INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

n°18

OCTOBRE 2003

M. : A. T. H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE DENIS DIDEROT
PARIS VII

Cette brochure est réalisée par l'IREM PARIS 7 DENIS DIDEROT avec le concours de la D.L.C., des MAFPEN de Paris, Créteil et Versailles et de Nadine LOCUFIER à la reprographie.

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite ;

de cette union naquirent les neufs Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : « **La mémoire** »

gravure allégorique d'après Gravelot (XVII^{e} siècle)

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*

MIRIFICI

Logarithmorum

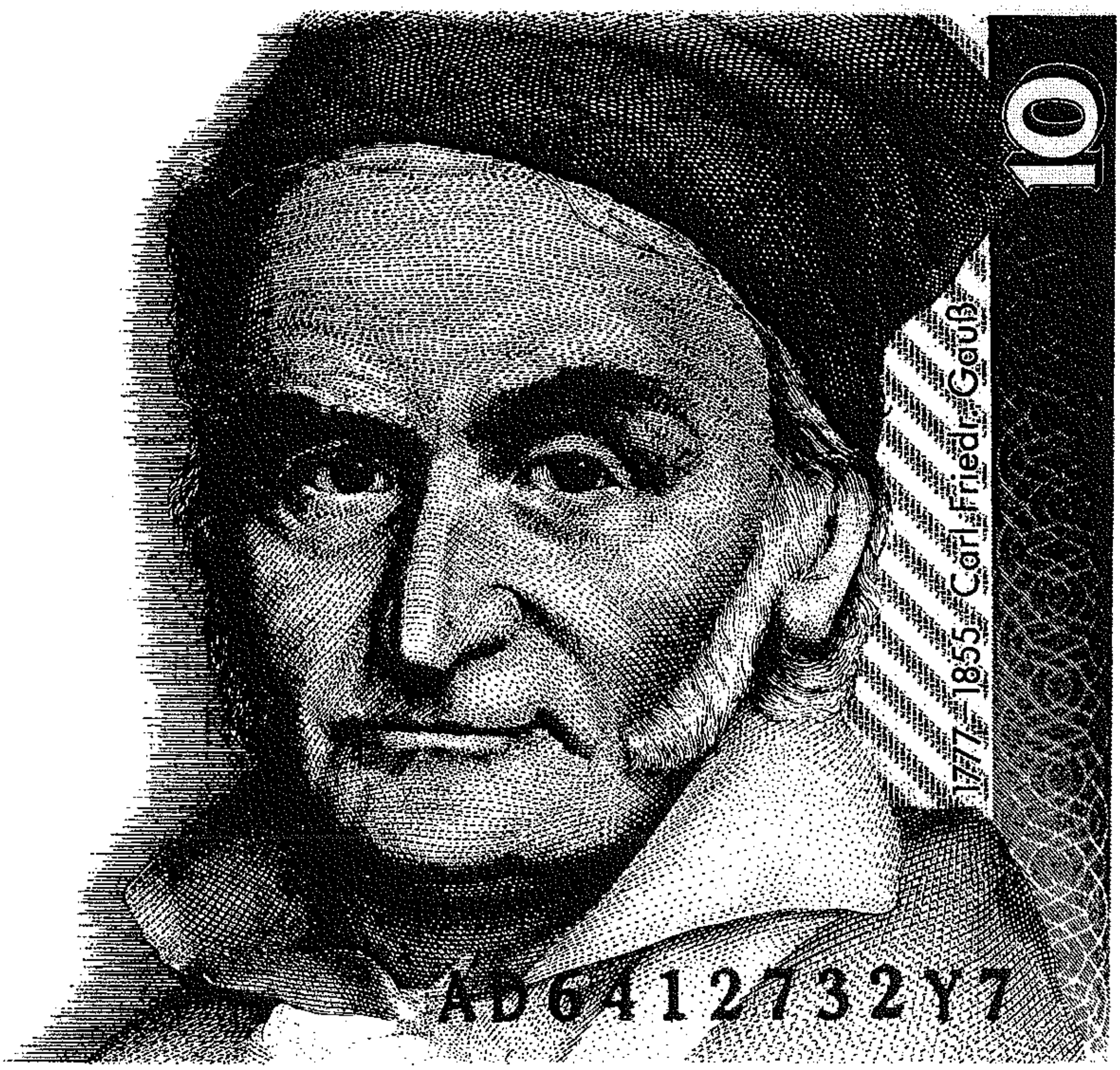
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque *Trigonometria; ut etiam in* omni Logistica Mathematica, *Amplissimi, Facillimi, & expeditissimi explicatio.*

Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, *&c. Scoto.*

EDINBVRGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIƆ. DC. XIV.

SOMMAIRE



Carl Friedrich Gauss

Image prise dans *Images, imaginaires, imagination,* Ellipses, 1998.

EDITORIAL

L'étude centrale de ce *Mnémosyne* 18 porte sur le théorème des fonctions implicites. C'est l'occasion de regarder, à travers la notion de fonction, l'évolution de la rigueur tout au long du $19^{ème}$ siècle : on y observe l'émergence de la notion de domaine de définition, de la distinction entre variable réelle et variable complexe, de l'exigence d'unicité de l'image. L'article se termine sur deux démonstrations différentes du théorème des fonctions implicites, l'une par Genocchi n'utilisant que des notions élémentaires d'analyse, l'autre par Picard, illustrant la puissance des méthodes de point fixe en analyse fonctionnelle.

Un substantiel conte du lundi traite du problème de la constructibilité des nombres à la règle et au compas, thème d'actualité dans les programmes de la filière littéraire. Il nous mène des constructions des géomètres grecs aux études algébriques de Gauss et Wantzel préparées par le travail de Descartes. La fin de l'article donne un aperçu des outils modernes de la théorie de Galois, un éclairage utile pour mieux comprendre les méthodes de Gauss.

Nous proposons deux activités pour les classes de Terminale Scientifique : une introduction à la notion de logarithme décimal au travers d'un texte de Jacques Ozanam ($17^{ème}$ siècle), et la méthode de résolution approchée des équations que développe Newton , anachroniquement nommée "méthode des tangentes".

Pour vous détendre un peu, de bonnes vieilles pages de Cauchy au sujet d'un pâtre de Touraine, calculateur prodige, utilisables dès le collège.

DE

RESOLUTIONE ALGEBRAICA

AEQUATIONIS $X^{257} = 1$,

SIVE

DE DIVISIONE CIRCULI PER BISECTIONEM ANGULI SEPTIES REPETITAM

IN

PARTES 257 INTER SE AEQUALES

COMMENTATIO.

AUCTORE

FRIDERICO JULIO RICHELOT, DR. PHIL.

PROF. EXTRAORD. IN ACADEMIA ALBERTINA.

REPETIT. EX DIARIO MATH. CRELLII TOM. IX.

BEROLINI, 1833.

TYPIS ET IMPENSIS

G. REIMERI.

Page de garde de l'ouvrage de F. Richelot donnant :

une construction à la règle et au compas du polygone régulier à 257 côtés

BONNES VIEILLES PAGES

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) sera donc la vedette de ce numéro de *Mnémosyne* : après avoir présenté dans l'article sur les fonctions implicites quelques extraits de ses textes fondamentaux pour l'histoire de l'analyse, nous proposons quelques extraits d'un rapport à l'Académie des Sciences de 1840 *sur les procédés de calcul imaginés et mis en pratique par un jeune pâtre de la Touraine.* Les méthodes du jeune prodige illettré peuvent donner lieu à des travaux en classe, de la quatrième à la seconde : utilisation des identités remarquables, résolution par combinaison linéaire d'un système de deux équations à deux inconnues, résolution d'équations en nombres entiers utilisant des majorations *a priori* et des propriétés de divisibilité etc. L'intérêt du texte tient sans doute au moins autant à son incongruité qu'à son contenu mathématique (modeste) : à la saveur très paternaliste du regard de Cauchy sur les classes laborieuses s'ajoute le portrait stéréotypé du mathématicien prodige – aux capacités stupéfiantes dans un domaine étroit mais à la limite de la débilité mentale pour le reste. Autant de pistes qui permettront aux plus courageux de faire de cette lecture le point de départ de travaux interdisciplinaires en classe, avec le professeur de français (étude des procédés narratifs, étude du genre « récit d'une vocation scientifique ») ou le professeur d'histoire (problème de l'accès à l'éducation primaire pour les classes populaires avant les lois Ferry).

Source : Cauchy, *Œuvres Complètes*, série I, tome V, p.493-499

MATHÉMATIQUES. — *Rapport sur les procédés de calcul imaginés et mis en pratique par un jeune pâtre de la Touraine.*

C. R., t. XI, p. 952 (14 décembre 1840).

L'Académie nous a chargés, MM. Arago, Serres, Sturm, Liouville et moi, de lui rendre compte des procédés à l'aide desquels le jeune Henri Mondeux parvient à exécuter de tête, et en très peu d'instants, des calculs très compliqués.

Que sans secours et abandonné à lui-même, un enfant préposé à la garde des troupeaux arrive à exécuter de mémoire et très facilement un grand nombre d'opérations diverses, c'est un fait que seraient tentés de révoquer en doute ceux qui n'en auraient pas été les témoins, et dont le merveilleux rappelle tout ce que l'histoire nous raconte du jeune Pascal, s'élevant à l'âge de douze ans, et à l'aide de figures tracées avec un charbon, jusqu'à la XXXII^{e} proposition de la Géométrie d'Euclide. Toutefois ce fait merveilleux s'est déjà présenté dans la personne d'un jeune berger sicilien, mais avec cette différence que les maîtres de Mangiamele ont toujours tenu secrètes les méthodes de calcul dont ils se servaient, tandis que M. Jacoby, qui a recueilli chez lui le jeune pâtre des environs de Tours, a offert lui-même de mettre les procédés employés par son élève sous les yeux des Commissaires de l'Académie.

Dès sa plus tendre enfance, le jeune Henri Mondeux, s'amusant à compter des cailloux rangés à côté les uns des autres, et à combiner entre eux les nombres qu'il avait représentés de cette manière, rendait sensible, à son insu, l'étymologie latine du mot *calculer*. A cette époque de sa vie, les systèmes de cailloux semblent avoir été plus particulièrement les signes extérieurs auxquels se rattachait pour lui l'idée de nombre; car il ne connaissait pas encore les chiffres. Quoi qu'il en soit, après s'être longtemps exercé au calcul, comme nous venons de le dire, il finit par offrir aux personnes qu'il rencontrait de leur donner la solution de quelques problèmes, par exemple de leur apprendre combien d'heures, ou même de minutes, se trouvaient renfermées dans le nombre d'années qui exprimait leur âge. Frappé de tout ce que l'on racontait du jeune pâtre, M. Jacoby, instituteur à Tours, eut la curiosité de le voir. Après un mois de recherches, il rencontre un enfant dont l'attitude est celle d'un homme absorbé par une méditation profonde. Cet enfant, appuyé sur un bâton, a les yeux tournés vers le ciel. A ce signe, M. Jacoby ne doute pas qu'il n'ait atteint le but de ses courses. Il propose une question à Henri, qui la résout à l'instant même, et il lui promet de l'instruire. Malheureusement celui qui se rappelle si bien les nombres a beaucoup de peine à retenir un nom ou une adresse. Henri, à son tour, emploie un mois entier en recherches infructueuses avant de retrouver M. Jacoby. Enfin les vœux du jeune pâtre sont exaucés : il a le bonheur de recevoir des leçons d'Arithmétique. Mais les moments de liberté dont il peut disposer le soir pour cette étude lui paraissent trop courts. Henri, depuis quelque temps, était à la solde d'un fermier établi près de la ville. Il avait pour appointements trois paires de sabots par année, du pain noir à discrétion, et un peu d'ail quelquefois. Un jour il quitte la ferme en déclarant qu'il a trouvé une bonne place; et M. Jacoby, qui voit l'enfant arriver à Tours avec quelques hardes sous le bras, accueille avec bonté ce nouveau pensionnaire que la Providence lui envoie, ce pauvre orphelin auquel il devra désormais servir de père. Sous la direction de M. Jacoby, Henri Mondeux, en continuant de se livrer à son étude favorite, est devenu plus habile dans la Science du calcul, et a commencé à s'instruire sous d'autres rapports. Aujourd'hui il exécute facilement de tête, non seulement les diverses opérations de l'Arithmétique, mais encore, dans beaucoup de cas, la résolution numérique des équations : il imagine des procédés quelquefois remarquables pour résoudre une multitude de questions diverses que l'on traite ordinairement à l'aide de l'Algèbre; et détermine, à sa manière, les valeurs exactes ou approchées des nombres entiers ou fractionnaires qui doivent remplir des conditions indiquées. Arrêtons-nous un moment à donner une idée des méthodes qui sont le plus familières au jeune calculateur.

Quand il s'agit de multiplier l'un par l'autre des nombres entiers, Henri Mondeux partage souvent ces nombres en tranches de deux chiffres. Il est arrivé de lui-même à reconnaître que, dans les cas où les facteurs sont égaux, l'opération devient plus simple, et les règles qu'il emploie alors pour former le produit, ou plutôt la puissance demandée, sont précisément celles que donnerait la formule connue sous le nom de *binôme de Newton*. Guidé par ces règles, il peut énoncer, à l'instant même où on les demande, les carrés et les cubes d'une multitude de nombres, par exemple, le carré de 1204 ou le cube de 1006. Comme il sait à peu près par cœur les carrés de tous les nombres entiers inférieurs à 100, le partage des nombres plus considérables en tranches de deux chiffres lui permet d'obtenir plus facilement leurs carrés. C'est ainsi qu'il est parvenu, en présence de l'Académie, à former presque immédiatement le carré de 756.

Henri est parvenu seul à retrouver le procédé connu qui donne la somme d'une progression arithmétique. Plusieurs des règles qu'il a imaginées, pour résoudre différents problèmes, sont celles qui se déduisent de certaines formules algébriques. On peut citer, comme exemples, les règles qu'il a obtenues pour calculer la somme des cubes, des quatrièmes, et même des cinquièmes puissances des nombres naturels.

Pour résoudre deux équations simultanées du premier degré, Henri a eu recours à un artifice qui mérite d'être signalé. Il a cherché d'abord la différence des inconnues; et, pour y parvenir, il a soustrait les deux équations l'une de l'autre, après avoir multiplié la première par le rapport qui existe entre les sommes formées successivement, pour l'une et pour l'autre, avec les coefficients des deux inconnues. On pourrait, en faisant subir à ce procédé une légère modification, se borner à soustraire l'une de l'autre les deux équations données, après avoir divisé chacune d'elles par la somme des coefficients qui affectent dans le premier membre les deux inconnues. Alors l'équation résultante fournirait toujours immédiatement la différence entre les deux inconnues, de laquelle on déduit sans peine, comme l'a vu Henri Mondeux, ces inconnues elles-mêmes; et l'on obtiendrait ainsi, pour la résolution de deux équations du premier degré, une méthode qui offrirait cet avantage que le calcul resterait symétrique par rapport aux deux inconnues dont on cherche les valeurs.

S'agit-il de résoudre, non plus des équations simultanées du premier degré, mais une seule équation d'un degré supérieur au premier, Henri emploie habituellement un procédé que nous allons expliquer par un exemple. Nous avons proposé à Henri le problème dont voici l'énoncé :

Trouver un nombre tel que son cube, augmenté de 84, fournisse une somme égale au produit de ce nombre par 37.

Henri a donné, comme solutions du problème, les nombres 3 et 4. Pour les obtenir, il a commencé par transformer l'équation qu'il s'agissait de résoudre, en divisant les deux membres par le nombre cherché. Alors la question proposée s'est réduite à la suivante :

Trouver un nombre tel que son carré, augmenté du quotient que l'on obtient en divisant 84 par ce nombre, donne 37 pour somme.

A l'aide de la transformation que nous venons de rappeler, Henri Mondeux a pu immédiatement reconnaître que le nombre cherché était inférieur à la racine carrée de 37, par conséquent à 6; et bientôt quelques faciles essais l'ont amené aux deux nombres que nous avons indiqués.

Les questions même d'analyse indéterminée ne sont pas au-dessus de la portée de Henri Mondeux. L'un de nous lui a demandé deux carrés dont la différence fût 133. Il a donné immédiatement comme solution le système des nombres 66 et 67. On a insisté pour obtenir une solution plus simple. Après un moment de réflexion, il a indiqué les nombres 6 et 13. Voici de quelle manière Henri avait procédé pour arriver à l'une et à l'autre solution. La différence entre les carrés des nombres cherchés surpasse le carré de leur différence d'une quantité qui est égale au double de cette différence multiplié par le plus petit. La question proposée peut donc être ramenée à la suivante : Soustraire du nombre 133 un carré tel, que le reste soit divisible par le double de la racine. Si l'on essaye l'un après l'autre les carrés

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad \ldots,$$

on reconnaîtra que parmi ces carrés 1 et 49 sont les seuls qui satisfassent à la nouvelle question. En les retranchant de 133 et divisant les restes 132 et 84 par les racines doublées, c'est-à-dire par 2 et par 14, on obtient pour quotients les nombres 66 et 6, dont chacun répond à l'une des solutions données par Henri Mondeux. On conçoit, d'ailleurs, qu'en suivant la marche que nous venons de rappeler, Henri n'a pas rencontré d'abord celle des deux solutions qui nous paraît la plus simple, mais celle qui offre les carrés dont les racines sont plus rapprochées l'une de l'autre.

Nous avons été curieux de savoir quel temps emploierait Henri Mondeux pour apprendre et retenir un nombre de 24 chiffres partagés en quatre tranches, de manière à pouvoir énoncer à volonté les six chiffres renfermés dans chacune d'elles. Cinq minutes lui ont suffi pour cet objet.

Henri a une aptitude merveilleuse à saisir les propositions relatives aux nombres. L'un de nous lui ayant indiqué divers moyens de simplifier les opérations de l'Arithmétique, il les a mis immédiatement en pratique, avec la plus grande facilité.

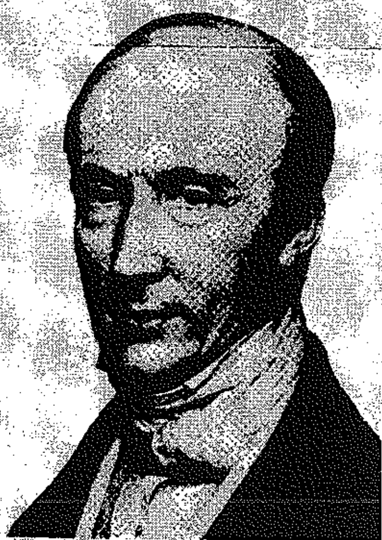
Au reste, on serait dans l'erreur si l'on croyait que la mémoire de Henri, si prompte à lui représenter les nombres, peut être aisément appliquée à d'autres usages. Comme nous l'avons déjà remarqué, il a de la peine à retenir les noms des lieux et des personnes. Il lui est pareillement difficile de retenir les noms des objets qui n'ont pas encore fixé son attention, par exemple les noms des figures que l'on considère en Géométrie; et la construction des carrés et des cubes l'intéresse moins que la recherche des propriétés des nombres par lesquels on les représente. D'ailleurs, il ne se laisse pas aisément distraire des calculs qu'il a entrepris. Tout en résolvant un problème, il peut se livrer à d'autres occupations qui ne l'empêchent pas d'atteindre son but; et lorsque l'attention de Henri s'est portée sur quelques nombres qu'il s'agit de combiner entre eux, sa pensée s'y attache assez fortement pour qu'il puisse suivre en esprit les progrès de l'opération, comme s'il était complètement isolé de tout ce qui l'environne.

Henri Mondeux doit beaucoup à M. Jacoby. Lorsque celui-ci consentit à servir de père et de maître au jeune berger, Henri ne savait ni lire ni écrire, il ne connaissait pas les chiffres. S'il montrait une grande aptitude pour le calcul, son instruction, sous tous les autres rapports, et, ce qui est beaucoup plus triste, son éducation même étaient complètement à faire. On doit savoir gré à M. Jacoby de ne s'être point laissé effrayer par les obstacles que semblait opposer d'abord au succès de son entreprise le caractère violent et sauvage du jeune Mondeux; et l'on aime aujourd'hui à retrouver un enfant religieux, caressant et docile dans le petit vagabond de Mont-Louis. Il est vrai que, dans sa pénible tâche, M. Jacoby a été soutenu et encouragé par les heureuses inclinations que Henri Mondeux laissait entrevoir sous l'écorce la plus rude. Naturellement vif et emporté, cet enfant avait un cœur reconnaissant et une tendre charité pour les pauvres, auxquels il distribuait volontiers le peu qu'il possédait. Ces bonnes dispositions ont augmenté l'attachement de M. Jacoby pour son élève, dont le caractère est devenu plus doux. Mais, pour réussir, M. Jacoby a été d'abord obligé de séparer complètement Henri Mondeux de ses autres pensionnaires, et de lui donner une éducation toute spéciale. L'éducation, l'instruction de l'enfant sont-elles aujourd'hui assez avancées pour pouvoir être continuées et complétées, en la présence et la compagnie d'autres élèves? M. Jacoby ne le pense pas, et les membres de la Commission ne le pensent pas non plus. Nous croyons d'ailleurs que l'Académie doit reconnaître le zèle et le noble dévouement que M. Jacoby a déployés dans le double intérêt de son élève et de la Science, encourager ses efforts, le remercier de l'avoir mise à portée d'apprécier la merveilleuse aptitude du jeune Henri Mondeux pour les calculs, enfin émettre le vœu que le Gouvernement fournisse à M. Jacoby les moyens de continuer sa bonne œuvre et de développer de plus en plus les rares facultés qui peuvent faire espérer que cet enfant extraordinaire se distinguera un jour dans la carrière des sciences.

Augustin Louis Cauchy

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES

cours inédit (fragment)



introduction de
Christian Gilain

préface de
Jean Dieudonné

Publié avec le concours du Centre national de la Recherche scientifique

COLLECTION ACADEMIC PRESS

FONCTIONS IMPLICITES :

de la notion au théorème

Renaud Chorlay

Ce texte est issu d'une conférence donnée à l'I.R.E.M. Paris 7. Le principe en était la lecture commentée d'une série de textes permettant de retracer l'histoire du classique théorème des fonctions implicites. Le lecteur est donc invité, au fil de l'article, à prendre le temps de lire les documents rassemblés à la fin. Rappelons pour mémoire l'énoncé du théorème, ici dans sa première version publiée :

Proposition. *Soit $f(x,y)$ une équation entre les deux variables x et y, et x_0, y_0 un couple de valeurs des variables pour lequel $f(x_0,y_0) = 0$; Supposons que la fonction et ses dérivées partielles du premier ordre sont finies et continues au voisinage du point (x_0,y_0), et que $f_y'(x_0,y_0)$ n'est pas nul ; alors il existe une et une seule fonction y de x, $y = \varphi(x)$, qui vérifie l'équation au voisinage du point $x = x_0$, i.e. on a identiquement pour chaque x, $f(x,\varphi(x)) = 0$, et qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0. Cette fonction $y = \varphi(x)$ est continue et possède une dérivée finie.*

(Genocchi-Peano 1884)

Introduction

De nombreux travaux classiques ont largement permis de baliser l'histoire de l'analyse au $19^{ème}$ siècle, sous le signe d'une *rigueur* toujours croissante. On a étudié la façon dont la mise au jour de contre-exemples amène à préciser les notions de continuité, de développement en série, de convergence uniforme, de continuité uniforme, etc. On a raconté le lent passage d'une notion de fonction identifiée à son expression symbolique jusqu'à une notion abstraite de relation entre ensembles de nombres (puis d'autres choses que des nombres, avec la notion générale d'application). On sait que le rejet progressif de certaines évidences géométriques a conduit, de Bolzano à Weierstrass, Cantor, Méray et Dedekind, à une arithmétisation de l'analyse et une définition claire de l'ensemble **R**. On a suivi les avatars de la querelle des infiniment petits, l'émergence des limites, l'algébrisation des différentielles.

Le théorème des fonctions implicites, au premier abord, ne semble pas relever tout à fait de la même strate : théorème utile, certes, mais qui ne constitue pas une pierre de touche de tout l'édifice analytique ; en un mot, il ne s'agit pas de la question des fondements. Nous pensons pourtant que son étude permet de compléter les analyses classiques et de toucher par un coin différent les questions fondamentales. Ce théorème est utilisé ici comme représentant d'une large classe de théorèmes d'analyse : c'est un théorème d'<u>existence</u> fonctionnelle, et c'est un théorème <u>local</u>. On en apprend beaucoup – et peut-être autre chose que ce qu'enseigne la lecture des seules définitions - sur ce que le $19^{ème}$ siècle met sous ce mot de *fonction* en se demandant depuis quand, et dans quel contexte, on cherche à établir qu'une fonction vérifiant telle ou telle propriété existe. On ne peut s'interroger sur l'émergence des problèmes de passage du local au global, centraux au $20^{ème}$ siècle, sans examiner les phases préalables qui voient la prise de conscience du caractère local des principaux théorèmes d'existence.

Nous montrerons dans une première partie combien la notion de fonction implicite est, pour un large $19^{ème}$ siècle, à la fois centrale et non problématique – en un mot, *familière*. Elle ne pose donc pas de problème auquel un théorème patiemment démontré viendrait répondre. Nous nous intéresserons ensuite un peu longuement au travail de Cauchy, pour montrer que si, le premier, il établit des théorèmes d'existence fonctionnelle locale, son travail ne l'amène pas à remettre en cause le cadre traditionnel dans le cas des fonctions implicites. Nous présenterons enfin deux démonstrations données à la fin du siècle d'un théorème autonome répondant à une question bien identifiée. On le voit, notre histoire sera celle du passage de la <u>notion</u> de fonction implicite au <u>théorème</u> des fonctions implicites.

Précisons d'emblée quelques limites : premièrement, nous examinerons essentiellement les sources françaises ; deuxièmement, nous n'étudierons pas les problèmes, pourtant historiquement premiers, posés par la recherche de développement en série des fonctions implicites, d'Euler à Puiseux ; enfin nous nous limiterons au cas d'une seule équation : l'identification du rôle du déterminant jacobien ne sera pas ici examinée.

I Un modèle stable

a. La classification d'Euler (1748)

Le premier document présente des extraits du premier chapitre de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* (1748)[1], chapitre consacré aux généralités sur les fonctions. La présence d'un tel chapitre dans un traité de mathématiques est en soi une nouveauté, le terme de *fonction* ne s'étant jusqu'alors pas réellement imposé ; ainsi, si Jean Bernoulli définit en 1718 :

On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

le *Lexique Mathématique* de Wolff (1716) ne retient pour l'analyse que les termes de quantité *variable* et quantité *constante*. La définition eulérienne reprend celle de Bernoulli ; encore le mot définition est-il mal adapté : dans cet ouvrage à vocation pédagogique, ce chapitre introductif est plus consacré à poser un vocabulaire qu'à réellement définir des objets. On le voit aux flottements qu'Euler admet dans la distinction entre fonctions algébriques et fonctions transcendantes : il confesse qu'on peut considérer les fonctions du type z^c, où c est un irrationnel, comme des fonctions transcendantes, même si lui préfère les inclure parmi les fonctions algébriques. La fonction *à la* Euler est avant tout une expression (déf. 3), soumise à l'opération fondamentale de substitution d'une quantité déterminée à la quantité variable (déf. 4). Le souci de définir l'égalité des fonctions lorsque plusieurs expressions formellement distinctes conduisent aux mêmes valeurs, n'est pas un souci eulérien. La notion d' « *expression analytique* » ne fait pas l'objet d'une délimitation *a priori* ; elle s'élargit lorsque le besoin s'en fait sentir, incluant en particulier, outre les symboles d'opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine), le symbole = , puisqu' « *il faut aussi considérer la résolution d'équations* » (déf. 6). Les fonctions implicites se retrouvent dans le paragraphe 7, et sont nommées au paragraphe 8. Outre l'identification d'une fonction à une expression, la notion eulérienne de fonction diffère de la nôtre sur un point essentiel : pas de domaine de définition. Euler insiste même sur le contraire : « *aucune valeur déterminée n'est exclue de celles que la fonction peut prendre, puisque la quantité variable accepte les valeurs complexes.* »... le problème en 1748 est de légitimer l'utilisation en analyse des nombres négatifs et imaginaires ; il s'agit d'ouvrir des possibilités, non de les restreindre. On ne trouve ni restriction d'existence de l'image, donc pas de délimitation d'un domaine de définition en dehors duquel le calcul d'image n'est pas possible ; ni restriction d'unicité de l'image, ainsi qu'Euler l'explicite très clairement dans le paragraphe consacré aux fonctions multivoques (ou multiformes). Cette innovation eulérienne lui permet de clore la querelle des logarithmes en désignant le caractère naturellement multiforme de l'extension au domaine complexe de la fonction logarithme, dont l'uniformité[2] sur les réels positifs n'était finalement qu'accidentelle. La multivocité était d'ailleurs inévitable une fois la notion de fonction implicite admise comme élémentaire : la fonction racine carrée, définie implicitement par $Z^2 = z$ donne naturellement deux valeurs de la fonction Z pour chaque valeur de la variable z ; la fonction Z définie au paragraphe 7 par $Z^5 = az^2Z^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$ a aussi peu de risque d'être uniforme. On le verra, faire l'histoire de la notion de fonction implicite,

[1] Document 1

c'est faire l'histoire de la notion de fonction multiforme, et la notion de fonction implicite ne deviendra problématique (et donc susceptible d'être l'objet d'un théorème, et non d'une simple explicitation de vocabulaire), que lorsqu'on imposera aux fonctions d'être uniformes, du moins pour certaines plages de valeurs de la variable. Notons la grande stabilité du couple (fonctions implicites, fonctions multiformes), qui survit jusqu'à la fin du 19ème siècle ; qui survit en particulier à la définition des fonctions comme des expressions de calcul. Déjà Euler, dans le deuxième tome de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* associait une fonction à toute courbe tracée librement par la main dans le plan (sans lever le crayon) ; le débat sur les cordes vibrantes l'amènera dans les *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) à une formulation abstraite de la notion de fonction :

> *« Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières. »*

b. Une formule de dérivation (Lagrange, 1806).

Lagrange explique dans l'avertissement de ses *Leçons sur le Calcul des Fonctions* le souci de rigueur qui l'anime. Il s'agit de fonder en raison l'ensemble du calcul des fonctions en l'épurant de toute notion métaphysique, à savoir des notions d'infiniment petit, de limite, ou de la notion cinématique de *fluxion*. Le moyen universel en est le développement en série entière : pour toute fonction f et toute valeur de la variable x, on peut développer $f(x+i)$ en une série de puissances de i. Lagrange met au premier plan la notion de fonction dérivée d'une fonction f : dans le développement de $f(x+i)$ en puissances de i, la fonction dérivée est donnée par le coefficient de i^1 ; réciproquement, une fois connu le mode de calcul de f' à partir de f, des dérivations successives permettent de reconstituer le développement en série. L'ensemble du traité exploite cette dualité de points de vue entre la dérivation et le développement en série. En particulier, le développement en série permet d'obtenir les formules usuelles de dérivation d'une somme de fonctions, d'un produit de fonctions, d'un quotient de fonctions, etc.

On le voit, l'objectif de rigueur n'embrasse pas une remise en cause de la « définition » eulérienne de fonction. La définition de Lagrange, telle qu'on la lit dans la première leçon, ne s'écarte en rien de celle de l'*Introductio* :

« Nous appellerons donc simplement fonction d'une ou de plusieurs quantités *toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque (...). »*[3]

Pas un mot dans ce chapitre introductif sur les fonctions implicites ou le problème de la multivocité ... les fonctions implicites sont-elles pour autant bannies ? Le *suspense* ne dure guère : si elles ne font pas l'objet d'une définition, ce n'est pas parce qu'on doit les rejeter, mais parce qu'elles font partie des notions tellement communes qu'elles ne méritent pas de mention particulière. On ne parle d'elles que lorsqu'il s'agit de savoir par

[2] Nous suivrons l'usage du 19ème siècle en utilisant indifféremment les termes « uniforme » et « univoque »
[3] Document 2, 1er extrait.

quelle formule les dériver. L'extrait de la leçon 6 étudie ainsi le cas où « *la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation entre x et y.* »[4] Lagrange déduit la formule de dérivation de celle permettant de dériver une fonction composée. Notons qu'il esquive le passage par les fonctions de deux variables en ne donnant la formule de dérivation de $f(p,q)$ que sous l'hypothèse où p et q sont deux fonctions de la même variable x.

La plupart des traités d'analyse du 19ème siècle s'en tiendront là : il n'y a pas de problème des fonctions implicites (encore moins de théorème) ; il n'y a qu'une formule de dérivation des fonctions implicites. Ce n'est toutefois pas exactement le procédé de démonstration de Lagrange qui s'imposera. Les manuels incluront la dérivation des fonctions implicites à la fin du chapitre consacré aux fonctions de plusieurs variables : notion de dérivée partielle, notion de différentielle totale. La déduction est d'une simplicité évangélique : puisque y est fonction de x de telle sorte que $f(x,y) = 0$ soit réalisé identiquement pour toute valeur de x, on en déduit

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0, \text{ d'où } \frac{dy}{dx} = \frac{-f_x'}{f_y'}.$$

c. Une implantation dans d'autres branches.

Si notre exposé nous conduit naturellement à suivre les manuels d'analyse, on doit élargir brièvement le champ d'étude pour se faire une image plus exacte du rôle des fonctions implicites dans l'ensemble des mathématiques du 19ème siècle. On se limitera à deux aperçus.

En 1827, Gauss renouvelle le champ de la géométrie différentielle en publiant ses *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas.* On sait qu'il y introduit la notion de courbure en un point d'une surface (plongée dans $\mathbf{R}^3$), y généralise le théorème reliant la courbure totale d'un triangle géodésique à la somme des mesures de ses trois angles, et y formule le programme de recherche sur l'étude *intrinsèque* des propriétés métriques des surfaces, considérées comme des films souples sujets à des déformations et non comme des bords de solides indéformables. Ces progrès s'appuient sur un nouveau mode de description des surfaces : là où on décrivait classiquement une surface par une équation $f(x,y,z) = 0$, Gauss utilise systématiquement une description paramétrique $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. L'étude métrique des surfaces repose sur l'étude de la forme différentielle quadratique $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, obtenue en tirant en arrière le produit scalaire de l'espace ambiant. La possibilité de passer indifféremment d'une représentation implicite à une représentation paramétrique n'est pas problématisée. Gauss note toutefois que sa théorie ne s'applique qu'aux surfaces admettant en chaque point un plan tangent, et qu'on peut toujours passer de $f(x,y,z) = 0$ à une représentation paramétrique du type particulier $z = g(x,y)$, pour peu qu'on choisisse le plan tangent comme plan (x,y). On peut certes y voir une formulation implicite du théorème des fonctions implicites ... ce n'est pas ce qu'y voient les contemporains – qui ont, il est vrai, des choses plus importantes à apprendre de ce traité. Pour prendre la mesure du passage du temps, notons qu'à la fin du siècle le traitement du problème devient explicite. Ainsi en 1895, lorsque Poincaré ouvre son article sur l'*Analysis Situs* par la définition des variétés (i.e. des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$), il appuie l'équivalence entre les deux modes de représentation des variétés sur des conditions de non-nullité de déterminants jacobiens. Notre théorème des fonctions implicites, à plusieurs variables, est donc utilisé dans

[4] Suite et fin du document 2

l'exposé comme relevant des connaissances communes. On notera par contre que Poincaré n'inclut dans ses caractérisations des variétés que des conditions locales obtenues au moyen de notions différentielles (nous dirions : conditions pour qu'une application C^∞ soit une submersion ou une immersion) : les conditions globales d'injectivité ou de propreté ne figurent pas.

Outre le champ de la géométrie différentielle, on doit avoir à l'esprit que les fonctions les plus étudiées au 19ème siècle sont les fonctions elliptiques puis abéliennes. Il s'agit, au départ, de calculer des intégrales du type $\int ydx$ où y est une fonction algébrique de x, donc définie implicitement par une équation polynomiale $f(x,y)=0$. Les questions de classification de ces « intégrales abéliennes », de décomposition en somme d'intégrales élémentaires, prennent un nouveau tour par extension au domaine complexe : il s'agit d'étudier les fonctions complexes de la forme $z \mapsto \int_{z_0}^{z} ydx$ où toujours $f(x,y) = 0$ pour un polynôme f, l'intégrale étant une intégrale curviligne. Le nombre z_0 étant fixé, cette fonction est multivoque pour deux raisons : multivocité de y, multivocité due à la multiplicité des chemins reliant z_0 à un même z. On ne peut surestimer l'importance de cette théorie : en sont sorties une bonne partie de la théorie des fonctions d'une variable complexe, une bonne partie de la topologie algébrique et de l'analyse sur les variétés (grâce à la formulation « géométrique » du problème par Riemann en 1857), une bonne partie de l'algèbre commutative (grâce aux études algébriques du corps obtenu comme extension de $\mathbf{C}(x)$ par l'équation $f(x,y) = 0$). Bien qu'à l'origine d'une grande partie des mathématiques sophistiquées du 20ème siècle, cette théorie des fonctions abéliennes – du moins des fonctions elliptiques – n'en fait pas moins partie au 19ème siècle des notions communes à tout mathématicien. Dans la deuxième moitié du siècle, une part importante des cours de Licence est en France consacrée à ce que nous nommerions des « fonctions de référence » : outre les fonctions rationnelles, circulaires, exponentielle et logarithme, sont étudiées les fonctions elliptiques. On ne peut se vanter d'avoir étudié les mathématiques sans connaître les procédés de calcul d'intégrales ou de résolution d'équations différentielles au moyen de fonctions elliptiques.

II Cauchy a d'autres chats à fouetter

La conclusion de cette seconde partie sera nette : Cauchy n'a pas démontré le théorème des fonctions implicites. Pourquoi donc s'y arrêter ? Parce que, sous la platitude apparente de cette conclusion se cachent deux thèses qu'il nous appartient d'établir : (1) c'est Cauchy qui aurait dû, le premier, démontrer ce théorème ; (2) comprendre pourquoi il ne l'a pas fait permet de cerner assez finement le mouvement général de l'analyse dans la période 1820-1870.

a. Les années 1820 : des doutes sur les fondements.

Quelques « évidences » dans les traités d'Euler ou de Lagrange soulèvent des doutes pour quelques uns des grands noms du début du 19ème siècle.

Un premier point est l'identification des fonctions à des expressions. Cauchy introduit dans son cours d'analyse à Polytechnique l'exemple de la fonction définie par $\begin{cases} x \mapsto x & si\ x \geq 0 \\ x \mapsto -x & si\ x < 0 \end{cases}$; fonction qu'Euler appelait *discontinue*, c'est-à-dire définie au moyen de plusieurs expressions. Cauchy fait remarquer que cette fonction peut aussi s'écrire au moyen de l'unique expression $\sqrt{x^2}$, faisant ressortir l'ambiguïté de la notion eulérienne.

Une deuxième interrogation remet en cause non le vocabulaire mais la méthode même de l'analyse. Ainsi Abel écrit-il en 1826 :

> *« Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du spécial au général, et ce qu'il y a de merveilleux, c'est qu'après de tels procédés on ne trouve que rarement ce qu'on appelle des paradoxes. Il est vraiment très intéressant de chercher la raison de ceci. Cette raison à mon avis il faut la voir dans ce que les fonctions dont s'est occupée jusqu'ici l'analyse, peuvent s'exprimer pour la plupart par des puissances. Quand il s'en mêle d'autres, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, on ne réussit plus guère, et pour peu qu'on en tire de fausses conclusions, il en naît une infinité de propositions vicieuses qui se tiennent les unes les autres. »*[5]

La belle confiance que Lagrange place en la représentation des fonctions par des séries entières fait aussi l'objet des critiques de Cauchy dans son avertissement du *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*[6], texte qui reprend les cours de première année de la période 1819-1823. Dualité de l'interrogation : on peut douter que la série de Taylor converge ; on peut douter, lorsqu'elle converge, que ce soit vers la fonction de départ. Le contre-exemple que Cauchy donne à ce propos à la fin de la Leçon 38 est toujours celui que nous utilisons : la fonction $exp(-1/x^2)$, prolongée par continuité en 0, a toutes ses dérivées successives nulles en 0, et n'est pourtant nulle sur aucun voisinage de 0. Ainsi que l'annonce Cauchy, l'existence de primitives à toute fonction (continue) lui paraît aussi nécessiter une démonstration. Il la donnera par un procédé que nous retrouverons bientôt : (1) utilisation d'une méthode numérique d'approximation comme procédé de démonstration d'existence d'une fonction (2) renversement de la démarche usuelle : là où l'on partait de l'existence de primitive pour expliquer le mode de calcul d'intégrales définies, démonstration de l'existence de l'intégrale définie, d'où existence de fonctions primitives obtenues en faisant varier les bornes d'intégration.

Notons que ces doutes sur la représentation des fonctions par des séries concernent aussi les séries trigonométriques : Dirichlet établit en 1829 son théorème sur les séries de Fourier.

b. A l'ombre des équations différentielles.

Avant d'aborder le cas spécifique du cours de seconde année professé par Cauchy à l'X jusqu'en 1823, il faut rappeler les éléments du contexte qui font que, jusque dans les années 1870, la question des fonctions implicites,

---

[5] Cité dans l'article de A. Monna.

[6] Document 3

dans les rares cas où elle se pose, n'est formulée que dans le cadre de la théorie des équations différentielles ordinaires. La raison en est triple :

- Pour peu que l'on suppose toute fonction dérivable, la formule de dérivation des fonctions implicites permet de considérer que la fonction y définie implicitement par $f(x,y) = 0$ n'est autre que la solution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}$.
- Plus généralement, le flou dans la définition de ce qu'est une « expression » définissant, explicitement ou implicitement, une fonction, permet de considérer les solutions d'équations différentielles comme cas particuliers de fonctions implicites : l'expression les définissant implicitement comprend, outre les symboles algébriques et le symbole =, les symboles de dérivation ; rien là-dedans qui répugne à l'idée générale d' « implicite ». On le trouve sous la plume de Cauchy : dans le texte sur le calcul des limites[7], il présente un premier théorème concernant « *une fonction implicite u de la variable x (...) déterminée par une équation algébrique ou transcendante (...)* », puis généralise : « *Les propositions ci-dessus mentionnées peuvent encore facilement être étendues au cas où les fonctions implicites seraient déterminées par des équations aux différences finies ou infiniment petites, ou aux différences partielles, ou aux différences mêlées.* ». Réciproquement, si $f(x,y,y') = 0$ est la forme générale d'une équation différentielle ordinaire, une définition de fonction implicite au sens strict, de la forme $f(x,y) = 0$, apparaît comme un cas particulier d'équation différentielle : une équation différentielle sans différentielle !
- Le premier chapitre du cours de deuxième année[8] relie les fonctions implicites, non aux notions générales sur les équations différentielles, mais à leurs méthodes de résolution. Le procédé, classique, se trouve déjà chez Clairaut en 1740 : résoudre une équation différentielle du premier ordre $y' = f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ revient à chercher une fonction u, dont $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ soit la différentielle totale. Clairaut a montré que la condition $P_y' = Q_x'$ est nécessaire et suffisante[9] à l'existence de u. Cette fonction u définit elle-même implicitement les solutions y de l'équation différentielle initiale au moyen des équations $u(x,y) = c$, où c est une constante réelle.

On peut lire dans le chapitre 7 de ces cours de deuxième année[10] ce qui est sans doute la première démonstration abstraite d'existence de solutions à une équation différentielle ordinaire. Le simple fait de chercher une démonstration oblige à une réorganisation conceptuelle. L'idée de la démonstration consiste en ceci : partir d'un couple (x_0,y_0) arbitraire ; découper un intervalle $[x_0,x]$ en un nombre fini de sous-intervalles, sur lesquels on interpole linéairement par la méthode d'Euler ; x étant fixé, montrer que la valeur Y qui lui est associée converge vers une valeur déterminée lorsque la taille du découpage de $[x_0,x]$ tend vers 0. C'est ce que résume le théorème 3. La nécessité d'établir la convergence fait ressortir des conditions suffisantes sur le comportement de f en (x_0,y_0) (au niveau des hypothèses du théorème 4), et conduit à formuler explicitement le caractère local du

[7] Document 7
[8] Document 4
[9] Nous ne serions sans doute plus de son avis quant au caractère suffisant de cette condition !
[10] Document 5

résultat (conclusion du théorème 4). Le problème du recollement global des solutions locales est abordé très clairement dans le chapitre 8, dont nous donnons un extrait dans le document 6.

On retrouve dans ces pages historiques les traits que nous avions relevés à propos de la démonstration d'existence des primitives dans le cours de première année. Dans les deux cas Cauchy, le premier, formule explicitement le problème très abstrait de l'existence de fonctions soumises à des conditions formulées en termes généraux. Dans les deux cas il transforme une méthode numérique d'approximation en une méthode de démonstration, ce qui le conduit à chercher des fonctions particulières avant des fonctions générales : l'existence de l'intégrale *définie* est démontrée d'abord, avant de laisser varier une des bornes d'intégration pour obtenir une primitive ; l'existence d'une solution à l'équation différentielle *vérifiant une condition initiale* (problème "de Cauchy") est démontrée sans s'appuyer sur l'existence, admise jusqu'alors, d'une solution générale . Le caractère local de la solution, enfin, est clairement explicité. Les démonstrations du théorème des fonctions implicites partent du même souci et peuvent se faire par les mêmes méthodes … mais elles ne seront pas le fait de Cauchy.

c. Sous le signe du « calcul des limites » (1831)

Les travaux de Cauchy prennent une autre direction à partir des années 1830, avec la découverte d'un merveilleux « calcul des limites ». Lisons le théorème 1 du document 7 : les méthodes usuelles de détermination des fonctions implicites y sont rappelées ; cette fonction étant supposée développable en série, le calcul des dérivées successives à partir de la formule implicite ou la méthode des coefficients indéterminés permet, théoriquement, de déterminer la fonction. Aux doutes théoriques sur la possibilité de représenter toute fonction par une série entière s'ajoute, sous la plume de Cauchy, une critique de la pénibilité de ces calculs. Cauchy nous assure que sa méthode nouvelle garantit l'existence de la série entière convergeant vers la fonction, et permet d'en calculer aisément les coefficients. En quoi consiste donc ce prodigieux « calcul des limites » ? La suite du document 7 montre qu'il s'agit des premières formules sur les fonctions que nous nommons holomorphes. Après une introduction heuristique où les coefficients d'un simple polynôme (identifiés aux coefficients du développement en série en 0) sont obtenus comme intégrales curvilignes le long d'un cercle autour de l'origine (notons que l'interprétation géométrique n'est pas, ici, donnée), Cauchy énonce la formule intégrale générale permettant de calculer $f(0), f'(0),\ldots, f^{(n)}(0)$. De la formule intégrale on déduit, à la fin de l'extrait, le développement en série ; l'extension du « disque de convergence » fait l'objet de la dernière remarque.

On remarque l'absence de formulation géométrique ; le fait que l'on travaille dans le domaine complexe est lui même plus implicite qu'explicite – discret, à tout le moins. Le travail d'analyse de Cauchy se dirige pour de nombreuses années vers l'exploitation de ce merveilleux calcul des limites, et du « calcul des résidus » qu'on obtient par son moyen. Il serait historiquement faux de dire que Cauchy se détourne de la variable réelle pour fonder et exploiter la théorie des fonctions d'une variable complexe … la distinction entre les deux n'est pas claire avant de nombreuses années. On assiste dans un premier temps à la formulation géométrique de la théorie de la variable complexe. Pour preuve, Cauchy donne en 1835 une nouvelle démonstration du théorème d'existence pour les équations différentielles, démonstration qui repose … sur le calcul des limites. Là où nous verrions un autre théorème, spécifique au domaine complexe, Cauchy pense donner une nouvelle démonstration, plus rapide et élégante, du même théorème.

d. Combien de fonctions pour une fonction ?

La pièce suivante à joindre au dossier des fonctions implicites porte non pas sur un éventuel théorème d'existence, mais sur leur place parmi les fonctions – et plus généralement sur l'évolution de la notion de fonction elle-même. L'utilisation progressive du registre géométrique en théorie des fonctions conduit Cauchy à réfléchir sur ce que nous nommerions le domaine de définition, et à s'interroger sur la place des fonctions multiformes. Le document 8, extrait d'un *Mémoire sur les fonctions continues des quantités algébriques et géométriques* est à ce titre significatif. La distinction entre domaine réel et domaine complexe y est parfaitement claire, une fonction réelle reliant les mouvements de deux points mobiles sur une droite alors qu'une fonction complexe relie deux points mobiles dans le plan. Le passage reproduit ne traite que du cas réel ; Cauchy y conçoit qu'une fonction implicite pourrait avantageusement être regardée comme réunion de plusieurs fonctions explicites ... encore ne s'agit-il ici que d'une question de commodité et non d'une remise en cause théorique de la multivocité. Pour parler librement de ces différentes fonctions (explicites) cachées dans une seule fonction (implicite), c'est le registre géométrique qui fournit le vocabulaire : il y aura des « *branches* » de courbe, chacune associée à une fonction explicite. Notons que la question de la multivocité n'est pas la seule en jeu dans cette réinterprétation géométrique : ainsi une fonction réelle univoque mais discontinue présente-t-elle aussi plusieurs branches ... faut-il y voir pour autant plusieurs fonctions ? Il semble d'ailleurs dans ce passage que Cauchy utilise le terme de « fonction explicite » pour parler des « fonctions univoques ». On voit que le cœur de la réorganisation conceptuelle est la notion de fonction univoque continue ; les fonctions multivoques et les fonctions discontinues sont sur la sellette, non tant à cause de la multivocité de certaines que parce qu'elles posent le problème du prolongement par continuité. Notons que la suite de ce mémoire étend ces réflexions au domaine complexe, en proposant d'introduire des « *coupures* » dans le plan pour définir des fonctions univoques associées à une fonction multivoque.

e. Une identification tardive de la spécificité du domaine complexe.

C'est 25 ans après avoir fondé la théorie des fonctions d'une variable complexe que Cauchy explicite ce qui les distingue des fonctions d'une variable réelle... il aura fallu un siècle pour que la possibilité soulignée par Euler (« *la quantité variable accepte les valeurs complexes* ») soit problématisée. Certes les nombres complexes sont des extensions des nombres réels, mais il n'est pas vrai que la théorie des fonctions d'une variable complexe soit une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable réelle – ce qui impliquerait que tout théorème démontré dans le domaine complexe admette, comme cas particulier, un théorème réel; cette idée pourtant si évidente, si utile un siècle durant, repose sur une assimilation abusive de la dérivation complexe à la dérivation réelle. C'est de cela que Cauchy prend conscience dans *Sur la théorie des fonctions*[11] (1856) : une fonction de deux variables n'est dérivable au sens complexe en un point que si sa dérivée partielle au sens réel ne dépend pas de la direction selon laquelle on approche le point – Cauchy parle alors de fonction *monogène*. Ses réflexions sur

[11] Document 9

le registre géométrique et les questions d'existence et d'unicité de l'image lui servent ensuite à isoler la classe des fonctions simples qui doivent être au cœur de la théorie, et à partir desquelles les autres doivent être décrites : ces fonctions seront monogènes (C-dérivables), monodromes (univoques) et ne prendront que des valeurs finies ... le terme de *synectique* qu'il choisit sera bientôt remplacé, dans le traité de Briot et Bouquet (1859), par celui d'*holomorphe*.

* * *

Dans l'œuvre de Cauchy, on retrouve les fonctions implicites en de nombreux endroits, mais jamais au centre de la réflexion ... elles font partie du paysage, elles font l'objet d'une formule de dérivation bien connue de tous les étudiants et que Cauchy, à l'instar de tous ses collègues, a dû enseigner mille fois; on les retrouve dans de nombreux problèmes d'analyse pure ou appliquée. Par cette omniprésence familière, elles bénéficient de chacun des progrès de la théorie des fonctions sans jamais poser de problème spécifique : il y a chez Cauchy un problème de représentation des fonctions par des séries entières, un problème d'existence des primitives et, plus généralement, de solutions à toute équation différentielle ... mais pas de problème des fonctions implicites. Cauchy s'est approché de très près de cette question, toutefois, dans ses cours de seconde année de l'X au début des années 20, mais celle ligne de recherche se trouva marginalisée pour plusieurs raisons. Raison pratique : à partir de 1823, la direction de l'Ecole demande à Cauchy de ne plus embarrasser ses étudiants avec des sujets aussi ésotériques. Ces cours de seconde année ne seront pas publiés, ne seront pas repris dans les œuvres complètes. Ce qui aurait pu servir à tout un siècle de modèle de démonstration pour une large classe de théorèmes locaux d'existence ne fut connu que par l'ouvrage de l'Abbé Moigno (1845), rédigé d'après les cours de Cauchy, mais en affaiblissant la portée novatrice[12]. Raison théorique : dans un contexte d'indistinction des domaines réels et complexes, Cauchy pense résoudre par le calcul des limites la plupart des problèmes qu'il avait lui même soulevés dans les année 1820, légitimant après coup les méthodes usuelles de développement en série entière ou trigonométrique.

III Différentes versions d'un théorème autonome

a. Les années 1870 : un nouvel intérêt pour la variable réelle

On avait vu dans les années 1820 quelques grands mathématiciens, Abel, Dirichlet, Cauchy, exprimer des doutes sur l'universelle validité des méthodes de leurs prédécesseurs et produire des contre-exemples ; les questions en jeu étaient celle du développement en série (entière ou trigonométrique), et, dans une moindre mesure, la notion même de fonction et la définition de la continuité. La nette séparation entre les domaines réel et complexe permet de prendre conscience à partir des années 1860 de problèmes spécifiques à la variable réelle. Des contre-exemples surgissent :

[12] Le texte dont nous avons reproduit des extraits a été retrouvé au début des années 1980 par Christian Gilain.

- A propos de la définition de la continuité pour les fonctions de deux variables réelles :
  - Schwarz 1872 : $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ prolongé par 0 en (0,0). La discontinuité est manifeste si l'on pose, par exemple, $x = y$.
  - Darboux : $f(x,y) = \frac{x}{y^2} e^{\frac{-x^2}{y^4}}$ prolongée par $f(0,0) = 0$ et $f(x,0) = 0$: la fonction n'est pas continue en 0 (regarder $x = y^2$) mais le semble lorsque (x,y) se rapproche de l'origine selon n'importe quelle droite.
- Schwarz, Thomae en Allemagne, Darboux en France soumettent à la critique la formule « usuelle » : $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$
- Pour les fonctions d'une seule variable, le *Mémoire sur les fonctions discontinues* publié par Darboux en 1875 marque une étape critique : nécessité de soumettre « *bien des points, qu'on regarderait à bon droit comme évidents ou que l'on accorderait dans les applications de la science aux fonctions usuelles, (...) à une critique rigoureuse dans l'exposé des propositions relatives aux fonctions les plus générales.* » Darboux y démontre entre autres résultats contre-intuitifs « *qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, qu'il y a des fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.* »

Notons que cet effort de rigueur n'est pas spécifique au domaine réel : les cours de Weierstrass explorent avec une rigueur toujours croissante les propriétés topologiques de la droite réelle et du plan complexe nécessaires à fonder la théorie des fonctions holomorphes.

On doit toutefois souligner la marginalité de ces travaux. Dans les seuls cours de Weierstrass, on peut suivre le progrès de la rigueur en lisant les différentes versions rédigées par les étudiants ; il ne semble pas qu'avant 1870 Weierstrass ait douté de la dérivabilité des fonctions continues. Du Bois-Reymond rapporte que, jusqu'en 1873 en Allemagne, nul ne doutait que la série de Fourier de f convergeât vers f. Pour la France, Darboux travaille dans l'isolement et une relative incompréhension : « *On raconte qu'en 1875 Darboux fut quelque peu blâmé de s'être laissé aller à étudier de telles questions.* », rapporte Lebesgue. On connaît la boutade de Hermite, écrivant à Stieltjes : « *je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées.* »

Nos critiques marginaux vont toutefois enseigner et rédiger des traités ... aucun de leurs étudiants ne croira plus que toute fonction continue est dérivable. Pour illustrer le changement d'esprit très net dans cette nouvelle génération de traités d'analyse, nous avons reproduit dans le document 10 le début de la table des matières de trois traités. Le cours de Hermite, publié en 1873, est le représentant de l'ancienne génération. Les premiers traités novateurs paraissent en Italie : *Fundamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili reali*, publié par Dini en 1878 ; cours de calcul différentiel et intégral de Genocchi et Peano (1884). Malheureusement, le cours complet que Dini professait à Pise dans les années 1876-78 n'a été publié que trente ans plus tard ... la démonstration du théorème des fonctions implicites de Dini est sans doute la première exposée, mais la première publiée fut celle de Genocchi et Peano. Pour la France nous avons reproduit le début de la table des matières de la 3ème édition du cours de calcul différentiel. L'attitude de Jordan est à cet égard significative. Nommé à l'Ecole Polytechnique, il rédige rapidement un cours à la manière classique. Ainsi le tome 1 de la première édition de son cours (1883) est-il proche de celui de Hermite ; à peine note-t-il l'existence de fonctions continues non dérivables : « *ces fonctions anormales ne seront pas abordées dans ce cours* ». La publication du 3ème tome de la 1ère édition, en 1887, lui donne l'occasion de revenir sur certains points admis trop rapidement en 1883 : le théorème des fonctions implicites est ainsi démontré en 1887, alors que seule la formule de dérivation avait sa place dans le traité de 1883. C'est en fait la deuxième édition « *entièrement remaniée* », en 1893, qui marque la rupture avec l'ancienne mode, et propose à la période moderne son ouvrage classique.

On peut dans ces extraits de tables des matières lire les traits caractéristiques de cette nouvelle manière. L'analyse ne repose pas sur la manipulation des infiniment petits mais sur les propriétés de la droite réelle : la notion de limite est première ; elle permet de poser le problème des bornes inférieures et supérieures, de définir l'adhérence et la frontière d'un ensemble de points. Selon les auteurs, d'autres propriétés sont mises en avant : propriétés « topologiques » (connexité, densité de certaines parties), propriétés ensemblistes (distinction cantorienne entre l'infini dénombrable et le non-dénombrable), propriétés de mesure. Viennent ensuite les fonctions, caractérisées non plus par leur expression (algébrique, rationnelle, implicite...) mais par une propriété caractéristique (continue, à variation bornée...). Un cheminement standard est adopté pour entrer dans le calcul différentiel : démonstration topologique du théorème *dit* de Rolle, théorème des accroissements finis. Ce théorème est la pierre de touche : peu de résultat qui n'en soit corollaire.

b. Les démonstrations italiennes : Dini, Genocchi, Peano.

La démonstration donnée par Jordan du théorème des fonctions implicites est la même que celle qu'on lit, pour la première fois imprimée, chez Genocchi et Peano (1884) : nous en avons donné dans le document 11 une traduction, d'après l'édition allemande de 1899. Comme depuis un siècle, ce théorème trouve sa place dans le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables ; le souci nouveau est de démontrer l'existence de la fonction puis sa dérivabilité, avant d'établir la formule usuelle de dérivation. L'idée générale est élémentaire : la condition $f_y'(x_0,y_0) \neq 0$ et la continuité de f_y' garantissent la stricte monotonie des fonctions $y \longmapsto f(x,y)$, pour les valeurs de x dans un intervalle suffisamment petit autour de x_0. La condition $f(x_0,y_0) = 0$ garantit que ces fonctions de la seule variable y changent de signe dans un intervalle suffisamment petit autour de y_0, intervalle ne dépendant pas de x. Ce théorème d'existence garantit aussi la continuité, la construction ayant lieu dans une « boîte » arbitrairement petite autour de (x_0,y_0). La dérivabilité est établie dans un deuxième temps au moyen du théorème des accroissements finis.

c. Une variété de points de vue.

L'énoncé du théorème va se stabiliser, du moins jusqu'à ce qu'on ressente le besoin de travailler directement dans tout espace de Banach. Par choc en retour, la notion même de « fonction implicite » se voit définie : une fonction implicite est ce dont parle le théorème des fonctions implicites ! Le théorème a priorité sur la notion, après plus d'un siècle où la notion commune n'avait pas semblé appeler de théorème. La démonstration donnée par Dini, puis Genocchi et Peano va elle aussi s'imposer longtemps. On peut trouver un exposé classique des différents aspects de la question dans les *Cours d'Analyse Mathématique* d'Edouard Goursat, qui font référence en France dans la première moitié du $20^{ème}$ siècle. Les fonctions implicites méritent un chapitre entier, après celui consacré aux fonctions de plusieurs variables. Goursat commence par démontrer le théorème *à la* Dini, en précisant que ce théorème n'épuise pas la question : il ne donne que des « *éléments de fonctions* » et laisse entier le problème du prolongement maximal ... qui ne sera pas abordé dans ce manuel élémentaire ; est donnée ensuite une méthode numérique d'approximation des valeurs de la fonction implicite : pour une valeur de x fixée est construite une suite y_n convergeant vers $y = \varphi(x)$ (pour reprendre la notation de Genocchi) ; dans un troisième temps, deux des usages standards de ce théorème sont étudiés : application en géométrie différentielle élémentaire ; application au problème de l'inversion d'un système de n équations à n inconnues.

Nous voudrions terminer cet exposé en montrant comment deux des questions étudiées par Goursat comme subordonnées au théorème des fonctions implicites vont être appelées à passer au premier plan dans la seconde moitié du $20^{ème}$ siècle. Il ne s'agit ici que d'indiquer des perspectives.

La méthode numérique d'approximation mentionnée par Goursat utilise le théorème du point fixe dans **R** : x est fixé, c'est donc la suite numérique y_n qui et construite et étudiée. Dans le traité de Hadamard[13], si l'énoncé du théorème des fonctions implicites ne change pas, le procédé de démonstration n'est plus celui de Dini, Genocchi ou Jordan. Limitons nous à une variable : au paragraphe 247^{bis}, la recherche de y vérifiant $F(x,y) = 0$ (au voisinage du couple (a,b), annulant F) est reformulée comme un problème de point fixe $y-b=-\dfrac{1}{F_y'(a,b)}\big((F_y'(a,b)\,(b-y)+f(x,y)\big)$; en réécrivant cela $y-b=\varphi(x,y)$ où φ est continue et s'annule en (a,b), on peut choisir un voisinage de (a,b) sur lequel $|\varphi(x,y)-\varphi(x,Y)| < K\,|Y-y|$ pour une constante K strictement inférieure à 1, indépendante de x. Cette application contractante permet de construire récursivement une suite convergeant vers un point fixe y. Il est significatif que cette démonstration ne se trouve pas, dans le traité de Hadamard, dans le chapitre consacré aux fonctions de plusieurs variables mais dans le chapitre sur les théorèmes généraux d'existence pour les équations différentielles. On y voit l'influence des travaux d'Emile Picard dans ce domaine : les méthodes de point fixe, dans les espaces fonctionnels, sont entre temps devenu l'outil essentiel des démonstrations d'existence de fonction. Le rapprochement des fonctions implicites et des intégrales d'équations différentielles ordinaires n'a donc plus le sens qu'il pouvait avoir un siècle plus tôt : une équation différentielle n'est plus tant un cas particulier de définition implicite de fonction ; c'est l'existence d'un procédé général de démonstration qui fonde le rapprochement. Un point commun cependant avec la démarche du Cauchy des années 1820 : c'est un algorithme numérique classique qui change de sens pour devenir le cœur d'une démonstration d'existence. On trouvera dans le document 13 l'un des premiers articles (1891) dans lesquels Picard démontre par la méthode du point fixe qui porte son nom le théorème général d'existence pour les équations différentielles ordinaires.

On a vu que Goursat signalait, parmi les applications classiques du théorème des fonctions implicites, l'existence d'un critère différentiel simple permettant d'étudier le problème de l'inversion, i.e. de la résolution implicite

[13] Document 12

d'un système de n équations à n inconnues. Ce problème d'inversion va passer au premier plan, pour devenir le théorème d'inversion locale dont on déduira le théorème des fonctions implicites. Nous avons donné en document 14 le début d'un article novateur de Hadamard dans lequel celui-ci entreprend d'étudier les problèmes posés par le caractère *local* du théorème d'inversion ainsi obtenu. Le soin avec lequel la question est formulée suffit à montrer combien, en 1906, il n'est pas courant de s'interroger sur la surjectivité (problème d'existence) et l'injectivité (problème d'unicité) d'une application de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même. A titre heuristique, Hadamard étudie dans un premier temps la situation dans $\mathbf{R}$: la fonction dérivée étant, par hypothèse, de signe constant, l'injectivité ne pose pas problème ; la surjectivité peut être étudiée au moyen d'un critère simple : dans le cas où f est strictement croissante, f est surjective si et seulement si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La situation dans $\mathbf{R}^n$ (n>1) connaît un curieux renversement : un critère généralisant celui donné dans 3 permet d'étudier assez simplement la surjectivité ; l'injectivité par contre, qui ne posait pas de problème dans le cas à une dimension, devient problématique en dimension n. La suite de l'article (non reproduite ici) consiste en l'étude d'un critère calculatoire permettant de passer de l'injectivité locale à l'injectivité globale.

Conclusion

Nous avons construit cet exposé autour de deux périodes, les années 1820, les années 1870, caractérisées chacune par une forme de progrès de la rigueur en analyse ... ce sont bien les périodes identifiées par les études classiques sur les fondements de l'analyse. Le fil conducteur des fonctions implicites permet d'éclairer sous un autre jour ce qui, à chaque époque, fait problème pour certains mathématiciens - souvent marginaux dans leurs scrupules de rigueur. Pour l'immense majorité des étudiants en science du 19ème siècle, les fonctions implicites ne posent pas de problème théorique : notion commune, elles font l'objet d'une formule de dérivation simple qui s'ajoute à la liste des formules usuelles (dérivation d'une somme, d'un produit ...). Dans les années 1820 se voient posés deux types de questions fondamentales à propos des fonctions : les questions d'existence et les questions de représentation. Par une ironie de l'histoire, la démonstration fondamentale donnée par Cauchy au début des années 20 d'existence de solutions au « problème de Cauchy » pour les équations différentielles ordinaires n'a pas été le point de départ d'une série de démonstrations d'existence locale en théorie des fonctions ; le manuscrit fut oublié, et Cauchy se détourna de ces questions du jour où son calcul des limites parut pouvoir résoudre plus simplement à la fois les questions d'existence et les questions de représentation par des séries entières. Pour encore cinquante ans les questions d'existence demeurent marginales[14]. Ce qui, en théorie pure des fonction, pose problème dans les années 20, c'est la continuité et jamais la dérivabilité : tant que toute fonction continue est supposée dérivable (et analytique), un éventuel problème des fonctions implicites demeure subordonné au problème des équations différentielles ordinaires. Tant que les fonctions peuvent être multivoques, la notion de domaine de définition ne peut émerger. Dans ce modeste exposé, nous n'avons pas suivi ce fil assez systématiquement pour se faire une idée nette de la montée de la condition d'univocité ; les réflexions qui ont jalonné le siècle, autour des notions de *branche*, de *coupure*, d'*élément de fonction*, de prolongement analytique ... appelleraient une étude autonome.

L'identification tardive de la spécificité des théorèmes d'analyse concernant les fonctions holomorphes fait réémerger un continent de l'analyse réel au relief autrement escarpé, dont une nouvelle génération de mathématiciens entreprend, dans les années 1870, l'exploration. C'est ce contexte qui voit apparaître une première démonstration d'existence locale des fonctions implicites, nos auteurs ayant soin de démontrer l'existence, puis la continuité, enfin la dérivabilité. La génération Bourbaki préférera, dans ses manuels « grand public » des années 1960, une autre voie : démonstration dans les espaces de Banach du théorème d'inversion locale, corollaire sur les fonctions implicites ... les cours d'Henri Cartan, Laurent Schwartz, Serge Lang, ou les *Eléments d'Analyse* de Jean Dieudonné en témoignent. Ce changement de perspective, dont nous sommes les héritiers, prend acte de l'émergence, dans les dernières années du 19ème siècle, d'une méthode générale et d'un méta-problème. Méthode générale de démonstration d'existence fonctionnelle par des méthodes de point fixe : la nécessité d'étendre aux ensembles de fonctions les notions de distance utilisées dans les algorithmes numériques usuels ouvre la voie à l'analyse fonctionnelle. Méta-problème : la formulation ensembliste en terme d'application fait ressortir en toute clarté les problèmes d'injectivité et de surjectivité ; les théorèmes locaux d'existence ne sont plus tant une réponse aux questions du mathématicien que le point de départ d'une recherche sur le passage du local au global.

[14] L'histoire du « principe de Dirichlet » compléterait cette remarque allusive.

Bibliographie

Sources primaires

A.L. Cauchy (#), *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, 1882-1974

A.L. Cauchy, *Equations Différentielles Ordinaires*, présenté par C. Gilain, Etudes Vivantes, 1981.

U. Dini ($) *Fundamenti par la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali*, T. Nistri, 1878.

U. Dini ($) *Lezioni di Analisi Infinitesimale (vol.I, Calcolo Differenziale)*, T. Nistri, 1907

L. Euler (#) *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, tome I, trad. J.B. Labey (1796), réédition ACL éditions, 1987

A. Genocchi ($) *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung (Herausgegeben von G . Peano)*, (trad. G. Bohlmann, A. Schepp), Teubner, 1899.

E. Goursat *Cours d'Analyse Mathématique (tome I)*, 5ème édition, Gauthier-Villars, 1943.

J. Hadamard *Œuvres complètes (tome I)*, éditions du C.N.R.S. 1968

J. Hadamard *Cours d'Analyse (tome II)*, Hermann, 1930.

C. Hermite *Cours d'analyse (première partie)*, Gauthier-Villars, 1873.

C . Jordan *Cours d'Analyse (tome I, Calcul Différentiel)*, 3ème édition revue et corrigée, Gauthier-Villars, 1959.

J-L. Lagrange *Œuvres Complètes*, Gauthier-Villars, 1884.

E. Picard, *Œuvres Complètes (tome II)*, éditions du C.N.R.S., 1979.

Sources secondaires

Usuels :

J. Dieudonné (ed.) *Abrégé d'Histoire des Mathématiques*, Hermann, 1978.

A.P. Yuskevich, A.N. Kolmogorov (eds.) *Mathematics in the 19th century* (3 volumes), Birkhäuser, 1996.

Articles :

P.Dugac *Elements d'Analyse de Karl Weierstrass*, in *Archive for History of Exact Sciences* vol. 10 (1973)

H. Gispert *Sur les Fondements de l'Analyse en France*, in *Archive for History of Exact Sciences* vol.28 (1983)

A. Monna *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Lebesgue and Borel*, in *Archive for History of Exact Sciences* vol. 9 (1972)

A.P. Youschkevitch *Le Concept de Fonction jusqu'au milieu de 19ème siècle*, (trad. J-M. Bellemin), collection *Fragments d'Histoire des Mathématiques*, brochure A.P.M.E.P. n°41, (1981)

Sources en ligne :

 # disponible sur le site de la BNF :

http://gallica.bnf.fr

$ disponible sur le site de l'Université de Cornell :

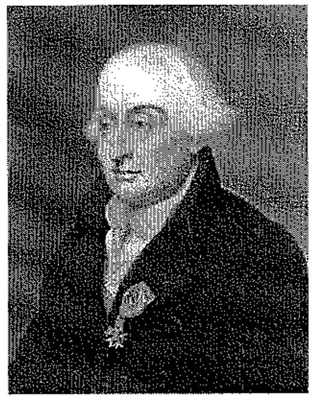
http://historical.library.cornell.edu/math

Trombinoscope réalisé grâce au site de l'Université de St. Andrews :

http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history

Trombinoscope

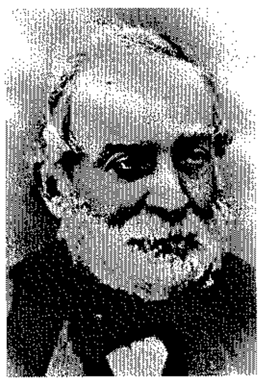
Leonhard EULER 1707-1783



Joseph-Louis LAGRANGE
1736-1813

Augustin-Louis CAUCHY
1789-1857

Ulisse DINI 1845-1918



Angelo GENOCCHI 1817-1889

Giuseppe PEANO 1858-1932

Camille JORDAN 1838-1922

Charles-Emile PICARD 1856-1941

Jacques HADAMARD 1865-1963

Document 1 : Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, 1748 Extraits du chapitre I.

7. *Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes ; les premieres sont formées par des opérations algébriques seulement, & les dernieres supposent pour leur formation des opérations transcendantes.*

Les multiples & les puissances de z sont donc des fonctions algébriques, ainsi que toutes les expressions, qui n'admettent que les opérations algébriques, dont nous avons parlé ; telle est la quantité $\frac{a + bz^n - c\sqrt{(2z - zz)}}{aaz - 3bz^3}$. Souvent les fonctions algébriques ne peuvent être représentées explicitement ; telle seroit la fonction Z de z, si elle étoit exprimée par l'équation $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. Car, quoique cette équation ne puisse être résolue, il n'en est pas moins certain que Z est égal à une expression composée de la variable z & de constantes, & que par conséquent Z est une fonction quelconque de z.

(...)

8. *Les fonctions algébriques se subdivisent en rationnelles & en irrationnelles. Dan les dernieres la variable est affectée de radicaux, & dans les premieres elle n'en est point affectée.*

(...)

Celles-ci se divisent commodément en explicites & en implicites.

Les explicites sont développées au moyen des radicaux ; nous en avons donné des exemples, & les implicites dépendent de la résolution des équations. Ainsi Z sera une fonction irrationnelle implicite de z, si elle est représentée par cette équation $Z^7 = azZ^4 - bz^5$. En effet, on ne peut en tirer la valeur explicite de Z, même en admettant les signes radicaux, par la raison que l'Algébre n'est pas encore parvenue à ce degré de perfection.

(...)

9. *Les fonctions rationnelles enfin, se divisent en entieres & en fractionnaires.*

(...)

Document 1, suite.

1. *Une quantité conſtante eſt une quantité déterminée, qui conſerve toujours la même valeur.*

(...)

2. *Une quantité variable eſt une quantité indéterminée, ou, ſi l'on veut, une quantité univerſelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

(...)

3. *Une quantité variable devient déterminée,*
attribue une valeur déterminée quelconque.

(...)

4. *Une fonction de quantité variable eſt une expreſſion analytique compoſée, de quelque maniere que ce ſoit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités conſtantes.*

Ainſi toute expreſſion analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités conſtantes, eſt une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az^2 + b\sqrt{aa - zz}$; c^z; &c, ſont des fonctions de z.

(...)

5. *Une fonction de variable eſt donc auſſi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même une infinité de valeurs, & il eſt impoſſible d'en concevoir aucune, dont elle ne ſoit ſuſceptible, puiſque la variable comprend même les valeurs imaginaires.

(...)

6. *La principale différence des fonctions conſiſte dans la combinaiſon de la variable & des quantités conſtantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par leſquelles les quantités peuvent être compoſées & combinées entr'elles. Ces opérations ſont l'Addition & la Souſtraction ; la Multiplication & la Diviſion ; l'Élévation aux Puiſſances & l'Extraction des Racines ; à quoi il faut ajouter encore la Réſolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a pluſieurs autres qu'on nomme tranſcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres ſans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

(...)

Document 1, fin.

10. *Il faut ensuite remarquer principalement la division des fonctions en uniformes & en multiformes.*

La fonction uniforme est celle qui n'obtient qu'une seule valeur déterminée, quelque valeur déterminée qu'on donne à la variable z. La fonction multiforme est celle qui, pour chaque valeur déterminée qu'on met à la place de la variable, donne plusieurs valeurs déterminées. Toutes les fonctions rationnelles soit entieres, soit fractionnaires, sont des fonctions uniformes, parce que ces sortes d'expressions, quelque soit le nombre qu'on substitue à la variable, n'obtiennent qu'une seule valeur; mais les fonctions irrationnelles sont toutes multiformes, à cause de l'ambiguité des signes radicaux, & de la double valeur qu'ils indiquent. Il y a aussi parmi les fonctions transcendantes des fonctions uniformes & multiformes, on peut même admettre des fonctions infinitiformes; tel seroit l'arc de cercle qui répondroit au sinus z, car il y a une infinité d'arcs circulaires qui ont tous le même sinus. Dans ce qui suit nous supposerons que ses lettres P, Q, R, S, T, &c. représentent chacune des fonctions uniformes de z.

Document 2 : Lagrange, *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, 1806

Extrait du chapitre I

Nous appellerons donc simplement *fonction d'une ou de plusieurs quantités* toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entreront d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités regardées comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction sont censées pouvoir recevoir toutes les valeurs possibles.

Extraits du Chapitre VI : dérivée d'une fonction composée (p et q sont supposés fonctions de x)

Ainsi l'on aura d'abord $y' = p'f'(p)$, d'où résulte ce principe : que *la fonction dérivée d'une fonction, qui est elle-même une fonction de x, est égale au produit des fonctions dérivées de ces deux fonctions.*

(...)

Supposons ensuite que y soit une fonction de p et q, que nous désignerons par $f(p, q)$;

de sorte qu'on aura

$$y' = p'f'(p) + q'f'(q) = f'(p, q).$$

(...)

Mais la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation entre x et y. Représentons en général cette équation par

$$F(y, x) = 0;$$

l est clair que, si l'on regarde y comme une fonction de x déterminée par cette équation, et qu'on imagine cette fonction substituée au lieu le y dans $F(y, x)$, il en résultera une fonction de x qui sera identiquement nulle, quelle que soit la valeur de x, et par conséquent aussi en mettant $x + i$ à la place de x, quelle que soit la valeur de i.

Dénotons cette fonction par z, et comme x, devenant $x + i$, z devient $+ iz' + \frac{i^2}{2} z'' + \ldots$, on aura, quelle que soit la valeur de i, l'équation

$$z + iz' + \frac{i^2}{2} z'' + \ldots = 0;$$

'où l'on tire les équations

$$z = 0, \quad z' = 0, \quad z'' = 0, \quad \ldots.$$

Maintenant, z étant $= F(y, x)$, on aura, par les formules ci-dessus,

$$z' = y'F'(y) + F'(x),$$

n dénotant par $F'(y)$ la fonction prime de $F(y, x)$ prise relativement y seul, et par $F'(x)$ la fonction prime de $F(y, x)$ prise relativement à , et faisant $x' = 1$, puisque x devient simplement $x + i$.

Ainsi l'équation dérivée $z' = 0$ sera

$$y'F'(y) + F'(x) = 0,$$

où l'on tire

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Document 3 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*. Œuvres Complètes, série II, tome IV.

AVERTISSEMENT.

CET ouvrage, entrepris sur la demande du Conseil d'instruction de l'École royale polytechnique, offre le résumé des Leçons que j'ai données à cette École sur le calcul infinitésimal. Il sera composé de deux volumes correspondans aux deux années qui forment la durée de l'enseignement. Je publie aujourd'hui le premier volume divisé en quarante Leçons, dont les vingt premières comprennent le calcul différentiel, et les vingt dernières une partie du calcul intégral. Les méthodes que j'ai suivies diffèrent à plusieurs égards de celles qui se trouvent exposées dans les ouvrages du même genre. Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes ; et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des *fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes, et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le théorème de TAYLOR semble fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée [*voyez* la fin de la 38.e Leçon]. Au reste, ceux qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel, et ses applications les plus importantes, peuvent être facilement exposés, sans l'intervention des séries..

Dans le calcul intégral, il m'a paru nécessaire de démontrer généralement l'existence des *intégrales* ou *fonctions primitives* avant de faire connaître leurs diverses propriétés. Pour y parvenir, il a fallu d'abord établir la notion d'*intégrales prises entre des limites données* ou *intégrales définies*.

Document 4 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de 2ème année : équations différentielles ordinaires).

Leçon 1

ON nomme *équations différentielles*, celles qui établissent des relations entre une variable indépendante x, des fonctions y, z ... de cette variable, et les différentielles de ces fonctions ou leurs dérivées des divers ordres. L'ordre de la plus haute dérivée qui se trouve comprise dans une équation différentielle, sert à fixer ce qu'on appelle l'*ordre* de cette même équation. Cela posé, une équation différentielle du premier ordre entre la variable x et les fonctions y, z ... renfermera seulement avec x, y, z ... les dérivées du premier ordre y', z' ... Si les fonctions y, z ... se réduisent à une seule y, l'équation différentielle du premier ordre ne contiendra plus que les trois quantités

$$x, \quad y \quad \text{et} \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Intégrer des équations différentielles, c'est trouver les fonctions qu'elles déterminent, ou du moins des équations nouvelles qui ne renferment que la variable et les fonctions dont il s'agit. Ces équations nouvelles se nomment *intégrales* ou *équations primitives*. L'intégrale d'une équation différentielle entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, ne peut contenir que les deux quantités variables x et y.

Lorsqu'une équation différentielle du premier ordre est résolue par rapport à la fonction dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$, elle fournit pour cette dérivée une ou plusieurs valeurs de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Si l'on suppose d'ailleurs $f(x, y) = -\frac{P}{Q}$, [P, Q désignant des fonctions nouvelles de x et de y], l'équation (1), multipliée par Q, deviendra $Q\frac{dy}{dx} = -P$, ou

$$(2) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Nous allons maintenant faire connaître les principales méthodes à l'aide desquelles on parvient, dans certains cas, à intégrer l'équation (2).

Intégration immédiate. Lorsque les fonctions P et Q vérifient la condition

$$(3) \qquad \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

le premier membre de l'équation (2) est la différentielle exacte d'une fonction u des deux variables x et y. Alors cette équation peut être présentée sous la forme

$$(4) \qquad du = 0;$$

et, pour y satisfaire, il faut évidemment supposer

$$(5) \qquad u = \mathcal{C},$$

$\mathcal{C}$ désignant une constante arbitraire.

Document 5 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de 2ème année : équations différentielles ordinaires).

Début de la Leçon 7 : position du problème et idée de la méthode

Toutes les fois qu'une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad dy = f(x, y)\,dx$$

est intégrable par l'une des méthodes exposées dans les leçons précédentes, on en conclut aisément, comme on l'a fait voir, qu'il est possible d'obtenir, pour l'inconnue y, une fonction de x propre à vérifier cette équation différentielle, et de plus à prendre une valeur particulière, mais arbitraire, y_0, dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur donnée x_0. Réciproquement, il sera certain que l'équation (1) est intégrable, et qu'elle admet une intégrale générale comprenant une constante arbitraire, si l'on démontre qu'il existe une valeur générale de y propre à remplir les deux conditions énoncées. Or, on y parvient aisément, dans un grand nombre de cas, à l'aide des principes que nous allons établir.

Concevons que, X étant une nouvelle valeur particulière de x, on désigne par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots \quad x_{n-1}$$

des quantités intermédiaires entre les limites x_0, X, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. Supposons, en outre, qu'aux quantités

$$(2) \qquad x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots \quad x_{n-1}, \quad X,$$

on fasse correspondre d'autres quantités

$$(3) \qquad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots\ldots \quad y_{n-1}, \quad Y,$$

dont la première soit précisément y_0, les suivantes étant déterminées par le moyen des équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ \&c. \ldots. \\ Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1}) f(x_{n-1} - y_{n-1}). \end{array} \right.$$

Il suffira évidemment d'éliminer, entre ces équations, $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$, pour obtenir une valeur de Y exprimée en fonction des seules quantités

$$(5) \qquad x_0; \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots \quad x_{n-1}, \quad X, \quad y_0.$$

Soit

$$(6) \qquad Y = \mathfrak{F}(x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, X, y_0)$$

cette même valeur. Elle jouira de plusieurs propriétés remarquables qui résulteront des divers théorèmes que nous allons faire connaître.

(...)

Document 5 (suite et fin) : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de 2ème année : équations différentielles ordinaires).

Fin de la Leçon 7 : énoncé des théorèmes. Les hypothèses sont la continuité de f et f'y

3.e Théorème. *Les mêmes choses étant admises que dans les théorèmes 1.er et 2.e, si l'on fait décroître à l'infini les valeurs numériques des élémens de la différence $X-x_0$, la valeur de Y déterminée par l'équation (6) convergera vers une limite qui dépendra uniquement des trois quantités*

$$x_0, \quad X \quad \text{et} \quad y_0.$$

(...)

4.e Théorème. *Les mêmes choses étant admises que dans les théorèmes précédens, désignons par $\mathfrak{F}(X)$ la limite vers laquelle converge la valeur de Y, tandis que l'on fait décroître les valeurs numériques des élémens de la différence $X-x_0$, et par*

$$(45) \qquad y = \mathfrak{F}(x)$$

ce que devient cette limite quand on y remplace la quantité X par x. y sera une fonction de x, qui aura la double propriété de se réduire à y_0 pour $x = x_0$, et de vérifier l'équation différentielle

$$(1) \qquad dy = f(x, y)\, dx,$$

en restant continue par rapport à la variable x, du moins pour toutes les valeurs de cette variable comprises entre les limites x_0 et X.

Document 6 : Cauchy, *Résumé des Leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique* (cours de 2ème année : équations différentielles ordinaires).

Leçon 8 : formulation par Cauchy du problème de recollement des solutions locales. Ici $\chi = f_y'$

Concevons maintenant que, la quantité a étant assujettie aux conditions énoncées dans le premier, le second ou le troisième théorème, la quantité X varie entre les limites x_0, x_0+a, et s'approche indéfiniment de la limite x_0+a. La valeur de $y=\mathfrak{F}(x)$ correspondante à $x=X$, savoir, $\mathfrak{F}(X)$, s'approchera elle-même indéfiniment d'une certaine limite qu'on pourra désigner par $\mathfrak{F}(x_0+a)$, et qui sera comprise entre les deux quantités y_0-Aa, y_0+Aa. Cela posé, si les deux fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ restent continues dans le voisinage du système des valeurs particulières $x=x_0+a$, $y=\mathfrak{F}(x_0+a)$, on prouvera, par des raisonnemens semblables à ceux dont nous avons déjà fait usage, que les théorèmes de la leçon précédente subsisteront, non-seulement lorsque la quantité X variera entre les limites x_0, x_0+a, mais encore tandis que cette quantité, ayant dépassé la limite x_0+a, s'approchera indéfiniment d'une nouvelle limite x_0+a_1. Par suite, on pourra calculer, avec telle approximation qu'on voudra, les valeurs de $\mathfrak{F}(X)$ correspondantes à des valeurs de X comprises entre x_0 et x_0+a_1.

Si d'ailleurs les fonctions $f(x,y)$, $\chi(x,y)$ restent continues dans le voisinage du système des valeurs particulières $x=x_0+a_1$, $y=\mathfrak{F}(x_0+a_1)$, on déterminera encore une valeur de x située au-delà de la limite x_0+a_1, et vers laquelle on pourra faire converger la quantité X dans la fonction $\mathfrak{F}(X)$. Désignons par x_0+a_2 cette nouvelle limite, et continuons de même. Les quantités

$$(35) \qquad x_0+a, \quad x_0+a_1, \quad x_0+a_2, \quad \&c\ldots$$

formeront une série croissante ou décroissante, et leurs valeurs numériques finiront par surpasser tout nombre donné, ou par s'approcher indéfiniment d'une certaine limite. Dans le premier cas, la quantité X pourra croître ou décroître indéfiniment, de manière à devenir supérieure ou inférieure à toute quantité donnée. Dans le second cas, la quantité X pourra s'approcher indéfiniment de la limite vers laquelle convergeront les différens termes de la série (35). Soit Ξ cette même limite. La limite correspondante vers laquelle convergeront les valeurs de $y=\mathfrak{F}(x)$, pourra être désignée par $\mathfrak{F}(\Xi)$; et, pour qu'on ne puisse plus faire passer la quantité X au-delà de la limite Ξ, dans la fonction $\mathfrak{F}(X)$, il sera nécessaire, ou que la quantité $\mathfrak{F}(\Xi)$ soit infinie, ou que l'une des fonctions

$$(36) \qquad \varphi[x, \mathfrak{F}(x)], \quad \chi[x, \mathfrak{F}(x)],$$

devienne infinie pour la valeur particulière $x=\Xi$, ou enfin que l'une de ces fonctions devienne discontinue dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit.

Document 7 : Cauchy, *Résumé d'un Mémoire sur la Mécanique Céleste et sur un Nouveau Calcul appelé Calcul des Limites.* Œuvres Complètes, série II tome XII

THÉORÈME I. — *Supposons qu'une fonction implicite u de la variable x soit déterminée par une équation algébrique ou transcendante, qu'elle se réduise à u_0 pour une valeur nulle de x, et que l'on ait développé cette fonction implicite en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x par la formule de Maclaurin, de Lagrange, etc., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. La somme de cette série représentera la fonction u, si la valeur de x est tellement choisie que, la série étant convergente, la fonction explicite de x et u qui constitue le premier membre de l'équation donnée soit elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x et de la différence $u - u_0$.*

(...)

Les propositions ci-dessus mentionnées peuvent encore être facilement étendues au cas où les fonctions implicites seraient déterminées par des équations aux différences finies ou infiniment petites, ou aux différences partielles, ou aux différences mêlées. Ainsi, en particulier, on pourra énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soient données plusieurs équations différentielles simultanées entre la variable x, des fonctions inconnues y, z, ... de cette variable, et leurs dérivées de divers ordres $y', z', \ldots, y'', z'', \ldots$. Supposons d'ailleurs que par la méthode des coefficients indéterminés on ait développé y, z, ... en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Les sommes de ces séries représenteront les valeurs générales de y, z, ..., si la valeur de x est tellement choisie que, les séries dont il s'agit, et par suite celles qui représenteront les dérivées de y, z, ..., étant convergentes, les fonctions explicites de $x, y, z, \ldots, y', z', \ldots$, qui constituent les premiers membres des équations données, soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, et des différences qu'on obtient en retranchant des valeurs générales de $y, z, \ldots, y', z', \ldots$ leurs valeurs initiales correspondantes à $x = 0$.*

(...)

Document 7, début du « calcul des limites »

Calcul des limites (1).

Soient p un arc réel et n un nombre entier. On trouvera, en supposant $n > 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}}\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\,dp = 0, \tag{1}$$

et, en supposant $n = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi. \tag{2}$$

Soit de plus

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

une fonction entière de la variable x. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire $\overline{x}$ dont le module soit X, en sorte qu'on ait

$$\overline{x} = \mathrm{X}e^{p\sqrt{-1}},$$

on tirera des formules (1) et (2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\overline{x}}\right) dp = 2\pi a_0;$$

on auradonc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = 2\pi f(0). \tag{3}$$

Il est d'ailleurs facile d'étendre la formule (3) au cas où $f(\overline{x})$ cesse d'être une fonction entière de x. En effet, on a généralement

$$\mathrm{D_X} f(\overline{x}) = \frac{1}{\mathrm{X}\sqrt{-1}}\,\mathrm{D}_p f(\overline{x}).$$

Or, si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente : 1° par rapport à X et à partir de $\mathrm{X} = 0$; 2° par rapport à p entre les limites

$p = -\pi$, $p = \pi$; et si l'on suppose que la fonction de X et de p, représentée par $f(\overline{x})$, reste finie et continue (avec sa dérivée), quel que soit p, pour la valeur attribuée à X et pour une valeur plus petite, on retrouvera précisément la formule (3).

D'autre part, comme on a $d\overline{x} = \overline{x}\,dp\sqrt{-1}$, si les fonctions dérivées $f'(\overline{x})$, $f''(\overline{x})$, ..., $f^{(n)}(\overline{x})$ restent elles-mêmes finies et continues pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites, il suffira d'appliquer l'intégration par parties à l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n}\,dp,$$

pour en conclure

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n}\,dp = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\overline{x})}{\overline{x}^{n-1}}\,dp = \frac{1}{n(n-1)}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f''(\overline{x})}{\overline{x}^{n-2}}\,dp = \ldots$$

et par suite

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{x^n}\,dp = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\overline{x})\,dp,$$

ou, en vertu de la formule (3),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n}\,dp = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3\ldots n}. \tag{4}$$

Si la fonction $f(\overline{x})$ s'évanouit pour une valeur nulle de x, l'équation (3) donnera simplement

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = 0. \tag{5}$$

Des formules (3), (4), (5) on peut aisément déduire, comme on va le voir, celles qui servent à développer une fonction explicite ou implicite de la variable x en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable.

Si, dans la formule (5), on remplace $f(\overline{x})$ par le produit

$$\overline{x}\,\frac{f(\overline{x}) - f(x)}{\overline{x} - x},$$

x étant différent de $\bar{x}$, et le module de x inférieur à X, on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}f(\bar{x})}{\bar{x}-x}dp=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}f(x)}{\bar{x}-x}dp=f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{x}{\bar{x}}+\frac{x^2}{\bar{x}^2}+\ldots\right)dp=2\pi f(x),$$

et par suite on retrouvera la formule connue

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}f(\bar{x})}{\bar{x}-x}dp. \tag{6}$$

L'équation (6) suppose, comme les équations (3) et (5), que la fonction de X et de p représentée par $f(\bar{x})$ reste finie et continue pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites.

Comme le rapport $\dfrac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$ est la somme de la progression géométrique

$$1,\quad \frac{x}{\bar{x}},\quad \frac{x^2}{\bar{x}^2},\quad \ldots,$$

qui est toujours convergente, tant que le module de x reste inférieur au module X de $\bar{x}$; il suit de la formule (6) que $f(x)$ sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $f(x)$ (ou sa dérivée du premier ordre) cesse d'être finie et continue.

Document 8 : Cauchy, *Mémoire sur les Fonctions Continues des Quantités Algébriques et Géométriques*, Œuvres Complètes, série II tome XIV

Cela posé, pour qu'une fonction de la variable réelle x reste continue dans le voisinage d'une valeur donnée de x, il est nécessaire qu'à cette valeur de x corresponde une valeur *finie* de la fonction. Mais est-il pareillement nécessaire que, pour la valeur donnée de x et pour chacune des valeurs voisines, la fonction acquière une valeur *unique* représentée par un seul type $f(x)$? A la rigueur, cette question pourrait être résolue négativement; et, dans le cas où il s'agit d'une fonction implicite qui offre diverses valeurs représentées par divers *types*, ou, en d'autres termes, d'une fonction liée à la variable x par une équation qui admet plusieurs racines, on pourrait dire que cette fonction implicite est *continue entre des limites données de* x, lorsque entre ces limites, un accroissement infiniment petit attribué à x produit toujours un accroissement infiniment petit de l'un quelconque des types. Mais il est plus simple de considérer chacun de ces types comme une fonction déterminée de x; et pour énoncer clairement l'hypothèse admise, il suffit de dire que chacune des valeurs de la fonction implicite est une fonction explicite de x, qui reste continue entre les limites assignées à cette variable.

Ainsi, par exemple, si l'on nomme y une fonction implicite de x, déterminée par l'équation

$$x^2+y^2=1, \tag{1}$$

les deux valeurs qu'admettra cette fonction implicite, pour une valeur réelle de x, comprise entre les limites

$$x=-1, \qquad x=1,$$

seront deux fonctions explicites représentées par les deux types

$$\sqrt{1-x^2}, \quad -\sqrt{1-x^2},$$

et dont chacune restera continue entre les limites données.

Ainsi encore, si l'on nomme y une fonction implicite de x déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang} y = x, \tag{2}$$

les valeurs qu'admettra cette fonction implicite, pour une valeur réelle de x, seront les fonctions explicites représentées par les divers termes de la progression arithmétique

$$\ldots, \quad -2\pi+\operatorname{arc}\operatorname{tang} x, \quad -\pi+\operatorname{arc}\operatorname{tang} x, \quad \operatorname{arc}\operatorname{tang} x,$$
$$\pi+\operatorname{arc}\operatorname{tang} x, \quad 2\pi+\operatorname{arc}\operatorname{tang} x, \quad \ldots,$$

et chacune de ces fonctions explicites restera continue entre limites quelconques de la variable, par conséquent entre les lim'

$$x=-\infty, \qquad x=\infty.$$

Document 8, fin.

Il n'est pas sans intérêt de rapprocher l'une de l'autre les notions de continuité dans les fonctions et de continuité dans les courbes. C'est ce que nous allons essayer de faire en peu de mots.

Concevons que, dans un plan donné, on construise une courbe dont les coordonnées rectilignes, rapportées à des axes rectangulaires ou obliques, soient la variable réelle x et une fonction réelle y de cette variable. Si l'ordonnée y, considérée comme fonction de l'abscisse x, est *explicite* et *continue* entre deux limites données

$$x = x_{\prime}, \qquad x = x_{\prime\prime},$$

la courbe sera certainement continue entre deux points qui auront pour abscisses $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$. Il y a plus ; elle offrira entre ces deux points, une seule branche correspondante à la valeur unique de la fonction y. Si, au contraire, la fonction y demeurant explicite, devient discontinue entre les limites données, pour certaines valeurs particulières x_1, x_2, ... de l'abscisse x, la courbe deviendra elle-même discontinue et se décomposera en diverses branches que limiteront des ordonnées correspondantes à ces valeurs particulières de x. Enfin, si l'ordonnée y, considérée comme fonction de x, est implicite et déterminée par une équation qui admette plusieurs racines, chacune de ces racines, quand l'équation sera résolue, deviendra une fonction explicite, continue ou discontinue, à laquelle répondra ou une seule branche de courbe, ou le système de plusieurs branches que limiteront les ordonnées correspondantes aux solutions de continuité. Donc alors des branches distinctes pourront répondre, non seulement à des valeurs diverses, mais encore à une valeur unique de l'abscisse x. D'ailleurs, dans le cas où, entre deux limites données de x, chaque valeur de la fonction implicite y est une fonction continue de x, et représente en conséquence une seule branche de courbe, il peut arriver que les diverses branches correspondantes aux diverses valeurs de y se joignent par leurs extrémités, de manière à former une courbe continue.

Document 9 : Cauchy, Œuvres Complètes, série I tome XII p.333-334

§ I. — *Considérations générales.*

Soient z, Z les affixes de deux points mobiles dans un plan. Si ces deux points se meuvent sur l'axe polaire, les variables z, Z seront réelles, et la seconde sera dite *fonction* de la première, quand le mouvement du premier point entraînera le mouvement du second. Il était naturel, il était convenable d'étendre cette définition au cas où le premier point se meut d'une manière quelconque dans le plan donné. Ce parti, que j'ai osé adopter, et qui a paru d'abord étonner quelques géomètres, est pourtant, je crois, l'unique moyen d'écarter les difficultés sans nombre qui se présentaient à l'esprit quand on méditait sur la nature et sur l'existence même de ce qu'on appelait des *fonctions de variables imaginaires*. D'ailleurs, à cette notion générale des fonctions, il importe de joindre, en l'étendant, la notion de *continuité*, telle que je l'ai donnée en 1821 dans mon *Analyse algébrique* [1], et de dire que l'affixe Z est *fonction continue* de la variable z, dans le voisinage d'une valeur finie attribuée à cette variable, quand une variation infiniment petite de z produit dans ce voisinage une variation infiniment petite de Z. La limite vers laquelle converge le rapport de la seconde variation à la première, tandis que chacune des variations s'approche indéfiniment de zéro, est précisément la *fonction dérivée*, et dépend en général tout à la fois de l'affixe z et de la direction suivant laquelle se meut, quand z varie, le point dont l'affixe est z. Mais, si la fonction dérivée reprend la même valeur pour deux directions distinctes, elle deviendra complètement indépendante de la direction, et sera une *fonction monogène*. Enfin une fonction continue de la variable z est *monodrome* lorsque, pour chaque valeur de z, la valeur de Z demeure unique tant qu'elle n'est pas infinie.

Une fonction *synectique* est une fonction monodrome et monogène qui ne devient pas infinie pour des valeurs particulières de la variable.

Une fonction peut être monodrome, monogène, ou synectique seulement entre certaines limites déterminées par le système des lignes droites ou courbes qui enveloppent une certaine aire, c'est-à-dire tant que la variable z représente l'affixe d'un point renfermé dans l'aire dont il s'agit.

Ces principes étant posés, on reconnaît sans peine que les fonctions monodromes et monogènes sont précisément celles auxquelles s'appliquent les formules générales que j'ai déduites du Calcul des résidus, comme aussi celles que j'ai données pour la détermination des intégrales définies, pour l'énumération des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques ou même transcendantes, et pour le développement des fonctions explicites ou implicites en séries convergentes et en produits convergents, les fonctions implicites pouvant d'ailleurs être déterminées, soit par des équations finies, soit par un système d'équations différentielles.

Document 10

Table des matières : Dini, *Fundamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali*,

INDICE

1878

Enoncé du théorème des fonctions implicites dans Dini, *Calcolo Differenziale*, 1907 (publication des cours de 1876-78)

Se per un valore x_0 di x la equazione $f(x,y)=0$ è soddisfatta da un valore y_0 di y, e il punto (x_0, y_0) viene ad essere un punto interno al campo C nel quale è data $f(x,y)$; e se al tempo stesso esiste un intorno (che potrà essere anche assai grande) di (x_0, y_0) nei punti del quale la funzione $f(x,y)$ è finita e continua insieme alle sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, e la seconda di queste derivate nel punto (x_0, y_0) è anche diversa da zero, allora esisterà sempre un intervallo relativo alla variabile x (x_0-h_0, x_0+h_0) cui appartiene il punto x_0 e pei punti del quale la equazione $f(x,y)=0$ definisce completamente una funzione y di x, che oltre esser sempre finita e continua, ha anche la sua derivata prima determinata e finita, e nel punto iniziale x_0 è uguale a y_0 (*).

E in questa ipotesi *la derivata $\frac{dy}{dx}$ di questa funzione y si ottiene dalla formola $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$* che proviene da $f(x,y)$ eguagliando a zero la derivata di $f(x,y)$ calcolata colla regola di derivazione delle funzioni composte, per modo che *questa derivata $\frac{dy}{dx}$ della funzione y può anche riguardarsi come data dalla formola*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Document 10, suite.

Un exposé traditionnel : le cours d'analyse de Hermite, 1873

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PREMIERS PRINCIPES.

(...)

Le traité d'analyse de Jordan (ici, 3ème édition).

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

VARIABLES RÉELLES.

I. — Limites.

II. — Ensembles.

III. — Fonctions bornées. — Fonctions intégrables.

IV. — Fonctions continues.

V. — Fonctions à variation bornée.

VI. — Dérivée et intégrale des fonctions d'une variable.

VII. — Dérivées partielles. — Différentielle totale.

(...)

Document 11 : A Genocchi, *Calcul Différentiel et Fondements du Calcul Intégral,* 1884.
(traduction libre R. Chorlay)

§5 Fonctions implicites. Egalité entre variables.

110. Une fonction d'une ou plusieurs variables peut être donnée analytiquement, lorsque sont écrites les opérations à effectuer sur la variables indépendantes pour calculer la fonction ; on dit que cette fonction est donnée *explicitement*, ou qu'il s'agit d'une *fonction explicite*. Elle peut d'autre part être déterminée par des équations qui la lie aux variables indépendantes ; dans ce cas, elle est donnée *implicitement*, il s'agit d'une *fonction implicite*. Nous allons rechercher sous quelles conditions une ou plusieurs égalités entre variables permet d'en déterminer l'une quelconque comme fonction des autres ; lorsque c'est le cas, il reste à étudier la nature et les propriétés de cette fonction.

Proposition. Soit $f(x,y)$ une équation entre les deux variables x et y, et x_0, y_0 un couple de valeurs des variables pour lequel $f(x_0,y_0) = 0$; Supposons que la fonction et ses dérivées partielles du premier ordre sont finies et continues au voisinage du point (x_0,y_0), et que $f_y'(x_0,y_0)$ n'est pas nul ; alors il existe une et une seule fonction y de x, $y = \varphi(x)$, qui vérifie l'équation au voisinage du point $x = x_0$, i.e. on a identiquement pour chaque x, $f(x, \varphi(x)) = 0$, et qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0. Cette fonction $y = \varphi(x)$ est continue et possède une dérivée finie.

En effet, soient h_1 et k_1 deux nombres positifs, assez petits pour que pour chaque x entre x_0-h_1 et x_0+h_1 et chaque y entre y_0-k_1 et y_0+k_1 la fonction f et ses dérivées premières soient continues. On peut choisir h_1 et k_1 simultanément de sorte que $f_x'(x,y)$ soit en valeur absolue plus petit qu'un nombre fixé A, et $f_y'(x,y)$, qui ne s'annule pas pour $x = x_0$ et $y = y_0$, soit en valeur absolu toujours plus grand qu'une grandeur finie B. On peut même supposer $Ah_1 < Bk_1$.
En utilisant la formule de Taylor, en tenant compte de $f(x_0,y_0)$, on obtient :

$$f(x_0+h,y_0+k) = h\, f_x'(x_0+\theta h,y_0+\theta k) + k\, f_y'(x_0+\theta h,y_0+\theta k), \quad (0 < \theta < 1).$$

Prenons dans cette formule $|h| \leq h_1$ et $|k| = k_1$, de sorte que $x_0+\theta h$ est entre x_0-h_1 et x_0+h_1 et $y_0+\theta k$ entre y_0-k_1 et y_0+k_1 ; alors :

$$| f_x'(x_0+\theta h,y_0+\theta k) | < A \,, \; | hf_x'(x_0+\theta h,y_0+\theta k) | < Ah_1$$

Par ailleurs, on a toujours $| k\, f_y'(x_0+\theta h,y_0+\theta k) | > k_1 B$ et donc dans l'expression pour $f(x_0+h,y_0+k)$, dans laquelle h et k sont à choisir librement parmi ceux vérifiant les conditions posées plus haut, le premier terme est en valeur absolue plus petit que le second ; par conséquent, cette somme a le signe de son second terme. Ce dernier change de signe lorsqu'on pose $k = +k_1$ et $k = -k_1$, car il en est ainsi de son premier facteur, tandis que le second $f(x_0+h,y_0+k)$ garde son signe constant. Mais si l'on regarde $f(x_0+h,y_0+k)$ comme une fonction de k, continue et prenant des valeurs de signe contraire, selon qu'on donne à k les valeurs $+k_1$ ou $-k_1$. $f(x_0+h,y_0+k)$ s'annule donc pour une valeur de k comprise entre $+k_1$ et $-k_1$.
Pour h fixé, cette valeur d'annulation est unique, car des équations

$$f(x_0+h,y_0+k) = 0 \text{ et } f(x_0+h,y_0+k') = 0$$

il s'en suivrait par théorème de Rolle que pour un k'' entre k et k' on aurait $f_y'(x_0+h,y_0+k'') = 0$; ce qui contredit le fait que $f_y'(x,y)$ ne s'annule pour aucun couple de valeur de notre intervalle.
On voit que lorsque les conditions ci-dessus son vérifiées, il existe pour toute valeur arbitrairement fixée x entre x_0-h_1 et x_0+h_1 une valeur y entre y_0-k_1 et y_0+k_1 qui vérifie l'équation $f(x,y) = 0$ et qui pour $x = x_0$ prend la valeur $y = y_0$. L'ensemble des valeurs de y forme une fonction continue, étant donnée que la valeur de y diffère de y_0 de moins de k_1 et que k_1 peut être rendu arbitrairement petit.

Document 11, fin.

111. La fonction y de x, déterminée de la manière précédente par l'équation $f(x,y) = 0$, possède au point $x = x_0$ une dérivée. Car si l'on donne à x la valeur x_0+h et si l'on nomme y_0+k la valeur correspondante de y, alors

$$f(x_0+h, y_0+k) = 0$$

ou encore

$$h\, f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k\, f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = 0.$$

Il s'en suit :

$$\frac{k}{h} = -\frac{f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}{f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}.$$

Si on rend h nul, k devient aussi nul, car y est une fonction continue de x. De plus, pour des h s'annulant

$$\lim f_x'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f_x'(x_0, y_0)$$

et

$$\lim f_y'(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f_y'(x_0, y_0) \neq 0.$$

Par conséquent $\frac{k}{h}$ converge vers une valeur limite déterminée et finie, et :

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x_0, y_0)}{f_y'(x_0, y_0)}.$$

Document 12 : Hadamard, *Cours d'Analyse*, 1930.

247. Application des approximations successives à la théorie des fonctions implicites. — Nous avons énoncé sans démonstration, au tome I, le

THÉORÈME. — *L'équation*

$$\text{(E)} \qquad F(x_1, x, \ldots x_m, y) = 0,$$

dont on connaît une première solution $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 \ldots$ $x_m = a_m$, $y = b$, *admet en* y, *pour* $|x_1 - a_1|$, $|x_2 - a_2|$, ... $|x_m - a_m|$ *suffisamment petits, une solution voisine de b et une seule, si la fonction* F, *supposée continue par rapport à toutes les variables dont elle dépend, admet, par rapport à* y, *une dérivée partielle également continue, différente de* o *au point* $(a_1, a_2, \ldots a_m, b)$.

Dans le cas d'une seule variable indépendante x_1, ce théorème se ramène immédiatement au théorème fondamental de Cauchy, du moins en admettant l'existence de dérivées partielles continues, non seulement par rapport à y, mais par rapport à x_1 : car la recherche d'une solution de l'équation $F(x_1, y) = 0$ équivaut (en vertu de l'égalité $F(a_1, b) = 0$) à celle d'une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}$$

avec la condition initiale $y = b$ pour $x_1 = a_1$.

Nous allons, avec M. Goursat, démontrer le théorème pour m quelconque, et sous les seules hypothèses de l'énoncé, par une méthode d'approximations successives analogue à la précédente.

Considérons d'abord l'équation

$$(e) \qquad y - b = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, y)$$

où φ est nul au point a_1, a_2, a_m, b, continu dans le domaine

$$(\mathfrak{D}) \qquad |x_1 - a_1| \leqslant \alpha, \ |x_2 - a_2| \leqslant \alpha, \ \ldots \ |x_m - a_m| \leqslant \alpha,$$

$$(\Delta) \qquad |y - b| \leqslant \beta$$

par rapport à toutes les variables et, de plus, satisfait, par rapport à y, dans ce même domaine, à la condition de Lipschitz

$$(L') \qquad |\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, Y) - \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, y)| < K|Y - y|,$$

K étant, cette fois, un nombre fixe *plus petit que* 1.

Soit à résoudre cette équation pour des valeurs données de $x_1, x_2, \ldots x_m$. Soit y_0 une valeur arbitraire de y telle que $|y_0 - b| < \beta$; déduisons en une valeur y_1 par

$$y_1 - b = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, y_0).$$

Je dis tout d'abord que

$$|y_1 - b| = |\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, y_0)|$$

est également inférieur à β, du moins si

$$(\mathfrak{D}') \qquad |x_1 - a_1| \leqslant \alpha_1, \ |x_2 - a_2| \leqslant \alpha_1, \ \ldots \ |x_m - a_m| \leqslant \alpha_1,$$

α_1 étant un nombre convenablement choisi (égal ou inférieur à α).

En effet, une application de l'inégalité (L') fournit d'abord

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, y_0) - \varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, b)| < K|y_0 - b| \leqslant K\beta.$$

D'autre part, φ étant supposé continu par rapport à l'ensemble des variables, on peut trouver un nombre fixe α_1 assez petit pour que les inégalités ($\mathfrak{D}'$) entraînent, — en tenant compte de

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots a_m, b) = 0 \text{ —},$$
$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m, b)| < (1 - K)\beta,$$

relation dont la combinaison avec la précédente fournit bien la conclusion annoncée.

Document 12, suite.

2° Si on remplace y_0 par y_1, ce qui est possible en vertu de 1°, et qui fournit une nouvelle valeur y_2 ; puis y_0 par y_2, ce qui fournit une nouvelle valeur y_3 ; etc..., y_i étant, d'une manière générale, déduit de y_{i-1} par

(A') $$y_i - b = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_{i-1}),$$

tous ces nombres successifs vérifieront (10') et on aura

$$|y_i - y_{i-1}| < K^{i-1}|y_1 - y_0| :$$

$y_2, y_3, \ldots$ *tendront donc vers une limite* y, puisque la série $\Sigma(y_i - y_{i-1})$ sera majorée par une progression géométrique décroissante.

La limite ainsi trouvée y vérifie l'équation, comme on le déduit immédiatement de (A) en passant à la limite.

Cette solution est unique, c'est-à-dire la seule qui vérifie aussi (Δ) : car, sans même raisonner comme au n° **241**, si (e) était vérifiée par une valeur Y autre qu'y, on en déduirait, par différence, une relation en contradiction avec (L').

Elle est d'ailleurs fonction continue des x, en vertu de la convergence uniforme des approximations.

Remarque. — Ce qui précède s'applique, que les variables soient réelles — auquel cas les seules hypothèses à faire sur φ sont celles qui ont été énoncées plus haut — ; ou qu'elles soient complexes : — auquel cas φ doit être supposé holomorphe par rapport aux variables dont il dépend dans le domaine défini par ($\mathfrak{D}'$) et (Δ), notre raisonnement prouvant alors que y est une fonction holomorphe des x, en vertu du théorème du n° **186** (1).

247 *bis*. Il reste à appliquer ceci à l'équation générale (E). Mais il est facile de s'assurer que, moyennant l'hypothèse

$$F'_y(a_1, a_2, \ldots a_m, b) \neq 0,$$

on peut la ramener, et même d'une infinité de façons différentes, à la forme (e).

Soit, en effet, B la valeur de $F'_y(a_1, a_2, \cdots a_m, b)$, de sorte que

$$F = B(y - b) + G(x_1, \cdots y) \qquad \text{avec} \qquad G_b' = 0.$$

En écrivant

(17) $$y = b - \frac{1}{B} G(x_1, \cdots y),$$

on lui donne bien la forme demandée, car, en vertu de la continuité de F'_y, on peut choisir α et β assez petits pour que, dans le domaine ($\mathfrak{D}$), (Δ), $\left|\frac{1}{B} G'_y\right|$ soit constamment inférieur à un nombre fixe $K < 1$. Ceci entraîne (L') en vertu de la formule des accroissements finis (1).

Plus généralement, on arrive encore au résultat en écrivant F sous la forme

(17') $$F = B_1(y - b) + H(x_1, \ldots, y)$$

d'où

$$y = b - \frac{1}{B_1} H(a_1, \ldots, b)$$

le nombre B_1 étant choisi de manière que $\frac{1}{B_1} H'_b(a_1, \cdots, b)$ ait un module inférieur à 1, c'est-à-dire que :

$$\left[\frac{B - B_1}{B_1}\right] < 1.$$

K sera alors un nombre voisin de $\frac{B - B_1}{B_1}$ (d'autant plus voisin que α, β sont plus petits).

Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires.

Dans mon Mémoire sur les équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques*, 1890), j'ai proposé incidemment une démonstration nouvelle et extrêmement simple pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. M'étant borné à l'équation du premier ordre, que j'ai d'ailleurs traitée très rapidement, je ne crois pas inutile d'exposer ici cette démonstration d'une manière complète et dans toute sa généralité.

1. Envisageons le système des m équations du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f_1(x, u, v, \ldots, w), \\ \frac{dv}{dx} &= f_2(x, u, v, \ldots, w), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dw}{dx} &= f_m(x, u, v, \ldots, w). \end{aligned}$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles $x, u, v, \ldots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$. Elles sont définies quand $x, u, v, \ldots, w$ restent respectivement compris dans les intervalles

$$\begin{aligned} &(x_0 - a, \quad x_0 + a), \\ &(u_0 - b, \quad u_0 + b), \\ &(v_0 - b, \quad v_0 + b), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(w_0 - b, \quad w_0 + b), \end{aligned}$$

a et b désignant deux grandeurs positives.

De plus, on suppose que l'on puisse déterminer m quantités positives A, B, ..., L, telles que

$$\begin{aligned} &|f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w)| \\ &\quad < \mathrm{A}.|u' - u| + \mathrm{B}.|v' - v| + \ldots + \mathrm{L}.|w' - w| \end{aligned}$$

(où $|\alpha|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de α), x ainsi que les $u, v, \ldots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Il en sera évidemment ainsi, en particulier, si les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre, restant finies, par rapport à $u, v, \ldots, w$.

Ces hypothèses très générales étant faites, on veut démontrer qu'*il existe des fonctions $u, v, \ldots, w$ de x, continues dans le voisinage de x_0, satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant respectivement, pour $x = x_0$, à $u_0, v_0, \ldots, w_0$.*

2. Nous procéderons par approximations successives. Considérons d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \ldots, w_0), \qquad \ldots, \qquad \frac{dw_1}{dx} = f_m(x, u_0, v_0, \ldots, w_0);$$

nous en tirons, par quadratures, les fonctions $u_1, v_1, \ldots, w_1$, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \ldots, w_1), \qquad \ldots, \qquad \frac{dw_2}{dx} = f_m(x, u_1, v_1, \ldots, w_1),$$

et l'on détermine $u_2, v_2, \ldots, w_2$ par la condition qu'elles prennent respectivement pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$. On continue ainsi indéfiniment. Les fonctions $u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}$ seront liées aux suivantes $u_m, v_m, \ldots, w_m$ par les relations

$$\frac{du_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dw_m}{dx} = f_m(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$

et, pour $x = x_0$, on a

$$u_m = u_0, \quad v_m = v_0, \quad \ldots, \quad w_m = w_0.$$

Nous allons établir que, m augmentant indéfiniment, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ ***tendent vers des limites qui représentent les intégrales cherchées, pourvu que x reste suffisamment voisin de x_0.***

Soit M la valeur absolue maxima des fonctions f, quand les variables dont elles dépendent restent dans les limites indiquées. Désignons par ρ une quantité au plus égale à a : si x reste dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, on aura

$$|u_1 - u_0| < M\rho, \quad \ldots, \quad |w_1 - w_0| < M\rho.$$

Par suite, si $M\rho < b$, les quantités $u_1, v_1, \ldots, w_1$ resteront dans les limites voulues, et il est évident qu'alors il en sera de même pour tous les autres systèmes de valeurs $u, v, \ldots, w$. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ, nous allons supposer que x reste dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

En posant

$$u_m - u_{m-1} = U_m, \quad \ldots, \quad w_m - w_{m-1} = W_m,$$

on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dU_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_1(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dW_m}{dx} = f_m(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_m(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2}) \end{array}\right\} (m = 2, \ldots, \infty).$$

Or on a

$$|U_1| < M\delta, \quad \ldots, \quad |W_1| < M\delta.$$

Les équations précédentes, pour $m = 2$, démontrent que $|U_2|$, $|V_2|, \ldots, |W_2|$ sont inférieurs à

$$(A + B + \ldots + L)M\delta^2,$$

et, d'une manière générale, de proche en proche, on voit que $|U_m|, \ldots, |W_m|$ sont inférieurs à

$$M\delta(A + B + \ldots + L)^{m-1}\delta^{m-1}.$$

Or

$$u_m = u_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_m;$$

par suite, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers une limite, si

$$(A + B + \ldots + L)\delta < 1.$$

En prenant δ assez petit, cette condition sera vérifiée. Nous voyons donc que $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers des limites déterminées $u, v, \ldots, w$, fonctions continues de x dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δ ***étant la plus petite des trois quantités***

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{A + B + \ldots + L};$$

$u, v, \ldots, w$ seront représentées par des séries qui convergent à la manière d'une progression géométrique décroissante.

On a d'ailleurs

$$u_m = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1})\,dx + u_0,$$

et, puisque les $u_m, v_m, \ldots, w_m$ diffèrent de leurs limites d'aussi peu qu'on veut, pour m assez grand, quel que soit x dans l'intervalle indiqué, on aura, à la limite

$$u = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u, v, \ldots, w)\,dx + u_0;$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w),$$

et de même pour les autres équations. ***Les fonctions $u, v, \ldots, w$ sont donc les intégrales cherchées.***

SUR

LES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 34, 1906.)

1. Soient données les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

qui peuvent être considérées comme faisant correspondre à un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un espace e_n à n dimensions, un point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'un espace analogue E_n, point que nous nommerons ici l'*image* du premier.

Ces équations sont-elles résolubles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$? A tout point de E_n, peut-on faire correspondre d'une manière univoque un point de e_n auquel il serve d'image ?

Il est clair que la question est double. Les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant données, elle consiste à se demander :

I. Si les équations (1) admettent toujours (en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) une solution; (*possibilité*)

II. S'il est impossible que ces équations admettent plus d'une solution. (*unicité*)

Les méthodes du Calcul différentiel conduisent à en chercher la solution dans les propriétés infinitésimales des fonctions f qui définissent la transformation. Une condition nécessaire bien connue est (en supposant que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ admettent des dérivées premières continues) que *le déterminant fonctionnel*

$$(2)\qquad \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

soit de signe constant.

Cette condition prise au sens étroit est d'ailleurs suffisante *localement*, c'est-à-dire que, a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant un point de e_n où le déterminant (2) n'est pas nul et A $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ son image, on peut, autour de ce dernier point, décrire une sphère assez petite pour qu'un point quelconque pris à son intérieur soit l'image d'un point et d'un seul voisin de a.

2. On a quelquefois admis que la condition précédente était suffisante d'une manière générale, c'est-à-dire que, si elle était vérifiée quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, elle entraînait, quels que soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, une réponse affirmative aux questions I et II.

Il est pourtant clair, dès le cas d'une variable ($n = 1$), que l'on n'est pas ainsi assuré de remplir la condition I. Si la fonction $X = f(x)$ admet une dérivée première f' toujours positive, l'équation

$$X = f(x)$$

considérée comme équation en x, n'admet jamais plus d'une solution, mais on peut choisir X de manière qu'elle n'en admette aucune, à moins que les deux intégrales

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{a} f'(x)\,dx, \quad \int_{a}^{\infty} f'(x)\,dx$$

ne soient infinies.

Pour n supérieur à 1, il est visible qu'il ne suffit pas de remplacer la dérivée f' par le déterminant fonctionnel (2). Par exemple, pour la transformation

$$X = f(x), \qquad Y = \psi(x)\varphi(y),$$

le déterminant fonctionnel est $f'(x)\,\psi(x)\,\varphi'(y)$; on peut, en le supposant supérieur à un nombre positif fixe et même indéfiniment croissant (et cela d'une manière aussi rapide qu'on le veut) avec x ou y, admettre néanmoins que les intégrales (3) sont finies et que, par conséquent, X n'est pas susceptible de prendre toutes les valeurs réelles. Une aire, indéfiniment étendue dans tous les sens, du plan des xy, a alors pour image une aire qui s'allonge indéfiniment dans le sens parallèle à l'axe des Y, mais qui reste comprise entre deux ordonnées fixes.

3. La quantité qu'il convient d'introduire ici, à la place du déterminant fonctionnel, est évidemment l'*axe mineur* μ *de l'ellipse* ou de l'*ellipsoïde de déformation*, c'est-à-dire la plus petite valeur du rapport

$$\sqrt{\frac{dX_1^2 + dX_2^2 + \ldots + dX_n^2}{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}},$$

et la condition qu'il y a lieu de se donner à cet égard est :

[Condition (C)], que, μ_ρ désignant le *minimum de* μ *sur la sphère*

(4) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2$$

de l'espace e_n, *l'intégrale*

(5) $$\int_0^\infty \mu_\rho \, d\rho$$

soit infinie.

Si cette condition est remplie, une ligne de longueur infinie tracée dans e_n ne pourra pas avoir pour image une ligne de longueur finie.

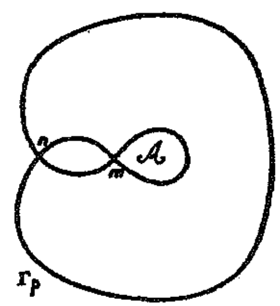
4. Mais la question est loin d'être ainsi résolue. Car, contrairement à ce qui arrive dans le cas d'une variable, on sait que le non-évanouissement du déterminant fonctionnel, dans une région finie, quelconque de e_n, *n'assure même plus l'unicité*. Les fonctions

(1') $$\begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

étant définies dans une région déterminée (σ) du plan des x_1, x_2 et ayant, dans toute cette région, leur déterminant fonctionnel positif et non nul, une aire s intérieure à σ, limitée par une courbe fermée unique (sans point double) γ, peut avoir pour image une aire se recouvrant partiellement elle-même, γ ayant pour image une courbe Γ à points doubles, analogue à celle qui est représentée figure 1 (1). Un même point de cette aire peut alors être l'image commune de plusieurs points de s.

En un mot, les données précédentes ne fournissent aucun renseignement sur la résolubilité des équations (1'), sauf à l'intérieur de cercles suffisamment petits — dont les méthodes classiques ne font même pas connaître explicitement le rayon (2).

Fig. 1.



NOMBRES CONSTRUCTIBLES À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Martine Bühler

Les constructions géométriques à la règle et au compas sont une source ancienne d'inspiration pour les mathématiciens. Il paraît difficile d'aborder le sujet sans parler des travaux des géomètres grecs. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux constructions exposées par Euclide dans ses *Eléments*. Nos sources principales sur la géométrie grecque sont les ouvrages de Pappus et Proclus. Proclus (412 ap J.C.– 486 ap J.C.) a écrit un *Commentaire au premier livre des Eléments*, précédé d'un prologue traitant entre autres de la géométrie et de son histoire. Pappus (vers 300 ap J.C.- 350 ap J.C.) est célèbre pour sa *Collection Mathématique* écrite au quatrième siècle après Jésus-Christ. Les commentaires écrits sont donc fort tardifs : on estime généralement qu'Euclide a été actif au début du troisième siècle avant Jésus-Christ et qu'il appartenait à l'école d'Alexandrie. Il a écrit d'autres ouvrages que les *Eléments*, la plupart perdus. Les *Eléments* sont une compilation de travaux antérieurs avec des ajouts personnels. Ce texte a été abondamment édité et commenté ; on possède entre 400 et 500 manuscrits des *Eléments* (tous très tardifs) et il y a eu plus de mille éditions imprimées, ce qui en fait le second best-seller après la Bible. Les *Eléments* ont donc eu une grande influence sur le développement des mathématiques occidentales, mais il ne faudrait cependant pas réduire les mathématiques grecques aux *Eléments*. En particulier, en géométrie, les Grecs ne se sont pas contentés de la règle et du compas ; ils ont étudié les coniques, la spirale, les conchoïdes etc.

Les constructions à la règle et au compas dans les *Eléments*

Les *Eléments* se composent de treize livres. Les quatre premiers livres sont des livres de géométrie « élémentaire ». Le livre I débute par des définitions, des demandes et des notions communes. Les trois premières demandes donnent au géomètre ses instruments : la règle et le compas[1].

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

[1] Les extraits donnés sont tirés des *Eléments* traduction Peyrard (1819) Réédition Blanchard. Dans le texte, nous rencontrons les abréviations def, not, dem qui renvoient aux définitions, notions communes et demandes ainsi que des nombres entre parenthèses qui renvoient aux propositions précédentes.

Le livre déroule ensuite 48 propositions, chacune étant démontrée à l'aide des demandes et/ou des propositions précédentes. Les propositions sont, soit des théorèmes affirmant des résultats (par exemple la proposition 47 est ce que nous nommons théorème de « Pythagore »), soit des problèmes de construction (dont nous étudierons quelques exemples). Dans le cas d'un problème de construction, Euclide indique la construction à la règle et au compas, puis en justifie la validité. La première proposition donne la construction du triangle équilatéral.

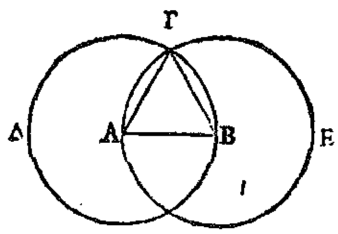
PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.

Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. 1).



Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA ; mais on a démontré que la droite ΓA était égale à la droite AB ; donc chacune des droites ΓA, ΓB est égale à la droite AB; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓA est égale à la droite ΓB ; donc les trois droites ΓA, AB, BΓ sont égales entre elles.

Conclusion. Donc le triangle ABΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.

On voit bien là le déroulement usuel d'une proposition chez Euclide, avec un énoncé écrit de manière générale, puis réécrit en nommant les points, puis la construction, enfin la démonstration. La suite du livre I mêle théorèmes et problèmes de construction. Euclide démontre dès la proposition IV un cas d'égalité des triangles (un angle égal entre deux côtés égaux), pierre angulaire d'un grand nombre de démonstrations. La proposition VIII énonce le troisième cas d'égalité (trois côtés égaux). Euclide donne les constructions géométriques élémentaires : bissection d'un angle, milieu d'un segment, perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné, report d'un angle donné, parallèle à une droite donnée. Voici quelques-unes de ces constructions.

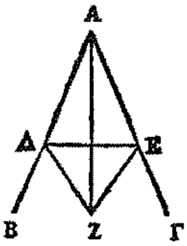
Bissection d'un angle

PROPOSITION IX.

Partager un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit ΒΑΓ un angle rectiligne donné ; il faut le partager en deux parties égales.

Prenons dans la droite ΑΒ un point quelconque Δ, retranchons de la droite ΑΓ une droite ΑΕ égale à la droite ΑΔ, joignons ΔΕ, sur la droite ΔΕ, construisons le triangle équilatéral ΔΕΖ (1), et joignons ΑΖ ; je dis que l'angle ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ.



Puisque ΑΔ est égal à ΑΕ, et que la droite ΑΖ est commune, les deux droites ΔΑ, ΑΖ seront égales aux deux droites ΕΑ, ΑΖ, chacune à chacune ; mais la base ΔΖ est égale à la base ΕΖ ; donc l'angle ΔΑΖ est égal à l'angle ΕΑΖ (8).

Donc l'angle rectiligne donné ΒΑΓ est partagé en deux parties égales par la droite ΑΖ ; ce qu'il fallait faire.

On voit bien là fonctionner le raisonnement déductif d'Euclide. Il renvoie à la première proposition pour la construction du triangle équilatéral ΔEZ, puis à la proposition 8 pour l'égalité des triangles ΔAZ et EAZ. Dans la proposition 10, nous allons le voir utiliser la proposition 9 pour bissecter un angle, puis le « deuxième cas d'égalité des triangles » (proposition 4) pour conclure à la validité de sa construction.

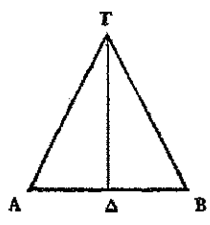
Milieu d'un segment

PROPOSITION X.

Partager une droite donnée et finie en deux parties égales.

Soit donnée une droite finie ΑΒ ; il faut partager la droite finie ΑΒ en deux parties égales.

Construisons sur cette droite un triangle équilatéral ΑΒΓ (1), et partageons l'angle ΑΓΒ en deux parties égales par la droite ΓΔ (9) ; je dis que la droite ΑΒ est partagée en deux parties égales au point Δ.



Car puisque la droite ΑΓ est égale à la droite ΓΒ, et que la droite ΓΔ est commune, les deux droites ΑΓ, ΓΔ sont égales aux deux droites ΒΓ, ΓΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΑΓΔ est égal à l'angle ΒΓΔ; donc la base ΑΔ et égale à la base ΒΔ (4).

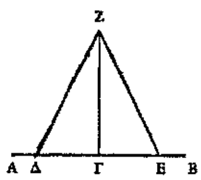
Donc la droite donnée et finie ΑΒ est partagée en deux parties égales au point Δ; ce qu'il fallait faire.

Perpendiculaire à une droite donnée

PROPOSITION XI.

A une droite donnée, et à un point donné dans cette droite, mener une ligne droite à angles droits.

Soit ΑΒ une droite donnée, et Γ le point donné dans cette droite; il faut du point Γ mener à la droite ΑΒ une ligne droite à angles droits.



Prenons dans la ligne droite ΑΓ un point quelconque Δ, faisons ΓΕ égal à ΓΔ (3), construisons sur ΔΕ le triangle équilatéral ΖΔΕ, et joignons ΖΓ; je dis que la droite ΓΖ est menée à angles droits à la droite ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Car puisque la droite ΓΔ est égale à la droite ΓΕ, et que la droite ΓΖ est commune, les deux droites ΔΓ, ΓΖ sont égales aux deux droites ΕΓ, ΓΖ, chacune à chacune; mais la base ΔΖ est égale à la base ΖΕ; donc l'angle ΔΓΖ est égal à l'angle ΕΓΖ (8); mais ces deux angles sont de suite, et lorsqu'une droite placée sur une droite fait les angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit (déf. 10); donc chacun des angles ΔΓΖ, ΖΓΕ est droit.

Donc la ligne droite ΖΓ a été menée à angles droits à la droite donnée ΑΒ du point Γ donné dans cette droite.

Le livre II, assez court, est constitué de propositions démontrant ce qu'on pourrait appeler des « identités remarquables » géométriques. Comme on a pu le remarquer en lisant quelques propositions du livre I, il n'y a aucune numérisation de la géométrie chez Euclide : il traite d'égalités de figures, de grandeurs, mais pas de nombres. Le livre II donne des égalités de figures en aire et ces égalités sont utilisées dans des problèmes ultérieurs à la manière de nos identités remarquables en algèbre, mais à aucun moment Euclide n'attribue un nombre à une grandeur. Nous donnons dans l'annexe 1 un exemple d'une de ces identités (proposition VI) et son utilisation pour résoudre un problème de construction. Le livre II résout deux problèmes de construction : un partage de segment (proposition 11 dans l'annexe 1) et la quadrature d'une figure rectiligne, c'est-à-dire la construction à la règle et au compas d'un carré ayant même aire qu'une figure rectiligne donnée.

Le livre III est consacré au cercle. Le livre IV débute par des définitions de figures inscrites et circonscrites ; il donne des constructions de polygones réguliers inscrits dans un cercle donné. Euclide construit ainsi un carré, un pentagone régulier, un hexagone régulier et un quindécagone régulier. Rappelons qu'un polygone régulier est un polygone à côtés et à angles égaux. Nous ne suivrons pas l'ordre d'exposition d'Euclide, et commencerons par les figures les plus simples à obtenir, le carré et l'hexagone régulier.

Construction du carré

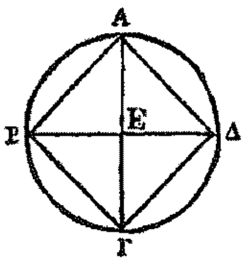
PROPOSITION VI.

Inscrire un quarré dans un cercle donné.

Soit ΑΒΓΔ le cercle donné; il faut inscrire un quarré dans le cercle ΑΒΓΔ.

Menons les diamètres ΑΓ, ΒΔ du cercle ΑΒΓΔ perpendiculaires l'un à l'autre (11. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Puisque ΒΕ est égal à ΕΔ, car le point Ε est le centre, et que la droite ΕΑ est commune et à angles droits, la base ΑΒ est égale à la base ΑΔ (4. 1). Par la même raison, chacune des droites ΒΓ, ΓΔ est égale à chacune des droites ΒΑ, ΑΔ; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est rectangle. Car puisque la droite ΒΔ est un diamètre du cercle ΑΒΓΔ, la figure ΒΑΔ est un demi-cercle. Donc l'angle ΒΑΔ est droit (31. 1). Par la



même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ est droit aussi; donc le quadrilatère ΑΒΓΔ est rectangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral; donc ce quadrilatère est un quarré. Et ce quarré est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔ.

Donc on a inscrit le quarré ΑΒΓΔ dans le cercle donné ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait faire.

Si la construction est bien celle dont nous avons l'habitude, la démonstration diffère de celle que nous donnerions sans doute à nos élèves. On voit de nouveau utilisée la proposition 4 du livre I. La construction de l'hexagone régulier est également habituelle, mais la démonstration en est un peu lourde ; nous la renvoyons à l'annexe 2.

La construction du pentagone régulier est plus délicate à obtenir. Euclide utilise des propriétés angulaires du pentagone pour obtenir une construction « élémentaire » n'utilisant pas d'autres théorèmes que ceux des livres I et II, et en particulier n'utilisant pas les proportions. Il commence par construire un triangle isocèle ayant les angles à la base doubles de l'angle au sommet, puis l'inscrit dans un cercle donné et en déduit la construction du pentagone. Nous donnons dans l'annexe 3 le texte complet d'Euclide.

Il est intéressant de voir comment les constructions précédentes lui permettent alors de construire le quindécagone, car la méthode sera reprise par les mathématiciens ultérieurs et généralisée par Gauss, qui la reliera clairement à des propriétés arithmétiques. Le texte d'Euclide (proposition 16 du livre IV) est donné dans l'annexe 4. Examinons la méthode utilisée. On inscrit dans le cercle donné les cordes AB et AC (B étant sur l'arc AC) telles que AC est le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle (facile à obtenir à partir de l'hexagone par exemple) et AB est le côté d'un pentagone régulier. Alors l'arc AC vaut un tiers de circonférence et l'arc AB vaut un cinquième de circonférence ; donc l'arc BC vaut :

$$\frac{1}{3}circonférence-\frac{1}{5}circonférence=\frac{2}{15}circonférence.$$

Il suffit donc de bissecter l'arc BC en E pour obtenir le côté du quindécagone régulier inscrit dans le cercle donné.

A la fin du livre IV des *Eléments*, nous avons donc les moyens de construire les polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 15 côtés et tous les polygones obtenus par simple bissection (décagone à partir du pentagone par exemple). On trouve chez les mathématiciens ultérieurs d'autres constructions, éventuellement plus simples, de ces mêmes polygones. Mais il faut attendre Gauss au dix-neuvième siècle pour trouver des constructions d'autres polygones, qui ne peuvent pas être obtenus à partir de ceux construits par Euclide.

La construction des polygones réguliers n'est pas le seul problème de construction abordé par les Grecs. La construction de l'ennéagone (polygone à 9 côtés) régulier mène directement à un problème célèbre, celui de la trisection de l'angle, qui permettrait de passer du triangle équilatéral à l'ennéagone. Le fait également qu'on puisse bissecter facilement un angle a pu amener les mathématiciens à se poser le problème de la trisection. Les deux autres plus célèbres problèmes de construction sont ceux de la quadrature du cercle (construire un carré d'aire égale à celle d'un cercle donné) et de la duplication du cube (construire un cube de volume double de celui d'un cube donné). Nous aurons l'occasion de reparler de ces trois problèmes.

L'apport de Descartes : l'irruption de l'algèbre dans les problèmes de géométrie (1637)

Nous avons souligné la séparation totale du numérique et du géométrique chez les Grecs. En 1637, paraît à Leyde le *Discours de la Méthode* de Descartes, qui est l'un des textes décisifs de la pensée scientifique au dix-septième siècle. Le titre complet est : *Discours de la Méthode. Pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences.* Le *Discours* a pour but essentiellement de proposer les règles permettant de construire une science dont la certitude égale celle des mathématiques, puis d'en déduire une métaphysique rationnelle, conciliant l'Homme et Dieu.

Ce texte introductif est suivi de trois essais scientifiques : *La Dioptrique*, *Les Météores* et *La Géométrie*. Cet ouvrage est écrit en français, et non en latin comme le voudrait la tradition. Descartes s'en explique :

> *Et si j'escris en François, qui est la langue de mon païs, plutost qu'en Latin, qui est celle de mes Precepteurs, c'est à cause que j'espere que ceux qui ne se servent que de leur raison naturelle toute pure, jugeront mieux de mes opinions que ceux qui ne croiyent qu'aux livres anciens et, pour ceux qui joignent le bon sens avec l'estude, lesquels seuls je souhaite pour mes juges, ils ne seront point, je m'asseure, si partiaux pour le Latin qu'ils refusent d'entendre mes raisons pour ce que je les explique en langue vulgaire.*

La Géométrie fut perçue comme un ouvrage difficile par les contemporains et disparut souvent des éditions ultérieures du *Discours de la Méthode.* Par contre, elle fut très étudiée par les mathématiciens et souvent éditée « à part » avec d'abondants commentaires. L'apport principal de Descartes est la numérisation de la géométrie par le choix d'une longueur unité. Il ramène les problèmes géométriques à des problèmes algébriques de résolution d'équations en désignant par des lettres les quantités géométriques (a, b, c … pour les quantités connues, x, y, z…pour les quantités inconnues). A l'inverse, des constructions géométriques permettent de résoudre graphiquement des équations. Le premier livre nous intéresse particulièrement, car il traite des problèmes plans, c'est-à-dire de ceux qui ne font intervenir que des droites et des cercles.

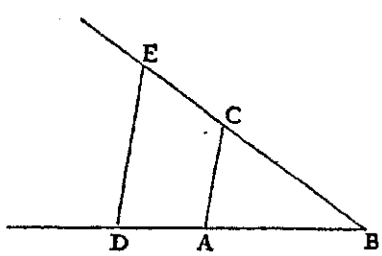
***La Géométrie Livre Premier,* Descartes (1637) Ré-édition Dover New-York (1954)**

TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

Commēt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

La Multiplication.

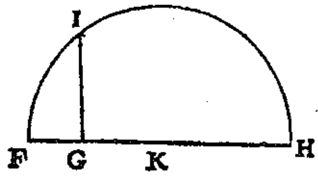


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.

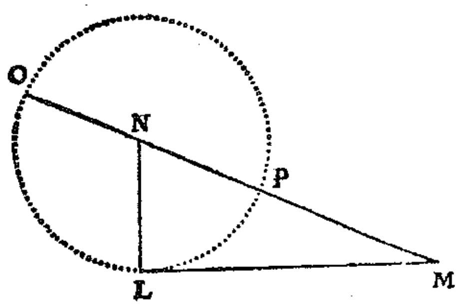


Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouſte en ligne droite FG, qui eſt l'vnité, & diuiſant FH en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur FH, c'eſt GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Ainsi, connaissant deux longueurs, Descartes en construit la somme, la différence, le produit, le quotient ; il sait également construire la racine carrée d'une longueur et les solutions positives d'une équation du second degré à coefficients donnés.

Car ſi i'ay par exemple

$$z^2 \infty az + bb$$



ie fais le triangle rectangle NLM, dont le coſté LM eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre LN eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant MN la baze de ce triangle, iuſques a O, en ſorte qu'NO ſoit eſgale a NL, la toute OM eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Ne manipulant que des nombres positifs, Descartes donne une autre construction[2] pour l'équation $z^2=az-bb$.

Une interprétation moderne des résultats de Descartes : nombres constructibles à la règle et au compas

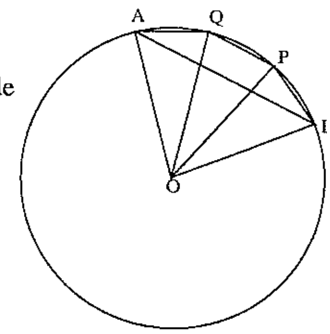
On se donne deux points distincts O et I. On dit qu'un point M est constructible à la règle et au compas à partir de {O, I} s'il existe une chaîne finie de points $\{M_1, M_2, M_3,\ldots,M_k\}$ tels que $M_1 = O$, $M_2 = I,\ldots, M_k = M$ et Mj (pour j = 3 à k) est l'intersection de droites et cercles obtenus :

- Soit en joignant deux points de $\{M_1, M_2, M_3,\ldots,M_{j-1}\}=C_{j-1}$

♣ Soit en prenant comme centre un point de C_{j-1} et comme rayon la distance entre deux points de C_{j-1}.

A partir de {O, I}, on peut construire à la règle et au compas le point J tel que, OI étant choisi comme unité, (O, I, J) est un repère orthonormé. On dit qu'un nombre réel est constructible à la règle et au compas s'il est l'abscisse ou l'ordonnée d'un point constructible. En élargissant les résultats de Descartes aux nombres réels négatifs (ce qui n'offre aucune difficulté, car, si a est constructible, -a l'est aussi), on voit que, si a et b sont constructibles, a+b, a-b, ab, a/b (si b≠0) le sont aussi. De même, si un nombre réel a positif est constructible, sa racine carrée est constructible. L'ensemble des nombres réels constructibles est donc un sous-corps de $\mathbb{R}$ (donc contenant $\mathbb{Q}$) stable par racine carrée. On peut étendre la définition aux nombres complexes : un nombre complexe est constructible à la règle et au compas s'il est l'affixe d'un point constructible, ou, ce qui revient au même, si ses parties réelle et imaginaire sont constructibles. Comment s'inscrivent dans cette théorie les problèmes « classiques » de construction à la règle et au compas ?

- ♣ La construction d'un polygone régulier à n côtés dans un cercle donné (dont on peut toujours prendre le rayon comme unité) revient à construire la longueur de son côté (point de vue de Descartes) ou à construire le nombre $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ (nous verrons comment Gauss utilise magistralement ce point de vue).
- ♣ La quadrature du cercle : il s'agit de construire à la règle et au compas, à partir d'un cercle donné (dont le rayon peut être pris comme unité), un carré de même aire que le cercle, c'est-à-dire de côté $\sqrt{\pi}$. Il s'agit donc de construire le nombre $\sqrt{\pi}$, ou, ce qui revient au même avec les constructions effectuées par Descartes, le nombre π.
- ♣ La duplication du cube : il s'agit de construire le nombre $\sqrt[3]{2}$.
- ♣ La trisection de l'angle : là encore, on peut travailler dans un cercle de rayon unité. I et A étant donnés, il faut construire P et Q tels que les angles IOP, POQ, QOA sont égaux. Le point de vue de Descartes l'amène à chercher à construire la longueur z =IP dont il montre qu'elle est solution d'une équation du troisième degré : $z^3 = 3z - q$ où q =AI (avec OA = 1)[3].



Le travail de Gauss : polygones réguliers et équations cyclotomiques (1801)

Descartes a montré que les solutions d'une équation du second degré sont constructibles à partir de segments dont les longueurs sont les coefficients de l'équation (rappelons que Descartes ne considère que les nombres réels positifs). Il y a donc un lien entre la théorie des équations algébriques et la constructibilité à la règle et au compas. Dans le cas des polygones réguliers, Gauss explicite totalement ce lien et donne une caractérisation des polygones réguliers constructibles à la règle et au compas.

Gauss commence par généraliser la remarque d'Euclide permettant de construire le quindécagone à partir du triangle équilatéral et du pentagone. Si on sait construire les côtés des polygones réguliers à m et n côtés avec m et n premiers entre eux, alors on sait construire le côté du polygone à mn côtés.

---

[2] Nous donnons dans l'annexe 5 un extrait plus complet du texte de Descartes.

[3] Voir l'annexe 6.

En effet, d'après le théorème de Bézout, on peut trouver u et v tels que $um+nv=1$, c'est-à-dire $\frac{u}{n}+\frac{v}{m}=\frac{1}{mn}$. On appelle [AB] et [CD] les cordes soutendant les arcs de $\frac{360°}{m}$ et de $\frac{360°}{n}$. On met à la suite u cordes de longueur AC et v cordes de longueur AB (en changeant de sens pour celui des deux nombres u et v qui est négatif) ; comme $u\frac{360}{n}+v\frac{360}{m}=\frac{360}{mn}$, on obtient ainsi une corde soutendant l'arc de $\frac{360°}{mn}$, c'est-à-dire le côté du polygone régulier à mn côtés.

Gauss en conclut qu'il suffit de chercher à construire les polygones réguliers à p^{α} côtés, où p est un nombre premier impair, la bissection d'un angle étant toujours possible à la règle et au compas. Il s'attaque alors au problème de la construction du polygone à n côtés, avec n premier impair. Un repère orthonormé étant donné, il faut construire les points d'affixe $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $(k=0 \text{ à } n)$ c'est-à-dire les solutions de l'équation $x^n-1=0$. Cette équation n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$ car elle possède la racine 1. Après division par $x-1$, on obtient l'équation cyclotomique : $x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1=0$, dont les racines sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité différentes de 1. On appelle Ω l'ensemble des solutions de l'équation.

$$\Omega=\{r,r^2,...,r^{n-1}\} \text{avec } r=e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Extrait des *Recherches Arithmétiques*, Gauss

"342. *Le but de nos recherches, qu'il n'est pas inutile d'annoncer ici en plus de mots, est de décomposer* X graduellement[4] *en un nombre de facteurs de plus en plus grand, et cela de manière à ce que les coefficiens de ces facteurs puissent être déterminés par des équations du degré le plus bas possible, jusqu'à ce que, de cette manière, on parvienne à des facteurs simples, ou aux racines Ω. Nous ferons voir que si l'on décompose le nombre p - 1 en facteurs entiers quelconques α, β, γ, etc. (pour lesquels on peut prendre les facteurs premiers), X est décomposable en α facteurs du degré* $\frac{n-1}{\alpha}$, *dont les coefficiens seront déterminés par une équation du degré α ; que chacun de ces facteurs est décomposable en β facteurs du degré* $\frac{n-1}{\alpha\beta}$, *à l'aide d'une équation de degré β, etc. De sorte que ν étant le nombre des facteurs α, β, γ, etc., la recherche des racines Ω est ramenée à la résolution de ν équations des degrés α, β, γ, etc.*

Par exemple, pour n = 17, on a : n - 1 = 2 . 2 . 2 . 2 ; il faut résoudre quatre équations du second degré ; pour n = 73, il faut en résoudre trois du second et deux du troisième."

La méthode de Gauss consiste à grouper astucieusement les racines de l'équation cyclotomique et à les obtenir par la résolution « en cascade » d'équations de degré moindre. Nous allons examiner la méthode en détail pour deux exemples : n=5 et n=7.

[4] X est le polynôme $x^n+x^{n-1}+...+x+1$

Premier exemple : construction du pentagone régulier

Il faut construire $r=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, solution de $x^4+x^3+x^2+x+1=0$. L'ensemble des solutions de cette équation est $\Omega=\{r,r^2,r^3,r^4\}$. On groupe les racines deux par deux :

$$\alpha=r+r^4$$
$$\beta=r^2+r^3$$

La somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle, donc on obtient :

$$\alpha+\beta=r+r^2+r^3+r^4=-1$$
$$\alpha\beta=(r+r^4)(r^2+r^3)=r^3+r^6+r^4+r^7=r^3+r+r^4+r^2=-1$$

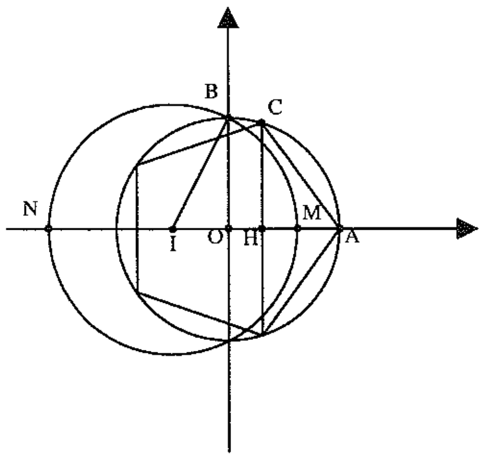
Donc α et β sont solutions de l'équation : $x^2+x-1=0$. On obtient ainsi α et β comme solutions d'une équation du second degré à coefficients rationnels, donc on peut construire[5] α et β. On utilise ensuite :

$$r+r^4=\alpha$$
$$rr^4=r^5=1$$

Donc r et r^4 sont solutions de l'équation : $x^2-\alpha x-1=0$.

On trouve donc r en résolvant deux (nombre de facteurs premiers dans n-1=4) équations de degré 2 (seul nombre premier intervenant dans la décomposition de n-1=4).

Cette méthode est celle utilisée dans les exercices de Terminale S sur les nombres complexes pour faire construire le pentagone régulier. Simplement, pour simplifier les choses, on fait remarquer aux élèves que $\alpha=r+r^4=r+\bar{r}=2\cos\frac{2\pi}{5}$ donc α est la solution positive de l'équation $x^2+x-1=0$ et β en est la solution négative.



Sur la figure : (O, A, B) est un repère orthonormal. On place le point I d'affixe $-\frac{1}{2}$; le cercle de centre I passant par B coupe l'axe des abscisses en M et N. On a alors : $\overline{OM}+\overline{ON}=2\overline{OI}=-1$ et $\overline{OM}\times\overline{ON}=-OB^2=-1$ donc on a $\overline{OM}=\alpha$ et $\overline{ON}=\beta$. Le milieu H de [OM] a

[5] Descartes a montré ce résultat pour les solutions réelles positives de telles équations, mais ceci s'étend sans problème aux solutions complexes car construire les racines carrées d'un nombre complexe revient à bissecter un angle (son argument) et construire la racine carrée de son module. On peut même dans le cas qui nous intéresse différencier α et β en remarquant que α est un nombre réel positif.

alors pour affixe $\cos\frac{2\pi}{5}$. La construction du pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique est ensuite immédiate.

Deuxième exemple : impossibilité de la construction de l'heptagone

Cette fois, il s'agit de construire $r = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ solution de l'équation : $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ et on a , n – 1 = 6 = 2.3 (deux facteurs). La théorie de Gauss prévoit donc qu'il faudra résoudre deux équations pour déterminer r, l'une de degré 2 et l'autre de degré 3. On groupe les racines 3 par 3 :

$$S = r + r^2 + r^4$$
$$T = r^3 + r^5 + r^6$$
$$S + T = -1$$
$$ST = r^4 + r^6 + r^7 + r^5 + r^7 + r^8 + r^7 + r^9 + r^{10} = 3 + r^4 + r^6 + r^5 + r + r^2 + r^3 = 3 - 1 = 2$$

Donc S et T sont solutions de l'équation du second degré : $x^2 + x + 2 = 0$ (on peut même distinguer S et T en remarquant que Im(S)> 0). On a alors :

$$r + r^2 + r^4 = S$$
$$rr^2 + rr^4 + r^2r^4 = r^3 + r^5 + r^6 = T$$
$$rr^2r^4 = r^7 = 1$$

Donc r, r^2, r^4 sont solutions de l'équation du troisième degré $x^3 - Sx^2 + Tx - 1 = 0$.

Or, comme nous le verrons plus loin, il est impossible de construire à la règle et au compas les solutions d'une équation irréductible de degré 3.

Gauss fait un travail général sur l'équation cyclotomique $x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1 = 0$ et prouve qu'on peut toujours faire le travail que nous avons fait pour n = 5 et n = 7, en groupant astucieusement les racines. La façon dont il groupe les racines repose sur des propriétés du groupe multiplicatif $(Z/nZ)^*$, même si Gauss n'utilise pas cette notion.[6] Il fait un travail convaincant, mais peu éclairant, sur les racines de l'équation ci-dessus. Nous verrons plus loin comment la théorie de Galois permet de mieux comprendre les ressorts de la démonstration.

[6] Il utilise des propriétés des résidus modulo n, démontrées dans les chapitres précédents : en termes modernes, le groupe multiplicatif $(Z/nZ)^*$ est cyclique et ce que Gauss appelle une racine primitive modulo n (dont il démontre l'existence) est en fait un générateur du groupe $(Z/nZ)^*$.

Recherches arithmétiques (Gauss)

"365. Nous avons ainsi réduit par les recherches précédentes la division du cercle en n parties, si n est un nombre premier, à la solution d'autant d'équations qu'il y a de facteurs dans le nombre n - 1, et dont le degré est déterminé par la grandeur des facteurs. Ainsi, toutes les fois que n - 1 est une puissance de 2, ce qui arrive pour les valeurs de n

3, 5, 17, 257, 65537, etc.,

la division du cercle est réduite à des équations du second degré seulement, et les fonctions trigonométriques des angles $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, *etc. peuvent être exprimées par des racines quarrées plus ou moins compliquées, suivant la grandeur de n ; donc, dans ces différents cas, la division du cercle en n parties, ou la description du polygone régulier de n côtés, peut s'exécuter par des constructions géométriques. Par exemple, pour n = 17, on tire facilement des* n^{os} *354, 361*

$$\cos\frac{P}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{\left(34 - 2\sqrt{17}\right)} - \frac{1}{8}\sqrt{\left\{\left(17 + 3\sqrt{17}\right) - \sqrt{\left(34 - 2\sqrt{17}\right)} - 2\sqrt{\left(34 + 2\sqrt{17}\right)}\right\}} \quad ;$$

les cosinus des multiples de cet angle ont une forme semblable, les sinus ont un radical de plus. Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties ayant été connue dès le temps d'Euclide, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celles qui s'en déduisent (les divisions en 2^{μ}, *15,* $3 \cdot 2^{\mu}$, $5 \cdot 2^{\mu}$, $15 \cdot 2^{\mu}$ *parties), on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques.*

Au reste on prouve facilement que si un nombre premier n est = $2^m + 1$, *le nombre m lui-même ne peut avoir d'autres diviseurs que 2, et qu'il est par conséquent de la forme* 2^{ν}. *En effet si m était divisible par un nombre impair* ζ *plus grand que l'unité, et qu'on eût ainsi* $m = \zeta\eta$, $2^m + 1$ *serait divisible par* $2^{\eta} + 1$, *et partant composé. Toutes les valeurs de n qui ne conduisent qu'à des équations du second degré, sont donc contenues sous la forme* $2^{2^{\nu}} + 1$ *; ainsi les cinq nombres 3, 5, 17, 257, 65537 s'en déduisent en faisant* $\nu = 0$, *1, 2, 3, 4 ou m = 1, 2, 4, 8, 16. Mais la réciproque n'est pas vraie, et la division du cercle n'a lieu géométriquement que pour les nombres premiers compris dans cette formule. A la vérité Fermat, trompé par l'induction, avait affirmé que tous les nombres compris sous cette forme étaient nécessairement premiers ; mais Euler a remarqué le premier que cette règle était en défaut dès la supposition* $\nu = 5$ *ou m = 32, qui donne* $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$, *nombre divisible par 641.*

Toutes les fois que n - 1 renferme des facteurs différents de 2, on est toujours conduit à des équations plus élevées, par exemple, à une ou plusieurs équations du troisième degré, si 3 est une ou plusieurs fois facteur ; à des équations du cinquième degré, quand n - 1 est divisible par 5, etc. , et NOUS POUVONS DÉMONTRER EN TOUTE RIGUEUR QUE CES ÉQUATIONS NE SAURAIENT EN AUCUNE MANIÈRE ÊTRE ÉVITÉES NI ABAISSÉES, et quoique les limites de cet Ouvrage ne nous permettent pas de développer ici la démonstration de cette vérité, nous avons cru devoir en avertir, pour éviter que quelqu'un ne *voulût essayer de réduire à des constructions géométriques d'autres divisions que celles données par notre théorie, et n'employât inutilement son temps à cette recherche.*

"Enfin si l'on doit diviser le cercle en $N = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$... parties, a, b, c, etc. étant des nombres premiers, il suffit de savoir effectuer les divisions en a^{α}, b^{β}, c^{γ}, etc parties (n° 336). Ainsi, pour connaître le degré des équations nécessaires, on doit considérer les facteurs premiers des nombres

$$(a-1)\,.\,a^{\alpha-1}, (b-1)\,.\,b^{\beta-1}, (c-1)\,.\,c^{\gamma-1}, \text{etc.,}$$

ou, ce qui revient au même, les facteurs de leur produit. On remarquera que ce produit indique combien il y a de nombres moindres que N et premiers avec lui (n° 38). Ainsi la division ne pourra s'exécuter géométriquement que lorsque ce nombre est une puissance de 2 ; mais quand il renferme d'autres facteurs premiers p, p' etc., on ne peut éviter en aucune manière les équations de degré p, p', etc.

Gauss montre ensuite que, pour construire le polygone régulier à p^{α} côtés ($\alpha > 1$), avec p premier, il faut résoudre des équations dont les degrés sont les facteurs premiers de $(p-1)p^{\alpha-1}$.

Il suit de là généralement que pour que la division géométrique du cercle en N parties soit possible, N doit être 2 ou une puissance de 2, ou bien *un nombre premier de la forme $2^m + 1$,* ou encore *le produit d'une puissance de 2 par un ou plusieurs nombres premiers différens de cette forme ; ou d'une manière plus abrégée, il est nécessaire que N ne renferme aucun diviseur impair qui ne soit de la forme $2^m + 1$, ni plusieurs fois un même diviseur premier de cette forme.*

On trouve de cette manière, au dessous de 300, les trente-huit valeurs suivantes pour le nombre N :

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272."

Dans son texte, Gauss affirme qu'il peut « démontrer en toute rigueur que ces équations ne sauraient en aucun cas être abaissées » mais ne le démontre pas. En admettant même qu'il le démontre, il faudrait encore prouver qu'on ne peut pas construire les solutions d'équations irréductibles de degré p, avec p premier impair. Il faut attendre 1837 pour que Wantzel (1814-1848), alors encore élève ingénieur à l'Ecole des Ponts et Chaussées[7], démontre qu'on ne peut pas construire à la règle et au compas les solutions d'équations irréductibles de degré n, si n n'est pas une puissance de 2.

Il résulte immédiatement du théorème précédent que tout problème qui conduit à une équation irréductible dont le degré n'est pas une puissance de 2, ne peut être résolu avec la ligne droite et le cercle. Ainsi la ***duplication du cube****, qui dépend de l'équation $x^3 - 2a^3 = 0$ toujours irréductible, ne peut être obtenue par la Géométrie élémentaire. Le problème* ***des deux moyennes proportionnelles****, qui conduit à l'équation*

[7] Wantzel : *Recherche sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1837). Pour une courte introduction à ce texte et pour le lire en entier, voir *Mnémosyne* n°3.

*$x^3 - a^2b = 0$ est dans le même cas toutes les fois que le rapport de b à a n'est pas un cube. La **trisection de l'angle** dépend de l'équation $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$; cette équation*[8] *est irréductible si elle n'a pas de racine qui soit une fonction rationnelle de a et c'est ce qui arrive tant que a reste algébrique ; ainsi le problème ne peut être résolu en général avec la règle et le compas. Il nous semble qu'il n'avait pas encore été démontré rigoureusement que ces problèmes, si célèbres chez les anciens, ne fussent pas susceptibles d'une solution par les constructions géométriques auxquelles ils s'attachaient particulièrement.*

*La division de la circonférence en parties égales peut toujours se ramener à la résolution de l'équation $x^m - 1 = 0$ dans laquelle m est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier. Lorsque m est premier, l'équation $\frac{x^m - 1}{x - 1} = 0$ du degré m-1 est irréductible, comme M.Gauss l'a fait voir dans ses **Disquisitiones arithmeticae**, section VII ; ainsi la division du cercle ne peut être effectuée par les constructions géométriques que si m-1 = 2^n. Quand m est de la forme a^α, on peut prouver, en modifiant légèrement la démonstration de M. Gauss que l'équation de degré $(a-1)a^{\alpha-1}$, obtenue en égalant à zéro le quotient de $x^{a^\alpha} - 1$ par $x^{a^{\alpha-1}} - 1$, est irréductible ; il faudrait donc que $(a-1)a^{\alpha-1}$ fut de la forme 2^n en même temps que a-1, ce qui est impossible à moins que a = 2. Ainsi, **la division de la circonférence en N parties ne peut être effectuée avec la règle et le compas que si les facteurs premiers de N différents de 2 sont de la forme 2^n+1 et s'ils entrent seulement à la première puissance dans ce nombre.** Ce principe est annoncé par M. Gauss à la fin de son ouvrage, mais il n'en a pas donné la démonstration.*

Théorie de Galois et constructions à la règle et au compas

Ce qui est sous-jacent dans le travail de Gauss, c'est en fait la théorie des extensions de corps et de leurs groupes d'automorphismes. Rappelons quelques définitions et résultats de cette théorie.

- Soit K ⊂ L une extension de corps. L est un K-espace vectoriel et, si la dimension de L sur K est finie, on la note [L : K] et on l'appelle *degré de L sur K* ou *degré de l'extension.*
- Si les extensions successives K ⊂ L ⊂ M sont de degrés finis, alors [M : K] = [M : L] x [L : K].
- Si a est un élément de **C**, on note **Q**(a) le plus petit sous-corps de **C** contenant a.
- a est algébrique (sur **Q**) signifie : il existe un polynôme P de **Q**[X] tel que P(a) = 0. Dans ce cas, il existe un unique polynôme unitaire de **Q**[X] de degré minimum tel que P(a) = 0. Le degré de ce polynôme est appelé *degré de a.*
- a est algébrique (sur **Q**) si et seulement si l'extension **Q** ⊂ **Q**(a) est de degré fini. Dans ce cas, on a : [**Q**(a) : **Q**] = degré de a.

[8] Il s'agit bien de la même équation que celle de Descartes en posant a=q/2 et x=z/2(et en prenant pour données et inconnues les demi-cordes plutôt que les cordes, c'est-à-dire en pensant en termes de sinus plutôt que de cordes).

Un nombre réel a est constructible si et seulement s'il existe une chaîne d'extensions de $\mathbf{Q}$: $L_0 = \mathbf{Q} \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_m$, où $[L_i : L_{i+1}] = 2$ et $a \in L_m$.

En effet, si a est constructible, il est l'abscisse d'un point constructible et on peut trouver une chaîne de points $\{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k\}$ tels que $M_1 = O$, $M_2 = I, \ldots, M_k = M$ et M_j (pour j = 3 à k) est l'intersection de droites et cercles obtenus :

- Soit en joignant deux points de $\{M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{j-1}\} = \mathbf{C}_{j-1}$
- Soit en prenant comme centre un point de $\mathbf{C}_{j-1}$ et comme rayon la distance entre deux points de $\mathbf{C}_{j-1}$.

Formons alors une chaîne d'extensions de $L_0 = \mathbf{Q}$ en prenant pour L_{i+1} le plus petit sous-corps de $\mathbf{R}$ contenant L_i et les coordonnées de M_{i+1} ; celles-ci sont dans L_i si M_{i+1} est obtenu par intersection de droites[9], et solutions d'équations de degré 2 à coefficients dans L_i sinon. L'extension $L_i \subset L_{i+1}$ est donc quadratique si $L_i \neq L_{i+1}$ et on obtient ainsi la chaîne désirée, en supprimant éventuellement les corps inutiles. Réciproquement, une telle chaîne d'extensions permet la construction de a puisqu'on sait construire les solutions d'équations de degré 2. Ceci redonne le résultat de Wantzel, car on a alors $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(a) \subset L_m$ et comme $[L_m : \mathbf{Q}] = [L_m : \mathbf{Q}(a)] \times [\mathbf{Q}(a) : \mathbf{Q}]$ avec $[L_m : \mathbf{Q}]$ égal à une puissance de 2, a est obligatoirement de degré une puissance de 2.

Quant aux nombres complexes constructibles, ils s'obtiennent à partir des nombres réels constructibles et, si z = a + bi et si K est le corps $\mathbf{Q}(a,b)$, le corps $\mathbf{Q}(z)$ est tout simplement le corps K(i) et l'extension $K \subset K(i)$ est quadratique[10]. On dispose donc d'un théorème analogue pour les nombres complexes constructibles.

Reprenons nos deux exemples de constructions de polygones réguliers à n côtés pour n = 5 et n = 7 et voyons comment intervient la théorie des corps.

Construction du pentagone régulier

Il faut construire le nombre $r = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On s'occupe donc du corps $K = \mathbf{Q}(r)$. On a : $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 = 0$ donc $r^4 = -1 - r - r^2 - r^3$; toute puissance de r^n où n > 3 s'exprime à l'aide de puissances inférieures. Donc, $\{1, r, r^2, r^3\}$ est une famille génératrice du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel K. Remarquons qu'on sait que K est de dimension 4 sur $\mathbf{Q}$ car on peut montrer que le polynôme $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$ (comme d'ailleurs tous les polynômes cyclotomiques) ; donc notre famille génératrice est une base. On appelle G le groupe des automorphismes du corps K. Si σ est un automorphisme du corps K, alors on a : σ (1) = 1 et pour n entier naturel, σ (n) = σ (1 + 1 + …+1) = σ (1) + σ (1) +…+ σ (1) = 1 + 1 + 1 +…+1 = n ; on obtient alors, pour $\frac{p}{q}$ rationnel, $\sigma\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$. $\mathbf{Q}$ est donc invariant par σ. L'image par σ d'une racine d'un polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ ($x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par exemple) est donc une racine du même polynôme ; donc $\sigma(r) = r$ ou r^2 ou r^3 ou r^4. La connaissance de $\sigma(r)$ suffit pour déterminer σ car tout élément de K s'écrit comme combinaisons de puissances

---

[9] On a alors $L_{i+1} = L_i$.

[10] Une extension quadratique est une extension de degré 2.

de r à coefficients rationnels et $\sigma(r^i) = \sigma(r)^i$. Le groupe G est donc d'ordre 4 et en bijection avec $\{r, r^2, r^3, r^4\}$[11]. En fait, G est un groupe cyclique : soit g l'élément de G tel que $g(r) = r^2$. On a :

$$g \circ g(r) = g(r^2) = (g(r))^2 = (r^2)^2 = r^4$$
$$g \circ g \circ g(r) = g(r^4) = (g(r))^4 = (r^2)^4 = r^8 = r^3$$
$$g \circ g \circ g \circ g(r) = g(r^3) = (r^2)^3 = r^6 = r$$

Ainsi, g est un générateur du groupe G et $G = \{Id, g, g^2, g^3\}$. Ceci vient de ce que 2 est un générateur du groupe multiplicatif $(Z/5Z)^*$ car $g^n(r) = r^{2^n}$. On appelle alors :

$G_0 = G$ le groupe engendré par g

$G_1 = \{Id, g^2\}$ le sous-groupe engendré par g^2

$G_2 = \{Id\}$

On a une chaîne de groupes : $G_2 \subset G_1 \subset G_0$ à laquelle correspond une chaîne d'extensions de corps ; en effet, au sous-groupe G_i de G, on associe le sous-corps K_i de K des éléments de K invariants par les automorphismes de G_i. On a alors :

$K_0 = \mathbf{Q} \subset K_1 \subset K_2 = K$ avec $K_0 \neq K_1 \neq K_2$ et on a : $[K : \mathbf{Q}] = [K : K_1][K_1 : \mathbf{Q}] = 4$ donc $[K : K_1] = [K_1 : \mathbf{Q}] = 2$.
On a trouvé la chaîne d'extensions quadratiques montrant la constructibilité de r. Où sont les groupements de racines de Gauss ? On peut les retrouver grâce au générateur g de G. On pose : $\alpha = r + g^2(r) = r + r^4$. Alors : $g^2(\alpha) = g^2(r) + g^4(r) = r^4 + r = \alpha$ donc $\alpha \in K_1$ mais $g(\alpha) = r^2 + r^3 \neq \alpha$ donc α n'est pas élément de $\mathbf{Q}$. En fait $K_1 = \mathbf{Q}(\alpha)$ et on obtient bien α en résolvant une équation de degré 2 à coefficients rationnels.

Cas de l'heptagone régulier

On s'occupe du corps $K = \mathbf{Q}(r)$ avec $r = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Comme $1 + r + r^2 + \ldots + r^6 = 0$, toute puissance r^n avec $n \geq 6$ s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$, qui est donc une famille génératrice de K comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel (et même une base car l'irréductibilité du polynôme cyclotomique garantit que $[\mathbf{Q}(r) : \mathbf{Q}] = 6$). Soit G le groupe des automorphismes de $K = \mathbf{Q}(r)$. Si $g \in G$, g est entièrement déterminé par $g(r)$ et on a $g(r) = r$ ou r^2 ou r^3 ou r^4 ou r^5 ou r^6. G est un groupe d'ordre 6 isomorphe à $\{(Z/7Z)^*, \times\}$. En effet, soit g l'élément de G défini par $g(r) = r^3$; g est un générateur de G :

$$g^2(r) = g \circ g(r) = g(r^3) = [g(r)]^3 = (r^3)^3 = r^{3^2} = r^9 = r^2$$
$$g^3(r) = g(g^2(r)) = g(r^2) = [g(r)]^2 = (r^3)^2 = r^6$$
$$g^4(r) = g(r^6) = (r^3)^6 = r^4$$
$$g^5(r) = g(r^4) = (r^3)^4 = r^5$$
$$g^6(r) = g(r^5) = (r^3)^5 = r \text{ donc } g \text{ est l' identité.}$$

[11] On obtient bien ainsi 4 automorphismes du **corps** K, la définition donnée de σ assurant que σ est non seulement un automorphisme d'espace vectoriel, mais aussi un automorphisme de corps.

Ceci vient de ce que 3 est un générateur du groupe multiplicatif $\{(Z/7Z)^*,\times\}$. En effet : $g^n(r)=r^{3^n}$.
Le groupe G admet un sous-groupe G' d'ordre 3 engendré par g^2 : $\{g^2;g^4;Id\}$. On appelle K_1 le sous-corps de K des éléments invariants par G'. On obtient une chaîne de corps emboîtés : $K_0 = \mathbf{Q} \subset K_1 \subset K_2 = K$ avec $K_0 \neq K_1 \neq K_2$. On a de plus : $[K : \mathbf{Q}] = [K : K_1][K_1 : \mathbf{Q}] = 6$ avec $[K : K_1] = 3$ et $[K_1 : \mathbf{Q}] = 2$. On retrouve encore là les groupements de racines de Gauss ; soit $S = r + g^2(r)+g^4(r) = r + r^2 + r^4$.
On a : $g^2(S) = S$ et S est élément de K_1 mais pas de $\mathbf{Q}$. On détermine donc S en résolvant une équation de degré 2 à coefficients rationnels. La racine cherchée r est élément de K mais pas de K_1 ; on la détermine donc en résolvant une équation de degré 3 dont les coefficients s'expriment rationnellement à l'aide de S. On obtient ainsi $e^{\frac{2i\pi}{7}}$ en résolvant en cascade deux équations irréductibles de degré 2 et 3 ; donc l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.

Ces deux exemples montrent le lien entre groupes de Galois et groupements de racines. Le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(r)$ où $r=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est le groupe multiplicatif$(Z/nZ)^*$(d'ordre n-1) dont il faut chercher un générateur[12] m (ce qui n'est d'ailleurs pas une tâche facile ; Gauss admet lui-même ne pas connaître d'autre voie que le tâtonnement). Ce générateur m (ou racine primitive selon n pour reprendre la terminologie de Gauss) fournit alors un générateur g du groupe de Galois, g étant défini par $g(r)=r^m$. Les sous-groupes du groupe de Galois sont également cycliques, engendrés par un élément du type g^i ; une chaîne de sous-groupes emboîtés correspond à une chaîne de sous-corps, de la manière suivante : à chaque sous-groupe H de G correspond le sous-corps L de $\mathbf{Q}(r)$ formés des éléments invariants par H. Dans le cas qui nous occupe[13], cette correspondance est bijective, le degré $[\mathbf{Q}(r) : L]$ est l'ordre n' du groupe H et $[L : \mathbf{Q}]$ est (n-1)/n'. Le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{Q} \subset L$ est le groupe-quotient G/H. Ces emboîtements fournissent les équations à résoudre en cascade pour déterminer $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ainsi que leurs degrés. Quant aux groupements de racines, ils sont obtenus grâce aux générateurs des sous-groupes du groupe de Galois, comme on l'a bien vu dans l'exemple de l'heptagone. Si on veut que chaque extension intermédiaire soit de degré 2, il faut donc que n-1 soit une puissance de 2. Réciproquement, si G est un groupe d'ordre 2^p de générateur g, alors la chaîne des sous-groupes engendrés par $g^2, g^{2^2}, \ldots, g^{2^{p-1}}$ correspond à une chaîne d'extensions quadratiques. On retrouve ainsi les résultats de Gauss concernant les polygones constructibles à la règle et au compas.

Les grands problèmes grecs

Ainsi, les problèmes de construction à la règle et au compas sont régis par la structure des groupes de Galois des équations correspondantes. Wantzel avait montré dans son article l'impossibilité de la trisection de l'angle et de la duplication du cube. Il avait également situé le problème de la quadrature du cercle : ce qui importe, c'est la nature du nombre π. En 1882, Lindemann démontre la transcendance de π et donc l'impossibilité de la quadrature du cercle.

[12] Gauss démontre que ce groupe est cyclique (sans le vocabulaire des groupes bien sûr). Voir en annexe le texte de Gauss.
[13] L'extension cyclotomique est normale, c'est-à-dire que $\mathbf{Q}(r)$ contient toutes les racines du polynôme cyclotomique.

Annexe 1 : une résolution de problème géométrique[14] dans les *Elements*

Propositions 6 et 11 du livre II

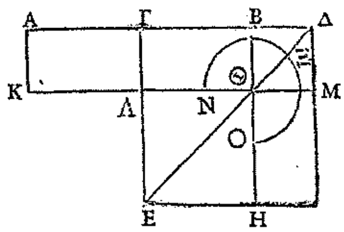
PROPOSITION VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite BΔ; je dis que le rectangle compris sous AΔ, ΔB, avec le quarré de ΓB, est égal au quarré de ΓΔ.

Avec la droite ΓΔ décrivons le quarré ΓEZΔ (46. 1); joignons ΔE; par le point B conduisons BH parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓE, ΔZ (31. 1); par le point Θ, conduisons KM parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EZ, et enfin par le point A conduisons AK parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΛ, ΔM.

Puisque AΓ est égal à ΓB, le rectangle AΛ est égal au rectangle ΓΘ (36. 1). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΘZ (43. 1); donc le rectangle AΛ est égal au rectangle ΘZ; ajoutons le rectangle commun ΓM, le rectangle entier AM sera égal au gnomon NΞO. Mais AM est le rectangle sous AΔ, ΔB, car ΔM est égal à ΔB (4. 2); donc le gnomon NΞO est égal au rectangle compris sous AΔ, ΔB. Ajoutons le quarré ΛH qui est égal au quarré de ΓB, le rectangle compris



sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB sera égal au gnomon NΞO et au quarré ΛH. Mais le gnomon NΞO, et le quarré ΛH sont le quarré entier ΓEZΔ, qui est le quarré de ΓΔ; donc le rectangle compris sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB est égal au quarré de ΓΔ. Donc, etc.

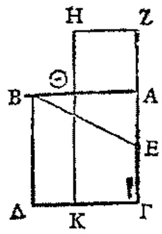
[14] Pour une utilisation possible de ces textes en classe, voir *Mnémosyne* n°1 ou Brochure M. :A.T.H. tome 3(n°90 de l'IREM Paris VII).

PROPOSITION XI.

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Avec la droite AB décrivons le quarré ΑΒΔΓ (46. 1); coupons ΑΓ en deux parties égales au point E (10. 1); joignons BE, prolongeons ΓΑ vers Z; faisons EZ égal à BE (3. 1); décrivons avec AZ le quarré ZΘ; et prolongeons HΘ vers K; je dis que al droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de AΘ.



Puisque la droite ΑΓ est coupée en deux parties égales en E, que AZ lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites ΓΖ, ZA avec le quarré de AE est égal au quarré de EZ (6. 2). Mais EZ est égal à EB; donc le rectangle compris sous ΓΖ, ZA avec le quarré de AE, est égal au quarré de EB. Mais les quarrés des droites BA, AE sont égaux au quarré de EB (47. 1), car l'angle en A est droit; donc le rectangle sous ΓΖ, ZA avec le quarré de AE est égal aux quarrés des droites BA, AE. Retranchons le quarré commun de AE; le rectangle restant compris sous ΓΖ, ZA sera égal au quarré de AB. Mais le rectangle sous les droites ΓΖ, ZA est le rectangle ZK, parce que AZ est égal à ZH, et le quarré de AB est le quarré ΑΔ; donc le rectangle ZK est égal au quarré ΑΔ. Retranchons le rectangle commun AK; le quarré restant ZΘ sera égal au rectangle ΘΔ. Mais ZΘ est le quarré de AΘ, et ΘΔ est le rectangle sous AB, BΘ; donc le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA.

Donc la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA; ce qu'il fallait faire.

Annexe 2 : construction de l'hexagone régulier dans les *Eléments*

Proposition 15 du livre IV

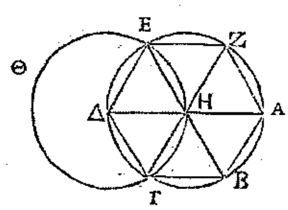
PROPOSITION XV.

Inscrire dans un cercle donné un hexagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕΖ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un hexagone équilatéral et équiangle.

Menons le diamètre ΑΔ du cercle ΑΒΓΔΕΖ, prenons le centre Η de ce cercle, du centre Δ, et de l'intervalle ΔΗ décrivons le cercle ΕΗΓΘ (dém. 3), joignons les droites ΕΗ, ΓΗ, prolongeons-les vers les points Β, Ζ, et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ; je dis que l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral et équiangle.

Puisque le point Η est le centre du cercle ΑΒΓΔΕΖ, la droite ΗΕ est égale à ΗΔ. De plus, puisque le point Δ est le centre du cercle ΕΗΓΘ, la droite ΔΕ est égale à ΔΗ. Mais on a démontré que ΗΕ est égal à ΗΔ; donc ΗΕ est égal à ΕΔ; donc le triangle ΕΗΔ est équilatéral; donc les trois angles ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sont égaux entr'eux, puisque dans les triangles isocèles, les angles à la base sont égaux entr'eux (5. 1). Mais les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits (32. 1); donc l'angle ΕΗΔ est le tiers de deux droits. Nous démontrerons semblablement que ΔΗΓ est le tiers de deux droits. Mais la droite ΓΗ tombant sur la droite ΕΒ fait les angles de suite ΕΗΓ, ΓΗΒ égaux à deux droits (13. 1); donc l'angle restant ΓΗΒ est le tiers de deux droits;



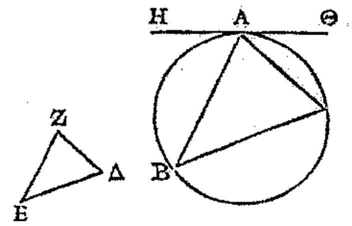
donc les angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ sont égaux entr'eux; mais les angles ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux aux angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, parce que ces angles sont opposés par le sommet (15. 1), donc les six angles ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sont égaux entr'eux. Mais des angles égaux s'appuient sur des arcs égaux (26. 3); donc les six arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ sont égaux entr'eux. Mais des arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3); donc ces six droites sont égales entr'elles; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équilatéral. Je dis qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΖΑ est égal à l'arc ΕΔ, ajoutons l'arc commun ΑΒΓΔ, l'arc entier ΖΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒΑ. Mais l'angle ΖΕΔ s'appuie sur l'arc ΖΑΒΓΔ, et l'angle ΑΖΕ s'appuie sur l'arc ΕΔΓΒΑ; donc l'angle ΑΖΕ est égal à l'angle ΖΕΔ (27. 3). On démontrera semblablement que les angles restants de l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ sont égaux un à un à l'un et à l'autre des angles ΑΖΕ, ΖΕΔ; donc l'hexagone ΑΒΓΔΕΖ est équiangle. Mais on a démontré qu'il est équilatéral, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓΔΕΖ.

Donc on a inscrit un hexagone équilatéral et équiangle dans le cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION II.

Dans un cercle donné, inscrire un triangle qui soit équiangle avec un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné ; il faut dans le cercle ΑΒΓ inscrire un triangle qui soit équiangle avec le triangle donné ΔΕΖ.



Menons la droite ΗΘ, de manière qu'elle touche le cercle ΑΒΓ en un point Α, et sur la droite ΑΘ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΘΑΓ égal à l'angle ΔΕΖ (23. 1). De plus sur la droite ΗΑ, et au point Α de cette droite faisons l'angle ΗΑΒ égal à l'angle ΖΔΕ, et joignons ΒΓ.

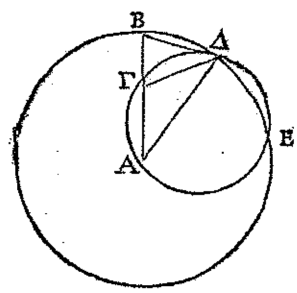
Puisque la droite ΑΘ touche le cercle ΑΒΓ, et que la droite ΑΓ a été menée dans le cercle du point de contact Α, l'angle ΘΑΓ est égal à l'angle ΑΒΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Mais l'angle ΘΑΓ est égal à l'angle ΔΕΖ ; donc l'angle ΑΒΓ est égal à l'angle ΔΕΖ. Par la même raison l'angle ΑΓΒ est égal à l'angle ΖΔΕ ; donc l'angle restant ΒΑΓ est égal à l'angle restant ΕΖΔ (32. 1) ; donc le triangle ΑΒΓ est équiangle avec le triangle ΔΕΖ, et il est inscrit dans le cercle ΑΒΓ (déf. 3. 4).

Donc dans le cercle donné, on a inscrit un triangle équiangle avec un triangle donné. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION X.

Construire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles de la base double de l'angle restant.

Soit une droite AB ; que cette droite soit coupée en un point Γ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΓ soit égal au quarré de ΓA (II. 2) ; du centre A et de l'intervalle AB décrivons le cercle BΔE (dém. 3) ; dans le cercle BΔE adaptons une droite BΔ égale à la droite AΓ, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle BΔE (I. 4); joignons AΔ, ΓΔ, et circonscrivons le cercle AΓΔ au triangle AΓΔ (5. 4).



Puisque le rectangle sous AB, BΓ est égal au quarré AΓ, et que AΓ est égal à BΔ, le rectangle sous AB, BΓ est égal au quarré de BΔ. Et puisque le point B a été pris hors du cercle AΓΔ, que les droites BA, BΔ vont du point B au cercle AΓΔ, que l'une d'elles le coupe, et que l'autre ne le coupe point, et que le rectangle sous AB, BΓ est égal au quarré de BΔ, la droite BΔ est tangente au cercle AΓΔ (37. 3). Donc, puisque la droite BΔ est tangente, et que la droite ΔΓ a été menée du point de contact Δ, l'angle BΔΓ est égal à l'angle ΔAΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Puisque l'angle BΔΓ est égal à l'angle ΔAΓ, ajoutons l'angle commun ΓΔA, l'angle entier BΔA sera égal aux deux angles ΓΔA, ΔAΓ. Mais l'angle extérieur BΓΔ est égal aux angles ΓΔA, ΔAΓ (32. 1); donc l'angle BΔA est égal à l'angle BΓΔ. Mais l'angle BΔA est égal à l'angle ΓBΔ (5. 1), puisque le côté ΔA est égal au côté AB ; donc l'angle ΔBA est égal à l'angle BΓΔ. Donc les trois angles BΔA, ΔBA, BΓΔ sont égaux entr'eux. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle BΓΔ, le côté BΔ est égal au côté ΔΓ (6. 1). Mais le côté BΔ est supposé égal au côté ΓA; donc le côté AΓ est égal au côté ΓΔ ; donc l'angle ΓΔA est égal à l'angle ΔAΓ (5. 1); donc les angles ΓΔA, ΔAΓ sont doubles de l'angle ΔAΓ. Mais l'angle BΓΔ est égal aux angles ΓΔA, ΔAΓ (32. 1); donc l'angle BΓΔ est double de l'angle ΔAΓ. Mais l'angle BΓΔ est égal à chacun des angles BΔA, ΔBA ; donc chacun des angles BΔA, ΔBA est double de l'angle BAΔ.

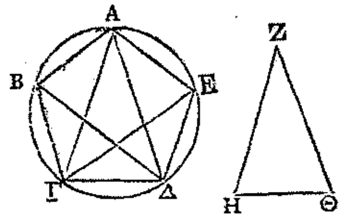
Donc on a construit un triangle isocèle AΔB, ayant chacun des angles de la base BΔ double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ΑΒΓΔΕ le cercle donné ; il faut inscrire dans le cercle ΑΒΓΔΕ un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit posé le triangle isocèle ΖΗΘ, ayant chacun des angles en Η, Θ double de l'angle Ζ (10. 4) ; inscrivons dans le cercle ΑΒΓΔΕ le triangle ΑΓΔ équiangle avec le triangle ΖΗΘ (2. 4), de manière que l'angle ΓΑΔ soit égal à l'angle Ζ, et que chacun des angles Η, Θ soit égal à chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ ; chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ sera double de l'angle ΓΑΔ. Coupons chacun des angles ΑΓΔ ΓΔΑ en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ (9. 1), et joignons ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.



Puisque chacun des angles ΑΓΔ, ΓΔΑ est double de l'angle ΓΑΔ, et que ces angles sont coupés en deux parties égales par les droites ΓΕ, ΔΒ, les cinq angles ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ sont égaux entr'eux. Mais les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux (26. 3) ; donc les cinq arcs ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égaux entr'eux. Mais les arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3) ; donc les cinq droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sont égales entr'elles ; donc le pentagone ΑΒΓΔΕ est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque l'arc ΑΒ est égal à l'arc ΔΕ, ajoutons l'arc commun ΒΓΔ ; l'arc entier ΑΒΓΔ sera égal à l'arc entier ΕΔΓΒ. Mais l'angle ΑΕΔ est appuyé sur l'arc ΑΒΓΔ, et l'angle ΒΑΕ sur l'arc ΕΔΓΒ ; donc l'angle ΒΑΕ est égal à l'angle ΑΕΔ (27. 3). Par la même raison, chacun des angles ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ est égal à chacun des angles ΒΑΕ, ΑΕΔ ; donc le pentagoné ΑΒΓΔΕ est équiangle. Mais il a été démontré qu'il est équilatéral ;

Donc dans un cercle donné, on a inscrit un pentagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

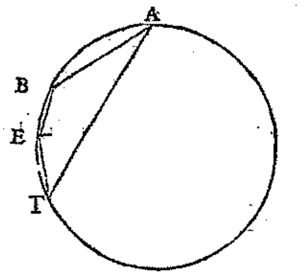
Annexe 4 : construction du quindécagone régulier dans les *Eléments*

Proposition 16 du livre IV

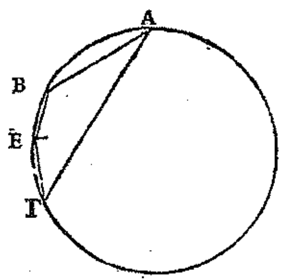
PROPOSITION XVI.

Inscrire dans un cercle donné un quindécagone équilatéral et équiangle.

Soit ABΓΔ le cercle donné; il faut dans ce cercle inscrire un quindécagone équilatéral et équiangle.



Inscrivons dans le cercle ABΓΔ le côté AΓ d'un triangle équilatéral inscrit, et le côté AB d'un pentagone équilatéral. Puisque la circonférence entière ABΓΔ doit être partagée en quinze parties égales, l'arc ABΓ qui est la troisième partie de la circonférence, en contiendra cinq, et l'arc AB qui est le cinquième de la circonférence, en contiendra trois; donc l'arc restant BΓ en contiendra deux. Partageons l'arc restant BΓ en deux parties égales au point E (30. 3), chacun des arcs BE, EΓ sera la quinzième partie de la circonférence du cercle ABΓΔ. Donc, si ayant joint les droites BE, EΓ, nous adaptons dans le cercle ABΓΔ, à la suite les unes des autres, des droites égales à ces droites (1. 4), on aura inscrit dans ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.



Conformément à ce qui a été dit pour le pentagone, si par les points de divisions d'un cercle, on mène des tangentes à ce cercle, on circonscrira à ce cercle un quindécagone équilatéral et équiangle. De plus, conformément à ce qui a été dit pour les démonstrations du pentagone, nous inscrirons et nous circonscrirons une circonférence de cercle à un quindécagone équilatéral et équiangle donné.

Annexe 5 : Extraits de *La géométrie* de Descartes

Livre premier

Commét il faut venir aux Equatiõs qui ſeruent a reſoudre les probleſmes.

Ainſi voulant reſoudre quelque probleſme, on doit d'abord le conſiderer comme deſia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui ſemblent neceſſaires pour le conſtruire, auſſy bien a celles qui ſont inconnuës, qu'aux autres. Puis ſans conſiderer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, ſelon l'ordre qui monſtre le plus naturellement de tous en qu'elle ſorte elles dependent mutuellement les vnes des autres, iuſques a ce qu'on ait trouué moyen d'exprimer vne meſme quantité en deux façons : ce qui ſe nomme vne Equation; car les termes de l'vne de ces deux façons ſont eſgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouuer autant de telles Equations, qu'on a ſuppoſé de lignes, qui eſtoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobſtant on n'omette rien de ce qui eſt deſiré en la queſtion, cela teſmoigne qu'elle n'eſt pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a diſcretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës auſqu'elles ne correſpond aucune Equation. Aprés cela s'il en reſte encore pluſieurs, il ſe faut ſeruir par ordre de chaſcune des Equations qui reſtent auſſy, ſoit en la conſiderant toute ſeule, ſoit en la comparant auec les autres, pour expliquer chaſcune de ces lignes inconnuës; & faire ainſi en les demeſlant, qu'il n'en demeure qu'vne ſeule, eſgale a quelque autre, qui ſoit connuë, oubien dont le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré, ou le ſurſolide, ou le quarré de cube, &c. ſoit eſgal a ce, qui ſe produiſt par l'addition, ou ſouſtraction de deux ou pluſieurs autres quantités, dont l'vne ſoit connuë, & les autres ſoient compoſées de quelques moyennes proportionnelles entre l'vnité, & ce quarré, ou cube, ou quarré de quarré, &c. multipliées par d'autres connuës. Ce que i'eſcris en cete ſorte.

$z \propto b.$ ou

$z^2 \propto -az + bb.$ ou

$z^3 \propto +az^2 + bbz - c^3.$ ou

$z^4 \propto az^3 - c^3z + d^4.$ &c.

C'est a dire, z, que ie prens pour la quantité inconnuë, est esgale a b, ou le quarré de z est esgal au quarré de b moins a multiplié par z. ou le cube de z est esgal à a multiplié par le quarre de z plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. & ainsi des autres.

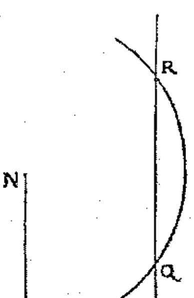
Et on peut tousiours reduire ainsi toutes les quantités inconnuës à vne seule, lorsque le Problesme se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussy par des sections coniques, ou mesme par quelque autre ligne qui ne soit que d'vn ou deux degrés plus composée. Mais ie ne m'areste point a expliquer cecy plus en detail, a cause que ie vous osterois le plaisir de l'apprendre de vous mesme, & l'vtilité de cultiuer vostre esprit en vous y exerceant, qui est a mon auis la principale, qu'on puisse tirer de cete science. Aussy que ie n y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront vn peu versés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouuer.

C'est pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeslant ces Equations on ne manque point a se seruir de toutes les diuisions, qui seront possibles, on aura infalliblement les plus simples termes, ausquels la question puisse estre reduite.

Quels sont les problesmes plans

Et que si elle peut estre resolue par la Geometrie ordinaire, c'est a dire, en ne se seruant que de lignes droites & circulaires tracées sur vne superficie plate, lorsque la derniere Equation aura esté entierement démeslée, il n'y restera tout au plus qu'vn quarré inconnu, esgal a ce qui se produist de l'Addition, ou soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité aussy connue

[...]

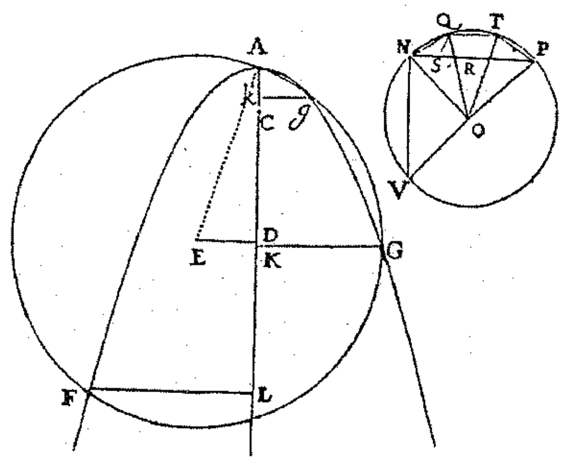


Enfin si i'ay

$$z^2 \infty az - bb:$$

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.



La façon de diuiſer vn angle en trois.

Tout de meſme ſi on veut diuiſer l'angle N O P, oubien l'arc, ou portion de cercle N Q T P, en trois parties eſgales; faiſant N O $\propto$ 1, pour le rayon du cercle, & N P $\propto q$, pour la ſubtendue de l'arc donné, & N Q $\propto z$, pour la ſubtendue du tiers de cet arc; l'Equation vient,

$z^3 \propto * \, 3z - q$. Car ayant tiré les lignes N Q, O Q, O T; & faiſant Q S parallele a T O, on voit que comme N O eſt a N Q, ainſi N Q a Q R, & Q R a R S; enſorte que N O eſtant 1, & N Q eſtant z, Q R eſt zz, & R S eſt z^3: Et a cauſe qu'il s'en faut ſeulement R S, ou z^3, que la ligne N P, qui eſt q, ne ſoit triple de N Q, qui eſt z, ou à $q \propto 3z - z^3$ oubien,

$z^3 \propto * \, 3z - q$.

Puis la Parabole F A G eſtant deſcrite, & C A la moitié de ſon coſté droit principal eſtant $\frac{1}{2}$, ſi on prent C D $\propto \frac{3}{2}$, & la perpendiculaire D E $\propto \frac{1}{2} q$, & que du centre E, par A, on deſcriue le cercle F A g G, il couppe cete Parabole aux trois poins F, g, & G, ſans conter le point A qui en eſt le ſommet. Ce qui monſtre qu'il y a trois racines en cete Equation, à ſçauoir les deux G K, & $g\,k$, qui ſont vrayes; & la troiſieſme qui eſt fauſſe, á ſçauoir F L. Et de ces deux vrayes c'eſt $g\,k$ la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne N Q qui eſtoit cherchée. Car l'autre G K, eſt eſgale à N V, la ſubtendue de la troiſieſme partie de l'arc N V P, qui auec l'autre arc N Q P acheue le cercle. Et la fauſſe F L eſt eſgale a ces deux enſemble Q N & N V, ainſi qu'il eſt ayſé a voir par le calcul.

[15] Pour une utilisation de ce texte en classe, voir Brochure M. :A.T.H. tome 2 (Brochure n°79 de l'IREM Paris VII).

55. Il y a un cas particulier de la proposition précédente qui mérite de fixer notre attention ; le voici : *il existe toujours des nombres dont aucune puissance plus petite que* p - 1 *n'est congrue à l'unité* ; il y en a même autant entre 1 et p - 1, qu'il y a au-dessous de p - 1 de nombres qui lui soient premiers. Comme il s'en faut bien que la démonstration de ce théorème soit aussi évidente qu'elle le paraît d'abord, nous en donnerons une un peu différente de celle qui précède, d'autant plus que la diversité des méthodes aide beaucoup à jeter du jour sur les points les plus obscurs.

On décomposera p - 1 en facteurs premiers, de manière qu'on ait $p - 1 = a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ etc. a, b, c, etc. étant des nombres premiers inégaux. Alors nous composerons la démonstration des deux propositions suivantes :

1°. On peut toujours trouver un nombre A, ou plusieurs appartenant à l'exposant a^{α}, et de même des nombres B, C, etc. appartenant aux exposants b^{β}, c^{γ}, etc.

2°. Le produit des nombres A, B, C, etc. ou le résidu *minimum* de ce produit appartiendra à l'exposant p - 1 ; ce qui se démontre ainsi qu'il suit.

1°. Soit g un des nombres 1, 2, 3 ... p - 1 qui ne satisfasse pas à la congruence $x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1$ (mod. p) ; car tous les nombres ne peuvent pas satisfaire à cette congruence, dont le degré est $< p - 1$. Alors je dis que si l'on fait $g^{\frac{p-1}{a^{\alpha}}} \equiv h$ ou son résidu *minimum* appartiendra à l'exposant a^{α}.

En effet il est évident que $h^{a^{\alpha}} \equiv g^{p-1} \equiv 1$; mais $h^{a^{\alpha-1}} \equiv g^{\frac{p-1}{a}}$, et par conséquent sera incongru à l'unité, et à plus forte raison les puissances $h^{a^{\alpha-2}}$, $h^{a^{\alpha-3}}$ le seront aussi. Or l'exposant de la plus petite puissance de h congrue à l'unité, c'est-à-dire l'exposant auquel h appartient, doit être un diviseur de a^{α} (n° 48) ; et comme a^{α} n'est divisible que par lui-même, ou par les puissances inférieures de a, il s'ensuit nécessairement que a^{α} sera l'exposant auquel $[h]$[16] appartient. On démontrera de la même manière, qu'on peut trouver des nombres appartenant aux exposants b^{β}, c^{γ}, etc.

2°. Si nous supposons que le produit de tous les nombres A, B, C, etc. n'appartienne pas à l'exposant $p - 1$, etc., mais à un exposant t plus petit, t devra être un des diviseurs de $p - 1$ (n° 48), ou $\frac{p-1}{t}$ sera un entier > 1. Il suit de là que ce quotient sera un des nombres premiers, a, b, c, etc., ou du moins qu'il sera divisible par quelqu'un d'eux (n° 17), par a, par exemple, car le raisonnement est le même pour les autres. t divisera ainsi $\frac{p-1}{a}$; donc le produit ABC etc. serait encore congru à l'unité, en l'élevant à la puissance $\frac{p-1}{a}$ (n° 46). Mais il est évident que tous les nombres, B, C, D, etc. (excepté A) deviennent congrus à l'unité, si on les élève à la puissance $\frac{p-1}{a}$, puisque les exposants auxquels ils appartiennent b^{β}, c^{γ}, etc. divisent $\frac{p-1}{a}$. Donc $A^{\frac{p-1}{a}}.B^{\frac{p-1}{a}}.C^{\frac{p-1}{a}}$. etc. $\equiv A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1$; donc a^{α} doit diviser $\frac{p-1}{a}$ (n° 48), c'est-à-dire que $\frac{p-1}{a^{\alpha+1}}$ doit être entier, ce qui est absurde (n° 15). Donc enfin notre supposition ne peut subsister, c'est-à-dire que le produit ABC etc. appartient réellement à l'exposant $p - 1$.

*

* *

16 Le texte donne "*b*".

Bibliographie

Sources

ARCHIMEDE *La mesure du cercle* in *Les œuvres complètes d'Archimède,* T.1 Traduction du grec par Paul Ver Eecke, Ré-édition Blanchard, Paris, 1960

EUCLIDE *Les Eléments* Traduction du grec par F. Peyrard, Paris, 1819. Ré-édition Blanchard, Paris, 1966

DESCARTES *La géométrie. Appendice au Discours de la Méthode,* 1637 Ré-édition Dover, 1954

GAUSS *Recherches Arithmétiques* Traduction Poullet-Delisle Paris, 1807 Ré-édition Blanchard Paris, 1979

KLEIN *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire* Nouy, Paris, 1896 Ré-édition Vuibert, Paris, 1931. Reproduction par l'IREM Paris VII, collection *Reproduction de textes anciens* n°2 Février 1981

WANTZEL *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème peut se résoudre avec la règle et le compas* in *Journal de mathématiques pures et appliquées* (de Liouville) 1837 pp. 366-371 Reproduction in *Mnémosyne* n°3 IREM Paris VII avril 1993

Bibliographie secondaire

CARREGA J.C. *Théorie des corps. La règle et le compas* Ed. Hermann, collection *Formation des enseignants et formation continue,* Paris, 1981, Nouvelle collection enrichie d'exercices, 1989

FRIEDELMEYER J.P. *Recherche inconnue désespérément* pp299-325 in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques,* Ellipses, 1997

FRIEDELMEYER J.P. *Des équations qui déterminent les sections circulaires* in *L'Ouvert* n° 46 et 47, IREM de Strasbourg, mars et juin 1987

FRIEDELMEYER J.P. *Emergence du concept de groupe* Brochure APMEP n°83 1991 Collection *Fragments d'histoire des mathématiques III*

AYMES J. *Ces problèmes qui font les mathématiques : la trisection de l'angle* Brochure APMEP n°70

BÜHLER M. *Gauss : nombres constructibles et polygones réguliers* in *Si le nombre m'était compté* Commission inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques. Ellipses 2000

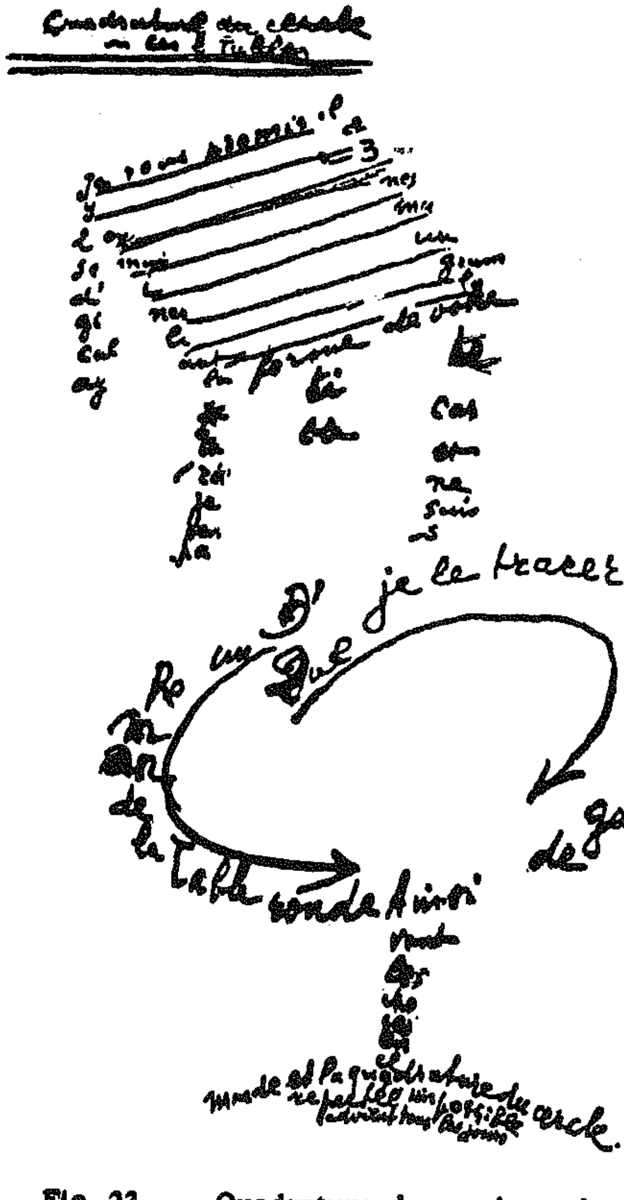


Fig. 23 — « Quadrature du cercle ou les deux tables ». G. Apollinaire. Extrait du *Guetteur mélancolique* suivi de *Poèmes retrouvés* (éd. consultée : Gallimard. Coll. « Poésie », 1970).

Extrait de *Du calligramme* J. PEIGNOT. Dossiers graphiques du Chêne.

DANS NOS CLASSES (1)

Une introduction aux logarithmes en terminale scientifique

Martine Bühler

L'activité qui suit est une version remaniée et actualisée d'une lecture d'un texte de Jacques Ozanam (publié en 1685) pour introduire les logarithmes en classe de terminale. Le groupe M. :A.T.H. a travaillé depuis fort longtemps sur ce texte et a publié une activité semblable dans la revue Repères (n°3) ; il nous a semblé nécessaire de remanier cette activité au fil des ans. La version présentée ici a été utilisée en classe en 2001-2002.

Il s'agit d'introduire le logarithme par son équation fonctionnelle, c'est-à-dire comme une fonction transformant les produits en sommes ; cette activité est l'occasion de parler des problèmes de calcul, notamment en astronomie au dix-septième siècle, qui mènent les mathématiciens à la construction de tables permettant de simplifier ces calculs.

Le texte permet de travailler sur suites arithmétiques et géométriques, puis de fabriquer à partir de l'équation fonctionnelle une table de valeurs et de construire la courbe représentative du logarithme décimal. Le texte d'Ozanam permet également de comprendre la nécessité d'avoir $\log(1) = 0$.

L'étude graphique de la courbe obtenue amène à la conjecture qu'une fonction f dérivable transformant les produits en sommes vérifie $f'(x) = \frac{k}{x}$ *; l'exercice qui suit l'activité d'introduction est un exercice classique démontrant ce résultat. Le cours sur la fonction logarithme peut alors repartir dans l'autre sens, en définissant le logarithme népérien comme la primitive de la fonction inverse (en choisissant la constante k la plus simple possible, c'est-à-dire égale à 1) s'annulant en 1.*

Les nouveaux programmes, s'ils font obligation d'introduire la fonction exponentielle avant la fonction logarithme népérien, laissent le champ libre pour l'introduction de cette dernière fonction, qui peut être introduite à partir d'une équation fonctionnelle ou de la notion d'aire sous une hyperbole. Le fait de retrouver la fonction exponentielle comme réciproque du logarithme népérien, après avoir introduit l'exponentielle à l'aide d'une équation différentielle, peut même servir de justification a posteriori de l'existence de la fonction exponentielle (à condition de démontrer l'existence des primitives d'une fonction continue sur un intervalle à l'aide du calcul d'aire).

Quelques rappels

1°)Rappeler les définitions de suites arithmétique et géométrique.

2°)Soit (u_n) la suite géométrique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 1$. Donner les valeurs : $u_0, u_1, u_2, u_3, u_n, u_{n+1}$.

3°)On dit que des réels strictement positifs *a, b, c, d* sont en proportion géométrique si et seulement si $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Donner un exemple de quatre nombres en proportion géométrique.

4°)On dit que des nombres réels *a, b, c, d* sont en proportion arithmétique si $b - a = d - c$. Que peut-on dire alors de la somme des « moyens »(*b* et *c*) et de la somme des « extrêmes »(*a* et *d*) ?

5°)Soit *f* une fonction strictement croissante sur un intervalle I de *R*. Montrer que, si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$ (Raisonner par l'absurde : on suppose $a \neq b$ alors on a : $a < b$ ou $a > b$).

Construction d'une table de logarithmes

Le texte sur lequel nous allons travailler est extrait d'une présentation de tables numériques par Jacques Ozanam(1685). J. Ozanam commence par donner une définition de ce qu'il appelle dans la suite des *logarithmes* :

« Les logarithmes sont des nombres en proportion arithmétique, correspondant à d'autres nombres en proportion géométrique, desquels ils sont appelés logarithmes. »

Nous allons tracer la courbe représentative d'une fonction *f* strictement croissante sur R^{+*} ayant la « propriété logarithmique » : *f* transforme toute proportion géométrique en une proportion arithmétique. Comme J. Ozanam dans la suite de son texte, nous choisirons d'étudier la fonction *f* telle que $f(1) = 0$ et $f(10) = 1$.

1°)Que forment les nombres $1, 10, 10^n, 10^{n+1}$?

2°)On pose $v_n = f(10^n)$ Que valent v_0 et v_1 ? Puisque *f* a la propriété logarithmique, que peut-on dire des quatre nombres réels v_0, v_1, v_n, v_{n+1} ? En déduire la nature de la suite(v_n), puis la valeur de v_n .

3°)Lire la suite du texte d'Ozanam ci-dessous. (Dans ce texte, le mot *progression* signifie *suite*. La *progression des nombres naturels* est : 1,2,3,4,.... La *progression décimale* est $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$)

Comme il est libre de prendre telle progression qu'on voudra, on choisira la plus commode, qui est de prendre la progression décimale pour la progression géométrique et la progression des nombres naturels pour l'arithmétique, en sorte que, pourtant, le premier nombre arithmétique, qui répond au premier géométrique, ou à l'unité, soit 0, c'est-à-dire que le logarithme de l'unité soit 0, pour rendre l'usage des logarithmes plus facile : comme vous le voyez dans cette table, où le logarithme de 1 est 0, de 10 est 1, de 100 est 2, de 1000 est 3 et ainsi de suite ; et, parce que dans la pratique, on a besoin des logarithmes des nombres moyens 2,3,4,5, etc. et que ces logarithmes ne peuvent être exprimés qu'en fractions, on se servira aussi de la progression décimale pour la facilité du calcul, en ajoutant un certain nombre de zéros à chaque terme de la progression arithmétique, plus ou moins selon que l'on voudra avoir des logarithmes plus ou moins exacts, comme vous voyez ici.[...].

c-à-d : $f(1) = 0$; $f(10) = 1$; $f(100) = 2$

il s' agit ici du nombre de chiffres après la virgule c - à - d de la précision du calcul

Prop.Geom.	*Prop. Arith.*
1	*0,0000000*
10	*1,0000000*
100	*2,0000000*
1000	*3,0000000*
10000	*4,0000000*
100000	*5,0000000*
1000000	*6,0000000*

Propriétés des logarithmes

Dans la suite du texte, le logarithme d'un nombre x est ce que nous notons $f(x)$ où f est une fonction strictement croissant possédant la propriété logarithmique.

Proposition : La somme des logarithmes de deux nombres entiers est égale au logarithme de leur produit, lorsque le logarithme de l'unité est 0.   *Proposons par exemple les deux nombres entiers 4, 6, dont le produit est 24. Je dis que le logarithme de 24 est la somme de logarithmes de 4 et de 6, le logarithme de l'unité étant 0. Car, puisque 24 est le produit de 4 et de 6, ces quatre nombres 1, 4, 6, 24 seront en proportion géométrique, c'est pourquoi leurs logarithmes seront en proportion arithmétique, et la somme des deux extrêmes, c'est-à-dire la somme des logarithmes de 1 et 24, sera égale à la somme des deux moyens ou à la somme des deux logarithmes de 4 et 6, et parce qu'on suppose que le logarithme de 1 est 0, le seul logarithme de 24 sera égal à la somme des logarithmes de 4 et de 6, qui produisent 24. Ce qu'il fallait démontrer.*

4°)a)En vous inspirant du texte ci-dessus, montrer : $f(15) = f(3) + f(5)$.

b)Montrer de manière analogue : pour x et y dans R^{+*}, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

c)En déduire, pour x dans R^{+*}, l'expression de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ et de $f\left(\sqrt{x}\right)$ en fonction de $f(x)$.

d)Exprimer, pour x et y dans R^{+*}, $f\left(\sqrt{xy}\right)$ en fonction de $f(x)$ et de $f(y)$.

e) Déterminer $f\left(\sqrt{10}\right)$, $f\left(\sqrt{\sqrt{10}}\right)$, $f\left(10\sqrt{10}\right)$.

5°)Résoudre dans R^{+*} les équations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}$$
$$f(x) = \frac{1}{4}$$
$$f(x) = \frac{5}{4}$$

6°)Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{1}{10}$				1		$\sqrt{10}$		10			
$f(x)$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

7°)Dans un repère orthonormé (unité 2cm), tracer la courbe représentative de la fonction f (placez votre feuille horizontalement, la hauteur étant inférieure à la largeur ; placez l'axe des ordonnées à gauche de la feuille et l'axe des abscisses au milieu de la feuille).

8°)Pour les points M de la courbe d'ordonnées : $-1;-\frac{3}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};0;\frac{1}{2};1;\frac{5}{4}$:

a)placer à chaque fois le point M' de coordonnées $(0 : y_M - 0{,}43)$.

ATTENTION ! L'unité est 2cm.

b)Pour chaque point M, tracer la droite (MM').

c)Quelle position semble occuper la droite (MM') par rapport à la courbe ? Calculer le coefficient directeur de la droite (MM') en fonction des coordonnées de M.

d)Au cas où la fonction f serait dérivable sur R^{+*}, risquer une conjecture sur l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.

Complément : Démonstration du résultat sur $f'(x)$

Soit f définie dérivable sur R^{+*} telle que :pour tous a et b dans R^{+*}, $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Pour t fixé dans R^{+*}, on définit la fonction g_t de la manière suivante : $g_t(x) = f(tx)$.

1°)Ecrire g_t comme une fonction composée.

Remarque : t est **fixé** dans R^{+*}(quelconque mais fixé). Il s'agit donc d'une constante (au même titre que le nombre 2 ou le nombre 3), que vous manipulerez comme telle.

2°)Montrer que g_t est dérivable sur R^{+*} et calculer $g_t'(x)$

3°)En utilisant la propriété de f de transformer les produits en sommes, donner une autre expression de $g_t(x)$ puis de $g_t'(x)$.

4°)Déduire de ce qui précède que : pour t fixé quelconque dans R^{+*}, $f'(t) = \frac{f'(1)}{t}$ (on pourra prendre $x = 1$ dans les deux expressions précédemment obtenues de $g_t'(x)$).

Approximations de solutions d'équations du type $f(x) = a$

Méthode de Newton

Martine Bühler

Le problème suivant a été donné en devoir à la maison en terminale scientifique. Il s'agit de déterminer le nombre de solutions d'une équation polynomiale grâce à l'étude d'une fonction, puis de calculer des approximations de ces solutions par l'étude d'une suite.

La quatrième question de la partie II se traitait dans les anciens programmes à l'aide de l'inégalité des accroissements finis et peut maintenant l'être par intégration d'inégalités sur un intervalle [a ;b] avec $a \leq b$.

La dernière question fait le lien entre tangente et approximation affine d'une fonction. D'une manière générale, peu d'élèves voient ce lien (mais la situation s'améliorera peut-être avec les nouveaux programmes, la méthode d'Euler étant abondamment traitée dès la classe de première scientifique, ce qui devrait aider les élèves à mieux percevoir ce lien). Il paraît nécessaire lors de la correction d'insister sur la comparaison demandée à la toute dernière question et de réexpliquer la relation entre tangente, dérivée et approximation affine.

Texte du problème

On considère l'équation (E) : $y^3 - 2y - 5 = 0$. Le but du problème est de déterminer le nombre de solutions de (E) dans R et d'en calculer des approximations de précision donnée.

I.Nombre de solutions de (E).

1°)Soit la fonction numérique f définie sur R par $f(y) = y^3 - 2y - 5$.

a)Etablir le tableau de variations de f.

b)Montrer que (E) possède une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 2,2].

2°)a)Déterminer le signe de $f(y)$.

b)L'équation (E) possède-t-elle d'autre solution que α dans R ?

3°) Montrer que : $\alpha \leq 2{,}1$.

II. Méthode d'approximation de Newton.

1°)Le texte suivant est extrait de *La Méthode des Fluxions et des Suites infinies* de Newton.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à réduire en suite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne diffère pas d'une de ses dixièmes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3+6p^2+10p-1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient ; rejettez p^3+6p^2 à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui est très près de la vraie valeur de p ; c'est pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & substituant comme auparavant, j'ai $q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reste $11{,}23q+0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près.

a)Reliez l'affirmation des deux premières lignes aux résultats du I.

b)Partant de l'approximation 2 de α, Newton obtient comme deuxième approximation 2,1. Puis il recommence le même type de calcul ; terminez le travail et déterminez la troisième approximation.

c)Calculez en employant la même méthode la quatrième approximation à 10^{-8} près par défaut.

2°)Reprenons le calcul de q. Au lieu de remplacer p par $0{,}1 + q$ dans l'équation $p^3+6p^2+10p-1= 0$, remplacez y par $2{,}1+q$ dans l'équation (E) : que constatez-vous ?

3°)**Formalisation de la méthode de Newton.**

On appelle u la suite des approximations de α obtenues par Newton. On a donc $u_0=2$, $u_1=2{,}1$,etc. Pour obtenir u_{n+1} à partir de u_n, on remplace y par u_n+p dans l'équation (E) et on néglige les termes en p de degré supérieur ou égal à 2. On peut alors calculer p en fonction de u_n. La relation de récurrence définissant la suite u est alors : $u_{n+1} = u_n+p$. Déterminez cette relation de récurrence.

4°)**Etude d'une fonction auxiliaire.**

Soit la fonction g définie sur [2 ; +∞[par : $g(x) = \dfrac{2x^3+5}{3x^2-2}$.

a)Vérifiez que α est un point fixe de g.

b)Montrez que, pour $x \in [\,2\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{6xf(x)}{(3x^2-2)^2}$. En déduire les variations de g.

c)Soit l'intervalle I = $[\alpha\,; 2{,}1]$.Montrez :

- Si $x \in$ I, alors $0 \le g'(x) \le 0{,}008$.
- Si a et b sont deux éléments de I tels que $a \le b$, alors $0 \le g(b) - g(a) \le 0{,}008(b - a)$.

5°)**Etude d'une suite.**

On définit la suite u par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour } n \text{ dans } N, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a)Montrez que, pour tout n dans N^*, $u_n \in [\alpha ; 2{,}1]$.

b)Montrez que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_{n+1} - \alpha \leq 0{,}008(u_n - \alpha)$.(On pourra utiliser 4°)c).

c)Déduisez-en que, pour $n \geq 1$, $0 \leq u_n - \alpha \leq 0{,}008^{n-1} \times 0{,}1$.

d)Concluez sur la convergence de la suite u.

e)Déterminez un entier n_0 tel que $0 \leq u_{n0} - \alpha \leq 10^{-5}$.

III. Interprétation géométrique.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f du I dans un repère orthonormé ; pour plus de commodité, nous revenons à la dénomination x pour la variable.

1°)Soit $x_0 = 2$.

a)Déterminez une équation cartésienne de la tangente T_0 à la courbe C au point A_0 de C d'abscisse 2.

b) T_0 coupe l'axe des abscisses en un point A_1 d'abscisse x_1. Calculez x_1 .

2°)On définit la suite x de la manière suivante :

$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} \text{ est l' absisse du point d' intersection de l' axe des abscisses et de la tangente à C au point } A_n \text{ de la courbe.} \end{cases}$

Déterminez l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

3°)Comparez au résultat du II.3°) et expliquez le résultat de cette comparaison.

Le texte suivant est extrait de La méthode des Fluxions et des Suites Infinies d'Isaac Newton, paru en 1736 et traduit en français par Buffon en 1740.

On considère Newton et Leibniz comme les fondateurs du calcul différentiel et intégral. Newton(1642-1727) a peu publié, entre autres par crainte des critiques. Etudiant à Cambridge, Newton dut interrompre ses études en 1665-1666 à cause de la peste qui sévissait dans la région de Londres. C'est durant ces deux années que Newton posa les fondements de sa mécanique et conçut la théorie des fluxions. Grâce à l'insistance et l'appui de son ami Halley, Newton publie en 1687 les Principes mathématiques de la Philosophie naturelle qui contiennent toute sa théorie (gravitation universelle, lois des mouvements et leurs relations avec les forces). La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies est publiée après sa mort. Il y expose sa méthode mathématique la plus fameuse : le calcul des « fluxions » (qui correspondent à nos dérivés) et résout les problèmes de recherche de tangentes à une courbe et de « quadratures » (calcul d'aires limitées par des courbes).

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en ſuite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ſes dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, ſubſtituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cauſe de ſa petiteſſe, il reſtera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui eſt très-près de la vraie valeur de p; c'eſt pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & ſubſtituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reſte $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en diviſant 0,061 par 11,23 juſqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient excluſivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-deſſous parce que ce Terme eſt Négatif; & ſuppoſant $-0{,}0054 + r = q$, je ſubſtitue comme auparavant, & je continue ainſi l'Opération auſſi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-deſſous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544852$ $+2{,}09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
SOMME.		$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$. $+0{,}06 + 1{,}2 + 6$ $+1, + 10,$ $-1,$
SOMME.		$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q$.	$+q^3$ $+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$-0{,}00000015$[illegible]$ + 0{,}000$[illegible]$8r - $[illegible]$r^2 + r^3$ $+0{,}00018370$[illegible]$ - 0{,}068$[illegible]$ + $[illegible] $-0{,}060642 + 11{,}23$ $+0{,}061$
SOMME.		$+0{,}000$[illegible]$6 + 11{,}162r$
$-0{,}00004852 + s = r$		

XXI. On peut abreger le Calcul vers la fin de l'Opération, & cela principalement dans les Equations qui ont plusieurs Dimensions; vous déterminerez d'abord jusqu'où vous voulez pousser votre Extraction, c'est-à-dire combien vous voulez que le Quotient contienne de Chiffres; ensuite vous compterez autant de Chiffres moins un après la premiere Figure du Coefficient du dernier Terme des Equations, qu'il reste de Places à remplir dans le Quotient, & vous rejetterez les Decimales qui suivent; dans le dernier Terme il faudra négliger les Decimales qui seront au-delà du nombre des Figures du Quotient; dans le Terme antepénultiéme toutes celles qui seront en-deçà de ce même nombre de Figures, en procedant ainsi Arithmetiquement, suivant l'intervalle des Chiffres; ou bien, ce qui est la même chose, vous couperez par-tout autant de Figures que dans le terme pénultiéme; de sorte que leurs Places les plus éloignées soient en progression Arithmétique, selon la suite des Termes, ou soient supposées remplies de Chiffres, lorsque cela arrive autrement. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, si je ne veux pas pousser mon Extraction, ou continuer mon Quotient plus loin que la huitiéme Figure des Decimales; lorsque j'aurai substitué $0{,}0054 + r$ pour q, il y aura dans le Quotient quatre Places de Decimales remplies, & autant qui demeureront à remplir; je puis donc négliger les Figures dans les cinq places les plus éloignées, & c'est pour cela que je les ai croisées de petites lignes; & à la vérité j'aurois pû négliger aussi le premier Terme r^3 quoique son Coefficient soit $0{,}99999$, &c. Ainsi en ne tenant plus compte de ces Figures, l'on aura dans l'Opération ci-dessus $0{,}00054 16 + 11{,}162\,r$ pour la somme, ce qui par la Division continuée aussi loin que le terme prescrit, donne pour la valeur de r, $- 0{,}00004852$, ce qui remplit le Quotient jusqu'au Terme prescrit; il ne reste qu'à soustraire le Négatif du Quotient de l'Affirmatif, & l'on aura $2{,}09455148$ pour la Racine de l'Equation proposée.

Mathématiques: Approche par les Textes Historiques)

vous propose:

La revue Mnémosyne pour échanger expériences et réflexions à propos de l'histoire et de l'enseignement des mathématiques.

Numéro 1 :	La démonstration par exhaustion chez les grecs et les arabes.	4,00 €	200 gr
Numéro 2 :	La querelle entre Descartes et Fermat.	4,50 €	210 gr
Numéro 3 :	Fragments d'étude des systèmes linéaires.	4,50 €	220 gr
Numéro 4-5 :	L'élaboration du calcul des variations et ses applications à la dynamique.	6,00 €	300 gr
Numéro 6 :	Leibniz et l'Ecole continentale.	4,50 €	220 gr
Numéro 7 :	Autour du théorème de Fermat : C. Goldstein	5,00 €	230 gr
Numéro 8 :	Isaac Newton. Détermination de tangentes à des courbes à l'aide de la méthode des fluxions.	5,00 €	250 gr
Numéro 9 :	Desargues et Pappus. R. Tossut	5,00 €	240 gr
Numéro 10 :	Le jeu des paradoxes dans l'élaboration des séries. A. Michel-Pajus	5,00 €	260 gr
Numéro 11 :	Des cartes-portulants à la formule d'Edward Wright. M.T. Gambin	5,00 €	255 gr
Numéro 12 :	Histoire de quelques projections cartographiques. M. Benedittini	5,00 €	255 gr
Numéro 13 :	Leibniz. Histoire et origine du calcul différentiel. A.Michel–Pajus	5,00 €	210 gr
Numéro 14 :	La méthode des pesées chez Archimède. M. Bathier –Fauvet	5,00 €	214 gr
Numéro 15 :	Recherche de deux grandeurs connaissant leur somme et leur produit. Odile Kouteynikoff	5,00 €	217 gr
Numéro 16	De la résolution des équations algébriques à l'émergence du concept de groupe. M. Buhler	5,00 €	210 gr
Numéro 17	Factorisation de grands nombres : de Fermat à la machine des frères Carissan. M. Buhler	5,00 €	210 gr
Numéro spécial :	N° 1 : Histoire de Pyramides. M. Grégoire	7,00 €	380 gr

Nous vous indiquons le prix des brochures sans le port, le poids et le tarif postal pour calculer le coût du port.

Poids jusqu'à	Ordinaires
20 gr	0,50 €
50 gr	0,75 €
100 gr	1,11 €
250 gr	1,90 €
500 gr	2,65 €
1000 gr	3,48 €
2000 gr	4,64 €
3000 gr	5,47 €

∀ --

BON DE COMMANDE

Je désire recevoir les numéros suivants de Mnémosyne:

Prix port

n° 1
n° 2
n° 3
n° 4
n° 5
n° 6
n° 7
n° 8
n° 9
n° 10
n° 11
n° 12
n° 13
n° 14
n° 15
n° 16
n° 17
n° spécial

Total:

Nom:
Prénom:
Adresse:

Date:

Ci-joint un chèque d'un montant de
A l'ordre de l'Agent comptable de l'Université Denis Diderot Paris 7
Désirez-vous recevoir une facture? Oui Non

Pour échanger expériences et réflexions à propos de

l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.:	*Mathématiques*
A.	*Approche par les*
T.	*Textes*
H.	*Historiques*

Résumé

Ce numéro 18 de Mnémosyne propose deux études : l'article central sur l'histoire du théorème des fonctions implicites, et un substantiel conte du lundi sur les nombres constructibles à la règle et au compas.

Les 'dans nos classes' proposent une introduction à la notion de logarithme et un travail sur la méthode d'approximation de Newton.

Pour vous détendre un peu, nous vous proposons de bonnes vieilles pages assez inattendues de Cauchy sur un pâtre de Touraine.

Mots-clés

Histoire des mathématiques

Euler, Lagrange, Cauchy, Jordan , Peano, Newton, Ozanam, Euclide, Descartes, Gauss, Wantzel, Galois, Picard.

Analyse, fonction implicite, notion de fonction, rigueur, géométrie, constructibilité, logarithme, suite, approximation, calcul mental.

En vente au prix de 5,50 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : octobre 2003
ISBN : 2-86612-242-9
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83