand pourtant en vérité la seconde égalisation en est la seule et unique démonstration ; et en effet la seconde égalisation telle que nous l'avons définie correspond au cas où Quarrés, lés et nombres sont égaux entre eux ; & qui contestera que Q est le lé de QQ ? Qui niera que C est le lé-Quarré de QC ? Pour cette raison donc, prolonge la règle : si l'une des trois quantités est le nombre, que l'une des deux autres alors soit désignée par la dénomination Q<uarré>, & que la troisième prenne la dénomination lé, ceci à condition toutefois que celle qui est marquée par la dénomination Q comprenne la seule valeur de Q, car si au contraire elle a une valeur autre que Quarré, que la troisième quantité soit marquée par toutes les autres dénominations que la seconde contenait en dehors de Q ; ainsi, si la seconde était QQ que la troisième soit Q, si la seconde était QC, que la troisième soit C, la seconde QQQ, la troisième QQ, & ainsi de suite, tu avanceras comme s'il y avait Q, L & le nombre. Et en effet selon l'hypothèse, la première quantité sera le nombre, la seconde prendra le rôle de Q, la troisième se mettra à la place des lés ; mais quand tu auras su trouver le lé des quantités précédentes, la valeur du lé à extraire de ce lé sera la valeur de la troisième quantité, et si la troisième quantité est un Cube, il faudra chercher le lé-Cubique, & ce sera la valeur du lé, si c'est un Quarré, le lé-Quarré, et ainsi de suite. Soient 1 Q Q P 6 Q égaux à 40, avance selon la première règle, grâce à laquelle tu trouveras que le lé demandé est 4, mais alors parce que la troisième quantité qui s'est mise à la place des lés a une dénomination plus grande que L, soit Q, pour cette raison je cherche le lé-Quarré de 4, soit 2, je dis alors que 2 est la valeur d'un lé, comme tu peux le vérifier.

L'utilisation de cette égalisation. Problème.

Partageons 20 en deux Quarrés, dont les lés multipliés l'un par l'autre donnent 8. [9]

Soit 1 Q la première partie, la seconde sera donc 20 M 1 Q ; multiplions leurs lés l'un par l'autre, cela fera LV 20 Q M 1 Q Q égal à 8, & en Quarrant les parties, 20 Q M 1 Q Q égaux à 64, & en ajoutant 1 Q Q de part et d'autre, 20 Q égaux à 64 P 1 Q Q, et ainsi il en résulte une égalisation proportionnelle à la troisième règle : applique-la & tu auras 4 & 16 comme valeurs des lés qui sont ici des Quarrés, l'un des Quarrés dans 20 est donc 4, l'autre 16, & leurs lés multipliés l'un par l'autre produisent 8.

La réduction des Quarrés à un seul Quarré. Ch. VI.

Il est clair d'après les démonstrations des règles précédentes, que nous devons ramener notre égalisation à 1 Q si les Quarrés sont plus d'un, ce qui se fait en partageant toutes les quantités en <autant de parts que> le nombre des Quarrés. A titre d'exemple, soient 4 Q égaux à 8 L P 12, parce que le nombre des Quarrés est plus grand que 1, ainsi le ramènera-t-on à 1 Q, nous partagerons les quantités quelles qu'elles soient en 4, le nombre de Q, et pour

cela nous faisons ainsi : puisqu'en divisant le nombre de Q par lui-même il viendra 1, nous divisons donc 4 par 4, ce qui fait 1 pour le nombre de Q, nous partageons 8, le nombre de L en 4, ce qui fait 2 pour le nombre de L, et enfin le nombre 12 en 4, ce qui fait 3 pour le nombre dépourvu de valeur, et ainsi à la place de 4 Q égaux à 8 L P 12, prenons 1 Q égal à 2 L P 3, & ce sera la seconde règle, applique-la & tu trouveras 3 pour la valeur du lé.

Problème.

Partageons 12 en deux parties de façon que leurs Quarrés ajoutés surpassent de 48 le produit de l'une par l'autre. [10]

Posons que la première partie est 1 L, l'autre sera donc 12 M 1 L ; les Quarrés de ces parties ajoutés ensemble sont 144 M 24 L P 2 Q, qui sont égaux au produit d'une partie par l'autre & 48 ; le produit de 1 L par 12 M 1 L est 12 L M 1 Q ; qu'on ajoute 48, il en résultera 12 L M 1 Q P 48 égaux à 144 M 24 L P 2 Q ; enlevons 48 de part et d'autre, il restera 12 L M 1 Q égaux à 96 M 24 L P 2 Q ; ajoutons de part et d'autre 1 Q & 24 L, il en sortira 36 L égaux à 3 Q P 96 ; ramenons à 1 Q en divisant les différentes quantités par le nombre des Quarrés, soit 3, il résultera 1 Q P 32 égaux à 12 L, que la troisième règle traitera : applique-la & tu trouveras que les parties demandées sont 4 & 8.

*Comment l'on ramène à ces règles trois quantités,
dont la troisième n'est pas dépourvue de valeur. Ch. VII.*

Et s'il y a trois quantités, dont chacune a une valeur, nous retrancherons de chacune la valeur de la quantité la plus petite, et ainsi nous parviendrons à une égalisation connue : soit 1 Q Q égal à 4 C P 12 Q, nous retrancherons de chacune des quantités la valeur de Q qui est la quantité la plus petite des trois, or sa valeur est 2, et il restera 12, nous retirerons alors 2 de la valeur de C, qui est 3, il restera 1, nombre dont la quantité est L, & pour 4 C cela fera 4 L, enfin nous retirerons 2 de la valeur de Q Q qui est 4, et il restera 2, dont la quantité est Q ; nous aurons alors, à la place de 1 Q Q égal à 4 C P 12 Q, 1 Q égal à 4 L P 12, et ainsi l'égalisation se traitera par la seconde règle, & ainsi de suite.

Problème.

Cherchons quatre nombres en proportions continues, tels que le produit du premier par le troisième soit égal au quatrième, & que le triple du troisième diminué du double du second soit le moyen proportionnel entre la somme du premier & du second, et la somme du troisième & du quatrième. [11]

Posons que le premier est 1 L, le second sera donc 1 Q, le troisième 1 C, le quatrième enfin 1 Q Q ; ces quatre nombres sont en effet en proportions continues & le produit de 1 L par 1 C est égal à 1 Q Q ; enlevons le double du second, soit 2 Q, du triple du troisième, soit 3 C, il restera 3 C M 2 Q, & c'est le moyen proportionnel entre 1 L P 1 Q, somme du premier & du second, & 1 C P 1 Q Q, somme du troisième & du quatrième ; ainsi, d'après la <proposition> 20 du <livre> 7 d'Euclide, le Quarré de 3 C M 2 Q, soit

9 Q C M 12 RP, P 4 Q Q,⁸ est égal au produit de 1 L P 1 Q par 1 C P 1 Q Q, soit 1 Q Q P 2 RP, P 1 Q C ; enlevons de part et d'autre 1 Q Q & 1 Q C, il restera 8 Q C M 12 RP, P 3 Q Q égaux à 2 RP ; ajoutons de part et d'autre 12 RP, il résultera 8 Q C P 3 Q Q égaux à 14 RP ; la quantité de valeur la plus petite est Q Q, dont la valeur est 4 ; soustrayons alors de chaque dénomination la valeur 4, il restera les trois quantités, 14 L égaux à 8 Q P 3, & en les ramenant à un seul Quarré, $\frac{7}{4}$ L égaux à 1 Q P $\frac{3}{8}$, et ainsi l'égalisation se traite par la troisième règle : applique-la & par addition tu obtiendras $\frac{3}{2}$ comme valeur de lé, ainsi ces quatre nombres seront en proportions continues, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{81}{16}$, & le moyen proportionnel sera $\frac{81}{8}$ M $\frac{18}{4}$, soit $\frac{45}{8}$, un extrême $\frac{3}{2}$ P $\frac{9}{4}$, soit $\frac{15}{4}$, l'autre $\frac{27}{8}$ P $\frac{81}{16}$, soit $\frac{135}{16}$ et les trois nombres $\frac{15}{4}$, $\frac{45}{8}$ et $\frac{135}{16}$ sont bien en proportion sesquialtere.

Les innombrables manières de résoudre ces égalisations. Ch. VIII. [12]

Nunes rapporte dans la troisième partie de son algèbre une certaine façon nouvelle d'étudier ces trois règles, que lui-même démontre : il calcule le Quarré du nombre des lés, il calcule aussi le quadruple du nombre dépourvu de valeur, il l'ajoute alors ou il le retranche <du Quarré> du nombre des lés, selon ce que la règle demande, ensuite du lé-Quarré de la somme, il retranche ou il ajoute le nombre des lés, & il dit que la somme ou le reste est la valeur de deux lés, ce qui est vrai assurément. Or la méthode est tout à fait avérée, et pour qu'elle apparaisse plus clairement, donnons un exemple de ce type : soit 1 Q égal à 4 L P 12, il calcule le Quarré de 4, soit 16, et c'est la même chose que le quadruple du Quarré de la moitié, comme on le démontre par la seconde proposition du second <livre>, & il calcule le quadruple de 12, soit 48, et il ajoute ces nombres selon la prescription de la seconde règle, il en résulte 64, nombre dont le lé-quarré est 8, auquel il ajoute le nombre des lés 4, et c'est la même chose que s'il avait ajouté deux moitiés de 4, la somme est 12, nombre qui (dit-il) est égal à deux lés, et en vérité (dis-je) il a en effet tout multiplié par 2 ; tu peux ainsi introduire de nouvelles règles d'égalisation avec 3, avec 4, avec 5 et avec d'autres nombres. Expliquons-le pour 3 : soit l'exemple précédent, 1 Q égal à 4 L P 12, calculons le triple de la moitié du nombre des lés, soit 6, son Quarré, donc 36, auquel nous ajouterons neuf fois 12, soit 108, il résultera 144, dont le lé est 12 ; j'ajoute 6 le triple de la moitié du nombre des lés à 12, il en sort 18, & le nombre 18 contient trois lés, de même que plus haut on avait trouvé 12 pour deux <lés>. Mais pour 4 maintenant : calculons le Quarré du double de 4, soit 8, donc 64, nous multiplierons 12 par 16, Quarré de 4, il résultera 192, auquel nous ajouterons 64, la somme sera 256, dont le lé-Quarré est 16 ; à ce lé, j'ajoute 8, double du nombre des lés 4, la somme est 24, & le nombre 24 comprend 4 lés, et la démonstration est claire & évidente grâce à des règles avérées.

⁸ La suite des « relate » est celle des dénominations dont le rang est un nombre premier. RP se lit relate premier et désigne le rang 5 des dénominations.

Comment on doit faire l'égalisation dans les fractions et les lés. Ch. IX. [13]

Quand les quantités égales seront revenues à leur dénomination minimale, nous ferons les multiplications en croix : soient $\frac{20}{1L}$ égaux à $\frac{30}{1Q}$, nous multiplierons 20 par 1 Q, cela fera 20 Q, et aussi 30 par 1 L, il en sortira 30 L, nous dirons donc que 20 Q sont égaux à 30 L et, partant, 20 L égaux à 30.

Soient 12 égaux à $\frac{20L}{1Q}$, nous écrirons 1 sous le nombre 12, soit $\frac{12}{1}$, nous ferons alors les multiplications en croix comme auparavant, cela fera 20 L égaux à 12 Q, soit 20 égaux à 12 L.

Soient $\frac{6}{1L}$ égaux à L 7, nous multiplierons chacune des quantités par elle-même, cela fera $\frac{36}{1Q}$ égaux à 7, et nous ferons alors les multiplications en croix, cela fera 7 Q égaux à 36.

Soit L 7 égal à L 3 L, nous multiplierons l'une et l'autre quantité par elle-même, cela fera 7 égal à 3 L.

Soit L 9 égal à LV 3 L P L 9, nous multiplierons chacune des quantités par elle-même, il résultera 9 égaux à 3 L P L 9 ; nous retrancherons alors 3 L de part et d'autre, il restera L 9 égal à 9 M 3 L ; nous multiplierons enfin l'une et l'autre quantité par elle-même, il résultera 9 égaux à 81 M 54 L P 9 Q, & en ajoutant 54 L de part et d'autre, 81 P 9 Q égaux à 9 P 54 L, & en retranchant 9 de part et d'autre, 72 P 9 Q égaux à 54 L, et ainsi l'égalisation se traitera par la troisième règle.

L'utilisation de cette égalisation.

Problème I.

Deux hommes partent du même lieu, le premier pouvant faire le chemin entier en douze jours, et le second en six jours, mais lui ne commence à suivre le premier que le troisième jour. Au bout de combien de jours se rencontreront-ils ? [14]

Posons que le second suit le premier pendant <le nombre> de jours 1 L, ainsi $\frac{1L}{6}$ sera égal à $\frac{1LP3}{12}$ & en faisant la multiplication en croix 12 L seront égaux à 6 L P 18, & en retranchant 6 L de part et d'autre, 6 L seront égaux à 18, et un lé sera égal à 3 ; nous dirons donc que le second rencontrera le premier le troisième jour exactement.

Problème II.

Quatre artisans se succédant l'un à l'autre, ont achevé une maison en soixante-dix-sept jours, en travaillant pour des rétributions différentes : le premier en effet a fait ses journées de travail pour deux sous chacune, le second pour trois, le troisième pour quatre, le quatrième pour cinq ; la tâche à la fin accomplie, chacun a tiré de sa rétribution la même somme d'argent. On demande combien de jours chacun séparément a travaillé à la maison. [15]

Ceci n'a pas d'autre objet que de diviser le nombre 77 en quatre parties, de façon que si la première est multipliée par 2, elle donne autant que la seconde multipliée par 3, & que la

troisième par 4, & que la quatrième par 5 : c'est ainsi en effet que l'on découvrira le nombre de jours de travail de chacun. Posons donc que la première partie de 77 est 1 L, multiplions-la par 2, cela fera 2 L, partageons 2 L en 3, ce qui fera $\frac{2L}{3}$, partageons le même 2 L en 4, ce qui fera $\frac{2L}{4}$, divisons enfin 2 L par 5, il en résultera $\frac{2L}{5}$; ajoutons ces parties 1 L, $\frac{2L}{3}$, $\frac{2L}{4}$, $\frac{2L}{5}$, la somme sera $\frac{77L}{30}$ égale à 77, & en faisant la multiplication en croix, 2310 seront égaux à 77 L et, partant, 1 L vaut 30, & c'est le nombre de jours travaillés par le premier ; multiplie 30 par deux, cela fera 60, partage le en 3, cela fera 20 & c'est le nombre de jours travaillés par le second ; en partageant alors 60 en 4, on obtient 15 & c'est le nombre de jours du troisième ; en divisant finalement 60 par 5, on obtient 12 & c'est enfin le nombre de jours travaillés par le quatrième artisan.

Problème III.

Six aunes de drap vert avec quatre aunes de drap noir ont coûté 62 pièces d'or ; évaluées au même prix, 12 aunes de drap vert avec 7 aunes de drap noir ont <coûté> 116 pièces d'or ; on demande combien est vendue l'aune de drap vert, & combien l'aune de drap noir. [16]

Posons que l'aune de drap vert a coûté 1 L, donc, comme il y en a six, elles ont coûté 6 L, 4 aunes de drap noir valaient donc 62 M 6 L ; mais nous avons posé que l'aune de drap vert valait 1 L, donc 12 coûteront 12 L, sept aunes de noir coûteront donc 116 M 12 L. Nous avons donc le prix de 4 aunes de drap noir 62 M 6 L, & nous avons le prix de sept 116 M 12 L ; & parce que le prix multipliant les 4 aunes fait 62 M 6 L et que multipliant les sept aunes il fait 116 M 12 L, divisons donc 62 M 6 L par 4, ce sera la valeur de l'aune de drap noir donc $\frac{62\text{ M }6\text{ L}}{4}$; partageons de même 116 M 12 L en 7, ce 7 qui multipliant le prix de l'aune fait 116 M 12 L, la valeur d'une aune sera donc $\frac{116\text{ M }12\text{ L}}{7}$, et $\frac{62\text{ M }6\text{ L}}{4}$ seront égaux à $\frac{116\text{ M }12\text{ L}}{7}$, l'un et l'autre nombre sont en effet le même prix ; & en faisant la multiplication en croix, cela fera 434 M 42 L égaux à 464 M 48 L ; enlevons l'excès & ajoutons ce qui manque, il résultera à la fin 30 égaux à 6 L, et 1 L sera 5 ; l'aune de drap vert dont nous avons posé qu'elle coûtait 1 L a coûté 5 pièces d'or et, partant, 6 aunes en ont coûté 30, enlevons 30 de 62, le reste sera 32, le prix de 4 aunes de drap noir, & parce que le prix multipliant le nombre d'aunes a fait 32, partageons 32 en 4, ce qui fera 8, et donc l'aune de drap noir valait 8 pièces d'or, ce qui était demandé.

La troisième égalisation. Ch. X.

Il serait long, je ne dis pas de recenser, mais même de se rappeler tous les Mathématiciens que jusqu'à notre époque, cette seule égalisation a mobilisés ; de la même manière que les Géomètres les plus habiles ont beaucoup travaillé à la duplication du Cube, et n'ont pas vraiment découvert la chose, nombre d'entre eux ayant atteint le but par la mécanique (en ce qui nous concerne, c'est par les Mathématiques), et que beaucoup, y passant des nuits

entières, ont consacré un travail assidu à la Quadrature du Cercle, parmi lesquels Archimède a remporté la palme, beaucoup aussi ont consacré le plus clair de leur temps à la recherche de cette égalisation, parmi lesquels Cardan semble s'être acquitté de cette tâche ; mais de quoi lui s'est-il acquitté quand dans presque aucun exemple sa méthode ne se tient ? Réelle assurément, mais le plus souvent méconnue, une difficulté essentielle accompagne dès lors son procédé de recherche, ce qui fait que ce qu'il appelle invention extraordinaire, je n'en fais pas grand cas, quand les lés Cubiques des Binômes se cherchent difficilement et par un travail difficile, et, cherchés, le plus souvent ne sont pas trouvés. Or c'est ici une méthode générale que nous cherchons, et c'est pourquoi je ne fais pas grand cas de toutes les règles particulières que presque tous apportent à cette égalisation, Cardan au tout premier chef, apportant même des règles fausses, lui qui le plus souvent s'est beaucoup complu à des choses partielles. Donc attendons que l'auteur suprême de la Mathématique ait fait germer quelque chose de ces choses dans l'esprit des hommes. D'ici-là, pour notre part, exposons quelque chose, et enseignons que toutes les égalisations qui sont restées cachées jusque-là seront elles aussi trouvées quand ce problème sera trouvé. Et le problème est de cette sorte : chercher la valeur des lés quand le Cube et les Quarrés sont égaux au nombre ou, autrement, en faisant varier les quantités. Ce qui en fait trois qui se ramèneront à cette égalisation. [17]

Soient 6 L P 40 égaux à 1 C, donc par réduction, 6 Q P 1 C égaux à 1600, et le lé est ce que l'on cherche dans l'une comme dans l'autre ; et en effet, dans la seconde égalisation, parlons de ce nombre qui, multipliant le lé dont il s'agit dans la première, a fait 40, et si ce nombre venait à être connu, en divisant 40 par ce nombre, il viendrait le lé cherché ; et c'est ainsi que l'on rétablit la première règle de la troisième égalisation, précisément quand le cube est égal aux lés et aux nombres. Ramenons maintenant la seconde règle de cette égalisation, soit quand les lés sont égaux au Cube et au nombre. Soient 18 L égaux à 1 C P 8, donc par réduction 64 P 1 C seront égaux à 18 Q. Rétablissons enfin la troisième règle, donc quand le nombre est égal au Cube & aux lés, soit par exemple 24 égaux à 1 C P 8 L, donc par réduction 576 P 8 Q seront égaux à 1 C. C'est donc ainsi que les trois règles de la troisième égalisation se ramèneront facilement à ce problème ; et si quelqu'un approfondit ce problème (ce qui n'est ni difficile à faire, ni facile non plus) il aura cherché aussi la troisième égalisation et il nous rendra grâce de ce que grâce à nous l'accès lui en aura paru simple ; et nous, pendant ce temps, suivant nos moyens, nous chercherons ce problème, et nous consacrerons notre travail à sa solution rapide, et quand nous l'aurons cherché avec soin, par le même travail, nous démontrerons nos rétablissements, que d'ailleurs celui qui sera suffisamment expert en algèbre comprendra sans difficulté.

L'égalisation de Diophante avec supposition. Ch. XI.

Cela ne relève ni d'un travail ordinaire, ni d'une inventivité commune, que de s'imaginer l'égalisation, quand il n'est rien qui, par un calcul raisonné, soit égal à d'autres espèces de quantités, & qu'il est étonnant qu'elle varie à l'infini, ce que Diophante nous enseigne dans

ses Arithmétiques. Et il en est ainsi pour 6 Q P 16 égal à un Quarré quelconque.: nous imaginerons le Quarré d'un lé fait de tant de lés P ou M tel nombre, de façon que finalement une quantité soit égale à une quantité de dénomination différente, et nous exprimerons le Quarré du lé fait de tel nombre P ou M tant de lés. [18] Supposons d'abord que ce soit le Quarré du lé 2 L P 4 ; ce Quarré sera 4 Q P 16 L P 16, qui sera égal à 6 Q P 16, & par soustraction de l'excès, il restera 2 Q égal à 16 L et le lé sera 8 ; mais introduisons maintenant un autre Quarré, celui du lé 3 L M 4, le Quarré est 9 Q M 24 L P 16, qui est égal à 6 Q P 16, & par soustraction de l'excès 3 Q M 24 L est égal à rien, et en ajoutant 24 L de part et d'autre, 3 Q est égal à 24 L, ce qui fait un lé égal à 8 comme au-dessus. Et maintenant, soit 6 L P 8 égal à un Quarré ; je suppose que c'est un Quarré quelconque plus grand que 8, comme 9 par exemple, donc 9 sera égal à 6 L P 8, & par soustraction de l'excès, 6 L sera égal à 1, ce qui fait $\frac{1}{6}$ pour un lé ; ou bien <je suppose> que 6 L P 8 est égal à 36, je retire 8 de part et d'autre, il restera 6 L égal à 28, ce qui fait $4\frac{2}{3}$ pour un lé. Soient maintenant 6 Q P 12 L P 16 égaux à 1 C, j'introduis le Cube du lé 1 L P 2, le Cube est 1 C P 6 Q P 12 L P 8, qui est égal à 6 Q P 12 L P 16, & par soustraction de l'excès, 1 C égale 8, ce qui fait 2 pour le lé.

L'utilisation de cette égalisation.

Problème I.

Cherchons trois nombres en proportion Arithmétique, tels que par adjonction de 4 à chacun d'eux, on obtienne un Quarré. [19]

Je pose que le premier nombre est 1 Q M 4, car ainsi complété par 4, ce sera un Quarré, que le second nombre est 1 Q P 4 L, car ainsi, à nouveau complété par 4, ce sera un Quarré. La différence est 4 L P 4, le troisième nombre sera donc 1 Q P 8 L P 4 qui, par adjonction de 4, doit être un Quarré, or c'est 1 Q P 8 L P 8 qui doit donc être égal à un Quarré ; je suppose que c'est le Quarré du lé 1 L M 8, soit 1 Q M 16 L P 64 égal à 1 Q P 8 L P 8, & par soustraction de l'excès et addition de ce qui manque, 24 L sont égaux à 56, ce qui fait $\frac{7}{3}$ pour un lé ; le premier nombre est donc $\frac{13}{9}$, le second $\frac{133}{9}$, le troisième $\frac{253}{9}$, & ces nombres satisfont à la question.

Problème II.

Cherchons trois nombres tels que leur somme soit un nombre Quarré, que le premier soit un Quarré, & qu'avec chacun des deux autres, il donne un Quarré. [20]

Soit 1 Q le premier nombre, 2 L P 1 le second nombre pour que, ajouté au premier, il donne un Q<uarré>, 4 L P 4 le troisième pour la même raison, il faut encore que leur somme soit un nombre Quarré, et c'est 1 Q P 6 L P 5, qui est égal à un Q ; je suppose que c'est celui du lé 1 L M 3, le Quarré en est 1 Q M 6 L P 9 égal à 1 Q P 6 L P 5, & par addition de ce qui manque et soustraction de l'excès 12 L sont égaux à 4, ce qui fait $\frac{1}{3}$ pour un lé ; le premier

nombre est donc $\frac{1}{9}$, le second $\frac{15}{9}$, le troisième $\frac{48}{9}$, & ils satisfont aux conditions, et ce problème peut aussi être résolu même si l'on recherche des nombres variant à l'infini.

Problème III.

Cherchons quatre nombres <ensemble> égaux à un Quarré, tels que le premier surpasse le second d'un Q<uarré>, que le second surpasse le troisième d'un Q<uarré>, que le troisième enfin surpasse le quatrième d'un Q<uarré>. [21]

Je pose que le premier nombre est 1 Q, que le second est 2 L P 6, que le troisième est 2 L P 2, pour que l'excédent soit le nombre quarré 4, et que le quatrième enfin est 2 L P 1, pour que l'excédent du troisième sur lui soit le nombre quarré 1, & qu'aussi la somme de ces nombres soit égale à un quarré, car la somme de ces nombres est 1 Q P 6 L P 9 quarré du lé 1 L P 3 ; il faut encore que l'excédent du premier sur le second soit un quarré, or c'est 1 Q M 2 L M 6, qui doit donc égaler un Q<uarré>. Je suppose que c'est celui du lé 1 L M 2, le quarré en est 1 Q M 4 L P 4, égal à 1 Q M 2 L M 6 ; & par addition de ce qui manque et soustraction de l'excès, 2 L est égal à 10, ce qui fait 5 pour un lé ; et c'est pourquoi le premier nombre est 25, le second 16, le troisième 12, le quatrième 11, & ils obéissent aux prescriptions.

Problème IIII.

Il s'agit de trouver un Quarré & un nombre Congruent. Or ceci n'est rien d'autre que de chercher trois Quarrés dont les différences de l'un à l'autre sont des distances égales. [22]

Soit 1 Q le premier Q<uarré>, le second par exemple 1 Q P 12 L P 36. La différence est 12 L P 36, le troisième sera donc 1 Q P 24 L P 72, qui est égal à un Quarré, soit celui du lé 1 L P 10 ; 1 Q P 20 L P 100 est égal à 1 Q P 24 L P 72, & par soustraction de l'excès, 28 sont égaux à 4 L, ce qui fait 7 pour un lé ; les Quarrés sont donc 49, 169, 289, la différence est 120, qui sera le nombre Congruent, & le Quarré 169 sera le quarré Congruent.

Problème V.

Le Quarré étant donné, retrouver le nombre Congruent. Soit le nombre 100, le Quarré donné. [23]

Calculons en le lé, donc 10, le double de ce lé est 20, partageons 20 en deux nombres de façon que le produit de l'un par l'autre soit égal au produit de deux autres nombres dont la différence est 20 ; mais pour que nous ne soyons pas ramenés à des nombres sourds, je pose que l'un des nombres dont la différence est 20 est 1 L, l'autre sera donc 20 P 1 L ; je suppose alors que 1 L est la proportion sous-double de l'une des parties, ou une autre si l'on veut, car rien ne l'empêche, mais je calcule 2 L pour la première partie de 20, pour que nous n'en arrivions pas à des fractions ; l'autre partie de 20 sera ainsi 20 M 2 L, et ces quatre nombres seront proportionnels, 1 L, 2 L, 20 M 2 L, 20 P 1 L, ainsi le produit des moyens sera égal au produit des extrêmes ; multiplions 1 L par 20 P 1 L, il résultera 20 L P 1 Q ; calculons 2 L par 20 M 2 L, cela fera 40 L M 4 Q, qui sont égaux à 20 L P 1 Q, & par addition de ce qui manque et soustraction de l'excès 20 L sont égaux à 5 Q, ce qui fait 4 pour un lé ; les nombres

sont donc 4 et 24, 8 et 12, et le produit de l'un par l'autre 4 par 24 ou 8 par 12, est 96, & c'est le nombre Congruent de 100.

Et si je veux atteindre cela par une autre voie, le neuvième problème du second livre de Diophante le fera, ou même le huitième y conduira : d'une manière ou d'une autre nous séparerons 100 en les deux Quarrés dont il est composé, qui seront 64 & 36, dont les lés sont 8 & 6, le produit de l'un par l'autre est 48, son double 96 évidemment le nombre Congruent. Et ceci nous l'avons vérifié et fait ; ce que tous ont entrepris, personne n'a atteint le but.

La double égalité de Diophante. Ch. XII.

Il est une autre méthode inventée par Diophante pour le cas où l'égalisation ne peut se traiter par la méthode précédente, précisément, quand il reste deux quantités dont chacune est égale à un Quarré. Soit 1 L P 2 égal à un Quarré, & à nouveau 1 L P 3 égal aussi à un Quarré. [24] En regardant la différence, nous chercherons deux nombres dont la multiplication de l'un par l'autre produise cette différence ; et la différence entre 1 L P 2 & 1 L P 3 est 1, résultat de la multiplication de 4 & $\frac{1}{4}$; et la moitié de la différence de ces nombres multipliée par elle-même est égale à la plus petite <quantité> et, pareillement, la moitié de leur somme multipliée par elle-même est égale à la plus grande : l'excédent de 4 sur $\frac{1}{4}$ est $\frac{15}{4}$, dont la moitié est $\frac{15}{8}$, le Quarré est $\frac{225}{64}$, auquel est égale la plus petite quantité, soit 1 L P 2, & en retranchant l'excès cela fait $\frac{97}{64}$ pour un lé ; la somme de 4 & $\frac{1}{4}$ est $\frac{17}{4}$, sa moitié est $\frac{17}{8}$, dont le Quarré est $\frac{289}{64}$, qui est égal au plus grand nombre, soit 1 L P 3, & en retranchant l'excès cela fait $\frac{97}{64}$ pour un lé comme auparavant. Nous reportons la démonstration de ceci à nos observations sur Diophante, dans lesquelles nous restituerons et, avec l'aide de Dieu, nous démontrerons, tout ce qui aura été tronqué ou du moins négligé par le commentateur.

L'utilisation de cette égalisation. Problème.

Un nombre Congruent étant donné, retrouver le Quarré.

Il s'agit du problème, je le précise, que jusqu'à présent Lucas, <Leonard> de Pise, Tartaglia, Cardan et Forcadel lui-même ont traité avec difficulté, à la recherche duquel ils ont consacré beaucoup de temps, qu'ils n'ont pourtant pas résolu & qui est resté obscur jusqu'à notre époque. Cette chose très difficile donc, nous allons maintenant l'expliquer, nous la démontrerons dans les Arithmétiques. Soit donné le nombre Congruent 96. [25]

Soit 1 Q le Quarré demandé ; ajoutons 96, il résultera 1 Q P 96 égal à un Quarré ; ajoutons à nouveau 96, il en sortira 1 Q P 192 égal aussi à un Quarré, et c'est une double égalisation ; la différence de ces Quarrés est 96, nombre que produisent par multiplication 4 et 24, 6 et 16, 8 et 12 ; je calcule avec un couple quelconque de lés de 96, et assurément le Quarré de la moitié de la somme est égal au plus grand <Quarré>, et le Quarré de la moitié de la différence est égal au plus petit : la moitié de la somme de 8 & 12 est 10, le Quarré 100

serait égal à 1 Q P 192, et comme il est plus petit, nous calculerons avec un autre couple de lés dont le Quarré de la moitié de la somme n'est pas surpassé par le plus grand Quarré, et ne surpasse pas la somme des nombres adjoints aux deux Quarrés, car autrement l'égalisation ne se traiterait pas. Soient 4 & 24, la moitié de la somme 28 est 14, le Quarré est 196, qui surpasse 192 & est surpassé par la somme de 96 & 192 ; ce Quarré est donc égal à 1 Q P 192, ce qui fait 4 pour un Quarré, et le Quarré Congruent demandé est 1 Q P 96, soit 100. Et alors la moitié de la différence entre 4 & 24 donc 20 est 10, le Quarré 100 est égal à 1 Q P 96, ce qui fait 4 pour un Quarré, comme auparavant & le Quarré Congruent est 100.

*Notre méthode facile et générale de recherche du lé
d'un nombre Polygonal donné quelconque. Ch. XIII.*

Cherchons le Lé triangulaire du nombre 21. [26]

Posons que c'est 1 L ; nous formulerons le <nombre> triangulaire de lé 1 L d'après le chapitre neuf du premier livre, et ce sera $\frac{1}{2}$ Q P $\frac{1}{2}$ L, qui sera égal à 21, puisque les <nombres> Polygonaux de lés égaux sont aussi égaux ; & en les ramenant à 1 Q d'après le chapitre six de ce livre, cela fera 1 Q P 1 L égaux à 42 ; et ainsi l'égalisation se traite par la première règle du chapitre quatre de ce livre. Applique-la & tu trouveras 6 pour la valeur du lé, 6 est ainsi le lé du Triangulaire 21.

Recherchons le lé pentagonal du nombre 51. Soit 1 L ce lé dont le nombre pentagonal est $\frac{3}{2}$ Q M $\frac{1}{2}$ L qui sera égal à 51, & en les ramenant à 1 Q, 1 Q M $\frac{1}{3}$ L sera égal à 34, et ainsi l'égalisation se traite par la seconde règle du chapitre quatre de ce livre. Applique-la, & tu obtiendras 6 pour la valeur d'un lé, nous dirons ainsi que 6 est le Lé Pentagonal du nombre 51. On procédera de même pour les autres nombres Polygonaux, et cette méthode de recherche du lé d'un nombre Polygonal quelconque est rapide et facile.

LE QUATRIEME LIVRE
DE GUILLAUME GOSSELIN DE CAEN
SUR LE GRAND ART OU LA PARTIE CACHEE DES NOMBRES,
QU'ON APPELLE COURAMMENT & ALGEBRE & ALMUCABALE.⁹

Jusqu'ici nous avons expliqué tout ce qui semblait pouvoir relever du calcul de l'Algèbre, et à ce stade nous avons rassemblé cet énorme travail dans trois livres. Il y a encore une autre manière de raisonner qui se partage en deux : l'une de la quantité simple couramment appelée absolue, l'autre de la quantité sourde, l'une et l'autre dans une certaine mesure semblable à l'Algèbre, quoique la simple particulièrement ne se résolve pas à l'aide d'une seule hypothèse, mais plutôt à l'aide de deux et plus. Et pour l'exposition de ces règles, je ne suivrai pas la méthode établie par Lucas, Stéphane, Cardan, Buteon, et d'autres de la même façon, parce qu'elle est non seulement trompeuse, mais aussi fausse la plupart du temps. Nous détaillerons donc l'une et l'autre manière de raisonner avec la plus grande clarté possible grâce aux problèmes suivants.

La quantité absolue. Ch. I.

Problème I.

Partageons 100 en deux parties de façon que le quart de la première surpasse de 20 le sixième de la seconde. [27]

Soient 1 A, 1 B ces parties ; et ainsi 1 A 1 B seront égaux à 100, & $\frac{1}{4}$ A seront égaux à $\frac{1}{6}$ B P 20 et, partant, 1 A égal à $\frac{4}{6}$ B P 80 ; & parce que 1 A 1 B sont égaux à 100, pour 1 A posons $\frac{4}{6}$ B P 80, $\frac{5}{3}$ B P 80 seront égaux à 100, & en retranchant l'excès, $\frac{5}{3}$ B égaux à 20, et l'égalisation se traite ainsi : partageons 20 en $\frac{5}{3}$, ce qui fera 12 pour le « premier » nombre B, & ainsi 88 pour le « second » A ; ce que Diophante fait autrement que par l'Algèbre au sixième problème du premier livre.¹⁰

Problème II.

Partageons 100 en trois parties, de façon que la première avec la seconde soit le triple de la troisième, que la troisième avec la seconde soit le quadruple de la première. [28]

Soient 1 A, 1 B, 1 D les parties égales à 100, & ainsi que la question l'indique, 1 A 1 B sont égaux à 3 D, 1 B 1 D égaux à 4 A ; pour 1 A 1 B posons 3 D, 4 D seront égaux à 100 et, partant, D sera égal à 25, c'est la dernière partie ; pour 1 B 1 D posons 4 A, 5 A seront égaux

⁹ Guillaume Gosselin, *De Arte Magna*, f. 80. Le texte original présente quelques anomalies dans la numérotation des chapitres et problèmes, que nous avons corrigées au vu de la table de l'ouvrage.

¹⁰ Il y a dans le texte original une confusion entre les nombres A et B.

à 100, ce qui fait 20 pour la première partie 1 A ; la seconde sera donc 100 M 25 M 20 soit 55.

Problème III.

Cherchons trois nombres tels que le premier & le second avec la moitié du troisième fassent 100, que le second & le troisième avec le tiers du premier fassent 100, que le premier & le troisième avec le quart du second fassent 100. [29]

Soient 1 A, 1 B, 1 C les nombres, et ainsi 1 A 1 B $\frac{1}{2}$ C seront égaux à 100, 1 B 1 C $\frac{1}{3}$ A égaux à 100, 1 A 1 C $\frac{1}{4}$ B égaux à 100. Rétablissons ces égalisations en nombres entiers, 2 A 2 B 1 C seront égaux à 200, 3 B 3 C 1 A égaux à 300, 4 A 4 C 1 B égaux à 400 ; multiplions la seconde égalisation par 2, cela fera 6 B 6 C 2 A égaux à 600, desquels on enlève la première égalisation, il restera 4 B 5 C égaux à 400 ; on multiplie à nouveau la même seconde égalisation par 4, 12 B 12 C 4 A sont alors égaux à 1200, enlevons la troisième égalisation, égalisation à 400, il restera 11 B 8 C égaux à 800 ; multiplions 11 B & 8 C par 5, ce qui fait 55 B 40 C égaux à 4000, multiplions aussi 4 B 5 C par 8, ce qui fait 32 B 40 C égaux à 3200, enlevons 32 B 40 C égaux à 3200 de 55 B 40 C égaux à 4000, il restera 23 B égaux à 800, et l'égalisation se traite ainsi : partageons 800 en 23, ce qui fera $34 \frac{18}{23}$ pour la valeur de B, soit le second nombre ; & parce que 4 B 5 C sont égaux à 400, enlevons le quadruple de B, soit $139 \frac{3}{23}$ de 400, il restera $260 \frac{20}{23}$ égaux à 5 C, nous partagerons donc $260 \frac{20}{23}$ en 5, ce qui fera $52 \frac{4}{23}$ pour la valeur de C, le troisième nombre ; puisque alors 2 A 2 B 1 C sont égaux à 200, enlevons 2 B 1 C, soit $121 \frac{17}{23}$, il restera $78 \frac{6}{23}$ égaux à 2 A, partageons $78 \frac{6}{23}$ en 2, ce sera la valeur de A ; le premier des nombres demandés est donc $39 \frac{3}{23}$, le second $34 \frac{18}{23}$, le troisième $52 \frac{4}{23}$.

Problème IIII.

Cherchons trois nombres, tels que le premier avec les huit-douzièmes du second & du troisième fassent 100, que le second avec les neuf-douzièmes du premier & du troisième fassent 100, que le troisième avec les $\frac{4}{5}$ du premier & et du second fassent 100. [30]

Soient 1 A, 1 B, 1 C les trois nombres, & ainsi 1 A $\frac{2}{3}$ B $\frac{2}{3}$ C seront égaux à 100, 1 B $\frac{3}{4}$ A $\frac{3}{4}$ C égaux à 100, 1 C $\frac{4}{5}$ A $\frac{4}{5}$ B égaux à 100 ; ramenons-les à des égalisations entières, soient 3 A 2 B 2 C égaux à 300, 4 B 3 A 3 C égaux à 400, 5 C 4 A 4 B égaux à 500 ; enlevons la première égalisation rétablie de la seconde, il restera 2 B 1 C égaux à 100 ; enlevons la seconde de la troisième égalisation, il restera 1 A 2 C égaux à 100 ; doublons 2 B 1 C égaux à 100, il résultera 4 B 2 C égaux à 200 ; enlevons-les de la seconde égalisation, il restera 3 A 1 C égaux à 200 ; triplons 1 A 2 C égaux à 100, il en sortira 3 A 6 C égaux à 300 ; enlevons 3 A 1 C égaux à 200, il restera 5 C égaux à 100 ; nous diviserons 100 par 5, ce qui fera 20 pour la valeur de C, le troisième nombre ; puisque 1 A 2 C sont égaux à 100,

enlevons 2 C soit 40, il restera 60 égaux à 1 A, c'est pourquoi le premier est 60 ; or 2 B 1 C étaient égaux à 100, enlevons 1 C soit 20, il restera 80 égaux à 2 B & 1 B est 40 ; et les trois nombres demandés sont 60, 40, 20, ceux qu'il fallait chercher.

Problème V.

Trouvons quatre nombres dont le premier avec la moitié des autres fasse 17, dont le second avec le tiers des autres fasse 12, dont le troisième avec le quart des autres fasse 13, et le quatrième avec le sixième des autres 13 aussi. [31]

Soient A, B, C, D les quatre nombres, & soient $1 A \frac{1}{2} B \frac{1}{2} C \frac{1}{2} D$ égaux à 17, $1 B \frac{1}{3} A \frac{1}{3} C \frac{1}{3} D$ égaux à 12, $1 C \frac{1}{4} A \frac{1}{4} B \frac{1}{4} D$ égaux à 13, $1 D \frac{1}{6} A \frac{1}{6} B \frac{1}{6} C$ égaux à 13 ; ramenons-les à des nombres entiers, il résultera $2 A 1 B 1 C 1 D$ égaux à 34, $1 A 3 B 1 C 1 D$ égaux à 36, $1 A 1 B 4 C 1 D$ égaux à 52, $1 A 1 B 1 C 6 D$ égaux à 78 ; ajoutons les deux dernières égalisations, à savoir la troisième & la quatrième, il résultera $2 A 2 B 5 C 7 D$ égaux à 130, enlevons-en la première, il restera $1 B 4 C 6 D$ égaux à 96 ; ajoutons la quatrième & la seconde, cela fera $2 A 4 B 2 C 7 D$ égaux à 114, enlevons-en la première, l'excès sera $3 B 1 C 6 D$ égaux à 80 ; ajoutons la seconde & la troisième égalisation, cela fera $2 A 4 B 5 C 2 D$ égaux à 88, enlevons la première, il restera $3 B 4 C 1 D$ égaux à 54 ; triplons alors $1 B 4 C 6 D$ qui étaient égaux à 96, cela fera $3 B 12 C 18 D$ égaux à 288 ; enlevons-en $3 B 1 C 6 D$ égaux à 80, il restera $11 C 12 D$ égaux à 208 ; soustrayons une seconde fois de la même égalisation triplée $3 B 4 C 1 D$ égaux à 54, il restera $8 C 17 D$ égaux à 234 ; multiplions cette égalisation par 11, cela fera $88 C 187 D$ égaux à 2574 ; multiplions aussi $11 C 12 D$ égaux à 208 par 8, il résultera $88 C 96 D$ égaux à 1664 ; enlevons $88 C 96 D$ égaux à 1664 de $88 C 187 D$ égaux à 2574, il restera 91 D égaux à 910, et l'égalisation se traite ainsi : nous partagerons 910 en 91, ce qui fera 10, valeur de D, c'est donc 10 le dernier nombre demandé ; & puisque $11 C 12 D$ étaient égaux à 208, enlevons 12 D soit 120, il restera 88 égaux à 11 C, nous diviserons 88 par 11, ce qui fera 8 pour la valeur de C, le troisième nombre ; mais aussi $3 B 4 C 1 D$ sont égaux à 54, enlevons-en 4 C 1 D, soit 10 & 32, donc 42, il restera 12 égaux à 3 B, et la valeur de B, le second nombre, est 4 ; et alors $2 A 1 B 1 C 1 D$ sont égaux à 34, enlevons 1 B donc 4, 1 C, 8, 1 D, 10, soit 22, il restera 12 égaux à 2 A, et ainsi 1 A le premier nombre est 6 ; et les quatre nombres qu'il fallait chercher sont 6, 4, 8, 10.

C'est ce problème que Butéon tente de résoudre à trois reprises, sans qu'aucune <n'aboutisse>, vu que cet homme très savant ne remarque pas qu'il est nécessaire de sommer des égalisations différentes, surtout quand il se présente quatre nombres ou plus, et que c'est la même égalisation que tantôt il double, tantôt il triple. Par quoi il se fait, puisqu'il ne prend qu'une seule égalisation, qu'il ne peut bien sûr atteindre l'égalisation simple, mais qu'il se perd dans une égalisation composée et trompeuse dont chacun peut voir combien elle est loin du vrai.

La quantité sourde. Ch. II.

Problème I.

Cherchons deux nombres dans un rapport tel que le nombre moitié du second avec 2, adjoint au premier, soit neuf fois le reste du second, & que le tiers du premier avec 3, ajouté au second soit le triple du reste de ce premier. [32]

Soit 1 L le premier nombre, 1 q le second ; et ainsi $\frac{1}{2}$ q P 2 P 1 L sont égaux au reste multiplié par neuf, donc $\frac{9}{2}$ q M 18 ; & par addition de ce qui manque et soustraction de l'excès 1 L P 20 sont égaux à 4 q, soit 1 q à $\frac{1}{4}$ L P 5 ; on a déjà posé plus haut que le premier était 1 L, le second sera $\frac{1}{4}$ L P 5 et, partant, $\frac{1}{3}$ L P 3 P $\frac{1}{4}$ L P 5 sont égaux à 2 L M 9 ; & par addition de ce qui manque et soustraction de l'excès $\frac{17}{12}$ L sont égaux à 17, ce qui fait 12 pour un lé, & c'est le premier nombre, le second est $\frac{1}{4}$ L P 5 soit 8.

Problème II.

Cherchons trois nombres tels que le premier & le second surpassent le troisième de 20, que le second & le troisième surpassent le premier de 30, que le premier & le troisième surpassent le second de 40. [33]

Soit 1 L le premier, 1 q le second, le troisième sera donc 1 L P 1 q M 20 ; mais le second & le troisième surpassaient le premier de 30, ainsi 1 L P 2 q M 20 sont égaux à 1 L P 30, & par soustraction de l'excès et addition de ce qui manque 2 q sont égaux à 50, soit 1 q à 25. On a déjà posé avant que le premier était 1 L, le second est 25, le troisième est donc 1 L P 25 M 20, soit 1 L P 5 ; mais le troisième & le premier surpassaient le second de 40, ainsi 2 L P 5 sont égaux à 65, & en enlevant l'excès, 2 L égaux à 60, soit un lé égal à 30 ; le premier nombre est donc 30, le second 25, le troisième 30 P 5, soit 35.

Problème III.

Trouvons trois nombres tels que le premier de ces nombres avec 8 soit le tiers des autres, que le second avec 8 soit les $\frac{3}{5}$ des autres, que le troisième avec 8 soit égal aux autres. [34]

Soit 1 L le premier nombre, ajoutons 8, il résultera 1 L P 8, égaux donc au tiers des autres et, partant, 3 L P 24 seront la somme des autres ; soit alors 1 q le second nombre, & ainsi 1 q P 8 sera trois-cinquièmes des autres et, partant, la somme des autres sera $\frac{5}{3}$ q P $\frac{40}{3}$; mais pour le premier nombre on a posé 1 L, enlevons-le de cette somme, il restera $\frac{5}{3}$ q P $\frac{40}{3}$ M 1 L pour le troisième ; ajoutons-le à 1 q posé pour le second nombre, il résultera $\frac{8}{3}$ q P $\frac{40}{3}$ M 1 L égaux à la somme du second & du troisième, pour laquelle on a trouvé 3 L P 24 ; $\frac{8}{3}$ q P $\frac{40}{3}$ M 1 L sont ainsi égaux à 3 L P 24, & par soustraction de l'excès et addition de ce qui manque, $\frac{8}{3}$ q sont égaux à 4 L P $\frac{32}{3}$, & en les ramenant à 1 q, 1 q est égal à $\frac{3}{2}$ L P 4. Le second nombre est donc maintenant $\frac{3}{2}$ L P 4, enlevons-le de 3 L P 24, somme du second & du

troisième, il restera $\frac{3}{2}$ L P 20 à savoir le troisième nombre, qui avec 8 est égal aux autres ; $\frac{3}{2}$ L P 28 est ainsi égal à $\frac{5}{2}$ L P 4, & par soustraction de l'excès 1 L est égal à 24 ; le premier nombre est donc 24, le second $\frac{3}{2}$ L P 4, soit 40, le troisième $\frac{3}{2}$ L P 20, donc 56, et ce sont les trois nombres 24, 40, 56 que la question mettait en œuvre.

Problème III.

Cherchons quatre nombres tels que la somme du premier, du second et du troisième excède le quatrième du nombre 20, que la <somme> du second, du troisième & du quatrième excède le premier de 30, que la <somme> du troisième, du quatrième et du premier excède le second de 40, que la <somme> du quatrième, du premier et du second excède le troisième de 50. [35]

Soit 1 L le premier nombre, 1 q la somme du second et du troisième ; le quatrième sera 1 L P 1 q M 20 ; la somme du second, du troisième & du quatrième sera 1 L P 2 q M 20, égale au premier 1 L avec 30, & par soustraction de l'excès et addition de ce qui manque, 2 q sont égaux à 50, soit 1 q égal à 25.

Posons alors que le premier est 1 L, que le second est 1 q, le troisième 25 M 1 q, le quatrième sera 1 L P 5 ; & parce que la somme du troisième, du quatrième et du premier surpasse le second de 40, 30 P 2 L M 1 q seront donc égaux à 1 q P 40, & par addition de ce qui manque et soustraction de l'excès, 2 q P 10 égaux à 2 L et, partant, 1 q égal à 1 L M 5 ; le second nombre sera donc 1 L M 5, le troisième 25 M 1 L P 5 soit 30 M 1 L ; le quatrième, le premier & le second surpassent alors le troisième de 50, 3 L sont ainsi égaux à 80 M 1 L, & par addition de ce qui manque, 4 L sont égaux à 80, soit un lé égal à 20, le premier nombre est donc 20, le second 20 M 5 soit 15, le troisième 30 M 20 soit 10, le quatrième 20 P 5 soit 25 : et 20, 15, 10 et 25 sont les quatre nombres qui satisfont parfaitement à la question.

Honneur et gloire à Dieu.

AD GVL. GOSSELINVM
CAMPODOMENSEM
Iuuenem Matheseos
studiosissimum.

*Gosseline tuo studio adiuturæ nepotes,
Gloria Campodomi magna future soli,
Asserit ipsa sibi totum te docta Mathesis,
Iamque tuas laudes dinumerat numeris.
Maeste animi virtute esto, qui vere iuuentæ
Dæ patriæ specimen tale videre tui,
Quale vel à Samio sapiēte requirere par sit,
Plurima longa ætas cui didicisse dedit.
Maeste animi: spreto volitent liuore per orbē
Maiora ingenij fac monimenta tui:
Perge orsa, ut quam tu mirā Magnam ex-
colis Artem
Sedulitate, tuā Maxima fiat ope,
Inuitā Inuidiā viues, nec te vlla vetustas
Absumet seclis innumerabilibus.*

Lud. Martellus Rotomag.

COMMENTAIRE

Sur les chapitres III à X du livre III, consacrés à la résolution des équations de degré inférieur ou égal à 3 et de celles qui s'y ramènent.

Gosselin étudie systématiquement les algorithmes de résolution des équations de degré deux, qui sont bien connus, et aborde la résolution des équations de degré trois. Après avoir présenté l'art de l'algèbre (chapitre I) et rappelé que les avis sont partagés sur le nombre de ses règles (chapitre II), il explique la résolution de « l'égalisation simple » ou équation binôme (chapitre III). Il se montre très libre avec les dénominations et recommande de choisir, pour la quantité inconnue, non pas 1 L systématiquement, comme Stifel et Peletier le préconisent, dit-il, mais plutôt la dénomination la plus pratique pour le problème traité. Il résout exemplairement la question suivante :

Deux hommes ont une somme de pièces d'or inconnue de moi. Le premier a dit au second, si tu me donnes le Lé-Quarré de tes pièces d'or j'en posséderai trois de plus que toi, mais (a dit le second) si tu me donnes le lé-Quarré des tiennes, j'en aurai 5 de plus que toi : Combien de pièces d'or l'un et l'autre possédaient-ils dans leur cassette ? [2]¹

En posant que le bien du second est 1 Q, soit $1x^2$ en écriture symbolique actuelle, Gosselin résout l'équation que nous pouvons aujourd'hui écrire :

$$1x^2 - 2x + 8 - \sqrt{1x^2 - 2x + 3} = 1x^2 + \sqrt{1x^2 - 2x + 3}$$

qui se ramène à une équation du premier degré.

Le chapitre IIII est consacré à la « deuxième égalisation ». Gosselin énonce les algorithmes de résolution des trois équations quadratiques complètes et en donne des

¹ Les numéros entre crochets renvoient aux résolutions transcrites en écriture symbolique actuelle, rassemblées dans le document annexe I.

démonstrations, qu'il qualifie d'arithmétiques, précisant ainsi en quoi elles diffèrent essentiellement des premières justifications inventées par Al-Khwarizmi au neuvième siècle, encore couramment pratiquées à la Renaissance, qui, elles, sont des démonstrations par la géométrie des étapes successives de l'algorithme.²

En lieu et place des dénominations de l'inconnue dans l'équation, Gosselin introduit une lettre représentant la valeur inconnue, sur laquelle il s'autorise à calculer. C'est donc à des grandeurs numériques, bien identifiées en tant que telles, qu'il applique les propositions 4 et 5 du livre II des *Eléments* d'Euclide, auxquelles il fait référence pour transformer les égalités données en d'autres dont la forme finale donne à voir les étapes de l'algorithme numérique.

Ainsi pour justifier la première règle, relative aux équations de la forme : $2bx + 1x^2 = c$, Gosselin considère l'exemple : 10 L P 1 Q égalent 56, qu'aujourd'hui nous écrivons : $10x + 1x^2 = 56$ et transforme, grâce à la proposition II, 4,

$$\text{l'égalité : } 10A + A^2 = 56 \text{ en l'égalité : } (5 + A)^2 = 25 + 56,$$

sur laquelle on peut lire que la valeur inconnue se calcule par la règle : $A = \sqrt{b^2 + c} - b$.

Pour justifier la deuxième règle, relative aux équations de la forme : $2bx + c = 1x^2$ (c'est la troisième des équations complètes dans la classification d'Al-Khwarizmi), Gosselin pose que, dans l'équation : $6x + 16 = 1x^2$, le nombre inconnu est $(6 + A)$ et il ramène l'égalité :

$$6(6 + A) + 16 = (6 + A)^2 \text{ à l'égalité : } 16 = A(6 + A).$$

Il s'agit d'une équation de la première forme que, curieusement, Gosselin ne résout pas directement, mais qu'il réinterprète comme le partage de $(6 + 2A)$ en deux parties de produit 16, ce qui donne, d'après la proposition II, 5, l'égalité qu'il détaille :

$$A(6 + A) + [(6 + A) - (3 + A)]^2 = (3 + A)^2 \text{ soit } 16 + 9 = (3 + A)^2$$

dernière égalité sur laquelle on peut retrouver que $A = \sqrt{b^2 + c} - b$,

donc que la valeur inconnue $(6 + A)$ se calcule par la règle $6 + A = \sqrt{b^2 + c} + b$.

Pour justifier la troisième règle enfin relative aux équations de la forme : $c + 1x^2 = 2bx$, Gosselin pose que, dans l'équation : $32 + 1x^2 = 18x$, le nombre inconnu est B , inférieur à 18, et il transforme l'égalité :

² Al-Khwarizmi, *Al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wa'l Mukabala*, *L'abrégé du calcul par les procédés du jabr* (restauration) et de la *muqabala* (réduction), Bagdad, entre 813 et 833.

$$18B = B^2 + 32 \text{ en } B(18 - B) = 32$$

qu'il lit à nouveau comme le partage de 18 en deux parties de produit 32, dont il donne les solutions 2 et 16, en renvoyant au chapitre XIII de son livre I, sans réécrire cette fois-ci les égalités :

$$B(18 - B) + (9 - B)^2 = 9^2 \text{ ou } B(18 - B) + (B - 9)^2 = 9^2$$

$$\text{donc } 32 + (9 - B)^2 = 81 \text{ ou } 32 + (B - 9)^2 = 81$$

sur lesquelles on verrait que la valeur inconnue B s'obtient en calculant :

$$B = b - \sqrt{b^2 - c} \text{ ou } B = b + \sqrt{b^2 - c}$$

Notons que le chapitre XIII du livre I, intitulé *La division des proportions*, est pour l'essentiel consacré à l'insertion de moyennes proportionnelles entre deux nombres donnés, de une à cinq progressivement. En problème d'application, Gosselin fait le partage de 10 en deux parties ayant entre elles la moyenne proportionnelle 4, qu'il reformule comme le partage de 10 en deux parties de produit 16, et pour cette question il renvoie à la proposition 5 du livre II des *Eléments* d'Euclide.

Les démonstrations arithmétiques de Gosselin seraient donc propres à produire, de façon plus ou moins aboutie, une forme de l'équation sur laquelle l'algorithme ancestral tirerait sa légitimité de sa visibilité. Pourtant le recours aux propositions d'Euclide reste incontournable parce que la démonstration, en tant que travail déductif, fondamentalement, ne peut être que géométrique tant que l'algèbre n'aura pas été axiomatisée.

Pour illustrer l'utilisation de la première règle, Gosselin choisit de reprendre un problème traité par Peletier comme *Exemple V* de son chapitre XXX intitulé *Des exemples appartenans aux operations des Racines Secondes*.³ Il s'agit de trouver deux nombres tels que la somme de leurs carrés diminuée de leur somme fasse 48 et que leur produit augmenté de leur somme fasse 31 [4]. Gosselin se flatte de proposer une résolution plus facile que celle de Peletier. La différence de méthode n'intervient qu'en fin de résolution, après que la valeur de la somme a été obtenue en utilisant le premier algorithme :

³ Jacques Peletier, *L'Algebre*, chez Jean de Tournes, Lyon, 1554. Réédition, 1620, p. 111 à 116.

$$a + b = 1x \quad 48 + 1x = a^2 + b^2 \quad 31 - 1x = ab$$

$$62 - 2x = 2ab$$

$$\text{II, 4} \quad 48 + 1x + 62 - 2x = (a + b)^2$$

$$110 - 1x = 1x^2$$

$$110 = 1x^2 + 1x \quad 1x = 10$$

Gosselin termine alors en indiquant qu'il reste à partager la somme 10 en deux parties de produit 21. Pour cela, il renvoie au chapitre XIII de son livre I : les nombres cherchés sont 3 et 7.

Peletier, lui, qui indiquait que le problème est de Stifel, poursuivait en cherchant deux nombres dont le produit des carrés est $21^2 = 441$ et dont la somme des carrés est 58. Il résolvait l'équation biquadratique : $1x^4 = 58x^2 - 441$, écrite avec un coefficient négatif à la manière de Stifel. Les racines en sont 9 et 49, les nombres cherchés sont 3 et 7.

Le souci de Gosselin est bien de simplifier la résolution et non d'éviter l'équation de degré 4 puisque au chapitre V qui suit, il s'intéresse, lui aussi, à l'équation biquadratique ou, plus généralement, à *L'égalisation proportionnelle à la précédente*. Il s'agit des équations qui engagent des dénominations telles que QT, T et N, où T pouvant être une dénomination quelconque, QT est son carré et N un nombre absolu et dépourvu de valeur, au sens précisé plus haut. Pour exemple, Gosselin fait le partage de 20 en deux carrés dont le produit des racines est 8 ; il résout l'équation : $1x^4 + 64 = 20x^2$ et trouve que les carrés sont 4 et 16. [9]

Il consacre le chapitre VI aux équations quadratiques non unitaires et le chapitre VII aux équations sans terme constant qui se ramènent à des équations quadratiques.

Gosselin poursuit son travail sur les équations quadratiques en présentant, au chapitre VIII intitulé : *Les innombrables manières de résoudre ces égalisations*, une façon d'appliquer les règles, que l'on trouve chez Nuñez. Ce dernier énonce en effet en extension, pour chacune des trois équations quadratiques complètes à coefficients tous positifs, la règle qui donne le double de la racine et que l'on peut aujourd'hui écrire :

$$\text{Pour} \quad 1x^2 + bx = c \quad x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4c + b^2} - b \right)$$

Pour	$1x^2 = bx + c$	$x = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4c})$
Pour	$1x^2 + c = bx$	$x = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$

Dans chaque cas, il détaille l'algorithme sur un exemple numérique, il en donne une démonstration arithmétique, puis une démonstration géométrique.⁴

L'intérêt de ce chapitre du *De Arte Magna* ne réside peut-être pas tant dans le contenu de la règle de Nuñez ni dans l'extension à un entier k quelconque qu'en donne Gosselin :

$$x = \frac{1}{k} \left(k \frac{b}{2} + \sqrt{k^2 \left(\frac{b}{2} \right)^2 + k^2 c} \right)$$

(qu'il détaille sur l'exemple : $1x^2 = 4x + 12$ pour les valeurs 2, 3 et 4 de l'entier k), que dans la tentative de ce dernier, pour sa présentation de la règle de Nuñez, de condenser les trois algorithmes en une seule formulation, faisant alors intervenir des additions et des soustractions. Il semble bien que Gosselin s'inspire, là, de la règle A.M.A.S.I.A.S. de Stifel, que l'on trouve au chapitre III du livre III de l'*Arithmetica Integra*, consacré à *L'extraction des racines des nombres cossiques*. C'est une règle en six points désignés par les six lettres du mot A.M.A.S.I.A.S., qui repose sur le positionnement des espèces, carré, racine et nombre, dans les équations écrites en isolant le terme carré :

Premièrement. D'Abord prends le nombre des racines, et l'ayant divisé par deux, à sa place, pose sa moitié, qui restera à sa place jusqu'à ce que l'opération soit entièrement terminée.

Deuxièmement. Multiplie par lui-même le nombre moitié que tu as posé.

Troisièmement. Ajoute ou Soustrais selon l'exigence du signe d'addition ou du signe de soustraction.

Quatrièmement. Invente la racine carrée de la somme de ton addition ou du reste de ta soustraction.

*Cinquièmement. Ajoute ou Soustrais selon l'exigence du signe ou de ton exemple.*⁵

⁴ Academia Das Ciências de Lisboa, *Pedro Nuñez Obras*, Nova Edição revista e anotada por uma comissão de Sócios da Academia das ciencias, Vol. VI, Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria, imprensa nacional de Lisboa, MCMXLVI, p. 170 à 176.

⁵ Michael Stifel, *Arithmetica Integra*, f. 241 v.

L'énoncé de Gosselin reste maladroit. Stevin donnera toute son efficacité à la nouvelle règle en franchissant le pas supplémentaire qui consistera à accepter qu'une expression puisse commencer par un signe « - », pour que, ordonnant le binôme obtenu en isolant le terme carré de l'équation, on ait une règle indépendante du signe des coefficients.

Après l'examen au chapitre IX d'équations comportant des dénominateurs et des radicaux, au chapitre X Gosselin s'exprime sur la « troisième égalisation ». Il aborde la question en se montrant fort critique à l'égard de Cardan tout particulièrement, ainsi que Nuñez l'est à l'égard de Tartaglia, chacun reprochant au prédécesseur qu'il incrimine de proposer des formules qui en général n'aboutissent pas. Ceci n'empêche pas Gosselin, qui promet par ailleurs de faire connaître rapidement « le résultat de ses propres recherches », de présenter la méthode que l'on trouve chez Cardan, pour la résolution de l'équation du troisième degré sans terme en x^2 , à partir de la résolution de l'équation sans terme en x associée.

Ce que, en termes actuels, on peut préciser ainsi :

L'équation : $x^3 + ax^2 = b^2$ peut s'écrire : $x^2(x+a) = b^2$, soit : $x\sqrt{x+a} = b$,
ce qui donne : $x = \frac{b}{\sqrt{x+a}}$, donc $x+a = \frac{b+a\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+a}}$ ou encore : $(\sqrt{x+a})^3 = b+a\sqrt{x+a}$.

Donc si α est solution de : $x^3 + ax^2 = b^2$, alors $\sqrt{\alpha+a}$ est solution de : $x^3 = b+ax$.

On vérifie de même que

si α est solution de : $x^3 + b^2 = ax^2$, alors $\sqrt{a-\alpha}$ est solution de : $x^3 + b = ax$,

que si α est solution de : $x^3 = ax^2 + b^2$, alors $\sqrt{\alpha-a}$ est solution de : $x^3 + ax = b$.

Gosselin explicite cette règle pour les exemples numériques :

$x^3 + 6x^2 = 1600$, dont la racine est 10, et $x^3 = 6x + 40$, dont la racine est $\sqrt{10+6} = 4$.

$x^3 + 64 = 18x^2$, dont la racine est 2, et $x^3 + 8 = 18x$, dont la racine est $\sqrt{18-2} = 4$

$x^3 = 8x^2 + 576$, dont la racine est 12 et $x^3 + 8x = 24$, dont la racine est $\sqrt{12-8} = 2$.

De ces premiers chapitres du *De Arte Magna*, on retiendra principalement la relation ambiguë de Gosselin à l'inconnue, qu'elle soit dénomination ou valeur numérique inconnue, et le rôle qu'il attribue de façon volontariste au registre numérique.

Après avoir ainsi passé en revue les règles de l'algèbre, Gosselin éprouve leur efficacité et la souligne en les mettant au service de problèmes arithmétiques retrouvés ou trouvés dans les *Arithmétiques* de Diophante.

Sur les chapitres XI à XIII du livre III, I et II du livre IIII, consacrés à la résolution de problèmes de Diophante.

Bien qu'on ne trouve pas dans les *Arithmétiques* le moindre encouragement à le faire, tous les commentateurs de Diophante distinguent ses problèmes déterminés et ses problèmes indéterminés. Même si Gosselin n'explicite pas ce critère de séparation, il n'échappe pas à l'usage, et les problèmes déterminés qu'il présente sont rassemblés dans les trois derniers chapitres du *De Arte Magna*, alors que les problèmes indéterminés, relatifs aux nombres congruents, sont traités aux chapitres XI et XII du livre III, dont les titres annoncent les méthodes originales de Diophante.

Les problèmes déterminés auxquels Gosselin apporte une solution algébrique dans le *De Arte Magna* sont le problème sur les nombres polygones du livre III et les problèmes à plusieurs inconnues du livre IIII.

Au chapitre XIII, le dernier, du livre III, Gosselin donne sa « méthode facile et générale » de recherche du côté d'un nombre polygone donné quelconque. Précisément, il résout sans explications les équations :

$$\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p = 21 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p = 51$$

pour trouver que 6 est à la fois le côté triangulaire de 21 et le côté pentagonal de 51.

Ce passage du *De Arte Magna* paraîtrait obscur et superficiel, sans l'apport important de Gosselin sur cette question, au chapitre II du livre IX de la seconde partie de l'*Arithmétique*

de Tartaglia, après l'étude par Tartaglia des nombres carrés. Gosselin y explique la génération des nombres polygones comme sommes des termes des progressions arithmétiques commençant à l'unité, de raison 1 pour les nombres triangles, de raison 2 pour les nombres carrés, de raison 3 pour les nombres pentagones, ... et il détaille leur algorithme de calcul. La formule :

$$[i] \quad P_{n,p} = \frac{1}{2} p [2 + (p-1)(n-2)]$$

qui, dans son écriture actuelle, donne le nombre polygone à n côtés de longueur p , résume la règle que Gosselin lui-même énonce en toute généralité, sans le recours à aucun exemple numérique, au chapitre IX du livre I du *De Arte Magna*, où il cite « le très savant Mauricius Bressius, professeur de Mathématiques ».

Gosselin explique aussi, dans le traité de Tartaglia, la manière de calculer, inversement, le côté d'un nombre polygone donné, faisant pour cela explicitement référence au problème IX du *Livre des nombres polygones* de Diophante. La formule suivante condense et généralise les prescriptions :

$$p = \frac{\sqrt{8(n-2)P_{n,p} + (n-4)^2} + (n-4)}{2(n-2)}$$

Après avoir calculé le côté triangulaire de 15, le côté pentagonal de 22 et obtenu le côté décagone de 232 en calculant : $\frac{E(\sqrt{2(10-2)232})}{(10-2)} + 1$, il recommande, pour ces problèmes,

la méthode la plus belle et plus subtile qu'il a inventée et expliquée en son Algèbre.

Or la formule [i] s'écrit : pour $n = 3$, $P_{3,p} = \frac{1}{2} p [2 + (p-1)] = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} p$

pour $n = 5$, $P_{5,p} = \frac{1}{2} p [2 + 3(p-1)] = \frac{3}{2} p^2 - \frac{1}{2} p$

et ces formules expliquent les équations livrées par Gosselin au chapitre XIII du livre III du *De Arte Magna*.

Concernant le livre IIII, nous avons déjà indiqué que le chapitre I, intitulé *La quantité absolue*, est un modèle d'ordre et d'organisation pour la résolution par combinaisons linéaires des systèmes à plusieurs inconnues. Gosselin résout tout d'abord, par un système de deux équations à deux inconnues, un problème en lequel on reconnaît le sixième problème du livre I des *Arithmétiques* de Diophante ; puis par un système de trois équations à trois inconnues,

un problème qui est le vingtième du même livre I. Il résout ensuite deux systèmes de trois équations à trois inconnues, empruntés au *Libro de Algebra* de Nuñez ; et il termine ce chapitre par la résolution d'un système de quatre équations à quatre inconnues, mal résolu, dit-il, par Butéon.

Les problèmes II et III du chapitre II, qui ne diffèrent l'un de l'autre que par le nombre d'inconnues, ne sont autres que les problèmes 18 et 19 du livre I des *Arithmétiques*. Il s'agit, au problème II, de trouver trois nombres, tels que la somme du premier et du deuxième excède le troisième de 20, que la somme du deuxième et du troisième excède le premier de 30, et que la somme du premier et du troisième excède le deuxième de 40. Nous avons déjà noté que l'introduction de « la quantité sourde » conduit Gosselin à des maladresses, du point de vue des calculs ; la solution de Diophante, qui consiste à considérer que la somme des nombres cherchés est égale à deux fois le « nombre non dit », est, elle, parfaitement élégante.

Les titres des deux chapitres du livre III qui restent à étudier, *L'égalisation de Diophante avec supposition*, et *La double égalité de Diophante*, désignent deux méthodes propres à Diophante pour la résolution de **problèmes indéterminés**.

Gosselin entame le chapitre XI en s'émerveillant devant l'inventivité du mathématicien grec, qui a imaginé le moyen de faire varier les solutions. Il entre dans sa démarche et multiplie les exemples « d'égalisation avec supposition ». Il trouve que $(6x^2 + 16)$ peut-être égalé à un carré de plusieurs façons : à celui de $(2x + 4)$, pour $x = 8$, et aussi à celui de $(3x - 4)$, pour la même valeur $x = 8$. Ce que nous pouvons aujourd'hui comprendre ainsi : chercher les valeurs rationnelles de x pour lesquelles $(6x^2 + 16)$ est le carré d'un nombre rationnel, c'est chercher en quels points la branche d'hyperbole d'équation : $y = \sqrt{6x^2 + 16}$ est recoupée par les droites de coefficient directeur rationnel variable, d'équation : $y = mx \pm 4$, qui passent par l'un ou l'autre des points de l'hyperbole de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Les problèmes I, II et III que Gosselin examine au chapitre XI conduisent à des équations indéterminées qu'il résout également par la méthode diophantienne qui vient d'être décrite.

Dans le cadre du problème I, par exemple, il est amené à chercher x tel que $(x^2 + 8x + 8)$ soit un carré ; il trouve que c'est le carré de $(x - 8)$ pour la valeur $x = \frac{7}{3}$. La solution générale consisterait à chercher en quels points de coordonnées rationnelles la branche d'hyperbole d'équation : $y = \sqrt{x^2 + 8x + 8}$ est coupée par les droites d'équations : $y = x + p$, qui sont parallèles à son asymptote.

Le problème III ouvre la vaste question des carrés et des nombres congruents, laquelle est aussi traitée arithmétiquement dans les chapitres III à IX du livre IX de la seconde partie du traité de Tartaglia. Il est utile d'étudier cette source pour comprendre le fondement des questions que Gosselin choisit de traiter algébriquement dans le *De Arte Magna*.

Les triplets pythagoriciens et les nombres congruents dans le traité de Tartaglia

Tartaglia a fait précéder l'étude des nombres congruents de l'exposé, au chapitre III du même livre IX de son traité, de règles pour la résolution en nombres entiers de l'équation : $x^2 + y^2 = z^2$.⁶

En résumé, il connaît la règle de sommation des nombres entiers impairs successifs que, aujourd'hui, on peut écrire : $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$. La somme des nombres entiers impairs jusqu'au carré impair : $(2p+1)^2 = [2(2p^2 + 2p + 1) - 1]$ est ainsi égale à : $(2p^2 + 2p + 1)^2$. Le nombre entier impair qui précède $(2p+1)^2$ est : $[2(2p^2 + 2p) - 1]$, et la somme des nombres entiers impairs jusqu'à ce dernier est égale à : $[2p^2 + 2p]^2$. D'où l'on tire l'égalité :

$$[2p^2 + 2p]^2 + (2p + 1)^2 = [2p^2 + 2p + 1]^2,$$

qui génère des triplets pythagoriciens. On reconnaît ici la règle que Proclus attribue à Pythagore.⁷ Cette égalité peut aussi s'écrire :

$$[2p(p+1)]^2 + [(p+1)^2 - p^2]^2 = [(p+1)^2 + p^2]^2.$$

⁶ Pour chacune des règles rencontrées, nous donnerons aussi la formulation qui montre le lien avec la règle générale rappelée ici. Tous les triplets pythagoriciens premiers entre eux dans leur ensemble sont de la forme : $\{(2ab), (a^2 - b^2), (a^2 + b^2)\}$, où a et b sont des entiers premiers entre eux, de parité différente. Cette règle est sous-jacente dans les *Arithmétiques* de Diophante, livre III, problème 19. Elle est explicitée chez Al-Khazin (10^e siècle), le créateur de l'analyse diophantienne entière, et chez Fibonacci.

⁷ Proclus, *Commentaires sur les Eléments d'Euclide*, livre I, pp. 428 et suivantes.

Gosselin a complété l'étude de Tartaglia par l'exposé de trois autres règles pour l'obtention de triplets pythagoriciens, qui sont transcrites ci-dessous en écriture symbolique actuelle.

* Pour trois nombres en proportion géométrique double, $1k$, $2k$, $4k$, on a toujours :

$$(1 + 4)^2 k^2 = 4^2 k^2 + (1 + 2)^2 k^2$$

* Partant de deux nombres entiers dont la différence est 2, Gosselin explique l'égalité, vraie pour tout nombre entier r :

$$[r + (r + 2)]^2 + [r(r + 2)]^2 = [r(r + 2) + 2]^2.$$

qui génère des triplets pythagoriciens et que nous pouvons choisir d'écrire :

$$[ii] \quad [2 \times 1 \times (1 + r)]^2 + [(1 + r)^2 - 1^2]^2 = [(1 + r)^2 + 1^2]^2$$

* Enfin la résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ peut se faire par « l'Algèbre, avec la fiction de l'équation de Diophante », et Gosselin a inséré un exemple de cette démarche dans le traité d'arithmétique lui-même. Se donnant le nombre carré impair 25, il écrit que $1x^2 + 25$ est un carré, celui de $(1x + 1)$ « par exemple », ce qui sans hasard conduit à la valeur $1x = 12$ et fournit l'égalité : $12^2 + 5^2 = 13^2$, soit l'égalité des carrés impairs de Tartaglia pour $p = 2$.⁸ Il est difficile de savoir si Gosselin a noté que pour tous les triplets pythagoriciens qu'il rencontre, l'entier z est lui-même la somme de deux entiers carrés, et ceci est d'autant moins clair que, au chapitre XI du livre III du *De Arte Magna*, pour séparer le carré 100 en une somme de deux carrés entiers, il renvoie à la fois au neuvième problème du livre II des *Arithmétiques* de Diophante et au huitième, qui sont les références pour la résolution en nombres rationnels des équations : $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ et $x^2 + y^2 = a^2$, respectivement.

Tartaglia entame le premier chapitre consacré aux nombres congruents en posant ainsi le problème :

Trouvons un nombre Quarré, duquel si nous osons une certaine quantité, reste un Quarré, & si nous y adioustons la mesme quantité, la somme soit encor un Quarré :

⁸ *L'arithmétique de Nicolas Tartaglia*, ... f. 89 r.

*Frere Luc du Bourg (ainsi qu'il dit) a tiré cette proposition ou question avec les suyvantes d'un particulier traité de Leonard Pisan, intitulé les nombres Quarrez.*⁹

Tartaglia attribue la paternité de la notion à Léonard de Pise¹⁰ mais juge utile de compléter la définition précédente pour généraliser la question :

*Or le nombre Congruent, est appelé un nombre, qui adiousté avec un Quarré fait un Quarré, & osté de ce Quarré, laisse encor un Quarré, & tel Quarré est dit le Quarré Congruent.*¹¹

Il explique alors sur des exemples numériques, dans le cadre de ses chapitres V et VI, les règles de Léonard de Pise recueillies par Pacioli, pour la fabrication de nombres congruents et de leurs carrés congruents. Sans passer par les étapes que Tartaglia ménage, nous donnons ci-dessous la formulation de sa règle générale, en écriture symbolique actuelle, avec un paramétrage choisi pour la visibilité qu'il apporte. Deux nombres entiers quelconques, p et $(p + r)$, étant donnés, on obtient un nombre congruent et son carré congruent en calculant :

$$N = 4 p r (p + r) (2p + r) \quad \text{et} \quad Q = \left[p^2 + (p + r)^2 \right]^2$$

Il est immédiat de vérifier que :

$$\begin{aligned} & \left[p^2 + (p + r)^2 \right]^2 - 4 p r (p + r) (2p + r) = (2p^2 - r^2)^2 \\ \text{et que } & \left[p^2 + (p + r)^2 \right]^2 + 4 p r (p + r) (2p + r) = \left[2 (p + r)^2 - r^2 \right]^2 \end{aligned}$$

Tartaglia déduit de cette règle, en son chapitre VII, une *Table de plusieurs nombres Congruens, avec leur Quarrez*, que nous transcrivons dans les deux premières colonnes du tableau, la complétant, dans les deux autres colonnes, par les valeurs de p et de r auxquelles les paires congruentes (Q, N) correspondent.

⁹ *Ibid.* f. 89 v. Il s'agit du *Liber quadratorum* de 1225.

¹⁰ Fibonacci lui-même a reçu le problème de Jean de Palerme, mathématicien attaché à la cour de Frédéric II, qui connaissait peut-être al-Khazin.

¹¹ *Ibid.* f. 90 r.

Carré Congruent	Nombre congruent	(p, r)	ou
$25 = 5^2$	24	$(1, 1)$	
$100 = 10^2$	96	$(1, 2)$	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$169 = 13^2$	120	$(2, 1)$	
$225 = 15^2$	216	$(\sqrt{3}, \sqrt{3})$	
$289 = 17^2$	240	$(1, 3)$	
$400 = 20^2$	384	$(2, 2)$	$(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
$625 = 25^2$	336 & 600	$(3, 1) \text{ \& } (\sqrt{5}, \sqrt{5})$	
$676 = 26^2$	480	$(1, 4)$	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$841 = 29^2$	840 ¹²	$(2, 3)$	
$900 = 30^2$	864	$(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$	$(\sqrt{6}, \sqrt{6})$
$1156 = 34^2$	960	$(3, 2)$	$(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
$1225 = 35^2$	1176	$(\sqrt{7}, \sqrt{7})$	
$1600 = 40^2$	1536	$(2, 4)$	$(\sqrt{8}, \sqrt{8})$
$1681 = 41^2$	720	$(4, 1)$	
$2025 = 45^2$	1944	$(3, 3)$	
$2500 = 50^2$	1344 & 2400 ¹³	$(3\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ \& } (\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$	
$1369 = 37^2$	840	$(1, 5)$	

Il est au premier abord surprenant de constater que certaines paires (Q, N) figurant dans la table ne correspondent pas à des valeurs de p et de r entières, mais il est vrai que, puisque les expressions de Q et de N en fonction de p et de r sont homogènes de degré 4, on peut obtenir la paire congruente (k^2Q, k^2N) à partir des irrationnels quadratiques $(p\sqrt{k}, r\sqrt{k})$, où p , r et k sont des nombres entiers. Tartaglia précise d'ailleurs lui-même que si un nombre entier

¹² La table de Tartaglia propose les deux nombres congruents 840 et 1369 pour le carré 841. Or c'est le nombre congruent 840 qui correspond à deux carrés différents, 841 qui figure dans la table et 1369, que nous ajoutons en dernière ligne du tableau.

¹³ Tartaglia donne le seul nombre congruent 2400.

N' est de la forme : $\frac{1}{k^2} N$, où N est un nombre congruent connu associé à un carré Q , alors N' est le nombre congruent associé au carré : $\frac{1}{k^2} Q$, qui peut ne pas être entier.

Après avoir traduit le travail de Tartaglia sur les nombres congruents, Gosselin le reprend à son compte et le complète. Le chapitre VIII du traité de Tartaglia contient quatre règles de Gosselin pour la « génération » des nombres congruents, et le chapitre IX deux règles pour leur « dissolution ».

* La première règle de Gosselin pour générer les nombres congruents, dont l'origine est, dit-il, dans les cubes des nombres impairs, n'est pas différente de la règle de Léonard de Pise pour p nombre entier quelconque et $r = 1$:

$$N = (2p+1)^3 - (2p+1) = 4p(p+1)(2p+1) \quad \text{et} \quad Q = [p^2 + (p+1)^2]^2$$

* La seconde règle de Gosselin, pour générer les nombres congruents à partir des progressions arithmétiques, consiste à calculer, pour p' et r entiers :

$$N = p' r (p' + r) (p' + 2r) \quad \text{et} \quad Q = \left[\left(\frac{p'}{2} \right)^2 + \left(\frac{p' + 2r}{2} \right)^2 \right]^2$$

et cette formule qui, pour p' pair, redonne les paires congruentes entières de Léonard de Pise, permettrait, pour p' impair, d'obtenir les paires $\left(\frac{1}{4} Q, \frac{1}{4} N \right)$, mais Gosselin ne précise pas s'il exclut ou prévoit ce choix.

* La troisième règle de Gosselin repose sur la propriété que si trois nombres entiers vérifient : $x^2 + y^2 = z^2$, alors les nombres $Q = z^2$ et $N = 2xy$ sont carré et nombre congruents, puisque $Q - N = (x - y)^2$ et que $Q + N = (x + y)^2$. Il est intéressant de reconnaître à quelles paires congruentes conduisent les triplets pythagoriciens trouvés par les règles du chapitre III. La règle de Tartaglia qui repose sur la sommation des entiers impairs successifs fournit évidemment les mêmes résultats que la première règle de Gosselin faisant appel aux cubes des nombres impairs. Quant à la règle de Gosselin pour générer des triplets pythagoriciens à partir de deux entiers dont la différence est 2, que nous avons écrite :

$$[\text{ii}] \quad [2 \times 1 \times (1+r)]^2 + [(1+r)^2 - 1^2]^2 = [(1+r)^2 + 1^2]^2$$

elle donne $N = 4r(1+r)(2+r) \quad \text{et} \quad Q = [(1+r)^2 + 1^2]^2$

soit les paires congruentes de Léonard de Pise pour $p = 1$ et r entier quelconque.

* Sous le titre de quatrième règle enfin, Gosselin évoque le problème XX du livre II et le neuvième du livre III des *Arithmétiques* de Diophante dont il dit reporter l'exposé à l'Algèbre, mais qui ne figurent pas dans le *De Arte Magna*. Il s'agirait au livre II de trouver deux nombres tels que le carré de l'un ajouté à l'autre soit un carré, et au livre III de trouver trois nombres tels que la somme de deux quelconques d'entre eux diminuée d'un nombre donné soit un carré, la somme des trois diminuée du même nombre donné étant elle-même un carré. Le lien avec la question des nombres congruents n'étant pas immédiat, on ne peut exclure que, par suite de variantes dans la numération, Gosselin évoque en fait le problème XIX du livre II, qui demande de trouver trois carrés tels que la différence du grand et du moyen ait un rapport donné à la différence du moyen et du petit, et le problème sept du livre III, où la recherche de trois nombres en progression arithmétique tels que les sommes de deux d'entre eux soient des carrés passe par la recherche de trois carrés en progression arithmétique.

La règle générale pour la dissolution des nombres et carrés congruents, que Gosselin expose au chapitre IX du traité de Tartaglia, lui permet, affirme-t-il, d'éviter la méthode par tâtonnement de ses prédécesseurs.

* Pour la recherche du nombre congruent associé à un nombre carré donné, il recommande l'exploitation assez maladroite d'une proportionnalité possible entre la paire incomplète et une paire congruente connue. Le traitement algébrique de la même question, au chapitre XI du *De Arte Magna*, sera plus convaincant.

* S'agissant au contraire de la recherche d'un nombre carré Q associé à un nombre congruent N , c'est peut-être dans le traité de Tartaglia que Gosselin est le plus précis. Il explique que si N est bien un nombre congruent, c'est-à-dire s'il admet « deux paires de diviseurs pairs dont la différence des uns est égale à la somme des autres », si donc on peut trouver u, v, r, s tels que :

$$N = (2u) \times (2v) = (2r) \times (2s), \quad \text{avec } v - u = r + s,$$

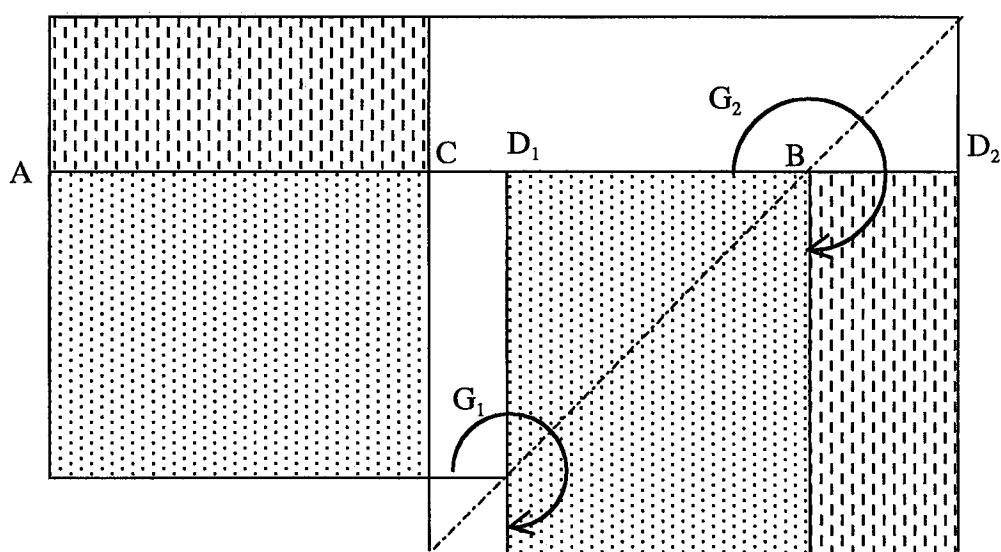
alors $Q = (v - u)^2 = (r + s)^2$ en est un carré congruent.

En effet [a] $Q - N = (r + s)^2 - 4rs = (r - s)^2$

et [b] $Q + N = (v - u)^2 + 4uv = (v + u)^2$

Gosselin justifie numériquement les deux égalités [a] et [b] par la seule proposition 5 du livre II des *Eléments* d'Euclide, ce qui n'est pas illégitime, puisqu'il s'agit de la même identité algébrique dans les deux cas, mais moins pertinent peut-être que ne l'aurait été le fait d'associer aux égalités [a] et [b] les propositions 5 et 6 respectivement.

Bien que cette démarche soit étrangère à Gosselin, nous prenons l'initiative de représenter géométriquement les propositions 5 et 6 du livre II des *Eléments* d'Euclide, pour obtenir la visualisation des paires congruentes.



Le point C étant le milieu du segment AB,

$$\text{D'après II, 5} \quad D_1A \times D_1B + CD_1^2 = CB^2$$

$$\text{D'après II, 6} \quad CB^2 + D_2A \times D_2B = CD_2^2$$

Si les gnomons $G_1 = D_1A \times D_1B$ et $G_2 = D_2A \times D_2B$ sont égaux, les trois carrés : CD_1^2 , CB^2 et CD_2^2 sont « équidistants », et CB^2 est le carré congruent associé au nombre congruent $G_1 = G_2$. Plus précisément, la condition exprimée par Gosselin peut se voir ainsi : si pour deux rectangles ayant la même aire, la somme des côtés du rectangle court sur la construction II, 5 est égale à la différence des côtés du rectangle long sur la construction II, 6 alors les deux figures sont encastrables comme ci-dessus et sur la figure globale, on a en évidence une paire (nombre congruent, carré congruent).

Les nombres congruents dans le *De Arte Magna*

C'est exactement ainsi que Gosselin aborde la question des carrés et des nombres congruents dans le *De Arte Magna*. Au problème III du chapitre XI, pour trouver une paire congruente, il cherche trois carrés équidistants ; pour cela il se donne deux nombres carrés et fait en sorte, par la méthode de la corde, que le nombre qui est distant du second carré comme le second l'est du premier soit aussi un carré.

La même figure éclaire aussi la solution algébrique que Gosselin donne, au problème V du chapitre XI, pour la recherche d'un nombre congruent N associé à un carré donné : c^2 .

$$\begin{array}{lll} \text{En effet, le système :} & c^2 - N = u^2 & \text{peut s'écrire} & N = (c + u)(c - u) \\ & c^2 + N = v^2 & & N = (v + c)(v - c) \end{array}$$

et le nombre cherché N doit être le produit à la fois de deux nombres de somme $2c$ et de deux nombres de différence $2c$.

Si, sur la figure précédente, on pose : $AB = 2c$, $D_2B = x$ et que l'on ajoute la contrainte : $D_1B = kx$ pour k donné, ce qui détermine le problème, il vient :

$$D_2A = 2c + x \text{ et } D_1A = 2c - kx.$$

On demande que : $kx(2c - kx) = x(2c + x)$,

ce qui donne :
$$x = \left(\frac{2c}{1+k^2} \right) (k-1) \quad \text{donc :} \quad N = \left(\frac{2c}{1+k^2} \right)^2 (k-1)k(k+1).$$

Gosselin fait la mise en équation pour les valeurs : $c = 10$ et $k = 2$, en précisant que le choix $k = 2$ est destiné à éviter les nombres fractionnaires ; il obtient : $x = 4$ et associe au carré 100 le nombre congruent 96.

Au chapitre XII enfin, pour la recherche algébrique d'un carré congruent associé à un nombre congruent donné, Gosselin présente et utilise la méthode de « la double égalité de Diophante ». Pour l'exposer, il reprend exactement le problème 11 du livre II des *Arithmétiques*. La résolution du système particulier :

$$1x + 2 = w^2$$

$$1x + 3 = v^2$$

repose sur la factorisation de la différence $(3-2)$, égale à $(v+w)(v-w)$. w et v sont alors égaux respectivement à la demi-différence et à la demi-somme des facteurs de la différence $(3-2)$.

Pour que la méthode soit applicable à la recherche du carré congruent, il est nécessaire de reformuler les relations de congruence. Le nombre N étant donné, on cherche un carré Q qui, augmenté de N , soit un carré, lequel, augmenté de N encore, soit à nouveau un carré.

$$Q + N = c^2$$

$$Q + 2N = v^2$$

Le carré congruent sera : c^2 qui, diminué de N , est le carré donné Q , et, augmenté de N , est égal à v^2 . Il faut reconnaître les facteurs de N qui permettent de calculer c et v par l'égalité : $N = (v+c)(v-c)$. Alors que dans le traité de Tartaglia, Gosselin explique selon quels critères arithmétiques il retient les paires de diviseurs de N qui conduisent au carré, ici, il pose, sans plus d'explications, des restrictions par encadrement, réductibles à : $2N < v^2 < 3N$ qui, pour $N = 96$, conduisent au choix $v = \frac{1}{2}(24 + 4)$ donc $c = \frac{1}{2}(24 - 4)$, soit $c^2 = 100$. Gosselin ne dit rien de la condition nécessaire : c^2 diminué de N est un carré.

Un contre-exemple confirme que la condition : $v^2 < 3N$ n'a pas de fondement :

$$47^2 + 2016 = 65^2 \text{ et } 65^2 + 2016 = 79^2 \text{ et } 3 \times 2016 < 79^2$$

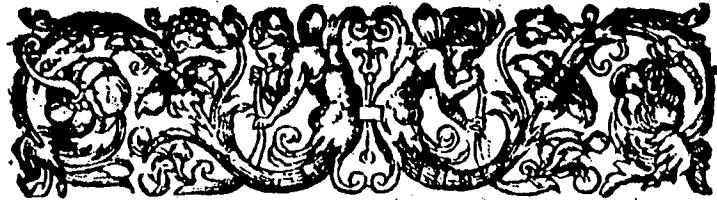
Ainsi, Gosselin, qui découvre les *Arithmétiques* de Diophante, donc ses méthodes pour la résolution des problèmes indéterminés, au moment où il étudie dans le traité de Tartaglia les problèmes arithmétiques posés par Léonard de Pise, fait entrer ces derniers dans le corpus diophantien.

Il est vraisemblable que Gosselin est mort jeune. Il a laissé un livre d'algèbre dont il est l'auteur, et la traduction d'un traité d'arithmétique qu'il a augmenté de ses contributions, peu de choses pour se faire une idée juste de ce qu'ont été sa place en son temps, son influence sur ses contemporains, de ce qu'il aurait pu accomplir. Et ceci, même si certains points forts sont saillants, comme sa parfaite maîtrise de la résolution par combinaisons linéaires des systèmes à plusieurs inconnues.

Instruit, il connaît les travaux de ses prédécesseurs, très au fait de l'actualité scientifique, il lit les *Arithmétiques* de Diophante dès leur parution, il est soucieux de faire partager ses connaissances à ses contemporains. Sachant tout à la fois promouvoir la nouvelle algèbre avec rigueur et recueillir l'héritage des anciens avec curiosité et respect, il est capable d'innover et de créer des rencontres heureuses, de mettre l'algèbre au service de l'arithmétique et des problèmes de Diophante, de mettre les méthodes de Diophante ou l'arithmétique au service de l'algèbre.

Il avait le projet de rééditer les *Arithmétiques* de Diophante. Parce qu'il semble capable de percevoir les liens profonds entre les différents secteurs des mathématiques, il aurait peut-être su éviter une lecture trop algébrisante, et garder la position qui est d'abord la sienne d'entrer dans les *Arithmétiques*, comme le feront Bachet et Fermat, plutôt que de s'en emparer, comme l'on fait Bombelli, Stevin, Viète ou Girard.

On peut supposer qu'il a eu une place importante en son temps, mais rapidement éclipsée comme celle de beaucoup d'autres, Stifel ou Nuñez, par les grands maîtres dont les découvertes occupent rapidement tout l'espace, Stevin et surtout Viète comme algébristes, Bachet et surtout Fermat comme fondateurs de la théorie des nombres.



GVLIELMI GOSSELINI

CADOMENSIS DE ARTE MAGNA,
*seu de occulta parte numerorum,
quæ & Algebra, & Amul-
cabala vulgo appel-
latur.*

LIBER TERTIVS.

De Aequatione Cap. I.



VM hæc ars præstantissima
in equatione & laterum e-
ductione tota fere confi-
stat, præcedentibus vero
libris tum de laterum inuestigatione,
tum de iis quæ ante æquationem præ-
mittenda erant dixerimus, opportu-
num visum est his omnibus expeditis

ANNEXE 1

Transcription des résolutions en écriture symbolique actuelle

Dans le cadre de l'écriture symbolique choisie, nous tentons de rendre le plus fidèlement possible les étapes des calculs, ainsi qu'elles sont explicitées par Gosselin lui-même, sans ajout ni omission.

Livre III. L'égalisation simple. Ch. III.

L'utilisation de l'égalisation simple. Problème I.

[1] Le premier a reçu : $1x$

$$1x + (2x + 4) + (6x + 6) + (12x + 5) = 21x + 15$$

$$21x + 15 = 120$$

$$21x = 105$$

$$1x = 5 \quad 2x + 4 = 14 \quad 2x + 6 = 36 \quad 12x + 5 = 65$$

$$5 + 14 + 36 + 65 = 120$$

Problème II.

[2] Le second a : $1x^2$. S'il donne $1x$ au premier, il lui reste : $1x^2 - 1x$, le premier a alors $(1x^2 - 1x) + 3$ et avant il avait : $1x^2 - 2x + 3$.

Si le premier donne : $\sqrt{1x^2 - 2x + 3}$, il lui reste : $1x^2 - 2x + 3 - \sqrt{1x^2 - 2x + 3}$ et le second a : $1x^2 + \sqrt{1x^2 - 2x + 3}$.

$$1x^2 - 2x + 8 - \sqrt{1x^2 - 2x + 3} = 1x^2 + \sqrt{1x^2 - 2x + 3}$$

$$\sqrt{1x^2 - 2x + 3} = 8 - 2x - \sqrt{1x^2 - 2x + 3}$$

$$8 - 2x = 2\sqrt{1x^2 - 2x + 3}$$

$$\sqrt{4x^2 - 8x + 12} = 8 - 2x$$

$$4x^2 - 8x + 12 = 64 - 32x + 4x^2$$

$$52 - 32x = -8x$$

$$52 - 24x = 0$$

$$52 = 24x$$

$$1x = 2\frac{1}{6}$$

L'avoir du second est : $1x^2 = 4\frac{25}{36}$, celui du premier est : $1x^2 - 2x + 3 = 3\frac{13}{36}$

La seconde égalisation, que l'on nomme composée. Ch. IIII.

La démonstration arithmétique de la première règle

[3] $10x + 1x^2 = 56$

On prend A comme valeur de 1x.

$$A(10 + A) = 10A + A^2 = 56$$

II, 1 $10A = (5 + 5)A = 2 \times 5 \times A$

II, 4 $(5 + A)^2 = 25 + A^2 + 2 \times 5 \times A$

$$2 \times 5 \times A + A^2 = 56$$

$$(5 + A)^2 = 25 + 56$$

$$(5 + A)^2 = 81$$

$$5 + A = 9$$

$$A = 4$$

$$10 \times 4 + 4^2 = 56$$

L'utilisation de la première règle. Problème.

[4] $a + b = 1x \quad 48 + 1x = a^2 + b^2 \quad 31 - 1x = ab$

$$62 - 2x = 2ab$$

II, 4 $48 + 1x + 62 - 2x = (a + b)^2$

$$110 - 1x = x^2$$

$$110 = 1x^2 + 1x \quad 1x = 10$$

$$a + b = 10 \quad ab = 21$$

C'est le partage de 10 en deux parties de produit 21. Les nombres sont 3 et 7.

La démonstration arithmétique de la seconde règle.

[5] $6x + 16 = 1x^2$

Soit $6+A$ le nombre inconnu.

$$(6 + A)^2 = 6(6 + A) + 16$$

II, 1 $(6 + A)^2 = 6(6 + A) + A(6 + A)$

$$6(6 + A) + 16 = 6(6 + A) + A(6 + A)$$

$$16 = A(6 + A)$$

C'est le partage de $(6 + 2A)$ en deux parties de produit 16.

Or $(6 + 2A) = 2(3 + A)$

II, 5 $A(6 + A) + [(6 + A) - (3 + A)]^2 = (3 + A)^2$

$$16 + 9 = (3 + A)^2$$

$$25 = (3 + A)^2$$

$$5 = 3 + A$$

$$A = 2 \quad 1x = 8$$

$$6 \times 8 + 16 = 8^2$$

L'utilisation de la seconde règle. Problème.

[6] On cherche x tel que les nombres $1x$ et $(12 - 1x)$ vérifient :

$$1x^2 + (12 - 1x) = 54$$

$$1x^2 + 12 = 54 + 1x$$

$$42 + 1x = 1x^2$$

$$1x = 7$$

$$7^2 + 5 = 54$$

La démonstration arithmétique de la troisième règle.

[7] $32 + 1x^2 = 18x$

Soit B la valeur de $1x$; $B < 18$ donc $18 = B + (18 - B)$

$$18B = B^2 + 32$$

$$B[B + (18 - B)] = B^2 + 32$$

II, 1 $B^2 + B(18 - B) = B^2 + 32$

$$B(18 - B) = 32$$

C'est le partage de 18 en deux parties de produit 32 ; pour B on peut prendre 2 ou 16.

L'utilisation de la troisième règle. Problème.

[8] On cherche x tel que les deux nombres $1x$ et $(1x + 7)$ vérifient :

$$1x^2 + (1x + 7)^2 = 169$$

$$2x^2 + 14x + 49 = 169$$

$$2x^2 + 14x = 120$$

$$1x^2 + 7x = 60$$

$$1x = 5 \quad 7 + 5 = 12$$

On cherche y tel que les deux nombres $1y$ et $(17 - 1y)$ vérifient :

$$1y^2 + (17 - 1y)^2 = 169$$

$$2y^2 - 34y + 289 = 169$$

$$34y = 2y^2 + 120$$

$$17y = 1y^2 + 60$$

Les nombres cherchés sont 5 et 12.

L'égalisation proportionnelle à la seconde. Ch. V.

L'utilisation de cette égalisation. Problème.

[9] On cherche $1x^2$ tel que $(20 - 1x^2)$ <soit un carré et> vérifie :

$$1x\sqrt{(20 - 1x^2)} = 8$$

$$\sqrt{20x^2 - 1x^4} = 8$$

$$20x^2 - 1x^4 = 64$$

$$20x^2 = 64 + 1x^4$$

On trouve les carrés 4 et 16, et on a $2 \times 4 = 8$.

La réduction des carrés à un seul carré. Ch. VI.

Problème.

[10] On cherche x tel que :

$$1x^2 + (12 - 1x)^2 = 1x(12 - 1x) + 48$$

$$144 - 24x + 2x^2 = 12x - 1x^2 + 48$$

$$96 - 24x + 2x^2 = 12x - 1x^2$$

$$3x^2 + 96 = 36x$$

$$1x^2 + 32 = 12x$$

Les nombres cherchés sont 4 et 8.

Comment l'on ramène à ces règles trois quantités, dont la troisième n'est pas dépourvue de valeur. Ch. VII.

Problème

[11] On cherche x tel que les quatre nombres en progression géométrique $1x$, $1x^2$, $1x^3$, $1x^4$ vérifient :

$$(3x^3 - 2x^2)^2 = (1x + 1x^2)(1x^3 + 1x^4)$$

$$9x^6 - 12x^5 + 4x^4 = x^4 + 2x^5 + 1x^6$$

$$8x^6 - 12x^5 + 3x^4 = 2x^5$$

$$8x^6 + 3x^4 = 14x^5$$

$$14x = 8x^2 + 3$$

$$\frac{7}{4}x = 1x^2 + \frac{3}{8} \quad 1x = \frac{3}{2}$$

Les nombres $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{8}$, $\frac{81}{16}$ répondent à la question : le nombre $\left(3 \times \frac{27}{8} - 2 \times \frac{9}{4}\right)$ est moyen proportionnel entre $\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right)$ et $\left(\frac{27}{8} + \frac{81}{16}\right)$.

Les innombrables manières de résoudre ces égalisations. Ch. VIII.

[12] Gosselin attribue à Nuñez un algorithme de calcul que, revu et corrigé, on peut aujourd'hui écrire ainsi :

Pour $x^2 = bx + c$,
$$x = \frac{1}{k} \left(k \frac{b}{2} + \sqrt{k^2 \left(\frac{b}{2} \right)^2 + k^2 c} \right)$$

Pour $x^2 + bx = c$, $x = \frac{1}{k} \left(\sqrt{k^2 c + k^2 \left(\frac{b}{2} \right)^2} - k \frac{b}{2} \right)$

Pour $x^2 + c = bx$, $x = \frac{1}{k} \left(k \frac{b}{2} \pm \sqrt{k^2 \left(\frac{b}{2} \right)^2 - k^2 c} \right)$

le coefficient k pouvant prendre n'importe quelle valeur, positive évidemment, entière semble-t-il.

Comment on doit faire l'égalisation dans les fractions et les lés. Ch. IX.

[13] * $\frac{20}{1x} = \frac{30}{1x^2}$ $20x^2 = 30x$ $20x = 30$

* $12 = \frac{20x}{1x^2}$ $\frac{12}{1} = \frac{20x}{1x^2}$ $20x = 12x^2$ $20 = 12x$

* $\frac{6}{1x} = \sqrt{7}$ $\frac{36}{1x^2} = 7$ $7x^2 = 36$

* $\sqrt{7} = \sqrt{3x}$ $7 = 3x$

* $\sqrt{9} = \sqrt{3x + \sqrt{9}}$ $9 = 3x + \sqrt{9}$ $\sqrt{9} = 9 - 3x$ $9 = 81 - 54x + 9x^2$

$81 + 9x^2 = 9 + 54x$ $72 + 9x^2 = 54x$

L'utilisation de cette égalisation. Problème I.

[14] $\frac{1x}{6} = \frac{1x+3}{12}$ $12x = 6x + 18$ $6x = 18$ $1x = 3$

Problème II.

[15] On partage 77 en quatre parties : $1x$, $\frac{2x}{3}$, $\frac{2x}{4}$ et $\frac{2x}{5}$.

$$1x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{4} + \frac{2x}{5} = \frac{77x}{30}$$

$$\frac{77x}{30} = 77$$

$$2310 = 77x$$

$$1x = 30$$

30, 20, 15, 12 sont les quatre parties.

Problème III.

[16] Soit $1x$ le prix d'une aune de drap vert, $(62 - 6x)$ le prix de quatre aunes de drap noir, $(116 - 12x)$ le prix de sept aunes de drap noir.

$$\frac{62-6x}{4} = \frac{116-12x}{7}$$

$$434 - 42x = 464 - 48x$$

$$30 = 6x$$

$$1x = 5$$

5 est le prix de l'aune de drap vert,

$$\frac{62 - 6 \times 5}{4} = \frac{32}{4} = 8 ; 8 \text{ est le prix de l'aune de drap noir.}$$

La troisième égalisation. Ch. X.

[17] Gosselin explique que si l'on sait résoudre l'équation cubique sans terme en x , on sait aussi résoudre l'équation cubique sans terme en x^2 .

Ce que, en termes actuels, on peut préciser ainsi :

si α est solution de $x^3 + ax^2 = b^2$ alors $\sqrt{\alpha + a}$ est solution de $x^3 = ax + b$

si α est solution de $x^3 + b^2 = ax^2$ alors $\sqrt{a - \alpha}$ est solution de $x^3 + b = ax$

si α est solution de $x^3 = ax^2 + b^2$ alors $\sqrt{\alpha - a}$ est solution de $x^3 + ax = b$

L'égalisation de Diophante avec supposition. Ch. XI.

[18] * On demande que $6x^2 + 16$ soit un carré, par exemple

celui de $(2x + 4)$:

$$4x^2 + 16x + 16 = 6x^2 + 16 \qquad 2x^2 = 16x \qquad 1x = 8$$

ou celui de $(3x - 4)$:

$$9x^2 - 24x + 16 = 6x^2 + 16 \qquad 3x^2 = 24x \qquad 1x = 8, \text{ à nouveau.}$$

* On demande que $6x + 8$ soit un carré, par exemple

$$9 : \qquad 6x + 8 = 9 \qquad 6x = 1 \qquad 1x = \frac{1}{6}$$

$$\text{ou } 36 : \qquad 6x + 8 = 36 \qquad 6x = 28 \qquad 1x = 4\frac{2}{3}$$

* On demande que $6x^2 + 12x + 16$ soit un cube, par exemple

celui de $(1x + 2)$:

$$6x^2 + 12x + 16 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \qquad 1x^3 = 8 \qquad 1x = 2$$

L'utilisation de cette égalisation. Problème I.

[19] On peut chercher $1x$ pour que les trois nombres en progression arithmétique $(1x^2 - 4)$, $(1x^2 + 4x)$ et $(1x^2 + 8x + 4)$ soient des carrés s'ils sont augmentés de 4. Il reste à faire que $(1x^2 + 8x + 8)$ soit un carré, par exemple celui de $(1x - 8)$:

$$1x^2 - 16x + 64 = 1x^2 + 8x + 8$$

$$24x = 56$$

$$1x = \frac{7}{3}$$

$\frac{13}{9}$, $\frac{133}{9}$, $\frac{253}{9}$ sont trois nombres qui satisfont à la question.

Problème II

[20] On peut chercher $1x$ pour que la somme des trois nombres $1x^2$, $(2x + 1)$ et $(4x + 4)$ soit un carré, par exemple celui de $(1x - 3)$:

$$1x^2 - 6x + 9 = 1x^2 + 6x + 5$$

$$12x = 4$$

$$1x = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{9}$, $\frac{15}{9}$, $\frac{48}{9}$ sont trois nombres qui satisfont aux conditions.

Problème III

[21] Les quatre nombres $1x^2$, $(2x + 6)$, $(2x + 2)$ et $(2x + 1)$ satisfont trois des quatre conditions. Il reste à choisir $1x$ pour que $(1x^2 - 2x - 6)$ soit un carré, par exemple celui de $(1x - 2)$:

$$1x^2 - 4x + 4 = 1x^2 - 2x - 6$$

$$2x = 10$$

$$1x = 5$$

25, 16, 12, 11 sont quatre nombres qui répondent à la question.

Problème IIII

Trouver un carré et un nombre congruent

[22] On cherche $1x$ pour que $1x^2$, $(1x^2 + 12x + 36)$ et $(1x^2 + 24x + 72)$ soient des carrés équidistants. Il suffit que $(1x^2 + 24x + 72)$ soit un carré, par exemple celui de $(1x + 10)$:

$$1x^2 + 20x + 100 = 1x^2 + 24x + 72$$

$$4x = 28$$

$$1x = 7$$

49, 169, 289 sont des carrés équidistants ; leur distance est 120 ; 169 et 120 sont un carré et un nombre congruents.

Problème V :

Le carré étant donné, retrouver le nombre congruent

[23] On cherche $1x$ pour que $1x$, $2x$, $(20 - 2x)$ et $(20 + 1x)$ soient quatre nombres proportionnels :

$$1x(20 + 1x) = 2x(20 - 2x)$$

$$40x - 4x^2 = 20x + 1x^2$$

$$20x = 5x^2$$

$$1x = 4$$

$4 \times 24 = 8 \times 12 = 96$; 96 est le nombre congruent de 100.

Ou encore : $10^2 = 8^2 + 6^2$ et $2 \times 8 \times 6 = 96$

$$8^2 + 6^2 + 2 \times 8 \times 6 = (8 + 6)^2 \quad \text{donc} \quad 10^2 + 96 = 14^2$$

$$8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 = (8 - 6)^2 \quad \text{donc} \quad 10^2 - 96 = 2^2$$

96 est le nombre congruent du nombre carré 100.

La double égalité de Diophante. Ch. XII.

[24] On cherche $1x$ pour que $(1x + 2)$ et $(1x + 3)$ soient des carrés :

$$1x + 2 = u^2$$

$$1x + 3 = v^2$$

$$1 = v^2 - u^2$$

$$4 \times \frac{1}{4} = (v + u)(v - u)$$

$$v + u = 4$$

$$v - u = \frac{1}{4}$$

$$u = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{8}$$

$$v = \frac{1}{2} \left(4 + \frac{1}{4} \right) = \frac{17}{8}$$

$$1x + 2 = u^2 = \frac{225}{64}$$

$$1x + 3 = v^2 = \frac{289}{64}$$

$$1x = \frac{97}{64}$$

$$1x = \frac{97}{64}$$

L'utilisation de cette égalisation. Problème.

Un nombre congruent étant donné, retrouver le carré

[25] On cherche $1x$ pour que :

$$1x^2 + 96 = u^2$$

$$1x^2 + 192 = v^2$$

$$96 = v^2 - u^2$$

$$4 \times 24 = 6 \times 16 = 8 \times 12 = (v - u)(v + u)$$

$$v - u = 8$$

$$v - u = 4$$

$$v + u = 12$$

$$v + u = 24$$

$$v = 10 \quad v^2 = 100$$

$$v = 14 \quad v^2 = 196$$

$$u = 10 \quad u^2 = 100$$

$$100 < 192$$

$$192 < 196 < 96 + 192$$

$$1x^2 + 192 = 196$$

$$1x^2 + 96 = 100$$

$$1x^2 = 4 \quad 1x^2 + 96 = 100$$

Recherche du côté d'un nombre polygonal donné quelconque. Ch. XIII.

[26] $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = 21$

$$1x^2 + 1x = 42$$

$$1x = 6$$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 51$$

$$1x^2 - \frac{1}{3}x = 34$$

$$1x = 6$$

Livre IIII. La quantité absolue. Ch. I.

Problème I

[27]
$$\begin{cases} (1) \quad 1A + 1B = 100 \\ (2) \quad \frac{1}{4}A = \frac{1}{6}B + 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2) \quad 1A = \frac{4}{6}B + 80 \\ (1) \& (2) \quad \frac{5}{3}B + 80 = 100 \end{cases}$$

$$\frac{5}{3}B = 20 \quad 1B = 12$$

$$1A = 88$$

[28]

Problème II

$$\begin{cases} (1) & 1A + 1B + 1D = 100 \\ (2) & 1A + 1B = 3D \\ (3) & 1D + 1B = 4A \end{cases}$$

$$(1) \& (2) \rightarrow (2') \quad 4D = 100 \quad 1D = 25$$

$$(1) \& (3) \rightarrow (3') \quad 5A = 100 \quad 1A = 20$$

$$(1) \& (2') \& (3') \quad 1B = 55$$

[29]

Problème III

$$\begin{cases} (1) & 1A + 1B + \frac{1}{2}C = 100 \\ (2) & 1B + 1C + \frac{1}{3}A = 100 \\ (3) & 1A + 1C + \frac{1}{4}B = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & 2A + 2B + 1C = 200 \\ (2) & 3B + 3C + 1A = 300 \\ (3) & 4A + 4C + 1B = 400 \end{cases}$$

$$(2) \quad 6B + 6C + 2A = 600$$

$$(2) \& (1) \rightarrow (1') \quad 4B + 5C = 400$$

$$(2) \quad 12B + 12C + 4A = 1200$$

$$(2) \& (3) \rightarrow (3') \quad 11B + 8C = 800$$

$$(3') \quad 55B + 40C = 4000$$

$$(1') \quad 32B + 40C = 3200$$

$$(1') \& (3') \quad 23B = 800 \quad 1B = 34 \frac{18}{23}$$

$$(1') \quad 1C = 52 \frac{4}{23}$$

$$(1) \quad 1A = 39 \frac{3}{23}$$

[30]

Problème IIII

$$\begin{cases} (1) & 1A + \frac{2}{3}B + \frac{2}{3}C = 100 \\ (2) & 1B + \frac{3}{4}A + \frac{3}{4}C = 100 \\ (3) & 1C + \frac{4}{5}A + \frac{4}{5}B = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & 3A + 2B + 2C = 300 \\ (2) & 4B + 3A + 3C = 400 \\ (3) & 5C + 4A + 4B = 500 \end{cases}$$

$$(2) \& (1) \rightarrow (1') \quad 2B + 1C = 100$$

$$(2) \& (3) \rightarrow (3') \quad 1A + 2C = 100$$

$$\begin{array}{lll}
(1') & 4B + 2C = 200 \\
(2) \& (1') \rightarrow (2') & 3A + 1C = 200 \\
(3') & 3A + 6C = 300 \\
(3') \& (2') & 5C = 100 & 1C = 20 \\
(3') & & 1A = 60 \\
(1') & & 1B = 40
\end{array}$$

Problème V

[31]

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l}
(1) \ 1A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D = 17 \\
(2) \ 1B + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D = 12 \\
(3) \ 1C + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}D = 13 \\
(4) \ 1D + \frac{1}{6}A + \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}C = 13
\end{array} \right. \\
\left\{ \begin{array}{l}
(1) \ 2A + 1B + 1C + 1D = 34 \\
(2) \ 1A + 3B + 1C + 1D = 36 \\
(3) \ 1A + 1B + 4C + 1D = 52 \\
(4) \ 1A + 1B + 1C + 6D = 78
\end{array} \right. \\
(3) + (4) & 2A + 2B + 5C + 7D = 130 \\
(3) + (4) - (1) \rightarrow (2') & 1B + 4C + 6D = 96 \\
(2) + (4) & 2A + 4B + 2C + 7D = 114 \\
(2) + (4) - (1) \rightarrow (3') & 3B + 1C + 6D = 80 \\
(2) + (3) & 2A + 4B + 5C + 2D = 88 \\
(2) + (3) - (1) \rightarrow (4') & 3B + 4C + 1D = 54 \\
(2') & 3B + 12C + 18D = 288 \\
(2') - (3') \rightarrow (3'') & 11C + 12D = 208 \\
(2') - (4') \rightarrow (4'') & 8C + 17D = 234 \\
(4'') & 88C + 187D = 2574 \\
(3'') & 88C + 96D = 1664 \\
(4'') - (3'') & 91D = 910 & 1D = 10 \\
(3'') & & 1C = 8 \\
(4') & & 1B = 4 \\
(1) & & 1A = 6
\end{array}$$

La quantité sourde. Ch. II.

Problème I

[32]
$$\begin{cases} (1) \left(\frac{1}{2}y + 2\right) + 1x = 9 \left(\frac{1}{2}y - 2\right) \\ (2) \left(\frac{1}{3}x + 3\right) + 1y = 3 \left(\frac{2}{3}x - 3\right) \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}y + 2 + 1x = \frac{9}{2}y - 18$$

$$1x + 20 = 4y$$

$$1y = \frac{1}{4}x + 5$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{3}x + 3\right) + \left(\frac{1}{4}x + 5\right) = 2x - 9$$

$$\frac{17}{12}x = 17$$

$$1x = 12$$

$$1y = \frac{1}{4} \times 12 + 5 = 8$$

Problème II

[33] On cherche trois nombres : $1x$, $1y$ et $(1x + 1y - 20)$, tels que :

$$(1) \quad 1y + (1x + 1y - 20) = 1x + 30$$

$$2y = 50$$

$$1y = 25$$

Les trois nombres sont $1x$, 25 et $(1x + 25 - 20) = (1x + 5)$, tels que :

$$(2) \quad 1x + (1x + 5) = 25 + 40$$

$$2x = 60$$

$$1x = 30$$

Les trois nombres sont 30, 25 et 35.

Problème III

[34] On cherche trois nombres : $1x$, $1y$ et $\left[\frac{5}{3}(1y + 8) - 1x\right]$, tels que :

$$(1) \quad 1y + \left(\frac{5}{3}y + \frac{40}{3} - 1x\right) = 3(1x + 8)$$

$$\frac{8}{3}y = 4x + \frac{32}{3}$$

$$1y = \frac{3}{2}x + 4$$

Les trois nombres sont : $1x$, $\left(\frac{3}{2}x + 4\right)$ et $\left[(3x + 24) - \left(\frac{3}{2}x + 4\right)\right] = \left(\frac{3}{2}x + 20\right)$, tels que :

$$(2) \quad \left(\frac{3}{2}x + 20\right) + 8 = 1x + \left(\frac{3}{2}x + 4\right)$$

$$\frac{3}{2}x + 28 = \frac{5}{2}x + 4$$

$$1x = 24$$

$$\frac{3}{2}x + 4 = 40$$

$$\frac{3}{2}x + 20 = 56$$

Les trois nombres sont 25, 40 et 56

Problème III

[35] On cherche quatre nombres, $1x$ le premier, $1y$ la somme du second et du troisième, $(1x + 1y - 20)$ le quatrième, tels que :

$$(1) \quad 1y + (1x + 1y - 20) = 1x + 30$$

$$2y = 50$$

$$1y = 25$$

Connaissant la somme 25 du second nombre et du troisième, on peut maintenant chercher les quatre nombres, $1x$ le premier, $1y$ le second, $(25 - 1y)$ le troisième et $(1x + 25 - 20) = (1x + 5)$ le quatrième, tels que :

$$(2) \quad (25 - 1y) + (1x + 5) + 1x = 1y + 40$$

$$2x - 1y + 30 = 1y + 40$$

$$2y + 10 = 2x$$

$$1y = 1x - 5$$

Les quatre nombres cherchés sont donc alors : $1x$, $(1x - 5)$, $(30 - 1x)$ et $(1x + 5)$, tels que :

$$(3) \quad (1x + 5) + 1x + (1x - 5) = (30 - 1x) + 50$$

$$3x = 80 - 1x$$

$$1x = 20$$

Le premier nombre est 20, le second $(20 - 5) = 15$, le troisième $(30 - 20) = 10$ et le quatrième $(20 + 5) = 25$.



GVLIELMI GOSSE-LINI
 CADOMENSIS DE ARTE MAGNA,
 seu de occultâ parte numerorum,
 quæ & Algebra, & Almu-
 cabala vulgo appel-
 latur.

LIBER QVARTVS.

Cap. I.

HACTENVS illa quæ sub
 Algebræ calculum cadere
 posse videbantur explicu-
 imus, immensumque adco-
 opustres in libros congestimus, su-
 perest aliud ratiocinandi genus du-
 plex: vnum quantitatis simplicis quæ
 absoluta vulgo dicitur: Alterum qua-
 ritatis surdæ, vtrumque quadantenus

MAGNA LIBER IIII. 80
 Algebræ simile, vna tamen hypothesi
 non absolutur præsertim simplex, sed
 duabus pluribus. In quarum regu-
 larum declaratione rationem a Luca,
 Stephano, Cardano, Buteone, aliisque
 communiter institutam non sequar, cū
 sit ipsa non fallax solum, sed & ple-
 runque falsa. Ergo vtrumque ratioci-
 nandi genus quanta poterimus facili-
 tate sequentibus problematis perse-
 quemur.

De quantitate Absoluta. Cap. II.

Problema I.

PARTIAMUR 100 in duas eiusmodi
 partes, vt prioris quadrans poste-
 rioris sextantem 20 superet.

Sint illæ partes, A, 1 B, & sic 1 A
 1 B erunt æqualia 100, & $\frac{1}{4}$ A æqua-
 lis $\frac{1}{6}$ B P 20, atque adeo 1 A
 æquale $\frac{34}{6}$ B P 80, & quia 1 A 1 B
 sunt æqualia 100, pro 1 A po-
 namus $\frac{4}{6}$ B P 80, erunt $\frac{1}{3}$ A P 80

æqualia 100, & sublato superfluo $\frac{1}{3}$ A
 æquales 20, sicque stat æquatio, partic-
 mur 20 in $\frac{1}{3}$, quotus erit 12 primus
 numerus A, quare & secundus B 88.
 Hoc aliter Diophátus ex Algebra sex-
 to problemate libri primi.

Problema. II.

Partiamur 100 in tres partes, vt pri-
 ma cum secunda sit triplum tertiæ, ter-
 tia cum secunda sit primæ quadru-
 plum.

Sint ille partes 1 A 1 B 1 D æquales
 100, & vt precipit quæstio, 1 A 1 B æ-
 qualia 3 D, 1 B 1 D æqualia 4 A, pro 1
 A 1 B ponamus 3 D, erunt 4 D æqualia
 100, atque adeo D 25. hoc est pars vlti-
 ma, pro 1 B 1 D ponamus 4 A, erunt 5
 A æqualia 100, fit 1 A & prima pars 20,
 secunda ergo erit 100 M 25 M 20 hoc
 est 55.

Problema. III.

Vestigemus tres numeros vt primus
 8x

& secundus cum semisse tertiæ faciant
 100, secundus & tertius eum triente pri-
 mi faciant 100, primus & tertius cum
 quadrante secundi faciant 100.

Sint illi numeri 1 A 1 B 1 C, sicque
 erunt 1 A 1 B $\frac{1}{2}$ C æqualia 100, 1 B 1 C
 $\frac{1}{3}$ A æqualia 100, 1 A 1 C $\frac{1}{4}$ B æqualia
 100, Reducamus has æquationes ad nu-
 meros integros, erunt 2 A 2 B 1 C æqua-
 lia 200, 3 B 3 C 1 A æqualia 300, 4 A 4
 C 1 B æqualia 400, multiplicemus secū-
 dam æquationem in 2, sient 6 B 6 C 2
 A æqualia 600, hinc tollatur prima æ-
 quatio, restabunt 4 B 5 C æqualia 400,
 rursus ducatur eadem æquatio secun-
 da in 4, vt iam sint 12 B 12 C 4 A æqua-
 lia 1200, tollamus hinc tertiam æqua-
 tionem quæ fuit æqualis 400, resta-
 bunt 11 B 8 C æqualia 800, ducamus 11
 B & 8 C in 5, vt fiant 55 B 40 C æqua-
 lia 4000, ducamus etiam 4 B 5 C in 8,
 vt fiant 32 B 40 C æqualia 3200, tolla-
 L

mus $32 B$ $40 C$ æqualia 3200 ex $55 B$ $40 C$ æqualibus 4000 , restabunt $23 B$ æqualia 800 , sicque stat æquatio, partiemur 800 in 23 , quotus erit $34\frac{18}{23}$ valor B , hoc est secundus numerus, & quia $4 B$ $5 C$ æquantur 400 , tollamus quadruplum B , hoc est $139\frac{3}{23}$ ex 400 , restabunt $260\frac{20}{23}$ æqualia $5 C$, partiemur ergo $260\frac{20}{23}$ in 5 , quotus erit $52\frac{4}{23}$ valor C , & tertius numerus, iam quoniam $2 A$ $2 B$ $1 C$ sunt æqualia 200 , tollamus $2 B$ $1 C$, hoc est $121\frac{17}{23}$, restabunt $78\frac{6}{23}$ æqualia $2 A$, partiamur $78\frac{6}{23}$ in 2 , quotus erit valor A , est igitur primus ex quæsitis numeris $39\frac{1}{23}$, secundus $34\frac{18}{23}$, tertius $52\frac{4}{23}$.

Problema III.

Vestigemus tres numeros, ut primus cum beffe secundi & tertii faciat 100 , secundus cum dodrante primi & tertii faciat 100 , tertius cum $\frac{4}{5}$ primi & se-

cundi faciat 100 .

Sint illi tres numeri $1 A$ $1 B$ $1 C$, & sic $1 A$ $\frac{2}{3} B$ $\frac{2}{3} C$ æqualia erunt 100 , $1 B$ $\frac{1}{4} A$ $\frac{3}{4} C$ æqualia 100 , $1 C$ $\frac{4}{5} A$ $\frac{4}{5} B$ æqualia 100 , reuocemus has equationes ad integra ut sint $3 A$ $2 B$ $2 C$ æqualia 300 , $4 B$ $3 A$ $3 C$ æqualia 400 , $5 C$ $4 A$ $4 B$ æqualia 500 , tollamus primam æquationem reductam ex secunda, restabunt $2 B$ $1 C$ æqualia 100 , tollamus ex tertia æquatione secundam, restabunt $1 A$ $2 C$ æqualia 100 , duplicemus $2 B$ $1 C$ æqualia 100 , existent $4 B$ $2 C$ æqualia 200 , tollamus ea ex secunda æquatione, restabunt $3 A$ $1 C$ æqualia 200 , triplicemus $1 A$ $2 C$ æqualia 100 , exurgent $3 A$ $6 C$ æqualia 300 , tollamus $3 A$ $1 C$ æqualia 200 , supererunt $5 C$ æqualia 100 , diuidemus 100 in 5 , quotus erit 20 , valor C & tertius numerus, quoniam $1 A$ $2 C$ sunt æqualia 100 , tollamus $2 C$, hoc est 40 , resta-

L ii

bunt 60 æqualia 1 A, quare primus est 60, iam vero 2 B 1 C æqualia fuerunt 100, tollamus 1 Choc est 20, restabunt 80 æqualia 2 B, & 1 B est 40, suntque tres numeri quæsti 60 40 20, quibus vestigatis opus fuit.

Problema V.

Inueniamus quatuor numeros quorum primus cum semisse reliquorum faciat 17, secundus cum aliorum triente 12, tertius cum aliorum quadrante 13, quartus item cum aliorum sextante 13.

Sint illi quatuor A B C D, & sint 1 A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{2}$ D æqualia 17, 1 B $\frac{1}{3}$ A $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{3}$ D æqualia 12, 1 C $\frac{1}{4}$ A $\frac{1}{4}$ B $\frac{1}{4}$ D æqualia 13, 1 D $\frac{1}{6}$ A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{6}$ C æqualia 13, reuocentur hæc ad integros numeros, existant 2 A 1 B 1 C 1 D æqualia 34, 1 A 3 B 1 C 1 D æqualia 36, 1 A 1 B 4 C 1 D æqualia 52, 1 A 1 B 1 C 6 D æqualia 78,

addamus duas vltimas equationes tertiam scilicet & quartam, existant 2 A 2 B 5 C 7 D æqualia 130, tollamus hinc primam, restabunt 1 B 4 C 6 D æqualia 96, addamus quartam & secundam, fient 2 A 4 B 2 C 7 D æqualia 114, tollamus hinc primam, supererunt 3 B 1 C 6 D æqualia 80, addamus secundam & tertiam equationem, fient 2 A 4 B 5 C 2 D æqualia 88, tollamus primam, restabunt 3 B 4 C 1 D æqualia 54, iam vero triplicemus 1 B 4 C 6 D quæ fuerūt æqualia 96, fient 3 B 12 C 18 D æqualia 288, tollamus hinc 3 B 1 C 6 D æqualia 80, restabunt 11 C 12 D æqualia 208, subducamus iterum ex eadem triplicata æquatione 3 B 4 C 1 D æqualia 54, restabunt 8 C 17 D æqualia 234, multiplicemus hanc equationem in 11, fient 88 C 187 D æqualia 2574, ducamus etiam 11 C 12 D æqualia 208, in 8, existant 88 C 96 D æqualia

lia 1664, tollamus 88 C 96 D æqualia 1664 ex 88 C 187 D equalibus 2574, restabunt 91 D æqualia 910, sicque stat æquatio, partiemur 910 in 91, quotus erit 10 valor D, est ergo 10 vltimus numerus ex quæsitis, & quoniam 11 C 12 D erant æqualia 208, tollamus 12 D hoc est 120, restabunt 88 æqualia 11 C, diuidemus 88 in 11, quotus erit 8 valor C & tertius numerus, sed etiam 3 B 4 C 1 D æqualia sunt 54, tollamus hinc 4 C 1 D, hoc est 10 & 32, nempe 42, restabunt 12 æqualia 3 B, est que B & secundus numerus 4, iam vero 2 A 1 B 1 C 1 D æquantur 34, tollamus 1 B nempe 4, 1 C 8, 1 D 10, hoc est 22, restabunt 12 æqualia 2 A, quare 1 A & primus numerus est 6, suntque quatuor numeri 6, 4, 8, 10, quales vestigasse oportuit.

Hoc ipsum problema triplici via conatur Buteo conficere, sed ne vna

quidem, siquidem vir doctissimus non animaduertit variarum æquationum summam esse necessariam, præsertim cum quatuor exponuntur numeri vel amplius, eandem ipsam æquationem nunc duplicat, nunc triplicat, quo fit, vt sicut vnā tantum sumit, ita non possit ad simplicem æquationem descendere, sed in composita quadam & fallaci inuoluatur, quæ quam longa a vero absit vnusquisque viderit.

DE QVANTITATE
furda. Cap. 11.

Problema 1.

DVos numeros in ea ratione perquiramus, vt pars secundi dimidia cum 2 adiecta ad priorem fit noncupla ad secundi reliquū, & triens
L iiii

prioris cum 3 additus ad secundum triplus sit ad ipsius prioris residuum.

Sit prior numerus 1 L, secundus 1 q, atque sic $\frac{1}{2}$ q P 2 P 1 L æqualia sunt residui noncuplo nempe $\frac{2}{3}$ q M 18, & addito quod deficit subductoque superfluo 1 L P 20 æqualia 4 q, fit 1 q, $\frac{1}{4}$ L P 5, iam prior vt supra fit 1 L, secundus erit $\frac{1}{4}$ L P 5, atque adeo $\frac{1}{4}$ L P 3 $\frac{1}{4}$ L P 5 æqualia 2 L M 9, & addito quod deficit subductoque superfluo $\frac{17}{12}$ L æquales 17, fit vnum latus 12, & tantus est prior numerus, secundus $\frac{1}{4}$ L P 5 hoc est 8.

Problema 11.

Vestigemus tres cuiusmodi numeros, vt primus & secundus superent tertium 20, secundus & tertius primum 30, primus & tertius secundum 40.

Sit primus 1 L, secundus 1 q, tertius ergo erit 1 L P 1 q M 20, sed secundus &

tertius superant primum 30, quare 1 L P 2 q M 20 æqualia sunt 1 L P 30, & sublato superfluo additoque quod deficit 2 q æquales 50, fit 1 q 25. Iam sit primus vt ante 1 L, secundus 25, tertius ergo 1 L P 25 M 20, hoc est 1 L P 5, sed & tertius & primus superant secundum 40, quare 2 L P 5 æqualia sunt 65, & sublato superfluo 2 L æqualia 60, fit vnum latus 30, primus itaque est 30, secundus 25, tertius 30 P 5, hoc est 35.

Problema 111.

Inueniamus tres numeros quorum primus cum 8 fit aliorum triens, secundus cum 8 fit aliorum $\frac{3}{4}$, tertius cum 8 fit reliquis equalis.

Sit primus 1 L, addamus 8, existent 1 L P 8, triens, videlicet reliquorum, atque adeo illorum summa 3 L P 24, sit iam secundus 1 q, & sic 1 q P 8 erunt tres quintæ reliquorum, atque adeo sum-

ma illorum $\frac{1}{3}q$ P $\frac{4}{3}$, sed primus fuit 1 L, tollamus hinc, restabunt $\frac{1}{3}q$ P $\frac{4}{3}$ M 1 L pro tertio, addamus ad 1 q qui secundus factus est numerus, existent $\frac{8}{3}q$ P $\frac{4}{3}$ M 1 L summa secundi & tertij, sed & illa fuit 3 L P 24, quare $\frac{8}{3}q$ P $\frac{4}{3}$ M 1 L æqualia sunt 3 L P 24, & sublato superfluo additoque quod deficit $\frac{8}{3}q$ æquales 4 L P $\frac{12}{3}$, & reuocatis his ad 1 q, 1 q æqualis $\frac{1}{2}$ L P 4. Sit ergo nunc secundus numerus $\frac{3}{2}$ L P 4, tollamus ex 3 L P 24 summa secundi & tertij, restabunt $\frac{3}{2}$ L P 20, scilicet tertius numerus, iam hic cum & est æqualis reliquis, quare $\frac{1}{2}$ L P 28 equalia sunt $\frac{1}{2}$ L P 4, & sublato superfluo 1 L æquale 24, primus ergo numerus est 24, secūsus $\frac{3}{2}$ L P 4, hoc est 40, tertius $\frac{3}{2}$ L P 20, nempe 56, & hi sunt tres numeri 24, 40, 56, uti voluit quæstio.

Problema. IIII.

Queramus quatuor numeros vt pri-

mi secundi ac tertij summa excedat quartum numero 20, secundi tertij & quarti primum 30, tertij quarti ac primi secundum 40, quarti primi ac secundi tertium 50.

Sit primus 1 L, summa secundi ac tertij 1 q, quartus erit 1 L P 1 q M 20, summa secundi tertij & quarti erit 1 L P 2 q M 20 æqualis primo hoc est 1 L, & 30, & sublato superfluo additoque quod deficit, 2 q æquales 50, fit 1 q 25. Iam sit primus 1 L, secundus 1 q, tertius 25 M 1 q, quartus erit 1 L P 5, & quia summa tertij quarti ac primi superat secundum 40, erunt ideo 30 P 2 L M 1 q æqualia 1 q P 40, & addito quod deficit subductoque superfluo, 2 q P 10 æqualia 2 L, atque adeo 1 q æqualis 1 L M 5, secundus igitur numerus erit 1 L M 5, tertius 25 M 1 L P 5, hoc est 30 M 1 L, iā denique quartus primus & secundus superant tertium 50, quare 3 L æqualia

[GVL. GOS. DE ARTE
sunt 80 M i L, & addito quod deficit 4
L æqualia 80, fit vnum latus 20, primus
est ergo 20, secundus 20 M 5, hoc est
15, tertius 30 M 20, hoc est 10, quartus
20 P 5, hoc est 25: suntque quatuor
numeri 20, 15, 10, 25, qui absolute qua-
stioni faciunt satis.

Deo honor & gloria.



Mathématiques : Approche par les Textes Historiques

vous propose la revue *Mnémosyne*
pour échanger expériences et réflexions à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Numéro 1 :	La démonstration par exhaustion chez les Grecs et les Arabes. Groupe M.:A.T.H. d'après un travail de M.F. Jozeau.	4,00 €	200 gr
Numéro 2 :	La querelle entre Descartes et Fermat à propos des tangentes. M. Grégoire.	4,50 €	210 gr
Numéro 3 :	Fragments d'étude des systèmes linéaires. A. Michel-Pajus.	4,50 €	220 gr
Numéro 4-5 :	L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique. F. Viot.	6,00 €	300 gr
Numéro 6 :	Leibniz et l'Ecole continentale. J.L. Verley & M.F. Jozeau.	4,50 €	220 gr
Numéro 7 :	Autour du théorème de Fermat : C. Goldstein.	5,00 €	230 gr
Numéro 8 :	Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode des fluxions. J.L. Verley & P. Brin.	5,00 €	250 gr
Numéro 9 :	Desargues et Pappus. R. Tossut.	5,00 €	240 gr
Numéro 10 :	Le jeu des paradoxes dans l'élaboration des séries. A. Michel-Pajus.	5,00 €	260 gr
Numéro 11 :	Des cartes-portulants à la formule d'Edward Wright. M.T. Gambin.	5,00 €	255 gr
Numéro 12 :	Histoire de quelques projections cartographiques. M. Benedittini.	5,00 €	255 gr
Numéro 13 :	Leibniz. Histoire et origine du calcul différentiel. A. Michel-Pajus.	5,00 €	210 gr
Numéro 14 :	La méthode des pesées chez Archimède. M. Bathier-Fauvet.	5,00 €	214 gr
Numéro 15 :	Recherche de deux grandeurs connaissant leur produit et leur somme ou leur différence. O. Kouteynikoff.	5,00 €	217 gr
Numéro 16 :	De la résolution des équations algébriques à l'émergence du concept de groupe. M. Bühler.	5,00 €	210 gr
Numéro 17 :	Factorisation de grands nombres : de Fermat à la machine des frères Carissan. M. Bühler.	5,00 €	210 gr
Numéro 18 :	Fonctions implicites : de la notion au théorème. R. Chorlay.	5,50 €	315 gr
Numéro spécial 1:	Histoire de Pyramides. M. Grégoire.	7,00 €	380 gr
Numéro spécial 2	Guillaume Gosselin, Algébriste de la Renaissance. O. Kouteynikoff.		

Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port.

Poids jusqu'à	Ordinaires
20 gr	0,50
50 gr	0,75
100 gr	1,11
250 gr	1,90
500 gr	2,65
1000 gr	3,48
2000 gr	4,64
3000 gr	5,47

✂

BON DE COMMANDE

Je désire recevoir les numéros suivants de Mnémosyne :

Prix

port

n° 1

n° 2

n° 3

n° 4

n° 5

n° 6

n° 7

n° 8

n° 9

n° 10

n° 11

n° 12

n° 13

n° 14

n° 15

n° 16

n° 17

n° 18

n° spécial 1

n° spécial 2

Total :

Nom :

Prénom :

Adresse :

Date :

Ci-joint un chèque d'un montant de

A l'ordre de l'Agent comptable de l'Université Denis Diderot Paris 7

Désirez-vous recevoir une facture?

Oui

Non

Comité de rédaction :

Alain BERNARD

*IUFM de Créteil – Centre Koyré
Animateur à l'IREM Paris 7*

Philippe BRIN

*Lycée Jacques Decour, Paris
Animateur à l'IREM Paris 7*

Martine BÜHLER

*Lycée Flora Tristan, Noisy-le-Grand
Animatrice à l'IREM Paris 7*

Renaud CHORLAY

*Lycée L. Wallon, Champigny-sur-Marne
Animateur à l'IREM Paris 7*

Odile KOUTEYNIKOFF

Animatrice à l'IREM Paris 7

Anne MICHEL-PAJUS

*Lycée Claude Bernard, Paris
Animatrice à l'IREM Paris 7*

Pour échanger expériences et réflexions à propos de
l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.: Mathématiques
A. Approche par les
T. Textes
H. Historiques

Résumé

Le *De Arte Magna* (Paris, 1577) de Guillaume Gosselin de Caen est l'ouvrage court, simple et clair, d'un algébriste de la Renaissance, désireux de former son lecteur à la méthode algébrique que lui livrent ses prédécesseurs immédiats et qu'il s'approprie. Le traité tire aussi une valeur spécifique de ses liens tant avec l'*Arithmétique* de Tartaglia que Gosselin traduit en français en 1578 qu'avec les *Arithmétiques* de Diophante qu'il découvre dans la traduction latine de Xylander de 1575.

Mots-clés

Histoire des mathématiques, Arithmétique, Algèbre, Renaissance, Gosselin, Tartaglia, Diophante, Stifel, Nuñez.
Equations quadratiques, algorithmes de résolution, écriture symbolique, dénomination et valeur des inconnues, quantité absolue et quantité sourde, nombres polygonaux, équations de Diophante, méthode de la corde, méthode de la double égalité, triplets pythagoriciens, nombres congruents, systèmes linéaires de plusieurs équations à plusieurs inconnues, méthode de résolution par combinaisons linéaires.

En vente au prix de : 5 Euros

Editeur : IREM

Directeur responsable de la publication : René CORI

Dépôt légal : octobre 2004

ISBN : 2-86612-262-3

IREM Université Paris VII Denis Diderot

Case 7018

2, place Jussieu

75 251 Paris Cedex 05

Tel : 01 44 27 53 83

Mail : iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr

Site : www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html