A.R.D.M.

ASSOCIATION POUR LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

IREM

INSTITUT DE RECHERCHE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2003

Édités par Viviane Durand-Guerrier et Claude Tisseron

LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1

ARDM et IREM de Paris 7

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2003

Édités par Viviane Durand-Guerrier et Claude Tisseron

LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1

ARDM et IREM de Paris 7

Sommaire

Présentation

Les séminaires de l'année 2003 ont été présentés autour de trois thématiques : *Didactique des mathématiques, TICE et sciences cognitives ; Didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé et Didactique des mathématiques et champs connexes* que nous décrivons brièvement ci-dessous.

Didactique des mathématiques, TICE et Sciences Cognitives

L'essentiel de cette partie est consacré aux TICE avec en commun le projet d'éclaircir les difficultés d'intégration des TICE et de produire pour les enseignants des outils et dispositifs facilitateurs. Le dernier article de Elisabetta ROBOTTI approfondit le rôle du langage naturel dans l'élaboration collective d'une démonstration par des élèves.

Jean-Baptiste LAGRANGE commence la série d'interventions sur les TICE par les résultats d'une méta-étude des publications de recherche et d'innovation sur le sujet. La méta-étude présentée, menée par des chercheurs de cinq équipes, est partie du constat récurrent d'un décalage entre les potentialités des TICE et leur utilisation réelle dans les classes. Deux dimensions (sémio-épistémologique et cognitive) sont mises en évidence dans la plupart des publications et recherches. D'autres dimensions (institutionnelle, instrumentale et situationnelle) jusque-là très peu explorées, sont prises en compte et montrent leur pertinence pour comprendre les difficultés de l'intégration. Dans ce cadre d'analyse élargi, l'enseignant joue de façon évidente un rôle central.

Brigitte GRUGEON-ALLYSE et Élisabeth DELOZANNE nous présentent ensuite deux projets pluridisciplinaires qui relèvent à la fois des travaux en didactique des mathématiques sur la technologie informatique et des travaux de recherche en informatique sur la conception de logiciels destinés à favoriser des apprentissages. Elles présentent des outils performants destinés à assister les enseignants dans les nouvelles tâches de plus en plus complexes qui leur sont confiées (enseignement sur mesure, gestion de l'hétérogénéité des classes, aide individualisée aux élèves). Le premier travail de recherche a consisté à mettre en œuvre l'idée audacieuse d'automatiser l'outil de diagnostic papier-crayon. Le prototype a permis d'observer dans un contexte de classe, si les enseignants pouvaient s'approprier l'outil et comment. L'analyse des retours d'utilisation présentée contribue de façon remarquable à expliciter les redoutables problèmes que pose l'intégration des TICE dans les pratiques enseignantes.

Teresa ASSUDE nous présente un projet de recherche sur l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. Le texte de l'intervention ayant été publié par ailleurs, l'exposé de ces actes présente un résumé rapide de cette première recherche suivi de l'état actuel de la poursuite de ses travaux sur le sujet. Après avoir identifié un certain nombre de conditions et de contraintes qui facilitent ou empêchent cette intégration, Teresa ASSUDE éclaire les modalités de travail des enseignants en nous proposant une catégorie de divers modes d'intégration instrumentale.

L'exposé de Dominique GUIN et Luc TROUCHE n'est pas rédigé ici mais seulement résumé, car il est développé dans un ouvrage « Calculatrices symboliques, transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique », dont ils sont coordonnateurs.

En revanche, Elisabetta ROBOTTI nous propose un texte bien développé sur le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de géométrie plane. Ce travail porte sur l'analyse des processus en jeu dans la résolution d'un problème en mettant en évidence le rôle (jusque là peu étudié) joué par le langage naturel, notamment par la verbalisation produite par les élèves. Celle-ci s'avère être un outil essentiel pour l'avancement de la démonstration. Les sources théoriques utilisées relèvent de la psycholinguistique et de la didactique cognitive, elles font appel aux théories de Duval (sur l'appréhension opératoire et perceptive), Vygotsky et Bakthine, selon lesquels le langage ne remplit pas seulement une fonction de communication, mais aussi une fonction de construction et de maîtrise de la pensée.

L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence

Cette deuxième partie présente la totalité des communications du séminaire qui s'est tenu en mars 2003, au cours duquel nous avions invité les membres du groupe Didactique des Mathématiques de l'Enseignement Spécialisé (DDMES) à présenter leurs travaux. L'ensemble forme donc un tout cohérent organisé par les membres du groupe eux-mêmes.

Le texte de François CONNE, *Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer*, présente tout d'abord le groupe, ses insertions et ses concepts de travail. Il explicite ensuite la position des membres du groupe d'une part sur les positions respectives de l'enseignement ordinaire (EO) et l'enseignement spécialisé (ES), dans une perspective au moins partiellement comparative et d'autre part sur les relations avec la théorie des situations didactiques qui apparaît à la fois comme source d'inspiration et objet de questionnement.

Le texte de Christian CANGE, *L'enseignement spécialisé en Suisse Romande, l'exemple d'une institution vaudoise*, apporte des éléments de contexte. Après une présentation rapide du paysage de l'enseignement spécialisé en Suisse Romande, il présente l'institution du Pré de Vert (Rolle), qui accueille pratiquement toutes les catégories d'élèves relevant de l'enseignement spécialisé et où se déroulent les expérimentations conduites par le groupe DDMES.

Le premier texte de Jean-Michel FAVRE présente les résultats d'une recherche s'appuyant sur la mise en oeuvre d'une même séquence didactique dans une classe de l'enseignement spécialisé et une classe de l'enseignement ordinaire. Ce texte présente une *étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé*. Les deux contraintes sont d'un part l'échec, qui se décline en échec préalable, échec effectif et échec potentiel, trois composantes qui jouent un rôle beaucoup plus important que dans l'enseignement ordinaire, et d'autre part le temps didactique qui possède en ES une grande capacité d'*étirement*, et ne joue pas le rôle d'organisateur de la programmation des apprentissages d'autre part, ceci étant dû en particulier à l'omniprésence des contraintes liées à l'échec potentiel. L'auteur note en outre que la distance entre la méthode officielle et la méthode spécifique construite par l'enseignant donne un poids plus important à la "théorie personnelle de l'enseignant" au sens de Mante et Arsac.

Le second texte de Jean-Michel FAVRE présente *La création d'un groupe de recherche pour étudier les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans l'enseignement spécialisé*, tant du point de vue de son inscription institutionnelle, que du point de vue du parcours conduisant de premières investigations jusqu'à un projet de recherche structuré. Au cœur de ce projet de recherche, se trouve un travail sur l'objet "situation" dans les conditions de l'enseignement spécialisé, en examinant plus particulièrement leur composante "milieu" (...) dans l'enseignement de la géométrie, en particulier autour des situations emblématiques "Puzzle" et "Quadrilatère". Une des perspectives étant de provoquer des restitutions indirectes permettant aux élèves de donner à voir ce qu'ils savent.

Luca DEL NOTARO et André SCHEIBLER nous proposent un exemple de "*Modèles de milieu à l'épreuve de la contingence en enseignement spécialisé*", en référence à la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau et aux travaux d'Isabelle Bloch. Ils nous présentent un exemple "d'étirement du milieu" à partir d'une situation tirée du manuel officiel de la classe de cinquième en Suisse Romande. Ils nous donnent à voir l'évolution de la tâche à travers les entretiens de plusieurs groupes d'élèves et les incidences théoriques des résultats de cette expérimentation.

Chantal TIECHE THOMAS apporte le point de vue d'une linguiste; elle nous parle "*De l'usage des mots comme révélateur de la progression du milieu dans les expérimentations puzzle et quadrilatère*". L'étude s'intéresse aux phénomènes de nominalisation des quadrilatères et fait l'hypothèse que "le jeu portant sur le poids des facteurs *objet versus signe* va être un révélateur de l'enrichissement du milieu (..) ou de son étirement (...)".

Quittant la Suisse pour la France, Isabelle BLOCH et Marie-Hélène SALIN nous présentent une *Etude des particularités de l'AIS (Adaptation et Intégration Scolaire)*, en présentant des *questions et outils théoriques d'analyse* à propos de *l'enseignement en SEGPA* (Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté). Le premier axe d'analyse concerne les milieux disponibles et les phénomènes de contrat, le second concerne les aspects sémiotiques, en particulier l'usage des ostensifs. Les pistes de recherche envisagées pour la suite concernent l'étude : des processus de construction de situations permettant le passage "d'une rencontre avec une notion dans une situation d'action, à des savoirs mathématiques sur celle-ci" ; des signes mathématiques "comme outils fonctionnels dans la construction des milieux" et du partage des connaissances entre professeur et élèves.

Didactiques des mathématiques et champs connexes

Cette partie regroupe l'ensemble des communications du séminaire d'octobre 2003, que nous avions souhaité consacré plus spécifiquement aux liens entre la didactique des mathématiques et quelques champs connexes, tout en relevant que bien sûr plusieurs des communications proposées dans les deux premières parties en relèvent également.

Carl WINSLØW se propose de *Définir les objectifs de l'enseignement mathématique,* à travers *La dialectique matières – compétences,* en prenant en compte la nécessité d'une cohérence globale à travers les programmes. Après avoir introduit la notion de compétence générale, il présente les compétences mathématiques spécifiques *versus* les compétences mathématiques générales en référence au modèle de Morgen Niss d'une part, dans une mise en perspective avec la théorie anthropologique du didactique d'autre part. Le propos est illustré par un exemple d'ingénierie qui ouvre des perspectives pour les recherches sur l'enseignement supérieur.

Dans son texte, *La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques : aspects logiques, perspectives didactiques et aperçus linguistiques,*Viviane DURAND-GUERRIER se propose dans une première partie de mettre en lumière la pertinence de la théorie des modèles de Tarski pour une analyse didactique du raisonnement. Les deux autres parties sont consacrées à une réflexion sur les outils logiques et linguistiques susceptibles de contribuer à approfondir la question de l'interprétation des énoncés dans la classe de mathématiques.

Jeanine et Marc ROGALSKI nous présentent un ensemble de résultats sur le *Traitement de la validité de l'implication par des étudiants,* puis analysent leurs *corrélations avec leurs performances mathématiques* et étudient les *liens avec diverses questions de psychologie cognitive.* Les résultats proviennent de deux expérimentations conduites avec des étudiants préparant le CAPES de mathématiques. Ils mettent en évidence l'existence de profils « logiques » types et étudient les corrélations éventuelles avec la réussite aux items mathématiques et au CAPES. La dernière partie nous offre un tour d'horizon sur le développement des approches en psychologie cognitive sur la déduction, le raisonnement et la rationalité.

Marie-Paule VANNIER-BENMOSTAPHA nous propose son travail de recherche sur les *Dimensions sensibles des situations de tutelle et* le *travail de l'enseignant de mathématiques,* qui s'inscrit dans un projet de *didactique professionnelle.* L'étude articule trois domaines : la psychologie des apprentissages ; la didactique des mathématiques et l'ergonomie cognitive, et propose l'élaboration d'un cadre théorique visant à élargir le concept de tutelle et à mettre en place une méthodologie particulière d'analyse du travail de l'enseignant, en introduisant en particulier les notions de dimension sensible et de compétence critique. Ce cadre est illustré par la description de l'expérimentation.

Le texte présenté par Robert BOUCHARD et Christiane ROLET, *Analyses interactionnelle et didactique de pratiques d'enseignement/apprentissage : étude d'un exemple,* est un résumé d'un travail de recherche articulant didactique des mathématiques et sciences du langage, le texte correspondant à cette recherche étant publié par ailleurs.

Didactique des mathématiques

TICE

et

Sciences Cognitives

A quoi travaillez-vous actuellement ?

A élargir le cadre d'analyse de l'usage des TIC dans l'enseignement des Mathématiques

Jean-Baptiste LAGRANGE

IUFM de Reims et DIDIREM

Résumé

Cet article porte en premier lieu sur la problématique et les résultats d'une meta-étude des publications de recherche et d'innovation sur les TIC. Il développe ensuite des perspectives de recherche concernant l'enseignant utilisateur des TIC.

La méta-étude, menée par des chercheurs de cinq équipes, est partie du constat d'un décalage entre les potentialités des TIC et leur utilisation réelle dans les classes. Pour en rendre compte, il a fallu, à partir de l'analyse de différents corpus, dégager des dimensions d'analyse et des indicateurs. Deux dimensions (sémio-épistémologique et cognitive) sont dominantes dans la plupart des publications et recherches. D'autres dimensions (institutionnelle, instrumentale et situationnelle) sont très peu explorées. Les indicateurs associés à ces dimensions ont permis de sélectionner une dizaine d'articles montrant la nécessité et la pertinence des dimensions nouvelles pour comprendre les difficultés de l'intégration.

Dans ce cadre d'analyse élargi, l'enseignant joue de façon évidente un rôle central. En vue de recherches ultérieures, une sélection de travaux sur l'enseignant et les TIC sera analysée. Elle montre l'intérêt d'observer l'enseignant dans ses tentatives d'utilisation des TIC, en considérant les possibilités et contraintes que les TIC apportent à son action ainsi que les choix plus ou moins judicieux qu'il est amené à opérer.

Introduction

Les publications d'innovation et de recherche et les instructions officielles soulignent les possibilités qu'apportent les TIC (Techniques d'Information et de Communication) pour l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. Pourtant, leur intégration dans les classes semble rencontrer des difficultés. Ce décalage peut s'interpréter comme résultant d'une certaine étroitesse du cadre d'analyse, souvent restreint à l'interaction élève-ordinateur-savoir.

Le but des recherches que je poursuis actuellement est de replacer cette interaction dans un processus de conceptualisation à long terme et dans le cadre des institutions scolaires[1]. Pour cela il est nécessaire de considérer des dimensions nouvelles de l'intégration des TIC qui sont présentées au début de cet article. Ensuite, il faut s'intéresser à l'enseignant dans ses tentatives d'intégrer les TIC puisqu'il (elle) joue de façon évidente un rôle central dans ce cadre d'interaction élargi. Les recherches sur l'enseignant intégrant les TIC sont paradoxalement peu nombreuses. Tout se passe comme si chercheurs et expérimentateurs faisaient l'hypothèse d'un transfert facile de pratiques innovantes, pourvu que les enseignants disposent de capacités professionnelles et d'une formation adaptées.

[1] *Ainsi, il s'agit bien d'un chantier* auquel *je travaille et non d'un sujet* sur lequel *travailler, d'où la liberté que j'ai prise par rapport au titre habituel de la rubrique.*

Dans les recherches que je me propose de développer[2], il s'agit davantage d'observer l'enseignant dans ses tentatives d'utilisation des TIC que de le considérer comme "récepteur potentiel" d'un savoir didactique sur l'intégration. En considérant les possibilités et contraintes que les TIC apportent à son action ainsi que les choix plus ou moins judicieux qu'il est amené à opérer, il doit être possible de mieux comprendre les phénomènes liés à l'intégration des TIC. Les recherches dont il s'agit sont seulement dans une phase préparatoire, celle qui consiste à analyser les travaux antérieurs et donc, après avoir présenté de façon résumée les dimensions nouvelles que je viens de mentionner, cet article va faire le point sur une sélection de travaux sur l'enseignant et les TIC.

De nouvelles dimensions d'analyse des TICE

Cette partie concerne une « méta-étude » faisant suite à un appel à recherche lancé en 1999 par le Comité National de Coordination de la Recherche en Education (CNCRE).
La remarque liminaire de l'appel

> " Sur les questions éducatives, la masse de travaux produits ces trente dernières années est tout à fait considérable, et pourtant, leur cumulativité et leur visibilité apparaissent pour le moins imparfaite.... "

nous[3] a semblé s'appliquer particulièrement bien aux Technologies d'Information et de Communication pour l'Enseignement (TICE). Les TICE en effet ne sont plus vraiment nouvelles et, après les espoirs suscités à un moment donné par des travaux, les tentatives de généralisation ont souvent été décevantes (Baron, Bruillard, 1996). Les tentatives de développement des TICE semblent se faire "à l'aveuglette", les mêmes erreurs et naïvetés se reproduisant à chaque nouvelle génération technologique.
La méthodologie et les résultats de cette recherche ont été publiés notamment dans (Lagrange et al, 2003) et (Lagrange, Grugeon, 2003). Je rappelle ici seulement les conclusions principales.
L'étude de la littérature de recherche et d'innovation concernant les TICE des années 1994 à 1998 nous a montré que les dimensions les plus généralement considérées pour analyser l'usage des technologies concernent d'une part le rapport entre les TIC et les savoirs mathématiques (dimension épistémologique) et d'autre part l'influence des TIC dans les conceptualisations (dimension cognitive). Ces deux dimensions ne peuvent permettre à elles seules une vision efficace de l'intégration des TIC dans notre discipline. En effet, les enjeux des rapports TIC/contenus mathématiques dépassent la seule dimension épistémologique. De plus, l'élève n'est pas seulement un "sujet cognitif" et l'évolution de son rapport aux TIC au cours de l'usage semble important à prendre en compte. Il faut donc des dimensions supplémentaires pour percevoir la complexité apportée par les TIC dans la réalité des situations d'enseignement.
Deux dimensions d'analyse, en germe dans les années étudiées, se sont développées depuis. La première est la dimension "instrumentale" qui prend en compte le développement conjoint au cours de l'usage d'un outil, de connaissances sur l'outil lui-même et de connaissances mathématiques. Une calculatrice, par exemple, n'est au départ qu'un assemblage de plastique et de silicium. L'élève qui se l'approprie va construire des usages et des représentations liant la

[2] *Notamment la recherche "Appropriation des outils TIC par les stagiaires d'IUFM" associant cinq IUFM et l'INRP. La problématique et les premiers résultats de cette recherche sont à paraître (Lagrange, Lenfant, Vincent, à paraître).*
[3] *Cette recherche a été menée par plusieurs équipes de didactique des mathématiques et d'informatique. Voir Artigue, M. (sous la direction de), 2000.*

calculatrice et les mathématiques pour lesquelles il s'en sert. Au cours du temps et des usages, ces représentations vont évoluer, parfois dans un sens mathématique, d'autres fois non. Par exemple, il est normal qu'au début, l'élève associe le graphe de la fonction sur l'écran à la fonction elle-même. Il donne ainsi un sens à des notions comme celle de représentation graphique, de croissance, de zéros.. Par la suite les rapports écran/notions vont chez certains élèves devenir plus fouillés, prendre en compte les limitations matérielles de l'écran et introduire un contrôle par des éléments mathématiques. Chez d'autres élèves, en revanche, "la vérité de la calculatrice" s'installera. Dans la variété des "genèses" possibles, les situations rencontrées en classe et les choix faits par l'enseignant jouent un rôle important. Trouche (1994) a montré notamment qu'une absence de prise en compte de l'outil par l'enseignant conduit l'élève à se construire des "maths de la calculatrice" très différentes des "maths du professeur".

La seconde dimension en gestation dans les années 1994 à 1998 est la dimension "institutionnelle". Dans un contexte institutionnel donné, par exemple celui du système scolaire d'un pays comme la France, ou d'un niveau de ce système, un rôle est plus ou moins explicitement assigné à l'enseignement de notions. Des règles implicites gouvernent le fonctionnement de ces notions dans les classes. Ce fondement institutionnel constitue une situation d'équilibre qui tend à perdurer au-delà des modifications des contenus à enseigner et des modes d'enseignement (Chevallard, 1992). Les nouvelles technologies viennent modifier certains éléments qui peuvent être cruciaux dans cet équilibre, mais ne sont pas automatiquement "viables" dans l'enseignement. L'introduction de calculatrices simples et peu coûteuses retire par exemple sa légitimité pratique à l'apprentissage des techniques de calcul papier/crayon. L'apprentissage des "quatre opérations" à l'école élémentaire et en début de collège a néanmoins été maintenu, en raison de son intérêt pour la compréhension de la numération décimale et des écritures polynomiales. En revanche la technique d'extraction de la racine carrée en fin de collège a été abandonnée au profit de l'utilisation de l'approximation décimale donnée par la calculatrice. Cela peut s'expliquer par le caractère marginal de cette technique dans l'enseignement des maths en France et le fait qu'elle était, dans cet enseignement, peu reliée aux propriétés de la racine carrée. L'impact de la technologie sur l'équilibre institutionnel lié à un contenu ne peut ainsi s'expliquer par les seuls aspects conceptuels.

Dans cette étude de la littérature, nous avions prévu une dimension "enseignant", persuadés de l'importance de cet "acteur" de l'intégration. Cette dimension était caractérisée par des indicateurs tels que les choix à opérer lors de l'intégration d'une technologie, les compétences nouvelles à développer, la formation aux TIC et l'influence des représentations des mathématiques et des TIC. L'étude a montré que ces indicateurs sont en fait très peu pris en compte.

Une sélection de recherches sur l'enseignant

Je considère dans cette partie une sélection de recherches sur l'enseignant et les TIC portant sur les années 1994 à aujourd'hui à la lumière des nouvelles dimensions indiquées plus haut. La sélection n'est pas systématique, contrairement à l'étude CNCRE. Les articles ont été retenus pour marquer une évolution. A l'exception du premier et du dernier, ils concernent le calcul formel, technologie que je connais le mieux, et où le décalage potentialités/intégration est particulièrement marqué.

La première publication (Abboud Blanchard, 1994) est une thèse comportant une analyse critique des usages des logiciels en mathématiques et des formations d'enseignants.

La seconde (Lagrange, 1996) est une étude de l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Elle a mis l'accent sur certains décalages entre les attentes de professeurs "experts" vis à vis de la technologie et ce qui a pu être observé dans les classes.
Les publications suivantes (Monaghan, 2001, Kendall, Stacey, 2002) s'intéressent, elles, à des professeurs moins experts. Elles tendent également à montrer des décalages, ainsi qu'une grande variabilité des pratiques.
La dernière publication (GRETIC, 2001) fait suite à la Recherche INRP “nouvelles compétences des enseignants”. Elle s'intéresse au rapport des jeunes enseignants en formation avec les "nouvelles technologies" (toutes disciplines confondues).
L'enseignant, les logiciels et la formation (Abboud Blanchard, 1994)
Il s'agit d'une thèse réalisée dans un contexte “ post IPT[4] ”. Après que de forts espoirs aient été placés dans l'utilisation de l'informatique à l'école, les usages se sont révélés décevants. La thèse estime à 15% les enseignants ayant une pratique, même ponctuelle, de l'informatique en classe. Les enseignants s'estiment peu formés : (23% estiment que cette formation est nulle, 46% l'estiment faible, 17% moyenne et 11% sérieuse)
La thèse relève que l'analyse "externe" des caractéristiques techniques, ergonomiques, etc. ou pédagogiques générales d'un logiciel proposée dans la littérature, ne permet pas à l'enseignant de réellement construire une utilisation en classe. Pour exploiter les potentialités d'un logiciel, il faut que l'enseignant en comprenne les caractéristiques "internes" telles que le fonctionnement des connaissances mathématiques dans le logiciel et son influence sur les situations d'apprentissage. Cela suppose des connaissances didactiques tant chez les concepteurs de logiciels que chez les enseignants utilisateurs.
Une partie de la thèse est consacrée à l'élaboration d'une typologie des formations. Trois types sont distingués
Le premier type est orienté vers la présentation par le formateur de logiciels éducatifs et de situations d'utilisations en classe. Il est marqué par une “ personnalisation ” forte, c'est-à-dire que le formateur présente sa propre pratique, sans distanciation. Il tend à présenter beaucoup de logiciels et des situations riches où l'utilisation de l'informatique offre des perspectives stimulantes. Il s'agit pour lui de justifier l'usage des TIC par l'intérêt des logiciels et la variété des usages possibles. Les tâches proposées au professeurs en formation sont "homologues" à celles qui pourraient être proposées à des élèves. Après la tâche, une fiche “ professeur ” est souvent distribuée pour préciser les objectifs et la mise en œuvre de l'activité.
Le second type s'intéresse davantage à l'intégration des logiciels à l'enseignement usuel. Les stratégies de formation sont les mêmes (homologie, fiches professeur), mais les situations sont plus réalistes. Le formateur privilégie l'apport de logiciels, moins nombreux, dans des situations plus usuelles.
Le troisième type s'appuie sur des tâches de "génération de situations". Les formés sont en situation d'enseignant construisant de façon détaillée des séquences. Ce type de formation sensibilise davantage les professeurs en formation au “ saut ” que constitue l'utilisation de logiciels par rapport aux pratiques usuelles.
Le troisième type de formation est a priori le plus efficace pour une intégration réelle, mais il existe deux difficultés. La première est la nécessité pour le formateur de connaissances didactiques pour s'adapter aux choix des formés sans imposer sa propre expérience. La seconde est que le formateur ne se propose plus comme "exemple", ce qui peut être frustrant pour des formés qui n'auraient pas le recul didactique nécessaire.

Observation de professeurs “experts” (Lagrange, 1996)

[4] *Plan Informatique pour Tous. Lancé en 1984 par le gouvernement Fabius, il s'agissait d'un plan d'équipement des établissements scolaires accompagné d'actions de formation.*

Au cours des années 1994-1996, dans un groupe de recherche dirigé par Michèle Artigue, nous avons mené une étude de l'utilisation du logiciel de calcul formel DERIVE dans les classes de lycée. Nous avons pu observer le travail de 17 professeurs dans leur classe. Ces professeurs étaient des "experts" des nouvelles technologies, souvent engagés dans des travaux de conception de séquences à l'aide de ce logiciel. Nous avons pu comparer certaines "attentes" exprimées par ces professeurs à la perception du logiciel a posteriori par les élèves et les professeurs.
Sur le plan des caractéristiques "externes", les professeurs prévoyaient que DERIVE allait permettre un enseignement plus convivial, d'individualiser plus facilement l'enseignement et d'aborder des problèmes plus intéressants et plus riches que les problèmes scolaires usuels,
Dans leur analyse "interne", ils pensaient que DERIVE allait compenser jusqu'à un certain point les difficultés rencontrées par les élèves, notamment avec le calcul numérique ou l'algèbre élémentaire, favoriser un fonctionnement plus réflexif, stratégique et conceptuel, en libérant l'élève des tâches techniques et par la possibilité d'utilisation conjointe des registres numérique, graphique et algébrique.
Nous avons interrogé les élèves et les professeurs par questionnaire à l'issue de l'expérimentation. Cela nous a permis de voir que les élèves perçoivent DERIVE surtout comme un outil pour effectuer des calculs pénibles et vérifier les résultats obtenus en papier/crayon. Peu d'élèves ont exprimé un point de vue sur le logiciel comme outil de compréhension et d'apprentissage. Ceux qui ont le plus utilisé DERIVE déclarent apprécier les situations proposées mais plutôt pour leur côté "nouveauté" que pour une contribution à leur apprentissages. Ainsi les enseignants n'ont pas pu faire partager leur vision de DERIVE. Leurs réponses ont d'ailleurs été elles-aussi en décalage avec les attentes. Les professeurs expriment les difficultés qu'ils rencontrent à mettre en œuvre leurs idées, écrivant par exemple que DERIVE finalement ne supprime pas les difficultés calculatoires autant qu'ils le pensaient et que, même avec l'aide du logiciel, il est difficile de gérer efficacement des activités expérimentales.
Les observations de classe nous ont aidé à analyser ce décalage entre les attentes a priori de professeurs vis-à-vis de la technologie et la mise en œuvre du logiciel. L'analyse montre que les enseignants "experts" situent leurs anticipations à un niveau "conceptuel" qui masque l'impact réel de la technologie sur les situations d'enseignement. Le rôle des techniques d'utilisation du logiciel, leur articulation avec les techniques papier/crayon et leur possible contribution aux apprentissages sont notamment ignorés.

Différences entre professeurs dans un même projet

Plus récemment, Kendall & Stacey (2002) se sont intéressées à deux professeurs australiens, André et Benoît, engagés dans un projet d'intégration de la calculatrice TI-92. Bien que les mêmes activités aient été prévues dans les classes des deux professeurs, des différences frappantes ont été observées dans la mise en œuvre.
Avant l'expérimentation André n'était pas un grand utilisateur des technologies, mais avec la calculatrice symbolique, il a augmenté notablement ses capacités et son assurance. Il a été séduit par les réponses exactes, l'écran large et la structure des menus et l'utilisation d'un écran rétroprojetable qu'il pratique systématiquement. Son approche assez "technique" des mathématiques se manifeste par la production de guides détaillés sur la calculatrice et de "mémos" sur son utilisation pour diverses tâches mathématiques.
Benoît, en revanche, était au début du projet déjà expert dans l'intégration des calculatrices graphiques. Il ne lui paraît pas très important que les élèves sachent se servir efficacement de leur calculatrice symbolique et les auteurs ont constaté que ses élèves sous-utilisent leur machine et font souvent des erreurs. La méthode de Benoît est basée sur des discussions en

classe sans l'aide d'un rétroprojecteur, et, selon les auteurs, elle ne fonctionne que grâce à des capacités exceptionnelles en gestion de classe.
André laisse librement ses élèves utiliser la calculatrice pour les différentes tâches. Le temps gagné est consacré approfondir l'usage de la calculatrice, ce qu'il fait par des références très directes à des enchaînements de touches de la calculatrice : " appuyer sur F4, ensuite sur F6, et ainsi de suite ". Il considère que mettre en œuvre une technique comme la dérivation sur une calculatrice symbolique a même valeur que sa réalisation en papier/crayon.
Benoît utilise quant à lui un vocabulaire mathématique (dériver, résoudre,...) pour présenter les techniques utilisant la calculatrice. Il fait un usage limité des capacités formelles de la calculatrice. Elles servent essentiellement à produire des observables, parmi lesquelles les élèves peuvent repérer des régularités de façon à conjecturer des propriétés algébriques. Il considère que la mise en œuvre de techniques " papier/crayon " associées à ces propriétés est irremplaçable.
Selon les auteurs André a adopté les calculatrices comme un nouvel outil, mais sans changer les tâches proposées aux élèves. Il a ainsi apporté aux élèves des techniques efficaces pour ces tâches, au prix sans doute d'un certain appauvrissement de la réflexion mathématique. Benoît s'est servi de la calculatrice de façon plus restreinte, en insistant moins sur ses caractéristiques techniques et en se méfiant visiblement d'un possible effet négatif sur les conceptualisations.
Les comportements différents de ces professeurs dans un même projet ne s'interprètent pas simplement. Leur rapport aux mathématiques est un des déterminants des adaptations qu'ils opèrent pour intégrer la calculatrice, mais des facteurs liés à leur habitus professionnel et même personnel jouent aussi un rôle important. Selon les auteurs, "ces différences laissent penser qu'il y a une diversité de réponses positives aux problèmes de l'enseignement des mathématiques avec la technologie." On peut aussi trouver des limites aux intégrations réalisées par les deux professeurs, celle d'André parce qu'elle tend à vider les techniques de leurs contenu mathématique et celle de Benoît parce qu'elle ne donne pas vraiment leur place aux techniques "calculatrices". Ces limites semblent difficiles à dépasser tant elles sont liées à l'habitus des professeurs.

Les difficultés de professeurs "ordinaires"

Lumb, Monaghan et Mulligan (2000) rapportent les succès, mais aussi les problèmes rencontrés par deux enseignants "ordinaires" lorsqu'ils tentent d'utiliser de façon intensive le logiciel DERIVE dont j'ai présenté plus haut l'approche par des professeurs français "experts". DERIVE est vu, ici aussi, comme ayant de fortes potentialités. Les professeurs en soulignent les contreparties. L'utilisation de DERIVE se situe "en haut de l'échelle des efforts" que doit faire le professeur quand on la compare à celle d'autres logiciels pour l'enseignement des mathématiques. De plus, il faut du temps pour "sentir" l'utilisation pédagogique du logiciel.
Un des professeurs reconnaît que de nombreuses idées qu'il avait au départ pour exploiter DERIVE ne sont pas en fait réalisables. Une analyse serrée de l'activité qu'il déploie dans la classe montre, parmi d'autres changements, une diminution du temps passé à ce que les auteurs nomment le "coaching", activité qui consiste à attirer l'attention des élèves sur les caractéristiques mathématiques de la situation qu'ils rencontrent, sans toutefois leur en donner les clés. Cette diminution est paradoxale, puisque l'introduction du calcul formel devrait précisément permettre de consacrer davantage de temps aux aspects directement mathématiques. Monaghan (2001) a constaté cette diminution sur un échantillon de 13 professeurs et parallèlement une part importante prise par un autre "coaching", portant celui là sur les aspects techniques de l'utilisation du logiciel. Il note que l'idée selon laquelle, en situation d'utilisation de la technologie, le professeur jouerait le rôle de catalyseur pour un apprentissage autonome, ne semble pas fonctionner.

La diminution paradoxale du "coaching" est visiblement liée à la difficulté de "sentir" l'utilisation du logiciel. En effet, reconnaître les caractéristiques mathématiques d'une situation pour les faire partager aux élèves, demande au professeur une certaine anticipation. Sans technologie, la connaissance que le professeur a des situations, l'habitude qu'il a de les référer à des idées mathématiques peut donner l'impression qu'il improvise avec aisance. L'utilisation de la technologie remet en cause cette facilité, en introduisant des situations dont l'exploitation mathématique n'est pas immédiate pour le professeur. Il lui est alors plus facile de jouer le rôle d'assistant technique que d'intervenir sur les mathématiques.
Les professeurs ont consacré beaucoup d'efforts à la préparation de fiches de travail pour les élèves, rompant avec leur pratique habituelle d'utilisation d'un manuel. Ils justifient cela par l'impossibilité d'utiliser des matériaux non prévus pour l'utilisation du logiciel, mais par ailleurs ils n'utilisent pas non plus les nombreux documents fournis par le groupe de recherche auxquels ils participent, documents pourtant conçus directement pour la classe. Comme le disent les auteurs : "Nous pensons que les enseignants qui prévoient d'intégrer un usage significatif du calcul formel sont confrontés à une réévaluation des mathématiques qui leur ont été enseignées et qui leurs sont familières".

Recherche INRP sur les nouveaux enseignants

Dans le cadre de la recherche INRP "nouvelles compétences des enseignants" le GRETIC (IUFM de Reims) a interrogé par questionnaire des professeurs stagiaires de toutes disciplines, du premier et du second degré d'une part sur leurs compétences TIC et d'autre part sur leur utilisation pour les apprentissages de leurs élèves.
Comme le note le rapport, "les enseignants qui ont répondu à cette enquête témoignent d'une évolution de la professionnalité qui n'est cependant pas sans ambiguïtés".
Les professeurs stagiaires manifestent en effet des compétences encore peu répandues dans l'ensemble de la population. Le traitement de texte est ainsi passé dans les usages pour toutes les catégories de stagiaires, et le courrier électronique est en passe de suivre la même voie. L'utilisation de l'ordinateur est banalisée sur le " lieu de travail", (IUFM ou stage), alors qu'antérieurement elle était liée à la possession d'un ordinateur. Cela marque une évolution sensible par rapport à des enquêtes antérieures.
Alors que les enseignants en poste sont réticents à l'usage de technologies susceptibles de remettre en cause les équilibres dans la gestion de la classe, les professeurs stagiaires se disent prêts aux usages en classe dès leur première année. Les TIC apparaissent cependant assez marginaux par rapport au "cœur de la profession". Les motivations des professeurs stagiaires sont en effet en rapport avec une meilleure préparation des élèves à leur vie en société ou avec des préoccupations pédagogiques (gestion de l'hétérogénéité) plutôt qu'avec une contribution aux apprentissages. En particulier, les logiciels propres à la discipline (notamment ceux qui bénéficient du label ministériel "Reconnu d'Intérêt Pédagogique"[5]) sont le plus souvent ignorés.
Le rapport conclut: "(avec les compétences des nouveaux enseignants) il semble bien qu'une étape importante est en train d'être franchie. On doit cependant constater qu'il reste encore un chemin important à parcourir pour que les futurs enseignants considèrent l'informatique comme un réel outil au service des apprentissages."

---

[5] Le ministère a déposé la marque RIP (reconnu d'intérêt pédagogique) pour les produits multimédias destinés à l'enseignement. Communiqué de presse du 10 septembre 1999. http://www.education.gouv.fr/discours/1999/rip.htm

Conclusion

Cette sélection de recherches sur l'enseignant confirme l'idée d'une intégration plus difficile que ce que des recherches centrées sur les aspects épistémologiques ou cognitifs pourraient laisser penser. Professeurs "experts" et "ordinaires" sont confrontés à des réalités assez différentes de ce qu'ils avaient prévu. Les jeunes enseignants semblent mieux préparés que l'ensemble des professeurs, avec des compétences "rares" dans l'utilisation de la technologie et une formation à l'IUFM. Ils n'ont pas d'a priori négatif relativement aux technologies. Il semble cependant que cette vision positive vienne principalement d'une analyse "externe" des caractéristiques de la technologie (attrait, motivation,...) Connaître les logiciels propres à la discipline serait un premier pas vers une analyse "interne" de l'influence des technologies sur les apprentissages. Ce premier pas semble rarement franchi.

Abboud (1994) met justement l'accent sur la dimension didactique de l'analyse "interne", et ses conséquences sur les connaissances nécessaires à l'enseignant et sur les stratégies de formation. Le recul que nous avons aujourd'hui permet, me semble-t-il, d'apercevoir les limites des connaissances didactiques disponibles pour une transmission aux enseignants et formateurs. Les observations "cliniques" de professeurs intégrant ou tentant d'intégrer une technologie dans leur classe montrent en effet le chemin qu'il reste à parcourir. La diversité des modes d'utilisation et la variété des difficultés rencontrées donnent une image intéressante de la complexité des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Loin des schémas simplistes de transmission "pyramidale" des usages des logiciels, cette image montre qu'une bonne intégration ne peut se réaliser ni "du premier coup" ni de façon uniforme. Cela rejoint l'idée d'"enseignant en transition" avancée aux Etats Unis (Zbiek, 2001): l'intégration de la technologie ne peut se faire que par un processus de transformation de l'habitus, des modes de gestion de la classe et des rapports aux mathématiques de l'enseignant.

En introduction, j'ai rappelé les dimensions nouvelles d'analyse, instrumentale et institutionnelle, qui permettent de mieux rendre compte de la complexité de l'intégration. Référer précisément l'analyse du professeur à ces deux dimensions est un travail qui reste à faire. Mon hypothèse est que les techniques instrumentées sont des éléments clés de l'action du professeur en situation d'intégration. Comme techniques potentiellement porteuses de significations mathématiques elles s'inscrivent dans la dimension institutionnelle. La question de leur "acceptabilité" est posée dans les institutions de tout niveau (la classe, l'établissement, les lycées...) tant du point de vue du temps qui peut être consacré à leur élaboration par les élèves que des rapports qu'elles peuvent avoir avec les techniques papier/crayon. Dans "l'institution classe" le professeur est le garant des "mathématiques officielles", celui (celle) qui fait le tri parmi les techniques "instrumentées" et "papier/crayon", de façon à les insérer dans le savoir communément admis dans l'institution "niveau d'enseignement". Les techniques instrumentées sont aussi la partie visible des genèses instrumentales, c'est au cours de leur élaboration et de leur fonctionnement que le professeur va pouvoir orienter la construction de connaissances par l'élève sur la machine et sur les mathématiques. C'est un rôle nouveau auquel l'enseignant(e) n'est pas préparé.

Pour terminer sur note optimiste, je voudrais souligner que, si les diverses recherches menées depuis une dizaine d'année montrent clairement les limites d'approches "naïves" de l'intégration, l'utilisation en classe des TICE reste pleine d'intérêt. Les contraintes matérielles sont aujourd'hui moins prégnantes, les outils sont plus faciles d'utilisation, élèves et professeurs ont un rapport différent à la technologie. Ce qui manque vraiment, c'est une compréhension en profondeur des phénomènes d'intégration. La sélection de recherches étudiée dans cet article montre que l'enseignant est une bonne "entrée" pour avancer dans cette compréhension.

Références

Abboud Blanchard, M., 1994, *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise.* Thèse de doctorat de l'Université Paris VII.

Artigue, M., 2000, (sous la direction de) : De l'analyse de travaux concernant les TIC à la définition d'une problématique de leur intégration a l'enseignement. Rapport faisant suite à l'appel à recherche CNCRE. Disponible sur Tématice http://archivetematice.ccsd.cnrs.fr/.

Baron G.-L. Bruillard E., (1996), *L'informatique et ses usagers dans l'éducation* , Paris, Editions PUF.

Chevallard Y. (1992), Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. In Cornu B. (ed), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques*, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 183-203.

GRETIC (IUFM de Reims), (2001). Enseignants en formation initiale : Quelle formation pour quelles compétences ?, in INRP, 2001 "*Nouvelles compétences des enseignants*" http://www.inrp.fr/Tecne/Savoirplus/Rech40003/Sympcomp01.htm.

Kendall, Stacey, 2002, L'influence des environnements de calcul formel sur les modes de travail des enseignants. in Guin et Trouche (eds.) *Calculatrice symboliques*, La pensée sauvage, Grenoble.

Lagrange, J.B., 1996, Analysing actual use of a computer algebra system in the teaching and learning of mathematics. *International DERIVE Journal*, 1996, Vol.3 N° 3. R.I.L.

Lagrange, J.B., Artigue M., Laborde C., Trouche L., 2003, Technology and Math education: a multidimensional overview of recent research and innovation. In Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick, Leung (eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education*, (Kluwer)

Lagrange J.B. , Grugeon B., 2003, Vers une prise en compte de la complexité de l'usage des TIC dans l'enseignement, *Revue Française de Pédagogie*, n°143.

Lagrange J.B. , Lenfant A. , Vincent, J., à paraître, Appropriation des outils TIC par les stagiaires IUFM et effets sur les pratiques professionnelles Colloque des IUFM du pole NE. Reims, octobre 2003.

Lumb, S., Monaghan, J., & Mulligan, S. (2000). Issues arising when teachers make extensive use of computer algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(4), 223-240.

Monaghan, J., 2001 Teachers' classroom interactions in Ict-based mathematics lessons In M. van den Heuvel (Ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. I (pp. 383 -390). Utrecht, The Netherlands: OW&OC.

Trouche L. (1994), Calculatrices graphiques: la grande illusion. *Repères IREM*, Topiques Editions, n°14, pp. 39-55.

Zbiek, R. M., 2001 Influences on Mathematics Teachers' Transitional Journeys in Teaching with CAS. THEME 2 / REACTION, *CAME Meeting, Utrecht*, août 2001, http://ltsn.mathstore.ac.uk/came/events/freudenthal/2-Reaction-Zbiek.pdf.

EIAH et apprentissage de l'algèbre élémentaire : les projets Pépite et Lingot

Brigitte GRUGEON-ALLYS

IUFM d'Amiens, DIDIREM (Paris7)

Élisabeth DELOZANNE

IUFM de Créteil, Laboratoire d'Informatique de l'Université du Maine[1]

Les projets Pépite et Lingot que nous présentons ici sont des projets fondamentalement pluridisciplinaires. Ils s'inscrivent dans l'histoire des EIAH mais aussi dans l'histoire, d'une part de travaux en didactique des mathématiques sur la technologie informatique et, d'autre part, des travaux de recherche en informatique sur la conception de logiciels destinés à favoriser des apprentissages.
Pour ce qui concerne la didactique des mathématiques, jusqu'à une période récente, les travaux ont surtout porté sur les utilisations de « micromondes » - en particulier les logiciels de géométrie dynamique, les CAS, les tableurs- et ont peu pris en compte comme objets d'étude des logiciels "d'aide à l'apprentissage". Ceux-ci étaient sans doute encore trop pauvres en termes de choix des tâches prescrites, d'analyse du fonctionnement des élèves, de rétroactions. Après vingt années de recherche dans ce domaine, les chercheurs ont été sensibilisés aux difficultés que pose l'intégration des TICE et à la nécessité de mener des recherches qui sachent articuler à la fois la modélisation et le développement informatiques, l'attention portée à l'élève et à son développement cognitif et l'attention portée à l'enseignant, à la réalité de son travail, à l'évolution de ses compétences professionnelles. Aussi en mettant sur pied le projet LINGOT, il s'agit pour nous de concevoir et mettre à disposition des enseignants des outils performants qui les assistent dans les nouvelles tâches de plus en plus complexes qui leur sont confiées (enseignement sur mesure, gestion de l'hétérogénéité des classes, aide individualisée aux élèves). Ces nouvelles tâches nécessitent de prendre en compte une analyse fine des productions des élèves pour comprendre leurs modes de fonctionnement et pouvoir ainsi agir de façon plus efficace sur l'apprentissage. Nous faisons les hypothèses que d'une part, la mise à disposition d'outils informatiques d'assistance à l'activité des enseignants contribue à rendre opérationnelles des recherches en didactique des mathématiques et à favoriser la diffusion de leurs résultats dans le corps social et que, d'autre part, la création de prototypes informatiques avancés permet des expérimentations qui aident à tester des hypothèses et faire surgir de nouvelles thématiques de recherche dans les deux domaines.

[1] É. DELOZANNE fait maintenant partie du Centre de Recherches en Informatique de l'Université Paris 5 (CRIP5), mais les travaux présentés ici ont été effectués dans le cadre du LIUM et de l'équipe de recherche STICE de l'IUFM de Créteil.

1. Le projet LINGOT

Présentation et objectifs

Avec le projet Lingot, nous proposons un travail de recherche pluridisciplinaire dont l'objectif est de créer des assistants informatiques pour l'enseignement et l'apprentissage qui ne soient pas fondés exclusivement sur des fonctionnalités proposées mais fondés

- d'une part, sur des recherches menées dans divers domaines pour concevoir des situations d'apprentissage qu'ils rendent possibles et
- d'autre part, sur des modélisations informatiques qui permettent la réalisation de prototypes que l'on peut tester d'abord en laboratoire puis dans des conditions " écologiquement valides ". Réciproquement ces environnements informatiques permettent de valider, tester, discuter, compléter, systématiser ou infléchir les études de départ, en particulier les études didactiques.

Pour développer notre recherche, nous avons choisi un domaine d'apprentissage, celui de l'algèbre à la fin de la scolarité obligatoire, l'algèbre constituant un outil privilégié des mathématiques et un verrou d'accès à l'enseignement scientifique.

Un projet pluridisciplinaire

Cette approche nécessite donc la collaboration entre plusieurs domaines de recherche : la didactique des mathématiques, la psychologie et l'ergonomie cognitive, l'Interaction Humains Machines (IHM) et l'Intelligence Artificielle (IA) en articulation avec les Environnements informatiques d'apprentissage humain (EIAH).

Nous cherchons à articuler ces recherches pour :

- modéliser des cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine vaste celui de l'algèbre élémentaire, c'est l'axe diagnostic du projet,
- associer des stratégies d'apprentissage personnalisées en fonction du diagnostic établi, c'est l'axe apprentissage du projet[2],
- adopter une « approche intégrée de la conception de logiciel », c'est-à-dire une approche qui ne se limite pas à définir les fonctionnalités du logiciel mais étudie les conditions de son intégration dans les pratiques quotidiennes des enseignants, c'est l'axe instrumentation de l'activité enseignante du projet.

Ces approches sont adoptées entre autres par des chercheurs en EIAH comme Koedinger aux États Unis (Koedinger 1997, Hefferman et Koedinger 2002) et Stacey en Australie (Stacey et al. 2003). Par exemple, Koedinger et son équipe développe des tuteurs intelligents comme une des ressources disponibles dans le cadre de la mise sur pied d'un curriculum avec les livres et textes imprimés et la formation des professeurs qui accompagnent ce nouveau curriculum

La collaboration entre la didactique des mathématiques, l'informatique, la psychologie et l'ergonomie cognitive existe de longue date. Les trois domaines ont une tradition de collaboration scientifique qui s'est nouée dans diverses instances en particulier le PRC IA, le GDR Didactique (Balacheff et Vivet 94), la revue Sciences et Techniques éducatives (STE) et aujourd'hui la revue STICEF (Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation. Cette collaboration est restée active au niveau national avec la création du RTP 39 par exemple comme international. De plus, le groupe EIAH et Mathématiques du LIUM et l'équipe DIDIREM de Paris 7 ont depuis une quinzaine d'années mis en œuvre une synergie et acquis une expérience reconnue de travail interdisciplinaire. Ces travaux ont donné lieu à 3 Thèses, 6 DEA et des publications :

Dans le cadre du projet Pépite (diagnostic)

[2] Le nom des projets s'appuie sur la métaphore d'aller chercher dans les productions des élèves les granules de connaissances (les Pépites) qui permettront de construire des connaissances mathématiques (des Lingots).

- Thèse en informatique de S. Jean (1996-2000), DEA d'informatique J. Provost (Provost 1999),
- DEA de didactique d'A. Lenfant (Lenfant 1997), B. Hasquenoph (Hasquenoph 1998), S. Iamarène (Iamarène 1998),
- Expérimentations auprès d'enseignants (2000-2002)

Dans le cadre du projet Lingot (diagnostic et apprentissage)
- DEA d'informatique de D. Rogozan (Rogozan 2000), D. Rasseneur (Rasseneur 2001), D. Prévit (Prévit 2002) J.-C. Péna (Péna 2003)
- DEA de didactique de S. Mairèsse (2003)

Ces expériences passées nous ont montré la nécessité d'élargir les équipes en direction des IUFM pour travailler dans le champ de la formation des enseignants et avoir ainsi un large champ d'expérimentation des modèles mis au point, en contexte scolaire. Elles nous ont montré aussi la nécessité de prendre en compte la dimension ergonomique dans l'analyse de l'intégration dans les pratiques de ces outils d'assistance à l'apprentissage ou à l'enseignement.

Le projet Lingot[3] mobilise donc à l'heure actuelle six partenaires :
- LIUM, Université du Maine (E. Delozanne, P. Jacoboni) : recherche en EIAH sur la modélisation des connaissances des élèves et interaction humain / machine,
- Equipe de didactique des Mathématiques DIDIREM de l'université Paris 7 (M. Artigue, B. Grugeon-Allys),
- Laboratoire Cognition et Activités Finalisées, laboratoire CNRS-Univ Paris 8 (J. Rogalski)
- IUFM d'Amiens (B. Grugeon-Allys),
- Equipe STICE de l 'IUFM de Créteil (E. Delozanne, L. Coulange),
- Equipe SASO, Université J.V. d'Amiens

Sur ce projet sont en cours :
- 3 thèses en informatique de V. Larue, D. Prévit, J-C. Péna
- 1 DEA d'informatique de C. Vincent

Nous présentons ici les travaux précurseurs, les hypothèses et questions de recherche, le projet Pépite et les recherches en cours. Avant de revenir sur les questions de recherche et de présenter nos réflexions sur les apports et les difficultés d'un tel travail pluridisciplinaire, nous présentons les travaux précurseurs.

Les travaux précurseurs

Les travaux précurseurs sur lesquels s'appuient le projet LINGOT sont la thèse en didactique des Mathématiques de B. Grugeon (1995) et les travaux en EIAO au LIUM (Vivet 1991, Bruillard et Vivet 1994, Delozanne 1994, Dubourg 1995).

Fondements didactiques

Ce projet s'appuie sur des résultats de la thèse de B. Grugeon (1995). La problématique globale de la thèse visait à étudier les problèmes de transition institutionnelle dans le système

[3] Il bénéficie du soutien financier de ces différents partenaires et aussi de celui du Ministère de la recherche (Programme Cognitique appel 2002) et de la région Picardie.

éducatif. Cette étude avait été menée à travers celle des rapports institutionnels et personnels à l'algèbre élémentaire qui se développent dans la transition entre les filières d'enseignement professionnel et les filières correspondantes de l'enseignement général de lycée. Cette recherche concernant des phénomènes complexes avait montré la nécessité d'articuler plusieurs cadres théoriques, en particulier, la théorie anthropologique (Chevallard 1992) pour prendre en compte le côté institution, mais aussi la dialectique outil-objet (Douady 1984), du côté savoir, les champs conceptuels (Vergnaud 1992) et la didactique de l'algèbre pour prendre en compte le côté élève (Sfard, Kieran).

I. Champ conceptuel de l'algèbre

Le modèle de la compétence algébrique conçu à ce niveau scolaire repose sur une vision de l'algèbre et de sa transposition didactique. Ce champ conceptuel, qui ne saurait réduire l'algèbre à un jeu formel d'écritures, est approché à la fois :
dans sa dimension *objet*, avec les objets de l'algèbre, incluant les expressions, les formules, les équations et les systèmes de représentation associés à ces objets, le système de représentation symbolique algébrique en articulation avec d'autres systèmes de représentation en particulier les registres du langage naturel, des écritures numériques, des figures, des représentations graphiques,
et dans sa dimension *outil*, par les diverses fonctionnalités selon les champs de problèmes abordés, en particulier,

- comme outil de résolution de problèmes via leur modélisation pour des problèmes arithmétiques formulés en langue naturelle sous forme d'équations mais au-delà des problèmes intra ou extra mathématiques sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables,

mais aussi,

- comme outil de généralisation et de preuve dans les cadres numérique et géométrique
- comme outil de transformation dans le cadre algébrique et fonctionnel.

Nous avons donc défini un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique à ce niveau scolaire. Au delà de la caractérisation des praxéologies mathématiques en algèbre en jeu dans les institutions, ce modèle permet de caractériser le rapport personnel des élèves à l'algèbre puis de les mettre en relation avec les praxéologies en jeu dans cette institution.

II. Un outil de diagnostic

Cette recherche nous a conduit en particulier à concevoir un outil diagnostic pour décrire les rapports personnels d'élèves à l'algèbre élémentaire. Il est constitué d'un ensemble de tâches diagnostiques recouvrant le domaine algébrique. Ce sont des tâches de production et de transformation d'expressions algébriques, des tâches de modélisation pour des problèmes arithmétiques formulés en langue naturelle mais au-delà pour des problèmes intra ou extra mathématiques sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables, des tâches de généralisation et de preuve et des tâches d'interprétation. Une grille d'analyse, s'appuyant sur le modèle multidimensionnel de compétence algébrique, permet d'analyser les productions des élèves. Cette grille prend en compte les différentes composantes du modèle en termes de critères.
Le diagnostic permet ainsi de dresser un panorama cognitif de chaque élève. La description obtenue, au niveau microscopique étant trop complexe, il a été nécessaire de passer de ce niveau microscopique à un niveau macroscopique, pour pouvoir définir une synthèse significative et opératoire de ce panorama cognitif. En effet, l'enjeu du diagnostic est de mettre en évidence des cohérences de fonctionnement et, pour ceci, nous réalisons un

recoupement transversal des réponses aux tâches, pour chaque composante, critère par critère, afin de rechercher des modalités de fonctionnement, descripteurs de régularités caractéristiques des traits de comportement des élèves en algèbre élémentaire, les cohérences de fonctionnement en algèbre. Cette étude nous amène à définir le profil de l'élève en algèbre élémentaire comme une description des principaux traits de son comportement en algèbre élémentaire qui donne un modèle intelligible de son rapport personnel à l'algèbre.
Nous avons retenu trois niveaux de description pour définir les principaux traits de fonctionnement, le premier niveau résume les compétences algébriques en termes de réussite/échec par rapport à un niveau attendu, le deuxième pointe les cohérences de fonctionnement composante par composante, le troisième décrit la flexibilité dans l'articulation entre registres de représentation.
Ce travail de thèse a donné des résultats perçus, du point de vue de l'EIAH, comme intéressants pour un travail de modélisation informatique. Pour les informaticiens, les modèles issus de sciences humaines apparaissent souvent trop « discursifs » pour être implémentés. Or ces travaux de didactique des mathématiques présentaient des descriptions dont le niveau de structuration les rendaient exploitables aux yeux des informaticiens. Plusieurs résultats étaient en jeu, en particulier, la définition d'un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique dans l'enseignement secondaire qui a permis la construction d'un outil de diagnostic papier-crayon, l'identification de cohérences de fonctionnement en algèbre qui a permis une description de profils cognitifs, la diversité des entrées possibles dans le champ de l'algèbre. De plus, cette recherche dans la jonction enseignement professionnel / général, en écho à la perspective anthropologique développée, avait permis de prendre conscience de la multiplicité des points d'entrée dans l'algèbre et de penser en particulier à côté de situations classiques, des situations d'apprentissage qui permettent une évolution du rapport à la technique.

Fondements informatiques

Au niveau informatique, ce travail se situe dans les problématiques de conception d'environnements d'apprentissage dans des logiques d'usage développées au LIUM (Vivet et al. 1994, Bruillard et al. 2001). Il s'appuie sur des méthodologies issues de la didactique des mathématiques (Artigue 1988) et issues du domaine de l'Interaction Humains – Machines.
Ces travaux en didactique des mathématiques ont suscité un intérêt très grand de la part de l'équipe d'informaticiens du LIUM dirigée à l'époque par M. Vivet et maintenant par P. Tchounikine. Tout d'abord, cette équipe cherchait à concevoir des environnements informatiques s'appuyant sur des modèles de connaissances ou des modèles d'interaction ayant une pertinence pédagogique, ce qui nécessite un travail en commun avec des experts du domaine enseigné et avec des experts de l'enseignement et de l'apprentissage de ce domaine. Une réflexion sur des méthodes de travail pluridisciplinaire pour la conception de logiciels d'apprentissage et d'enseignement a donc été menée (Bruillard et al. 2000). Des travaux de modélisation des métaconnaissances nécessaires pour résoudre des problèmes de calcul de primitives nous ont amenés à travailler avec M. Rogalski du laboratoire Didirem de l'Université Paris7 (Rogalski 94, Delozanne 94). Cette coopération s'est poursuivie avec une recherche sur l'apprentissage des équations de droites (Dubourg 95). Comme nous l'avons indiqué, les premiers travaux de B. Grugeon sur les profils cognitifs en algèbre nous sont apparus comme une base de travail très prometteuse pour avancer sur un thème de recherche très important dans la communauté IA&ED (Intelligence Artificielle et éducation) : la modélisation des connaissances de l'élève et leur diagnostic. Trois points nous semblaient importants dans le travail de Grugeon :

- Cette étude n'établissait pas un catalogue d'erreurs sur un petit domaine, mais recherchait des cohérences dans les réponses de l'élève sur un domaine assez vaste.

- Les analyses de tâches, la méthode et la grille de diagnostic, les profils à construire étaient décrits de façon assez structurée pour qu'un travail de modélisation informatique soit possible.
- Enfin la complexité de l'analyse justifiait la conception d'un assistant informatique pour pouvoir envisager une intégration dans les pratiques des enseignants.

De plus, très tôt M. Vivet a défendu l'idée que les environnements devaient prendre en compte le rôle du maître dès les phases de conception et P. Leroux a développé un système d'assistance au formateur (Leroux 1995). Ce thème de l'assistance au professeur était (et est toujours) un thème de recherche actif en EIAH, spécialement dans cette équipe. Enfin le travail en commun avec des didacticiens nous avaient amenés à mettre au point une méthodes de conception itérative fondée sur des analyses préalables, sur la création de maquettes et des tests précoces auprès des utilisateurs (enseignants ou élèves) et à nous intéresser de près non seulement aux méthodes de modélisation issues de l'intelligence artificielle mais aussi aux méthodes issues du domaine des Interactions Humains Machines (IHM), en particulier en ce qui concernent les méthodes de conception et d'évaluation "centrées utilisateur", centrée sur l'activité et les méthodes de conception participatives les modélisations conceptuelles des interfaces utilisateur et les modélisations des tâches et de l'activité (Nardi 1996, Mackay et al. 1997, Helander 1997), (Kolski 2001 a et b), (Delozanne et al. 2001).

Schématiquement vers la fin des années 80 nous voulions concevoir des Tuteurs Intelligents ie une machine qui enseignerait la connaissance dont elle disposerait. Début des années 90, l'accent est mis sur l'interaction d'un ou plusieurs élèves, avec un environnement et prenant en compte le contexte ou le dispositif de formation et le rôle de l'enseignant : "Une situation d'apprentissage s'entend comme une situation incluant divers acteurs contraints : les apprenants et les activités qu'ils sont censés effectuer, le maître et le rôle qu'il doit jouer ainsi que le système informatique et la place assignée à ce dernier. Il s'agit d'une interaction entre des individus et des outils, choisis et définis pour remplir une fonction précise dans cette situation : des objectifs de formation étant fixés, il s'agit que l'apprenant apprenne" (Bruillard et Vivet 1994).

Une série de travaux, se sont ainsi centrés sur le rapport entre les outils logiciel proposés et les connaissances construites par les élèves (Bruillard et al. 2000). Ces recherches ont en particulier défendu l'idée de création d'un système de spécifications des situations d'apprentissage relié à des processus d'évaluation précoces des environnements ainsi conçus. La conception de situations d'interaction fait apparaître trois éléments importants : l'analyse cognitive, épistémologique et didactique explicitant un problème d'enseignement (connaissance en jeu, public cible, enseignement usuel, difficultés des élèves), la spécification du contexte d'usage (dispositif d'enseignement, ressources humaines et matérielles, objectifs des séances, mode d'utilisation, mode de communication et type de suivi) et enfin les activités et le paramétrage de ces activités qui permettent de définir une famille de situations d'interactions. Des prototypes ont été conçus pour valider ces modèles (Élise puis Repères) en en adoptant une méthode de conception itérative et centrée utilisateur

- Partir d'un problème d'enseignement et, si possible, d'une analyse didactique,
- Travailler au sein d'une équipe composée d'informaticiens, de didacticiens et d'enseignants et ce, dès les premières phases de conception du projet,
- Utiliser le modèle de situation d'interaction et construire des maquettes pour aider à établir les spécifications du système à construire,
- Evaluer ces maquettes le plus tôt possible auprès des deux catégories d'utilisateurs : enseignants et étudiants ou élèves en laboratoire et sur le terrain,
- Centrer la conception sur les interactions apprenant – système (ou sur les interactions médiées par le système, des apprenants entre eux et avec l'enseignant) et les spécifier en fonction des objectifs d'apprentissage pour l'apprenant et de la situation d'apprentissage.

Hypothèses de recherche

Voilà tracée à grands traits le contexte de la mise sur pied des projets Pépite et Lingot. Dans un premier temps nous avons émis l'hypothèse qu'une automatisation partielle de l'outil de diagnostic mis au point par B. Grugeon était possible. M. Artigue et B. Grugeon étaient intéressées mais sceptiques. Deux questions essentielles les préoccupaient :

1. La saisie des expressions algébriques avec un clavier et une souris n'allait-elle pas modifier les réponses des élèves et surtout les limiter ?
2. L'analyse des expressions libres des élèves (en particulier sur l'exercice du prestidigitateur que nous présentons par la suite) qui nécessite une grande expertise didactique est-elle possibles de façon automatique ?

La thèse de S. Jean (Jean 2000) et les DEA de J. Provost (1999) et D. Prévit (2002) ont été consacrés à explorer cette hypothèse, travaux que nous présentons dans les trois sections suivantes : tout d'abord nous décrivons le prototype construit puis les retours que nous avons étudiés sur les utilisations de ce prototype, enfin les résultats et les nouvelles questions de recherche suscitées par ces expérimentations.
Dans un deuxième temps, il nous semblait possible de généraliser le travail de thèse de B. Grugeon et de définir des stratégies d'enseignement associées aux profils cognitifs diagnostiqués. Et là encore il nous semblait qu'il était possible de définir des environnements informatiques pour instrumenter ces stratégies. Ce sont les deux hypothèses fondant le projet Lingot sur lequel nous travaillons actuellement.

Le projet Pepite

L'outil de diagnostic papier-crayon s'est révélé trop complexe pour être utilisé par les enseignants dans les classes (Lenfant 1997). Ainsi le premier travail de recherche du projet Pépite a consisté à mettre en œuvre l'idée d'automatiser l'outil de diagnostic papier-crayon. Ce travail avait pour objectif de montrer (Jean et al. 1997, 1999) :

- qu'il était possible à l'aide d'un ordinateur de collecter des données sur les compétences des élèves (à partir de ces données, les experts pourraient construire les profils cognitifs des élèves) ;
- qu'il était possible d'automatiser (au moins partiellement) ce diagnostic ;
- que les profils cognitifs élaborés aideraient les enseignants à prendre des décisions pour leurs élèves.

Pépite est un logiciel disponible gratuitement (http://pepite.univ-lemans.fr). La première version a été réalisée en Delphi par Jean (Jean 2000, Jean-Daubias 2002). Mettant en œuvre la stratégie de diagnostic proposée par B.Grugeon, le logiciel Pépite est constitué de trois modules.

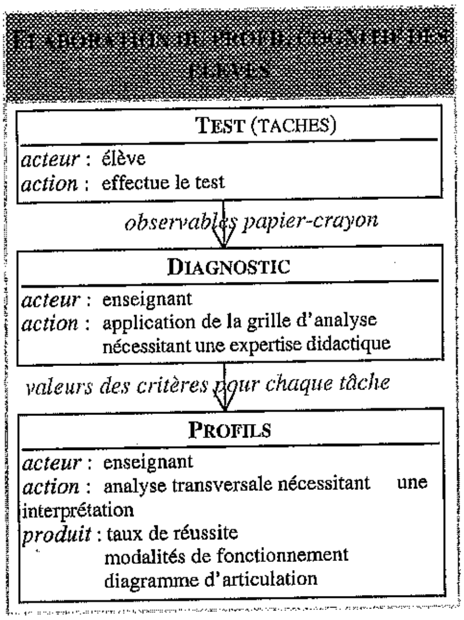


Figure 1 : L'outil de diagnostic papier - crayon.

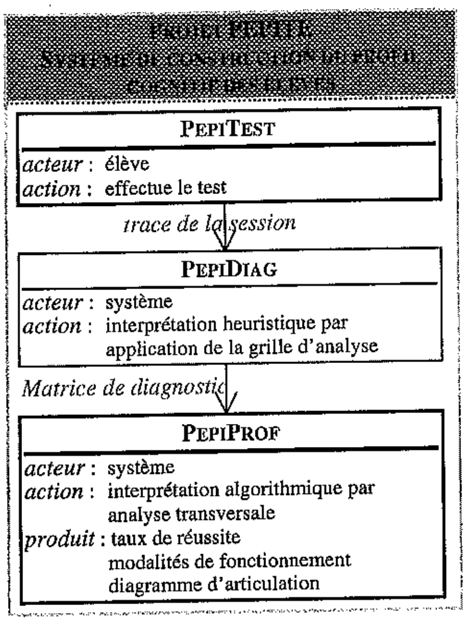


Figure 2 : Architecture de PEPITE.

PépiTest, le logiciel élève

PépiTest est le logiciel destiné aux élèves. Il leur propose de résoudre sur ordinateur 22 exercices inspirés de ceux de l'outil de diagnostic papier-crayon. Il recueille les réponses des élèves aux exercices. Ceux-ci sont constitués de questions fermées (réponses à choix multiples ou de réponse interactives par exemple en cliquant des zones sur un graphique) mais également de questions ouvertes exigeant des élèves la production d'expressions algébriques, de réponses en langage naturel ou de réponses combinant ces deux registres d'expression (nous appelons ce langage le langage « mathurel »). Pour les chercheurs en didactique, il est important que les élèves puissent formuler eux-mêmes leurs réponses dans leurs propres termes pour pouvoir établir un diagnostic conséquent du point de vue didactique, même si cela rend l'analyse automatique très complexe. L'interface du logiciel a été particulièrement soignée. Il est bien entendu crucial pour le diagnostic que les données recueillies permettent de décrire les compétences des élèves et non les problèmes d'utilisabilité de l'interface. En particulier, dès le début, les chercheurs en didactique des mathématiques s'interrogeaient sur les modifications des tâches mathématiques introduites par les difficultés de l'écriture des expressions algébriques sous forme linéaire avec un clavier et une souris. La figure 3 montre une réponse d'un élève à un exercice proposé par PépiTest.

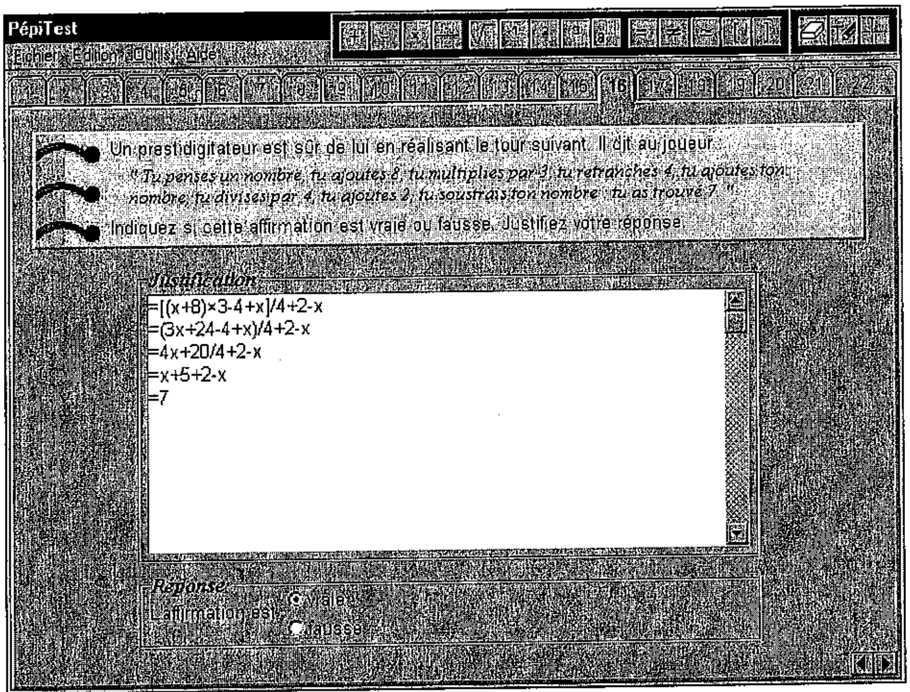


Figure 3 : Les réponses de Laurent à un exercice de PépiTest

PépiDiag, le logiciel de diagnostic automatique

PépiDiag est le module d'analyse des réponses. Il interprète les réponses des élèves à chaque exercice de PepiTest en appliquant des heuristiques dérivées de la grille d'analyse issue de l'analyse didactique. Comme l'outil de diagnostic papier-crayon, il assortit chaque réponse d'élève avec un item de diagnostic. Nous appelons cette opération le codage des réponses des élèves et nous en donnons un exemple à la fin de cette section. Ainsi PépiDiag remplit automatiquement une matrice de diagnostic de 55 lignes correspondant au nombre de questions dans PépiTest et de 36 colonnes correspondant aux différentes composantes décrites dans le modèle multidimensionnel des compétences algébriques. En fait, PépiDiag ne remplit que partiellement cette matrice car nous ne savons pas encore comment coder automatiquement toutes les réponses des élèves. Les réponses fermées et les expressions algébriques sont analysées. Les réponses en langage naturel et les réponses mixtes sont très partiellement analysées par recherche de mots clés. Ainsi 75 % des réponses des élèves sont automatiquement analysées.

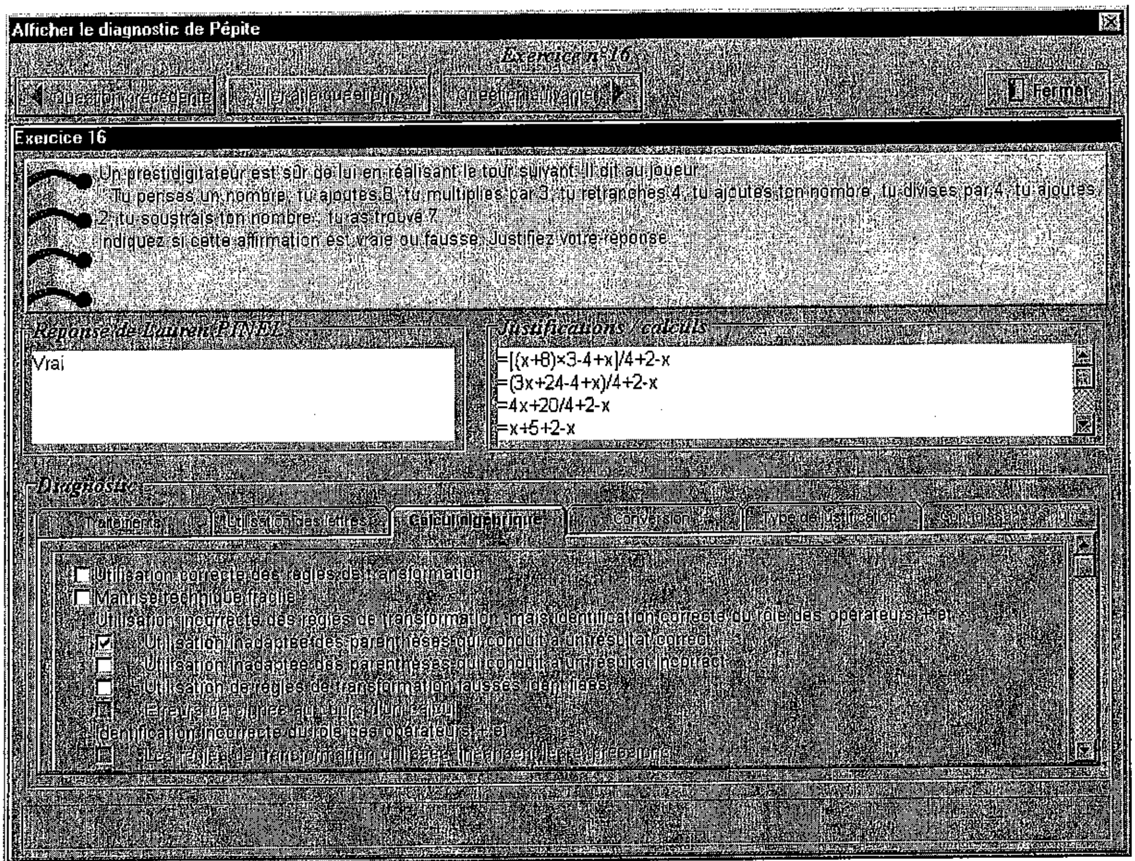


Figure 4: PépiProf, vérification par l'enseignant du codage des réponses de Laurent

PépiProf, le logiciel enseignant

PépiProf est le logiciel destiné aux enseignants. Il établit le profil de l'élève par une analyse transversale de la matrice et le présente au professeur. Il fournit également un module pour modifier le codage des réponses de l'élève (i.e.. pour modifier la matrice de diagnostic sans qu'elle apparaisse sous cette forme à l'enseignant) afin de permettre à l'enseignant de vérifier le codage effectué par le logiciel et de le corriger ou le compléter, si nécessaire. La figure 4 montre l'interface qui permet au professeur de vérifier et éventuellement corriger le diagnostic du logiciel. Dans la réponse de Laurent représentée sur la figure 3. PépiDiag a codé : traitement incorrect, utilisation correcte des lettres, utilisation incorrecte des parenthèses menant à un résultat correct, traduction correcte du langage naturel en expression algébrique, justification par l'algèbre. L'enseignant peut modifier le codage s'il n'est pas d'accord avec le codage automatique. Les figures 5, 6 et 7 montrent les profils affichés par PépiProf avec les trois descriptions du profil de Laurent.

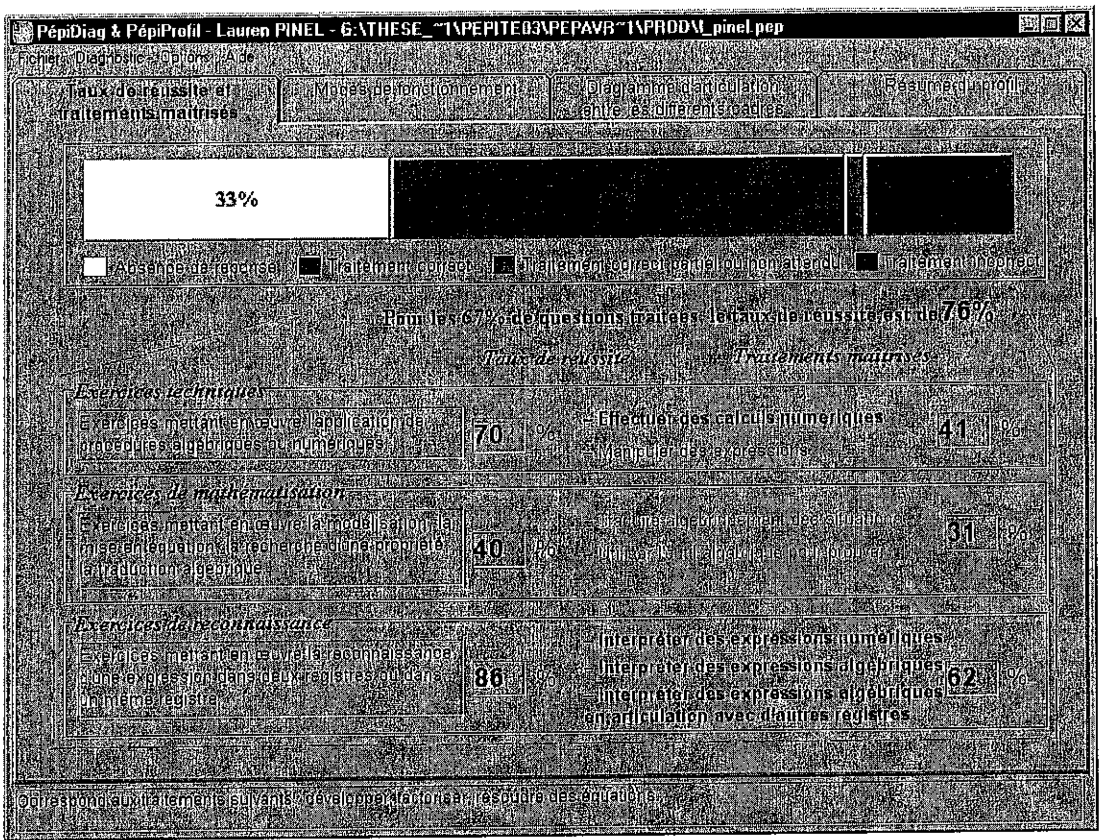


Figure 5 : Description quantitative du profil cognitif de Laurent

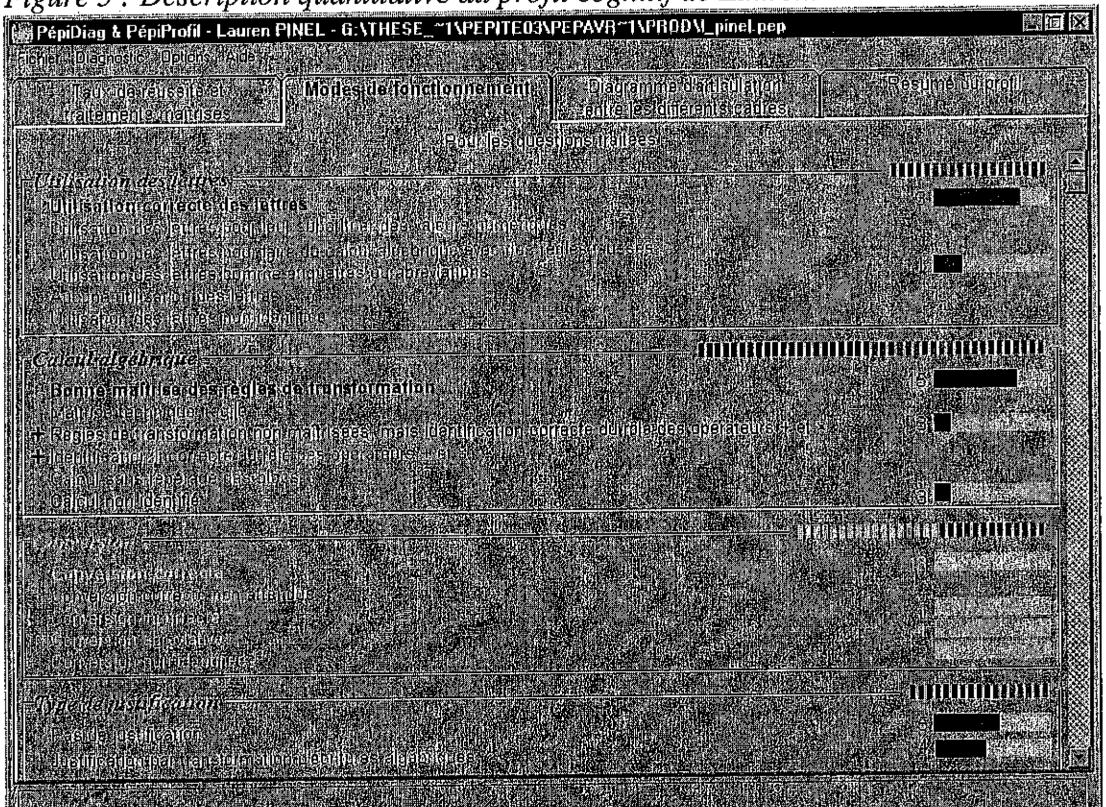


Figure 6 : Description qualitative du profil cognitif de Laurent

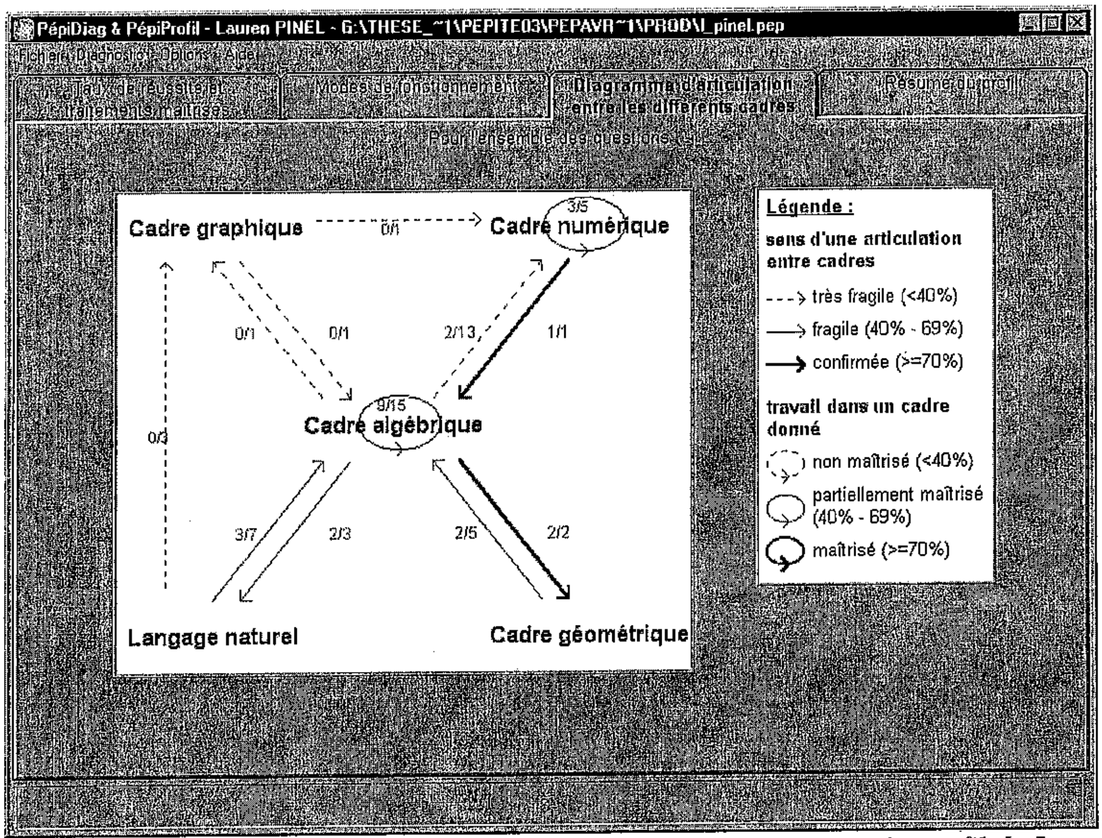


Figure 7 : diagramme d'articulation entre les différents cadres pour le profil de Laurent

Des retours d'usage de Pépite

L'idée de départ du projet Pépite était de tenter d'automatiser (au moins partiellement) un outil de diagnostique papier-crayon construit par des chercheurs en didactique, (Grugeon 1995, Artigue et al. 2001). Par rapport aux logiciels d'évaluation traditionnels, cet outil a deux caractéristiques principales. D'une part, il donne une description qualitative des compétences des élèves et ne se réduit pas à une analyse en terme de réussite/échec ou de listes d'erreurs, d'autre part, si l'analyse de réponses porte en partie sur des questions fermées (QCM) elle traite un grand nombre de réponses à des questions ouvertes. Nous avons conçu et réalisé un prototype appelé Pépite (Jean 2000) dont l'objectif premier était de montrer la faisabilité informatique du projet (Jean et al. 1999). L'objectif second était de disposer d'un prototype qui permette d'observer dans un contexte de classe, si les enseignants pouvaient s'approprier l'outil et comment. Dans cette section nous résumons d'abord les utilisations de Pépite que nous avons étudiées (entre Janvier 2000 et avril 2002) et les leçons que nous en avons tirées.

Différents contextes d'usage

Nous avons observé l'utilisation de Pépite dans différents contextes (Delozanne et al. 2002). D'abord nous avons examiné PepiTest en laboratoire, enregistrant une élève en vidéo. Puis environ 200 élèves en fin de collège ou de seconde ont passé le test dans le cadre de leur enseignement normal de mathématiques. Pépite a été utilisé en atelier par des chercheurs ou des formateurs des enseignants. Il a aussi été utilisé dans la formation initiale ou continue des professeurs (IUFM de Créteil, Amiens, Paris, Rennes, Montpellier). Des sessions pilotes ont été menées avec des enseignants expérimentés volontaires. Enfin quelques enseignants nous ont rapporté avoir utilisé Pépite en dehors de notre présence. Le tableau 1 synthétise ces contextes.

Contexte	Situation	Utilisateur	Nombre	Données collectées
Test d'élèves	Classe	élèves	200	Réponses d'élèves Questionnaires Observations Rapports
Recherche didactique	Recherche de régularités dans les profils d'élèves	chercheurs	3	Liste de problèmes d'utilisation ou des bogues Définition de classes de profils
Formation de formateurs d'enseignants	Étude d'un élève en algèbre, étude des compétences en algèbre	formateurs	40	Questionnaires
Formation d'enseignants	Étude d'un élève en algèbre, étude des compétences en algèbre	Stagiaires et professeur en responsabilité	100	Questionnaires Observations
Session pilote	Classes (Aide individualisée et évaluation)	Enseignants	4	Observations Rapports Cassettes audio
Utilisations spontanées	Classes	Enseignants	9	Rapports oral ou courriel

Tableau 1 : Les différents contextes d'expérimentation de la version 1 de Pépite

Résultats des études sur l'utilisation de Pépite

Tous ces tests ont mis en évidence plusieurs résultats au niveau de la conception de chacun des trois modules du logiciel et aussi au niveau de l'activité de l'enseignant avec Pépite.

I. PépiTest

PépiTest recueille des données, les réponses des élèves, qui peuvent être ensuite utilisées pour le diagnostic. Premièrement, à partir de ces données, les chercheurs en didactique peuvent appliquer la grille d'analyse et construire « manuellement » le profil cognitif de l'élève. Deuxièmement, si nous considérons les réponses de 50 élèves aux exercices de PepiTest, nous obtenons le spectre des réponses prévues par l'analyse didactique a priori. Cela signifie que le logiciel ne diminue pas l'éventail de réponses repérées par l'analyse a priori papier-crayon. Troisièmement, comme nous l'avions anticipé, les élèves ont rencontré des problèmes pour écrire les expressions algébriques « linéaires » avec clavier-souris mais ces difficultés ne les empêchent pas d'en produire. Quatrièmement, malgré des différences locales, des enseignants expérimentés identifient des cohérences de fonctionnement de leurs élèves comparables à celles identifiées avec l'outil papier-crayon ([Lenfant 1997). Ces résultats constituent, à notre sens, une première validation de la faisabilité du projet en ce qui concerne le recueil des données sur l'élève (Jean 2000, Jean-Daubias 2002).
Du côté des enseignants dans les sessions pilotes et les utilisations spontanées, les enseignants ont repéré chez certains élèves des compétences ou encore des fragilités qu'ils n'avaient pas remarquées auparavant chez leurs élèves. La raison principale est que PepiTest propose des exercices plus divers que ceux qui sont habituellement proposés dans les classes de

mathématiques. C'est une des raisons pour laquelle les formateurs des enseignants de mathématiques pensent que c'est un outil utile pour aider les enseignants à prendre en compte les différents aspects de la compétence algébrique.

II. PépiDiag

Les utilisations de PépiDiag ont démontré quelques inconsistances dans la grille d'analyse didactique lorsqu'elle est appliquée de façon systématique et sans discernement par le logiciel. Par ailleurs les utilisateurs doivent compléter 25 % du codage des réponses qui ne sont pas analysées et doivent corriger environ 10 % du codage des réponses effectué par PépiDiag.
Le module PépiDiag ne permet pas un diagnostic complètement automatique fiable. Il permet un diagnostic assisté.

III. PépiProf

PépiProf assiste l'enseignant dans deux types de tâches : l'analyse des réponses des élèves au test (le codage) et l'étude des profils des élèves. Le module facilitant l'analyse des réponses des élèves (tâche de codage) s'est révélé adapté et est utilisé sans difficulté majeure par chacune des catégories d'utilisateurs. Il est en particulier apprécié par les enseignants stagiaires et par les formateurs.

- Il donne aux enseignants un cadre pour interpréter les réponses des élèves.
- Il leur permet de comprendre les items du diagnostic quand ils sont présentés dans le contexte d'un exercice et avec les réponses des élèves.

Le module pour travailler sur le profil de l'élève n'a été utilisé que par les chercheurs en didactique des mathématiques. Ils apprécient particulièrement d'accéder aux items du diagnostic de différentes manières : à partir des réponses d'élèves, à partir des items de diagnostic, à partir de la liste de questions liées à ces items. Mais ce module soulève des difficultés pour les enseignants, particulièrement pour les enseignants expérimentés :

- Ils ont des difficultés pour comprendre les items du diagnostic quand ils ne sont pas présentés en contexte (dans un exercice avec les réponses des élèves) lorsqu'ils ne connaissent pas le travail didactique sous-jacent.
- Ce module met en œuvre une expertise didactique qui peut être en contradiction avec des pratiques spontanées de diagnostic.
- Dans l'état actuel du développement de logiciel, aucune stratégie d'enseignement n'est proposée pour faire évoluer le profil cognitif. Les enseignants ne sont donc pas motivés pour s'approprier un profil complexe qu'ils ne peuvent pas exploiter.

IV. Exploitation des utilisations de Pépite en classe par l'enseignant

Nous avons observé plusieurs utilisations spontanées de PepiTest pour mettre en place une activité d'apprentissage et non en tant qu'activité de diagnostic, en particulier pour provoquer des débats en binôme ou en classe entière. Les questionnaires remplis par les enseignants, nous ont apportées d'autres informations.
Les points positifs relevés par les enseignants :

- le logiciel de test propose un large éventail d'exercices ; il donne des idées d'exercices à travailler et de compétences à faire acquérir,
- l'interface du logiciel de test est soignée et esthétique,
- le logiciel « marche » du premier coup comme indiqué sur la notice,
- l'ensemble du logiciel révèle des compétences que les enseignants n'avaient pas remarquées chez des élèves en difficulté et augmente la confiance de l'enseignant dans la réussite de ces élèves (enseignantes confirmées),

- le logiciel aide à comprendre l'esprit des nouveaux programmes de collège en algèbre (1 enseignante confirmée),
- le logiciel introduit une médiation qui permet d'instaurer une relation nouvelle avec l'élève sur ses erreurs (1 enseignante confirmée) et 6 mois après l'utilisation du logiciel : « la relation mise en place avec l'utilisation de Pépite a changé l'ambiance en aide individualisée et le regard que les élèves portaient sur mon expertise »,
- le logiciel apporte un éclairage neuf sur les compétences et « aide à prendre conscience des lacunes des élèves » (enseignant débutant) ;

Les points négatifs :

- des difficultés techniques multiples doivent être surmontées : par exemple pour accéder aux salles informatiques dans certains établissements, pour télécharger et installer le logiciel dans des salles qui ne sont pas reliées au réseau et où tous les disques durs sont verrouillés,
- des difficultés techniques supplémentaires sont liées à l'utilisation du système : pour récupérer les réponses des élèves, bogues, problèmes d'utilisabilité,
- la complexité des profils et du vocabulaire utilisé dans ces profils rend leur usage difficile,
- le test est bien adapté en lycée mais inadapté en collège,
- l'utilisation de Pépite prend trop de temps auprès des élèves et aussi pour l'enseignant,
- le logiciel ne fournit pas encore de conseils pour faire évoluer les élèves une fois que l'on a trouvé ce qui ne va pas,
- les diagnostics automatiques incomplets ou erronés obligent à un travail personnel de l'enseignant conséquent : appropriation du logiciel et de l'analyse didactique, reprise des codages, analyse des profils,
- certains enseignants disent se sentir pris en défaut car ils ne comprennent pas la description des profils, ou ils n'ont pas réussi à manipuler le logiciel ou bien enfin car le logiciel leur retourne des réponses d'élèves comme un miroir déformant de leur enseignement (professeurs de collège).

Ils font également des *suggestions*. Comme outil d'évaluation, les enseignants pensent que Pépite est beaucoup trop coûteux en temps. Ils voudraient pouvoir choisir les exercices. Ils demandent à disposer de plusieurs tests avec différents niveaux (4^{e}, 3^{e}, 2nde) afin de pouvoir évaluer l'évolution des apprentissages. La plupart d'entre eux demandent que le logiciel prenne en charge un bilan de compétences à destination de l'élève. En effet il est impossible pour eux de fournir une rétroaction personnelle à chaque élève et il n'est pas viable non plus de faire passer un test sans donner le résultat aux élèves. Certains d'entre eux demandent un profil de la classe au lieu de profils personnels pour organiser les apprentissages en début d'année ou pour créer des groupes de travail. La plupart d'entre eux souhaite qu'on leur propose des stratégies d'enseignement pour faire évoluer les compétences ou pour remédier aux difficultés qui ont été diagnostiquées. Certains ont rapporté que Pépite fait apparaître pour quelques élèves en grandes difficultés des compétences qu'ils n'avaient pas perçues auparavant et cela augmente alors la confiance de l'enseignant dans les chances de succès de l'élève. Pour une enseignante, l'usage de Pépite augmente aussi la confiance des élèves envers sa compétence professionnelle : l'enseignante s'intéresse à eux individuellement et cherche à les comprendre avec des moyens modernes issues de recherches de pointe....

De l'utilisation de Pépite par des chercheurs notons un fait très intéressant : les experts ne pratiquent pas le diagnostic comme ils le décrivent dans la méthode qu'ils ont proposée et qui est mise en application dans Pépite. Ils procèdent à un « diagnostic adaptatif ». Ils regardent les réponses d'élèves à un exercice significatif et, selon la réponse, ils énoncent une hypothèse générale et vont la confirmer et l'approfondir sur quelques exercices complémentaires. Ainsi lorsqu'ils cherchent à proposer une stratégie de remédiation pour un élève particulier, ils forment leur diagnostic seulement à partir de quelques exercices et non sur le parcours systématique de l'ensemble des exercices du test.

Leçons et questions

Ce travail auprès des enseignants nous a montré la nécessité de travailler sur deux axes :

- concevoir un logiciel adaptable à différentes situations
- étudier et instrumenter l'exploitation d'un tel outil de diagnostic dans la classe.

Définir et caractériser des batteries de tests

En ce qui concerne l'activité des élèves, le modèle de la compétence algébrique nous a permis d'implémenter un logiciel qui recueille des données permettant d'aider les enseignants à identifier les difficultés des élèves en l'algèbre. Même lorsque les enseignants ne connaissent pas le modèle didactique, la manière dont il a été mis en application dans le test et dans le module de codage de PépiProf est bien acceptée et utilisée. Les limitations de ce modèle viennent de ce qu'il est prédéfini et spécifique à un niveau d'étude (fin de collège). Ceci nous amène à de nouvelles questions :

- Est-il possible de définir un modèle des compétences pour chaque niveau scolaire ?
- Comment permettre à des enseignants d'adapter le test à leur pratique de classe ? Comment déterminer les paramètres ?
- Est-il possible de définir des modèles d'exercices à partir desquels les enseignants pourraient construire leurs propres tests ?
- Est-il possible de définir les modèles diagnostiques liés aux modèles d'exercices pour produire du diagnostic quand un professeur a défini un test ?

Pour ce qui concerne le module diagnostique, nous avons montré qu'il était possible d'automatiser partiellement le diagnostic en mettant en application le modèle de diagnostic de Grugeon. Deux problèmes se posent.

Diagnostic assisté

Le diagnostic étant dans la version 1 partiel et non complètement fiable, l'enseignant doit compléter et vérifier le diagnostic. Il est important que le logiciel de diagnostic ait la possibilité d'évaluer le degré de confiance du codage produit afin de permettre à l'enseignant de ne vérifier que les codages qui ne sont pas fiables ou pas faits.

- Comment pouvons-nous introduire cette estimation de la fiabilité dans le logiciel de diagnostic ?

Diagnostic automatique

Certaines situations nécessitent un diagnostic automatique : par exemple pour étudier de grands corpus ou fournir un bilan de compétences aux élèves. De plus, contrairement à ce que nous pensions au départ, où il nous semblait que les enseignants n'accepterait pas qu'un logiciel évalue leurs élèves, ils sont plutôt demandeurs d'un diagnostic automatique à partir du moment où ils ont compris la façon de coder du système. En effet un diagnostic automatique leur permettrait de gagner du temps pour se consacrer à ce qui les intéresse : organiser les apprentissages.

- Les méthodes linguistiques ou statistiques peuvent-elles nous aider pour améliorer et fiabiliser le diagnostic sur les réponses ouvertes en particulier quand les réponses sont en langue naturelle?

Test systématique ou adaptatif ?

Pour ce qui concerne le système entier, il semble que le modèle de diagnostic proposé par les travaux de B. Grugeon soit trop prescriptif . Nous avons noté que B. Grugeon elle-même emploie un diagnostic adaptatif lié à la réponse des élèves mais également à l'objectif du diagnostic pour définir une stratégie d'enseignement. Ainsi, pour l'analyse ergonomique, le modèle qu'elle a proposé est un modèle de « tâche prévue » et non de « tâche effective ». Ceci explique qu'il soit bien accepté par des débutants mais pas par des experts. Les différences entre les débutants et les experts peuvent être observées aussi dans les termes employés pour décrire le profil de l'élève. Des stratégies de diagnostic adaptatif (i.e. qui posent des exercices différents selon les réponses des élèves) permettraient-elles de mieux modéliser des tâches effectives ?

De plus, un diagnostic adaptatif ne permettrait-il pas de simplifier le diagnostic en proposant un nombre limité d'exercices permettant aux enseignants d'établir un diagnostic rapide qui pourrait être confirmé sur quelques autres exercices ?

A partir de la même analyse didactique, on voit qu'il y a plusieurs méthodes pour diagnostiquer qui sont liées à l'utilisation que l'on veut faire du diagnostic.

- Est-il possible d'identifier plusieurs classes d'utilisations diagnostiques et, pour chaque classe, un logiciel spécifique pour l'instrumenter ?
- Le modèle de compétences des élèves de B. Grugeon est-il assez robuste pour servir de fondement à tous ces logiciels ?
- En particulier, dans ce premier travail, nous nous sommes concentrés sur le transfert sur l'ordinateur des tâches papier-crayon. Comment modifier le modèle pour gérer des tâches algébriques sans équivalent dans le contexte papier-crayon ?

Exploitation du diagnostic

Pour ce qui concerne le logiciel destiné aux enseignants, la seule partie qui a été employée est, en formation, le module de codage des réponses des élèves et la description quantitative du profil (imprimée pour être donnée aux élèves). Nous avons observé beaucoup d'incompréhension sur la description qualitative. Il semble que ce logiciel soit adapté aux chercheurs en didactique et adapté pour des sessions de formation, moins bien adapté aux professeurs qui, dans la gestion courante de la classe, ont besoin d'un profil plus opérationnel, c'est-à-dire associé à des activités pour le faire évoluer.

- Est-il possible de définir des profils types qui donnent un moyen d'associer des stratégies d'apprentissage de l'algèbre à chacun de ces profils ?
- Ces profils peuvent-ils être présentés de façon compréhensible aux enseignants, voire aux élèves ?
- Comment déterminer les stratégies d'apprentissage associées aux profils ?
- Comment concevoir un logiciel pour aider les enseignants à mettre en œuvre ces stratégies ?

Telles sont les questions sur lesquelles nous travaillons actuellement.

Conclusion

Nous revenons sur deux classes de questions posées à la didactique des mathématiques : des questions relatives à la conception des EIAH et leur mise en oeuvre informatique, des questions relatives à l'utilisation par des enseignants des EIAH réifiant ces modèles.

Questions relatives à la conception des EIAH et leur mise en œuvre informatique

Ce travail a mis en évidence la nécessité pour la didactique des mathématiques d'engager un travail plus systématique d'étiquetage des variables didactiques pertinentes pour générer et décrire des tâches, supports de classes de situations d'interaction adaptées à des profils d'élèves donnés, et, au-delà, en prenant en compte des caractéristiques de l'activité de l'élève en situation de résolution. Comment déterminer des variables candidates ? Lesquelles retenir ? Ce travail s'avère indispensable pour rendre possible la modélisation informatique.

Questions relatives à l'utilisation par des enseignants des EIAH réifiant ces modèles

Ce travail a mis en évidence encore une fois, les difficultés que pose une intégration efficace de tels EIAH dans l'enseignement des mathématiques, ici de l'algèbre élémentaire. Quelles sont les conditions à mettre en place pour une intégration efficace ? Il a aussi pointé la nécessité de mener des recherches qui sachent articuler l'attention portée à l'activité de l'élève et celle portée aux pratiques enseignantes, à la réalité du travail de l'enseignant dans sa classe, à l'évolution des compétences professionnelles en jeu. Mais alors, quelle prise en compte des pratiques enseignantes dans la conception d'outils pour instrumenter le travail des enseignants ? Quelle exploitation dans la formation professionnelle des enseignants ?

Retour sur les hypothèses de recherche

Le travail de Stéphanie Jean sur le prototype Pépite a montré que l'automatisation au moins partielle de l'outil de diagnostic était possible.
L'analyse des retours d'utilisation a rappelé que l'intégration dans les pratiques enseignantes pose de redoutables problèmes.

Du côté informatique

Il s'agit de rendre le diagnostic plus systématique et paramétrable d'une part pour l'améliorer, le faire évoluer et d'autre part pour ouvrir et étendre le logiciel. Il apparaît aussi qu'il y a plusieurs types de diagnostic selon l'utilisateur, chercheur, formateur, enseignant, élève et selon le diagnostic envisagé, statique ou dynamique, automatique ou assisté.

Du côté didactique

L'expérimentation a confirmé nos attentes. Le diagnostic doit conduire à la proposition pour l'enseignant de tâches d'apprentissage adaptées aux élèves. Et cette attente est bien pointée par les enseignants en formation. Aussi, il est nécessaire de passer à un niveau de description macroscopique des profils d'élèves en algèbre. Pour ceci, nous travaillons à définir des classes de profils à partir d'un regroupement portant sur les cohérences de fonctionnement relatives à trois axes : la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique, la capacité d'articuler le cadre algébrique aux autres cadres, la technique algébrique. Nous travaillons également à associer à un élève à la fois sa classe de profils et ses caractéristiques propres (fragilités et leviers).
Nous continuons donc notre recherche dans deux directions :

- Pour les enseignants, il s'agit d'avoir à disposition des stratégies d'enseignement adaptées à chaque élève permettant une meilleure régulation de leur apprentissage et s'appuyant sur des leviers pertinents visant à faire évoluer leur profil en algèbre. Cette demande nécessite donc un travail de recherche sur la définition de stratégies d'apprentissage paramétrées associées des classes de profils.
- Pour les élèves, il s'agit après un test, de leur proposer des informations adaptées au diagnostic. Cela nécessite un travail sur la présentation du diagnostic, les difficultés, les points forts, les pistes de travail adaptées.

Du côté de l'ergonomie

Il s'agit d'envisager des procédures de diagnostic implicites des enseignants expérimentés et de définir des conditions de prises en main et d'utilisation de Pépite en classe. Au-delà, un travail est nécessaire pour mettre en perspective, pour les mêmes enseignants, l'activité « spontanée » de diagnostic, l'approche du logiciel en stage ou de façon autonome et l'activité de diagnostic après usage de Pépite.

Le projet LINGOT

Nous présentons maintenant le projet LINGOT issu du projet PEPITE.

I. Les objectifs

Le projet LINGOT vise en premier lieu à rendre opérationnel le prototype existant PEPITE en systématisant et en modélisant le diagnostic automatique pour en améliorer la fiabilité et la généricité. Cette recherche prend en compte les limites et les apports mis en évidence dans les travaux précédents.
Le second volet du projet correspond à la conception d'environnements logiciels interactifs permettant une meilleure régulation des apprentissages en algèbre via une base de situations d'apprentissage et un outil d'assistance à la sélection de situations en fonction des profils cognitifs diagnostiqués. Deux types de situations sont prévues :

- des situations génériques d'introduction à l'algèbre, en particulier des situations exploitant des leviers, comme celui de la généralisation, sous-représentés dans les pratiques d'enseignement actuelles,
- mais aussi des situations d'intervention didactique ou de remédiation dépendant des profils cognitifs que le diagnostic permet d'identifier..

Dans le troisième volet, il s'agit d'étudier leurs conditions d'intégration dans les pratiques enseignantes pour favoriser l'instrumentation du métier d'enseignant.

En fait, ces logiciels sont vus comme des instruments d'interaction entre enseignement et apprentissage, de médiation entre élèves et enseignants. Il y a donc dans la recherche deux facettes étroitement imbriquées :
- une facette où l'objet d'étude est l'activité de l'élève, analysée via celle des interactions élève / logiciel,
- et une facette qui vise l'instrumentation de l'activité enseignante et où l'objet d'étude, c'est l'enseignant, en formation ou dans sa classe, interagissant avec le logiciel et des données concernant les élèves issues du logiciel, ou avec les élèves travaillant eux-mêmes avec le logiciel.

Considérer simultanément ces deux facettes est une nécessité si l'on veut que l'intégration d'EIAH progresse et, à terme, serve réellement à lutter contre les dysfonctionnements de l'apprentissage et de l'enseignement. De plus, centrer la conception des logiciels sur l'activité c'est placer l'évaluation au centre des préoccupations.

II. Du côté diagnostic

En ce qui concerne le diagnostic, le prototype PEPITE qui existe est un logiciel fermé du point de vue des tâches diagnostiques proposées. Il s'agit maintenant de passer à un logiciel paramétré, fonctionnant sur la base de familles paramétrées de tâches, les paramètres étant ajustables par l'utilisateur en fonction de ses besoins propres (niveau de classe, sous-domaine, ..). Une seconde facette du travail est la modélisation de l'activité de l'enseignant pour permettre une refonte de l'interface enseignant pour leur faciliter l'interprétation du diagnostic et la sélection de situations adaptées en fonction des profils et des leviers retenus.

III. Du côté des situations d'apprentissage

En ce qui concerne la régulation des apprentissages, l'enjeu est de créer un environnement logiciel interactif LINGOT qui permette la connexion diagnostic – régulation. Pour ceci, il s'agit de modéliser des stratégies de sélection d'exercices en fonction de leviers retenus. Préalablement il est nécessaire d'établir des classes de profils ayant des traits caractéristiques semblables pour d'associer une stratégie d'apprentissage adaptée à chaque profil-type. Il s'agit ensuite de créer des familles des situations d'interaction génériques sur ordinateur mettant en œuvre les différents aspects de la compétence algébrique. Là encore, nous avons l'ambition de travailler en termes de modèles paramétrés de types de tâches, permettant une utilisation flexible de ces ressources.

Le travail a déjà avancé en didactique des mathématiques, aussi bien du côté de la définition des classes de profils comme nous l'avons indiqué plus haut, que sur la définition de familles de situations. En particulier, C. Bardini a travaillé sur la définition automatique de tâches d'association entre une expression algébrique et une phrase en langage naturel. A partir de l'analyse a priori, elle a déterminé les variables didactiques pour engendrer une famille d'expressions auxquelles on peut associer les expressions correspondantes en langage naturel (Bardini 2003).

Des expérimentations ont été menées avec PEPITE, avec des élèves et, cette année, en formation d'enseignants. L'expérimentation se poursuit aussi bien du côté élève que du côté instrumentation de l'enseignant avec une méthodologie plus systématique, pilotant et prenant en compte à la fois la conception et l'évolution des produits logiciels.

Coopération didactique et informatique

Pour conclure, nous jetons un regard sur les quinze années de coopération entre la didactique des mathématiques et l'informatique que nous avons menée. En effet, quinze ans séparent maintenant le projet ELISE du projet LINGOT.

Cette coopération n'a pas été sans rencontrer des difficultés qui ont été essentiellement de deux ordres à savoir, d'une part, la nécessaire mise en perspective de concepts, de références, de thèmes de recherche distincts et, d'autre part, la nécessaire prise en compte de l'exigence de la modélisation qui atténue la finesse de l'analyse didactique.

Au-delà des difficultés rencontrées, les interactions entre ces deux communautés ont permis de nombreux enrichissements. La confrontation des points de vue nous a aidées à préciser des modèles testables et discutables pour pouvoir les implémenter de façon satisfaisante, à poser de nouvelles questions de recherche. Il a été possible d'envisager de nouvelles possibilités offertes par l'EIAH pour instrumenter l'activité enseignante, et au-delà de cette seule instrumentation, contribuer à leur formation professionnelle. De plus, ce travail a permis une certaine dissémination des résultats de recherche dans la communauté enseignante.

Étant particulièrement sensibilisées par les difficultés que pose une intégration efficace des environnements informatiques, cette collaboration nous a convaincues, s'il le fallait encore, de la nécessité de mener des recherches qui sachent articuler l'attention portée à l'élève et à son développement cognitif, la modélisation et le développement informatiques et l'attention portée à l'enseignant, la réalité de son travail, l'évolution de ses compétences professionnelles.

C'est dans cette perspective que nous voulons continuer notre recherche.

Références

[Artigue 1988] Artigue M., Ingénierie didactique, Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 9, n°2, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, 1988, p. 281-308.

[Balacheff et Vivet 94] Balacheff & Vivet, Intelligence Artificielle et Didactique des Mathématiques, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble (aussi publié dans Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 14 (1/2), 1994, Éditions La Pensée Sauvage).

[Bardini 2003] Bardini C., The construction of meaning of algebraic symbolism at different school levels. An epistemological and didactical approach, CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (28 février au 3 mars 2003, à Bellaria, Italie).

[Bruillard et Vivet 1994] Bruillard E., Vivet M., Concevoir des EIAO pour des situations scolaires : approche méthodologique, in N. Balacheff ET M. Vivet, Didactique et Intelligence Artificielle, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, 1994, p. 273-302.

[Bruillard et al. 2000] Bruillard E., Delozanne E., Leroux P., Delannoy P., Dubourg X., Jacoboni P., Lehuen J., Luzzati D., Teutsch P. Quinze ans de recherche sur les sciences et techniques éducatives au LIUM. Education et informatique. Hommage à Martial Vivet. Sciences et Techniques éducatives, vol. 7, n° 1, Hermès Science, p. 87-145.

[Chevallard 1992] Chevallard Y. : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 12.1, pp. 73-111, Editions La Pensée Sauvage.

[Delozanne1994] Delozanne E., Un projet pluridisciplinaire : ELISE, un logiciel pour donner des leçons de méthodes, in Balacheff & Vivet, Intelligence Artificielle et Didactique des Mathématiques, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble (aussi publié dans Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 14 (1/2) p. 211-250, 1994, Éditions La Pensée Sauvage).

[Delozanne et al. 2001] Delozanne E., Jacoboni P. (Eds.), Interaction Homme Machine pour la formation et l'apprentissage humain, numéro spécial de la Revue Sciences et Techniques Éducatives, vol 8-n°3-4/2001, Hermès 239-274

[Delozanne et al. 2002] Delozanne É., Grugeon B., Jacoboni P., " Analyses de l'activité et IHM pour l'éducation ", In Proceedings of IHM'2002, International Conference Proceedings Series, ACM, 2002, Poitiers, France 25-32

[Douady 1984] Douady R. (1984) : Dialectique outil/objet et jeux de cadres, Thèse d'état, Université Paris 7.

[Dubourg et al. 95] Dubourg X., Delozanne E., Grugeon B., Situations d'interaction dans un environnement d'apprentissage : le système Repères, in Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur, coordonné par D. Guin, J.-F. Nicaud, D. Py, Actes des Quatrièmes Journées EIAO de Cachan, Eyrolles, p. 223-244, 1995.

[formation 2003] http://maths.creteil.iufm.fr, formation continue, algèbre

[Grugeon 1995] Grugeon B., *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, décembre 1995.

[Grugeon 1997] Grugeon B., *Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire*, Revue de Didactique des Mathématiques, Vol. 17, n°2, pp.167-210, 1997.

[Hasquenoph 1998], Hasquenoph-Bernou B., Analyse des effets de la transposition informatique de tâches en algèbre élémentaire, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université Paris VII, 1998.

[Helander 1997] Helander M., Landauer T., Prabhu P. (eds.), Handbook of Human Computer Interaction, Elsevier Science B.V., 1997
[Iamarène (1998], Iamarène S., Contribution à l'automatisation du repérage du fonctionnement des élèves en algèbre, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université Paris VII, 1998.
[Jean et al. 1999] Jean J., Delozanne E., Jacoboni P. et Grugeon B., A Diagnosis Based on a Qualitative Model of Competence in Elementary Algebra, S. Lajoie & M. Vivet eds, Proceedings of Artificial Intelligence in Education, Le Mans July 99, IOS Press, Amsterdam, p. 491-498, 1999.
[Jean et al. 1997] Jean S., Delozanne E., Jacoboni P. et Grugeon B., *Conception, réalisation et évaluation d'interfaces en EIAO : l'exemple de PEPITE*, Actes des 5èmes journées EIAO de Cachan, Hermès, pp. 37-48, 1997.
[Jean 2000] Jean S., Pépite un système d'assistance au diagnostic de compétences, Thèse de l'Université du Maine, Le Mans, Janvier 2000.
[Jean-Daubias 2002] Jean-Daubias S., Un système d'assistance au diagnostic de compétences en algèbre élémentaire, in Jean-François Nicaud, Élisabeth Delozanne, Brigitte Grugeon (éditeurs), numéro spécial Environnements informatiques d'apprentissage de l'algèbre , Revue Sciences et Techniques éducatives, Hermès, volume 9-n°1-2/2002
[Kieran, 1992] Kieran C. : The learning and teaching of school algebra. in *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Douglas A. Grouws (ed), pp. 390-419, New York Macmillan.
[Koedinger 97] Koedinger K. R., Anderson J. R., Intelligent Tutoring Goes to School in the Big City, IJAIED (8), 30-43, 1997.
[Hefferman et Koedinger 2002] Heffernan N. T., Koedinger K. R., Miss Lindquist un système fondé sur le dialogue pour apprendre à exprimer algébriquement des énoncés en langage naturel, in Jean-François Nicaud, Élisabeth Delozanne, Brigitte Grugeon (éditeurs), numéro spécial Environnements informatiques d'apprentissage de l'algèbre , Revue Sciences et Techniques éducatives, Hermès, volume 9-n°1-2/2002, p. 11-36
[Kolski 2001a] Kolski C. (Ed.) Analyse et conception de l'IHM, Interaction homme-machine pour les systèmes d'information Vol 1, Hermès, 2001, 250 p
[Kolski 2001b] Kolski C. (Ed.) Environnements évolués et évaluation de l'IHM, Interaction homme-machine pour les systèmes d'information Vol 2, Hermès, 2001, 250 p
[Lenfant 1997] Lenfant A., Étude sur la transposition d'un outil de recherche destiné aux enseignants, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Université Paris 7
[Leroux 1995] Leroux P., Conception et réalisation d'un système coopératif d'apprentissage - Étude d'une double coopération : maître/ordinateur et ordinateur/groupe d'apprenants, Thèse de Doctorat, Université Paris 6, spécialité Informatique, 1995
[Mackay 97] Mackay W., Fayard A.-L., *« Radicalement nouveau et néanmoins familier : les strips papiers revus par la réalité augmentée », Actes IHM'97 : Neuvièmes Journées sur l'Interaction Homme-Machine*, Poitiers, France: Cépaduès Editions.
[Nardi 96] Bonnie A. Nardi (Ed), Context and Consciousness : Activity Theory and Human Computer Interaction, Massachuchusetts Institute of Technology, 1996, réédité en 1997, 400 p.
[Péna 2003] Péna J. C., Conception et réalisation d'une interface d'assistance au diagnostic : PepiProf-Java, Mémoire de DEA Communication Homme / Machine et Ingénierie Éducative, Université du Maine, septembre 2003.
[Previt 2002] Prévit D., Vers un diagnostic de compétences inspectable par différents types d'utilisateurs, Mémoire de DEA Communication Homme / Machine et Ingénierie Éducative, Université du Maine, 2002

[Provost J. 1999] Provost J., PépiProfil, un outil utilisable par les enseignants pour la gestion de classe, Mémoire de DEA Communication Homme / Machine et Ingénierie Éducative, Université du Maine.

[pepite 2003] http://pepite.univ-lemans.fr

[Rogalski 94] Rogalski M., Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse, Balacheff & Vivet, Intelligence Artificielle et Didactique des Mathématiques, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble (aussi publié dans Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 14 (1/2) p. 43-66, 1994, Éditions La Pensée Sauvage).

[Sfard 1991] Sfard A.: On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, pp. 1-36.

[Stacey et al. 2003] Stacey K., Jennifer Flynn Evaluating an adaptive computer system for teaching about decimals: Two cases studies in Élisabeth Delozanne, Kaye Stacey (eds), Workshop Advanced Technologies for Mathematics Education, Proceedings of Artificial Intelligence in Education, Sydney, July 2003, IOS Press, Amsterdam

[Vergnaud 1990] Vergnaud G. (1990 a) : La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10/1.2, pp. 133-170, Editions La Pensée Sauvage.

[Vivet et al. 1994] Vivet. M., E. Bruillard Concevoir des EIAO pour des situations scolaires : approche méthodologique, in N. Balacheff et M. Vivet, Didactique et Intelligence Artificielle, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, 1994, p. 273-302.

Modes d'intégration instrumentale : une étude de cas

Teresa ASSUDE

UMR ADEF, IUFM d'Aix-Marseille

Notre exposé au séminaire national a eu comme objectif de présenter un projet de recherche sur l'intégration des TICE à l'école primaire et plus particulièrement l'intégration de Cabri-géomètre. Nous avons publié par ailleurs (voir bibliographie) ce que nous avons exposé, et c'est pour cette raison que nous avons décidé de faire un résumé rapide de cette première recherche et de vous présenter ici l'état actuel d'un deuxième projet de recherche qui est la suite du premier.

Un premier travail nous a permis d'identifier un certain nombre de conditions et de contraintes qui facilitent ou empêchent cette intégration. Par exemple, l'une des conditions d'intégration concerne la gestion temporelle : la première année d'intégration, les enseignants doivent accepter la non maîtrise du temps didactique et le fait qu'ils n'ont pas forcément tous les moyens d'observation et d'anticipation des difficultés des élèves (Assude 2004). Lorsque cette maîtrise commence à s'installer notamment pendant la deuxième année d'intégration, les enseignants ont pu mettre en oeuvre un certain nombre de stratégies d'économie temporelle. Les stratégies observées dans notre travail ont été les suivantes :

- celle associant de manière fine le rapport individuel/collectif ;
- celle utilisant des moyens matériels ou symboliques (par exemple le tableau) qui permettent de condenser l'information du travail des élèves en figeant le dynamisme de Cabri ;
- celle de savoir aller à l'essentiel ce qui n'est pas sans rapport avec la maîtrise du temps didactique ;
- celle de changer l'ordre dans lequel les objets sont enseignés soit pour faire des rappels là où des difficultés persistent (exemple : diagonales) soit pour changer le rapport à un objet (exemple : usage du compas pour reporter des longueurs) ;
- ou encore celle de faire des bilans intermédiaires ou de faire de « petits » apports magistraux.

Ces stratégies ont permis de trouver une économie temporelle du travail avec Cabri en économisant du capital-temps, ce qui fait que l'intégration de ce logiciel a pu se faire dans le quotidien de la classe.

Une autre condition d'intégration concerne la dialectique ancien/nouveau (Assude & Gélis 2002). La légitimité du travail avec Cabri est institutionnelle dans le sens qu'il y a une volonté politique d'intégrer les nouvelles technologies dans l'enseignement mais pour qu'elle puisse avoir une réalité le travail avec Cabri doit être mis à l'épreuve de la classe, et notamment dans une classe ordinaire. Cette mise à l'épreuve ne signifie pas pour nous tout changer mais asseoir les changements dans des socles stables du fonctionnement de la classe. Par exemple, dans nos classes, un principe est à la base du choix des types de tâches : une connaissance doit apparaître en tant qu'outil pour résoudre une difficulté ou une question. Ce principe de base est l'un des éléments pour trouver la " juste distance " entre l'ancien et le nouveau qui a été l'une des conditions d'intégration de cabri dans nos classes. Cette " juste distance " peut être aussi obtenue par l'entrelacement des tâches anciennes et les tâches nouvelles, par

l'entrelacement des techniques anciennes et les techniques nouvelles, ainsi que par l'entrelacement des tâches papier-crayon et des tâches cabri.
Cette dialectique ancien-nouveau est aussi présente lorsqu'on pense aux conditions de la genèse instrumentale et aux conditions d'émergence de nouvelles règles du contrat didactique, notamment le fait de donner explicitement un statut institutionnel aux connaissances instrumentales ainsi que le fait de dépasser le stade de jeu lorsqu'on manipule avec l'ordinateur. Nous avons rencontré aussi le résultat d'autres travaux (Artigue 1998, 2001, Lagrange 2001, Guin & Trouche (sous la dir) 2002) qui montrent comment le travail conceptuel peut être articulé au travail instrumental et qu'on ne peut pas penser à l'intégration de cabri sans penser le lien entre les deux.

A la suite de ce premier projet, nous avons voulu reprendre nos hypothèses et essayer de les vérifier pour d'autres classes, avec d'autres enseignants. Ce travail se fait dans le cadre d'un projet intitulé MAGI (Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique) qui regroupe plusieurs personnes des IUFM d'Aix-Marseille, Nice, Grenoble, Lyon, Amiens et Versailles. Ce projet a comme but l'intégration de Cabri-géomètre dans l'enseignement à l'école primaire et au début du collège à travers la conception, la mise en œuvre et l'analyse de scénarios pour la classe et aussi à travers l'étude de l'impact de dispositifs de formation dans les modes et pratiques d'intégration des enseignants.

Plusieurs questions sont à la base de notre projet mais nous indiquons ici seulement quelques-unes :

- comment le logiciel est-il intégré dans des classes ordinaires ?
- quels sont les modes d'intégration ?
- quel est le degré d'intégration du logiciel ?
- comment la dimension instrumentale est-elle prise en compte ?
- comment le travail mathématique de l'élève est-il organisé ? Quel est le rapport entre le travail papier-crayon et le travail avec Cabri ? Quel est le rapport entre l'ancien et le nouveau ?

Nous allons nous pencher sur les modes d'intégration instrumentale, mais avant nous présentons le contexte du travail.

Contexte du travail

Nous avons travaillé avec trois enseignants (CB, FM et TA) qui sont dans une même école primaire. Chacun a une classe de CM2 pendant l'année 2003/2004, et ils ne connaissent pas au départ de notre expérimentation le logiciel Cabri-géomètre. Ils ont été déchargés de leur classe pendant une demi-journée pour pouvoir suivre une formation au logiciel dans le cadre de la formation initiale des PE2 à l'IUFM de Nice. Nous avons convenu ensemble que les trois enseignants intègrent le logiciel dans leur classe en fonction du travail d'ensemble de la classe, qu'ils choisissent les activités et que les deux chercheurs observent sans intervenir dans le choix et la conception des séances. Les analyses seront ensuite faites à partir des notes des observateurs, des vidéos des séances, des cahiers des élèves et des entretiens avec les enseignants.
Le nombre de séances a été variable selon les enseignants. FM a proposé 5 séances aux élèves : deux séances d'initiation au logiciel, ces séances étant guidées, et trois séances sur la symétrie axiale. CB a proposé 4 séances : deux séances d'initiation (les mêmes que celles de FM) et deux séances (l'une sur le carré et l'autre sur les triangles). TA a proposé une séance de travail aux élèves par semaine à partir de décembre. Si on enlève les vacances, un stage de formation continue, cela fait environ une quinzaine de séances. Ces séances ont porté sur les

triangles, le carré, le cercle. Il n'a pas eu de séances d'initiation mais l'apprentissage du logiciel s'est fait au fur et à mesure des séances.

Modes d'intégration instrumentale

Nous allons nous intéresser à l'intégration à partir de la dimension instrumentale. Nous dirons que le mode d'intégration instrumentale est la manière dont l'intégration prend en charge la dimension instrumentale. Nous avons identifié pour le moment quatre modes d'intégration instrumentale : le mode « initiation instrumentale », le mode « exploration instrumentale », le mode « renforcement instrumental » et le mode « symbiose instrumentale ». Pour préciser ces différents modes, nous allons utiliser plusieurs indicateurs : les types de tâches (TICE ou mathématique), les connaissances instrumentales (KI), les connaissances mathématiques (KM), le rapport entre les connaissances instrumentales et les connaissances mathématiques (Rap (KI/KM)).

Mode d'intégration « initiation instrumentale »

Les élèves ne connaissent pas le logiciel et sont initiés par des types de tâche « cabri » qui visent essentiellement des connaissances instrumentales (des connaissances propres au fonctionnement du logiciel). Le rapport entre les connaissances mathématiques et les connaissances instrumentales est minimal.

Dans deux des classes observées, les enseignants CB et FM ont proposé aux élèves deux séances d'initiation à partir de fiches téléchargeables sur le site de l'académie de Grenoble. Les types de tâches « cabri » sont les suivants : créer et déplacer un point, créer et déplacer une droite, créer et déplacer un cercle, créer un segment à partir de deux points, nommer des points. Voilà un exemple :

« Déplacer un point : approchez le curseur (en forme de croix cette fois) le plus près possible du point à déplacer, le curseur apparaît sous forme d'une main avec un doigt pointant et le message « ce point » apparaît juste à côté du point. Cliquez alors sur le bouton gauche de la souris et maintenez-le enfoncé. Déplacez la souris : le point suit de déplacement du curseur (en forme de main autour du point). »

Les élèves doivent lire une fiche et faire toutes les actions qui sont indiquées : ces actions sont des sortes « algorithmes » à suivre. Il n'a pas eu d'institutionnalisation collective de connaissances instrumentales. Les différents statuts des points ne sont pas mis en évidence et le déplacement est présent mais le fait qu'on peut utiliser le déplacement pour contrôler les constructions n'est pas souligné.

Dans ces séances d'initiation proposées aux élèves, le type de tâche est un type de tâche Cabri qui vise apprendre à construire et à déplacer certains objets mathématiques. Le rapport entre les KI et les KM est minimale. Nous sommes ici en présence d'une *initiation instrumentale.* En outre, cette initiation ne souligne pas assez les changements de contrat didactique : nous pensons essentiellement au rôle du déplacement et à l'apport de Cabri pour une approche expérimentale de la géométrie. Cette initiation met l'accent sur comment construire les objets mathématiques plutôt que sur le type de travail que le logiciel permet de faire avec ces objets là.

Mode d'intégration « exploration instrumentale »

Les élèves ne connaissent pas le logiciel et vont l'explorer à partir de types de tâches mathématiques : ces types de tâches peuvent viser autant de connaissances instrumentales que des connaissances mathématiques. Le rapport entre ces deux types de connaissances peut être variable : minimale jusqu'à maximale selon le type de tâche mathématique.

L'une de nos classes observées a commencé le travail à partir de ce mode d'intégration car l'enseignant TA n'a pas proposé des séances d'initiation. Les élèves ont découvert le logiciel à partir de types de tâches mathématiques, et en essayant d'explorer les fonctionnalités du logiciel pour accomplir ce type de tâches. Ici les connaissances instrumentales sont au service des types de tâches mathématiques mais le Rap(KI/KM) est minimale car le lien entre ces connaissances n'est pas mis en évidence. Un exemple est le suivant : les élèves doivent lire et suivre les consignes données par écrit et répondre aux questions.

LA MEDIATRICE

Trace le segment AB
Trace une médiatrice D du segment AB
Place le point M milieu du segment AB

1. Saisis le point A et fais le bouger :
   a. Est-ce que le point M reste au milieu du segment AB ? Prouve ta réponse avec les fonctions du logiciel Cabri.
   b. Est-ce que le segment AB et la médiatrice D restent perpendiculaires ? Prouve ta réponse avec les fonctions du logiciel Cabri.

2. Saisis le point B et fais-le bouger :
   a. Est-ce que le point M reste au milieu du segment AB ? Prouve ta réponse avec les fonctions du logiciel Cabri.
   b. Est-ce que le segment AB et la médiatrice D restent perpendiculaires ? Prouve ta réponse avec les fonctions du logiciel Cabri.

3. Saisis le point M et fais-le bouger :
   a. Que constates-tu ?

4. Anime ta figure. Que constates-tu ?

Les élèves n'ont pas rencontré auparavant la notion de médiatrice : d'ailleurs cette notion ne fait pas partie du programme de l'école élémentaire. Le professeur présente cette activité qui est nouvelle pour les élèves qui ne connaissent pas ce qu'est la médiatrice d'un segment. L'objectif du professeur est la résolution de problèmes : ici, les élèves doivent faire des hypothèses sur ce qu'est la médiatrice d'un segment à partir des manipulations avec Cabri. Les élèves découvrent aussi par là comment créer un segment, la médiatrice de ce segment, le milieu de ce segment en explorant les commandes du logiciel. En demandant aussi de prouver les réponses qu'ils donneront, les élèves vont rencontrer d'autres connaissances instrumentales, par exemple mesurer un segment ou vérifier si une droite et un segment sont perpendiculaires. Cette « *exploration instrumentale* » peut avoir ses limites si le professeur à un moment ou un autre n'institutionnalise pas certaines connaissances instrumentales car celles-ci restent à la charge privée des élèves.

Mode d'intégration « renforcement instrumental »

Dans ce mode, le type de tâches est mathématique et les connaissances visées sont mathématiques. Le rapport entre KM et KI est maximale car des connaissances instrumentales sont indispensables à l'accomplissement de la tâche. Un exemple est le suivant : l'objectif du maître est que les élèves utilisent Cabri pour vérifier les propriétés d'un carré. Il ne veut pas donner une figure déjà construite : il veux que ce soit les élèves qui la construisent. Or il doit s'assurer que les élèves vont construire une figure « carré » et non un dessin « carré ». Pour cela il décide de demander aux élèves la tâche suivante : construire un carré en utilisant la primitive « polygone régulier ». Cette tâche est assez bien réussie par les élèves mais par contre la deuxième tâche « vérifier des propriétés du carré » se heurte à des difficultés instrumentales, notamment le fait que les élèves n'arrivent pas à mesurer les côtés du carré car la mesure qui est affichée est celle du périmètre. Tant que l'enseignant ne s'est pas décidé à faire un apport sur le fait qu'il fallait créer les segments pour pouvoir les mesurer (connaissance instrumentale) les élèves n'ont pas pu avancer. Cette description nous renvoie à l'importance de la dimension instrumentale : quelles interventions du maître pour que celles-ci ne deviennent pas des obstacles pour les apprentissages des élèves ? L'utilisation du « polygone régulier » nous est apparue intéressante car elle permet de construire un carré mais ce choix n'évite pas d'autres difficultés instrumentales : il semble difficile de contourner la dimension instrumentale même d'une manière astucieuse car on les retrouvera ailleurs et autrement. Il faut donc prendre en compte cette dimension instrumentale sans détours.

En analysant cette activité à partir des indicateurs définis précédemment, on peut remarquer que ce qui est premier d'abord est le type de tâche mathématique, le rap(KI/KM) est maximale. Nous sommes ici dans le renforcement instrumental car le professeur apporte les informations nécessaires en ce qui concerne la connaissance instrumentale manquante pour que la poursuite de la tâche mathématique puisse s'accomplir : on passe donc d'une exploration instrumentale à un renforcement instrumentale car il y a un apport d'information de la part de l'enseignant.

Mode d'intégration « symbiose instrumentale »

Nous n'avons pas observé dans les trois classes ce mode d'intégration mais nous l'avons identifié dans le cadre de l'ancien projet (Gélis & Assude 2002). Dans ce mode, les types de tâches mathématiques et instrumentales sont imbriquées très étroitement : on vise à la fois des connaissances instrumentales et des connaissances mathématiques dont leur rapport est maximale. Ici, la symbiose entre la KI et la KM existe : l'une fait avancer l'autre et l'imbrication entre le travail papier-crayon et Cabri est bien présente.

Conjecture sur le mode d'intégration instrumentale

Une première conjecture en ce qui concerne cette première année d'intégration est la suivante : la première année qu'un enseignant essaie d'intégrer le logiciel Cabri, la dimension instrumentale ne fait pas l'objet (même s'il y a des séances d'initiation) d'une attention suffisante de la part des enseignants mais elle n'est pas complètement absente. Quelques indices peuvent être indiquées pour cette faible prise en compte de la dimension instrumentale :

- l'exploration instrumentale ou l'initiation instrumentale ne sont pas suivies de mises en commun collectives pour que chaque élève puisse présenter aux autres ce qu'il a découvert du fonctionnement du logiciel ;
- le renforcement instrumentale est fait à chaque cas et individuellement ;
- il n'y a pas d'institutionnalisation des connaissances instrumentales ;
- le rôle de certaines des connaissances instrumentales n'est pas vraiment utilisé ou parfois même bien identifié par les enseignants (par exemple les statuts des points).

A partir de ce travail, nous pouvons essayer de définir un certain nombre de critères pour déterminer le degré d'intégration d'un logiciel dans les classes : l'un de ces critères est la prise en compte de la dimension instrumentale à un niveau important dans le travail de la classe. Or, dans nos classes, malgré la forte adhésion des enseignants, ils restent à un degré faible d'intégration. Nous verrons l'évolution pendant la deuxième année d'intégration.

Références

Artigue M (1998), Rapports entre la dimension technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques. *Actes de l'Université d'été 1996 " Des outils informatiques dans la classe... "*, IREM de Rennes, 19-40.

Artigue M. (2001), Learning mathematics in a cas environment : the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Artigue M & Lagrange J-B (1999), Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S. *In Guin D (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques "*, IREM de Montpellier, 15-38.

Assude T., Capponi B., Bertomeu P. & Bonnet J.F. (1996), De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel cabri-géomètre. *Petit x*, 44, 53-79.

Assude T. & Gélis J.M. (2002), 'Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire', *Educational Studies in Mathematics*, 50, 259-287.

Assude T (2004), Time management in the work economy of a class, *Educational Studies in Mathematics,* sous presse

Gélis J.-M. & Assude T. (2002), 'Indicateurs et modes d'intégration du logiciel Cabri en CM2', *Sciences et Techniques Educatives*, 9-3.4, 457-490.

Guin D & Trouche L (2002) (sous la dir), *Calculatrices symboliques, transformer un outil en un instrument du travail informatique : un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Laborde C., Capponi B.: 1994, 'Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique', *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14-1.2*, 165-210.

Lagrange J.B. (2001), L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.

Rabardel P (1999), Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, vol I, 203-213.

Calculatrices symboliques, transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.

Coordonné par Dominique Guin et Luc Trouche

Avec les contributions de Michèle Artigue, Paul Drijvers, Philippe Elbaz-Vincent, Jean-Baptiste Lagrange, Margaret Kendal, Robyn Pierce et Kaye Stacey

Octobre 2002, Collection Blanche, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble

Les calculatrices graphiques ou *symboliques* (c'est-à-dire pourvues d'un *Système de Calcul Formel, SCF*), de plus en plus fréquemment utilisées par les élèves, font rarement l'objet d'une réelle *intégration* par les enseignants en mathématiques dans le système d'enseignement français, malgré une volonté institutionnelle affirmée dans les programmes scolaires.

Les auteurs ne cherchent pas à minimiser les problèmes auxquels fait face l'intégration de ces calculatrices ; ils ont cherché au contraire, à l'aide des outils théoriques de la didactique des mathématiques, les raisons de la marginalité de cette intégration, et les conditions nécessaires à sa *viabilité*.

Dans cet objectif, les auteurs développent un cadre théorique pour penser les expériences d'intégration des calculatrices ; ils analysent finement ces expériences menées à différents niveaux d'enseignement, ils mettent en évidence leurs réussites et leurs limites, en identifiant les processus qui ont produit ces réussites et les conditions qui pourraient permettre de les reproduire plus largement, ils montrent comment certaines limites peuvent être dépassées à condition d'être attentifs à des phénomènes que le système éducatif a tendance à occulter ou dont il a tendance à sous-estimer l'influence.

Entre l'enthousiasme des pionniers et les réticences de certains professeurs, les auteurs tentent de dégager des pistes pour une *instrumentation raisonnée* des calculatrices symboliques : analysant les expériences récentes, ils montrent la nécessité d'un *système d'exploitation didactique* des SCF, reposant sur des *ingénieries didactiques* et *des orchestrations instrumentales*, organisant le temps et l'espace de l'étude dans les environnements de calculatrices symboliques.

Il est raisonnable de penser que les calculatrices symboliques, pourvues de plusieurs logiciels (module de programmation, traitement de texte, calcul formel et calcul approché, tableur) préfigurent les outils scolaires de demain. En cela le travail réalisé dans cet ouvrage est prospectif : il fournit des éléments théoriques, d'une part pour construire des ingénieries visant à développer une *intelligence du calcul* face à des outils de plus en plus complexes et, d'autre part pour analyser les comportements des élèves. Enfin, certains résultats de l'analyse des usages didactiques décrits dans ce livre pourraient sans doute éclairer la conception de nouveaux environnements d'apprentissage mieux adaptés à l'enseignement des mathématiques.

Ce livre s'adresse à toutes les personnes concernées par l'enseignement des mathématiques au niveau du second degré et de l'université, à tous ceux qui s'intéressent à la didactique des mathématiques, qu'ils soient chercheurs, formateurs ou enseignants, et aux responsables de l'institution. Les auteurs espèrent leur apporter des éléments susceptibles de les aider à concevoir des ressources pédagogiques prenant en compte simultanément les contraintes et les potentialités d'outils technologiques futurs. C'est une condition nécessaire si l'on vise, dans l'enseignement, une intégration de ces outils tout à la fois plus large et plus efficace du point de vue de l'apprentissage.

Ce livre a donné naissance à l'édition d'un ouvrage en anglais en collaboration avec Kenneth Ruthven, dans lequel les différents auteurs ont fait un effort particulier de présentation et d'articulation des cadres théoriques en direction de la communauté anglophone des chercheurs du domaine :

Guin, D., Ruthven, K. and Trouche, L. (eds.): 2004, *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators : Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de géométrie plane

Elisabetta Robotti

Istituto per le Tecnologie Didattiche-CNR de Genova

Introduction

Le sujet de cette recherche porte sur l'analyse des processus en jeu dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane lors d'une situation scolaire très classique comme celle de la résolution d'un problème. La situation est très classique car les élèves, surtout les élèves des premières années du lycée[1] et du collège, sont souvent confrontés à ce type de problème.

L'idée est d'analyser la démonstration dans un point de vue relativement nouveau par rapport à la didactique des mathématiques, c'est-à-dire analyser le rôle joué par le langage naturel, notamment par la verbalisation produite par les élèves, dans l'avancement de la démonstration. En effet, le langage naturel est sans doute un élément constitutif fondamental de la démonstration, c'est pourquoi nous aimerons mettre en évidence <u>si</u> et, dans le cas, <u>comment</u> le langage naturel peut aider l'avancement du processus de résolution.

En fin, nous avons choisi la démonstration comme sujet de recherche car elle est un élément très important de l'enseignement dont la recherche en didactiques des mathématiques s'est occupée beaucoup mais qui possède encore des pistes d'analyse ouvertes. En outre, nous avons choisi d'analyser le démonstration dans le domaine de la géométrie euclidienne car en Italie et en France aussi[2], la démonstration est introduite dans ce domaine.

Cet article démarra sur les objectifs et les hypothèses de la recherche, en suite on mettra en évidence le double rôle que le langage naturel joue dans notre recherche et puis les sources théoriques sur la base desquelles nous nous sommes appuyés pour développer ce double rôle du langage.

On abordera en suite la description de la situation expérimentale et la description des modèles d'analyse des protocoles que nous avons construits

On présentera en suite les fonctions du langage que nous avons dégagées lors de notre recherche et en fin, les conclusion de l'analyses des protocoles et des conclusions plus générales concernant la recherche.

Domaine de recherche

La situation que prenons en charge est, comme on vient de le dire, celle de résolution d'un problème de géométrie plane. La résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane c'est un phénomène complexe où interviennent à la fois la langue naturelle, des figures de géométrie, des connaissances des élèves... Notre objectif c'est d'arriver à disséquer de façon fine les processus qui prennent place tout au long de la résolution d'un problème de démonstration géométrique. C'est pourquoi, l'objectif de notre étude concerne d'une part

[1] Les expérimentations menées au cours de ma recherche ont engagé des élèves des premières deux années du lycée.

[2] Notre recherche porte sur un travail de thèse mené en co-tutelle entre Italie et France.

l'analyse des interactions entre les aspects figuraux et conceptuels mis en jeu lors d'un processus de résolution, d'autre part le rôle de la verbalisation sur le processus de résolution et en particulier lors de ces interactions.

Nous chercherons donc à mettre en évidence la dialectique entre le domaine graphique et le domaine théorique auxquels on fait en permanence appel lors du processus de démonstration. De façon particulière nous analyserons les allers et retours entre l'appréhension opératoire et perceptive[3] du dessin et le référent théorique. Pour référent théorique nous retenons les théorèmes, les axiomes et les propriétés d'une certaine théorie, par exemple la théorie euclidienne ; nous retenons la définition d'appréhension opératoire et perceptive du dessin issue de la théorie de Duval. L'appréhension perceptive est l'appréhension immédiate et automatique d'un figure celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet. L'appréhension opératoire du dessin est centrée sur ses modifications possibles telles l'ajoute d'un trait, la différent position du dessin sur la feuille, l'agrandissement, la diminution ou la déformation du dessin ou bien le fait d'isoler une sous-configuration dans le dessin.

La perspective adoptée pour cette analyse est donc celle d'analyser le rôle joué par le langage naturel lors de ces relations. En d'autres termes, nous sommes intéressées à une analyse fonctionnelle du langage lors du processus de démonstration. L'analyse fonctionnelle du langage naturel vise donc examiner comment et sous quelles conditions le langage peut aider les allers et retours entre le domaine graphique et le domaine théorique lors de la résolution d'un problème en géométrie plane.

Hypothèses et questions de recherche

Dans notre recherche, le langage est susceptible de jouer un double rôle : il est à la fois un outil pour le chercher, afin de mettre en évidence les processus cognitifs des élèves, et il est un outil pour les élèves pour l'avancement du processus de démonstration.

Or, à partir de cette considération nous avons dégagé nos premières deux hypothèses de recherche :

[3] Duval (1994) a montré qu'une même figure peut donner lieu à des appréhensions de nature différente. Il distingue trois types d'appréhensions d'une figure : *l'appréhension perceptive*, *l'appréhension opératoire* et *l'appréhension discursive*. L'appréhension perceptive est l'appréhension immédiate et automatique de la figure « celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans un plan, soit dans l'espace » (p.123). L'appréhension opératoire est déterminée par la centration sur des modifications possibles de la figure (traitements de la figure) et sur les réorganisations perceptives qui en résultent « elle est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures. [Duval distingue] trois grands types de modifications : les modifications méreologiques consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombiner en une autre figure, les modifications optiques consistant dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure, et les modifications positionnelles consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle » (p. 126).

Enfin, l'appréhension discursive d'une figure « correspond à une explicitation des autres propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive ». Duval ajoute que le traitement cognitif correspondant à cette appréhension est le raisonnement déductif « pour expliciter des autres propriétés à partir des propriétés données, on utilise des définitions, des axiomes, des théorèmes » (pp. 124-125).

Précisons que, sur la base des définitions présentées, nous adopterons le terme « appréhension du dessin » à la place d'appréhension de la figure adoptée par Duval. Pour nous la figure est conçue comme l'ensemble des couples constitués de l'objet théorique et d'un de ses dessins, et en cela elle ne peut être manipulée et recomposée en une nouvelle figure.

- D'une part le langage naturel est révélateur de la démarche de démonstration des élèves. En ce sens, le langage est aperçu comme outil pour le chercheur ;
- D'autre part le langage naturel est outil pour la construction et la maîtrise de la pensée. En ce sens, le langage est aperçu comme outil pour l'avancement de la résolution menée par les élèves.

Or, si le langage naturel recouvre le rôle de révélateur pour le chercheur, Quels sont les outils linguistiques qui permettent de mettre en évidence la façon dont les échanges verbaux entre élèves aident à l'avancement de la résolution ?
Encore, si le langage est retenu comme outil pour l'élève lors de l'avancement du processus de démonstration, en quoi la verbalisation aide-t-elle à passer des simples constatations sur le dessin à la structuration d'un raisonnement déductif, et vice-versa ?

Pour répondre à ces questions de recherche nous nous sommes appuyés sur des moyens théoriques qui seront abordés dans le paragraphe suivant.

Sources Théoriques

Les sources théoriques dont nous disposons pour aborder dans notre recherche le double rôle du langage font appelle à la fois au domaine de la psycholinguistique et au domaine de la didactique cognitive. Ce dernière domaine, supportant l'hypothèse du langage comme outil pour l'avancement de la démonstration, fait appel aux théories de Duval, Vygotsky et Bakthine, selon lesquelles le langage ne rempli pas seulement une fonction de communication, mais aussi une fonction de construction et maîtrise de la pensée.

Le rôle du langage naturel comme outil pour la construction et la maîtrise de la pensée

Pour Vygotsky, **le langage exerce le rôle d'aider l'enfant** à s'orienter mentalement, à prendre conscience, à surmonter les difficultés et les obstacles, **à réfléchir et à penser** .
Par rapport à la fonction de construction sociale de la pensée, Bakthine signale que :

> « L'idée ne vit pas seulement dans la conscience individuelle et isolée de l'être humain [...] **L'idée commence à vivre**, c'est-à-dire à se former, se développer, à trouver et à rénover son expression verbale, à générer des idées nouvelles, **seulement en entrant en rapport avec les idées d'autrui lors du dialogue. La pensée humaine ne devient véritable pensée, c'est-à-dire idée, qu'en contact avec une autre pensée [...] c'est-à-dire dans la conscience d'autrui exprimée par la parole. [...] L'idée est un fait vivant qui se crée au point de croisement de deux ou plus consciences lors du dialogue**»
> (Bakhtine M. 1968, *Dostoevskij : poetica e stilistica*, Piccola Biblioteca Einaudi p. 115-116. La citation extraite est traduite par nos soins)

Pour Bakthine, la « véritable pensée » de l'être humain, qu'il appelle idée, se développe seulement en lien avec d'autres pensées lors d'un dialogue. L'idée prend sa forme et elle peut se développer par l'expression verbale et c'est justement par cette verbalisation que se réalisent les conditions de contact avec les autres idées. L'idée que la pensée humaine se développe par confrontation est une des notions les plus importantes de la théorie de Bakthine
En fin, Duval même affirme que « [**le langage**] est un moyen d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, pour les rendre visibles ou

accessibles à autrui, mais [aussi] parce qu'il **est essentiel pour l'activité cognitive de la pensée** » (Duval, 1993, p.39)

En résumé, des théories présentées ci-dessus à propos du langage naturel, nous retenons les idées suivantes :

- le langage est un outil pour l'avancement et la maîtrise de la pensée. Sur la base de cette idée, nous supportons notre première hypothèse selon laquelle le langage naturel peut jouer le rôle d'outil pour l'avancement du processus de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.

- la confrontation de plusieurs voix, en tant que situation de communication à autrui ou d'échange verbal entre deux personnes, permet la production et l'échange des idées et donc, l'avancement de la pensée. Nous adopterons cette idée pour mettre en place une expérimentation où des binômes d'élèves sont engagés dans la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane. Les échanges verbaux entre les élèves permettront d'une part de rendre explicites leurs processus de pensée (ils fournissent des observables) et d'autre part de progresser dans la résolution (hypothèse avancée au point précédent)

Pour ce qui concerne le domaine psycholinguiste supportant l'hypothèse selon laquelle le langage est révélateur de l'avancement de la démonstration, nous faisons appel à la théorie de Bronckart et à certaines des aspects de la théorie de Duval, comme on verra en suite.
Tel est le cadre général dans lequel s'inscrit notre travail.

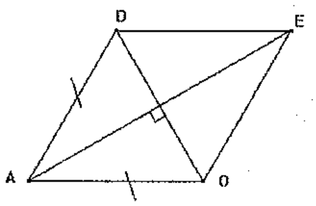
Le rôle du langage comme révélateur des processus cognitifs de la pensée

Afin de définir certains outils linguistiques qui nous utiliserons en tant qu'outils de recherche pour mettre en évidence les processus cognitifs des élèves (langage révélateur), nous nous appuyons sur la théorie des fonctions discursives de Duval (1995) et sur l'idée des unités linguistiques issue de la théorie du psycholinguiste Bronckart (1985).

La théorie des fonctions discursives de Duval

Duval définit différents fonctions cognitives que le langage doit remplir pour construire un discours. C'est pourquoi Duval nomme ces fonctions « fonctions discursives ».
Parmi les fonctions discursives, Duval définit la *fonction référentielle*, la *fonction apophantique* et la *fonction d'expansion discursive* (Duval, 1995, p. 91).
La fonction référentielle sert à « désigner des objets ». Cette fonction peut mobiliser l'emploi des termes tels « ça, ceci… » conjointement à des gestes qui permettent d'indiques les objets désignés (par exemple, « ça est égal à ça » en indiquant deux côtés d'un triangle isocèle); ou bien, désigner l'objet en indiquant la classe « typique » à laquelle il appartient (par exemple, «Soit **I** le milieu du segment **AB**) ; ou encore désigner l'objet en croisant plusieurs classes typiques d'appartenance (par exemple, «Soit I le point d'intersection des hauteurs d'un triangle »).
La fonctions apophantique sert à « dire quelque chose des objets que l'on désigne sous forme d'une proposition énoncée », par exemple, en reliant l'expression d'une propriété ou d'une relation à une expression désignant des objets. Cette fonction sert pour construite une proposition à propos de l'objet désigné. C'est en ce sens qu'elle permet de lier l'expression d'une propriété ou d'une relation à l'expression de l'objet désigné.
La fonction d'expansion discursive sert à « relier la proposition énoncée à d'autres propositions (description, inférence…) ». Donc elle sert pour construire la progression du discours en reliant une propositions à l'autre.

Ces fonctions ont étés reconnues tout au cours de l'analyse du discours produit par les élèves, mais la fonction la plus intéressante pour notre recherche a été la fonction d'expansion discursive car nous a fournis un dispositif très utile pour mettre en évidence l'évolution du discours et, en particulier, l'avancement du processus de démonstration.
Selon Duval la progression du discours se fait par deux différents « modes d'expansion discursive », c'est à dire deux modes pour relier entre eux les propositions énoncées : l'Accumulation et la Substitution.
L'*Accumulation* est un mode « Caractérisé comme naturel qui se fait par accumulation d'informations nouvelles » (Duval, p. 123).
De cette idée, nous retenons que l'accumulation concerne la progression du discours faite par une juxtaposition de propositions indépendantes qui portent sur des informations qui, dans notre cas, sont de nature géométrique..
Lorsque l'expansion discursive se fait pas accumulation, le passage d'une proposition à l'autre dépende de leur contenu respectif : on a l'ajoute d'une proposition à l'autre sans que soit respecté aucune règle d'ordre sinon celle d'être liées les unes aux autres par leur contenu.
Mais, qu'est ce que ça veut dire « propositions indépendantes » ?
Nous essayerons de répondre à la question par l'exemple suivant.



La proposition « les côtés [AO] et [AD] sont égaux » et la proposition « les diagonales [AE] et [OD] sont perpendiculaires » sont deux propositions indépendantes jusqu'au moment que l'une n'est pas conséquence de l'autre.

Fig. 1

Comme on vient de le dire, les propositions énoncées portent sur des informations de nature géométrique. Or, la question qu'on peut se poser maintenant à ce propos est la suivante :
Comment les informations sont obtenues par les élèves?
L'analyse des protocoles montre bien que les élèves tirent les informations par :
- interprétation du dessin, au moyen de l'appréhension opératoire ou perceptive du dessin ;
- des pas de déduction de portée locale. La déduction de portée locale ne participe pas d'un enchaînement de pas de déduction; la conclusion d'un pas de déduction de portée locale est une proposition simplement ajoutée à la liste des propositions qui participent de l'accumulation. Par exemple, « si les deux côtés [AO] et [AD] sont égaux alors le triangle DAO est isocèle » est un pas de déduction qui permet d'ajouter l'information «DAO triangle isocèle » à la liste d'informations. Il se peut que même l'information « les côtés [AO] et [AD] sont égaux » soit ajoutée à la liste d'informations recueillies sans pour autant qu'elle participe d'un enchaînement de pas de déduction.

Venons maintenant à la définition de Substitution fournit par Duval.
La *Substitution* est un mode de progression du discours « Caractérisé comme logique qui fonctionne par inférences » (Duval, p. 123)
De cette idée, nous retenons que la Substitution concerne la progression du discours faite par un Ordre non modifiable des propositions : la conclusion d'un pas de déduction est substituée à la prémisse du pas suivant. Par exemple : « Si les côtés [AO] et [AD] sont égaux alors le triangle DAO est isocèle » ; « Si le triangle DAO est isocèle alorsla hauteur [AH] est médiane » ; « Si la hauteur est médiane alors elle coupe la base en son milieu »...
Lorsque l'expansion discursive se fait pas substitution, le passage d'un énoncé à l'autre ne dépend pas du contenu des énoncés, mais des leurs statuts respectifs. Le **statut** d'une proposition correspond au rôle qu'elle remplit vis-à-vis d'un autre proposition dans l'organisation globale d'un discours : le rôle d'hypothèse, de donnée, de prémisse, de

conclusion intermédiaire ou de conclusion cible. Pour certains propositions le statut est préalablement fixé au départ en fonction du cadre théorique et des hypothèses lesquelles forment les propositions énoncées de départ. Pour les autres propositions le statut est déterminé par la place où ils apparaissent dans le développent du discours.

En outre, Duval affirme que la progression du discours dépende aussi par les sens des propositions énoncées. Le sens des propositions relève à la fois du contenu de la proposition, ce qui est vraisemblable, mais aussi de leur valeur épistémique sémantique et logique.
La *valeur épistémique sémantique* est, selon Duval, « le degré de fiabilité que possède ce qui est énoncé dans la proposition. Dans l'instant même de son appréhension, le contenu d'une proposition apparaît évident ou certain ou seulement vraisemblable, ou plausible, ou simplement possible, ou impossible ou encore absurde... » (Duval, 1995, p.219). Selon Duval, donc, la valeur épistémique d'une proposition est strictement liée au système de connaissances du locuteur ou de l'interlocuteur et au milieu socio-culturel auquel il appartient.
La *valeur logique* des propositions « est le fait que la proposition énoncée est soit vraie soit fausse. A la différence de la valeur épistémique, la valeur logique d'une proposition ne dépend pas de la seule compréhension de son contenu mais elle résulte de procédures spécifiques de vérification ou preuve » (Duval 1995, p.220). En outre, Duval souligne qu'il y a beaucoup de propositions dont on ne peut pas déterminer la valeur vraie ou fausse bien qu'elles puissent apparaître évidentes, plausibles, peu vraisemblables ou invraisemblables. Pour cette raison Duval prend aussi en charge une troisième valeur de vérité, « Indéterminé ». En outre, Duval souligne que la valeur logique dépende du statut des propositions dans la phrase : les propositions sont prémisses, hypothèses ou conclusions.

L'analyse du discours produits par les élèves nous a permit de mettre en évidence que les propositions appartenant à une progression du discours de type Accumulation relèvent pour la plus parte d'une valeur épistémique sémantique, tandis que les propositions appartenant à une mode de progression du discours de type Substitution relèvent pour la plus parte d'une valeur de type logique. La différente valeur des propositions énoncées sera retenue comme un des critères pour reconnaître les différents mode de progression du discours lors de l'analyse des verbalisations produites par les élèves.

L'idée d'unités linguistiques issue de la théorie de Bronckart.

Afin de reconnaître l'avancement des modes de progression du discours produit par les élèves lors de la résolution du problème, nous nous sommes appuyés aussi sur l'idée du psycholinguiste Bronckart (1985) qui utilise les occurrences des certaines unités linguistiques dans les textes pour définir un certain type de discours concernant ce texte. Bronckart définit donc une relation biunivoque entre certaines unités linguistiques et un certain type de discours.
Pour Bronckart les unités linguistiques sont les pronoms, les temps verbaux, certains auxiliaires (tels aller ou les auxiliaires de mode vouloir, devoir, falloir, pouvoir), les adverbes... (Bronckart, p. 157)
Il définit trois type de discours : le discours théorique, le discours en situation et la narration, mais pour notre travail nous retenons que les seules définitions de discours en situation et de discours théorique.
Le *discours en situation DS,* est « produit en relation directe avec le contexte, en particulier avec des interlocuteurs identifiables, un moment et un lieu d'énonciation précis, et qui s'organise par référence permanente au contexte ; Dans sa forme extrême, le DS est un dialogue à propos d'états ou d'évènements présents dans le contexte d'énonciation » (Bronckart, p.63).

Le *discours théorique DT* est « produit lui aussi avec une référence au contexte, mais résultant d'un effort d'*abstraction* par rapport à ce dernier, ce discours se caractérise par son *indépendance* à l'égard d'une situation d'énonciation particulière. [...] Dans sa forme extrême, il se présente sous la forme d'un discours scientifique, vrai partout et toujours, pour n'importe quel interlocuteur ». (Bronckart, p. 63)
Les textes qui ont été l'objet de l'analyse de Bronckart, s'appuient pour la plupart sur : pièces de théâtre, interviews, reportages radiophoniques, dialogues tirés d'un récit, romans divers. Les textes considérés comme théoriques étaient extraits d'ouvrages scientifiques. Or, la situation que nous analyserons prend en compte des dialogues entre pairs, à propos d'un contenu particulier : les mathématiques. De façon spécifique, la situation concernera la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane réalisée par un binôme d'élèves. La situation ne rendra pas compte d'une situation d'enseignement – apprentissage. Nous analyserons la transcription des dialogues des élèves qui nous appellerons dans ce qui suit « protocoles ».
Il semble être évident qu'un tel type de situation ne rentre pas ni strictement dans la définition de DS ni dans la définition de DT, tandis qu'elle peut être considérée comme concernant un *discours théorique en situation*. Un discours théorique, puisqu'il est demandé aux élèves de fournir une preuve écrite du processus de démonstration qui doit être conduite sur la base d'une théorie (dans le cas spécifique la théorie de la géométrie euclidienne). Il est aussi un discours en situation par les caractéristiques mêmes de l'acte de production : il est produit en relation directe avec l'interlocuteur, dans un moment et un lieu précis (l'expérimentation a lieu dans une salle du bâtiment scolaire des élèves), et il est organisé en référence permanente avec l'espace d'interaction sociale (le binôme d'élèves, l'observateur et le but de l'expérimentation) et de la notion (le référent, le signifiant ou le signifié selon le cas).
Notre situation relèvera donc des caractéristiques d'un discours en situation et, en même temps, d'un discours théorique au sens de Bronckart, mais nous ne retiendrons pas les seules occurrences des unités linguistiques pour définir l'avancement du discours produit par les élèves. Alors que l'objectif de Bronckart est de distinguer parmi différentes typologies de textes au moyen des unités, le nôtre est de considérer le discours théorique en situation et son avancement dans les modes d'expansion discursive. Pour autant, nous ne postulerons pas une relation biunivoque entre la présence de certaines unités linguistiques et les différents modes de progression du discours, dans certains cas, nous pourrons même associer une même unité linguistique à différents modes d'expansion du discours. Nous chercherons plutôt à caractériser un mode d'expansion discursive par l'*usage* des unités linguistiques qui y est fait.
L'analyse des discours produits par les élèves nous a permit d'identifier différents unités linguistiques et différents leurs usages. Nous avons en suite associé aux différents usages de ces unités linguistiques les différents modes de progression du discours. Donc, nous avons retenu les différents usages des unités linguistiques comme critères pour identifier dans le discours le mode d'expansion discursive Accumulation ou bien le mode Substitution.

Usages des unités linguistiques

Comme dit plus haut, nous avons pris en charge un « discours théorique en situation ». Nous supposons que les unités linguistiques participant du discours, sont à la fois celles qui caractérisent le discours en situation et celles qui caractérisent le discours théorique issues de la théorie de Bronckart. À la liste d'unités linguistiques fournie par Bronckart (pp. 74, 75), nous ajoutons d'autres unités linguistiques participant habituellement du discours de résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane.
Nous avons établit les usages de certaines unités linguistiques caractérisant le mode d'accumulation et les usages de certaines unités linguistiques caractérisant le mode substitution.

Voyons des exemples.
On considère d'abord l'accumulation comme mode d'expansion du discours.
Dans l'accumulation l'unité linguistique *« si...alors » est utilisée en sens conversationnel.* Par exemple : « si tu fais ceci alors... »
Dans l'accumulation on reconnaît des *termes utilisés en sens déictique tells « ça, ceci... » souvent accompagnés par des gestes* : « ça est parallèle à ça » qui remplacent la dénomination des objets désignés (par exemple, les côtés AD et OE du parallélogramme OADE Fig 1).
Dans l'accumulation on relève aussi des *termes mathématiques tel « parallélogramme » qui renvoient au dessin et non à un objet théorique* (par exemple, ce terme ne participe pas de la verbalisation d'un théorème).
Pour ce qui concerne le mode de progression du discours Substitution nous y avons identifié encore l'unité linguistique « si...alors ». Dans ce cas, l'unité linguistique *« si...alors » est utilisé pour des pas de déduction.*
Dans la Substitution on reconnaît des *termes utilisés en anaphore tels « ça, ceci... », usés pour condenser plusieurs données en revoyant à ce qui a été déjà dit à l'avance.* Par exemple : « si ça c'est vrai lors... », où le terme « ça » renvoie, par exemple, à une propriété qu'o n a déjà démontrée.
Dans la Substitution on relève aussi des *termes mathématiques renvoyant à un objet théorique* et non pas au dessin. Par exemple, lorsqu'ils participent de l'énoncé d'un théorème.

Or, reconnaître les différents usages des unités linguistiques dans les discours produit par les élèves, a constitué le critère au moyen duquel nous avons reconnu une progression du discours du type « accumulation » au type « substitution ». En ce sens donc l'usages des unités linguistiques relève du rôle de « langage révélateur » pour notre recherche.
Le tableau suivant résume les exemples présentés ci-dessus.

Unités linguistiques dans l'ACCUMULATION	**Usage des unités linguistiques**
- « si...alors » - Mots utilisés en déictique « ça, ceci... » - Termes mathématiques ...	- Conversationnel - Remplacent dénomination - Renvoient au dessin
Unités linguistiques dans la SUBSTITUTION	**Usage des unités linguistiques**
- « si...alors » - Mots utilisés en anaphore « si **ça** c'est vrai alors... » - Termes mathématiques ...	- Déduction - Condensent plusieurs données en renvoyant à ce qui a été déjà dit - Renvoient à l'objet théorique

Tableau 1.

En résumant, il y a deux critères adoptés dans notre recherche pour l'analyse de la progression du discours : d'un coté, sur la base des définitions d'Accumulation et de Substitution, on a identifié dans le discours des élèves l'avancement du processus de démonstration ; la valeur des propositions énoncées nous a permit aussi de reconnaître si la proposition a été énoncée dans la progression du discours de type accumulation ou dans la progression du discours de type substitution. D'autre coté, nous avons considéré les différents usages des unités linguistiques dont nous avons relevé les occurrences dans le discours produit par les élèves, en les associant au mode de progression du discours de type accumulation ou de type substitution.

Ces critères seront utilisés comme langage révélateur pour mettre en évidence l'avancement du processus de démonstration dans le discours produit par les élèves.

Troisième Hypothèse de recherche

A partir de l'idée que la progression du discours se fait par le mode accumulation et le mode substitution et que les propositions énoncées relèvent d'une valeur épistémique sémantique ou d'une valeur logique, nous avons tiré notre troisième hypothèse de recherche :

L'avancement du processus de démonstration passe par la progression des modes d'expansion discursif : de la juxtapositions de propositions indépendantes qui participent de l'accumulation, à une structurations de ces propositions dans un enchaînement déductif qui participe de la substitution. En outre, l'avancement du processus de démonstration dépend du changement de la valeur des propositions : d'une valeur épistémique sémantique (vraisemblable, certain...) liée au contenu, qui relève du mode « accumulation », à la valeur logique de vérité (vrai, faux ou non déterminé) liée au statut des propositions, qui relève du mode « substitution »

En fonction de cette hypothèse, nous nous sommes posés les questions suivantes :

Quels sont les processus de changement de la valeur des propositions ?

Quelles sont les fonctions du langage qui favorisent le changement de la valeur des propositions ?

Afin de répondre à ces questions et, en général, aux questions de recherche posées au paragraphe 1, nous aborderons l'analyse du rôle du langage naturel lors du processus de résolution d'un problème de géométrie plane issu des binômes d'élèves.

Analyse du rôle du langage naturel

Dans ce paragraphe nous aborderons l'analyse de la fonction du langage naturel lors du processus de démonstration d'un problème en géométrie plane. Il s'agit donc d'analyser le rôle joué par le langage naturel lors du processus de démonstration en considérant qu'il a lieu dans un contexte de type interpersonnel.

Méthodologie

Afin de décrire la méthodologie adoptée dans notre recherche, nous présentons tout d'abord les choix sur la base desquelles on a construite l'expérimentation et les models d'analyse des protocoles. Ces modèles ont étés conçus pour répondre à la question central de notre recherche, c'est-à-dire mettre en évidence le rôle joué par le langage naturel lors de l'avancement de la démonstration.

Le choix de la méthode : une situation d'observation de la résolution de problème

La méthode choisie pour répondre aux questions de recherche consiste à observer un processus de résolution de problème de démonstration en géométrie plane produit par des élèves.

L'observation sera centrée sur l'activité de communication (principalement verbale) entre les élèves pendant le processus de résolution. Afin de favoriser l'activité de communication, l'expérimentation prévoit que les élèves travaillent par binôme. La situation analysée ne met pas en place une ingénierie didactique, car la situation ne consiste pas en une situation d'enseignement – apprentissage, mais simplement de l'observation d'une situation classique de classe.

Les problèmes choisis pour l'expérimentation sont différentes versions d'un même problème, obtenues en jouant sur les valeurs de certaines variables, par exemple les définitions des quadrilatères concernés, certaines propriétés du même quadrilatère ou la forme du problème (énoncé ou liste de données accompagnées d'un dessin). Dans cet ouvrage, nous présenterons qu'une de ces versions.

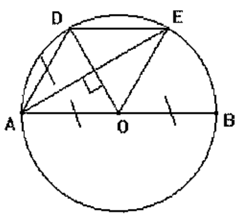
L'expérimentation a été conduite à la fois en Italie et en France Afin de mettre en évidence l'influence du système de connaissances sur le rôle du langage naturel lors du processus de résolution. Nous avons en effet prouvé que le rôle joué par le langage lors de la démonstration dépende des systèmes de connaissances des élèves, donc des institutions qui définissent les programme scolaires.

Dispositif expérimental et modèles élaborés pour l'analyses des protocoles

Nous pensons qu'un élément clé susceptible d'influer sur les processus de résolution est la forme dans laquelle les problèmes seront proposés, c'est pourquoi les problèmes proposés lors de notre expérimentation ont étés présentés en deux versions différentes : dans un cas, seul l'énoncé du problème a été présenté, tandis que dans l'autre cas, une liste de données accompagnée d'un dessin codé a été fournie. Un problème de géométrie met le plus souvent en jeu deux registres sémiotiques, le registre langagier, et le registre figuratif. La donnée d'un problème de géométrie plane ne relève pas nécessairement des deux registres, cela signifie qu'un problème, par exemple, peut être donné par la seule paire « énoncé et questions », sans forcément être associé à une représentation figurative (dessin).
Or, pour brièveté, nous présenterons ici une seule des versions des problèmes appartenant à notre dispositif expérimental, car cela suffira pour aborder les objectifs visés dans cet ouvrage.
Problème soumit aux élèves

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB], D un point de ce cercle tel que AD= AO. La perpendiculaire à (OD) passant par A recoupe le cercle (C) au point E.

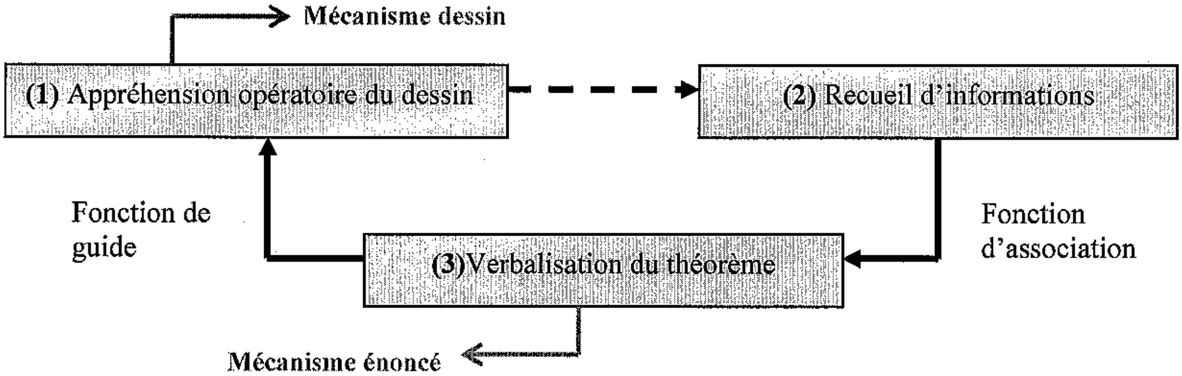
Démontrer que OADE est un losange



Des groupes de deux élèves (binômes d'élèves producteur-coproducteur), travaillent ensemble à la résolution d'un problème de démonstration en géométrie plane proposé et à la rédaction de sa solution. La situation expérimentale est mise en place en Italie et en France : en Italie, avec des élèves appartenant aux classes correspondantes aux deux premières années du lycée (14/15 ans), tandis qu'en France, avec des élèves appartenant à seule classe de Seconde. Le temps de travail des binômes est suffisamment long (environ une heure) pour permettre une intense activité langagière de verbalisation. Pour l'analyse du discours relatif à l'échange communicatif que les élèves mènent lors de l'activité de résolution, nous avons besoin d'observables, c'est pourquoi le discours est enregistré à l'aide de magnétophones et ensuite, il est transcrit pour être analysé.
Nous disposerons donc des notes d'observation du travail des binômes, de la rédaction écrite de la résolution des problèmes pour chaque binôme et de la transcription des échanges oraux, issus des enregistrements.
L'activité de chaque binôme se déroule de façon indépendante. Pour la résolution du problème les élèves ont le droit d'utiliser des instruments de construction de dessin tels la règle, l'équerre et le compas.

Modèles d'analyse des protocoles

Lors de notre recherche, nous avons élaboré essentiellement deux modèles d'analyse des protocoles mais nous ne présenterons ici que le modèle permettant d'analyser entièrement le processus de résolution. Le but de ce modèle est de reconnaître et identifier les fonctions joué par le langage lors de l'avancement du processus de résolution. Ce modèle s'articule en deux mécanismes : le *mécanisme dessin* et le *mécanisme énoncé.*
Ces deux mécanismes se distinguent en raison du démarrage du processus de résolution : dans le mécanisme dessin, le processus de résolution démarre par l'appréhension opératoire et perceptive du dessin, tandis que dans le mécanisme énoncé, le processus de résolution démarre en revenant sur l'énoncé du problème et, en particulière, sur la question du problème. Nous présenterons ci-dessous une description des mécanismes sous forme d'un schéma, en suite, nous détaillerons à la fois les critères sur la base desquels nous nous sommes appuyés pour construire ces mécanismes et la démarche du fonctionnement de chacun des deux mécanismes.



Les mécanismes décrivent le processus de résolution du problème en forme cyclique (1→2→3→1). Ce cycle doit être parcouru plusieurs fois pour décrire entièrement le processus.
Les critères que nous avons adopté pour élaborer ce modèle ont été de mettre en évidence à la fois les relations entre le domaine graphique et le domaine théorique, de façon particulier les allers et retours entre appréhension du dessin et référent théorique, et le rôle joué par le langage en ces allers et retours. Or, comme ce modèle vise décrire l'avancement du processus de résolution, ce modèle permettra de mettre en évidence les différents modes de progression du discours (accumulation et substitution) et les différents usages des occurrences des unités linguistiques.

Description du modèle

Le processus de résolution peut être abordé par l'appréhension opératoire du dessin (1) : la perception immédiate du dessin amènera en suite à ses différents modifications (méréologique, optique, positionnelle). L'appréhension opératoire du dessin permettra d'isoler certaines unités figurales ou certaines sous-configurations du dessin. Dans cette phase les unités figurales du dessin seront décrites en termes spatio-graphiques en utilisant mots déictiques (par exemple, « ça, ceci,... ») qui remplacent la dénomination des objets désignés, et qui souvent sont accompagnés par des gestes.

Le but de l'appréhension opératoire du dessin est de construire une sorte de « milieu de travail » en rajoutant des informations à la liste (2)[4]. La finalité de cette liste d'informations est de « recherche » car c'est justement sur la base de cette liste d'informations que les élèves cherchent à démarrer un processus déductif.
Dans cette phase (2), les unités figurales sont composées en sous-configurations qui sont décrites en termes géométriques car elles sont reconnues en tant qu'objets mathématiques (par exemple, en référence à la Fig. 2, les segments [AE] et [OD] sont nommés et ils identifiés en tant que *diagonales* du quadrilatère OADE). Les propositions énoncées dans cette phase n'ont pas un statut de prémisse ou de conclusion car elles sont simplement propositions juxtaposées. Par contre, elles relèvent d'une valeur épistémique sémantique liée exclusivement à leur contenu qui est ressenti comme vraisemblable, certain, probable etc.

Pour ce qu'on vient de dire, nous pouvons raisonnablement identifier dans cette première phase du modèle, le mode de progression du discours de type accumulation.
La liste d'informations permettra aux élèves d'***associer*** et en suite de verbaliser (3) un des théorèmes utiles pour de la résolution du problème.

La verbalisation de l'énoncé du théorème (3) permettra d'associer aux propositions composantes l'énoncé même le statut de prémisse ou de conclusion. Or, justement parce que ces propositions relèvent d'un statut dans la phrase, les propositions composantes la liste d'informations relèveront eux aussi d'un statut : le statut de *prémisses potentielles*. Ce fait permettra de comparer l'ensemble des prémisses potentielles avec l'ensemble des prémisses du théorème dont l'énoncé a été verbalisé, car elles relèvent toutes du même statut de prémisse. Le comparaison permettra d'identifier les prémisses du théorème qui doivent être encore prouvées. Pour cela, les élèves peuvent revenir encore sur l'appréhension opératoire du dessin (1) mais cette fois ci pour chercher d'identifier les relations géométriques requises dans les prémisses à prouver et seulement celles là. C'est pour quoi, nous retenons cette nouvelle appréhension opératoire du dessin comme ***guidée*** par la verbalisation du théorème. La finalité de cette liste d'informations guidée par la verbalisation du théorème est définie de « vérification » car les élèves cherchent à vérifier les prémisses manquantes du théorème et seulement celle là. On souligne comment la liste d'informations peut relever de deux finalités différents par rapport à sa construction dans le processus de démonstration. La valeur des propositions énoncées dans cette phase reste « non déterminée » jusqu'au moment qu'elles ne sont pas vérifiée. Dans cette phase nus pouvons relever le mode de progression du discours de type substitution car les propositions peuvent être liées les unes aux autres par des pas de déduction.

Or, si le processus de résolution démarre par l'appréhension opératoire du dessin, nous avons définit notre modèle en tant que ***Mécanisme dessin***. Par contre, si le processus de résolution démarre par la verbalisation d'un théorème utile à fin de la résolution du problème ou par la question du problème, alors nous avons définit notre modèle en tant que ***Mécanisme énoncé*** (souvent les élèves, après une relecture de la question du problème, démarrent leur processus de résolution par une phrase du type « pour un losange, il faut dire que.... »).

[4] Comment les élèves tirent les informations (référents théoriques, relations géométriques, propriétés,...) pour composer leur liste d'informations ? Notre recherche montre que les informations peuvent être recueillies par l'interprétation du dessin, au moyen de l'appréhension opératoire et perceptive du dessin, ou bien, par des inférences de portée locale. Ces inférences sont de portée locale car elles ne sont pas liées les unes aux autres par des pas de déduction : la conclusion d'un pas est simplement une nouvelle information à ajouter à la liste mais elle n'est pas la prémisse du pas déductif suivant (on n'a pas un enchaînement de pas de déduction)

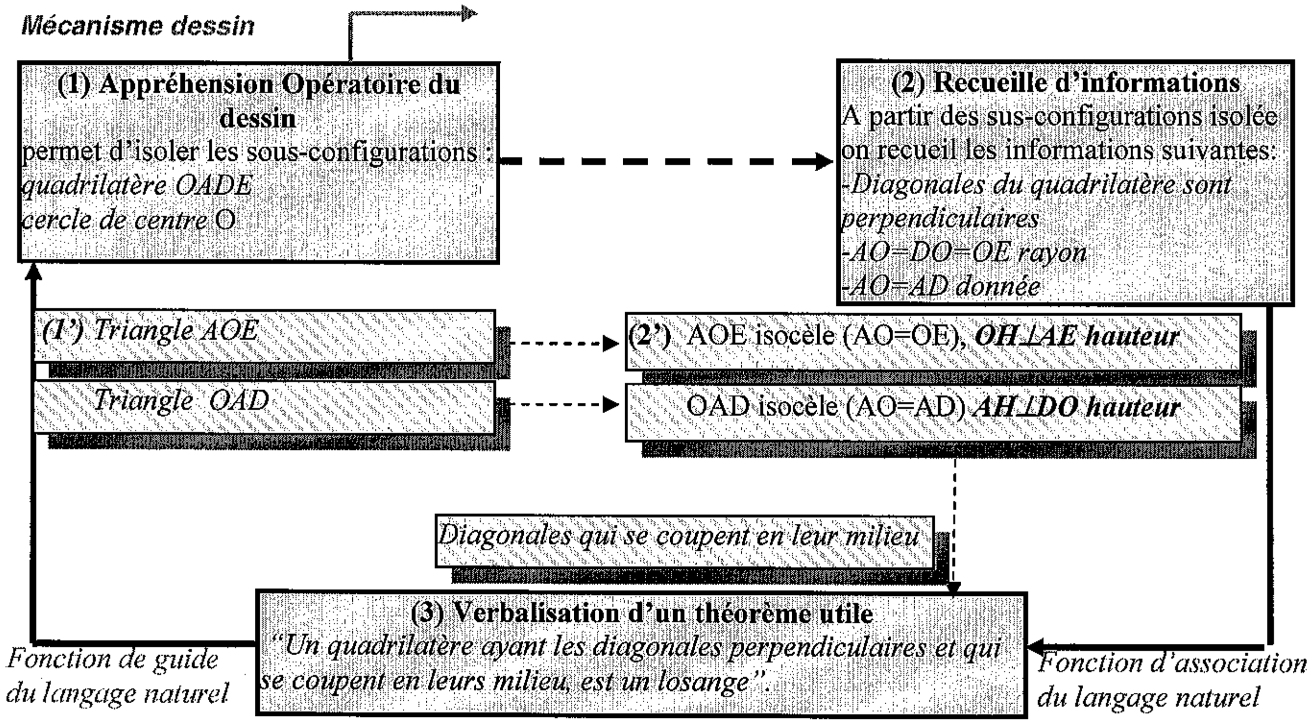
Dans le paragraphe suivant nous présenterons l'analyse d'un protocole menée en utilisant le Mécanisme dessin en tant que modèle d'analyse. Le Mécanisme dessin nous permettra donc d'analyser le protocole par rapport à notre objectif de recherche : identifier les allers et retour entre domaine graphique et domaine théorique et, au même temps, mettre en évidente le rôle joué par le langage naturel dans ces allers et retours.

Exemple d'analyse d'un extrait d'un protocole au moyen du Mécanisme dessin.

Comme dit plus haute, le Mécanisme dessin nous permet de décrire le processus de résolution qui démarre à partir de l'appréhension opératoire du dessin. Dans ce qui suit, nous présenterons l'analyse d'un extrait d'un protocole au moyen du schéma du Mécanisme dessin en suivant les passages : (1)→ (2)→(3)→(1') →(2').
Extrait du protocole :

E. : déjà il y a les diagonales qui sont perpendiculaires .... A. : AE est perpendiculaire à OD, AO=AD. ...AO est un rayon du cercle, OD est un rayon du cercle, OE est rayon du cercle donc on a AO=DO=OE, AD=AO donnée, donc **le losange... est un quadrilatère ayant les diagonales qui se coupent en leurs milieu et perpendiculairement** .... E. : AO, OE et OD sont rayons du cercle, et ils sont égaux... ah oui, OD il sert à rien ! A. : pour quoi ça sert pas ? E. : parce qu'il est une diagonale...AO est égal à OE , le triangle AOE est isocèle car il y a deux côtés égaux, puis...AHO est un triangle rectangle et OH est perpendiculaire à AE donc OH est la hauteur du triangle AOE A. : ... puis AD est égal AO....AHO est un triangle rectangle, AO et AD donc AOD est un triangle isocèle, mais c'est mieux, il est équilatéral. Donc le triangle AHO est un triangle particulier ayant les angles de 30, 60 et 90°. En tout cas, AH est la hauteur du triangle AOD AH coupe la base DO du triangle en son milieu Mais alors.... OH aussi coupe sa base AE en son milieu .....

Schéma d'analyse de l'extrait au moyen du Mécanisme dessin :



(1) L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler dans le dessin la sous configuration du quadrilatère OADE, ce qui est vraisemblable car le quadrilatère est nommé dans l'énoncé du problème. L'appréhension opératoire du dessin permettra aussi d'isoler la sous-configuration du cercle qui est sans doute une sous-configuration dominante dans le dessin.

(2) A partir de la sous-configuration du quadrilatère OADE on tire l'information que les diagonales AE et OD sont perpendiculaires, car les unités figurales AE et OD sont nommées dans l'énoncé du problème et elles sont visualisées dans la sous configuration du quadrilatère en tant que diagonales.
En outre, à partir de la sous-configuration du cercle on tire l'information AO=OD=OE car les segments AO, OD et OE sont rayons du cercle. On prenne en charge aussi le donnée du problème AO=AD.

La liste d'informations ainsi recueillies permettra d'évoquer, et en suit de verbaliser, un théorème utile à la démonstration. Cela signifie que certaines informations de la liste sont **associées** par les élèves à un théorème utile à fin de résoudre le problème (une description plus détaillée de la fonction d'association sera fournie dans les paragraphe suivants)

(3) La verbalisation du théorème : *"Un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leurs milieu, est un losange"*, permettra aux élèves d'associer aux propositions composantes son énoncé un statut opératoire : le statut de prémisses (« diagonales qui se coupent en leur milieu » et « diagonales qui se coupent perpendiculairement » constituant l'hypothèse du théorème), ou alors le statut de conclusion (« le quadrilatère est un losange »). Comme ces propositions relèvent d'un statut dans la phrase, même le propositions concernant les informations recueillies dans la liste, assumeront un statut dans le discours, le statut de *prémisse potentielle*. Ce sera à ce point que l'ensemble des prémisses du théorème et l'ensemble des prémisses potentielle pourront être comparées afin d'isoler les prémisses du théorème qu'il faut encore prouver. Dans notre cas, donc, il faut encore prouver que « le diagonales se coupent en leur milieu ».

Or, dès que la prémisse encore à prouver est identifiée, on revient sur l'appréhension opératoire du dessin avec l'objectif de prouver les seules relations géométriques requises dans la prémisse. C'est pour quoi nous envisageons une fonctions de **guide** exercée par la verbalisation du théorème sur l'appréhension opératoire du dessin (une description plus détaillée de la fonction de guide sera fournie dans les paragraphe suivants).

(1') Par l'appréhension opératoire du dessin on cherchera d'isoler sur le dessin une sous-configuration dont les unités figurales AE et OD sont diagonales, à fin prouver en suite que ces diagonales « se coupent en leurs milieu ».

(2') En isolant la sous-configuration du triangle AOE et en prenant en charge l'information que AO=OE car ils sont des rayons du cercle, on parvient à l'information que le triangle AOE est un triangle isocèle. De là, on tire l'information que OH est perpendiculaire à AE. OH est alors la hauteur du triangle AOE, donc OH est une des hauteurs de ce triangle. De là, OH coupe la base AE en son milieu. De même, le triangle DAO est isocèle, donc la hauteur AH coupe la base DO en son milieu.

Les élèves reviennent sur l'énoncé du théorème et ils vérifient que la prémisse manquante a été prouvée.

Dans ce paragraphe nous avons introduite l'idée de fonction d'association et de fonction de guide du langage. Or, les questions qu'on peut se poser maintenant sont les suivantes : Comment se réalise l'association entre un ensemble d'informations et le théorème utile pour le processus démonstratif ? Comment la verbalisation de l'énoncé d'un théorème guide l'appréhension opératoire du dessin ? en d'autres termes, comment s'exercent les fonctions de guide et d'association du langage naturel lors du processus de résolution du problème ?

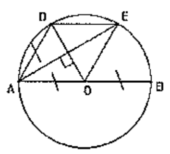
Dans les paragraphes suivants nous chercherons à répondre à ces questions.

Certains résultats de la recherche : les fonctions du langage naturel.

Les résultats de notre recherche confirment l'idée que le langage joue un double rôle dans notre recherche : le langage est outil pour l'avancement de la résolution du problème (en effet, nous avons identifié des fonctions du langage qui favorisent l'avancement du processus démonstratif : la fonction de guide, la fonction d'association , la fonction de planification et la fonction de contrôle) ; le langage est aussi outil révélateur de l'avancement du processus de résolution (par exemple, en identifiant dans le discours l'avancement des modes de progression du discours ou les différents usages de certaines unités linguistiques).
Ce que nous présenterons dans cet ouvrage seront le seuls résultats relatifs au langage en tant qu'outil pour l'avancement du processus de résolution. Nous ne présenterons pas ici les résultats relatifs au langage en tant que révélateur. Dans le paragraphe suivant on abordera alors la description détaillée des seules **fonctions de guide et d'association** du langage naturel.

La fonction de guide du langage naturel

Le but de ce paragraphe est de décrire la *fonction de guide* du langage et les conditions de son fonctionnement. C'est pourquoi nous présenterons tout d'abord un extrait d'un protocole qui permet d'illustrer comment s'exerce cette fonction du langage. Ensuite, nous en proposerons une description, ce qui permettra aussi d'introduire les conditions nécessaires pour son fonctionnement.
Extrait du protocole Camille / Gaëlle[5]



8. C: <u>"AE est perpendiculaire à OD"</u> "AO est....
9. G: <u>ça est égal</u> ça (*en indiquant AO et AD*) <u>ça c'est un parallélogramme AO égal OE égal AD</u> donc ça fait un parallélogramme [appréhension perceptive du dessin]
10 C: mais un parallélogramme c'est pas les cotés de la même longueur, c'est les cotés opposés qui sont....
11 G: ouais, ouais, tu as raison ...c'est un losange
12 C: ouais, mais ouais, **pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires** [verbalisation de l'énoncé du théorème]
13 C: le losange... les diagonales se coupent dans leur milieu
14 G: et perpendiculaires
15 C: <u>Attends, perpendiculaires c'est bon là,</u> [vérification immédiate d'une des prémisses du théorème. On revient sur les données du problème]<u>en fait il faut dire que....</u>
16 G: En fait ce côté c'est le même que celui là *(AD et OE)*, hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi ...t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans les cercles ? Je ne sais plus (*elle trace le segment BE)*
17 C: ouais, mais.... enfin ...**ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent dans leur milieu et perpendiculairement, dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non?**
...
22 G: <u>et comment tu peux savoir qu'y se coupent dans leur milieu?</u>
23 C: ben justement, <u>c'est ce qu'on veut démontrer, non</u>? [prémisses qu'il faut encore prouver]

[5] Pour des raisons de brièveté, nous adopterons dans ce qui suit la marque C/G pour indiquer le protocole du binôme Camille et Gaëlle.

...
26 G: regarde ce qu'on peut dire: que AEB c'est rectangle
36 G: peut être on peut démontrer,...tien regarde ça c'est symétrique par rapport à ça *(AO et DE)* donc en fait c'est le même
37 C: et alors?
38 G: et après il faut qu'on puisse démontrer qu'il est parallèle à celui là....
42 C: Attend, AO égal AD *(elle revient aux données codées sur le dessin)* ..... et si on prouve que le triangle DAO est isocèle,... parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça *(DO)*
43 G: oue, parce que c'est la hauteur
44 C: oue, c'est la hauteur
45 G: oue, c'est aussi la médiane ....AH OUIIII
46 C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc....... on peut donner un lettre? *(ou point du milieu, H)*

Camille verbalise l'énoncé du théorème utile pour la résolution du problème à l'intervention [12], c'est-à-dire presque au début du processus de résolution. Les propositions composantes l'énoncé du théorème relèvent du statut de prémisse ou de conclusion ; cela permettra à Camille d'identifier la prémisse de l'hypothèse du théorème qui sont encore à identifier [15] en comparant l'ensemble des prémisses du théorème avec l'ensemble des données du problème. La prémisse qu'il faut encore prouver est « les diagonales se coupent en leurs milieu ». Camille revient sur le dessin pour isoler des sous-configurations ayant OD et AE comme unités figurales et tels qui puissent prouver la relation requise « se coupent en leur milieu » [42÷46]. Camille isole en d'abord la sous-configuration du triangle isocèle DAO en prouvant que AH est médiane de DO et, en suite, elle isole la sous-configuration du triangle isocèle AOE pour montrer que OH est médiane de AE. Remarquons que la liste d'informations obtenue par cette appréhension opératoire relève d'une finalité de vérification.
Nous pouvons remarquer comment les interventions de Gaëlle ne sont pas du tout guidées par la verbalisation du théorème. En effet, Gaëlle cherche simplement de recueillir des informations du dessin [26, 36] par l'appréhension opératoire du dessin et par l'interprétation du dessin sans être guidée par un objectif de recherche. La liste d'informations recueillies par Gaëlle relève donc d'une finalité de recherche.

Description de la fonction guide du langage

La fonction de guide du langage s'exerce lorsque la verbalisation de l'énoncé d'un théorème (ou plus en général d'un référent théorique mathématique), en imposant un statut opératoire aux propositions composant l'énoncé, guide l'action du sujet lors du processus de résolution afin de vérifier toutes les prémisses de l'hypothèse du théorème et seulement celles-là.
Le rôle de la fonction de guide du langage consiste principalement à guider l'appréhension opératoire du dessin

L'analyse de la fonction de guide permet alors de répondre à la question de recherche concernant les raisons pour lesquelles la verbalisation du référent théorique guide les actions du sujet lors du processus de résolution.

Conditions pour que la fonction de guide s'exerce

Nous avons plusieurs fois souligné qu'une des conditions pour que la fonction de guide du langage naturel s'exerce est la verbalisation du théorème (ou, plus en général, d'un référent théorique). Or, la verbalisations ne semble pas être une condition suffisante pour que la fonction de guide s'exerce. En effet, l'analyse des protocoles permet d'identifier des autres

conditions : il faut une sorte de masse critique d'informations supportant la verbalisation du théorème, il faut aussi une re-verbalisation des prémisses du théorème tout au cour du processus de résolution du problème. En ce dernier point on revient sur l'idée du double rôle joué par le langage dans notre recherche. En effet, si reconnaître les re-verbalisations des prémisses du théorème tout au cours du processus permet au chercheur de dire que la fonction de guide potentiellement est en train de s'exercer, d'autre côté la re-verbalisation des prémisses pourra exercé une fonction de guide pour l'avancement du processus de démonstration.
L'analyse des protocoles a mis aussi en évidence que la fonction de guide semble être s'exercer toujours de la même façon. Ces différents façons semblent être dépendantes non de différents facteurs tels la difficulté du problème, le « coût » d'application d'un théorème (dépendante des connaissances du sujet, de ses habitudes et non seulement du problème) et aussi du profil du binôme. Ce dernier point s'est présenté particulièrement intéressant.
L'analyse des protocoles a mis en évidence deux situations possibles :

1) Une positions d'équilibre entre les élèves. Cela signifie que les élèves ont la même capacité de mobiliser leurs connaissances et de les verbaliser, dans notre cas, de verbaliser le théorème utile. Dans ce situation, chaque élève peut verbaliser l'énoncé d'un théorème, et cette verbalisation peut agit comme guide pour l'autre élève2) Une positions de déséquilibre entre les élèves. Cela signifie que la capacité de verbalisation d'un des deux élèves peut fonctionner comme guide pour l'autre élève :

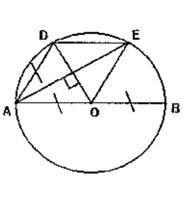
- l'élève qui verbalise le théorème utilise cette verbalisation pour guider son camarade ;
- l'élève qui n'a pas verbalisé l'énoncé du théorème utilise la verbalisation faite par son camarade comme guide pour lui-même.

En général, la fonction de guide du langage ne semble pas être mis en acte par l'élève qui verbalise l'énoncé du théorème, sauf le cas où cela constitue un aide pour le camarade. Il parait alors que la re-verbalisation des prémisses du théorème soit une sorte d'aide pour l'élève qui n'arrive pas à développer un processus de résolution sur la base d'un référent théorique. Il se peut que l'action de guide (re-verbalisation des prémisses du théorème) soit exercée par l'élève qui n'a pas verbalisé l'énoncé du théorème en utilisant la verbalisation faite par son camarade. Le cas d'équilibre entre les élèves est particulièrement intéressant car les deux élèves ont proposé la verbalisation de l'énoncé d'un théorème également utile pour l'avancement du processus de résolution. Dans ce cas, la fonction de guide est exercée par chacun des deux élèves mais la re-verbalisation des prémisses du théorème n'a pas ici le rôle de guider le camarade à ne perdre pas le fil du processus, plutôt elle a le rôle de convaincre le camarade de la bonne choix du théorème.

La fonction d'association du langage naturel

Le but de ce paragraphe est de décrire la *fonction d'association* du langage et les conditions de son fonctionnement. C'est pourquoi nous présenterons tout d'abord quelques extraits de protocoles qui permettent d'illustrer comment s'exerce cette fonction du langage et d'introduire les conditions nécessaires pour son fonctionnement.

Extrait du protocole de Elena / Alessandra . L'analyse de cet extrait permet de mettre en évidence comment à partir de l'ensemble d'informations recueillies (par l'appréhension opératoire du dessin ou par inférences locales) la fonction d'association du langage permettra d'évoquer un théorème utile afin de résoudre le problème. On montrera que cela passe par l'action conjointe d'un mot et d'une configuration particuliers



41. E : …et tous les triangles sont égaux par la propriété de transitivité parce que AD est égal à OA, donnée de l'énoncé, puis AO est égal à OE parce

qu'ils sont des rayons et ED est égal aux rayons parce que...parce que l'on vient de le démontrer. Et puis, tous les triangles sont triangles rectangles
42. A : et puis parce que DH et HO sont égaux et tous les triangles ont cette base
43. E : et donc, ils sont tous isométriques. Et donc, donc quoi.... ?
44. A : alors même tous ces petits angles sont égaux, disons en A et en E (*DEH, OEH; DAH, OAH*)
E : puis...ils **sont égaux AH et HE** aussi, **et DH et HO sont égaux** aussi. Et donc,...on n'avait pas un théorème sur...qui disait que les **diagonales** d'un parallélogramme...que dans un parallélogramme les diagonales se coupent dans leur milieu

L'appréhension opératoire du dessin permet d'isoler la sous-configuration "en croix" des segments DH, HO et AH, HE. Dés que ces segments ont étés isolés et leur description en termes de diagonales a été faite, le théorème a été évoqué. L'évocation du théorème semble passer à la fois par le fait d'avoir "vu" la configuration prototypique des diagonales du parallélogramme et par le fait d'avoir prononcé le mot « diagonales ».
Le mot « diagonales » et la configuration "en croix" des diagonales semblent donc fonctionner respectivement comme **mot et configuration étiquette**[6] car ils permettent d'évoquer immédiatement le concept[7] de losange en passant par le référent théorique constitué par le théorème. Dans ce cas, la fonction d'association du langage se réalise grâce à l'action conjointe du mot étiquette « diagonales » et par la configuration étiquette des diagonales "en croix".

Extrait du protocole de Elena / Alessandra. L'analyse de cet extrait permet de mettre en évidence comment à partir l'appréhension opératoire du dessin, la fonction d'association du langage permettra d'évoquer certaines propriétés utiles afin de résoudre le problème. On montrera que cela passe par l'action d'un mot particulier.

L'élève vient de considérer le triangle AHO par une appréhension opératoire du dessin (H point d'intersection des diagonales AE et OD)
16.E: ... Mais AO et AD, c'est-à-dire le triangle AOD est isocèle. Pour mieux dire, il est **équilatéral**. Donc le triangle AHO est un triangle particulier : le triangle 30, 60 et 90 degrés.

Le mot "équilatéral" semble fonctionner comme un **mot étiquette** car il renvoie immédiatement aux propriétés : « tous les angles du triangle équilatéral AOD sont de 60° » et « le triangle est composé des deux triangles rectangles ayants les angles de 90°, 60° et 30° » qu'en Italie on appelle « triangles rectangles particuliers ». Donc, le mot "équilatéral" semble évoquer le concept de triangle équilatéral en passant par les référents théoriques et l'appréhension opératoire du triangle OAD (il est décomposé de deux triangles rectangles particuliers). L'action du langage est d'associer au mot étiquette le/les référents théoriques, c'est pourquoi nous relevons ici une **fonction d'association** du langage.

[6] Les définition de « mot étiquette » et de « configuration étiquette » seront développées largement dans le paragraphe suivant.
[7] Nous adoptons ici le « Concept » au sens de Vergnaud. Comme on verra dans le paragraphe suivant, Vergnaud définit le concept en tant qu'un triplet constituée de trois éléments : l'ensemble des situations, l'ensemble des invariantes et l'ensemble des représentations du concept même.

Description de la fonction d'association du langage

La **fonction d'association** du langage est jouée par certains mots que nous qualifions de « mots étiquette ». Ils permettent d'associer à une représentation langagière d'un concept, certains référents théoriques et les propriétés qui leur sont associées dans la théorie.

Nous soulignons encore que la fonction d'association du langage est activée par l'effet de mots étiquette, mais, dans certains cas, par l'effet conjoint de configurations étiquette. La fonction d'association se réalise alors par la formulation ou la lecture d'un mot et par la reconnaissance visuelle d'une configuration particulière. Pour la suite, nous présenterons la définition détaillée de ces deux aspects : mot et configuration étiquettes.

Conditions pour que la fonction d'association s'exerce

L'analyse des protocoles nous a permit d'identifier les principales conditions à vérifier pour que la fonction d'association du langage puisse s'exercer. Nous avons déjà souligné que cela passe par l'action conjointe d'un mot et d'une configuration étiquette (dont les définitions seront fournies au paragraphe suivant), mais l'action de la fonction d'association semble être dépendante aussi par le coût d'application d'un théorème. Le coût d'application d'un théorème dépende des connaissances de l'élève et des leurs habitudes. Par exemple, nous avons remarqué que le théorème « un quadrilatère ayant quatre cotés égaux est un losange » il n'a jamais été utilisé en France même s'il a été verbalisé, car le coût d'application de ce théorème sur la base de la théorie des transformations peut être trop élevé par rapport au coût d'application du même théorème dans sur la base de la théorie euclidienne. Ce théorème a été utilisé beaucoup par les binômes italiens tandis que les binômes italiens n'ont jamais utilisé le théorème de la somme des vecteurs (utilisé par certains des binômes français) car il ne rentre pas dans le programme scolaire des mathématiques des premiers années du lycée en Italie.
Venons maintenant à la définition de mot étiquette et de configuration étiquette

Mots étiquette

Un mot joue le rôle « d'étiquette », s'il permet d'évoquer un concept appartenant au système de connaissances du sujet. Nous adopterons la notion de concept au sens de Vergnaud (1990).
Vergnaud définit le concept en tant qu' « un triplet de trois ensembles :
$C = (S, I, \mathfrak{I})$

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I : l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationalité des schèmes (le signifié)

$\mathfrak{I}$: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) » (Vergnaud, 1990, p.145)

Le concept évoqué par le « mot étiquette » est alors un triplet constitué par le problème ou la situation proposée aux élèves, les invariants, c'est-à-dire les propriétés géométriques en jeu, le signifiant, c'est-à-dire les représentations langagières et graphiques du concept, par exemple le dessin relié au concept par le sujet qui résout.
Cette notion de concept nous permet d'aborder une question centrale : « Quelle est la différence entre un mot et un mot étiquette ? ».
La différence entre un *mot* et un *mot étiquette* est identifiable par le fait qu'un mot étiquette entraîne l'évocation de théorèmes et propriétés géométriques appartenant au système de connaissances du sujet et en cela constituants du signifié. Le théorème ou les propriétés évoquées seront fonctionnels à la résolution du problème ou à l'avancement de la résolution du problème

Ainsi, si l'on considère le mot « triangle », il peut déclencher une association avec un signifiant graphique, tel le dessin de la Fig. 1, mais cette association risque de s'arrêter au niveau figuratif dans la résolution du problème (problème 1) parce que ce problème ne fait pas appelle à des théorèmes généraux sur les triangles. C'est pourquoi nous ne considérons pas que le mot « triangle » a joué dans ce cas le rôle de mot étiquette. Par contre, si on considère le mot « triangle isocèle » il est possible qu'il évoque la représentation graphique de la Fig.1 en tant que signifiant, et qu'ensuite s'établisse un lien entre ce signifiant et les invariants, c'est-à-dire les propriétés relatives au triangle isocèle. Par exemple, le théorème : « la hauteur du triangle est aussi médiane et médiatrice » ou la définition d'un triangle isocèle « un triangle ayant deux côtés égaux est isocèle ». C'est pourquoi nous envisageons a priori un rôle d'étiquette au mot « triangle isocèle » plutôt qu'au seul mot « triangle ».

Fig. 1

Nous avons remarqué qu'un mot étiquette peut à la fois renvoyer au théorème pilote et à des autres mots. Par exemple, le mot « milieu » peut évoquer à la fois les mots « médiane » et « médiatrice » ainsi que le théorème sur la hauteur d'un triangle isocèle. Or, si l'évocation des mots « médiane » et « médiatrice », en tant que représentations langagières du concept (par exemple, du concept du *triangle isocèle*), permettent l'évocation d'un théorème pilote, alors nous considérons que le mot « milieu » fonctionne comme un mot étiquette. Par contre, si le mot « milieu » permet la seule évocation des mots « médiatrice » et « médiane » sans les relier à aucun théorème, alors sa verbalisation fonctionne juste comme association de mots (du concept, sera évoqué juste les représentations langagières et non langagières mais pas des invariants).

Maintenant, nous souhaitons répondre à une deuxième question qui nous apparaît centrale pour une analyse plus fine du rôle des mots étiquette :
Quelles sont les relations entre les éléments constituant le concept évoqué par un mot étiquette?
On peut imaginer d'avoir des mots étiquette qui entraîneront, à l'intérieur du concept, des allers et retours entre invariants et signifiants : les propriétés géométriques prises en charge gèrent l'appréhension opératoire du dessin et la prise en charge de certaines configurations ou sous-configurations conduit ensuite à l'évocation de certains théorèmes. Mais, on peut aussi imaginer que les invariants de ce concept seront, à leur tour, reliés à un autre concept, dans le cas du triangle isocèle, par exemple, le concept de bissectrice. De même que pour le registre langagier, dans le registre figuratif certaines « configurations étiquette » permettent d'évoquer un concept. Dès que le concept vient évoqué il pourra être explicité éventuellement en termes d'invariants par les propriétés reliées au signifiant et au problème.

Conditions du fonctionnement de mots et configurations étiquette

Le fait qu'on mot ou une configuration soient étiquette est dépendant de plusieurs facteurs qui relèvent de la situation, du contexte, des acteurs (locuteur et interlocuteur)...
L'analyse des protocoles a mis discerné trois facteurs principales par rapport auxquels certaines mots et certaines configurations jouent le rôle d'étiquette : le sujet, le processus de résolution et les institutions.

Pour ce qui concerne le sujet, la question qu'on peut se poser est la suivante :
Pourquoi configurations et mots jouent le rôle d'étiquette pour certains mais pas pour d'autre ?
Nous proposons de rechercher une des raisons de ce lien "faible" lors de l'apprentissage du concept. Si l'apprentissage du concept n'est pas structuré en tant que lien bidirectionnel entre l'aspect figural et les invariants théoriques, alors l'évocation du concept par une configuration

étiquette sera susceptible d'être faible. Evidemment, si l'apprentissage du concept se structure grâce au lien bidirectionnel entre aspect figural et aspect théorique, l'évocation du concept par une configuration étiquette sera susceptible d'être "forte".
À cette étape, il nous semble possible de relier le concept de mot et configuration étiquette fortes ou faibles à l'idée de connaissances disponibles ou mobilisables issues de la théorie de Robert (1998). Nous pourrons dire qu'une connaissance peut ne pas être *disponible*[8] aux élèves lorsqu'elle reste *mobilisable* au niveau du signifiant mais non au niveau des invariants.

Comme dit plus haute, le processus de résolution est un des facteurs par rapport auquel certaines mots et certaines configurations jouent le rôle d'étiquette.
Les mots qui ont joué le rôle d'étiquette ne remplissent pas toujours cette fonction. En effet, l'analyse des protocoles a mis en évidence qu'un mot peut jouer le rôle d'étiquette en dépendance du fait qu'il appartient à une liste d'informations dont certaines pourront assumer le statut de prémisse d'un théorème.

Les conditions du fonctionnement de mot et de configurations en tant qu'étiquettes dépende aussi des institutions scolaires. Rappelons que notre expérimentation a été conduite à la fois en Italie et en France, donc les deux institutions de référence sont celle italienne et celle française. L'analyse des protocoles a mis en évidence qu'en général, les mots jouant le rôle d'étiquette dans le contexte italien, le jouent aussi pour le contexte français mais souvent ces mots déclenchent des théorèmes différents. Par exemple, dans la plupart des cas, le mot « équilatéral » a permis d'évoquer, en Italie, les théorèmes : « un triangle équilatéral a tous les angles de 60° » et « dans un triangle équilatéral on peut isoler deux triangles rectangles ayant les angles de 60°, 30° et 90° ». Le même mot « équilatéral », a plus de chances en France d'évoquer le théorème « dans un triangle équilatéral la hauteur est aussi médiane et médiatrice ». Cela est dépendante du programme scolaire des deux pays. En effet, comme dit plus haute, le programme scolaire pour l'enseignement de la géométrie en France, à l'époque de l'expérimentation, concernait la théorie des transformations, tandis qu'en Italie il concernait la géométrie euclidienne.
L'analyse des protocoles a aussi mit en évidence que les configurations peuvent être étiquette dans un seul des deux pays et cela signifie que les configurations ne relèvent pas d'une signification intrinseque.

Conclusions

De l'analyse des protocoles nous avons tiré un certain nombre de résultats principalement sur les conditions à mettre en place pour que les fonction du langage s'exercent.
L'analyse des modes de progression du discours dans la résolution a mis en évidence certaines régularités dans les comportements verbaux des élèves (entre binômes), régularités que nous avons qualifiées « modèles d'actions ». On a ainsi distingué trois modèles d'action : le modèle liste, le modèle final et le modèle Hypothètico-déductif dont nous n'avaons pas

[8] Précisons les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves, relativement à un niveau scolaire donné (Robert, 1988, pp. 165-168).
Le *niveau technique* : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance dans des contextualisations simples, locales, sans travail préliminaire de reconnaissance, sans adaptations. C'est le niveau des applications *immédiates.*
Le niveau mobilisable : il implique la mise en fonctionnement d'une connaissance par un début de juxtaposition de savoirs. Ce sont des applications où il faut adapter ses connaissances au contexte particulier. Par exemple par un changement de point de vue ou de cadre mais avec indications (soit données par l'enseignent soit par l'énoncé)
Le *niveau des connaissances disponibles* : ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, d'aller chercher soi-même dans ce connaissances ce qui peut intervenir

parlé en cet ouvrage. Nous avons pu repérer qu'est rattaché à chaque modèle un mode d'expansion discursive spécifique : en prévalence l'accumulation pour la Liste et la substitution pour le modèle final. Ainsi nous avons pu vérifier la validité de l'hypothèse de recherche 3 avancée lors de la problématique de recherche (cf. « Troisième hypothèse de recherche »)
À partir de ces résultats, surtout à partir des résultats concernant les conditions pour que les fonctions du langage naturel soient mis en place, nous avons tiré des implications didactiques.
Nous avons montré que les fonctions du langage naturel décrites dans notre recherche sont privilégiées par certaines conditions. Par exemple, on a remarqué que la mise par binôme favorise la fonction de guide ou que le mot jouent le rôle d'étiquette suivant les institution où l'élèves est en train de travailler.
Or, nous pouvons reconnaître ici un retombé sur l'enseignement car l'enseignant peut choisir de mettre en place un certain nombre de conditions pour que tel ou tel autre fonctions s'exercent.

Plus en général, nous pouvons tirer des conclusions de la recherche.
Les résultats obtenus concernent à la fois du langage comme révélateur et du langage comme outil pour la construction et la maîtrise de la pensée.
Pour ce qui concerne le langage comme révélateur, nous avons définit des Modèles d'analyse des protocoles (Mécanisme dessin et Mécanisme énoncé) et des Outils linguistiques (par exemple, les différents usages des unités linguistiques) qui constituent utiles instruments pour l'analyse de l'avancement du processus de résolution des problèmes de géométrie plane.
Pour ce qui concerne le langage en tant que outil pour la construction et la maîtrise de la pensée, nous avons définit différents Fonctions du langage naturel qui favorisent l'avancement du processus de démonstration sous l'action de certaines conditions.

En fin, notre travail fournit un nouvel exemple à la théorie vygotskyenne selon laquelle le langage naturel n'est pas simplement une expression du système de connaissances de l'élève, mais il y a une dialectique fondamentale entre la pensée et la parole en termes de ressources mutuelles (voir les fonctions décrites plus haut).

Références

Beaudichon J. (1999) *La communicatin., Processus, formes et applications.* Paris : Armand Colin/HER

Bronckart J.P. (1985) *Le fonctionnement des discours.* Paris : Delachaux et Niestlé

Duval R (1994) « Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique » , In *Repères – IREM,* 17, pp. 121-137.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine.* Paris : Peter Lang S.A.

Robotti E. (2002) "Verbalization as a mediator between figural and theoretical aspects", In *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 4; 105÷112. Utrecht University. Ed Marja van den Heuvel-Panhuizen.

L'enseignement spécialisé :

un autre terrain de confrontation

des théories didactiques

à la contingence

Comprendre la théorie est en attraper le geste et pouvoir continuer

François CONNE

FPSE UNIGE, Genève ; HEP VD et UNIL, Lausanne

(Le titre de cette introduction est une citation de Jean Cavaillès, extraite de : *Méthode axiomatique et Formalisme*, Paris Hermann, rééd. 1981, p. 178.)

Introduction

Ce séminaire sera dévolu à la présentation d'un champ de recherches en didactique des mathématiques (ddm) articulé sur une double problématique scientifique et institutionnelle. Je vais essayer d'esquisser quelques gestes de notre travail. Nous cherchons à comprendre le didactique à l'épreuve de ce que nous livrent des expériences faites dans le cadre de l'enseignement spécialisé. Notre problématique concerne donc en premier lieu le questionnement de la ddm par le système de l'enseignement spécialisé (ES) considéré comme source de confrontation et de falsification de propositions théoriques de ddm, elles-mêmes à quelques exceptions près, développées et étudiées en référence à cet autre système d'enseignement qu'est l'enseignement ordinaire (EO). Il s'agit d'une confrontation connaissance/savoir d'un domaine scientifique : partant de savoirs de la ddm, construits en références aux finalités EO, nous cherchons à les rendre utiles et opérationnels pour connaître et explorer le système ES. C'est de cette manière que nous pouvons penser la spécificité de l'ES sans tomber dans les deux caricatures consistant d'un côté à vouloir exposer une ontologie de cet ordre d'enseignement, ou, à l'autre extrême, de vouloir réduire l'ES à n'être qu'un système déviant par rapport à la norme scolaire. Nous tentons ainsi d'éviter les impasses dans lesquelles nous engagerait une comparaison des systèmes de EO et ES à l'aune des concepts fournis par la ddm. Cette dernière démarche serait à rebours de la nôtre. À nos yeux, elle présenterait surtout le risque d'ériger les théories de la ddm en normes de doctrine, et par là même de les rendre difficilement falsifiables. En une formule simpliste, nous dirons que nous cherchons plus à comprendre ce qui se passe en ES qu'à fournir des explications toutes faites en référence à ce ne nous croyons qui se passe en EO. Pour nous, et par principe, l'explication des phénomènes didactiques observables ici ou là doit faire appel aux mêmes lois. Nos observations de l'ES, qu'elles convergent ou non avec celles de l'EO, doivent nous aider à mieux comprendre la ddm.

Nous partons de la définition de la didactique des mathématiques comme l'étude de la diffusion des savoirs mathématiques. Ici nous nous restreignons à cette diffusion dans le système d'enseignement et en particulier dans cette frange qu'est le système ES. Cette étude se fait à partir d'une institution : un groupe de recherche se consacrant aux questions d'enseignement des mathématiques dans l'ES. L'étude de la diffusion des savoirs mathématiques se trouve par là même étroitement associée à la diffusion des savoirs de didactique des mathématiques[1].

---

[1] Il y a ici pour nous un enjeu majeur parce qu'il oppose les intérêts respectifs des institutions de recherche et celles de formation, ce qui, il ne faut pas se le cacher, rend leur convivialité difficile.

Nous devons faire la part des choses entre ce qui a trait aux ignorances de la ddm elle-même et ce qui relève de notre méconnaissance du système de l'ES (et par contre coup de notre méconnaissance du système EO tout entier). En effet, dans nos études, nous sommes confrontés à ces deux sources de questionnements sans qu'il soit toujours facile de les distinguer nettement. Nous partons de l'idée banale que le système d'enseignement est complexe et non préhensible directement dans sa totalité. Je répète, ce qui nous intéresse n'est pas tant l'enseignement spécialisé dans ce qu'il aurait de spécifique, que ce que ce système nous apprend en matière de didactique des mathématiques et en quoi il nous oblige à compléter, voire réviser nos connaissances en ddm. Nos différentes contributions à ce séminaire présenteront ainsi des informations sur divers plans et quelques articulations que nous pouvons faire entre eux.

Ddmes : première présentation du groupe, ses insertions, son concept de travail

Le groupe Ddmes[2] s'est développé dans une petite institution et un peu à l'écart. Pour qu'il trouve pleinement son statut d'institution de recherche, il tente de se joindre en réseau avec d'autres groupes sur le plan international. Un embryon de tel réseau s'est constitué à l'occasion de la XIe école d'été de corps 2001, avec, pour le moment, du côté français la participation de Mmes I. Bloch, V. Durand-Guerrier, P. Masselot et M.-H. Salin, et du côté québécois Mmes J. Giroux & G. Lemoyne. Une des fonction de notre intervention au séminaire national, puis, nous l'espérons lors de la XIIe école d'été de DDM est d'élargir ce réseau. I. Bloch et M.-H. Salin vous présenteront ce qui s'ébauche de leur côté.

Hélas

Si la présentation du groupe Ddmes était valable en mars 2003, elle ne le sera plus dès l'été 2004 ; de malheureuses circonstances font que je glisserai dans mes descriptions certaines phrases à l'imparfait. En effet, l'institution qui nous héberge, la Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (Hepvd) a décidé de ne plus nous accorder son soutien. Ddmes aura donc vécu 8 années, entre 1996 et 2004. Un nouveau groupe est en voie de se constituer en dehors de la Hepvd ; il se nommera autrement et sera redéfini. Les idées maîtresses qui nous appartiennent en propre, notamment celle d'interroger la ddm à partir de l'étude de l'ES, celle de coordonner et concilier investigations et recherches, celle de maintenir un réseau de collaborations directes avec les institutions resteront au cœur du projet du groupe. Par contre et puisque la direction de la Hep vaudoise pense qu'elle peut se passer de nos apports, nous nous affranchirons totalement des contraintes de formation pour nous consacrer encore plus à la recherche en didactique des mathématiques.

Définition du groupe

Ddmes a pour but de promouvoir la recherche en didactique des mathématiques sur le terrain de l'enseignement spécialisé (ES). En tant qu'entité :

a) Ddmes aura été hébergé dans un lieu de formation des enseignants : la Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (HEP Vd), et tout particulièrement la section de

[2] Pour chacun des membres de notre groupe, nous indiquons volontairement la diversité de ses attaches institutionnelles. Nous donnons ici une légende des sigles suisses utilisés. **Unige, Unil, Unine** : respectivement Université de Genève, de Lausanne et de Neuchâtel. **Hepvd** : Haute école pédagogique du canton de Vaud (Lausanne). **Irdp** : Institut de recherche et de documentation pédagogique (Neuchâtel), **ES** : Enseignement spécialisé, **EO** : Enseignement ordinaire, **Rp (Pré-de-vert)**, Responsable pédagogique de l'institution Pré-de-vert (Rolle). **Ddmes** : Groupe de recherche de didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé (Lausanne) - tous les intervenants du séminaire, table ronde exceptée, en font partie.

l'enseignement spécialisé (ES). Ddmes est un groupe de référence pour ses membres. Ddmes échangeait avec l'institution qui l'hébergeait.

b) Ddmes encourage, supporte, promeut et encadre des actions d'exploration et d'expérimentation sur le terrain de l'enseignement spécialisé. Ce travail comprend un travail à trois niveaux au moins : au niveau théorique, en référence aux concepts de la ddm ; au niveau problématique, en délimitant et organisant les interrogations que nous portons sur la ddm dans l'ES ; et enfin au niveau expérimental en pilotant nos expérimentations sur la base de raisonnements interprétatifs.

c) Enfin, Ddmes rend compte de ses travaux et promeut la recherche de ddm sur le terrain de l'ES dans le cadre d'échanges entre chercheurs de la ddm.

Actions du groupe

Ddmes récolte les données d'observation (exploratoires et/ou expérimentales) ainsi que des résultats de recherche que lui livrent ses membres.

À l'interne :

- Il engage ses activités sur une recherche commune qui constitue le cœur des activités et échanges au sein du groupe. Les expériences se font sur le terrain, dans des institutions et en collaboration avec des enseignants qui ne font pas nécessairement partie de Ddmes mais qui bénéficient ainsi des échanges, et ce, en prise directe avec certaines de leurs préoccupations. Les élèves qui travaillent avec nous bénéficient eux aussi de la possibilité de faire l'expérience de mathématiques un peu différentes de celles que leur réserve le cadre scolaire, et ils ont l'occasion de rencontrer de nouveaux interlocuteurs pour les mathématiques.
- Il encourage et encadre le travail exploratoire de ses membres (investigations) soit spontanées, soit menées en marge des recherches du groupe. Il favorise leur relation et leurs discussions et incite chacun à s'en inspirer dans ses propres explorations.
- Il encourage l'explicitation, l'examen et la discussion des raisonnements qui sous-tendent nos actions. Il oriente et organise les questionnements de chacun.

Ddmes maintient une certaine pérennité à cette fonction de recueil d'interprétation et d'incitations exploratoires. Il est né en 1996, n'est pas issu de rien, et, dès l'été 2004, il migrera ailleurs sous une autre forme.

À l'externe :

- Il favorise le travail de communication : séminaires, cours, colloques, congrès, articles.
- Il sert de référence à la formation, en particulier à la formation dans la Hep Vd, à la recherche dispensée à la section des sciences de l'Education de l'université de Genève ainsi qu'au département de psychologie de l'université de Lausanne.
- Il encadre et juge des travaux de mémoire d'enseignants en formation, il en diffuse les résultats auprès de ses membres, et, le cas échéant, en offre des prolongements.

Concept de travail : recherches et investigations

Ddmes permet la rencontre et la collaboration directe ou indirecte d'enseignants (tant EO que ES, du primaire ou du secondaire), de formateurs et/ou de chercheurs. Le travail du groupe consiste en trois volets. Au cœur de notre travail, sont les recherches que nous menons en commun. En périphérie, nous avons deux autres types d'activités. Le premier consiste en un travail théorique et conceptuel nécessaire au pilotage de notre recherche et à la diffusion de nos résultats et observations. Ce travail est à la fois conceptuel et inférentiel. Son but est essentiellement de cerner nos ignorances, d'organiser nos questionnements didactiques (id est tant mathématiques que d'enseignement), de faire avancer notre compréhension des phénomènes que nous étudions et pour ce faire de stimuler notre imagination exploratrice et expérimentale. Le second type d'activité périphérique est celle d'explorations et d'expériences que chacun est amené à faire occasionnellement sur le terrain de ses activités, expériences que nous relatons soit lors de nos rencontres soit par échanges de courrier. Cette distinction rejoint celle, plus générale, que fait Ch. S. Peirce entre pragmatisme et pragmaticisme. Selon J. Chenu :

> « *Au sens large, le pragmatisme consisterait à rechercher le sens d'une hypothèse ou de n'importe quelle idée, dans ses conséquences pratiques, sans autre spécification. Au sens strict, le pragmaticisme concernerait essentiellement les conceptions scientifiques et on entendrait par là leurs effets pratiques prévisibles, ceux qui seraient susceptibles de se manifester dans une recherche expérimentale.* »[3]

Comme je l'ai expliqué en détail à la Xe école d'été de ddm (Conne 99), c'est bien par des raisonnements (expérimentaux) que nous établissons le lien entre les deux. Il nous paraît donc nécessaire de raisonner et de mettre le plus possible à plat nos inférences. Leur mise à l'épreuve sur le terrain fait que ces raisonnements ne sont pas d'emblée ciblés sur une seule thématique, un seul concept, ni même un seul agencement théorique mais que nous avons à faire avec une sorte de puzzle. Nos recherches évoluent et nous marquons cette évolution en exhibant à chaque fois un éclairage particulier. Ici nous allons les présenter sous l'angle de la compréhension de ce qu'on peut entendre par *milieu*. Nous avons mis cette question à l'ordre du jour et avons tenté de développer quelques idées à son propos. Mais en amont comme en aval (parce que notre groupe ne cesse d'explorer), notre problématique se focalise tour à tour sur diverses thématiques.

Une recherche

Je voudrais maintenant présenter le travail du groupe en procédant à une séquence de plans, dans un mouvement de contre-plongée allant du cadre de nos références institutionnelles vers l'objet même de notre expérimentation. Chacun de ces plans renvoie à l'un ou l'autre des articles qui suivent. Partant de nos références théoriques les plus générales, je vais décrire ensuite le cadre de nos interventions dans l'ES, puis je présenterai notre problématique de travail par un exemple de parcours thématique. Ceci nous introduira à la recherche que nous avons choisie de présenter ici. Je définirai alors le schéma de notre expérimentation, puis le contenu de celle-ci en le situant dans la transposition didactique de l'enseignement de la géométrie et en indiquant comment nous nous y sommes pris pour explorer le milieu de cette activité de géométrie.

Notre manière de faire référence aux théories de la ddm et les prolongements que nous tentons de leur donner

Dans le titre de ces actes, le terme « théories » est au pluriel[4]. Bien que la ddm soit encore pauvre en théories abouties, et que les références se fassent massivement aux plus connues d'entre elles, il n'en reste que notre domaine fourmille de théories fragmentaires. La recherche ne peut se faire sans et c'est à une telle pluralité là que j'entends faire signe. Comme tous chercheurs, nous devons assumer une part de la théorie à laquelle nous référons et ne pouvons nous contenter des constructions de nos collègues, aussi merveilleuses et abouties soient-elles. Nous sommes donc amenés à conceptualiser, schématiser, inférer. Voici quelques exemples succinctement présentés :

---

[3] J. Chenu, *Peirce, textes anticartésiens. Présentation et traduction*, Paris, Aubier, 1984, p. 149.

[4] De même, c'est pour marquer un écho aux questionnements des chercheurs dans la TS tels qu'ils sont exposés dans trois cours sur la TS donnés à la XIe école d'été (2001) que nous avons utilisé le terme de « contingence » dans le titre générique de cette session du séminaire national de mars 2003.

1° Nous sommes amenés à questionner l'échec en ce qu'il marquerait la pratique enseignante en ES. Nous nous proposons de distinguer et articuler *échec-enseignement* et *échec-apprentissage*[5] (cf. plus loin le paragraphe : parcours thématiques et éléments de transposition didactique, ainsi que la contribution de J.-M. Favre). Nous posons alors qu'un échec d'apprentissage ne veut pas dire un non-apprentissage. L'échec d'apprentissage se manifeste par des erreurs, des conduites inappropriées, des assimilations déformantes, des effets de sur-généralisations, des effets et de jeux de contrats, etc. On ne peut pas dire que ce soit vide. Nous dirons donc qu'un non-apprentissage n'est qu'une signification qu'on veut bien donner à certaines formes d'apprentissages. De la même manière, nous ne dirons pas plus que des élèves en échec ne retiennent rien de ce qu'on leur enseigne, ni qu'ils seraient indisponibles à l'enseignement qu'on leur prodigue. Nous nous demandons alors comment faire pour que les formes d'apprentissages observées dans le cadre de l'Es puissent prendre d'autres sens que celui de non-apprentissage.
2° À un autre niveau, nous venons à questionner les interactions de connaissances dans une situation didactique et au lieu d'attribuer aux sujets leurs conduites, ou en faire les signes de la manière dont se déroule l'enseignement et l'apprentissage (réussite/échec), nous en faisons un indicateur de l'état du milieu, et en particulier de la sémiotisation qui en est faite dans les échanges (cf. paragraphes : expérimentation et parcours thématiques ci-dessous, ainsi que la contribution de C. Tièche).
3° Cette question nécessite une mise au point sur la transposition didactique de la géométrie à la fin du primaire en Suisse romande - cf. paragraphe ci-dessous.
4° Du point de vue du contexte institutionnel, nous nous inspirons de la théorie anthropologique[6]. Pour l'essentiel de ce point, je renvoie les lecteurs à ma contribution à la Xe école d'été à Houlgate en 1999. Je me contenterais ici de mentionner à titre d'exemple une question. On sait que Y. Chevallard a proposé de penser la hiérarchie des degrés scolaires et ordres scolaires comme une sorte de cumul : pour une institution donnée, l'ensemble des degrés scolaires inférieurs ou prérequis serait l'école de cette institution. Ce schéma est intéressant dans le cas de l'école ordinaire qui est fortement hiérarchisée. Trouve-t-on quelque chose d'équivalent dans le cadre de l'Es qui est un système beaucoup plus éclaté et qui se diversifie plus horizontalement que sur une graduation ? Au fait, y aurait-t-il un quelconque intérêt à se poser une telle question ? Que peut-on attendre de l'étude d'une telle question ? Ces questions se prolongent vers les notions d'organisations mathématiques et didactiques de la théorie anthropologique.
La recherche que nous présentons à ce séminaire est à l'enseigne de la notion de *milieu*, telle qu'elle a été introduite dans la TS. Toutefois, nous ne sommes pas certains de bien la comprendre et nos discussions témoignent par leurs hésitations de nos nombreux doutes, qui transparaissent aussi dans nos différentes contributions à ce séminaire. Raisonnons sur quelques alternatives qui se présentent à nous.

- Nous jetons tout ce qui concerne cette notion parce que trop confuse pour notre groupe.
- Nous associons ces éléments de la TS à des éléments puisés à d'autres théories qui nous semblent indispensables. Par exemple nous disons que le milieu est sémiotisé, ou bien qu'il contient les représentations des sujets de la situation.

[5] G. Brousseau a consacré quelques travaux à l'échec. Nous nous sommes inspirés pour l'idée d'échec d'un enseignement à un article paru en 1988 dans un numéro du *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, vol. II, n°2 : **Les différents rôles du maître**, p.15-23, et plus particulièrement, le tableau p. 23.
[6] Y. Chevallard, Esquisse d'une théorie formelle du didactique in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, C. Laborde ed., Grenoble, La Pensée Sauvage, 1988.

- Nous cherchons à traduire la partie théorique de la TS concernant le milieu dans une autre théorie, éventuellement plus générale[7].
- Nous développons notre théorie de ce que nous croyons comprendre avec ces concepts, par exemple nous introduisons le contraste entre *milieux révélateurs* et *milieux d'exploration*, ou encore nous parlons d'*extension du milieu* et/ou d'*enrichissement du milieu.*
- Nous nous attelons à une étude plus serrée de la TS afin de mieux la comprendre et de nous faire plus rigoureux en nous astreignant par exemple à des modélisations plus ou moins poussées. Nous fixons mieux les termes, leurs définitions et tentons de nous y tenir.
- Nous ouvrons la métaphore de milieu en allant puiser dans d'autres disciplines, par exemple la biologie, l'écologie.
- Etc.

Dans nos discussions, quelquefois touffues, nous sommes amenés à faire un peu de tout cela. Comme tout le monde le fait, je présume. Avec un peu de recul, nous pouvons schématiser le problème de la manière suivante. Nous trouvons dans les théories de référence des propositions : par exemple, issue de la TS et des recherches associées, tout ce qui concerne la notion de *milieu*. Nous nous demandons ce que nous pourrions en faire ; deux directions s'offrent à nous :

- soit nous demander ce que ces éléments théoriques expliquent de ce que nous connaissons déjà, ou de ce que nous pouvons observer par ailleurs ;
- soit nous demander ce que nous pourrions produire de nouveau en nous appropriant ces notions.

Si nous choisissons la première voie, nous tenterons de circonscrire un domaine de réalité dans le cadre de la théorie ; si en revanche nous choisissons la seconde voie nous tenterons au contraire d'ouvrir cette théorie à la production de quelque chose de neuf. En ce qui nous concerne, et vu l'option que nous avons prise d'interroger la ddm à partir de l'ES plutôt que d'expliquer l'ES avec la ddm, nous travaillons dans la seconde perspective. Une telle ouverture nous met dans une position que je pourrais qualifier d'heuristique, pour laquelle des bribes de théories, en parties originales, soutiennent nos inférences et nos décisions expérimentales. Pour ce séminaire, nous voudrions essayer de rendre compte de la manière dont nous les articulons les unes aux autres autour du même travail expérimental.

Cadre institutionnel du terrain

Pour produire des recherches didactiques, nous avons besoin d'observer des séances d'enseignement effectives. Nous montons une expérience qui sera pilotée en classe, ou avec un petit groupe d'élèves. Le pilotage se fera de manière adaptée à l'univers institutionnel et au terrain de notre intervention. Analytiquement, il s'agit pour nous de séparer ce qui a trait aux institutions de ce qui a trait au didactique proprement dit, et de regarder comment ces deux dimensions s'articulent. Or une telle articulation tombe elle-même dans le champ de la ddm.

EO et ES sont deux systèmes très contrastés. Comme le montre la communication de C. Cange ci-dessous, le système du canton de Vaud, qui ne couvre une population d'un peu moins de 650.000 habitants est en lui-même très touffu et nécessite une description précise et détaillée[8]. La question que j'avais déjà posée lors de la Xe école d'été de Houlgate est de

[7] A. Muller et son idée d'analyse sémiotique a priori in : *Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique*, à paraître 2004.

[8] Une statistique récente, publiée dans la presse locale chiffre à 3.5% le taux d'élèves fréquentant l'ES dans le canton de Vaud. Les disparités inter-cantonales sont très grandes puisque pour le canton de Neuchâtel ce taux n'est que de 0,5%, alors que la moyenne de ces taux pour les cantons de Suisse romande est de 1,5%. Ces disparités marquent les différences

savoir si ce cadre institutionnel a un impact jusqu'au didactique. Nous faisons l'hypothèse que oui. Qu'est-ce qui nous amène à le penser[9] ? Faisons succinctement l'exercice de contraster certaines représentations que nous avons de l'ES et de l'EO, et ce, sur divers aspects. Voici une première énumération de contrastes. Qu'il soit bien entendu que de telles descriptions auront une valeur heuristique plutôt qu'explicative. L'exercice nous permet d'identifier des propositions falsifiables et de repérer des points de débats. Notre intention n'est pas de les ouvrir tous. Nous cherchons à nous assurer de ne pas oublier ce que nous ne pouvons que laisser en arrière plan.

EO	ES
Univers homogène	**Univers composite**
Les divers établissements scolaires ne sont pas des institutions en eux-mêmes.	Les établissements sont des institutions dévouées à des aspects particuliers, et adaptées aux types de handicaps (physiques, psychiques, sociaux). Institutions et classes adaptées à un certain type d'élève.
Principe d'équivalence des classes au-delà des établissements scolaires.	Les institutions font partie d'un réseau de prises en charges fortement marqué par les types de prises en charges et les sites régionaux du réseau.
Norme.	Exceptions.
Organisation verticale très marquée	**Organisation horizontale marquée**
Cycles d'enseignement, degrés scolaires, points de bifurcation de filières, programmes et moyens d'enseignements très précisément organisés selon ces filières.	Organisation verticale floue, due entre autres à l'étalement du temps d'enseignement (cf. C. Cange et J.-M. Favre), aux faibles effectifs d'élèves, à leurs prises en charges par des soutiens divers, et à l'individualisation de l'enseignement.
Lien entre diversité des filières et contenus, donc les filières croisent des catégories didactiques.	Diversité horizontale des institutions sur des catégories non didactiques. Dans ces institutions, les cohortes d'élèves ne sont pas forcément distribuées en classes comme à l'école.
Établissement	**Institution**
Il y a un lien très étroit et transparent entre	Les institutions hébergent des classes, ce ne

d'organisation du système scolaire, elles-mêmes influencées par des facteurs tant historiques et géographiques que politiques et financiers.

[9] L'article de J.-M. Favre ci-dessous apporte des éléments de confirmation, mais pour cette introduction, je tiens à examiner quelques arguments an aval de nos travaux.

l'élève, son établissement, et le système scolaire. La géographie n'a en principe pas d'incidence didactique. Si l'élève déménage, il déménage d'école. Sauf erreur, aucune école officielle du canton de Vaud n'est un internat. Les conseillers pédagogiques agissent principalement au niveau des classes et ont les enseignants comme interlocuteurs privilégiés. La prise en charge des élèves au-delà des horaires est modeste.	sont pas des écoles. Le lien entre l'individu et le système scolaire est distendu. En premier lieu, le système ne le considère pas seulement comme un élève, mais comme un individu ayant tel ou tel handicap etc. Ensuite, l'élève est dirigé vers une institution qui correspond à son statut. Si l'élève déménage, il ne déménagera pas forcément d'institution. Un corps d'inspecteurs établit les liens entre l'élève, ses parents, le dispositif de prise en charge et l'administration de l'instruction publique. Les institutions offrent une prise en charge diversifiée, en particulier éducative, au-delà des horaires scolaires, parfois l'élève sera en internat, mais pour des motifs éducatifs ou légaux plus que géographiques.
Classe La classe est avant tout un lieu didactique. Il n'y a que peu de consultations possibles au sein des établissements, elles sont exceptionnelles. Les équipes enseignantes ne sont pas répondantes devant d'autres équipes, elles prennent en charge la fonction éducatrice. Un système de prise en charge est mis en place pour la gestion des cas exceptionnels, son action est temporaire.	**Lieux** Les sujets ont affaire à des enseignants, des éducateurs, et divers thérapeutes. La classe est un lieu de référence pour les élèves, lieu où l'on vient les chercher, les prises en charges périscolaires sont la règle, elles peuvent interrompre le travail de l'élève, la classe n'est donc pas seulement un lieu d'enseignement. Il existe aussi des lieux dits : *lieux de vie* qui sont gérés par des éducateurs non enseignants et ce en tout temps. Les élèves ont affaire à des équipes d'intervenants dont un enseignant responsable. Une institution s'organise autour de la coordination de fonctions enseignantes, éducative et thérapeutiques. Cela peut aller jusqu'à la définition d'équipes pédagogiques, éducatives, et thérapeutiques, ou, de manière transverse selon des réseaux.

Élèves	Élèves
On se représente les différences individuelles par le biais d'idées communes : styles cognitifs, ou des compétences, etc.	Les élèves sont pris en charge dans leurs différences et spécificités, dans la singularité du profil de chacun, en particulier, pour ce qui concerne les disciplines scolaires, dans le contraste de ses possibilités et de ses goûts.
Toute gestion individualisée de l'enseignement est secondaire, et s'inscrit dans un cadre normatif précisément délimité.	On s'autorise de ces considérations pour s'écarter des normes scolaires et éducatives.
	Un élève a affaire à différents spécialistes. On établit des projets pédagogiques, éducatifs et thérapeutiques pour chaque élève. En conséquence de quoi, de manière officielle dans l'institution, on tient compte de son histoire personnelle et l'on s'inquiète de son avenir.
	Les questions de réintégration, à échéance plus ou moins lointaines, pèsent fortement sur les décisions didactiques (dans ce cadre, le poids de l'échec - cf. J.-M. Favre).
	Etc.

Le caractère heuristique de telles affirmations les rend sujettes à caution et appelle à des examens rétrospectifs. Elles ont aussi une incidence sur nos recherches elles-mêmes, dans un mouvement prospectif d'interprétations didactiques. Toute action de recherche sur le terrain produit des effets qui le modifient. Pour être acceptée, notre intervention devra s'inscrire peu ou prou dans le projet de l'institution qui nous accueille. Si nous travaillons dans une institution de l'enseignement spécialisé une recherche, même strictement didactique, ne s'adressera pas seulement aux enseignants de l'institution, mais aura un impact sur les échanges entre les diverses équipes. Le caractère didactique ne manquera pas d'être perçu par l'équipe pédagogique comme quelque chose qui la concerne plus particulièrement et qui peut, le cas échéant la distinguer. Par exemple dans les institutions de l'ES, les thérapeutes, et tout particulièrement les médecins, ont une légitimité sociale forte du fait de pouvoir se référer à des institutions savantes reconnues. Le chercheur en ddm, qui plus est s'il est universitaire, permet donc à l'équipe enseignante de faire valoir ses savoirs savants propres. D'autres considérations portent plus sur les contenus et leur pertinence, le champ que nous pouvons prendre vis-à-vis d'un programme et d'une organisation prédéfinie d'activités mathématiques[10].

[10] Cf. *Interactions de connaissances et investissements de savoir* (Conne 2003) ainsi qu'à l'article ci-dessous de J.-M. Favre.

Par ailleurs nous savons d'expérience les discussions que ne manquent pas de soulever parmi nos collègues didacticiens, la présentation d'un tableau comparatif comme ci-dessus. Voici, selon J. Giroux, une jolie évocation de ces débats :

Il faudrait écrire une petite pièce de théâtre entre ES et EO, peut-être arriverions-nous mieux à montrer certaines impasses... ils pourraient d'ailleurs parler d'un de leur tiers : la ddm. ...

ES : - « Es-tu sur de ton homogénéité ? Considérant ce qui se passe chez moi, j'ai du mal à croire à tes descriptions. »

... alors que EO dit à ES quand celui-ci prend la parole (ce qui est peu fréquent) :

EO :- « Es-tu sur de ta spécificité ? Parce que considérant ce qui se passe chez moi, je ne vois pas ce qui t'est proprement spécifique ? »

Chacun tolère peu la question de l'autre. EO ne tolère pas que ES la soupçonne, en invoquant l'argument de l'homogénéité, de banaliser ses récits. EO aurait-il un complexe sur son homogénéité alimenté, par ailleurs, par la spécifique que d'aucuns reconnaissent à ES ? ES, lui, ne tolère pas que EO cherche à l'assimiler en mettant en doute sa spécificité. ES ne veut être assimilé ni à l'homogénéité de EO, ni à la diversité que EO revendique malgré tout.

Notre problématique : exemple d'un parcours thématique

1° De l'étude de la multiplication à celle du temps didactique.

Pour illustrer la manière dont le groupe travaille et offre à chacun de ses membres un cadre pour mener à bien les études qui l'intéressent, prenons pour exemple la démarche de J.-M. Favre dont la contribution présente une recherche sur le temps et l'échec dans l'ES. Notre collègue est venu à la ddm par le biais de sa formation initiale d'enseignant spécialisé. C'est une formation en emploi, ce qui veut dire qu'il avait en charge une classe. Dans le cadre de cette première formation, et pour son mémoire, il s'est donné une problématique centrée sur une approche conceptuelle de la multiplication dans sa classe qui se rapproche des activités prônées dans l'EO. Les circonstances expérimentales l'ont alors amené à s'intéresser à la calculette et, par ce biais, au statut des écritures numériques multiplicatives qui, à l'expérience, ont pris une toute autre dimension que prévue. Pour rendre compte de ce qu'il observait, la théorie de Vergnaud lui est apparue très pertinente. Après ses études au Sces, il a entrepris des études en sciences de l'éducation à l'université de Genève. Dans un second travail de recherche, pour son mémoire universitaire, J.-M. Favre a prolongé la thématique de l'introduction de la multiplication, mais cette fois dans la perspective de confronter ES et EO. Pour ce faire, il a dû développer une ébauche de théorie didactique de l'échec.

2° Erreur et restitution de savoirs.

Plus tard, tant en collaboration avec C. Cange, que lors ses activités en tant que formateur d'enseignants spécialisés, il s'est plus particulièrement penché sur le thème de l'erreur. Cette thématique de l'erreur a été choisie par le groupe Ddmes. Et nous avons procédé à une première recherche dans l'institution de Pré-de-Vert (cf. C. Cange). De mon côté, j'avais noté de la part d'élèves de l'ES des phénomènes de restitution différée, soit d'une séance à l'autre, soit d'un lieu à l'autre, soit enfin d'une tâche à l'autre lors d'une même séance. J'avais fait l'hypothèse (Conne 99, 03) que l'on attribuait peut-être à tort aux élèves de l'ES de ne pas apprendre ou retenir ce qu'on leur enseignait alors que tout ce dont nous pouvions attester était l'absence de réponses à la demande ou à l'injonction de savoir. Du point de vue de l'enseignant, ceci rendait des savoirs élémentaires non disponibles pour l'échange didactique, savoirs dont on pouvait soupçonner par ailleurs qu'ils étaient bel et bien acquis. Un jour, C. Cange nous a fait part de ses observations et de son questionnement à propos d'un élève, qui, selon lui, illustrait fort bien ce type de phénomène. Nous nous sommes donc intéressés plus particulièrement à ce cas. Pour cela, nous avons imaginé de jouer de manière paradoxale sur le contrat. L'enseignant, C. Cange lui-même, allait proposer à cet élève de travailler seul à des tâches qu'il lui fournirait. Pendant ce temps, l'enseignant travaillerait avec le reste de sa classe à d'autres tâches, et ce, de manière ostensive : avec échanges au tableau noir entre le prof, la classe et des élèves tour à tour interrogés. L'élève allait donc être mis en position de s'extraire mentalement de ce qui se passerait en classe pour se concentrer sur ses exercices. Nous avons alors pu observer et attester clairement que l'élève travaillait en même temps à sa propre tâche et à la tâche collective et qu'il intervenait même sur cette seconde scène, sans y avoir été en aucune manière sollicité. Par là même, il nous nous restituait ce qu'il retenait de la leçon collective, tout en travaillant parallèlement à la tâche qui lui avait été confiée. Il n'en accomplissait pas moins les exercices qu'on lui avait donné à faire. Libéré sans doute d'une injonction trop forte et univoque, il engageait les savoirs qu'on ne pouvait obtenir de lui par un échange usuel maître/élève.

3° Restitutions indirectes et différées supportées par le milieu.

Parallèlement, dans le travail de mémoire B. Dallüge, étudiante au Sces, qui portait sur l'enseignement des mathématiques à une élève mutique, nous avons pu obtenir de multiples restitutions, indirectes ou différées de ce que cette élève avait appris dans trois lieux où elle travaillait les mathématiques : sa classe, un atelier de jeux et enfin les séances de travail que je menais avec elle et une de ses camarades. Dans un article sur l'interaction de connaissances et l'investissement de savoirs, j'ai réexaminé cette question sous l'angle des dispositifs de diffusion des connaissances et savoirs dans l'institution[11]. Le groupe a repris ce thème et s'est alors intéressé aux indices de sémiotisation du milieu dans la dynamique des échanges didactiques. Nous avons tenté d'articuler cette préoccupation avec une préoccupation de formation. Il nous a semblé en effet qu'en nous intéressant de cette manière au milieu, nous trouverons des moyens pour inférer ce que les élèves ne nous restituent pas directement, comme si nous pourrions tout aussi bien questionner les indices laissés les élèves dans le milieu que les interpeller directement. Les retombées d'une telle recherche pourraient alors consister à offrir aux enseignants ES des moyens de s'inspirer avec profit des manuels de l'EO.

C'est une recherche sur ce thème que nous présentons à ce séminaire.

Schéma d'expérimentation

Du point de vue expérimental, depuis ma recherche de doctorat (1978-1980), je me suis donné le schéma suivant. Je distinguerai alors deux fonctions dans l'expérience[12] que je désigne par *observation* et *pilotage*. Ces deux fonctions ne sont pas exclusives et elles ne sont pas, l'une le fait du chercheur, et l'autre celui de l'enseignant. Le chercheur peut les assumer toutes les deux[13]. Toutefois il convient de ne pas les confondre. Décrivons-en quelques figures (je ne cherche pas ici à être exhaustif).

Si je me rends en classe, sans autre préparation et que j'observe l'enseignement qui s'y donne, du point de vue du chercheur que je suis, il s'agit bien d'une expérience dont le pilotage est confié à l'enseignant et que, pour ma part, j'observe. Je me trouve dans un autre cas de figure si, à l'instar de ce que J.-M. Favre nous raconte dans son article, je mets sur pied une suite de leçons dont je confie le pilotage à des enseignants et que je viens en observateur. Certes, dans chacun de ces deux cas, la responsabilité de l'enseignement reste confiée à l'enseignant. Confier un enseignement mis au point par le chercheur à la responsabilité d'un enseignant est

[11] Ibid. (Conne 2003).

[12] Je préfère dire expérience plutôt qu'expérimentation car mon schéma ne relève pas du contrôle méthodologique de la recherche.

[13] Cela correspond à ce que décrit J. Bruner dans un article qui m'a beaucoup impressionné : **Le rôle de l'interaction de tutelle dans la résolution de problèmes** (197). Pour la traduction française, in *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire.*, trad. M. Deleau, Puf 1987.

le modèle sur lequel fonctionnait le Corem. Toutefois on peut procéder encore autrement. Par exemple, si nous nous intéressons à la dynamique de situations ouvertes, la responsabilité du pilote (enseignant) sera différente puisqu'elle ne comportera pas la réalisation d'un objectif prédéfini. Etc[14].

Dans la recherche que nous présentons ici, nous étions deux chercheurs. Notre objectif était « d'explorer le milieu », voire de « manipuler le milieu afin de produire quelques événements » ou encore « de jouer avec le jeu dans lequel nous avions engagé les élèves à jouer »[15] etc. À tour de rôle, et avec un esprit non dénué d'émulation, l'un de nous se chargeait de piloter l'expérience tandis que l'autre jouait le jeu d'observateur, quitte à ce dernier s'inspire de ce qu'il aura pu observer lors d'expérimentations ultérieures. Un tel schéma très souple nous permet d'intégrer nos modes de faire fort distincts, dus au fait que nos expériences professionnelles ne sont pas les mêmes[16].

Les expérimentations du Corem et les observations d'enseignements effectifs en classes sont deux configurations expérimentales très prisées actuellement en ddm[17]. Dans le Corem, où le chercheur a préalablement modélisé les situations étudiées, on étudie le milieu *du jeu*, dans le cas des observations d'enseignement, où le jeu sous-jacent doit être inféré, on observera la *structure* du milieu. D'un certain point de vue, on peut donc opposer ces deux modèles de recherche. Pourtant elles se rejoignent sur le fait que dans les deux cas, les fonctions de chercheur et de pilote sont bien séparées : une instance de recherche et une instance d'enseignement. Sur ce point, notre recherche diffère, puisque nous prenons en charge le pilotage. Nous observerons de l'intérieur les interactions dans la triade élève-milieu-pilote.

Cela dit, nous étudions le milieu, pouvons-nous le définir comme étant l'*antagoniste du sujet* ? En d'autres termes quelles propositions de la théorie de situations (TS) pouvons-nous reprendre au compte de notre recherche ? Pour nous, la TS est sans conteste une grande source d'inspiration. Dans nos recherches pouvons-nous dire qu'elle vaut plus que cela ? Examinons deux positions que nous pourrions adopter vis-à-vis des expériences que nous avons pilotées en classe. Pour nous qui ne sommes pas naïfs de nos références théoriques, et de la TS en particulier, nous devons penser ce que nous assumons de la théorie des situations pour les questions qui nous intéressent. Par exemple, cette théorie construit son modèle autour d'une connaissance visée et d'un jeu dont la stratégie gagnante devra mettre en oeuvre la dite connaissance. C'est dans ce cadre-là, d'une modélisation par un jeu que des propositions comme : « le milieu est l'antagoniste du sujet [18]» ou encore « le maître joue avec le jeu de l'élève », etc. prennent leur sens. Si maintenant nous n'assumons pas de construire nos situations comme des jeux, quel sens pourrait avoir de telles propositions ? Nous pouvons tous affirmer sans conteste possible que rapportées à certains contextes d'observations ces propositions ont du sens et semblent très pertinentes. Ainsi, dans la description de notre recherche sur le puzzle, l'activité scolaire prévoyait de demander aux élèves de produire le plus de quadrilatères possible en adjoignant différentes pièces triangulaires. La lenteur du travail des élèves nous a fait penser qu'ils ne savaient peut-être pas très bien ce que l'on

[14] Cette idée qui me semble caractériser la recherche en ddm. J'ai développé cette thèse lors d'un cours à l'université de Berne, 2003.

[15] J'emprunte la formule « Jouer avec le jeu de l'élève. » à G. Brousseau, et j'ai développé cette idée dans la conclusion de : **Faire des mathématiques, faire faire des mathématiques et regarder ce que ça donne**, in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, G. Lemoyne et F. Conne eds., 1999, Presses de l'université de Montréal.

[16] Deux d'entre nous sont des enseignants spécialisés, deux sont enseignants de l'EO, l'un au primaire, l'autre au secondaire et n'avaient jusqu'ici jamais travaillé dans le cadre de l'ES, deux autres sont chercheurs.

[17] À une époque, G. Brousseau les qualifiait d'observation et d'observation provoquée.

[18] C'est ce système antagoniste du sujet que nous avons proposé d'appeler milieu (p. 320), in G. Brousseau, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9-3, pp. 309-336.

entend par quadrilatère ; des jeux de nominalisation et de désignations (bords, côtés sommets, pointes, angles, points) nous ont montré en tous les cas des élèves passablement hésitants et vite déconcertés. En modifiant la tâche et en instaurant un jeu de type domino, où les joueurs doivent adjoindre à un quadrilatère un triangle de sorte que la figure ainsi transformée reste un quadrilatère, nous avons pu constater que dans ce nouveau contexte, la notion de quadrilatère ne posait plus aucun problème. Le milieu ainsi modifié et enrichi par notre nouvelle consigne supportait donc mieux les connaissances des élèves que le milieu de la tâche originelle. Voilà sans conteste possible ce que nous avons pu obtenir en nous donnant le mot d'ordre : « jouer avec le jeu de l'élève »[19].
Nous pouvons donc partir d'un tel résultat expérimental et nous dire que si tel est le cas, il devrait être possible d'inférer une modélisation de notre expérience en termes de jeu. Ce serait une façon d'interpréter ce que G. Brousseau a exposé comme étant un axiome de la TS, à savoir : *Axiome 1. Pour toute connaissance, il est possible de construire au moins un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance, et dont elle détermine pourtant une stratégie optimale. / Une situation est une association [interaction (Jeu-Joueur), Connaissance]*[20]. Nous chercherions ainsi des clés pour une modélisation idoine de nos observations. Dans ce cas, nous prendrions cette pertinence que nous reconnaissons à certaines propositions de la TS comme exprimant la *vérité de cette théorie*, et nous chercherions en toute logique à rendre compte de nos observations dans ce *cadre de vérité* là. On peut dire que c'est en gros ainsi que procèdent beaucoup de ceux qui observent des situations de classes pilotées par des enseignants, eux-mêmes non tenus à penser leurs actions dans le cadre de la TS. Les observateurs tentent alors de produire certains indicateurs. Ils recourent à des instruments comme *l'analyse de la structuration du milieu*, la *recherche de ruptures de contrat*, *l'observation des moments de reprise*, etc. Cette manière de faire revient à s'autoriser d'une théorie qui, dans et par le développement de ses propres propositions, comprend les objets didactiques comme *milieu, jeu, contrat* etc.
Mais nous pouvons partir d'un autre point de vue et nous dire que le rôle de la théorie est plus de nous indiquer quels sont les objets auxquels porter notre attention, que de nous dire exactement et complètement, quasiment tout de go, ce que sont ces objets. Nous pouvons donc nous dire que la théorie est pertinente parce qu'elle met le doigt sur les bons objets, dont elle donne en outre une construction possible, mais qu'elle n'épuise pas d'emblée l'étude et la compréhension des dits objets. Dans ce cas, nous prendrions cette pertinence que nous reconnaissons à certaines propositions de la TS comme exprimant la *réalité des objets* mis en évidence par la TS plus que la *vérité* de cette dernière. Alors qu'auparavant nous serions partis à chercher à rendre raison de nos observations dans le cadre de la TS prise comme théorie de référence, dans cette seconde perspective interprétative, nous chercherons à rendre leur réalité aux objets et entités que sont le *milieu* etc., objets certes premiers dans la TS mais dont elle ne saurait prétendre avoir l'exclusivité, à moins de se déclarer d'emblée complète et définitive sur ces questions.
Je risquerai une image. Nous avons entrepris une exploration le long d'une rivière, nous rencontrons une confluence, peut-être que notre rivière vient là se jeter dans un fleuve. Nous continuons notre prospection en aval. Libre à nous de considérer que nous sommes désormais sur le fleuve, ou que nous suivons toujours notre rivière. Finalement ce n'est ici qu'une question de nom pour les cartes. Cette seconde interprétation ne reviendrait pas pour autant à vouloir nier la confluence que nous avons rencontrée en route. Nous pouvons garder à l'esprit une interrogation : qu'est-ce donc qui, même pour nous partis d'ailleurs, nous amène à la conviction que c'est bien vrai que « le milieu est l'antagoniste du sujet », ou « que

[19] Notons qu'au Québec, J. Giroux (faculté d'éducation Uqam) projette, en association avec F. Conne, une autre voie de recherches, focalisant plutôt sur les jeux des élèves ES. La dimension sémiotique y intervient de façon centrale.
[20] Ibid., G. Brousseau, 1988, p. 314.

l'enseignant joue avec le jeu de l'élève » ? Nous pouvons chercher à répondre à cette question en remontant le fleuve, c'est-à-dire en chercher une explication, que nous pourrons toujours éprouver par la suite. Mais nous pouvons aussi bien chercher prospectivement ce que pouvons faire de ces convictions, qu'est-ce qu'elles peuvent nous aider à mettre en œuvre etc. Garder ainsi notre point de vue initial en tête aura donc valeur de confrontation de la théorie rencontrée en route.
Pour moi, ces deux positions méthodologiques sont envisageables. Celle que nous adoptons nous semble adaptée à la situation institutionnelle qui est la nôtre. Examinons cela en contraste. Résumons cela dans un tableau contrasté.

EO	**ES**
Corem	**Ddmes**
Thèse épistémologique forte	Bribes épistémologiques
Théorie qui vise à l'accomplir	Bribes théoriques
École expérimentale, petite institution qui vit en symbiose dans le grand tout scolaire. Chercheur et enseignant pilotes.	Ne peut pas s'instituer comme école, mais va visiter des lieux institutionnels de la constellation ES. Chercheurs et chercheur pilote.
Raisonnement sur l'échec d'un enseignement, reprises et effets[21].	Raisonnement ES visant à questionner la théorie élaborée dans le cadre EO.

Contenu mathématique de notre expérience : quelques données de la transposition didactique de la géométrie à l'école obligatoire en Suisse romande.

Mon propos n'est pas de faire ici une analyse de la transposition didactique de l'enseignement de la géométrie à l'école obligatoire en Suisse romande, mais d'indiquer quelques points importants ainsi que quelques ouvertures. L'exploration du milieu que nous tentons est basée sur une idée et un constat. Le constat est que les élèves de l'ES ont de piètres performances ce qui fait que dans ce système, on voit l'enseignement délaisser la géométrie au profit d'enseignement de savoirs de base, essentiellement en numération et calcul. L'idée est que si les élèves de l'ES progressent lentement dans le cursus des contenus mathématiques, et accusent des retards certains, il n'en reste pas moins qu'en tant qu'enfants et individus, ils développent des connaissances et expériences acquises par ailleurs, dont certaines dans le domaine de l'espace et de la géométrie. Nous pensons alors que la focalisation sur des apprentissages formels, dont la fonction serait essentiellement *de structuration*, pour parler

[21] Cf. note 6.

comme certains psychopédagogues, devrait être complétée par des actions didactiques ouvertes sur les expériences mathématiques acquises par ailleurs. Notre pari est alors de prendre le prétexte d'activités conçues pour l'EO et de les transposer des fins d'ouverture à l'expérience, et, par la même occasion, d'examiner les activités de l'école ordinaire sous l'angle de l'expérience qu'elles sont susceptibles de développer pour les élèves. Dans la recherche que nous présentons, nous nous proposons d'accomplir ce travail en nous donnant les moyens d'explorer le milieu. Nous tentons par là de caractériser le potentiel didactique de certains milieux et dispositifs plutôt que de nous arrêter aux potentialités cognitives des individus eux-mêmes[22].

Dans un article récent[23], j'ai proposé une nouvelle caractérisation de cette double fonction, initiatrice et organisatrice de tout enseignement, je cite :

> *« On a affaire à deux organisations : d'une part celle de l'exposé des notions, c'est-à-dire son ordonnancement et son développement, d'autre part celle de l'introduction au domaine, c'est-à-dire son ordonnancement et les stratégies de rencontre et d'exploration du champ. Dans les deux cas, on organise autre chose. On pourrait dire que dans le premier cas on organise une carte ou un ensemble de cartes et que dans le second, on organise la visite voire l'exploration des territoires représentés sur ces cartes. Mais le plus important est pour moi que la première organisation est celle d'une reconstitution, précisément l'organisation des principes d'un domaine – par exemple, la numération, ou encore la géométrie plane - à même d'en reconstituer des expériences passées et à venir, alors que la seconde est l'organisation de ces expériences mêmes. La première fait abstraction des instruments sémiotiques (en fait elle ne fait appel qu'à un appareil sémiotique réduit et fortement codifié), ces instruments qui sont bien évidemment les supports de l'expérience et de l'exploration. La seconde organisation au contraire repose sur un appareil sémiotique touffu, complexe et surtout mouvant, qui s'enrichit, se renouvelle et aussi se redécouvre sans cesse. La première organisation sert de référence et de justification à la seconde, cette dernière n'a pour elle que sa propre efficacité pragmatique, mais apporte en retour à la première la confirmation ou l'infirmation de la pertinence didactique des présupposés de la première. Dans un article maintenant ancien (Conne 1989[24]), j'ai indiqué qu'on pouvait considérer réformes et refontes des programmes comme la manifestation des remaniements constamment nécessaires pour ajuster et rendre compatibles ces deux organisations. »*

Examinons cela dans le cadre qui nous intéresse ici, le programme de géométrie aux niveaux de la 5ème et de la 6ème année d'enseignement (fin de l'école primaire, voire cycle de transition entre le primaire et le secondaire selon les cantons de Suisse romande). On y étudie, entre autres, les quadrilatères, que l'on nomme communément ici : *carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes, trapèzes, fer de lance ou cerfs-volants*. Il est possible d'établir une petite classification de ces divers objets et cela permet de s'intéresser aux propriétés géométriques et aussi à ce qu'est une définition en mathématiques. Mathématiquement parlant, les quadrilatères font partie des polygones. Dans un exposé raisonné de la géométrie, cette dernière notion précède celle des quadrilatères. À l'école primaire, on en reste tout au plus au mot " polygone " sans insister et ce n'est qu'au secondaire que l'on en fait une étude un tout petit peu plus développée. On a donc une distorsion entre l'ordre d'initiation où l'on étudie les

---

22 Nous ne nous arrêtons donc pas à un examen de leurs compétences.

23 Conne F., *Problèmes de transposition didactique*, Petit'X n°64, 2004.

24 L'articulation des contenus et des moyens et leur double nature mathématique et didactique dans l'enseignement des mathématiques et son évolution. Bulletin de l'Association Mathématique du Québec. 1989, no XXIX-3.

quadrilatères avant d'étudier les polygones et l'ordre d'un exposé des notions de géométrie plane[25].

L'école ne procéderait donc pas logiquement. Est-ce grave, ou au contraire est-ce sage ? On pourrait dire que c'est sage car le " polygone " est une notion très abstraite et générale, qui n'est pas aussi accessible que les idées de carré, de rectangle etc. La sagesse serait donc celle d'initier les élèves à ce qui semble plus accessible, pour les " préparer " à l'étude plus abstraite de la géométrie au secondaire. Pour que cette idée soit acceptable, il faut pouvoir dire si c'est bien vrai que les idées de carrés, rectangles etc. sont plus accessibles que celles de polygones et comprendre ce qui fait qu'il en serait ainsi. La réponse semble à portée de main : carré, rectangles etc. sont des noms de formes, alors que " polygone ", mis à part ses côtés rectilignes, ne désigne pas une forme particulière. Ce ne sont donc pas tant des " polygones à 4 côtés ", autrement dit des quadrilatères que l'on étudie en 5ème/6ème que des " formes à 4 côtés ", c'est quelque chose de plus riche, de plus syncrétique dirait Piaget, que l'on étudie en 5ème/6ème.

Admettons cela comme une idée de bon sens : " l'idée de forme est plus accessible que celle de polygone " Alors, si nous sommes conséquents avec nous-mêmes, nous devrions nous étonner qu'on étudie avec tant de soin des formes à 4 côtés et qu'on " passe comme chats sur braises ", sur des formes tout aussi prégnantes et accessibles dans l'expérience commune que sont les cercles et autres courbes (pour simplifier, je me cantonne à la géométrie plane). Mais voilà, le cercle n'est pas un polygone et il semble que le savoir mathématique qui l'étudie et le décrive soit autrement plus difficile que la petite logique illustrée par la classification des quadrilatères. Et cette plus grande sophistication des formes courbes par rapport aux formes droites fait surtout qu'on a bien moins étudié les formes courbes que les formes polygonales.

Il y a donc apparemment contradiction. Du point de vue de l'introduction des élèves à l'univers abstrait de la géométrie, on pense que l'étude en 5ème/6ème peut être un tremplin vers l'étude des figures polygonales qui sera faite par la suite. Pour ce qui est de l'étude des formes courbes dont le cercle[26], les enseignants voient moins bien (si ce n'est pas du tout) quel parti ils pourraient en tirer pour préparer les élèves à la géométrie plane. En géométrie du secondaire, on ne va pas tant " rencontrer " le cercle par le biais de l'étude de sa forme (ce que pour ma part je regrette) que, indirectement, par le fait qu'il va intervenir dans l'étude des ... polygones (cercles circonscrits, inscrits, angles inscrits, constructions, etc.). En conséquence de quoi 5ème/6ème en Suisse romande, on porte une attention particulière à un ensemble relativement pauvre de formes : les formes polygonales à 4 côtés. On n'élargit pas cette perspective à l'étude d'autres formes tout aussi prégnantes et plus " riches " comme les cercles, les ellipses, les spirales etc. Au contraire, l'étude des formes polygonales (entre autres via tous ces " puzzles ", mais ce sont aussi les formes dont on peut assez facilement fournir des mesures, périmètres, surface) introduit à terme l'étude des polygones. C'est alors qu'on retrouvera ... les cercles.

Bien entendu, le savoir mathématique et son organisation, c'est-à-dire le savoir savant, n'a pas à considérer la question de son accessibilité, il est tel qu'il est un point c'est tout. Réorganiser le savoir pour répondre à la finalité de le rendre accessible est une opération didactique qui vient à transposer le savoir mathématique. On doit le faire lorsqu'il s'agit d'enseigner les maths. Une fois qu'on est au clair là-dessus, la question est de se demander comment on peut le faire de la manière la plus pertinente qui soit. Sur quels critères se diriger pour le faire ? Remarquons en passant que ce n'est pas seulement le savoir savant

---

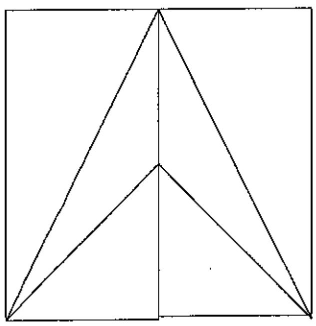
[25] Je tiens à souligner le fait que les quadrilatères et les noms qu'on leur donne ne sont en aucun cas plus naturels que les polygones même si le nom, issu du grec, fait très savant. Cf. contribution de Ch. Tièche.

[26] Attention, je dis bien du point de vue de l'étude de la forme qu'est le cercle, pas du point de vue de cet objet qu'est le cercle, de ses propriétés, de l'instrument compas qui permet de le dessiner etc.

mathématique que l'on a transformé, mais aussi d'autres savoirs, moins mathématiques - artistiques, architecturaux, mais aussi bioniques - qui ont trait à la connaissance des formes. En effet pas plus qu'on étudie en $5^{ème}/6^{ème}$ des objets purement mathématiques, on n'y étudie le concept de forme. La transposition didactique altère donc autant les savoirs que notre culture a développé sur les formes que les savoirs mathématiques. Le savoir scolaire est un " melting-pot ".

Ce qui est dommageable, c'est non pas d'étudier les formes à 4 côtés en$5^{ème}/6^{ème}$, mais ne pas dire que c'est l'objet " forme " que l'on étudie - à la manière de mathématiciens, car il y a bien d'autres manières de les étudier - et prétexter que l'on étudierait des polygones (quadrilatères) pour ne pas intéresser les élèves à penser et étudier ce qu'est cette chose si mystérieuse que l'on appelle la forme d'un objet. Une fois que l'on sait que l'on ne peut pas éviter de transposer les savoirs lorsque l'on enseigne, la question est d'apprendre à le faire à bon escient plutôt que de faire comme si de rien n'était[27]. Plus précisément, il y a un malentendu notoire. Cette étude des formes polygonales à 4 côtés en 5P/6P se veut transitoire. J'ai écrit qu'un savoir transposé (il y a d'autres transpositions possibles que didactiques) n'était pas un savoir travesti, j'ai aussi écrit souvent que la transposition didactique altérait le sens des savoirs transposés. Actuellement, je dirais les choses autrement car pour moi la question du sens n'est pas tant celle du sens que les choses auraient (chose qui est sans doute impossible à connaître) que celle du sens que les choses sont susceptibles de prendre, le sens est toujours au-delà de l'actuel. Pour en revenir à l'exemple des quadrilatères, la question est celle du sens que cette étude des formes polygonales à 4 côtés faite en $5^{ème}/6^{ème}$, pourra prendre, soit dans le présent (par exemple une étude de ce que peuvent apporter les maths au concept de forme), soit dans le futur (par exemple, comme on le croit, un tremplin vers l'étude plus abstraite des figures géométriques que sont les polygones, et des suites que cela va avoir lorsque le cercle va alors inopinément " pointer son nez " là-dedans).

La fiche « puzzle » de $5^{ème}$ année primaire



[27] Peu de gens savent que finalement en $5^{ème}/6^{ème}$ on étudie des formes polygonales à 4 côtés plutôt que des polygones à 4 côtés (quadrilatères) et que le véritable objet, la chose qui est à la base de cette étude, sont des propriétés de formes. De tels malentendus ont pour conséquence que le savoir scolaire apparaît de plus en plus coupé, découplé du savoir savant. Alors soit on me dit, comme de nombreux parents et non mathématiciens m'ont dit et me diront encore : " Mais vos histoires, cela convient aux bons élèves, les forts en maths, les intellectuels, mais pas les élèves-tout-le-monde (comme on dit monsieur-tout-le-monde) " ; soit mes amis mathématiciens me disent : " Mais qu'est-ce que tu perds ton temps avec ces niaiseries de l'enseignement, ce ne sont pas des mathématiques, d'ailleurs à l'école primaire on n'enseigne pas les mathématiques, on enseigne le calcul et des leçons de choses géométriques. " On est encore loin d'être sorti de cette fausse alternative.

La consigne est la suivante :
"Le jeu consiste à faire des quadrilatères en utilisant 2 pièces du puzzle, ou plus, en prenant au choix 2 pièces ou plus".
Nous nous inspirons d'une fiche de 5ème année primaire dont l'idée consiste à fournir un matériel de puzzle, dont les pièces sont toutes triangulaires et de 3 sortes. Il s'agit par combinaison de 2, 3, ... 6 pièces de former tous les quadrilatères possibles. Cette combinatoire est assez riche. Le jeu s'apparente au jeu de tan gram. Le manuel indique que l'on pourrait travailler tous les objectifs de l'enseignement de la géométrie de ce niveau scolaire en développant cette activité. Par là, il veut surtout indiquer la richesse de ce type d'activité[28]. L'idée repose sur le fait que les élèves produiront rapidement une assez grande variété de quadrilatères, ce qui motivera le fait qu'ils cherchent à les classer et donc à prendre en compte leurs propriétés, ce qui les introduira finalement à la classification des quadrilatères, ou encore aux formules d'aires des dits quadrilatères, deux thèmes emblématiques de la géométrie à ce niveau de la scolarité. Nous avons remarqué au cours de diverses observations dans l'ES, que si nous laissions les élèves jouer librement avec les pièces de ce puzzle, ils ne produisaient pas la variété de quadrilatères attendue, du moins pas dans des délais raisonnables. Un des points d'achoppement était que les élèves ne reconnaissaient pas toujours qu'ils avaient obtenu un quadrilatère et qu'il fallait par exemple que l'enseignant interrompe leurs manipulations pour les rendre attentifs à l'apparition d'un quadrilatère. Un autre obstacle, archi connu en ce qui concerne la manipulation, venait du fait que les élèves se perdaient dans leurs actions, et ne procédaient jamais de manière systématique, en essayant de placer par exemple une pièce dans toutes les positions possibles. En fait, on doit penser qu'ils cherchaient plus à assembler des pièces qu'à en obtenir des combinaisons.
Pour nous l'activité puzzle est un prétexte[29]. L'activité dont nous nous sommes inspirés, telle que proposée par le manuel n'a pas été modélisée par la TS, et nous n'avons pas cherché à répondre à la question de savoir comment s'inspirer de la proposition du manuel pour en faire une situation de la TS[30]. Plus banalement, nous nous sommes demandés comment faire quelque chose avec cette activité lorsque de toute évidence elle ne fonctionne pas.
Mais au fait fonctionne-t-elle ou ne fonctionne-t-elle pas ? Nos observations, cf. contribution de L. Del Notaro et A. Scheibler, confirment ce que nous avions pu observer ailleurs aussi : une telle activité ne réussit pas sans autre dans le cadre de l'ES. Pourtant, selon un autre témoignage de la part d'un enseignant secondaire, lui-même formateur d'enseignants primaires et secondaires de l'EO, cette activité est à son avis une excellente introduction à la géométrie des quadrilatères pour les classes ordinaires de l'école secondaire. Par ailleurs, selon les résultats d'une analyse a priori entreprise par l'un de nos étudiants (A. Muller), on constate que l'activité ne peut fonctionner qu'à condition de lui adjoindre un dispositif de mise en mémoire, ce qui est corroboré par quelques observations. Notons qu'une nomination avec les termes mathématiques pourrait théoriquement suffire à une telle mise en mémoire. En conclusion, nous pensons que notre collègue formateur de l'EO doit, d'une manière ou d'une autre, opérer quelques *coups de pouces* dans son propre pilotage de la situation. Il se

---

[28] L'analyse des commentaires que les manuels de 5P livrent pour cette activité, montre que les auteurs font de cette activité un modèle et que nous avons bien affaire à une interprétation pédagogique de l'idée de situation fondamentale. Pour plus de détails, voir F. Conne, 2004, *Détachements et engagements dans la pratique des mathématiques à l'école : une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en Suisse romande*. Actes du colloque 2002 GDM à Trois-Rivières.
[29] Prétexte tout comme l'est la référence au pentographe dans la séquence des situations d'enseignement des décimaux.
[30] Ce qui reviendrait en quelque sorte à examiner la validité de l'interprétation des auteurs du manuel (cf. note 27).

peut que dans les conditions communes de l'ES, les enseignants tentent des coups de pouces équivalents. Nous ne le savons pas et les conclusions de la recherche de J.-M. Favre nous obligent à rester fort prudents sur ce point. Par contre nous pouvons dire que dans l'ES, l'activité ne fonctionne pas comme prévu, du moins dans la limite des *coups de pouces* que les enseignants ES s'autorisent.

À partir de telles considérations, nous nous sommes donc proposé d'assumer à tour de rôle le pilotage de la situation en nous donnant pour objectif de « faire marcher quelque chose en modifiant les consignes et en agissant directement sur le milieu ». Nous commençons à voir ce que nous pouvons faire avec cette idée de puzzle pour créer par combinaisons une riche diversité de quadrilatères et aussi quel prix il faut y mettre.

Grossièrement dit, nous nous sommes demandés comment faire avec ce que les élèves produisent. Cela nous mettait devant deux pistes. Soit suivre le fil de ce que l'activité évoque pour les élèves ; soit « coller au dispositif ». C'est cette seconde option que nous avons tentée. C'est ce que nous appelons « explorer le milieu et ses potentialités », « faire durer l'interaction des sujets avec le milieu », « distendre le milieu ». On voit qu'il ne s'agit plus exactement du milieu tel que le pense la TS. Cette exploration n'est pas neutre de notre part, nous ne nous sommes pas privés d'actions de modification du milieu. Ainsi, par exemple, avons-nous transformé la tâche scolaire en un jeu (vaguement apparenté à un jeu de dominos). Une telle action a produit une modification importante : la question de l'identification des quadrilatères ne s'est plus posée alors qu'elle grevait passablement l'activité combinatoire prévue par le manuel. Ce changement ressort aussi de l'examen des échanges verbaux dans la situation. On pourrait dire que ce faisant nous nous serions rapprochés du modèle de la TS. Certes nous nous en sommes rapprochés, mais notez ces différences : nous n'avons pas imaginé un jeu dans l'idée d'amener les élèves à recourir à des stratégies faisant appel à une connaissance visée prédéfinie. Nous voulions seulement changer la dynamique de l'activité et vérifier l'effet de notre action directe sur le milieu. Nous avons improvisé un jeu sans l'avoir modélisé. Nous n'avons pas non plus analysé par avance quelles seraient des stratégies gagnantes, ni nous nous sommes demandés combien le jeu était déterminé. Nous pouvons certes exprimer une stratégie, mais nous ne l'avons pas reliée à des objectifs didactiques prédéfinis. L'effet qui est apparu au moment de l'introduction du jeu est que la question de savoir ce qu'est un quadrilatère ne s'est plus posée. Par contre comment compter les côtés, et comment être certains que des bords de pièces étaient ou non dans le prolongement l'un de l'autre sont devenus sensibles. Serait-ce là des savoirs que nous aurions pu mettre à l'enseigne de la situation que nous improvisions ? L'examen a posteriori des stratégies du jeu montre d'ailleurs que ce qui est en jeu est le statut des lignes d'une figure, ce qui nous rapproche de cette idée d'étude des formes géométriques, en amont des notions de polygones, de côtés et de diagonales. Certaines lignes sont des bords et l'on peut transformer ces bords en lignes internes par adjonction de certaines pièces, mais pour autant que les bords coïncident et/ou que les angles deviennent plats ou pleins[31]. Nous savons par ailleurs l'importance de tels

[31] Chaque pièce a 3 côtés. Il faut que la figure des pièces posées reste un quadrilatère. Si j'ajoute une pièce, sans précautions, je risque d'obtenir un heptagone. Il faut donc que j'accole ma pièce de manière à ne créer aucun côté supplémentaire. Pour ne pas augmenter le nombre de côtés, il faut : supprimer un bord de la figure sur laquelle on travaille en y accolant un côté égal de la pièce adjoint et en même temps, trouver le moyen qu'un autre côté de la pièce adjointe vienne dans le prolongement d'un des bords de la figure sur laquelle on travaille.

Si la figure sur laquelle on travaille est convexe, on peut chercher une pièce à place de sorte à accoler deux côtés égaux et à accoler deux angles supplémentaires.

Si la figure sur laquelle je travaille est concave, on peut chercher une pièce à placer de sorte à accoler deux côtés égaux et remplir l'angle rentrant par un coin de la pièce adjointe.

savoirs et connaissances dans les activités de géométrie les plus élémentaires[32]. Mais telle n'était pas ici notre perspective. Bien sûr une reprise de notre idée dans le cadre d'autres expérimentations pourrait être faite (en référence ou non à la TS).
Pourtant, bien que prenant nos aises avec les préceptes de la TS, nous ne la perdons pas pour autant de vue, et nous nous y référons de manière constante dans nos interprétations, ou encore, nous gardons constamment à l'esprit ce que la TS dit des objets qui nous occupent de façon centrale, comme le milieu, le jeu, etc. (Cf. contribution de L. del Notaro & A. Scheibler, et de C. Tièche plus avant).

Poursuite de nos recherches

Notre groupe poursuit ses recherches. Nous travaillons toujours sur le même schéma de comparer divers pilotages de petits groupes d'élèves dans l'institution Pré-De-Vert à Rolle. Nous prenons toujours prétexte d'activités scolaires en géométrie proposées par les moyens d'enseignement de l'EO. Nous les sélectionnons en fonction des recherches antérieures et des données que nous avons pu recueillir lors de nos investigations et/ou autres recherches. Actuellement nous travaillons sur une activité autour des croix et du découpage de Lindgren d'une croix régulière en morceaux recomposables en carré. Nous poursuivons notre exploration du milieu, mais nous nous sommes dotés d'une nouvelle idée expérimentale, celle de travailler autour d'un jeu de tâches que nous proposons aux élèves. Chaque expérimentateur dispose donc de ce jeu de tâches qu'il combine à sa guise, de manière plus ou moins improvisée. Il se permet de ne pas attendre que les élèves aient accompli une tâche et encore moins l'aient réussie pour en proposer une autre. Ainsi l'expérimentateur se permet d'interrompre les élèves, de suspendre une tâche pour une autre, sans les hiérarchiser (passer à des sous-tâches etc.) et se gardant la possibilité de revenir ultérieurement sur une tâche préalablement abandonnée. De sorte que le jeu de tâches ne marque pas une succession de situations, mais intervient au cœur de la dynamique d'une même situation, comme moyen de transformation du milieu[33].

Références bibliographiques

Brousseau G., Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n° 9-3, Grenoble, La Pensée sauvage, 1988, pp. 309-336.
Brousseau G., Les différents rôles du maître, p.15-23, et plus particulièrement, le tableau p. 23, *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, vol. II, n°2 1988.
Bruner J., Le rôle de l'interaction de tutelle dans la résolution de problèmes (1976). Pour la traduction française, in *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire.*, trad. M. Deleau, Puf 1987.
Cavaillès J., *Méthode axiomatique et Formalisme*, Paris Hermann, rééd. 1981, p. 178.
Chenu J., *Peirce, textes anticartésiens. Présentation et traduction*, Paris, Aubier, 1984, p. 149.
Chevallard Y., Esquisse d'une théorie formelle du didactique in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, C. Laborde ed., Grenoble, La Pensée Sauvage, 1988.
Conne F., Détachements et engagements dans la pratique des mathématiques à l'école : une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en Suisse romande. *Actes du colloque 2002 GDM à Trois-Rivières*, à paraître, 2004.

[32] Cf. Cours de A. Pressiat : **Grandeurs et mesures : Evolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition**, *Actes de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, J.-L. Dorier et alii, eds, Grenoble La pensée Sauvage, 2002, p. 283 à 298.
[33] Cf. Actes de la XIIe école d'été de ddm, Corps 2003 / moment ES, à paraître.

Conne F., Problèmes de transposition didactique, *Petit'X* n°64, 2004.
Conne F., Interactions de connaissances et investissements de savoir, in 2003
Conne F., *Cours d'introduction à la ddm*, Université de berne, 2003, inédit.
Conne F., Faire des mathématiques, faire faire des mathématiques et regarder ce que ça donne, in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, G. Lemoyne et F. Conne eds., 1999, Presses de l'université de Montréal.
Conne F., Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé p. 125-151), *In Actes de la Xe école d'été de Didactique des Mathématiques*, Houlgate : ARDM, 2000.
Conne F., L'articulation des contenus et des moyens et leur double nature mathématique et didactique dans l'enseignement des mathématiques et son évolution. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*. 1989, no XXIX-3.
Muller A., *Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique*, à paraître 2004.
Pressiat A., Grandeurs et mesures : Evolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition, *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, J.-L. Dorier et alii, eds, Grenoble La pensée Sauvage, 2002, p. 283 à 298.

L'enseignement spécialisé en Suisse Romande

L'exemple d'une institution vaudoise

Christian CANGE

Institution Pré-de-Vert, Rolle

L'enseignement spécialisé en Suisse Romande

Les différentes structures d'accueil offertes par l'enseignement spécialisé

Très méconnu des acteurs du circuit ordinaire aussi bien dans ses structures que dans son fonctionnement, l'enseignement spécialisé est multiforme, offre plusieurs possibilités d'accueil différentes. Il se définit comme une prestation de service destinée à répondre aux besoins particuliers d'enfants et d'adolescents du plus jeune âge jusqu'à 20 ans.

On trouve tout d'abord les **classes spécialisées,** qui sont les plus nombreuses, et qui dépendent d'institutions aux missions spécifiques. Ces classes sont des classes à effectif réduit, qui peuvent accueillir 8 élèves au maximum, bénéficiant en outre d'un contingent thérapeutique important, variable selon les institutions (psychologue, psychothérapeute, logopédiste, psychomotricien(ne) ergothérapeute etc.) Selon la mission de l'institution, ces classes peuvent avoir une orientation spécifique, même si ces institutions peuvent de moins en moins se cantonner dans des problématiques types, les critères d'admission étant de plus en plus difficiles à tenir, compte tenu de la demande toujours plus importante.

Dans les **classes officielles**, qui sont des classes intégrées dans les établissements scolaires et gérées par les directeurs et les équipes psychopédagogiques, on trouve les classes de langage, primaires uniquement, des classes d'intégration, primaires ou secondaires et des classes d'enseignement spécialisé, primaires ou secondaires. Toutes ces classes accueillent des enfants dont les troubles du langage et/ou de la personnalité sont importants. Ces élèves sont au bénéfice de mesures de scolarités spéciales subventionnées par l'Assurance Invalidité. Les classes de langage suivent les programmes de l'enseignement obligatoire, dans la mesure du possible, et offrent un encadrement pédagothérapeutique particulièrement soutenu en logopédie.

Il y a ensuite les **classes développement**, (dites classes de perfectionnement en France), primaires et secondaires, destinées aux élèves qui ne peuvent pas tirer profit de l'enseignement d'une classe ordinaire et pour lesquels un enseignement et un programme individualisés sont nécessaires, et pour lesquels des mesures d'encadrement plus spécifiques de type enseignement spécialisé ne sont pas requises. Ces classes peuvent être « fermées » dans la mesure où elles forment une entité au même titre qu'une classe ordinaire, avec son effectif (d'une douzaine d'élèves), son programme, son enseignant(e). L'objectif de ces classes est de permettre aux élèves qui y sont orientés, de travailler à leur rythme et de manière plus individualisée.

Mais il peut s'agir aussi de **classes-ressources,** qui sont des structures ouvertes, que les élèves ne fréquentent que partiellement pour des activités spécifiques comme le français et/ou les mathématiques. Tel élève, à l'aise en mathématiques ira suivre le cours de mathématiques dans une classe de niveau supérieur, mais devra suivre le français dans la classe-ressource pour combler ses lacunes. Dans ce type de classe, qu'il s'agisse des classes développement ou des classes-ressources, la pédagogie est une pédagogie qui se veut attentive au rythme de chaque élève, qui se donne les moyens de mettre en place un programme plus individualisé et centré sur ses difficultés.

Le **soutien pédagogique spécialisé (SPS)** est une structure qui permet à des élèves en difficulté scolaire, de bénéficier de manière individuelle, de l'aide d'un ou d'une enseignant(e) spécialisé(e), pour une ou plusieurs périodes par semaine afin de le maintenir intégré dans le circuit ordinaire.
Le **soutien éducatif itinérant** enfin s'apparente au soutien pédagogique spécialisé, mais avec une teinte éducative prioritaire. Le travail de l'enseignant spécialisé consiste alors à identifier où se situent les difficultés de l'élève mais pas uniquement sur le plan scolaire. L'élève peut en effet rencontrer des difficultés sur le plan familial, relationnel, avec des camarades dans et hors de la classe, autant de raisons qui peuvent le perturber dans ses apprentissages.
Le financement de ces différentes structures dépend de plusieurs services cantonaux et fédéraux. Le service de Protection de la Jeunesse, l'Office Fédérale des Assurances, l'Assurance Invalidité, ainsi que le service de l'Enseignement Spécialisé et de l'Appui à la Formation (nouvellement nommé SESAF)

Les différentes situations qui conduisent à l'enseignement spécialisé

Dans la Loi du 25 mai 1977 sur l'enseignement spécialisé, il est mentionné que : « *L'enseignement spécialisé est destiné aux enfants et adolescents dont l'état exige une formation particulière, notamment en raison d'une maladie ou d'un handicap mental, physique, psychique, sensoriel ou instrumental.* »
En réalité, la population de l'enseignement spécialisé est encore plus large que celle définie dans cette loi qui n'évoque à la première lecture que la déficience ou le manque. En effet, certains enfants à haut potentiel peuvent aussi être concernés par une prise en charge en enseignement spécialisé, c'est d'ailleurs une tendance qui se confirme de plus en plus, leur maintien dans le circuit ordinaire posant de gros problèmes pour certains d'entre eux. Le besoin de prise en charge ne se situe pas dans ces cas-là sur le plan scolaire, mais bien sur le plan psychologique.
L'orientation en classe spécialisée est bien entendu dans la majorité des cas proposée par les acteurs du circuit ordinaire, c'est-à-dire les enseignants ou les directeurs d'établissement. D'autres personnes tels que les psychologues et les assistants sociaux prennent également une part prépondérante dans l'orientation d'un nombre important d'enfants, car ils connaissent mieux que quiconque le tissu institutionnel de la région. Dans certains cas, cette indication peut être donnée par le monde médical (psychologues, psychiatres pour enfants et même pédiatres.). Enfin, les parents peuvent être eux-mêmes à l'origine de l'orientation, lorsqu'ils leur semblent avoir épuisé toutes les ressources que pouvaient leur proposer l'Enseignement Ordinaire.
Le facteur déclenchant de l'orientation en Education spécialisé est dans la très grande majorité des cas un **dysfonctionnement durable** sur le plan scolaire et confirmé par de **mauvais résultats**. Mais bien souvent, ce problème scolaire n'est que le symptôme d'une situation sociale ou psychologique difficile vécue par l'enfant et n'est pas exclusivement lié à de réelles difficultés d'apprentissage comme on peut les voir chez certains autres élèves très en difficultés.
Exceptées ces difficultés scolaires proprement dites, d'autres motifs peuvent conduire un enfant dans une classe d'enseignement spécialisé, comme des problèmes massifs de comportement, des difficultés relationnelles ou des problèmes psychologiques graves, autant de manifestations qui entravent son évolution dans le cadre d'une classe ordinaire mais qui seront prises en compte et traitées dans le cadre d'une classe de ce type, grâce notamment à l'arsenal thérapeutique évoqué précédemment.

L’évolution des élèves à l’intérieur des structures spécialisées

On a coutume de dire que l’on sait à quel moment un enfant entre en enseignement spécialisé, mais qu’on ignore quand il en sortira. En d’autres termes, la crainte est grande que ce placement ne soit en fait une manière de l’évincer du circuit ordinaire et par là-même de lui fermer définitivement les portes. Or si l’on regarde les statistiques de cette institution, on s’aperçoit que la durée moyenne des placements est d’environ deux ans et demi. Ce qui tendrait à prouver que la voie « Enseignement spécialisé » n’est pas définitive.

On peut distinguer trois formes d’évolution à l’intérieur du système spécialisé :

- Tout d’abord, l’élève qui va faire toute sa scolarité dans l’enseignement spécialisé au même titre qu’un élève du circuit ordinaire, en n'ayant que rarement l’impression de passer d’un degré à l’autre, puisque les classes ne sont pas définies selon des critères de niveau scolaire (3ème, 4ème, 5ème etc.) mais selon des références propres à chaque institution. Certaines institutions répartissent leurs élèves selon des critères d’âge, d’autres privilégient le niveau scolaire, d’autres les composent selon des critères de comportement, d’affinités, voire de mixité. Pour les parents, ce manque de repères est parfois difficilement vécu, tant ils ont de la peine à situer leur enfant dans son évolution.
- Deuxièmement, l’élève pour lequel l’enseignement spécialisé n’aura été qu’une étape dans sa vie scolaire et qui pourra réintégrer le circuit ordinaire après une, deux ou trois années dans l’ES, au prix d’efforts d’adaptation relativement importants, son passé scolaire pouvant jouer contre lui. Il est en effet souvent difficile pour l’EO de créditer les élèves ES des compétences que pourtant, certains possèdent. Dans le même ordre d’idées, on leur pardonnera aussi moins leurs faiblesses dans le sens où celles-ci s’avéreront être précisément la marque de leur appartenance à ES.
- Troisièmement enfin, l’élève qui transitera par toutes les structures en commençant d’abord par la classe Développement, pour être ensuite orienté en institution, avant d’être de nouveau dirigé vers une autre institution plus en rapport avec sa problématique, ce scénario pouvant se répéter plusieurs fois. On peut alors parler de "tourisme institutionnel".

Pour éviter ce parcours très éprouvant pour l’élève et sa famille, il a été décidé depuis peu que c’est le Service de l’Enseignement Spécialisé qui gérerait dorénavant toutes les demandes de placement en classe spéciale, ce qui signifie que plus aucun élève ne peut entrer en enseignement spécialisé sans que le premier service concerné n’en prenne la décision. Cela aura notamment pour avantage d’orienter tout de suite le jeune dans la structure la plus adaptée à ses besoins.

On prend conscience ici du contraste entre les deux systèmes. D’un côté un circuit ordinaire balisé, tout en progression, assez compact, sans surprises, que l’élève apprend à maîtriser somme toute assez facilement. De l’autre, un circuit spécialisé au contraire très large, très éclaté, beaucoup plus opaque, fait d’à-coups et d’interrogations, d’échéances à court terme, que l’élève et ses parents ne peuvent jamais totalement décoder, d’autant plus que chaque structure spécialisée, chaque classe est une entité. En effet, le programme et les objectifs à atteindre, ne sont plus là pour garantir une progression, et l’enseignant libéré de cette contrainte dégage lui-même ses priorités et ses axes d’intervention. Enfin, si dans l’enseignement ordinaire, c’est l’aspect scolaire qui retient toute l’attention, dans l’enseignement spécialisé, le scolaire et le thérapeutique se côtoient et sont intimement imbriqués. Ils sont à ce point imbriqués qu’il est parfois difficile pour tous les acteurs d’une institution de "faire la part des choses" et de discerner ce qui relève du thérapeutique et ce qui est du domaine du pédagogique dans la problématique d’un enfant.

Les possibilités de sortie

Nous l'avons déjà évoqué, certains élèves peuvent s'extraire de l'ES, même s'ils ne représentent pas une majorité. En effet, c'est souvent au prix d'une « suradaptation » au circuit ordinaire que se font les réintégrations, l'élève « spécialisé » devant en quelque sorte apprendre ou réapprendre un mode de faire tant les deux systèmes paraissent différents dans leurs exigences. Je pense notamment au rythme de travail, beaucoup plus soutenu dans les classes ordinaires, ainsi qu'au système d'évaluation, totalement flou dans les classes spécialisées, pour ne pas dire inexistant.

Outre une réintégration dans le circuit ordinaire, ce périple dans les structures spécialisées peut trouver par ailleurs différentes issues.

L'élève peut être dirigé vers une formation spécialisée dans une structure protégée. Il peut également suivre une formation pratique pour autant qu'un employeur l'accueille.

Pour les élèves qui auraient d'importantes difficultés sur le plan scolaire, il peut être proposé une formation dite « élémentaire », c'est-à-dire que la formation dans tel ou tel métier se fait en deux années au lieu de quatre. Ces formations sont dispensées par des Centres de pré-apprentissage qui prennent tout naturellement la suite des institutions de type Pré-de-Vert. Trouver la formation qui convient le mieux aux jeunes en leur proposant des stages dans diverses professions, mettre en place les moyens nécessaires à leur réussite sont les deux axes de leur mission.

L'entrée en formation pour l'obtention du Certificat Fédéral de Capacité en trois ou quatre années selon les métiers, est également subordonnée à l'engagement du jeune par un professionnel habilité à le recevoir, et ne concerne malheureusement qu'un faible pourcentage d'élèves sortis des classes spécialisées ; signalons au passage que certains auraient les potentialités sur le plan pratique pour réussir un Certificat Fédéral de Capacité, mais ne peuvent l'entreprendre du fait de leurs difficultés scolaires.

Dans certains cas, une dixième année de scolarité peut-être proposée par l'institution, si et seulement si, il a été estimé que l'élève pourrait bénéficier sur le plan scolaire de cette année supplémentaire.

Enfin certaines structures proposent aux élèves qui n'auraient pas trouvé de solutions à l'issue de leur scolarité, six mois voire une année supplémentaire, au cours de laquelle le jeune et les travailleurs sociaux vont essayer de définir ensemble un projet, puis de le mettre en route et si possible de le mener à terme.

Un exemple d'institution vaudoise : Pré-de-Vert

À l'instar d'autres institutions, Pré-de-Vert a été créée et s'est développée sur l'initiative d'une fondation privée. En l'occurrence, cette institution a pour origine un legs testamentaire, les propriétaires ayant décidé à la suite du décès de leur enfant unique, de faire don de cette propriété pour des enfants « indigents ». Mais, petit à petit, la population a évolué. Ce sont tout d'abord des enfants aux situations familiales difficiles qui ont été accueillis, puis parallèlement à la création et à l'évolution de l'Enseignement spécialisé, des élèves qui étaient en difficulté scolaire. Une classe puis deux puis trois, et aujourd'hui 6 classes regroupant une cinquantaine d'enfants.

Actuellement, cette institution du canton de Vaud se définit comme un centre pédagogique et éducatif (internat de semaine) et accueille des enfants, qui, en raison de difficultés particulières telles que troubles du comportement ou de la personnalité, situations familiales conflictuelles, retard dans les apprentissages, ont vu leur parcours scolaire compromis et ont besoin d'un projet scolaire différent de celui du circuit ordinaire.

Qu'elles soient d'ordre intellectuel, comportemental ou psychique, isolées ou conjuguées, ces difficultés entravent les apprentissages et la capacité d'adaptation de ces enfants, les confinant dans une situation d'échec, dont les répercussions affectent tout leur développement.

Les types d'enfants pris en charge

Si notre institution a pu, pendant un certain nombre d'années, revendiquer un certain type de population, à savoir des enfants présentant des troubles du comportement et de la conduite, les choses aujourd'hui sont toutes différentes, puisque la demande d'enseignement spécialisé n'a cessé de croître depuis 1980 (plus de 90% d'augmentation en 20 ans) ce qui a provoqué l'obligation pour les institutions d'admettre des enfants dont les problématiques sont extrêmement diverses. À Pré-de-Vert, peuvent donc se côtoyer des enfants au potentiel intellectuel conservé ou même élevé, évincé du circuit traditionnel pour des raisons multiples, telles qu'une tendance à la perturbation, à la violence, au non-respect des règles de l'école comme une fréquentation irrégulière, et également un désintérêt marqué pour la matière scolaire, des enfants avec des troubles du comportement marqués, des enfants avec des troubles de la personnalité (pré-psychoses, psychoses), des enfants atteints de handicap mental léger et même des enfants atteints de handicaps physiques légers ou moyens comme les malentendants.
La mission de l'institution est de permettre à ces enfants en rupture dans leur scolarité, leur vie familiale ou psychique, de marquer une pause dans un environnement différent, avec des moyens adaptés à chacun, pour leur permettre de se reconstruire, en tous les cas d'essayer de restaurer chez eux une image de soi fortement altérée par des échecs successifs.

L'organisation et le fonctionnement des classes

Si l'institution comprend également un internat, c'est le secteur pédagogique qui est le plus important avec 3 statuts différents. Certains élèves sont internes, d'autres semi-externes, c'est-à-dire qu'ils sont pris en charge pour une période allant de 15h30 à 18h, pour leurs devoirs ou pour des activités éducatives, ce qui fait défaut dans leur environnement familial. Enfin, on trouve des élèves externes qui ne prennent que le repas de midi à l'institution. Sur une cinquantaine d'enfants, 45 fréquentent nos classes, les autres étant scolarisés dans le circuit ordinaire. L'enseignement est donc presque intégralement pris en charge par l'institution. Il n'existe pas d'enseignement à distance ou par correspondance.
Le secteur pédagogique se compose donc de 6 classes composées de 8 élèves au maximum répartis dans la mesure du possible selon des critères d'âge. Les enfants ont entre 6 et 16 ans (exceptionnellement 17) avec une classe dite de « fin de scolarité, dans laquelle les élèves sont accompagnés au maximum pour l'entrée dans le monde de l'apprentissage et du travail, avantage qu'ils ont sur des élèves du circuit ordinaire qui eux sont assez peu aidés par l'école lorsqu'ils se retrouvent à devoir opter pour un apprentissage. Malgré cette répartition, il est évident que l'on trouve dans ces groupes-classes, des différences de niveau scolaire importantes. On peut même dire que ce sont des classes à degrés multiples. Cette situation est à l'origine d'une question toujours récurrente dans les institutions de type Pré-de-Vert. Puisque les niveaux sont très hétérogènes à l'intérieur même de chaque classe, qui enseigne quoi, à qui et quand ? l'institution se trouvant dans l'impossibilité de s'appuyer sur une planification des savoirs à enseigner, comme cela se fait dans l'EO. Ainsi, dans le travail qui a occupé notre groupe, il n'était pas question de bâtir des séquences parfaitement calibrées, et venant merveilleusement s'inscrire dans le déroulement du programme de la classe, cela n'aurait eu aucun sens.
La semaine scolaire comprend 21 heures d'enseignement, qu'il s'agisse il faut malheureusement le souligner d'élèves de 9 ans ou de 15 ans. Je dis malheureusement, car

souvent, pour des questions d'organisation interne, les plus jeunes subissent, si l'on y ajoute le temps passé avec les autres intervenants de l'institution (éducateurs, thérapeutes,...) des journées trop longues en comparaison de leurs camarades de l'EO du même âge A l'opposé les élèves les plus âgés ont un emploi du temps légèrement plus léger que leurs homologues du circuit ordinaire. Ceci peut parfois les péjorer lorsqu'une réintégration est tentée ou lorsqu'ils partent en apprentissage ou pré-apprentissage et qu'ils doivent faire face alors, de manière subite, à un rythme quotidien beaucoup plus éprouvant et à des horaires plus exigeants.

Les moyens d'enseignement utilisés

En Suisse romande, les maîtres travaillant en EO disposent d'une méthodologie officielle (ou répertoire d'activités), leur indiquant les différents axes d'intervention pour enseigner telle ou telle notion, des réflexions didactiques, des propositions d'activité pour y parvenir, des idées de relance, de prolongement, d'approfondissement etc.
Dans leur enseignement, les enseignants se tiennent au plus près des programmes officiels des classes ordinaires, en tout cas en ce qui concerne les branches fondamentales comme le français ou les maths. Ils s'appuient donc sur ces moyens d'enseignement dans lesquels ils puisent les outils nécessaires à leur enseignement. S'ils puisent dans ces documents c'est par souci de se maintenir au plus près des exigences du circuit ordinaire, avec comme obsession, le secret espoir de pouvoir réintégrer des élèves dans l'Enseignement ordinaire.
Ils peuvent également avoir encore accès à d'autres sources (anciens moyens qui ont fait leurs preuves, ouvrages francophones, novateurs,...), cette diversification étant généralement encouragée par l'institution (au nom des besoins spécifiques des élèves), mais laissée au bon vouloir de chaque enseignant (en fonction de son expérience et de sa connaissance des moyens à disposition).
En ce qui concerne les activités issues des moyens d'enseignement du circuit ordinaire, je dirais qu'elles ne sont généralement pas proposées "telles quelles" aux enfants mais le plus souvent aménagées (au niveau de la consigne par exemple) et allégées d'exercices qui ne paraissent pas indispensables à l'enseignant (qui procède alors à un tri) ou alors qu'il présume trop difficiles. De même, les évaluations proposées dans le circuit ordinaire n'ont que peu ou pas court dans nos classes du fait d'une grande dispersion des niveaux. Les bilans d'acquisition des connaissances ne peuvent donc se faire que pour un élève ou un petit groupe d'élèves et rarement dans les conditions qui sont celles de l'EO.

Les difficultés rencontrées par les enseignants et les élèves

Lorsqu'on interroge les enseignants de l'institution sur leurs difficultés d'enseignement en mathématiques, ce sont prioritairement les difficultés des élèves qui sont évoquées. Ces difficultés assez nombreuses, on ne s'en étonnera pas, font d'ailleurs - une fois n'est pas coutume - l'unanimité parmi les intervenants de cette école spécialisée.
C'est en règle générale la compréhension des consignes qui est mentionnée. Qu'il s'agisse de consignes introduisant l'activité, ou d'énoncés de problèmes, de consignes orales ou écrites, les collègues enseignants signalent le besoin pour les élèves d'être guidés et mettent en exergue leurs difficultés à sélectionner les informations. Dans le même domaine, ils stigmatisent leur difficulté à se « représenter » les choses.
Les enseignants évoquent aussi l'impossibilité d'abstraire qui semble relever à la fois des difficultés à passer d'une solution vers une écriture mathématique idoine, mais aussi de parvenir à imaginer des solutions sans l'appui de manipulations, de matériel, de mise en situation. Sur ce point, il est à noter que bon nombre d'enseignants prônent souvent la mise en situation des problèmes mathématiques, en favorisant la représentation concrète des

éléments du problème ou en misant sur la manipulation et la répétition.. Selon eux la réussite de l'élève passe presque toujours par cette condition.
C'est ensuite le problème du « transfert des connaissances » qui est posé, les élèves semblant ne pas parvenir à importer celles-ci dans des activités autres que celles dans lesquelles ils les ont travaillées. Cette difficulté s'accompagne d'une autre souvent évoquée, à savoir la difficulté des élèves à mémoriser, avec cette idée (justifiée ou pas) qu'ils ne retiennent pas bien ce qui leur est enseigné, même après plusieurs enseignements. On peut parler d'élèves « palimpsestes » tellement leurs connaissances semblent s'effacer avec le temps.
Le manque de contrôle, l'absence de vérification de leurs résultats est également une remarque redondante. Tout se passe comme si ces élèves ne pouvaient mettre à l'épreuve leurs hypothèses, leurs résultats. Ils les considèrent comme isolés du contexte, ne retournent que rarement à la question, ne font pas les liens que l'enseignant serait en droit d'attendre, ce qui lui donne l'impression d'enseigner des morceaux de savoir, voués à n'être jamais assemblés.
Enfin, le vocabulaire mathématique est comparé à du « chinois ». Un produit est rarement retenu comme le résultat d'une multiplication, la notion de parallèle doit être sans cesse réactualisée, si elle n'est pas confondue avec une perpendiculaire (on pourrait multiplier les exemples...).
Une des observations que le groupe a pu réaliser dans ses investigations (Cf. Favre et Conne) et qui n'a pas été relevée par mes collègues, concerne encore la restitution. Nous avons en effet pu constater et mesurer la grande difficulté pour nous d'obtenir des informations sur ce que savaient les élèves, au cours des séances qui ont été menées à Pré-de-Vert, restitutions qui ne surviennent que rarement quand on les attend, mais qui peuvent émerger lorsqu'on ne les sollicite plus. Pour tenter d'en savoir un peu plus sur ce point, il était nécessaire d'explorer d'autres voies, et celle de l'investigation du milieu en était une.

Vers une réduction des contenus

Les contenus d'enseignement s'appuient, apparemment tout au moins, sur les programmes officiels du circuit ordinaire du canton de Vaud. J'entends par programme, l'ensemble des notions qui doivent être étudiées dans le laps de temps d'une année scolaire par les enfants de tel ou tel âge.
Pourtant, la différence entre l'EO et l'ES est ici très marquée, puisque personne dans l'ES ne fixe de programme -sinon l'enseignant-, alors qu'il y a forcément unanimité dans l'EO sur les contenus à enseigner. Personne ne va dire aux enseignants spécialisés qu'il faut enseigner ceci ou cela, pas plus le directeur que l'inspecteur spécialisé, alors que la question n'est même pas effleurée dans le circuit ordinaire. De ce fait, les contenus enseignés dans l'ES restent souvent flous, presque cachés et en tout cas fortement dépendants des choix de l'enseignant.
Pour en donner un exemple concret, c'est l'arrivée très récente de nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques dans le canton, qui a permis aux enseignants de l'institution d'échanger sur leurs pratiques antérieures, sur les objets mathématiques qu'ils privilégiaient. Les commentaires, les questions, les craintes, les espoirs nés de ces nouveaux moyens ont permis de mettre à jour (enfin !) les difficultés que les enseignants rencontraient dans leur enseignement des mathématiques.
On s'est alors rendu compte que c'est **l'élève qui est le lien didactique entre les différentes classes de l'institution dans lesquelles il est appelé à circuler**. Il n'est donc pas rare de voir des élèves être enseignés des fameuses opérations (addition, soustraction, multiplication, division) plusieurs années durant, alors même que leurs camarades du circuit ordinaire les ont abandonnées depuis un bon moment déjà, qu'ils les aient acquises ou pas d'ailleurs. Année après année, l'échec toujours plus avéré, l'élève se débat avec ces

algorithmes, en testant si j'ose dire au passage les différentes méthodes proposées par des enseignants.
L'ensemble des difficultés évoquées plus haut et sur lesquelles, répétons-le, une grande majorité d'enseignants de Pré-de-Vert s'accorde, conduit également ceux-ci, à réduire au maximum les contenus mathématiques à enseigner, dans le souci d'enseigner le « minimum vital » correspondant aux exigences ultérieures du monde professionnel. Le monde professionnel, par l'entremise du service d'orientation scolaire, renforce d'ailleurs de manière catastrophique cette situation, puisque ce dernier ne dresse un bilan sur chaque élève qu'à partir d'objets mathématiques socialement marqués comme la maîtrise des 4 opérations, la résolution de petits problèmes mettant en jeu ces opérations pour ne citer que celle-ci, sans que l'on ne sache vraiment quelles exigences, quelles demandes cela recouvre. Il est donc fréquent de voir des élèves de 14 ou 15 ans ressortir de ces examens d'orientation avec un niveau attribué de 1ère ou 2ème primaire en mathématiques, uniquement parce qu'ils continuent d'échouer dans le calcul de soustractions ou de multiplications, alors qu'ils peuvent aborder par ailleurs dans le cadre de la classe, des notions comme les nombres relatifs ou les fractions.
Ainsi lorsqu'on interroge les enseignants sur les objets mathématiques qu'ils privilégient, on n'est guère surpris des réponses apportées. La maîtrise des 4 opérations semble incontournable, ainsi que la connaissance des tables de multiplication et du calcul oral. Elle est d'ailleurs associée à la maîtrise de l'argent qui devient dans ce contexte un objet d'enseignement. Les unités de mesure (longueur, aires, capacité, volumes) tiennent également une place importante, ainsi que le maniement d'outils comme l'équerre, la règle graduée ou le compas.
Et malheureusement, d'après la majorité des enseignants de cette institution, les nouveaux moyens d'enseignement proposés ne permettent pas ce travail de répétition ou d'entraînement, mais proposent au contraire beaucoup trop de problèmes déconnectés du réel, et surtout des problèmes dans lesquels la part de l'élève est jugée trop grande alors que ce sont précisément en général des enfants qui ont une confiance en eux très limitée. Ils vont donc se montrer incapables ou tout au moins connaître beaucoup de difficultés à poser des hypothèses, associer, déduire.
Pour conclure et en guise d'illustration à la nécessité ressentie par certains enseignants de renouer avec des mathématiques « pratiques[1] », et donc de revenir à ce qui se faisait avant l'introduction des nouveaux moyens, citons les propos recueillis auprès d'une enseignante de l'institution :
« Ces enfants, plus encore que d'autres ont besoin de comprendre le sens de ce qu'ils doivent apprendre. Il est donc important que les apprentissages qu'ils doivent faire soient des apprentissages rattachés à la vie pratique comme le calcul du prix de revient ou du bénéfice par exemple. »

[1] Il faut entendre mathématiques **pratiques** comme des mathématiques qui seraient en totalité utiles et utilisables par les élèves dans leur vie quotidienne.

Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé

Jean-Michel FAVRE

HEP VD, Lausanne

Origines du mémoire

Le travail de mémoire que je vais présenter ici s'inscrit dans la continuité d'un travail précédent (Favre, 1992), réalisé à l'occasion de ma formation d'enseignant spécialisé, et où il avait été question de construire, en référence à la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud (1991), une démarche pour enseigner la multiplication dans le contexte de ma propre classe d'enseignement spécialisé. Je me suis alors attaché à poursuivre les premières investigations que j'avais réalisées pour essayer de mieux comprendre comment un enseignant s'y prend pour enseigner les mathématiques dans les conditions particulières d'une classe ES, mais en allant observer cette fois-ci comment cela se passe ailleurs (c'est-à-dire ailleurs que dans ma propre classe).

Si je parle de conditions particulières, c'est bien parce que la classe ES bénéficie, en Suisse Romande tout au moins, d'aménagements spécifiques qui visent à prendre compte au mieux possible les difficultés, les troubles ou les handicaps des élèves qui s'y trouvent. Ainsi, on peut citer par exemple (la liste est loin d'être exhaustive) :

- des effectifs de classe qui sont dans la majeure partie des cas réduits : cela peut aller de 5 à 12 élèves par classe ES, pour une moyenne de 18 à 22 dans les classes EO ;
- des programmes qui sont plus souples que dans l'EO, dans le sens où l'enseignant a généralement la charge de les définir, en fonction de paramètres aussi variés que les compétences ou difficultés particulières des élèves, les exigences de l'institution, les attentes des parents, les perspectives de réintégration dans l'EO, les perspectives d'avenir aussi bien professionnelles que privées des élèves, etc. ;
- les moyens d'enseignement qui sont diversifiés, de manière à répondre aux besoins des élèves alors même que ceux-ci sont, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, standardisés et imposés dans toutes les classes EO en Suisse Romande ;
- une formation des enseignants supplémentaire qui doit permettre, en cours d'emploi, de former des professionnels capables de favoriser le développement et l'intégration d'enfants et d'adolescents en difficulté ;
- un entourage institutionnel renforcé qui prend généralement la forme d'une équipe pluridisciplinaire composée d'enseignants, d'éducateurs, de logopédistes, de psychomotriciens, de psychologues, de pédopsychiatres, voire, dans certains cas, d'ergothérapeutes, de maîtres socioprofessionnels, laquelle est censée apporter un soutien approprié aussi bien aux élèves, qu'à leur entourage familial ou qu'aux professionnels qui s'en occupent ;
- ...

Or, parmi les conditions qui régissent de façon tout à fait particulière une classe ES, il en était deux qui me semblaient, fort de ce qui était apparu dans mon précédent travail et de mon expérience préalable d'enseignant ES, pouvoir produire des effets tout à fait significatifs sur l'enseignement des mathématiques qui s'y trouve réalisé. Il s'agissait d'une part du fait que l'enseignant, en classe ES, se retrouve majoritairement aux prises avec des élèves en échec (soit parce que ces élèves ont échoué en classe ordinaire, ce qui les a ensuite conduits à devoir intégrer une classe ES, soit parce qu'ils ont toujours été scolarisés en classe ES et qu'ils n'ont de la sorte jamais été admis à intégrer une classe ordinaire) et d'autre part du fait que le fonctionnement du temps consacré à l'enseignement et plus particulièrement à l'enseignement des mathématiques se démarque sous plusieurs aspects de ce qui a habituellement cours en classe EO.

La première des conditions permettait en effet de penser que l'agglomération d'élèves en échec (ou tout au moins considérés comme des élèves en échec) présent dans la classe ES risquait de provoquer de nombreuses « crises » de la relation didactique (tout au moins plus nombreuses qu'en classe EO où la présence d'élèves considérés comme forts permet à ces crises d'être moins visibles ou tout au moins de se résorber rapidement). Inévitablement, ces crises devaient toutefois être résolues pour permettre à la relation didactique de se rétablir et l'on pouvait donc s'attendre pour cela à la production d'un certain nombre d'effets, pour certains bien connus, car déjà mis souvent en évidence par les théories didactiques en classe EO (Brousseau, 1986), mais qui risquaient fort de voir leur fréquence augmenter dans ce contexte. Il s'agissait notamment de l'effet Topaze, du glissement méta cognitif ou de l'usage abusif de l'analogie (je laisse volontairement ici de côté l'effet Jourdain sur lequel je reviendrai par la suite). À ceux-ci pouvaient venir encore s'en ajouter d'autres, plus spécifiques, comme la reconduction dans l'ignorance (Conne, 1996) qui se caractérise par des retours en arrière dans le programme ou par la répétition systématique d'activités du même type destinés à combler les lacunes des élèves, la recherche (presque toujours désespérée) de nouvelles méthodes et de nouveaux moyens d'enseignement ou l'abandon des pratiques d'évaluation sommative (Hadji, 1989), car susceptibles de stigmatiser l'échec de l'élève à apprendre et celui, non moins douloureux, de l'enseignant à enseigner.

Quant à la seconde condition, elle provenait de ce que, comme je l'ai dit plus haut, le temps d'enseignement en classe spéciale ne fonctionne pas de la même manière qu'en classe ordinaire. D'abord, le temps qui est consacré à l'enseignement des mathématiques est souvent moins important que dans l'EO, ceci étant principalement dû au fait que les élèves fréquentent, sur leur temps scolaire, d'autres lieux que la classe, que ce soit pour se rendre à une thérapie, participer à un groupe de psychomotricité ou bien pour accomplir telle ou telle activité auprès des éducateurs. Ensuite, ce temps est souvent discontinu, car les départs et les arrivées des élèves en classe ne correspondent pas toujours au temps qui s'écoule au rythme des sonneries et des interclasses : un élève peut ainsi commencer une activité, devoir l'interrompre peu après pour rejoindre un autre groupe de travail et la reprendre une fois la séance terminée. Cette discontinuité est par ailleurs également la conséquence des stages que l'élève de classe spéciale est plus ou moins régulièrement conduit à effectuer tout au long de l'année scolaire dans d'autres lieux d'enseignement. Enfin, une troisième caractéristique du temps d'enseignement en classe ES réside dans son extensibilité. En l'absence de programmes établis et d'évaluations sommatives régulières, la progression du temps didactique, au sens de Mercier (1985), n'est pas rythmée comme dans les classes EO. L'enseignant, dans le contexte ES, semble en effet disposer d'une marge de manœuvre bien plus importante que dans l'EO que ce soit pour ralentir cette progression ou au contraire pour lui donner des coups d'accélérateurs.

À l'image de la première, cette seconde condition était alors elle aussi susceptible de créer des effets sur l'enseignement des mathématiques en classe ES. On pouvait d'une part envisager une individualisation de l'enseignement, non pas en réponse exclusive aux besoins particuliers des élèves, mais bien pour faire face à leurs mouvements dans l'institution qui rendent difficile, voire impossible la mise sur pied d'activités collectives auprès d'un groupe d'élèves qui fluctue sans cesse. D'autre part, on pouvait également présager que la progression du temps didactique se trouve freinée, dans le sens où il était vraisemblable que, face aux difficultés manifestées par les élèves, l'enseignant en vient à hésiter, voire à renoncer à passer d'un objet d'enseignement à un autre comme c'est le cas dans l'EO au rythme des évaluations et sous la pression des programmes. Avec comme conséquence obligée, le fait que certains objets d'enseignement restent continûment sensibles dans la classe ES, c'est-à-dire qu'ils ne parviennent jamais vraiment (j'emprunte l'expression à Yves Chevallard) « à être expulsés du cercle du savoir enseigné ».

Dispositif de recherche

Pour chercher à mettre en évidence et vérifier expérimentalement les effets produits par ces deux conditions et comment celles-ci étaient susceptibles de se transformer en contraintes didactiques (dans le sens où elles pourraient contribuer à façonner de manière spécifique l'enseignement des mathématiques en classe ES), j'ai alors été conduit à concevoir un dispositif de recherche original qui, au départ, est parti d'un objet d'enseignement particulier : la multiplication. Le choix de la multiplication ne devait évidemment rien au hasard. Cet objet d'enseignement avait en effet déjà été au centre de mon précédent travail, ce qui me permettait de bénéficier d'une relativement bonne connaissance du concept, des activités des manuels utilisés en Suisse Romande pour l'enseigner, de certains points d'achoppement que pouvaient rencontrer les élèves pour l'apprendre, ainsi que d'une expérience d'enseignement personnelle antérieure qui avait fait l'objet d'une analyse approfondie.
Mon intention était d'aller observer comment cet objet était effectivement enseigné en classe ES (étant entendu que le choix d'un tel objet limitait l'éventail des classes spéciales potentiellement observables), puis déterminer en quoi cet enseignement pouvait être ou non différent de l'enseignement du même objet dans une classe EO et tenter enfin de comprendre en quoi les différences mises à jour seraient liées ou non aux deux conditions spécifiques que j'avais pour projet d'étudier. J'avais donc à la fois besoin pour le faire d'une classe ES qui serait l'objet prioritaire de mes observations et de mes analyses, et d'une classe EO qui me servirait en quelque sorte de référence pour établir des comparaisons et me permettre, par contraste, de mieux caractériser les spécificités de l'enseignement de la multiplication dans la classe ES[1].
J'ai par ailleurs délibérément renoncé à une étude que l'on pourrait qualifier de « naturaliste », c'est-à-dire qui se limiterait à entrer dans deux classes pour observer ce qui s'y passe. Le risque de n'aboutir qu'à une comparaison de deux styles d'enseignement me paraissait en effet trop important. À partir de la démarche que j'avais élaborée et expérimentée dans mon travail précédent, j'ai ainsi construit une sorte d'ingénierie, au sens d'Artigue (1995), de l'enseignement de la multiplication, mais simplifiée et partielle dans le sens où elle ne comprenait que deux préparations de leçons et une épreuve d'évaluation. Je comptais ensuite soumettre et faire expérimenter cette ingénierie simplifiée conjointement par les deux enseignantes de la classe EO et de la classe ES, sachant qu'elle devrait en principe prendre place au début de leur enseignement habituel de la multiplication.
Cette ingénierie était conçue de façon à produire certaines ruptures (Portugais, 1995) dans l'enseignement habituel qui avait lieu dans les deux classes, de manière à générer des effets qui seraient susceptibles d'apporter en retour des informations sur les pratiques

[1] Il s'agissait, pour les situer brièvement, d'une classe EO de 3ème année primaire (CE 2) et d'une classe ES accueillant des élèves dont le niveau en mathématiques était considéré entre la 2ème et la 3ème année primaire (CE1 et CE 2), leur âge pouvant être jusqu'à deux ans supérieur aux élèves de la classe EO.

d'enseignement existantes[2]. De fait, si les deux préparations de leçon proposées aux enseignantes ressemblaient sous de nombreux aspects aux scénarii que l'on pouvait trouver dans les manuels utilisés en Suisse Romande, elles comportaient cependant des éléments que l'on pouvait imaginer en rupture avec les pratiques des deux enseignantes. Ainsi, par exemple, les deux préparations :

- demandaient aux élèves d'effectuer des prévisions et des anticipations sur les procédures qu'ils auraient ensuite à utiliser pour résoudre le problème qui leur était posé, ainsi que sur les résultats auxquels celles-ci allaient leur permettre d'aboutir, tout en sachant bien que, dans un second temps, prévisions et anticipations pourraient être validées par l'utilisation du matériel qui était mis à leur disposition ; il s'agissait ainsi de favoriser l'émergence, dans la situation, de moments adidactiques (Mercier, 1994) ;
- proposaient à chaque fois une tâche comprenant des nombres relativement grands, c'est-à-dire des nombres avec lesquels les élèves de cet âge ont généralement peu l'habitude d'être confrontés en classe ; il s'agissait de leur donner l'occasion de rencontrer une application de l'usage de la multiplication où celle-ci s'avère effectivement plus efficace qu'une simple procédure de comptage ;
- faisaient appel à l'usage de la calculette qui devait à la fois pallier l'absence d'une technique de calcul pour effectuer des multiplications maîtrisées par les élèves et contribuer à donner un rôle opératoire aux écritures multiplicatives (Favre, 1993) ;
- invitaient les élèves à travailler par petits groupes de manière à favoriser les interactions entre pairs.

L'épreuve d'évaluation était en outre destinée à créer spécifiquement une rupture dans la classe ES, étant donné que celle-ci est généralement dépourvue d'évaluation sommative. Pivot incontournable des pratiques d'enseignement des mathématique en classe EO, c'était assurément l'élément du dispositif qui allait s'avérer le plus délicat à « dévoluer » à l'enseignante ES (je redoutais même un refus net de sa part). Elle en consistait pourtant l'un des éléments-clés puisque, si mes hypothèses se révélaient exactes, c'était elle qui a priori marquerait la différence la plus nette dans les pratiques d'enseignement qui avaient lieu dans les deux classes.

Les mises en œuvre des deux préparations et de l'épreuve d'évaluation dans les deux classes seraient alors filmées et enregistrées et suivies à chaque fois d'un entretien qui devrait permettre de recueillir à chaud les impressions des enseignantes et revenir sur certaines décisions qu'elles avaient prises en cours de séances de façon à mieux les comprendre. Je souhaitais ensuite utiliser la méthodologie de recherche mise au point par Arsac et Mante (1989) dans leurs travaux consacrés au rôle de l'enseignant dans la classe de mathématiques, en m'intéressant plus particulièrement aux résistances provoquées par la dévolution de la mini-ingénierie dans les deux classes et aux écarts manifestés, en situation, vis-à-vis des scénarii des préparations de leçons et de l'épreuve d'évaluation envisagées. L'idée étant de pouvoir réaliser après coup un travail d'analyse comparatif entre les deux classes, centré sur ces résistances et ces écarts, pour chercher ensuite à relier les différences significatives que j'aurais pu mettre en évidence aux conditions spécifiques que je cherchais plus particulièrement à étudier.

[2] Outre le fait de parvenir à trouver deux enseignantes qui acceptent d'entrer dans un tel dispositif, je dirai que la difficulté principale liée à sa mise en œuvre résidait dans l'équilibre à trouver entre les aspects de conformité et ceux qui entraient en rupture avec les pratiques d'enseignement existantes. Les premiers étaient en effet destinés à permettre aux deux enseignantes de s'approprier les propositions qui leur étaient faites, alors que les seconds étaient plutôt conçus pour permettre l'émergence de faits qui, en leur absence, risquaient de rester dans l'ombre.

En dehors des deux séquences d'enseignement[3] et la séquence d'évaluation, je souhaitais également disposer d'une vision d'ensemble de l'enseignement de la multiplication qui aurait lieu dans les deux classes. À ce titre, je comptais demander aux deux enseignantes de tenir le répertoire des activités qu'elles allaient utiliser pour enseigner la multiplication dans leur classe. Il s'agissait de pouvoir ainsi comprendre, d'un point plus global cette fois-ci, ce qui distinguait l'enseignement de la multiplication entre les deux classes, à la fois d'un point de vue quantitatif (nombre d'activités proposées) et qualitatif (variété des activités proposées). Il serait également sans doute possible de lire dans le répertoire d'activités en quoi et comment la mise en œuvre de la mini-ingénierie avait eu des incidences sur l'enseignement de la multiplication effectivement réalisé, en observant par exemple comment elle avait finalement été intégrée dans l'ensemble des activités et quelles suites ou quelles reprises elle avait éventuellement pu générer.

Les deux séquences d'enseignement, la séquence d'évaluation et le répertoire d'activités constituaient ainsi les quatre piliers du dispositif de recherche élaboré. Il ne faudrait toutefois pas oublier d'autres éléments qui me paraissaient au départ moins importants, mais qui ont pourtant grandement participé à la dévolution du dispositif auprès des enseignantes et qui ont été également propices à la récolte d'un grand nombre d'informations, d'observations, voire de confirmation d'hypothèses. Je les cite ici, sans trop les détailler, par souci de donner au lecteur une meilleure vue d'ensemble de l'ensemble du dispositif de recherche :

- le premier entretien que j'ai eu avec chaque enseignante pour leur présenter les grandes lignes de mon projet et m'informer déjà de leurs pratiques habituelles d'enseignement de la multiplication ;
- le second entretien, réalisé en commun, pour procéder à une lecture commune des deux préparations et de l'épreuve d'évaluation, pour leur rappeler la tenue d'un répertoire d'activités et pour fixer un calendrier du déroulement des observations ;
- la séquence d'essai technique, destinée prioritairement à tester les instruments d'observation et qui m'a donné l'occasion d'entrer une première fois dans les classes, de rencontrer les élèves et d'assister à une première séquence d'enseignement ;
- une séquence finale qui a eu lieu après celle consacrée à l'évaluation, laquelle m'a permis de donner aux élèves des deux classes les résultats qu'ils avaient obtenus et leur proposer, en guise de remerciement pour l'ensemble du travail accompli, une nouvelle situation, mais plus ouverte cette fois-ci, toujours consacrée à la multiplication[4].

Les analyses des données récoltées au cours de la mise en œuvre de ce dispositif de recherche ont alors permis de montrer que les deux conditions étudiées se transforment bel et bien en contraintes didactiques qui viennent modeler de façon tout à fait spécifique l'enseignement des mathématiques qui est réalisé en classe ES. J'envisage donc de présenter maintenant les principaux résultats auxquels ce travail a permis d'aboutir, d'abord en ce qui concerne la contrainte de l'échec, puis en ce qui concerne la contrainte du temps. Je commencerai à chaque fois par décrire ces résultats de façon théorique et je les illustrerai ensuite à l'aide d'exemples tirés des données recueillies.

---

[3] En fait, j'avais également prévu d'observer une troisième séquence d'enseignement, dont la forme et le contenu étaient au libre choix des deux enseignantes, de manière à ce qu'elles puissent faire état, en réaction aux deux scénarii prévus, de ce qu'était à leur point de vue une leçon d'enseignement de la multiplication bien adaptée à leurs conditions d'enseignement. Si cette séquence a effectivement eu lieu dans les deux classes, elle n'a, essentiellement pour des raisons de volume de travail, finalement pas fait l'objet d'une analyse approfondie et je n'en parlerai donc pas ici.

[4] Il s'agissait de trouver, avant de l'ouvrir et de les déguster, la façon dont étaient disposés les 58 chocolats d'une boîte que l'on trouve dans tous les commerces de Suisse Romande.

La contrainte de l'échec

On peut distinguer trois composantes de l'échec dans la classe ES. En premier lieu, il y a l'échec que l'on peut qualifier de préalable dans le sens où il est antérieur à la situation d'enseignement. L'échec préalable provient soit des difficultés rencontrées précédemment par les élèves dans l'EO et qui les ont empêchés de s'y maintenir, soit des difficultés rencontrées précédemment dans l 'ES et qui les ont contraints d'y rester. En second lieu, il y a l'échec que l'on peut qualifier d'effectif, lequel correspond aux difficultés manifestées par les élèves dans la situation d'enseignement lorsqu'ils ne parviennent pas à répondre de façon adéquate aux questions, aux tâches ou aux problèmes qui leur sont soumis par l'enseignant. Enfin, en troisième lieu, il y a l'échec que l'on peut qualifier de potentiel. Cette troisième composante émane des difficultés susceptibles d'être rencontrées par les élèves que l'enseignant anticipe. Présente tout aussi bien avant, que pendant la situation d'enseignement, elle est susceptible d'être tantôt corroborée par la présence, tantôt invalidée par l'absence d'un échec effectif en situation d'enseignement.

La première composante de l'échec dans la classe ES : l'échec préalable

L'échec préalable n'existe pas dans la classe EO. Si les élèves s'y trouvent, c'est que l'enseignement des mathématiques antérieur qu'ils ont reçu a pu être mené à son terme. Cela ne préjuge évidemment pas du fait que certains élèves en savent plus que d'autres, que certaines formes d'apprentissage sont plus ou moins achevées et que d'autres seront à reprendre, etc. Mais ce qui compte avant tout c'est que l'enseignement ait abouti. La présence des élèves dans la classe en est le témoin. Le nouvel enseignement qui va s'y réaliser va pouvoir s'appuyer sur cet enseignement antérieur qui a réussi et contribuer à le prolonger et le développer.

Dans l 'ES en revanche, les conditions sont inversées. L'enseignement des mathématiques ne va pas pouvoir reposer sur un enseignement antérieur qui a réussi, mais va au contraire devoir tenir compte d'un enseignement précédent qui a échoué. Les élèves dans la classe ES sont considérés (par définition pourrait-on dire) comme des élèves en difficulté et ce sont bien les difficultés des élèves qui auront été préalablement identifiées (ou pressenties) qui vont servir de point de départ à la construction de l'enseignement. Dans ce sens, on peut dire que l'enseignement des mathématiques en classe ES n'initie pas, ni ne développe, mais cherche plutôt à rétablir ou réparer, en se sursoyant à un enseignement antérieur qui a failli et dont les difficultés manifestées par les élèves forment le symptôme.

L'échec préalable en classe ES conduit de la sorte l'enseignement à se distinguer de celui qui a lieu en classe EO. Devant répondre aux difficultés particulières des élèves, il ne peut se résoudre à n'être qu'une simple reconduction de l'enseignement qui a lieu en EO puisque celui-ci est considéré comme ayant failli. L'échec préalable va ainsi contraindre l'enseignant de classe ES à élaborer une méthodologie spécifique pour enseigner[5]. Selon les objets de savoir envisagés et l'expérience de l'enseignant, cette méthodologie sera plus ou moins construite et plus ou moins explicite. Comme celle qui est en vigueur dans l'EO, elle repose sur un certain nombre de fondements théoriques, mais propres ici à l'enseignant, que l'on peut regrouper, en référence aux travaux d'Arsac et Mante (1989), sous le concept de « théorie personnelle de l'enseignement ». Cette théorie comprend les conceptions de l'enseignant sur :

- « la nature des mathématiques : "épistémologie du professeur",
- ce qu'est l'enseignement des mathématiques, c'est-à-dire sur le rôle de l'enseignant : "théorie didactique",

[5] Ce qui a précisément été l'objet de mon travail de mémoire précédent.

- ce qu'est l'apprentissage des mathématiques par l'élève : "théorie d'apprentissage". » (p.102)

À l'image de la méthodologie spécifique, la théorie personnelle de l'enseignement peut être plus ou moins élaborée et plus ou moins explicite. Son degré d'élaboration et d'explicitation dépend elle aussi des objets de savoir considérés et de l'expérience de l'enseignant, mais aussi et surtout - et c'est ce qui fonde sa spécificité en ES - de la distance entre la méthodologie officielle et la méthodologie spécifique construite par l'enseignant. À défaut de pouvoir se reposer sur des fondements théoriques établis par une instance noosphérienne reconnue, c'est en effet cette théorie de l'enseignement qui va y suppléer pour venir expliquer les originalités et les spécificités de la nouvelle méthodologie constituée.

Dans la classe ES prise en compte dans le dispositif de recherche, tous les élèves relevaient tous d'un passé d'échec en classe EO, lequel les avait contraints, durant l'année qui avait précédé le début des observations, à rejoindre une classe ES. Cet échec en EO n'était pas dû à des difficultés particulières en mathématiques, mais concernait plus spécifiquement des troubles dans l'acquisition du langage oral et surtout écrit. Dès le premier entretien que j'ai eu avec l'enseignante ES, j'ai néanmoins appris qu'elle avait bel et bien conçu une méthodologie d'enseignement particulière comportant les étapes suivantes :
1° Travail oral sur la signification du mot « fois »
2° Utilisation des occasions qui se présentent dans la vie de la classe pour rencontrer certaines situations multiplicatives
3° Proposition de diverses activités avec supports concrets pour enseigner la multiplication
4° Travail sur l'équivalence entre les écritures a + a + a + a + a + a et b x a avec résolution de calculs de type a x b =
5° Proposition de diverses activités sans supports concrets pour enseigner la multiplication
6° Enseignement et apprentissage des livrets
7° Enseignement de l'algorithme de multiplication
L'originalité de cette méthodologie réside en premier lieu dans le fait que tout un travail préliminaire va être mené auprès des élèves pour les amener à prendre progressivement la mesure de la signification du mot « fois ». On reconnaît bien évidemment ici la volonté de répondre à certaines difficultés concernant l'acquisition du langage, laquelle n'aura bien évidemment pas lieu d'être dans EO où de telles difficultés, même si elles peuvent effectivement concerner quelques élèves de la classe, ne vont pourtant pas conduire l'enseignement à s'y atteler de prime abord.
Cela dit, le point central de dissemblance entre les méthodologies utilisées pour enseigner la multiplication en ES et EO se trouve ailleurs. Il concerne plus particulièrement l'enseignement des techniques de calcul. La description de la méthodologie ES montre en effet que l'enseignement des techniques (tables et algorithmes) est repoussé au terme du processus d'enseignement, à la suite de tout un travail qui vise à asseoir chez les élèves le sens de l'opération. Or, c'est bien plutôt l'inverse qui se passe dans la classe EO où, dès le début de l'année scolaire, l'enseignante procède à un travail autour des tables de multiplication qu'elle concrétise avec des objets familiers des élèves : des paire de pantoufles pour la table de 2, des mains d'élèves pour la celle de 5, des paquets de mouchoirs en papier pour celle de 10, etc.
Il faut alors savoir que le fait de commencer l'enseignement des tables de multiplications au tout début de l'année en EO ne correspond pas à un choix délibéré de l'enseignante. Il répond en fait à une contrainte temporelle forte, à savoir que les élèves, c'est-à-dire au moins certains d'entre eux, maîtrisent relativement bien ces tables au mois de janvier de l'année scolaire, de manière à ce que l'enseignement de l'algorithme de multiplication puisse démarrer en février, dès le début du second semestre. En revanche, le fait que l'apprentissage

des tables ne vienne qu'après coup en ES est au contraire le fruit d'une décision réfléchie de l'enseignante. Selon elle en effet, c'est précisément parce que les élèves n'ont fait qu'apprendre les tables de multiplication lors de leur passage en EO, sans pour autant accéder à la signification réelle de l'opération, qu'ils ne sont parvenus à n'en construire que quelques connaissances fragmentaires. D'où une priorité qui sera dès lors donnée au travail du sens de l'opération avant de passer ultérieurement à l'apprentissage des tables. Cette inversion aura évidemment des répercussions au sein même de la situation d'enseignement, puisqu'au moment de l'année scolaire où s'engagera le travail du sens de l'opération (ce qui était l'objet prioritaire des activités prévues dans le dispositif), l'enseignante EO pourra s'appuyer sur tout un bagage technique que les élèves, en tout cas les meilleurs, auront pu s'approprier dans les trois mois de l'année qui ont précédé cet enseignement. Alors que dans ES, l'enseignante va au contraire faire en sorte que les connaissances des tables de multiplication que les élèves ont éventuellement pu apprendre dans EO quand ils s'y trouvaient n'apparaissent pas en situation, vu qu'elles constituent le signe de l'échec préalable des élèves.
Ajoutons enfin que la méthodologie spécifique élaborée par l'enseignante repose sur une théorie personnelle de l'enseignement construite et explicite, laquelle s'est constituée au fil des ans par conjugaison de son expérience et des nombreux cours de formation continue auxquels elle a participé. Elle se caractérise par des conceptions sur :

- *la nature de la multiplication avant tout basée sur la répétition d'une même quantité d'objets ;*
- *le rôle de l'enseignant, comme garant du sens, aide à la représentation et guide de la compréhension de la multiplication auprès des élèves ;*
- *la façon d'apprendre des élèves, considérée comme constructiviste (d'origine piagétienne), et qui veut que c'est en passant progressivement du concret vers l'abstrait qu'ils en viennent peu à peu à s'approprier la multiplication.*

La deuxième composante de l'échec dans la classe ES : l'échec effectif

La deuxième composante de l'échec en classe ES concerne l'échec effectif des élèves à réussir les tâches qui leur sont proposées en situation. Si cette composante est bel et bien également présente en EO, elle reste toutefois marginale, dans le sens où elle ne concerne généralement qu'un petit nombre d'individus et qu'elle peut ainsi rester tapie derrière l'ensemble des réussites attribuées au plus grand nombre. De trop d'importance, elle conduirait en effet à la remise en cause de l'enseignement, mais ce n'est que rarement le cas, le système EO ayant appris à s'en accommoder (pour une discussion de cette question, se référer à Favre, 1999).
Dans l'ES, on peut au contraire faire l'hypothèse, comme je l'avais fait avant la mise en œuvre du dispositif de recherche (voir page2), que l'échec effectif est très présent dans la classe. Or, le travail réalisé en a apporté un démenti formel. De façon inattendue, il s'est avéré que l'échec effectif n'était que peu présent dans la classe ES. Est-ce donc la faute aux élèves qui en savent trop ? Ou est-ce plutôt celle de l'enseignant qui « sait trop bien y faire » pour qu'il n'apparaisse pas trop ? Un peu des deux sans doute. En fait, il semble bien que tout soit entrepris dans la classe ES pour que l'échec effectif n'apparaisse pas trop, mais qu'il apparaisse quand même.
L'échec effectif, quand il se manifeste en ES, est en effet le témoin des difficultés des élèves. Il peut être également considéré comme le produit d'un enseignement antérieur qui a échoué. De ces deux poins de vue, sa manifestation présente un caractère de normalité, vu que les élèves sont dans l'ES en raison précisément de ces difficultés et/ou de l'échec de l'enseignement antérieur. À défaut de l'existence de l'échec effectif en classe ES, c'est la

place même des élèves en ES qui peut être remise en cause. Toutefois, il est également important que cet échec effectif n'apparaisse pas trop et cela, non seulement comme on le pense souvent, pour ne pas traumatiser encore une fois les élèves. Nous avons effectivement vu auparavant que l'enseignement des mathématiques prodigué en ES était un enseignement réparateur devant s'adapter et répondre aux difficultés des élèves. La réussite de cet enseignement passe donc lui aussi par la manifestation d'un échec effectif modéré, où alors, à l'image de ce qui peut se produire dans de très rares cas en EO, c'est l'enseignement dans son ensemble qui sera mis en cause.

Ce qui va toutefois considérablement distinguer ES d'EO à propos de l'échec effectif, c'est le statut que ce dernier va prendre dans la situation d'enseignement. Quand il est présent dans EO, il ne parvient en effet que très rarement à entrer dans l'échange didactique[6] et reste la majorité du temps propriété privée[7] de l'élève en échec, noyé qu'il se trouve dans la réussite d'ensemble du groupe-classe. Rien de tel en revanche en ES où la grande proximité de l'enseignant avec les élèves fait que les seconds ne peuvent que très rarement le dissimuler et le premier que difficilement en éviter la rencontre. De plus, comme c'est précisément le rôle premier de l'enseignement que de repérer l'échec effectif pour ensuite amener les élèves à mieux savoir y faire face, il est systématiquement pris en compte dans l'échange didactique, faisant l'objet d'un traitement public (Mercier, 1995).

En outre, quand on compare les façons de traiter l'échec effectif dans les deux lieux, ce n'est pas tant les moyens employés qui diffèrent, que la durée qui va être consacrée à ce traitement. Le temps d'enseignement consacré au traitement de l'échec effectif, quand il apparaît dans la situation d'enseignement en ES, pourra prendre en effet de très grandes proportions et ne se refermera qu'au détour de l'obtention d'une manifestation de réussite tout au moins partielle de l'élève. Tandis qu'en EO, la durée du traitement de l'échec effectif (quand ce dernier aura été repéré) sera forcément réduite, du fait de la présence et surtout du nombre des autres élèves qui ont déjà donné à l'enseignant une forme de quittance de réussite, qui pousse inexorablement l'enseignement à devoir aller de l'avant (je reviendrai sur ce point par la suite, lorsque je traiterai la seconde contrainte étudiée).

Dans la classe ES observée, les raisons du peu de fréquence de manifestation de l'échec effectif en situation d'enseignement ont pu être mises en évidence aussi bien du côté de l'enseignante que des élèves. La première provient des connaissances que les élèves ont su utiliser en situation et qui donnaient à penser qu'ils savaient déjà quantités de choses au sujet de la multiplication (témoins d'un enseignement antérieur qui était loin d'avoir entièrement échoué). La chose m'a d'ailleurs passablement surpris pour des élèves de classe ES envers qui l'on projetait tout juste pour certains, de débuter son enseignement. Quant à la seconde, elle réside dans les aménagements continuels que l'enseignante ES a effectués avant et pendant la situation d'enseignement afin de prévenir son apparition.

Un exemple tout à fait révélateur de ces aménagements a d'ailleurs eu lieu durant l'épreuve d'évaluation (qui était, je le rappelle, considérée dans le dispositif de recherche, comme le lieu où les différences EO et ES étaient le mieux susceptibles d'apparaître de façon explicite) dans la classe ES. Afin de faire en sorte que les deux épreuves se déroulent plus ou moins dans des conditions similaires dans les deux classes, j'avais donné aux deux enseignantes des consignes relativement précises quant au rôle qu'elles avaient à jouer durant la séquence. Je

[6] Excepté peut-être dans les rares moments où il reste un peu de temps d'enseignement dans une leçon et où le traitement de l'échec effectif dans l'échange didactique peut servir à le remplir.

[7] Il est possible que les nouveaux objectifs de l'école vaudoise qui prônent un enseignement différencié qui porte une attention plus particulière à chaque élève change un peu cette donne. L'échec effectif serait mieux pris en compte dans l'échange diacritique. Avec comme conséquence surprenante et paradoxale : une proportion d'élèves « orientés » vers l'ES de plus en plus importante.

leur avais ainsi demandé de lire les quatre problèmes de l'épreuve avec les élèves, de leur indiquer le nombre de points qu'ils valaient, de répondre aux questions portant sur les mots des énoncés que les élèves avaient pu ne pas bien comprendre et de renvoyer les autres questions à la donnée du problème. Or, si l'enseignante EO a relativement bien pu suivre ces consignes, il en a été tout autrement dans la classe ES où la lecture des quatre problèmes a été prétexte à de nombreuses retraductions, indications, explications et commentaires destinés à faire en sorte que les élèves comprennent bien à chaque fois ce qu'ils avaient à faire. L'un des problèmes, identifié comme le plus difficile par l'enseignante, et où il s'agissait de découvrir combien de chapeaux différents il était possible de réaliser à partir de trois formes et de quatre couleurs, a même fait l'objet d'un début de résolution collective, les élèves étant invités par l'enseignante à venir dessiner les premiers chapeaux qu'ils imaginaient au tableau noir.
Le traitement public de l'échec effectif au sein de l'échange didactique et la durée que peut prendre ce traitement dans la classe ES ont également fort bien pu être mis en évidence dans cette même séquence quand un des élèves s'est rendu, en cours d'épreuve, vers l'enseignante et lui a avoué qu'il ne comprenait pas le problème des chapeaux. Deux perspectives antagonistes se sont alors retrouvées en confrontation directe pour l'enseignante : respecter les consignes liées au déroulement de l'évaluation ou alors aider l'élève à mieux comprendre le problème qui lui était posé. Je n'ai évidemment pas la possibilité de narrer ici, avec quelle force, la seconde a instantanément pris le pas sur la première, faisant basculer pour l'élève (et pour l'enseignante) l'épreuve d'évaluation en une véritable séquence d'enseignement destinée à lui faire comprendre et réussir le problème. Cela a été également l'occasion de mesurer combien (l'épisode, en deux parties, a duré une bonne quinzaine de minutes) l'échec effectif de l'élève était susceptible d'être maintenu dans l'échange didactique jusqu'à ce que certains signes de compréhension (toute relative dans le cas particulier) lui permettent d'en ressortir.

La troisième composante de l'échec dans la classe ES : l'échec potentiel

L'échec potentiel constitue la troisième composante de l'échec dans la classe ES. Le dispositif de recherche mis en place a permis à la fois d'en repérer l'existence et de rendre compte de son ampleur. Elle comprend les difficultés susceptibles d'être rencontrées par les élèves en situation d'enseignement que l'enseignant anticipe. Cette troisième composante est évidemment spécifique à la classe ES. On pourrait même dire qu'en EO, c'est au contraire la réussite présumée du groupe-classe qui sert de moteur à l'enseignement.
L'échec potentiel en ES se construit à partir des deux autres composantes de l'échec que sont l'échec préalable et l'échec effectif. Il se manifeste aussi bien avant, que pendant la situation d'enseignement. On peut dire qu'il est toujours là, en puissance, prêt à se manifester au travers des décisions qui sont prises par l'enseignant (j'ai d'ailleurs hésité à parler d'échec latent pour dénommer cette troisième composante). Il concerne tout aussi bien le choix des objets d'enseignement qui seront proposés aux élèves, les façons dont ces objets leur seront soumis, que les décisions qui seront prises tout au long de la situation d'enseignement. L'échec potentiel contribue également au façonnement de la théorie personnelle de l'enseignant et plus particulièrement la conception du rôle que ce dernier se voit jouer auprès des élèves. Il tend d'ailleurs irrémédiablement à limiter à ce que l'enseignant se permet de faire en situation d'enseignement et cela, même si l'échec potentiel est susceptible d'y être démenti par l'absence d'échec effectif.
L'échec potentiel donne par ailleurs naissance en classe ES à des formes d'effet Jourdain inversés, les élèves, pour dire les choses rapidement, ne parvenant pas à être tenus comme

sachant faire de la prose. Ce qui aboutit à un état de fait pour le moins surprenant, à savoir qu'il s'avère souvent plus difficile d'être reconnu compétent en ES qu'en EO.

Cette troisième composante de l'échec en classe ES a été révélée dès les premiers entretiens où il s'est agi de présenter et dévoluer le dispositif de recherche aux deux enseignantes et où les résistances manifestées sont venues exclusivement de la part de l'enseignante ES. De son point de vue, en effet :

- *les préparations de leçon faisaient référence à des activités tirées du manuel en usage dans EO, lequel était loin d'avoir fait ses preuves en classe spéciale*
- *les préparations de leçon étaient d'un niveau relativement élevé, comportant sans doute trop de matière pour une seule période ;*
- *aucune des préparations de leçon n'envisageait la multiplication comme la répétition d'une même quantité d'objets ;*
- *les consignes prévues paraissaient trop complexes ;*
- *les préparations prévoyaient peu d'aide à apporter aux élèves en cas de difficultés ;*
- *les élèves ne parviendraient sans doute pas à rester concentrés durant quarante-cinq minutes ;*
- *le travail de groupe risquait de poser problème, car les élèves n'y étaient pas habitués ;*
- *les élèves ne savaient pas faire usage d'une calculette ;*
- *le rôle donné à la calculette dans le déroulement de la leçon était inadéquat ;*
- *la consigne comprenant l'usage des grands nombres était inappropriée.*

Si ces résistances témoignent effectivement de la vigueur de l'échec potentiel en classe ES, il est intéressant de savoir qu'elles sont toutefois susceptibles d'évoluer, voire de se transformer. C'est ainsi que suite à ces deux premiers entretiens et avant de commencer les observations en classe, l'enseignante ES me dira avoir testé à plusieurs reprises des activités de groupe et que, en conséquence, cela lui paraissait maintenant possible d'en réaliser dans sa classe. Elle avait également montré des calculettes aux élèves et constaté qu'ils savaient plus ou moins tous l'utiliser. Et elle ira même jusqu'à organiser une séquence d'enseignement complète consacrée à la multiplication durant la séance d'essai technique, alors même que je lui avais demandé de commencer son enseignement par l'une des deux préparations qui faisait partie du dispositif de recherche.
Outre ces résistances, l'échec potentiel est également à l'origine de nombreux effets récurrents qui se sont produits au cours de l'enseignement de la multiplication qui a eu lieu en classe ES. En attribuant à l'enseignante le rôle de garant du sens, d'aide à la représentation et de guide de la compréhension de la multiplication auprès des élèves, c'est bien l'échec potentiel qui a généré en situation d'enseignement la majorité des écarts entre ce qui était prévu et ce qui s'est effectivement passé (alors que dans la classe EO, les écarts ont été bien moins importants). C'est également cette composante qui a conduit l'enseignante ES (toujours en situation d'enseignement) à faire en sorte que chaque opération numérique utilisée par les élèves s'accompagne d'une représentation matérielle, symbolique ou mentale idoine, le passage dans un milieu numérique risquant, dans le cas contraire, de s'accompagner d'une perte de sens. Et c'est encore elle qui a fait qu'à force de trop préparer les élèves aux différentes tâches ou problèmes qu'ils auraient à résoudre en situation, il devenait ensuite difficile, lorsque la réussite était effectivement au rendez-vous, de gratifier les auteurs de cette réussite de réelles compétences.

La contrainte du temps

La mise en œuvre du dispositif de recherche n'a pas permis d'explorer les différentes facettes de la spécificité du fonctionnement du temps d'enseignement dans la classe ES. Du fait des options finalement retenues pour le déroulement des observations - enseignement de la multiplication à une partie des élèves de la classe, formant un groupe stable, sur des périodes d'enseignement bien choisies, où aucun des élèves du groupe ne devait quitter la classe pour se rendre en thérapie par exemple – l'étude des effets liés au fait que le temps d'enseignement est moins important en classe ES et celle des effets qui pouvaient être générés par sa discontinuité n'a pu être réalisée. En revanche, il a été d'une part possible de mettre en évidence les grandes capacités d'extension du temps d'enseignement dans la classe ES et, d'autre part, de montrer que la progression du temps didactique en classe ES s'effectue sur la base d'autres repères qu'en classe EO et que la nature même de ces repères constitue un frein d'importance à cette progression.

L'extensibilité du temps d'enseignement dans la classe ES

Nous avons vu auparavant que dans la classe ES, il ne s'agit pas de « dérouler » un enseignement selon un programme prédéterminé, mais bien plutôt de construire un enseignement et un programme adaptés aux difficultés des élèves. De manière à rendre cette adaptation possible, le temps d'enseignement doit par conséquent être modulable, extensible, et cela au moins à deux niveaux, soit au cours de la construction de l'enseignement et au sein même de la situation d'enseignement.
Dans le premier niveau, cette extensibilité se manifeste par le fait que l'enseignement des mathématiques ne nécessite pas, comme dans EO, une planification préétablie et détaillée des activités qui vont être proposées aux élèves, sur la base d'un échéancier qui devra être consciencieusement suivi. La planification en ES, quand elle existe, est beaucoup plus souple, sachant qu'elle est susceptible, en fonction de ce qui va se passer dans la situation d'enseignement, d'être partiellement, voire complètement remaniée. Contrairement à EO, il n'y a pas en ES de véritable course contre le temps qui passe et qui passe toujours trop vite. La prise de conscience du défilement du temps n'est pas concomitante au déroulement de l'enseignement, mais présente un caractère rétroactif, quand l'enseignant prend après coup connaissance de ce qu'il a pu faire et qu'il le compare, lorsque cela est possible, avec ce qu'il avait prévu de faire.
Dans le second niveau, l'extensibilité du temps d'enseignement apparaît lors de chaque rencontre avec l'échec effectif des élèves qu'il s'agit de prendre en compte et de traiter dans l'instant présent. L'EO ne dispose généralement pas d'une telle opportunité, car le poids du nombre d'élèves qui a réussi, je l'ai déjà mentionné, impose à l'enseignement d'aller de l'avant.

L'extensibilité du temps d'enseignement dans la classe ES observée s'est manifestée de façon particulièrement explicite dans les deux niveaux. Toutefois, comme j'ai déjà eu l'occasion de donner plus haut un exemple de ce qui peut se produire au sein même de la situation d'enseignement (voir pages 10 et 11), je n'y reviendrai pas ici. Je me contenterai de décrire ce qu'il m'a été donné d'observer, par contraste avec ce qui s'est passé dans EO, au sein du répertoire d'activités tenu par l'enseignante ES qui a été le témoin d'une formidable « démultiplication » d'activités consacrées à l'enseignement de la multiplication.
Si dans les deux classes en effet, les enseignantes ont dit commencer leur enseignement de la multiplication par touches successives, autrement dit en utilisant les occasions qui se

présentaient dans la vie de la classe[8] *pour permettre aux élèves d'établir, en la nommant, en la décrivant et en la faisant fonctionner, des premières rencontres avec la multiplication (avec une insistance particulière, je le rappelle, sur la signification du mot « fois » dans la classe ES), la similitude s'arrête pourtant là. On a déjà vu plus haut que dans la classe EO l'enseignante procédait dès le début de l'année à un travail technique autour des tables de multiplication. Mais ce qu'il faut bien comprendre, c'est que ce travail quoique très régulier (deux à trois fois par semaine) n'a consommé que très peu de temps d'enseignement en classe, vu que l'entraînement systématique nécessaire à l'apprentissage des tables (qui, lui, prend beaucoup de temps) faisait l'objet des devoirs à domicile. Quant à l'enseignement effectif de l'opération (je ne parle pas ici de l'algorithme), il a en tout et pour tout consisté en trois séquences d'enseignement (les deux que j'avais préparées et celle qui était au libre choix de l'enseignante) et une épreuve d'évaluation (que l'on ne peut pas à proprement parlé considérer comme une véritable séquence d'enseignement, même si certains élèves en profitent parfois pour continuer à apprendre). Cette concision n'a pourtant pas empêché l'enseignante EO de me glisser au cours d'un entretien qui ponctuait le processus d'enseignement que ce qu'il me faudrait bien prendre en compte dans mon travail, c'est qu'en temps normal (i.e. hors dispositif), elle n'aurait jamais pris autant de temps pour faire ce qu'elle avait fait et qu'elle aurait pris des raccourcis pour aller nettement plus rapidement : « Trois leçons quasiment sur la même chose, je ne l'aurais pas fait, surtout qu'on avait très bien fait la chose avec la première ».*
Rien de semblable en revanche dans la classe ES, où, sans compter les deux séquences d'enseignement et l'épreuve d'évaluation prévues dans le dispositif de recherche, ni toutes celles que l'enseignante envisageait déjà de mettre en œuvre une fois l'épreuve d'évaluation terminée (je reviendrai sur ce point par la suite), le répertoire d'activités mentionne :

- *Classement des cartes de différents jeux, selon trois ou quatre critères, recherche de combien de cartes comportent un ou deux attributs semblables, recherche des cartes manquantes d'un jeu, recherche du nombre total des cartes d'un jeu, pour aboutir à la réalisation d'un tableau bien arrangé (tableau cartésien)*
- *Compréhension orale du mot « fois » dans des situations courantes, puis dans le cadre de jeux : distribution de cartes (x cartes par personne), juxtaposition de réglettes Cuisenaire (prendre x fois telle ou telle réglette)*
- *Travail oral des doubles jusqu'à 20*
- *Travail écrit de la table de 2*
- *Réalisation des fiches d'activités de 2^ème^ année (CE1) consacrées à la multiplication*
- *Problèmes où interviennent soit l'addition, soit la multiplication : dans une bibliothèque, x livres par rayon, y rayons dans la bibliothèque ; dans un magasin, x fruits par paniers, y paniers dans des caisses.*
- *Jeu d'échanges (avec réglettes Cuisenaire) d'unités contre des dizaines et réciproquement*
- *Travail de la table de 10 et de la table de 5 (avec réglettes Cuisenaire)*

[8] Selon les deux enseignantes, ce type d'enseignement est le fait de leur expérience qui leur permet d'anticiper, en début d'année, les objets qu'elles auront tour à tour à enseigner durant l'année scolaire. L'enseignante ES évoquait à ce propos le rangement de la bibliothèque au début de l'année, tandis que j'ai pu observer, lors de la séance d'essai technique dans la classe EO, une « touche » d'enseignement de la multiplication à l'occasion d'une activité consacrée à l'enseignement de la numération de position en base dix. Il s'agissait de réaliser des groupements de timbres par paquets de dix et un élève ayant répondu qu'il en avait mis 100 dans une enveloppe, l'enseignante lui a demandé comment il s'y était pris. L'élève répondant : « 10 plus 10 plus 10, plus 10, ... », l'enseignante a alors demandé à toute la classe : « On pourrait dire aussi ?» et plusieurs élèves ont instantanément levé la main et répondu : « Dix fois dix ».

- *Activités de création de voiliers avec x décors de voile et y couleurs de coque et utilisation d'un tableau bien arrangé (tableau cartésien) pour trouver le nombre total de voiliers différents possibles*
- *Comptage de 3 en 3 et de 4 en 4 (avec réglettes Cuisenaire) pour construire les tables de 3 et les tables de 4*
- *Jeu de la cible : en utilisant des réglettes de 3, 4, 5 ou 10, peut-on atteindre la cible x ?*
- *Utilisation du mot « fois » chaque fois que cela est possible*
- *Nouveaux problèmes où interviennent soit l'addition, soit la multiplication : dans un immeuble, x appartements par étages, y étages dans l'immeuble*
- *Travail autour de la monnaie : combien font x pièces de 20 centimes, x billets de 50 francs ? comment payer x avec des pièces ou des billets de même valeur*
- *Construction de la table de 9 à partir de la table de 10 (1 x 9 = (1 x 10) – 1)*
- *Activité de création de vêtements : x sortes de pantalons, y sortes de pulls, combien de vêtements différents possibles ?*
- *Utilisation des tables pour trouver les résultats de 4 x 30, 4 x 200, ...*
- *Activité de création de montres : x sortes de boîtiers, y sortes de bracelets, combien de montres différentes possibles ?*
- *Travail systématique (avec réglettes Cuisenaire) des différentes tables*
- *Travail autour de la commutativité de la multiplication en remplissant des boîtes de chocolat et en les tournant de différentes manières*
- *Construction de la table de Pythagore*
- *Travail de la table de 6 et de la table de 8*
- *Travail autour de la distributivité de la multiplication par l'addition (avec réglettes Cuisenaire)*

À la lecture de cette liste d'activités, on observe évidemment que la mise en œuvre du dispositif de recherche a indéniablement contribué à exacerber le phénomène. J'en veux notamment pour preuve le fait que l'enseignement des tables ait commencé beaucoup plus tôt que ce qui était initialement prévu dans la méthodologie d'enseignement habituellement utilisée par l'enseignante ES et qu'une activité, où il s'agissait de dénombrer le nombre de carrés figurant sur une surface rectangulaire quadrillée comportant une grande tache en son milieu, a finalement été encore surajoutée (je l'ai appris lors d'un entretien) peu avant l'épreuve d'évaluation, laquelle comportait justement une activité du même type. Soucieuse de pouvoir rester fidèle à sa théorie personnelle de l'enseignement, mais également en prévision des difficultés susceptibles d'être rencontrées par les élèves lors de l'épreuve d'évaluation, l'enseignante a donc bel et bien été contrainte d'augmenter considérablement le temps d'enseignement consacré à l'enseignement de la multiplication (tout au moins durant la période délimitée par le dispositif). Ce qui, en retour, a fort bien permis de mettre en évidence et d'apprécier les très importantes capacités du temps d'enseignement dans la classe ES à être étendu.

La progression du temps didactique dans la classe ES

La progression du temps didactique en ES ne repose pas, comme en EO, sur la planification des activités prévues par l'enseignant et sur l'évaluation sommative finale qui vient ponctuer l'enseignement, laquelle, en cas de réussite tout au moins partielle du groupe-classe, sert en quelque sorte d'accréditation pour passer à l'enseignement d'un nouvel objet de savoir.

On peut dire tout d'abord que dans l'ES, cette progression repose sur la méthodologie spécifique crée par l'enseignant[9], qui prend, dans ce contexte, une importance toute particulière, dans le sens où elle va définir les différentes étapes par lesquelles vont devoir passer les élèves pour progresser dans le savoir. Ensuite, l'élève, en tant qu'individu, occupe une place prépondérante dans l'ensemble du processus, ce qui marque une seconde distinction avec EO, où c'est bien plutôt, comme déjà dit plus haut, la réussite de l'ensemble du groupe-classe qui alimente la progression du temps didactique. Enfin, troisième distinction d'importance, cette progression se réalise à partir d'indices prédéfinis que l'enseignant va chercher à identifier dans la situation d'enseignement au sein même de l'activité de l'élève. De fait, selon que l'élève manifeste ou non tel indice, la progression se fera ou ne se fera pas. Dans le premier cas de figure, l'élève sera autorisé à accéder à l'étape ultérieure préalablement définie dans la méthodologie de l'enseignant, alors que dans le second, il sera conduit à refaire d'autres activités du même type, voire placé en attente, jusqu'à ce qu'il remplisse mieux les conditions requises pour lui permettre d'aller de l'avant. L'enjeu de chaque situation dépasse donc clairement pour l'élève ES, le simple enjeu d'apprendre, puisqu'il s'agit également pour lui de parvenir à montrer au bon moment l'indice qu'on attend de lui, mais que, dans la plupart des cas, il ne connaît manifestement pas.
Une telle façon de procéder, qui cherche à rester au plus près des besoins et des difficultés des élèves, représente (intrinsèquement pourrait-on dire) un frein d'importance à la progression du temps didactique. Premièrement, du fait que bon nombre d'élèves qui se trouvent dans les classes ES éprouvent précisément des difficultés à montrer ce qu'ils savent dans le cadre de l'échange didactique. Secondement, parce que la manifestation ponctuelle de l'échec effectif et l'omniprésence de l'échec potentiel contribuent inlassablement à créer des doutes chez l'enseignant au sujet de la bonne avancée du processus. Les élèves ont donc tout intérêt à ne pas trop se tromper, surtout, ce qui est assez paradoxal, quand toutes les conditions ont précisément été mises en place pour favoriser leur réussite[10]. On se trouve donc bel et bien en présence d'une forme d'inertie du système ES qui vient s'opposer à la progression régulière du temps didactique. Elle s'explique par le fait que la progression repose avant tout sur l'élève, c'est-à-dire aux signes qu'il sera capable ou non de montrer pour attester d'un éventuel apprentissage et elle est rendue possible, comme on l'a vu précédemment, par la grande capacité du temps d'enseignement à être étendu.
En conclusion, cela signifie donc que dans un système doté d'un temps d'enseignement généralement restreint, le temps consacré à l'enseignement d'un objet de savoir peut s'avérer, paradoxalement, bien plus conséquent que dans l'EO. Ceci ne peut pourtant s'opérer qu'au détriment d'autres objets de savoir qui, par défaut, n'auront pas droit de cité dans la classe ES et cela, indépendamment de la (bonne) volonté et des compétences des acteurs du système en présence. La question du choix des objets de savoir enseignés, choix qui relève, en l'absence d'un programme clairement établi, pour une bonne part de la responsabilité de l'enseignant, est par conséquent une question très sensible pour l'ES.

Dans la classe ES observée, la progression du temps didactique s'articulait autour de la méthodologie spécifique créée par l'enseignante et dont je rappelle ici les étapes principales pour mémoire (je laisse volontairement de côté les aspects concernant le travail de la technique) :

1ère étape : travail oral sur la signification du mot « fois »

[9] Quand cette dernière est suffisamment construite et explicite naturellement. Dans le cas contraire, on ne pourra pas vraiment parler de progression du temps didactique, mais plutôt d'immersion au sein d'activités concernant tel ou tel objet de savoir

[10] Se pose d'ailleurs ici la délicate question des conditions nécessaires de la restauration des possibilités d'apparition de l'échec effectif en classe ES.

2ème étape : utilisation des occasions qui se présentent dans la vie de la classe pour rencontrer certaines situations multiplicatives
3ème étape : proposition de diverses activités avec supports concrets pour enseigner la multiplication
4ème étape : proposition de diverses activités sans supports concrets pour enseigner la multiplication

Plusieurs indices que l'enseignante cherchait à repérer au sein même de l'activité de l'élève et qui servaient à la progression du temps didactique ont pu être identifiés. Il s'agissait notamment pour passer de la première étape à la seconde, de parvenir (pour les élèves) à expliquer manière compréhensible la signification du mot « fois » et, pour passer de la seconde à la troisième, de réussir à faire un usage relativement spontané de la multiplication, c'est-à-dire d'arriver à déclarer sans trop d'hésitation en situation, qu'il fallait effectuer x fois y pour résoudre le problème pris en considération.

Mais le fait le plus marquant, qui a permis de montrer de façon tout à fait significative que la progression du temps didactique dans la classe ES s'articule bel et bien sur des indices prédéfinis par l'enseignant et non pas sur la planification des activités établies, ni sur la réussite ou l'échec des élèves lors d'une évaluation, s'est manifesté lors du dernier entretien que j'ai eu avec l'enseignante ES quand je lui ai montré les résultats des élèves de sa classe à l'épreuve d'évaluation.

Après avoir corrigé les épreuves, j'étais en effet arrivé au constat que les élèves de la classe ES dans leur ensemble avaient mieux réussi l'épreuve que les élèves de la classe EO (8,7 de moyenne contre, 7,9). Sans connaître l'ensemble du processus d'enseignement qui a eu lieu dans les deux classes, ni le déroulement de l'épreuve d'évaluation, ce résultat aurait naturellement eu de quoi surprendre (que faisaient donc les élèves dans la classe ES ?). Mais ce qui m'a plus particulièrement étonné ne tient pourtant pas aux résultats en eux-mêmes, qu'à l'accueil que l'enseignante ES en a fait. Il faut bien comprendre en effet qu'elle ne connaissait pas ce qui s'était passé en EO, ni durant l'enseignement, ni au cours de l'évaluation. Or, si elle a bien reconnu que les élèves de sa classe s'étaient plutôt bien comportés au cours de l'épreuve, le fait que deux d'entre eux figurent parmi les meilleurs des élèves des deux classes n'a pas paru autrement l'étonner. En fait, c'est un peu comme si elle n'y accordait pas vraiment de crédit et je me suis rendu compte, tout au long de l'entretien qui a suivi, qu'elle retraduisait en fonction de ses propres critères, les performances réalisées par les élèves, en y apportant des explications, ce qui avait pour conséquence de leur enlever le statut de véritables performances (et je me suis dit ici qu'il était donc bien difficile d'être considéré comme un bon élève dans une classe ES). Considérant toujours ces résultats, elle avait en outre l'impression que ce bon comportement d'ensemble traduisait bien le fait que la multiplication commençait à être en partie assimilée par les élèves, ceci pourtant de façon différenciée, tant il était vrai que certains commençaient à l'utiliser spontanément en situation, alors que d'autres ne le faisaient pas encore.

Mais ce qui a assurément été plus surprenant encore, ce sont les projets qu'elle dessinait déjà pour la suite et dont elle m'a fait part durant le même entretien. Elle avait en effet la ferme intention de poursuivre le processus d'enseignement de la multiplication avec trois des élèves, en leur donnant l'occasion de réaliser encore beaucoup de manipulations. Quant aux autres, parmi lesquels figurait un des deux élèves qui avait réalisé l'un des meilleurs scores des deux classes, elle imaginait plutôt s'interrompre quelque temps, de manière à laisser encore un peu mûrir les choses. C'est donc tout comme si cette épreuve d'évaluation n'avait pas vraiment compté dans son projet d'enseignement et qu'elle n'avait en fait consisté qu'en une sorte d'activité, certes inhabituelle et assurément mal placée, à laquelle il avait fallu faire face par certains aménagements pour éviter que les élèves n'y rencontrent trop de difficultés.

Conclusion

Les phénomènes mis en évidence dans le cadre de ce mémoire témoignent d'un fonctionnement différent de l'enseignement des mathématiques en classe EO et en classe ES du fait de certaines conditions particulières qui les régissent. Il ne s'agit pourtant pas, je ne souhaite pas que l'on se méprenne sur les intentions de mon travail, de porter des jugements sur l'un ou sur l'autre des deux systèmes. En fait, il est bien possible que le ralentissement de la progression du temps didactique soit profitable en classe ES à certains élèves et le serait peut-être aussi tout autant à tous ceux qui, en classe EO, n'arrivent pas à suivre et qui sont assurément bien trop vite considérés comme nuls en maths. Réciproquement, il est probable que certains élèves ES sont en quelque sorte péjorés par ce frein qui les confine dans leur sentiment d'impuissance à réussir et à montrer ce qu'ils savent faire.

Il n'en reste pas moins que la (grande) question qui demeure posée est comment et quand les élèves des deux systèmes parviennent effectivement à apprendre quand on sait que l'enseignement va tellement vite et avec une portion d'activités tellement réduite dans l'un, alors même que l'omniprésence de l'enseignant dans l'autre semble réduire comme peau de chagrin les possibilités d'émergence de moments adidactiques. En suivant André Rouchier qui affirme que le système d'enseignement fonctionne en bonne partie grâce au fait que dans chaque élève sommeille un autodidacte, on pourrait dire que l 'EO y croit peut-être un peu trop, alors que l'ES peut-être pas tout à fait assez.

Reste que si l'on souhaitait en connaître un plus sur le fonctionnement du second, le travail échafaudé dans ce mémoire serait naturellement à poursuivre[11], par l'étude des effets d'autres conditions spécifiques de la classe ES (à l'exemple de celles mentionnées à la première page de cette contribution), autour d'autres objets d'enseignement (sachant que la multiplication fait partie de ceux habituellement sensibles dans l 'ES, il serait bon de s'intéresser à d'autres objets, moins communément enseignés, comme ceux relevant du domaine de la logique ou de la géométrie), dans d'autres contextes de l'ES (par exemple dans le cadre d'institutions qui prennent en charge des élèves moins proches de la « norme » EO).

Références bibliographiques

Arsac, G., Mante M. (1989). Le rôle du professeur : aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.* LSD-IMAG, Université de Grenoble, pp.79-105.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. In J. Brun (dir.), (1996). *Didactique des mathématiques.* Delachaux et Niestlé, Textes de base en pédagogie, Lausanne, pp.243-274.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In J. Brun (dir.), (1996), *Didactique des mathématiques.* Delachaux et Niestlé, Textes de base en pédagogie, Lausanne, pp.45-143.

Cherel, C., Giroux, J. (2002). Intégration d'élèves en difficulté : une problématique didactique. *Instantanés mathématiques no XXXIX*, pp.37-48.

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques.* Presses de l'Université de Montréal, Montréal, pp.31-69.

[11] Relevons à ce sujet que la poursuite de ce travail a été initiée au Québec à l'occasion d'un travail comparatif de l'enseignement des entiers relatifs dans une classe ordinaire et une classe de doubleurs (Giroux & René de Cotret, 2001) et lors de la réalisation d'un autre mémoire (Cherel & Giroux, 2002) où il s'agissait de comparer l'enseignement des mathématiques dispensé à deux élèves intégrés conjointement dans une classe ES et une classe EO.

Favre, J.-M. (1992). La multiplication : Elaboration d'une démarche par l'observation de la formation et de l'évolution d'un concept. Mémoire inédit, Séminaire cantonal de l'enseignement spécialisé (SCES), Lausanne.
Favre, J.-M. (1993). Utilisation de la calculette dans la formation du concept de multiplication dans l'enseignement spécialisé. *Math-école n°156*, pp.27-29.
Favre, J.-M. (1997). L'échec, le temps, la multiplication. Etude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la multiplication dans une classe spécialisée, par comparaison avec l'enseignement et l'apprentissage de la même notion dans une classe primaire. Mémoire inédit, FPSE, Genève.
Favre, J.-M. (1999). Le mathématique et le cognitif : deux chimères pour l'enseignant ? In G. Lemoyne & F. Conne (Ed.), *Le cognitif en didactique des* mathématiques. Presses de l'Université de Montréal, Montréal, pp.235-261.
Giroux, J. & René de Cotret, S. (2001). Le temps didactique en classe de doubleurs. *Actes de l'AFDEC.* Université de Montréal, Montréal, pp.41-72.
Hadji, C. (1989). *L'évaluation, règles du jeu : des intentions aux outils.* ESF éditeurs, Pédagogies, Paris.
Mercier, A. (1985). Le temps des systèmes didactiques. Note interne, IREM, Aix-Marseille.
Mercier, A. (1995). Le traitement public d'éléments privés du rapport des élèves aux objets de savoir mathématiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (dir.), *Différents types de savoirs et leur articulation.* La Pensée sauvage, Grenoble, pp. 145-169.
Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants.* Peter Lang, Berne.
Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (dir.), (1996), *Didactique des mathématiques.* Delachaux et Niestlé, Textes de base en pédagogie, Lausanne, pp.197-242.

La création d'un groupe de recherche pour étudier les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans l'enseignement spécialisé

Jean-Michel FAVRE

HEP VD, Lausanne

Les origines du groupe ddmes

À l'origine du groupe ddmes, on trouve l'intention inédite de la direction d'un institut de formation - l'institut de formation et de recherche sur l'enseignement spécialisé (IFRES) à Lausanne - d'étudier les questions de didactique et plus spécifiquement de didactique des mathématiques dans l'ES. À cette fin, l'institut en question a engagé un chercheur en didactique des mathématiques qui a été à la fois chargé de former les enseignants spécialisés en didactique des mathématiques, de mener des travaux de recherche dans l'ES et de faire « exister » et fructifier la recherche à l'intérieur même de l'IFRES. Fort de ce mandat, le chercheur est alors entré en contact avec plusieurs institutions de l'ES et a mis sur pied une collaboration qui l'a conduit à engager régulièrement des travaux aussi bien avec des élèves que des enseignants spécialisés. Au sein de l'IFRES, en plus des cours de didactique des mathématiques, il en est venu à créer et à animer un séminaire d'initiation à la recherche consacré à l'enseignement des mathématiques dans l'ES. Il a également été amené à diriger plusieurs travaux de mémoire consacrés à des questions du même ordre.

Au terme d'environ huit années d'un mode de fonctionnement qui a permis à plusieurs volées d'enseignants spécialisés d'être initiées à des questions de didactique des mathématiques dans l'ES, ce même chercheur a quitté l'IFRES, tout en maintenant les activités de recherche qu'il avait engagées dans les institutions. Deux questions d'importance se sont alors posées :

- Comment assurer la pérennité de la recherche au sein de l'IFRES ?
- Comment donner la possibilité aux enseignants spécialisés arrivés au terme de la formation de poursuivre, quand ils le souhaitent, les travaux qu'ils ont initiés lors du séminaire de recherche ou à l'occasion de la réalisation de leur mémoire ?

Un premier formateur a été engagé, en remplacement du chercheur pré-cité, et entre eux est née, en réponse à ces deux questions, l'idée de créer un groupe, composé de chercheurs, de formateurs et d'enseignants, pour continuer, tout en la dépersonnalisant, à faire vivre la recherche à l'IFRES. Le nouveau formateur n'est toutefois pas resté plus d'une année à l'IFRES et c'est à l'occasion de l'engagement d'un second formateur, en remplacement du premier, que le projet a finalement vu le jour.

Les débuts du groupe ddmes

À ses débuts, le groupe se composait de neuf membres. Certains étaient chercheurs, d'autres formateurs et d'autres encore enseignants spécialisés. Les chercheurs étaient tous également formateurs, mais les formateurs n'étaient pas tous chercheurs et pouvaient être aussi enseignants spécialisés. Les enseignants spécialisés n'étaient ni chercheurs, ni formateurs, mais avaient toutefois été acculturés à la recherche en didactique des mathématiques, que ce soit en suivant le séminaire d'initiation à la recherche, durant la réalisation de leur mémoire ou en travaillant directement dans leur institution avec un chercheur en didactique des mathématiques.

Partant du postulat que seule la recherche était capable d'assimiler ses propres résultats, le groupe a très vite abouti à la nécessité de créer un milieu pour la recherche, au sein duquel enseignants, formateurs et chercheurs, en s'employant à décrire des faits, à s'accorder sur leur formulation, à rattacher ces faits à des problématiques et à identifier des phénomènes, s'essaieraient à la faire vivre. Le groupe s'est ainsi donné comme première tâche, de partager, pour essayer de les coordonner, les différentes expérimentations (que nous nommerons plus tard investigations ou investigations exploratoires) entreprises par les participants, que ce soit à titre d'enseignants ou de chercheurs, dans les différents lieux de l'ES où ils intervenaient. Il s'agissait en outre de formuler à leur propos, un certain nombre de questions que nous chercherions ensuite à travailler, c'est-à-dire à lier entre elles et à rattacher, quand cela était possible, à certaines problématisations déjà thématisées en didactique des mathématiques.

En guise d'exemples, voici quelques questions qui sont apparues tout au long de la première année d'activité du groupe :

- Quels repères, autres que la réussite, pour essayer de « valuer » une activité de type ouvert (du point de vue de l'enseignant) en ES ?
- Quels sont les effets produits et les difficultés engendrées par la volonté de récolter des données en situation par l'enseignant ES ?
- Comment observer l'évolution des stratégies des élèves au cours d'un jeu en ES ?
- En quoi un scénario peut-il figer la réponse d'un élève et rendre la question de la relance, déjà très subtile en ES, encore plus délicate ?
- Comment amener les élèves de l'ES à laisser des traces de leur activité et à recourir à l'écrit pour faire des mathématiques ?
- Comment concevoir en ES un dispositif qui permette aux élèves de restituer ce qu'ils ont appris ?
- Quel est (quels sont) l'enjeu (les enjeux) d'un jeu pou l'enseignant spécialisé ?
- Comment les élèves de l'ES "transportent"-ils des connaissances développées dans un jeu vers un autre contexte ?

Ces différentes questions ont donné lieu au sein du groupe à de nombreux débats au sujet de certains concepts théoriques et procédés méthodologiques développés en didactique des mathématiques et ont également été, comme on aura l'occasion de le montrer par la suite, le moteur à l'élaboration et à la réalisation de plusieurs investigations.

Le mode de fonctionnement du groupe ddmes

Très rapidement, c'est-à-dire après quatre mois de fonctionnement du groupe, l'IFRES, par la voix de son directeur, a demandé au groupe de définir les objets de ses travaux et les éventuelles retombées que la formation à l'enseignement spécialisé était susceptible d'en retirer. Nous avons ainsi été amenés à concevoir un document inédit (Conne, 1999) qui proposait une sorte de définition du groupe, décrivait son mode de fonctionnement et précisait ses rapports à la formation. Nous en relevons ici les points centraux :

1. Le groupe établit au sein de l'IFRES (institut de formation et de recherche en enseignement spécialisé) un milieu pour la recherche en didactique des mathématiques pour l'enseignement spécialisé.

2. Il est animé par un chercheur et un formateur mandatés par l'IFRES et regroupe des chercheurs (rattachés ou non à l'IFRES), des formateurs et des enseignants spécialisés, en titre ou en formation.

3. La tâche dévolue au groupe est essentiellement celle d'étudier des questions de didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé, de les définir, de les formuler, de les relier à d'autres questions et de tenter d'y apporter des réponses. Le groupe se donne des moyens pour cette étude, en particulier il se dote d'un espace expérimental où il puisse mener soit des recherches, soit des investigations exploratoires de portée plus limitée, moins formelle et moins cadrée que des recherches proprement dites.

4. Le groupe est un lieu d'échanges et de débats au sujet de recherches en didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. Au cours des discussions et des recherches, et selon les nécessités, il effectuera un travail de documentation et de lecture (livres, articles, rapports de recherche etc.). Dans ce cadre, éléments théoriques et méthodologiques seront présentés, discutés, voire étudiés.

5. Les rapports entre le groupe ou chacun de ses membres avec les autres instances de l'IFRES et, en particulier, les éventuelles contributions à la formation (au travers de cours, conférences, journées à thème, etc.) seront l'objet de documents établis d'entente avec la direction de l'institut.

6. Le travail du groupe s'élabore autour d'un questionnement qui lui est propre. Le groupe assume donc les thématiques et les problématiques qu'il étudie, ainsi que les questions et les réponses qu'il y apporte. Ce point est central dans le sens où le groupe n'assume pas les questions et réponses particulières que chacun de ses membres vient à se poser, mais se concerte et se met d'accord sur une liste organisée (plus ou moins ordonnée) de questions et de réponses.

7. Il s'agit nécessairement d'un questionnement en didactique des mathématiques, c'est-à-dire qui puise ses sources dans des questions d'enseignement de cette matière, reprises et reformulées afin d'en faire des questions de recherche. Ce travail de liaison des questions d'enseignement (sous-tendant certaines actions de classe) avec un questionnement et des thématiques de recherche (qui les associe à d'autres éléments de recherche) est l'une des tâches majeures du groupe. En d'autres termes, ce que le groupe propose est de donner suite au questionnement de l'enseignant (l'enseignement) et de l'alimenter, mais dans la perspective des recherches et des thématiques retenues. Par contre, le mouvement inverse de « retour vers la réalité de la classe » n'est pas du ressort du groupe et sera laissé à discrétion de chacun, voire attribué à d'autres instances de l'IFRES.

8. Les recherches sont menées en équipe sous la responsabilité d'au moins un chercheur. Une recherche se définit explicitement dans un cadre qui comporte :

- la référence à une problématique explicite qui organise les questions qu'elle se propose d'étudier ;

- la référence à un champ théorique, ses concepts et modèles ;

- la référence à un raisonnement ' expérimental » représentant la mise en œuvre des éléments théoriques en vue de trouver les réponses aux questions abordées ;

- la référence aux moyens mis en œuvre pour « piloter » l'expérience dans l'espace expérimental (ici des classes de l'enseignement spécialisé), et en particulier la répartition des tâches dans l'équipe de recherche ;

- la référence à des méthodes de récoltes et de traitements des données.

Elle aboutit à la production de faits, met en discussion les éléments de réponse apportés, et enrichit la problématique de nouvelles questions, de nouvelles formulations de questions, ou encore de nouveaux liens entre questions.

9. Les « investigations » exploratoires regroupent quant à elles des activités expérimentales de portée bien moins lourde à assumer que des recherches. Bien qu'elles ne nécessitent pas autant de précautions, et peuvent être entreprises individuellement, il s'agit pourtant d'un enjeu majeur de ce projet. Le groupe s'attachera donc particulièrement à susciter et favoriser de tels travaux. Il est en effet essentiel que tout participant au groupe profite d'un espace *expérimental qui soit le pendant, dans son lieu de travail, du groupe de recherche ; ensuite, il est important que les membres du groupe qui ne seraient pas directement associés à telle ou telle recherche puissent s'en inspirer. D'ailleurs, toute recherche repose elle-même sur un large fond d'investigations (plus ou moins ponctuelles) qui se trouvera en retour enrichi de toutes les observations (plus ou moins fortuites) et de toutes les « mises au points » annexes qu'elle aura occasionnées.*

Ce long extrait du document constitutif du groupe ddmes montre la nette volonté de chercher à distinguer, pour leur permettre de mieux coexister et de s'enrichir l'une l'autre, deux perspectives de travail que sont les investigations exploratoires et les recherches. Il s'agit en effet de pouvoir dépasser, au sein d'un groupe de recherche en voie de constitution et qui ne dispose à son origine que de très peu de moyens d'action, le débat de savoir si ce qui est produit et réalisé par le groupe est effectivement de la recherche ou au contraire n'en est pas. Rappelons que le groupe est composé à la fois de chercheurs, de formateurs et d'enseignants dont les attentes à l'égard de ce qui va s'y faire sont par nature très hétérogènes. On peut, pour s'en convaincre, citer ici celles qui ont été exprimées par les participants lors de la première réunion du groupe :

- ne pas rester seul dans son coin, pouvoir échanger autour de ce que l'on fait ou de ce que l'on a déjà fait et débattre des questions que l'on se pose et dont on n'a pourtant jamais l'occasion de parler dans les institutions
- poursuivre le travail entamé à l'occasion de la réalisation du mémoire
- se tenir au courant de ce qui se passe ailleurs, avoir accès à des lectures
- organiser et discuter des séquences d'observation (à plusieurs) en classe
- conserver un contact avec la réalité de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques
- travailler des notions mathématiques
- débattre des questions inhérentes à l'organisation de l'enseignement des mathématiques et de la mise en oeuvre des moyens d'enseignement de l'école ordinaire dans les classes ES
- éprouver la solidité de certains concepts de la didactique des mathématiques, par leur mise à l'épreuve dans l'ES
- aborder la question du langage et de la représentation d'un problème dans l'apprentissage des mathématiques dans l'ES
- rendre visible ce que l'on fait, pour donner à la recherche en didactique des mathématiques dans l'ES une place moins marginale

Il y avait donc lieu de permettre à cette hétérogénéité de pouvoir prendre place au sein du groupe, en faisant sorte que chacun de ses membres puisse se sentir partie prenante du travail qui allait s'y réaliser La distinction entre investigations et recherches nous est ainsi apparue comme un moyen incontournable pour chercher à relever ce défit de taille : les premières concourant à la créativité et au dynamisme du travail en cours ; les secondes à son contrôle et à sa rigueur.

Un autre point important à relever dans l'extrait de texte qui précède concerne les rapports que le groupe cherche à entretenir vis-à-vis de l'institut de formation. S'il était bien clair que c'était l'IFRES qui était à l'origine de la constitution du groupe et qui lui offrait les (maigres) moyens de son existence, il était essentiel que le groupe puisse néanmoins conserver une importante marge de manœuvre dans le choix des thématiques et des problématiques qu'il voulait étudier. Le groupe, pour se développer, ne devait pas être dirigé de l'extérieur et assujetti aux besoins immédiats de la formation. Il avait besoin d'autonomie, ne serait-ce que pour parvenir à mettre en évidence et explorer des questions dont l'institut de formation n'avait pas encore connaissance et dont elle pourrait peut-être ultérieurement reconnaître une certaine utilité. Les retombées du travail du groupe ne devaient donc pas d'abord être envisagées pour la formation, mais bel et bien pour la recherche.

Les premières investigations du groupe ddmes

Au début de la seconde année d'existence du groupe, nous avons convenu d'organiser notre travail en cherchant à définir, autour d'une thématique particulière : la pratique du jeu pour enseigner différents contenus mathématiques dans l'ES, différentes tâches que nous comptions mettre en oeuvre dans des classes de l'ES et dont les observations réalisées serviraient ensuite de base au travail du groupe. Des discussions autour des textes de didactique des mathématiques que nous avions collectés l'année précédente (tous consignés dans un classeur disponible à l'IFRES) avaient également été souhaitées par plusieurs participants.

La première perspective a toutefois été abandonnée au profit d'une autre qui partait de l'hypothèse, discutée dans un texte intitulé *: Domaine de validité de différentes approches en didactique des mathématiques : Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé ?* (Conne, 1999), que ce qui distinguait l'enseignement ordinaire (EO) de l'enseignement spécialisé (ES) allait jusqu'à affecter le contenu de l'enseignement des mathématiques qui se trouvait réalisé dans les deux systèmes (ce qui aurait pour conséquence de donner une véritable consistance aux deux dernières lettres – e et s - du nom du groupe que nous avions constitué). Partant de cette hypothèse, il s'agissait dès lors pour chaque participant d'essayer de définir des questions susceptibles de porter sa propre réflexion et de l'engager dans des investigations qu'il aurait ensuite charge de mener dans les classes où il intervenait. Les réunions du groupe devraient alors permettre, non seulement de débattre des investigations réalisées, mais également de les collecter et de les consigner, afin d'en conserver la mémoire, d'établir des liens entre elles, ainsi qu'entre les questions qui les avaient générées et ceci, en regard de l'hypothèse générale qui les englobait.

Afin d'initier cette nouvelle orientation, l'un des chercheurs du groupe a alors adressé aux enseignants spécialisés qui y participaient un certain nombre de questions que nous citons ci-dessous de manière à développer quelque peu la question de la spécificité et des rapports qu'entretiennent l'enseignement des mathématiques en ES et en EO :

1. L'élève de l'ES est-il pensé comme étant un élève en difficulté scolaire, autrement dit est-ce la norme avec laquelle on pense ces élèves, bien que l'on sache faire des exceptions ? Dans vos classes, comment percevez vous vos élèves ? Cette perception a-t-elle un rapport avec l'institution dans laquelle vous travaillez ?

2. Peut-on dire que les institutions dans lesquelles vous travaillez sont des institutions paramédicales (au sens large) ? Dans ce cas, la vie scolaire en institution est-elle aussi éloignée de la vie scolaire ordinaire que l'est la vie à l'hôpital de la vie professionnelle ? Aujourd'hui on cherche à limiter le temps de séjour à l'hôpital, est-ce que la tendance est la même dans l'ES ? Doit-on dire enseignement « extra-ordinaire » plutôt qu'enseignement spécialisé ou ce denier est-il plus simplement une sous-catégorie de l'enseignement extra-ordinaire ?

3. Qui est spécial dans l'ES : les élèves ou tout autant l'enseignement ? Ai-je raison d'affirmer que l'ES serait lui-même handicapé (en reflet avec les handicaps des élèves) ? Dans le même ordre d'idée, si l'on considère que l'élève ES est un élève qui ne pourrait (ou n'aurait pas pu) pas s'adapter aux conditions d'enseignement ordinaire (ne serait-ce que par son emploi du temps grevé par des thérapies ou rééducations de tout genre, ou encore par sa forte dépendance dans sa mobilité etc.), en quoi l'ES, qui essaie de s'adapter à cette inadaptation, en est-il affecté ? Cette situation n'est-elle pas propice à certains dysfonctionnements

spécifiques dans l'ES, sortes de pathologies didactiques spécifiques à l'ES, comme il y a des pathologies didactiques spécifiques à l'école ordinaire ?
4. Que pensez-vous des « stratégies de détour » qui sont utilisées dans l'ES pour tenter de faire faire des mathématiques aux élèves ? Quelles difficultés d'enseigner par le biais des jeux rencontrez-vous dans vos classes ? Les jeux permettent-ils d'enseigner ou seulement de faire apprendre ?
5. Comment vous situez-vous vis-à-vis de la question des illusions que vous vous feriez sur vos élèves ? Avez-vous des exemples de cas où vous vous êtres posé une telle question : « Est-ce que je ne suis pas en train de m'illusionner ? » ? Et si la réponse était : « Oui, sans doute je m'illusionne. », qu'en feriez-vous ?
6. Est-ce une norme commune à l'ES et à l'EO qui vous sert de repère vis-à-vis de l'enseignement qui a lieu dans l'école ordinaire ou bien l'EO constitue-t-elle une norme en elle-même ? Lorsque vous parlez avec des collègues de l'école ordinaire n'envisagent-ils pas l'EO comme une norme, au lieu d'en faire appel à une norme commune à l'ES et à l'EO ?
Outre les débats que ces questions ont su générer au sein du groupe, elles ont été à l'origine de plusieurs investigations qui ont été conduites dans diverses classes de l'ES.
La première investigation a concerné l'utilisation de la calculette auprès des élèves d'une classe d'un centre thérapeutique de jour. Elle a cherché à apprécier l'investissement que les élèves étaient à même de faire d'un tel outil dans le cadre de tâches très ouvertes et occasionnant un grand nombre d'essais et d'erreurs relativement peu coûteux (dans le sens où c'était la calculette qui opérait à la place de l'élève) et dotées de rétroactions immédiates.
La seconde investigation s'est plus particulièrement intéressée à la création et à la mise en œuvre d'activités dans le domaine de l'espace et de la géométrie, en utilisant comme principal support le pliage et le découpage, ainsi qu'un matériel didactique souvent sous-exploité dans les classes de l'ES : les polydrons[1]. Il s'agissait, par exemple, de demander aux élèves de découper un triangle, un carré, un cercle ou encore un cœur au beau milieu d'une feuille de papier, puis d'utiliser le pliage de la feuille en deux pour mieux parvenir à le faire. On essayait ainsi de jouer entre les anticipations faites lors du découpage et les démentis apportés par l'ouverture de la feuille une fois le découpage réalisé, de façon à amener les élèves à des ajustements successifs qui leur permettent progressivement d'apprendre à réussir la tâche qui leur était donnée.
Une troisième investigation est partie de l'observation d'une élève faisant preuve de grandes difficultés en mathématiques, mais qui se révélait pourtant très performante dans le cadre de divers jeux de stratégie (comme l'Awelé, par exemple). On en est ainsi venu à comparer plus spécifiquement des activités-jeux avec des activités plus scolaires pour chercher à identifier certains paramètres qui pourraient expliquer (tout au moins en partie) les performances de cette élève, comme, par exemple, le fait que dans les activités-jeux :

- le maître n'enseigne pas directement ;
- la dévolution ne procède pas de la même façon, dans le sens où l'élève peut apprendre progressivement les règles au fil du jeu ;
- il y a toujours plusieurs coups possibles et ce n'est qu'après plusieurs coups que l'élève peut en venir à savoir s'il va gagner ou perdre ;
- l'élève peut lire ses coups, leur succession et leurs effets ;
- les gains sont différents.

Enfin, une quatrième investigation est également partie de l'observation d'un élève dont les enseignants successifs se plaignaient de ne pouvoir obtenir d'informations suffisamment stables sur ce qu'il avait effectivement appris en classe. L'enseignant du groupe qui avait reçu cet élève dans sa classe s'était toutefois aperçu que ce dernier était bel et bien capable

[1] Il s'agit en fait de pièces de plastique de couleurs diverses, de formes triangulaires, carrées ou pentagonales que l'on peut emboîter les unes dans les autres pour former des polyèdres (d'où leur nom, polydrons).

d'apprendre, mais surtout quand l'enseignement dispensé dans la classe ne lui était pas directement destiné. Cette observation qui entrait de plain-pied dans les questions concernant la restitution des connaissances acquises dans les classes ES que le groupe s'était posées durant sa première année de fonctionnement (voir ci-dessus) a suffisamment retenu notre attention pour nous amener à concevoir une investigation d'une plus longue durée.

Nous avons ainsi construit, mis en œuvre, observé et analysé plusieurs séquences d'enseignement pour chercher à comprendre dans quelles conditions cet élève parvenait à investir une tâche et si nous pouvions, selon le type de tâches proposées et selon le mode d'interactions enseignant-élève et élève-élève mis en place dans la classe, quelque peu le contrôler[2]. Nous en sommes ainsi venus à nous questionner sur le sens des stratégies que certains élèves de l'ES mettent en place (comme ici de s'investir dans une autre tâche que celle qui leur est proposée) et si celles-ci pouvaient s'interpréter comme des stratégies qui leur permettent de conserver le contrôle des situations rencontrées. Nous nous sommes également demandés en quoi le travail effectué durant cette suite de séquences nous avait permis d'opérer un déplacement nécessaire pour entrer dans le jeu l'élève et pouvoir progressivement attribuer à certains de ses gestes des indices de restitution. Cette question du « déplacement à opérer » pour créer de nouvelles attributions, voire de nouvelles illusions, nous est alors apparu comme un enjeu crucial pour l'ES, en regard du fatras d'explications pragmatiques qui souvent accompagnent et tendent à banaliser les performances réalisées par les élèves de l 'ES.

Il est en outre important de relever que cette quatrième investigation marque à n'en pas douter un tournant sur le chemin qui a mené le groupe ddmes à l'élaboration d'un projet de recherche commun. Cette investigation a en effet permis d'élaborer un travail sur une relativement longue durée (sans que l'on ne puisse encore à proprement parler de recherche), au cours duquel les réunions mensuelles du groupe ont à la fois permis l'examen des résultats produits et la conception de nouvelles expérimentations. Elle s'est concentrée spécifiquement sur une institution de l'enseignement spécialisé[3] qui est devenue par la suite l'espace expérimental privilégié du groupe et dont celui-ci cherchait précisément à se doter. Elle a en outre contribué, sans que ce phénomène ne soit entièrement contrôlé par ailleurs, à réduire considérablement le nombre de membre du groupe suite aux départs successifs d'un chercheur et de quatre enseignants spécialisés, lesquels n'ont été que partiellement compensés au cours de cette année par l'arrivée d'un nouveau chercheur.

Des nouvelles investigations à l'élaboration d'un projet de recherche

La troisième année d'existence du groupe a commencé par la mise en route d'un nouveau travail d'investigation de longue durée. Fruit du renouvellement du séminaire d'initiation à la recherche qui avait lieu à l'IFRES, il a pris pour objet l'enseignement des algorithmes de calcul.

Les algorithmes de calcul constituent en effet des objets d'enseignement très sensibles dans l'ES en raison du surinvestissement[4] dont ils font preuve, en ce sens qu'ils sont généralement

[2] L'ensemble de ce travail d'investigation a fait l'objet d'une rétrospective inédite (Favre, 2000) et a, conjointement à d'autres travaux menés dans l'ES par l'un des chercheurs du groupe, abouti à un texte qui discute des questions de pertes et de prises de contrôles dans l'interaction enseignant-élève dans l'ES (Conne, 2001).

[3] Il s'agit de l'institution Pré-de-Vert à Rolle CH, dont la description est réalisée dans la contribution de Cange dans ces actes.

[4] La question des investissements de savoir dans l'ES est discutée dans : *Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées* (Conne, 2003).

enseignés (surenseignés serait sans doute un terme plus exact) tout au long et jusqu'au terme de la scolarité des élèves. Nous en sommes donc venus à nous demander comment des élèves qui avaient été enseignés des algorithmes de calcul à de multiples reprises pouvaient encore ne pas les maîtriser, quels types d'erreurs ils produisaient en les réalisant et en quoi ces erreurs ressemblaient ou au contraire différaient de celles qui étaient faites par des élèves plus jeunes dans l'EO.

À cet effet, nous avons défini, en nous référant aux travaux réalisés par Brun & all. (1993, 1994), un certain nombre d'items concernant les algorithmes d'addition, de soustraction, de multiplication et de division et mené des entretiens à Pré-de-Vert auprès d'élèves dont l'âge les dispense habituellement d'un tel enseignement dans l'EO (tout au moins dans les voies qui regroupent les meilleurs élèves et où la calculatrice vient se substituer aux éventuelles lacunes techniques dont ils pourraient faire preuve). Ces entretiens ont alors montré la capacité des élèves de l 'ES à faire fonctionner de multiples règles d'usage des algorithmes (dont le nombre et la variété sont assurément fonction du nombre et de la variété de celles qui leur ont été enseignées par leurs enseignants successifs), au détriment, pourrait-on dire des règles de contrôle[5]. Voici en guise d'exemple, la multiplication de 723 par 48 :

```
1 2 3 4 6 8 3 2
            7 2 3
          ×   4 8
        ---------
8 6 4 2 8 4 0 2 4
```

Procédure : 8 x 3 = 24, je pose 4 et je retiens 2 ; 2 + 2 = 4, 8 x 4 = 32, je pose 2 et je retiens 3 ; 3 + 7 = 10, 8 x 10 = 80, je pose 0 et je retiens 8 ; 8 x 8 = 64, je pose 64 et je retiens 6 ; 8 x 6 = 48, je pose 8 (sur le 6) et je retiens 4 ; 8 x 4 = 32, je pose 2 et je retiens 3 ; 8 x 3 = 24, je pose 4 et je retiens 2 ; 8 x 2 = 16, je pose 6 et je retiens 1 ; 8 x 1 = 8, je pose 8 et je m'arrête.

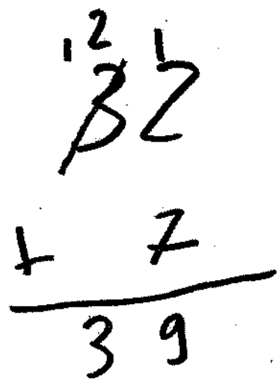
Ce déploiement de règles d'usage aboutit même parfois, de façon assez surprenante il est vrai, à la création de nouveaux algorithmes qui se révèlent fonctionnels pour toute une classe d'items, comme c'est le cas dans ce second exemple :

```
2 3 4
   5 7
 × 3 6
 -----
2·0 4 2
   ·1 ·
 -----
2 0 5 2
```

[5] Il ne nous est naturellement pas possible de donner ici en détail les résultats auxquels nous avons abouti, mais nous pouvons cependant mentionner que la question de l'interprétation et du travail de l'erreur dans l'ES a donné lieu à la réalisation d'un poster au colloque « Constructivismes : usages et perspectives en éducation » (Cange & Favre, 2001) et à une communication au colloque consacré à la spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire dans le cadre du 69e congrès de l'ACFAS à Sherbrooke (Cange & Favre, 2003).

Procédure : 6 x 7 = 42, je pose 2 et je retiens 4 ; 6 x 5 = 30, 30 + 4 = 34, je pose 4 et je retiens 3 ; je place un point au-dessous du 2 et je poursuis : 3 x 7 = 21, je pose 1 (à la gauche du point) et je retiens 2 (à la gauche du 3 précédent) ; 3 x 5 = 15, 15 + 2 + 3 = 20, je pose 20 (à la gauche du 42) ; 2 + 0 = 2, je pose 2 ; 4 + 1 = 5, je pose 5 ; 0 + 0 = 0, je pose 0 ; 2 + 0 = 2, je pose 2 et je m'arrête.

Nous avons également pu observer que ce déploiement de règles génère des erreurs que l'on peut qualifier d'*hybrides*, en référence à la terminologie utilisée par Brun & all pour qualifier des erreurs provenant dans l 'EO à la suite de l'enseignement successif de plusieurs algorithmes de division (Brun & all, p.205). Mais ce qui change dans le cas particulier, c'est que les erreurs sont produites par l'usage de règles provenant d'algorithmes concernant des opérations différentes comme on peut le constater dans l'exemple qui suit (import de règles de la soustraction en colonnes dans l'addition) et qui est lui aussi fonctionnel :



Procédure : 2 + 7 =, je ne peux pas ; je vais emprunter 1 au 3, je trace le 3, je note 2 et je place 1 au-dessus du 2 ; 12 + 7 = 19, je pose 9 et je retiens 1 (à la gauche du 2 que j'ai noté précédemment) ; 1 + 2 = 3, je pose 3 et je m'arrête.

Nous avons également pu remarquer durant ces entretiens comme il était difficile d'apprécier combien les élèves pouvaient tenir aux règles qu'ils utilisaient et quand celles-ci étaient quelque peu étayées par des savoirs relativement stables. Nous avons en effet rencontré beaucoup de difficultés à essayer de mettre les règles utilisées en contradiction en cours d'entretiens pour inviter les élèves à mieux en contrôler l'usage. En regard de comment des élèves plus jeunes s'y prennent pour exécuter un algorithme, nous avons également fait l'hypothèse que les traitements réalisés par ces élèves étaient sans doute moins dans l'action et plus thématisés. Leurs conduites en seraient alors moins mobiles, car plus réfléchies, d'où s'ensuivrait une difficulté plus grande à les faire évoluer. Nous en sommes ainsi arrivés à la conclusion (partielle) que les algorithmes de calcul constituaient pour ces élèves de l'ES une sorte de terrain miné dont il serait bon de les amener à se détacher, en leur proposant par exemple un support technique plus stable comme la calculatrice (on opère ici un premier retour sur une investigation précédente).
La venue au sein du groupe de Mme Cathy Arsenault, professeure à l'université du Québec à Rimouski, et la présentation de sa thèse intitulée « Ingénierie didactique sur les procédés de calcul d'addition et de soustraction » (1996) nous a en outre donné l'occasion de prolonger nos réflexions en nous interrogeant notamment sur comment les élèves plus jeunes parvenaient progressivement à se délester (et donc à oublier) de certaines règles d'usage pour ne conserver que celles qui allaient s'avérer fonctionnelles dans l'exécution d'un algorithme, tout en nous encourageant à poursuivre nos investigations chez des élèves de l'ES plus jeunes lorsqu'ils étaient en train d'apprendre tel ou tel algorithme de calcul pour la première fois.

Mais ce n'est pourtant pas le chemin que le groupe a finalement décidé d'emprunter pour construire un véritable projet de recherche. Intéressés par les travaux que menait un des chercheurs du groupe dans une autre institution de l'ES vaudois, nous avons finalement opté pour quitter le domaine numérique et pour nous pencher plus spécifiquement sur le domaine de l'espace et de la géométrie qui, au contraire des algorithmes de calcul, est une sorte de parent pauvre de l'enseignement des mathématiques dans l'ES (on opère ici un second retour sur une investigation précédente). Sur la base d'une vidéo réalisée dans un centre thérapeutique de jour où nous l'avons vu interagir avec deux élèves autour d'une tâche de pliage, nous nous sommes interrogés sur les supports qui pourraient être propices à la réalisation d'expériences spatiales pour des élèves de l'ES. Nous nous sommes également demandé quelles tâches et quelles questions il pourrait être intéressant de leur proposer, comment il nous serait possible de conduire des entretiens et également quelles conditions seraient nécessaires à ces supports et à ces tâches, à défaut d'un contexte culturel et social qui les légitime, pour trouver une forme de niche, au sens écologique du terme, dans l'ES.
Ces nouvelles questions, assorties du fait que deux nouveaux membres, tous deux enseignants de mathématiques, l'un étant également formateur et l'autre enseignant spécialisé (ce qui a fait remonter l'effectif du groupe à sept personnes), vont marquer un second tournant dans le travail du groupe puisqu'elles vont nous amener à élaborer un projet de recherche commun.

Le projet de recherche actuel du groupe ddmes

Rappelons pour commencer que dès sa constitution, notre groupe s'est donné pour tâche d'étudier des questions de didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé, de les définir, de les formuler, de les relier à d'autres questions et de tenter d'y apporter des réponses.
Nous avons alors choisi de travailler spécifiquement sur l'objet " situation " selon les diverses acceptions qu'il peut prendre dans la théorie des situations de Guy Brousseau (Brousseau, 1986), dans la tradition des situations mathématiques de Gérard Charrière (SRP, Genève et groupe TFL, Vaud) et dans les travaux théoriques de François Conne à propos de la distinction savoir et connaissance (Conne, 1992). Par souci de clarté, nous en donnons ici la définition suivante :

> Situation : Mise en rapport d'un individu avec un problème (défi) dans un contexte déterminé et pour la résolution duquel il mettra en œuvre une connaissance (articulée sur des savoirs) traduite (sur le plan de l'action propre à la situation) par des conduites et des stratégies (observables) (Rouchier, 1991, p.33-34).

Nous nous intéressons à l'étude des situations dans les conditions de l'enseignement spécialisé, en examinant plus particulièrement leur composante " milieu " au sens de " modélisation de la partie de l'univers à laquelle se réfère la connaissance en jeu et les interactions qu'elle détermine " (Brousseau, 1988, p.320), dans l'enseignement de la géométrie. Précisons à cet égard que l'idée d'étudier les situations par l'entremise du milieu provient directement de l'ensemble des investigations que nous présentées jusqu'ici et qu'elle en constitue certainement l'un des résultats majeurs.
En raison de l'importance prise par l'échec dans le contexte de l'ES (cf. Conne, Cange et Favre, textes précédents), nous avons en effet généralement rencontré, au cours des diverses observations que nous avons été amenés à y réaliser, de grandes difficultés à obtenir des informations sur ce que les élèves connaissaient et apprenaient en les interrogeant directement à ce propos. Nous avons même pu constater que certains d'entre eux étaient passés maîtres (si l'on peut dire) dans l'art de dissimuler ce qu'ils savaient et que la restitution de ce qu'ils avaient appris ne se faisait, le plus souvent, qu'au prix de négociations fort lourdes de la part de l'expérimentateur. Il était par conséquent difficile, pour nous qui cherchions à piloter et à

analyser des situations dans ces conditions, de pouvoir nous appuyer, comme cela se fait de manière plus classique, sur les réponses apportées par les élèves aux tâches qu'on leur soumettait et aux questions qu'on leur posait.
De ce fait, nous avons progressivement été conduits à devoir chercher des voies alternatives qui rendent mieux possible ce pilotage et cette analyse. Nous nous sommes alors interrogés sur ce qui pourrait favoriser l'émergence de restitutions indirectes - c'est-à-dire qui ne constituent pas des réponses à des demandes directes de l'expérimentateur - de la part des élèves et comment nous pourrions effectuer des tentatives de relances qui, utilisant certains effets de surprise, ne reposeraient pas uniquement sur la graduation des réussites. Et c'est ainsi que nous en sommes venus à nous intéresser plus spécifiquement au milieu, à la manière dont il peut être sollicité tant par les élèves que par l'expérimentateur, et à examiner comment ces sollicitations évoluent et se coordonnent tout au long du déroulement d'une situation.
Dans cette perspective, le milieu n'est alors plus considéré comme simple support à la réalisation d'une ou d'un seul type de tâches à charge des élèves, mais bien comme un réservoir organisé de tâches susceptibles d'apparaître dans la situation. On retrouve d'ailleurs ici l'ingrédient essentiel de la technique des situations de Gérard Charrière, dans laquelle ces diverses tâches se présentaient aux élèves, l'expérimentateur se contentant de les y encourager. Soulignons toutefois que pour notre part, nous venons à prendre en compte tout aussi bien les tâches susceptibles de se présenter aux élèves, que celles qui pourraient apparaître à l'expérimentateur. Nous pensons en effet que ce potentiel de tâches peut servir de cadre pour l'aider à piloter une situation (plutôt que de vouloir à tout prix piloter les élèves) dans les conditions particulières de l'ES, tout comme nous avons appris, au sein du groupe, à nous en servir pour procéder à son analyse. Reste que pour rendre cela possible, il est nécessaire de pouvoir se faire une idée relativement précise de la " richesse " du milieu et c'est à ce titre que nous consacrons une part importante de notre travail à son exploration.
Relevons enfin que nous nous intéressons également aux connaissances mises en œuvre par les élèves au cours de leurs interactions avec le milieu, de même qu'aux caractéristiques du milieu qui favorisent (ou au contraire défavorisent) l'appropriation des savoirs spatiaux et géométriques en jeu. Nous nous interrogeons ainsi (entre autres) sur les effets produits par la " nominalisation " des polygones, sur les fonctions didactiques de certains descripteurs formels (nombre de sommets, parallélisme des côtés, perpendicularité des diagonales, ...) et sur les divers facteurs qui participent à la constitution de l'invariance de la forme au sein de plusieurs figures semblables.
Pour accomplir ce travail, nous partons d'une activité tirée des nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques romands dont nous examinons en groupe et *a priori* le dispositif matériel et cherchons à en délimiter et à en explorer le milieu. À cet effet, nous avons d'ailleurs été amenés à constituer une série de questions qui servent de support à cette première exploration et dont nous donnons ici quelques exemples :

- quels sont les éléments constitutifs du milieu considéré et quels sont les savoirs mathématiques dont il relève ?
- quelles sont les différentes tâches qu'il est susceptible de nous faire imaginer ?
- quels sont les effets probables ou, au contraire, les effets très inattendus qu'il est à même de générer ?
- quelles sont les relances qu'il permet d'envisager ?

Au terme de ce premier travail, nous mettons nos découvertes en commun et, à partir de celles-ci, nous définissons un canevas d'entretien.
Deux membres du groupe sont ensuite chargés de mener chacun un entretien auprès d'élèves scolarisés dans l'institution Pré-de-Vert à Rolle. L'exploration du milieu se poursuit alors au sein même des entretiens et c'est bien dans cette perspective que les expérimentateurs sont chargés de les conduire. Chaque entretien est effectivement envisagé comme une invitation à

un jeu avec le milieu afin qu'il devienne le véritable instrument des interactions que l'expérimentateur cherche à nouer avec les élèves. Il ne s'agit donc plus, pour une grande part, de questionner directement les élèves et utiliser leurs réussites ou leurs échecs pour conduire l'entretien tout en jaugeant leurs performances. Mais nous cherchons plutôt à agir sur le milieu, en le modifiant et en le transformant, afin que les élèves, par leurs réponses aux sollicitations ainsi créées, en viennent à leur tour à nous enseigner et à nous surprendre de ce milieu. L'ensemble des conduites ou des stratégies observées étant alors entendues, de notre part, comme autant de réponses possibles aux potentialités et donc à la richesse du milieu.
Il est entendu que ces entretiens sont tous filmés, de manière à pouvoir être soumis à l'analyse du groupe qui, une fois réalisée, nous permet d'élaborer de nouveaux canevas qui donneront l'occasion ensuite à deux autres membres du groupe de mener deux nouveaux entretiens, filmés eux aussi. Le processus se poursuit alors de la sorte jusqu'à ce qu'entretiens et analyses nous conduisent à nous orienter vers un nouveau milieu.
Nous espérons ainsi pouvoir à terme établir un cadre opérationnel pour piloter des situations dans l'ES et étudier les caractéristiques du milieu qui favorisent le développement d'expériences et l'appropriation de connaissances spatiales et géométriques.

Conclusion et perspectives

Une présentation détaillée de la démarche menée autour d'une activité particulière et des premiers résultats qu'elle a produits fait l'objet des contributions de Del Notaro & Scheibler et de Tièche Christinat dans ces actes. Actuellement, nous poursuivons nos travaux au sujet d'une autre activité tirée des nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques romands, laquelle invite les élèves à reproduire une croix régulière sur du papier quadrillé, la découper en quatre parties selon une marche à suivre détaillée, puis à reconstituer à l'aide des quatre parties réalisées un puzzle de forme carrée.
À terme, nous envisageons également de mettre sur pied un séminaire de formation à l'intention des enseignants spécialisés. Il s'agirait d'un lieu où nous puissions leur raconter le travail que nous menons avec des élèves de l'ES. On pourrait également chercher à regarder avec eux dans quelle mesure et sous quelles conditions ils seraient susceptibles de s'approprier tout ou partie de notre travail pour le transposer et l'intégrer dans leur enseignement (ce qui ne va assurément pas de soi). Chercher à recentrer les enseignants sur le milieu, plutôt que sur les élèves, nous paraît chose importante voire essentielle, dans la mesure où cela pourrait contribuer à restituer une valeur *per se* à ce que produisent les élèves pour l'enseignement. Il nous semble en effet très profitable que les enseignants parviennent peu à peu à se laisser enseigner du produit de leur enseignement, ce qui, en contrepartie, pourrait peut-être conduire un jour les élèves de l'ES à pouvoir déclarer : “ aujourd'hui nous avons appris beaucoup de choses à notre enseignant ”.
Outre notre projet de recherche, nous souhaitons naturellement soutenir chez chaque membre du groupe, la mise en route de nouvelles investigations, selon leurs intérêts particuliers et en fonction des lieux de l'enseignement spécialisé dans lesquels ils travaillent. Il est bon de rappeler à ce sujet qu'il s'agit d'un des enjeux majeurs du groupe et que la mise en œuvre de notre projet de recherche commun ne saurait venir lui faire de l'ombre, voire le faire disparaître. En fait, on pourrait dire que le groupe se veut à la fois fédérateur et générateur de nouvelles investigations qui sont gages de sa créativité et donc de sa survie. En ce sens, il ne peut en aucun cas se définir exclusivement par un projet de recherche (aussi bien construit et ambitieux soit-il), A ce titre, nous pouvons d'ailleurs citer plusieurs orientations actuelles qui font l'objet de nouvelles investigations comme : l'utilisation du Tangram comme support à un travail sur la mesure d'aires dans l'ES, l'usage de la calculette comme outil médiateur de la relation ternaire dans l 'ES, la mise sur pied d'un atelier thématique et d'un projet

d'exposition pour amener les élèves de l'ES à investir d'autres mathématiques que celles qui leur sont habituellement proposées dans les programmes.
Une autre fonction que nous cherchons à attribuer au groupe est celle de recenser les travaux d'investigation et de recherche concernant l'enseignement des mathématiques dans l'ES. Il s'agit ainsi non seulement de donner accès aux membres du groupe et aux enseignants en formation à des travaux de recherche susceptibles de les intéresser, mais également, ce qui est sans doute plus original, de permettre à des travaux produits par un institut de formation (séminaire d'initiation à la recherche ou mémoires), de pouvoir être injectés, que ce soit sous la forme d'articles, de rapports ou de comptes-rendus, dans le monde de la recherche.
Enfin, nous cherchons encore à pérenniser les contacts que nous avons déjà commencé à établir en France et au Québec avec d'autres équipes de recherche en voie de constitution ou déjà constituées qui travaillent également sur des questions de didactique des mathématiques dans l'ES, afin de pouvoir unir nos forces et constituer (toujours à terme) un réseau de recherche sur la question. Nous espérons du reste que la tenue de ce séminaire national qui lui fut entièrement consacré nous permettra d'accomplir un large pas dans cette direction que nous espérons fructueuse.

Références bibliographiques

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques, vol.7/2.* La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, pp. 33-115.
Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique, le milieu. *Recherche en didactique des mathématiques, vol.9/3.* La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, pp.309-336.
Brun, J., Conne F., Floris, R., Lemoyne, G., Leutenegger F. & Portugais, J. (1994). Erreurs systématiques et schèmes-algorithmes. In M.Artigue, R. Gras, C. Laborde & P. Tavignot (Eds). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* La Pensée Sauvage, Grenoble, Colloque ARDM, pp.203-209.
Cange Ch. & Favre J.-M. (2001). La petite boutique des erreurs. *Actes du colloque Constructivismes : usages et perspectives en éducation Vol. II,* Service de la recherche en éducation, Genève, pp. 525-528.
Cange Ch. & Favre, J.-M. (2003). L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé est-il pavé de bonnes analyses d'erreurs ? *Education et francophonie*, vol. XXXI, n°2 : La spécificité de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. [Online] http://www.acelf.ca/revue/collection.html.
Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, vol.12/2.3.* La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, pp.221-270.
Conne, F. (1999a). Définition d'un groupe de recherche ddmes (didactique des mathématiques pour l'enseignement spécialisé). Document inédit. Institut de Formation et de Recherche sur l'Enseignement Spécialisé (IFRES), Lausanne.
Conne, F. (1999b). Domaine de validité de différentes approches en didactique des mathématiques : Pouvons-nous parler d'une didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé ? *Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques.* Houlgate, août 1999.
Conne, F. (2000). La théorie des situations comme ouverture sur l'expérience et l'expérimentation dans le domaine des connaissances et des savoirs numériques à l'école primaire. A paraître dans les *Actes du colloque international autour de la théorie des situations didactiques.* Bordeaux, juin 2000.
Conne, F. (2001). Pertes de contrôle et prises de contrôles dans l'interaction de connaissances. *Actes de la dixième école d'été de didactique des mathématiques.* Corps, cdrom, août 2001.

Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. *Education et francophonie*, vol. XXXI, n°2 : La spécificité de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. [Online] http://www.acelf.ca/revue/collection.html.

Rouchier, A. (1991). L'institutionnalisation des savoirs dans l'enseignement des mathématiques. In *Etudes de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation.* Thèse de doctorat d'état, UFR : Sciences Fondamentales et Appliquées, Université d'Orléans, pp. 26-71.

Modèles de milieu à l'épreuve de la contingence en enseignement spécialisé

Luca DEL NOTARO

Ecole primaire du 31-décembre, Genève

André SCHEIBLER

Etablissement secondaire d'Aigle, Aigle ; HEP VD, Lausanne

Présentation, intentions et éléments théoriques initiaux

Introduction

Un enseignement des mathématiques, pratiqué dans toutes les classes de la scolarité normale (EO), consiste traditionnellement à poser aux élèves des problèmes d'une catégorie bien précise, après leur avoir présenté ex cathedra des algorithmes de résolution concernant ces problèmes. Les élèves répondent. S'ils répondent faux, ou à côté, ils sont corrigés. L'enseignant expose les erreurs commises, met l'accent sur les pas d'algorithmes qui ont déraillé, et de nouveaux problèmes typiques sont proposés. Après un temps raisonnable, un nombre significatif d'élèves répondent correctement.

Dans un enseignement plus récent, la méthode consiste à proposer aux élèves des situations, dites situations-problèmes ou problèmes ouverts. Les élèves y investissent alors leurs connaissances, et l'hypothèse est faite que leurs interactions avec ces situations vont donner du sens au savoir qu'il faudra maîtriser pour traiter la situation. Ce savoir est alors exhibé, et les éventuels algorithmes de traitement peaufinés.

Dans les deux cas, la classe, par la voix d'au moins un des élèves, est tenue de répondre. En enseignement spécialisé (ES), l'enseignant est nettement moins assuré d'obtenir les réponses qui lui permettraient de poursuivre son enseignement, pour toutes sortes de raisons dont l'article de Jean-Michel Favre présente quelques éclaircissements. Les deux méthodes sont alors beaucoup plus aléatoires dans l'enseignement spécialisé où les élèves ne répondent pas, ou alors à côté des attentes de l'enseignant. Une réponse "à côté", ou pas de réponse du tout, l'échange pédagogique devient difficile : la situation-problème ne démarre pas, ou à peine, l'enseignant tente un retour à une méthode traditionnelle (pour qu'ils aient au moins quelques bases). Mais il faut recommencer de nombreuses fois, les enseignants s'en plaignent et ils semblent s'épuiser à négocier le maintien d'un échange didactique.

Intentions du groupe Ddmes

Notre groupe développe donc une recherche dégageant les conditions nécessaires pour faire vivre plus longtemps, le plus longtemps possible, des interactions d'élèves de l'enseignement spécialisé avec ce qu'en didactique nous nommons le milieu. Nous nommerons ci-dessous cette intention **étirement du milieu**. Cet étirement s'accompagne de facto d'un allongement du temps didactique, à mettre en relation avec ce que dit Jean-Michel Favre, dans son article[1], à propos de gestion du temps en ES.

[1] Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'ES 2004.

En effet, nous pensons qu'une réponse au problème exposé ci-dessus réside dans l'activation des interactions des acteurs de la situation, élèves et enseignants. Nous allons considérer 3 jeux : jeu milieu-élève, jeu milieu-enseignant, et jeu de l'enseignant avec le jeu de l'élève, en tentant de donner à ce 3^{e} jeu une place particulière. Nous présenterons donc ici, dans une première partie, les éléments théoriques qui vont nous servir en quelque sorte de base de départ. Il s'agit en effet de réinterroger un certain nombre de concepts didactiques : milieu, jeu, interactions, savoir, connaissance. Dans une deuxième partie, nous présenterons notre démarche et ses expérimentations, selon sa chronologie vécue. Enfin dans une troisième partie, nous présenterons quelques incidences que notre recherche porte sur les éléments théoriques présentés en préambule, illustrés d'exemples tirés de nos expérimentations.

Éléments théoriques

Le milieu dans la théorie des situations

Nous nous référons au concept de milieu dans la théorie des situations, telles que l'a défini G. Brousseau [1986, 1990, 1997], avec les évolutions que ce concept didactique a subies. Pour simplifier, nous renvoyons le lecteur à l'article de MH. Salin[2], auquel nous nous réfèrerons nous-mêmes.

Nous relevons alors :

- « Pour que les interactions avec le milieu soient productrices de connaissances nouvelles dans un processus d'adaptation, il faut que l'élève puisse engager les connaissances dont il dispose pour tenter de contrôler ce milieu [...] » [M.H. Salin, 2003, p.114]. Si l'élève engage des connaissances qui contrôlent, ce sont des savoirs au sens de F. Conne [1992] (voir plus loin)
- le concept de milieu est ici antagoniste du sujet, comme il pourrait l'être dans un jeu qui va modéliser la situation (voir ci-dessous)
- il faudra considérer outre le double jeu élève-milieu et enseignant-milieu, le jeu de l'enseignant avec le jeu élève-milieu comme guidé par cette association de connaissances correspondantes avec le savoir visé.

Modélisation en termes de jeu

Dans la théorie des situations, l'hypothèse est faite que, dès l'étape de dévolution franchie, la situation peut se modéliser par un jeu :

« - Le milieu matériel est un système susceptible de prendre un certain nombre d'états.
- Un ou plusieurs autres systèmes (les joueurs) sont susceptibles de modifier les états du jeu par des décisions.
- Certains états sont considérés comme meilleurs que d'autres par les joueurs en rapport avec l'enjeu du jeu.
- L'ordre dans lequel les joueurs interviennent, les états entre lesquels ils ont le choix, les conditions d'arrêt de la partie, l'état initial sont déterminés à l'avance : ce sont les règles du jeu. » [M.H. Salin, 2003, p.115]

Mais ce n'est pas ici n'importe quel jeu : il y a des règles, déterminées à l'avance. C'est ce que nous appelons plus loin un jeu rationnel. La course à vingt en est un bon exemple.

Connaissances et savoirs

Deux références sont incontournables pour définir connaissances et savoirs. Cette dualité va être le pivot central de notre recherche. La première est tirée de l'article de G. Brousseau et J.

[2] Actes de la Xe école d'été de didactique des mathématiques, 2001.

Centeno [1991] : « rôle de la mémoire didactique de l'enseignant », nous trouvons les définitions suivantes (note page 176) :
« Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente ou à une exigence sociale. La connaissance - ou la reconnaissance - n'est pas analysée mais exigée comme une performance relevant de la responsabilité de l'acteur.
Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. »
Il s'agit là de ce que F. Conne [1992, 1997] nomme une distinction faible de connaissance et savoir, en opposé à la distinction forte qu'il développera à partir de son article « savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique » :
« Ce qui sépare l'ordre du savoir de celui de la connaissance, c'est l'utilité : lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable dans le sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation ». [F. Conne, 1992].
Il faut alors considérer que « connaissance » selon la définition de G. Brousseau et J. Centeno peut correspondre à « savoir » chez F. Conne, et qu'il faut alors distinguer savoir privé et savoir institutionnel.

Différents niveaux de modèles de milieu

Isabelle Bloch [2003] met en évidence différents niveaux de modèles de milieux qui apparaissent lorsque l'on construit une situation fondamentale, qu'on la transporte dans un contexte d'enseignement, et qu'on la soumet à la contingence. Nous renvoyons le lecteur à son article, qui définit les modèles de milieu théorique épistémologie (Mi_T), de milieu a priori (Mi_A), ainsi qu'au schéma en page 131.
Ces différents niveaux nous permettent d'envisager une modélisation qui n'est pas contrainte à des savoirs et connaissances selon une distinction faible. Le modèle de milieu a priori (Mi_A) nous paraît en cohérence d'une part avec cet étirement du milieu que nous cherchons à définir et d'autre part à la distinction forte de savoir et connaissance.

Interactions cognitives et interactions de connaissance

Comme nous l'avons déjà évoqué, la présence de l'enseignant dans la situation didactique entraîne la considération d'au moins deux jeux sujet -milieu, qui interfèrent, donc de différents types d'interactions.
"L'activité cognitive est interaction. L'individu source de l'interaction en est le sujet, et les choses avec lesquelles il interagit en sont les objets. Les choses ne sont jamais présentes toutes seules et les objets sont inter-reliés dans et par les interactions cognitives. On peut parler de milieu pour désigner ces ensembles d'objets. Parler de milieu est donc relatif à une (des) interactions cognitives. Dans les systèmes que je considère, je distingue deux niveaux selon que j'inclus ou non dans ces milieux un ou d'autres sujets partenaires. Il y a interaction de connaissances (et plus seulement interaction cognitive) lorsque le milieu considéré contient non seulement des objets mais encore plus d'un sujet, et donc des interactions cognitives diverses. Je m'intéresse aux connaissances qui ont les mathématiques pour contenus, c'est-à-dire à des connaissances que je puisse reconnaître comme liées à certains savoirs mathématiques institués. Cette condition me place donc de facto dans le cadre de l'étude des interactions de connaissances, ne serait-ce que celles entretenues par le sujet observateur et

l'objet de son observation - ce dernier étant au minimum une interaction cognitive, mais la plupart du temps, il est lui-même déjà une interaction de connaissances." [François Conne 2003].
Nous sommes ici dans le cadre d'une distinction forte connaissance - savoir, ici connaissance englobe savoir.

Jeu de tâches

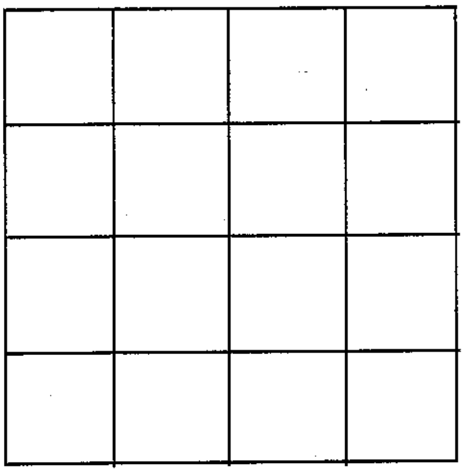
Une activité officielle de la méthodologie étant choisie, nous procédons à la description d'un milieu expérimental sous forme d'un jeu de tâches. Nous entendons par tâche non pas un objet d'enseignement mais un instrument d'animation du milieu. La tâche fait parler le milieu. Nous voulons en quelque sorte nous déprendre d'une aliénation trop précoce à un savoir mathématique lié à Mi_T ou à ses succédanés tirés de Mi_A. Nous ne sommes plus liés, dans un premier temps, à une compétence associée à l'objet de savoir ou l'objet d'enseignement, pour nous attacher plutôt au potentiel du milieu que nos tâches alimentent, attentifs à ce qui dans la contingence sera susceptible de l'animer encore plus. Il ne faudrait pas croire cependant que toute intention d'enseignement disparaisse à un quelconque instant de nos expérimentations. Les analyses a posteriori démontrent d'ailleurs le contraire. Tout jeu de tâches s'analyse en un réseau solidement cohérent, avec un dénominateur commun parfaitement identifiable.

Expérimentations

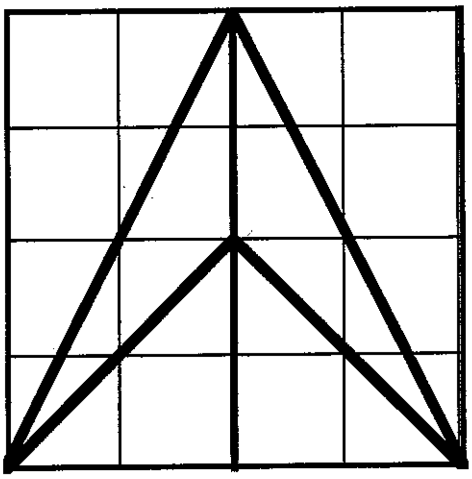
Choix d'une activité

Notre choix s'est porté sur une activité de géométrie de 5P de Suisse romande [Mathématiques 5^e année, livre de l'élève, M. Chastellain et F. Jaquet]. La voici :

Puzzle
À fabriquer



Un carré de carton de 8 cm de côté, quadrillé recto-verso de 2 cm en 2 cm.



Le même carré, découpé en six triangles

Juxtapose deux triangles, ou davantage, pour former le plus grand nombre possible de quadrilatères différents.
Dessine sur une feuille quadrillée les quadrilatères obtenus.

Du point de vue de la recherche, nous essayerons de montrer comment, à partir de cette activité géométrique, nous avons créé un jeu de tâches pour pouvoir interroger le milieu tel

qu'il apparaît dans les interactions avec les élèves et, bien entendu avec nous, les expérimentateurs. Il apparaîtra dans les pages qui suivent une sorte d'historique de cette création.
Si les tâches choisies permettent bel et bien de créer les interactions que les auteurs de la méthodologie ont souhaitées, pour que les élèves rencontrent les concepts et les propriétés des objets mathématiques visés, vous aurez compris que ce n'est pas notre seule intention. En effet nous souhaitons surtout faire vivre le milieu, l'étirer le plus loin possible, mieux : exploiter toutes les possibilités de lancer les élèves dans un champ d'investigation lorsque leurs interactions en éclairent tout à coup, comme par un effet de surprise[3], une entrée. Nous n'hésiterons pas nous-mêmes à provoquer ce genre de surprise. Nous nous présentons donc comme des expérimentateurs, dans la mesure où nous ne voulons pas conduire les élèves selon un axe bien déterminé, vraisemblablement celui que le méthodologue a imaginé et qui généralement ferme l'activité, mais les inviter à poursuivre leurs propres cheminements, en leur proposant tâches après tâches, celle qui à cet instant ouvre une piste de réflexion, surprend une production, contredit une affirmation. Si lors de ces expériences nous n'avons pas mission d'enseigner tel point du programme, il ne faudrait pas croire cependant que de telles intentions sont abandonnées. La situation choisie, tirée des moyens officiels, est la même pour tous les élèves et les défis aussi. Mais nous allons de notre côté tout faire pour les maintenir vivaces le plus longtemps possible. Nous ne voulons pas aboutir, mais maintenir un jeu élève - milieu.
Pourquoi l'activité « puzzle » ? Dans le domaine géométrique, elle apparaissait comme très porteuse, à en croire les auteurs, qui n'hésitaient pas à affirmer : *« Les six pièces de ce puzzle permettent de constituer une collection de quadrilatères, parmi lesquels on retiendra ceux qui ont un ou plusieurs axes de symétrie, des côtés parallèles, des côtés isométriques, des angles droits. En exploitant cette activité, on arrive à couvrir tous les objectifs de la partie « Surfaces » du thème »* [Mathématiques 5e année, méthodologie - commentaires, p.184]. Nous avons ainsi décidé de mettre à l'épreuve cette richesse invoquée dans le cadre de l'enseignement spécialisé. Il est utile de rappeler que le secteur de l'enseignement spécialisé romand ne dispose pas de moyens de mathématiques spécifiques ; l'enseignement de cette matière repose sur l'emprunt de moyens en dotation à l'enseignement ordinaire.
Mais quels rapports avons-nous nous-mêmes à l'activité ? Son analyse nous a conduit à questionner dans un premier temps la pertinence d'une démarche combinatoire. Fallait-il proposer une recherche de toutes les combinaisons possibles avec les six pièces du puzzle ? Ou plutôt favoriser un travail sur les potentialités invoquées par la méthodologie ? La première option focalise sur une recherche assez fastidieuse, qui nous semblait porter préjudice à notre intention d'étirement du milieu. Nous avons plutôt choisi de nous laisser surprendre par les effets d'un milieu élargi. D'autre part choisir la démarche combinatoire nous faisait quitter le domaine géométrique. Notre premier exercice a été donc de jouer au puzzle. Avec un matériel simple (des photocopies des triangles) nous nous sommes amusées à faire de puzzles. Ce fut pour nous une première occasion de mettre en scène notre propre rapport à l'activité. Ces essais naïfs ont permis toutefois de faire deux constats de taille : premièrement que ce type de matériel (les formes triangulaires du puzzle) précipite le sujet dans l'action (rapidité avec laquelle les chercheurs ont voulu toucher le matériel pour faire des quadrilatères) et qu'il est difficile, dans un premier temps, de ne pas faire des quadrilatères « simples », c'est-à-dire des quadrilatères avec les deux pièces isométriques. Ce deuxième constat en particulier nous a conduit à préparer des tâches permettant aux élèves de rechercher des quadrilatères « inattendus », « rares » voire « bizarres » de même qu'il nous a semblé

[3] « Jouer la surprise » F. Conne 2004 (à paraître).

déterminant de permettre aux élèves de rechercher des quadrilatères formés de 3, 4, 5, voire 6 triangles.

Les conditions d'expérimentation

Le matériel

Un essai préalable avec quelques élèves de l'enseignement spécialisé nous a conduit à apporter des modifications matérielles et procédurales par rapport au descriptif de "puzzle". En particulier nous avons reproduit un puzzle en carton dur et coloré de dimensions doubles (16 cm) de celles qui sont proposées dans la méthodologie, le matériel et la taille permettant une manipulation plus aisée ainsi qu'un visionnement facilité des séquences vidéo.
Nous avons aussi décidé de supprimer le quadrillage du puzzle ainsi que les feuilles quadrillées sur lesquelles (selon la méthodologie) les élèves auraient dû reproduire les quadrilatères trouvés. À ce propos dans le livre du maître, on peut lire à la page 181 : *' Ce support facilite le report, d'autant plus que les pièces du puzzle sont elles-mêmes quadrillées. C'est un choix de la variable didactique « type de papier » déterminé par les compétences d'un élève de cinquième en dessin géométrique. (Plus tard, il deviendra capable de reporter ses quadrilatères sur papier blanc)* » (p. 181, LM).
Pour éviter des expérimentations trop axées sur les démarches de reproduction et de dessin des quadrilatères, peu pertinentes pour cette étude sur les potentialités du milieu, nous avons décidé de supprimer toutes formes de quadrillages. Les dessins demandés seront réalisés sur du papier blanc non quadrillé.

Un entretien

Un expérimentateur rencontre un ou deux élèves de l'établissement, l'autre observe et surveille la caméra. Il peut parfois également intervenir.
Les élèves choisis quittent leur classe pendant environ 45 minutes pour se rendre dans une salle inoccupée et aménagée pour les besoins de la recherche. Tout le matériel nécessaire, du crayon aux pièces du puzzle, leur est fourni. La caméra filme les faits et gestes des élèves interrogés, enregistre les échanges verbaux.
Il y aura 3 séances contenant 5 entretiens. Des extraits de ces entretiens sont présentés dans la 3e partie de cet article.
Les chercheurs peuvent ainsi procéder à l'exploration du milieu et ceci selon des options préalablement discutées au sein de l'équipe de recherche et présentées ci-dessus. Par exemple une tâche axée sur la nominalisation des quadrilatères viendra se confronter à des tâches de jeu où la transformation répond plus aux besoins d'une organisation interne du milieu qu'au formalisme géométrique des quadrilatères.
Si l'analyse préalable des tâches, avec un canevas conséquent, est essentielle pour mettre en place le milieu, il en va de même pour ce que le milieu renvoie par l'intermédiaire de l'élève. Une séance avec des élèves peut ainsi prendre une tout autre tournure par rapport à ce qui a été décidé préalablement dans le groupe si le chercheur considère que l'élément observé constitue un objet sensible du milieu et donc méritant d'être investi *hic et nunc*, et ceci en faisant appel à ses propres connaissances et à son propre rapport à l'objet considéré. Le projet établi par les analyses préalables doit se conjuguer avec des « signaux » inattendus du milieu. Autrement dit encore : le pilote est actif, il y a interaction de connaissance entre lui et l'élève. Dans ce sens, la spécificité de chaque chercheur viendra marquer de manière plus ou moins forte cette dichotomie.

Déroulement des entretiens

Notre expérimentation a porté sur 5 entretiens, effectués en 3 séances (2 + 2 + 1). Nous les désignerons de la manière suivante : EF-1, EG-1, EF-2, EG'-2, EF-3. Nous utilisons la même désignation que dans l'article de Chantal Tièche Christinat, dans le présent numéro, avec quelques précisions supplémentaires : F désigne un groupe de filles : F1, F2 et F3, G et G' deux groupes de garçons : G1 - G2, G3 - G4. Les expérimentateurs seront désignés par AS, JM, LDN, et FC.

Jeu de tâches pour les premiers entretiens

Trois tâches marquent une phase introductive :
1. Demander à un élève de former des quadrilatères en juxtaposant des pièces du « puzzle », un deuxième élève dessine les quadrilatères trouvés par le premier. Les élèves sont invités à nommer les figures trouvées (c'est quasiment la même donnée que celle de la méthodologie).
2. Demander ensuite de construire des quadrilatères « rares » ou qui n'ont « pas de nom ».
3. Lancer un jeu type « Tangram » : chaque élève réalise un puzzle-quadrilatère de son choix, en dessine le contour sur une feuille, et l'autre élève doit retrouver l'assemblage des pièces. Le meilleur cas sera proposé au groupe d'élèves suivant.

Le lecteur comprendra que les descriptions ci-dessus ne sont pas mot pour mot les énoncés lanceurs de tâches. Chaque expérimentateur va choisir l'instant et les mots qui lui paraîtront les plus adéquats.

Parallèlement à la démarche graphique relative au dessin des quadrilatères, les tâches proposées visent les effets de la nominalisation des quadrilatères. Particulièrement lors du premier entretien, nous souhaitons jouer avec cette contrainte pour observer ce que cela produirait chez les élèves de l'enseignement spécialisé. Y a-t-il un vocabulaire permettant d'identifier les formes géométriques trouvées? Et surtout, quelle est la portée de ce vocabulaire dans l'analyse que les élèves font de leurs propres productions ? L'article de Chantal Tièche, dans la présente publication, étudie ce point.

Dans le prolongement d'une tâche de nominalisation, nous voulons aussi savoir quel est le sort réservé aux formes figuratives (vitre, terrain, pointe de lance, etc.) et si, pour les élèves interrogés, il y a des quadrilatères qui, par exemple, n'ont « pas de nom ». Toutes ces tâches ont pour but de questionner un des objectifs majeurs du chapitre consacré à l'enseignement de ' surface » , soit le classement de celles-ci, ici des quadrilatères, selon leurs propriétés.

Avec la notion de rareté, nous voulons pousser les limites d'une construction « classique » et attendue des quadrilatères, c'est-à-dire de ces quadrilatères « simples » formé de deux pièces très souvent isométriques. Pousser les élèves vers une construction de quadrilatères « rares » ou « difficiles » est une façon d'étirer le milieu. C'est une sorte d'engagement à « oser ». Il s'agit encore une fois d'étirer le milieu, de l'ouvrir, de ne pas filtrer les interactions selon les catégories du savoir attendu. L'idée de « difficile » est certes relative ; nous considérons cependant comme critère formellement établi le fait que pour nos élèves, le nombre de pièces utilisées définit la difficulté du quadrilatère.

Des premiers entretiens à la deuxième série d'entretiens

Visionner la vidéo, commenter, sont des démarches incontournables de notre dispositif pour penser, créer, modifier et varier les tâches susceptibles d'étirer le milieu. Cela enrichit le bagage de chaque expérimentateur, pour mieux l'armer à improviser dans les entretiens futurs. Trois constats vont alors orienter les tâches futures. Le premier concerne la redondance des quadrilatères cherchés par les élèves. En effet, les productions de ces derniers ont fait état de peu de pièces utilisées, peu de systématique dans les essais, peu de régulations par rapport aux erreurs et bien évidemment peu de diversité dans les quadrilatères. Il y a bien là des limites que notre étirement de milieu devrait ébranler. Ce sera l'objectif des deux nouvelles tâches ci-dessous.

Le deuxième constat est une critique à la démarche de nominalisation. Nous avons constaté que la nominalisation des quadrilatères jouait « contre » l'étirement du milieu. Peu de variétés de nominalisations et peu d'efficacité de cette dernière sur l'analyse des productions nous ont amené à abandonner cette voie de recherche dans les entretiens suivants.

De même que (et c'est le troisième constat) c'est en prenant conscience que la partie consacrée au dessin était trop importante dans la situation, que nous l'avons allégée. Elle ne joue semble-t-il pas de rôle de mémoire pour les élèves, ce qui paraît être un manque sérieux à leurs nombreuses manipulations : les pièces bougent beaucoup dans leurs doigts mais rien ne leur permet de fixer quoi que ce soit plus de quelques secondes.

Les entretiens suivants se concentreront donc autour de trois tâches majeures suivantes :

1. Faire un inventaire de quadrilatères avec 2, 3, 4 pièces du puzzle, en évitant cette fois-ci de les nommer
2. Présenter aux élèves la production d'un groupe précédent, en les invitant à poursuivre
3. Jeu : à partir d'un triangle quelconque du puzzle, rajouter une nouvelle pièce pour former un nouveau quadrilatère, puis rajouter une nouvelle pièce pour former un nouveau quadrilatère, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement des 6 pièces ; celui qui ne réussit pas, ou se trompe, passe son tour. Nous désignerons ci-dessous ce jeu par jeu Domino.

Les deux premières tâches ont comme objectif, nous l'avons dit, une plus grande variété de quadrilatères, par une production systématique, en se dégageant de toute nominalisation, et en laissant les élèves se surprendre eux-mêmes par d'autres productions.

La dernière tâche se présente sous forme de jeu, le jeu Domino. Comme pour d'autres jeux mathématiques, l'aspect de défi nous semble déterminant d'autant plus que dans nos hypothèses, les deux joueurs engagés dans la partie devraient pouvoir « ouvrir » la tâche et donc produire plus de quadrilatères. Nous distinguons à ce moment deux catégories de tâches :

* les tâches à valeur ontologique (tâches en tant que telles, où l'existence et la spécificité se repose sur l'analyse de l'objet et de sa définition) où l'expérimentateur vise à travailler les figures en tant qu'objet en soi, avec leurs noms, leurs propriétés et leurs descripteurs formels. Par exemple : demander à un élève de former des quadrilatères en juxtaposant des pièces du "puzzle", demander de construire des quadrilatères qui n'ont "pas de nom" ou "rares", demander de nommer les quadrilatères, demander de dessiner les formes obtenues.
* les tâches de transformation qui, elles, répondent aux besoins d'une organisation interne du milieu. Avec ces tâches, il ne s'agit plus d'étudier les quadrilatères en faisant appel à des références externes au milieu (règles, définitions), mais plutôt de chercher à l'interne (c'est-à-dire en explorant le milieu) les éléments du questionnement sur les quadrilatères et leurs transformations, le résultat de ce travail permettant une organisation des interactions élève-milieu. Exemple : le jeu Domino.

De la 2e à la 3e série d'entretiens

En visionnant la 2e série d'entretiens, nous retenons les critères suivants pour de futures tâches :

- la prise en compte totale ou partielle des pièces du puzzle pour la construction des quadrilatères
- les éventuelles traces de systématique (on utilise ici le terme de systématique en tant qu'ensemble de données ou de méthodes érigé en système) dans les actions des élèves, donc des traces de connaissances utiles

- le type de manipulations exercées sur les pièces du puzzle et notamment les retournements (ou non) des triangles
- le vocabulaire (géométrique ou non) employé (nous rappelons tout particulièrement certains questionnements en termes de pointes, côtés, coins, bords, sommets, ...)
- l'usage des propriétés de certains quadrilatères pour les produire (par exemple le losange)
- la diversité et la rareté des quadrilatères constitués.

À ce propos, nous avons porté une attention toute particulière aux effets du jeu Domino, pour constater que c'est bien celui-ci qui produisait la plus grande diversité dans la construction des quadrilatères. C'est sur la base de ce constat que nous décidons de poursuivre notre étirement du milieu, en exploitant l'idée du jeu, et en étant attentifs aux questions suivantes :

- des connaissances géométriques formelles apparaissent-elles dans les interactions des élèves ?
- quels sont les processus de sémiotisation ?
- chez certains élèves observés, le nombre de côtés ne paraît pas être considéré comme un descripteur stable des polygones-quadrilatères ; cela va-t-il se confirmer ?

Le jeu Domino sera proposé aux deux filles interrogées au début de notre travail. Une 3^{e} fille sera introduite dans l'entretien, les deux premières étant chargées de l'informer. Les expérimentateurs peuvent-ils s'attendre à une même diversité de production de quadrilatères, ou plus encore, s'ils ont en mémoire des interactions des précédents entretiens et tout particulièrement ceux du premier entretien avec ces filles ?

Arrêt de l'expérimentation

L'analyse du cinquième entretien nous permet d'attester que le jeu a reproduit les effets attendus : une plus grande production de quadrilatères. Les montages provoqués par le jeu Domino peuvent même se poursuivre par l'adjonction de nouvelles pièces, par la reprise d'une nouvelle série de triangles (jeu Domino avec 2X6pièces), et l'on peut même proposer de démonter les productions, ce qui fait apparaître de nouveaux quadrilatères. Le milieu est alors source de nombreuses interactions : quadrilatères inattendus, nominalisations. Lors du dernier entretien, une des filles devient incollable en reconnaissance de polygones quadrilatères. Nous n'en déduisons pas cependant que toutes les difficultés rencontrées à stabiliser de tels critères de reconnaissance sont levées.

Nous pouvons dire qu'il y a eu étirement du milieu, dans le sens où les interactions élève - milieu ne se sont pas taries, et qu'il y a eu production de connaissances utiles selon les expérimentateurs. Plusieurs questions pourraient alors être posées : Ces connaissances utiles sont-elles les savoirs visés par les méthodologues ? Y a-t-il clivage ? L'expérimentateur est-il professeur ? C'est bien de cela que nous voulons débattre dans la troisième partie de cet article.

Nous décidons de ne pas poursuivre nos expérimentations au-delà de ce 5^{e} entretien. Le matériel récolté est suffisamment riche pour notre analyse, à ce jour non encore épuisée. Nous ne souhaitons pas non plus lasser les élèves, nos visites régulières semblent les intéresser : ils seraient certainement preneurs de nouvelles activités.

Résultats expérimentaux et incidences théoriques

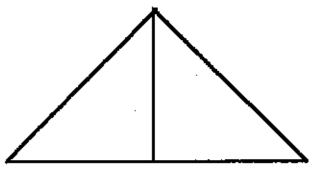
Des expérimentations

Dévolution et potentialités du milieu

Les premières tâches proposées aux élèves sont quasiment les mêmes que celles qui sont prévues par la méthodologie, qui en expose les objectifs :

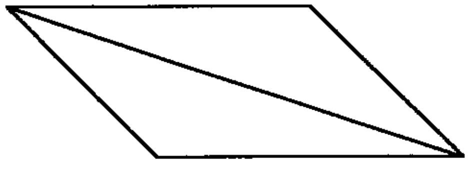
« Les élèves qui entre en cinquième année ont déjà de nombreuses connaissances de géométrie [...]. Ces connaissances ont des statuts qui peuvent varier sensiblement de l'une à l'autre. Certaines sont des expériences concrètes, d'autres sont des perceptions visuelles, d'autres sont du domaine de la langue utilisée pour décrire des figures.... Certaines de ces connaissances sont plus élaborées mentalement et s'apparentent déjà aux concepts de la géométrie, abstraits et indépendants de leurs modèles physiques. Il y a un travail permanent à développer pour passer du monde réel à celui des concepts géométriques ». (Méthodologie, p. 179)
« Puzzle » s'inscrit, selon les auteurs, dans ce travail. On lit en effet plus loin : « toutes les activités du thème sont conçues pour permettre à l'élève le passage de ses expériences concrètes vécues dans son espace sensible aux notions géométriques qu'il en abstrait ». (méthodologie p. 181).
Dès le lancement de l'activité, l'expérimentateur peut constater que les productions n'affluent pas, que le jeu « puzzle » n'a pas été explicité et que son rapport à « quadrilatères » est loin d'être évident (deux pièces doivent-elles se toucher ? se toucher comment ? faut-il prendre toutes les pièces ? Est-ce d'un assemblage, dont le contour a la forme d'un quadrilatère, qu'il s'agit ?).

Extrait 1, de EF-1
L'expérimentateur A : "le jeu consiste à faire des quadrilatères en utilisant 2 pièces du puzzle, ou plus, en prenant au choix 2 pièces ou plus".
Les élèves choisissent deux pièces, les assemblent très rapidement :



"Dès que vous en avez fait un, vous me dites, dès que c'est un quadrilatère".
Les élèves font de nombreuses manipulations, en utilisant plusieurs pièces, comme s'il fallait toutes les utiliser.
A : "Vous pouvez prendre que deux pièces, vous n'êtes pas obligées de toutes les prendre".
Nous pourrions considérer que la phase dévolution n'est pas jouée. Mais en fait, le lancement du milieu objectif va immédiatement éclairer deux champs, interdépendants. Nous nommerons le premier champ « nominalisation ».

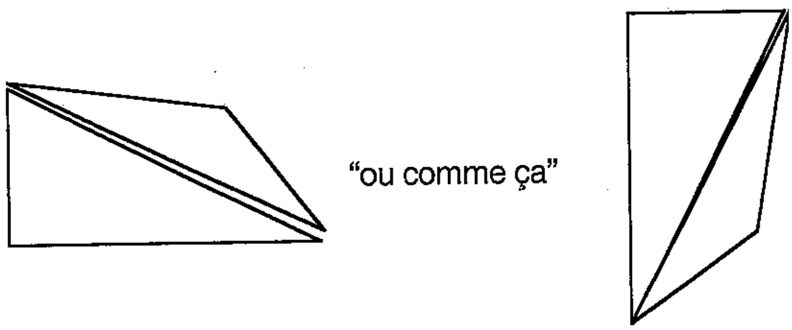
Extrait 2, de EF-1
Après plusieurs manipulations, les élèves s'arrêtent sur



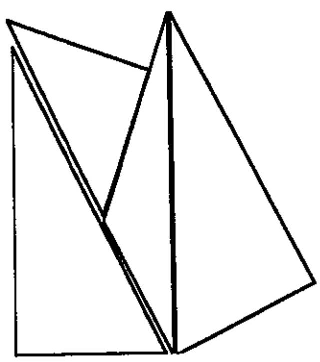
A: "Pensez-vous que c'est un quadrilatère » -« non, c'est 2 triangles" - "il faut voir la forme complète. C'est un quadrilatère ?" - "non, c'est un losange" - "et un losange, c'est un quadrilatère ?" - "non" - "mais c'est quoi un quadrilatère ?" - (silence) - A : "quadri, ça

veut dire 4 ; un quadrilatère a 4 côtés. Celui-là, a-t-il 4 côtés?" - "oui" (les élèves comptent) - "alors c'en est un, on le dessine".
Le dessin est réalisé par les élèves en suivant le chablon de la production avec un feutre. "A-t-il un nom particulier?" - "oui, losange" - "on l'écrit, et on continue".
La nominalisation n'a pas fait l'objet d'un accord entre expérimentateur et élèves, ni d'une vérification ; donner une définition de quadrilatère n'aura pas beaucoup d'impact, les élèves ne pourront pas saisir le sens de deux noms pour un même objet, quadrilatère et losange par exemple. Cette question est ici cruciale, et s'articule avec la nature des objets que les élèves considèrent. Ces objets ne sont pas les mêmes que ceux de l'expérimentateur, il faut bien passer par une phase de nominalisation pour poursuivre l'échange. C'est notamment ce que développe l'article de Chantal Tièche Christinat dans le présent numéro. D'autres effets du champ « nominalisation » sont visibles dans l'extrait 3.
Nous nommerons le second champ « formes ». Il est ici le représentant des objets considérés par les élèves. La tâche consistant à demander de produire un quadrilatère « rare », voici la production des élèves :

<u>Extrait 3, de EF-1</u>
10' A : "maintenant, vous allez faire un quadrilatère rare, un spécial qui n'a pas de nom, vous pouvez l'inventer".
Une élève propose une "coque de bateau" qu'elle dessine d'abord à la règle. À : "mais est-ce un puzzle? Essayez de faire un quadrilatère rare avec ces pièces-là".
12' Une élève utilise plusieurs pièces, sans proposer quelque chose qui lui convient, et revient à deux pièces. Elle propose :



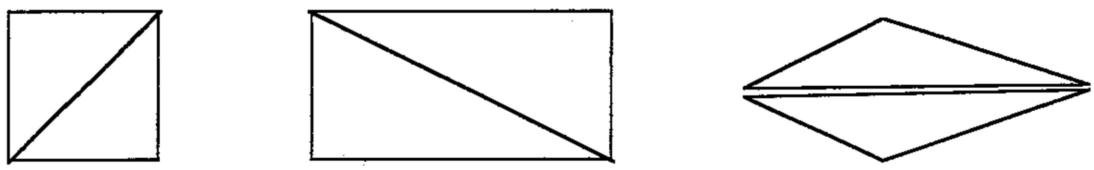
"Est-ce un quadrilatère rare ?" - "C'est un terrain de foot, ou une fenêtre si tu le mets comme ça, ou une porte penchée" - "cherchez-en encore un spécial"
16' Une élève s'arrête sur une proposition curieuse :



"Est-ce un quadrilatère ?" - "y a quatre côtés (en comptant certaines pointes) » - "Qu'est-ce qu'un côté?" - "ça, c'est un côté (en désignant un sommet)"- l'autre élève: "non, ça c'est une pointe". A: "On peut compter aussi les sommets. Comptage de pointes (5) et de creux.
Pour l'expérimentateur, une nouvelle catégorie d'objets, considérée par les élèves, fait son apparition : les représentations schématiques en perspective d'objets situés dans l'espace (terrain de foot., fenêtre, porte penchée) ; il pourrait s'agir d'objets plans, mais la porte penchée pourrait être un contre-exemple. « Coque de bateau » pose question : il y a évocation d'une image pour répondre à la demande de quadrilatère rare, sans support visuel (ni dessin, ni puzzle). Réciproquement, les objets déjà présents (puzzles) appellent des images comme terrain de foot. ou fenêtre. Les expériences des élèves (interactions cognitives) associent ici images, objets, et noms.
Nous constatons qu'en amont de la définition de quadrilatère, les élèves ne peuvent pas se référer à des savoirs géométriques fondamentaux. Qu'est-ce qu'un côté ? un sommet ? Or tout l'enjeu de l'activité est là : il faut d'abord identifier des polygones (point - sommet, segment - côté, ligne polygonale, polygone), donc des côtés et des sommets, puis les compter, pour identifier des quadrilatères. Mais à ce stade, il n'est pas encore possible de savoir où se situe exactement l'obstacle. Les signes montrés par le milieu (pièces de carton assemblées dans un jeu puzzle) ne sont peut-être pas des signes d'objets géométriques abstraits. Il y a des noms, il y a des formes. Mais ces objets sont là, manipulés par les élèves. C'est le champ « formes » dont nous parlons ci-dessus, étroitement mêlé au champ « nominalisation ». Nous considérons alors que la phase dévolution est faite dès les toutes premières minutes (ce concept a d'ailleurs tendance à se minimaliser pour nous) et nous allons proposer des tâches qui donnent corps aux objets présents. C'est étirer le milieu, dont les potentialités sont mises à jour. C'est aussi étirer le temps, comme le développe Jean-Michel Favre dans son article.

Faire parler le milieu

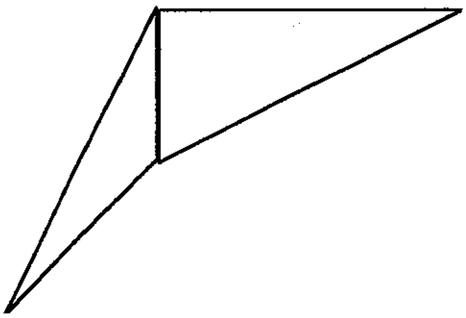
Dans l'entretien suivant, JM, qui vient d'assister au premier entretien, propose aux deux élèves G1 et G2 le même lancement. Très rapidement, ils produisent 3 assemblages :



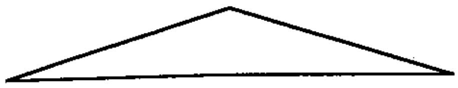
Ce sont des productions attendues : des assemblages de paires de pièces isométriques. Puis le rythme chute brusquement. Il y a alors demande de dénomination par JM qui va manipuler ces configurations et réitérer la demande. Il s'ensuit un débat sur les dénominations carré et losange.
L'expérimentateur va alors systématiquement saisir des interactions d'élèves pour faire parler le milieu. Et c'est bien ce dernier qui, ainsi étiré, va produire de nouvelles interactions de connaissances. Dans l'extrait suivant, le milieu a ainsi produit de quoi débattre de ce qu'est un sommet, sans pour autant qu'une distinction claire entre ce qui est nommé côté et ce qui est nommé sommet puisse être assurée.

Extrait 4, de EG-1

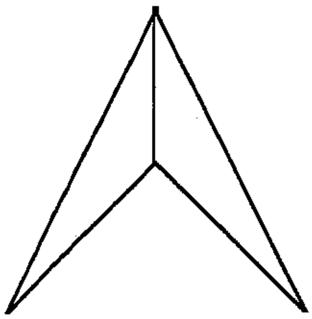
L'élève G2 produit :



Il vérifie en comptant les sommets, qu'il nomme côté, et en comptant le sommet concave. Mais G1, qui est chargé de dessiner schématiquement les productions de son camarade, a dessiné à main levée :

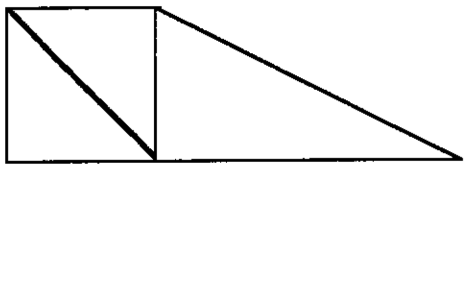


"on dirait un triangle". Un débat s'instaure entre les deux élèves. G1 : "celui-là, ça compte pas, c'est comme si c'était un trait (en désignant le sommet concave)". G2 se rallie à ce point de vue. JM propose alors :



Les élèves le refusent comme quadrilatère. JM : "est-ce un triangle alors ?" L'un répond oui, l'autre non. G1 : "c'est un triangle déformé".

Autre production :



Les élèves comptent les sommets (toujours appelés côtés). "Celui-là, on le compte pas, parce que ça va tout droit". JM : "alors, on le prend ou pas on le prend" - "comment l'appelez-vous un losange-triangle" - JM : "et alors celui-là (revenant à sa précédente proposition), on le prend non car ici (sommet concave), c'est pas un côté".

Cet extrait montre également une production de connaissance du milieu de type nominalisation. « Losange – triangle » proposé par les élèves signe une véritable découverte de leur part : ils ont inventé un nouveau quadrilatère, qu'il faut donc désigner de façon originale et non banale. Elle reprend les noms des objets utilisés, losange et triangle. « Triangle déformé » a le même statut. Cela désigne un non-triangle qui n'est pas non plus reconnu comme un quadrilatère. On peut également observer dans l'extrait ci-dessus les étroites interdépendances entre champ « nominalisation » et champ « formes ». Un cinquième extrait présente un exemple de production du milieu, toujours obtenue par interaction de l'expérimentateur sur une interaction élève-milieu, qui va permettre une ouverture sur une procédure de reconnaissance d'un losange, par comparaison de longueurs de côtés, la comparaison étant réalisée expérimentalement par la juxtaposition de pièces.

Extrait 5, de EG-1

Pour la première fois, un des élèves produit un puzzle avec les 6 pièces. Il s'agit du carré proposé par la méthodologie (voir 2.1), avec ses triangles, configuration qui ne leur avait jamais été présentée. On peut penser que l'élève a fait appel à quelques souvenirs du jeu « Tangram » qui est utilisé dans l'école.

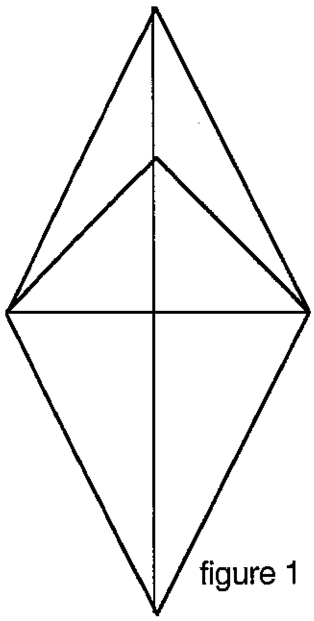


figure 1

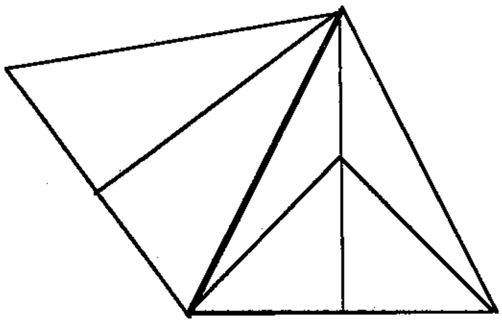


figure 2

JM : « faites alors un losange en bougeant deux pièces ». Les élèves produisent la figure 1 :

Nouveau débat à propos de losange. "Il a quatre côtés pareils". JM : "tu peux montrer ?" À nouveau, ce sont les angles qui sont montrés par paires. G1 prend alors A et le juxtapose à B, grand côté contre grand côté. Manipulation reprise par JM, puis par G2, qui produit la figure 2.

JM : "eh t'as vu ce que tu as fait ? c'est un losange ça ? et l'autre vous pouvez refaire ? l'un, l'autre ? vous pouvez vérifier ?"

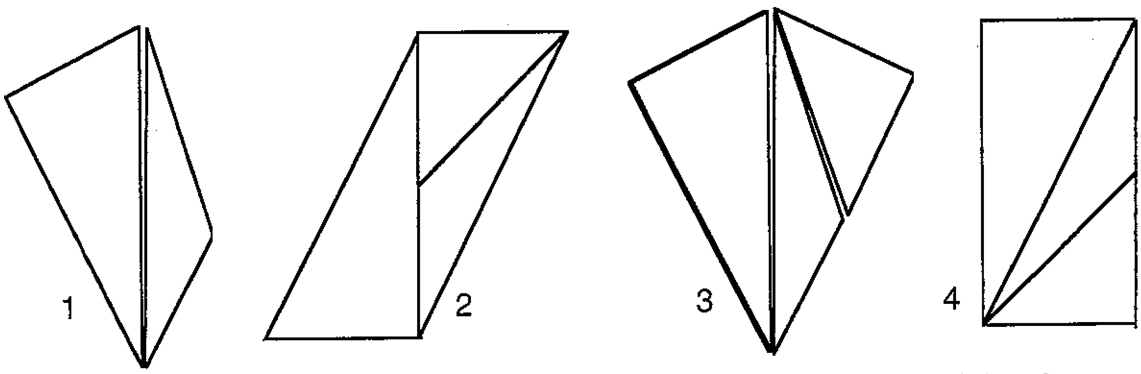
Les élèves mesurent alors les côtés des deux productions. Ils rejettent alors la deuxième en tant que losange, car "ça, c'est plus long que ça".

Jeu et improvisation

Comme nous l'avons déjà dit, le jeu de tâches est élaboré à partir d'une analyse a priori et du visionnement des vidéos. Mais il ne sera que le cadre dans lequel va se tenir l'expérimentateur, pour piloter l'activité. Nous entendons d'ailleurs par pilotage le jeu de l'expérimentateur avec les interactions élève - milieu. Le lancement de l'activité sera une des tâches prévues du jeu, mais il peut arriver, à peine quelques secondes plus tard, que ces interactions offrent à l'expérimentateur l'opportunité d'une nouvelle tâche. Il s'agit d'explorer un éventuel nouveau méandre du milieu, comme par exemple ici une recherche concernant l'aire des quadrilatères produits, ou du moins une certaine relation d'ordre :

Extrait 6, de EF-2

Les élèves ont reçu comme consigne de produire des quadrilatères avec 2 pièces du puzzle, puis avec 3 pièces. Vont être produits :



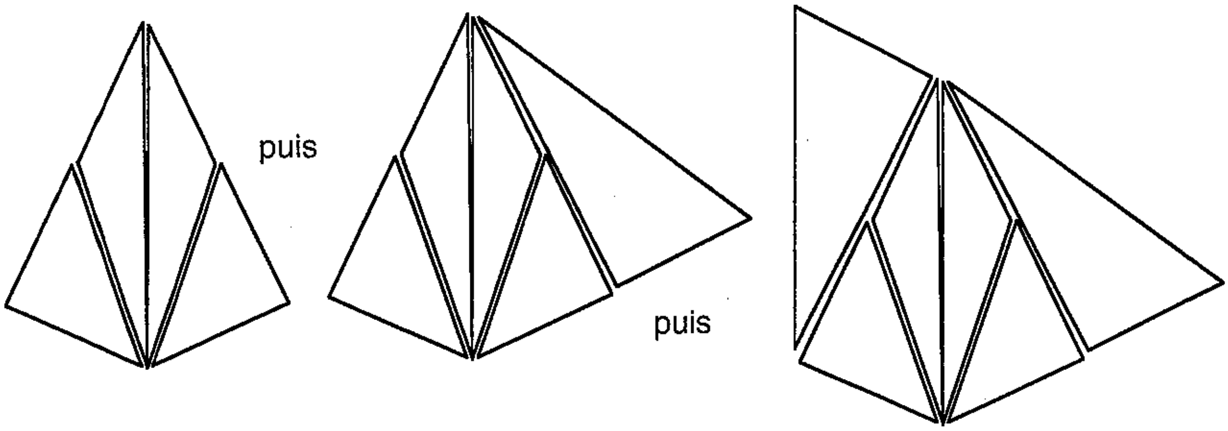
LDN (à propos du 2) : "est-ce un quadrilatère ?" – F1 : "oui" – F2 : "c'est à peu près le même que (1) - FC sort le (1) - "c'est le même (retourne la feuille), regardez, si on le met comme ça, c'est le même". FC : "dessine-le à côté, pour voir". Elle dessine (2) et (1) l'un à côté de l'autre. LDN montrant sur le dessin : "est-ce que ça (2), c'est la même chose que ça (1)?" - "non, celui-là est plus gros que celui-là". LDN, alors que le (4) vient d'être produit : « c'est le même que le 2 ? » Vérification, cette fois par superposition : "non, c'est pas le même".

(1), (2) et (4) sont nommés par F1 et F2 le petit, le grand, le moyen. LDN : "comment tu fais pour expliquer cela si on découpe,..." - "allez-y, découpez".

Des tâches improvisées visent un effet de relance, qui s'appuie sur une interaction élève - milieu. Il peut s'agir de provoquer une contradiction à une production ou une affirmation d'un élève, ou de jouer simplement sur un effet de surprise. L'expérimentateur va observer « ce que ça donne » pour relancer encore, abandonner cette voie, reprendre une tâche du jeu convenu. Dans l'extrait suivant, le jeu Domino a été proposé, et les élèves en jouent une deuxième partie. La pose de la règle, effectuée par FC, s'inscrit comme une nouvelle tâche du jeu de tâches prévu. Elle surprend les élèves, et provoque des interactions de connaissances, formellement identifiables au moins chez l'élève F2, qui sera par la suite incollable sur l'identification d'un polygone quadrilatère. Ses exclamations (oh ! tu peux jouer comme ça - ah, lui joue la règle) sont signes d'interactions cognitives, qui pourraient indiquer que F2 opérait depuis un certain temps déjà une sorte de contrôle virtuel sur les polygones produits, pour les identifier comme quadrilatère ou non.

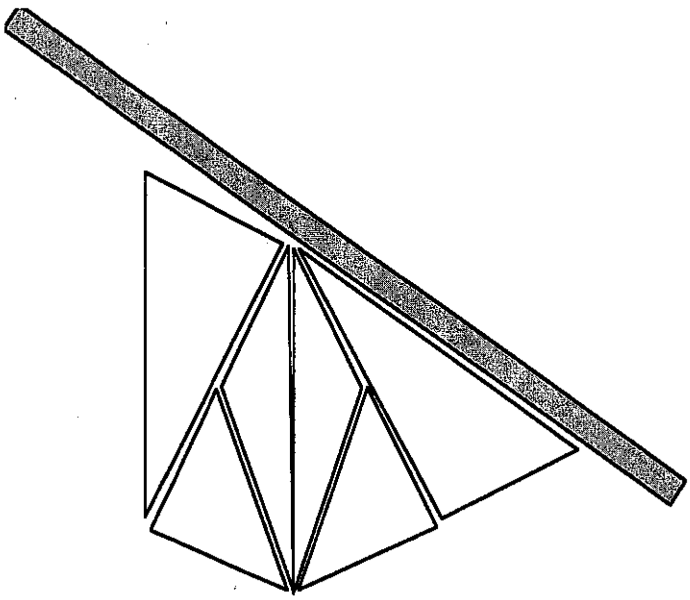
Extrait 7, de EF-3

Une deuxième partie du jeu Domino est en cours. Les coups suivants ont été joués à tour de rôle par F1 et F2, avec à chaque étape de minutieux comptages de « bords » et/ou de



« pointes ».

JM à F1 qui vient de poser la dernière pièce : "est-ce un quadrilatère oui" - "génial !" F2 : "oh, tu peux jouer comme ça ?!" FC pose une règle le long du puzzle, après avoir demandé de vérifier encore si l'on avait un quadrilatère (la règle met en évidence un angle convexe de 170°).



F2 : "ah, lui joue la règle !" FC : "c'est quoi la règle ?" F1 : "ça compte pas".

Incidences théoriques

Modèles de milieux

La mise en place du jeu de tâches, tel que nous l'avons défini plus haut, correspond parfaitement au modèle de milieu a priori (Mi_A) défini par I. Bloch. « Ce modèle n'est pas de nature empirique, mais plutôt expérimentale ». Soumis à la contingence, il évolue en permanence, de manière continue et en temps réel, sous l'effet des tâches improvisées, elles-mêmes associées à la lecture qu'en fait l'expérimentateur des interactions élèves-milieu. L'étirement du milieu (Mi_E) n'a pas de modèle a priori, une nouvelle analyse (pour nous marquée par le visionnement de la vidéo) génère un nouveau jeu de tâches, soit un nouveau Mi_A (voir le schéma de I. Bloch). Cet étirement du milieu porte cependant un nouveau regard sur un certain nombre de concepts centraux de la théorie des situations. Un clivage net va se jouer à propos de connaissance et savoir, ou savoir privé et savoir institutionnel.

Expérimentateur et professeur

« Il s'agit donc d'associer au savoir les connaissances correspondantes, sources de décisions à l'intérieur de la situation, et de déterminer quelle(s) situation(s) représente(nt) le savoir visé » (MH. Salin, 2003). Cette association, l'adidactique, est dévolue au professeur, chargé d'instituer, à partir des interactions sujet-milieu, les connaissances qui lui seront utiles pour le savoir à enseigner. Les objets pointés dans son pilotage sont alors sur le versant de l'institution, celui de la situation fondamentale en tant que celle qui déclare le savoir visé comme signifié de l'instrument optimal de résolution de la situation. L'expérimentateur est sur un autre versant, sans pour autant que son rôle de professeur en soit diminué : celui des objets auxquels les interactions élève-milieu donnent corps, signes de connaissances des élèves, et d'étirement du milieu. La distinction faible connaissance - savoir est liée à un savoir culturel, qui devient savoir à enseigner moyennant une situation fondamentale. Il y a mise en exergue, par l'institution, de connaissances comme moyens transmissibles de contrôle d'une situation. La distinction forte est nettement du côté de l'élève : ce sont ses connaissances utiles au sens de F. Conne [1992] qui, dans un milieu étiré, alimentent le jeu de l'expérimentateur.

Modélisation par une théorie des jeux

Dans la théorie des situations, le milieu est qualifié d'antagoniste du sujet, et il peut être modélisé en termes de jeu. Mais le jeu dont il est question est un jeu rationnel, normatif et prédictif, comme par exemple la course à 20, où chaque coup est mesurable en 0 ou 1 dans Mi_A par le joueur à qui ce jeu-ci est dévolu. Cela confère à cette dévolution-là une certaine épaisseur. Porter notre attention en amont nous impose une analyse des multiples interactions effectives : telle interaction de l'élève entraîne une interaction de l'expérimentateur, signe de connaissances de ce dernier dans une modélisation de ses savoirs. Sa relance dénote d'une hypothèse didactique qu'il pose sur le modèle qu'il prête à l'élève. Et ainsi de suite. S'il y a jeu, c'est celui - pouvons-nous dire non rationnel ? - de l'élève, qui fait l'objet de notre étude. Maintenir ce jeu est alors pour nous synonyme d'étirement du milieu.

Sémiotique du milieu

Comment allons-nous donc porter un regard de chercheur sur le jeu de l'expérimentateur avec les interactions élève - milieu ? Tout est signe ! À plusieurs reprises dans notre article, nous avons dit : « faire parler le milieu », « voir ce que ça donne ». Des interactions cognitives et des interactions de connaissances se manifestent en signes, actes des élèves sur le milieu, perçus par l'expérimentateur. Il interprète ces signes selon un modèle, le sien, et peut produire une hypothèse à propos de ce que pourrait être le modèle de l'élève. Tester cette hypothèse consiste alors en un acte sur le milieu : faire parler le milieu. Et le processus va se poursuivre jusqu'à ce que, par de nouveaux signes, l'expérimentateur puisse décider que son hypothèse est infirmée ou confirmée, afin qu'élève et expérimentateur « parlent de la même chose ». Les actes s'enchaînent donc en signes triadiques, cet enchaînement étant le caractère propre de la sémiotique de CS Pierce, qui nous paraît être bonne candidate pour répondre à notre attente.

Références bibliographiques

Berthelot R., La notion de milieu. Actes de la XIIe école d'été de DDM, 2003.

Bloch I., Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. Actes de la XIIe école d'été de DDM, 2003.

Brousseau G., Fondements et méthode de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7/2, La Pensée Sauvage, 1986

Brousseau G., Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9/3, La Pensée Sauvage, 1990.

Brousseau G., J. Centeno. Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 11/2.3, La Pensée Sauvage, 1991.

Brousseau G., (à paraître). Théorie des situations didactiques. Premières journées de didactique des mathématiques de Montréal, 1997.

Chastellain M. & Jaquet F., Mathématiques 5e année, méthodologie - commentaires, et livre de l'élève. COROME, 2001.

Conne F., Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 12/2.3, La Pensée Sauvage, 1992.

Conne F., Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne. In *Le cognitif en didactique des mathématiques*, G. Lemoyne et F. Conne eds., Presses de l'université de Montréal, 1999.

Conne F., Interactions de connaissances et investissements de savoir. Actes de la XIIe école d'été de DDM, 2003.

Favre J.M., Etude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. Présente publication, 2004.

Salin M.H., Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. Actes de la XIe école d'été de DDM, 2001.

Tièche Christinat C., De l'usage des mots comme révélateur de la progression des milieux dans les expérimentations puzzle et quadrilatère. Présente publication, 2004.

De l'usage des mots comme révélateur de la progression des milieux dans les expérimentations puzzle et quadrilatère

Chantal TIÈCHE CHRISTINAT

HEP VD, Lausanne ; IRDP, Neuchâtel

Introduction

"Les sons émis par la voix sont les symboles de l'âme"
Aristote

Les rapports entre la pensée et la langue ont préoccupé les scientifiques depuis la nuit des temps. La langue, production en succession de sons inscrits dans un système fut au temps des Grecs, le miroir de la pensée. L'épistémologie aristotélicienne pose non seulement l'existence des liens directs entre la pensée et la langue, mais infère un rapport de dépendance de la pensée au système linguistique, ce qui a donné naissance à une des plus grande querelle philosophique de l'histoire.

Beaucoup plus tard, au XXe siècle, la linguistique saussurienne considère le mot comme un signe constitué d'un signifiant et d'un signifié, le signifié étant une représentation conceptuelle du référé, du réel. Le signifié confère dès lors du sens au signifiant, en lui étant intrinsèquement relié et donne aussi du poids à l'individu, qui construit et attribue un sens à ce signifiant. À l'opposé le signifiant, c'est-à-dire l'expression sonore ou graphématique n'est ni représentation individuelle ou collective, ni objet, ni concept. Pour de Saussure, la nature du signe linguistique pose les rapports de la langue à l'institution sociale et à l'individu. La langue est employée pour convoyer ce que nous voulons dire, c'est-à-dire pour permettre à l'individu de révéler un contenu de pensée qui prend forme à mesure qu'il est énoncé. Ainsi, sans le signe, la pensée ne peut être révélée.

Abstraction faite de son expression par les mots, notre pensée n'est qu'une masse amorphe et indistincte. Philosophes et linguistes se sont toujours accordés à reconnaître que, sans le secours de mots, nous serions incapables de distinguer deux idées d'une façon claire et constante.... Il n'y a pas d'idées pré-établies, et rien n'est distinct avant l'apparition de la langue. (De Saussure, 1916, p.157)

Cette assertion fait de la langue naturelle un révélateur et un organisateur de la pensée, dont les structures prennent dès lors l'allure et la forme du système linguistique. Cette dépendance contrainte de la pensée au système langagier est longuement discutée par Piaget dès 1930 avec la parution du livre *Le langage et la pensée chez l'enfant*, puis constamment débattu et alimenté par de nouveaux apports scientifiques.Longtemps considéré par l'école genevoise comme révélateur des phénomènes de pensée, sans y être cependant soumis, le langage joue durant plusieurs années un rôle de seconde main dans la construction de l'intelligence. Reconnu comme un moyen d'observation et d'expérience, il est structuré «

par des lois générales de coordination qui se manifestent dans les actions sensori-motrices avant de se retrouver sur le plan de la fonction sémiotique » (Piaget, 1967, p. 381). Si l'action joue ainsi un rôle extrêmement puissant, en particulier l'action sensori-motrice qui préfigure la structure de classes et de relations de même que les propriétés des objets (Piaget & Inhelder, 1966), le langage toutefois sert non seulement à l'accompagner, mais permet aussi de fixer et d'anticiper les conduites. Ainsi la connaissance des objets et de leur propriétés bien que révélée par les actions motrices et langagières de l'enfant ne procède qu'indirectement des apprentissages langagiers. Le rôle dévolu au langage s'inscrit dans une complémentarité avec l'action, il est utile mais non nécessaire au développement cognitif.

Ces thèses piagétiennes ont fortement influencé la pédagogie, mais les tensions épistémologiques propres au débat portant sur le langage et la pensée ainsi que l'apport du socioconstructivisme de Vygotski va remodeler l'importance du rôle joué par le langage lors de la construction des connaissances, et en particulier des connaissances et savoirs culturels. Le langage devient dès lors une interface révélant d'une part les processus de pensée des acteurs, et devenant à son tour processus de construction et vecteur du développement cognitif. L'utilisation des mots permet ainsi dans une certaine mesure d'augurer ou du moins de révéler l'état de savoir (Vergnaud, 1999) du locuteur ainsi que le type de conceptualisation qui s'effectue.

L'importance de la dialectique *action - formulation* se confirme dans de nombreuses études portant sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Contribuant à la réflexion actuelle, l'ouvrage de Gilly, Roux et Trognon (1999) souligne que les interactions sociales qui se développent lors d'un acte de formation, et qui se trouvent au coeur du processus didactique passent par le langage, se font et se défont dans celui-ci. Non seulement partie de la situation didactique, le langage constitue à la fois un environnement dans lequel l'activité se produit en même temps qu'il participe à l'activité elle-même au même titre que le contexte dans les théories de l'apprentissage situé (Greeno, 1997) De plus, la nature fortement sémiotisée des actes d'enseignement et d'apprentissage oblige à prendre en compte les conduites linguistiques des différents acteurs de la situation didactique et à les placer au coeur même de l'étude. Les recherches en didactique des mathématiques n'échappent pas à cette orientation du champ d'étude. La série de travaux portant sur les ostensifs (Ratsimbah-Rajohn, 1992; Bosch & Chevallard, 1999 ; Salin, 1999), sur la mémoire didactique (Matheron, 2000 ; Flückiger et Mercier, 2003) attestent de l'importance du sémiotique. Plus particulièrement, les recherches récentes de Sensévy et Quilio (2003) portant sur le sens de l'action du professeur fondent leur analyse sur les caractéristiques linguistiques du discours du professeurs lors des échanges entre élèves et enseignants.

L'incontournable nécessité de la prise en compte du langage, de ses propriétés et caractéristiques[1] dans des situations didactiques nous pousse à interroger la place qu'il occupe dans la structuration du milieu. Les études sur la notion de milieu présentés lors de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique en mathématiques (EEDM, 2001) par Salin, par Bloch et par Margolinas, cherchent à en cerner sa structuration, montrant par là même sa complexité théorique, son dynamisme et ses potentialités pour lire les situations didactiques dans la classe. Notre propos consiste plus particulièrement à rendre compte des processus langagiers engagés mis en place pour explorer la richesse du milieu. Il s'agit d'une étude préliminaire, qui s'inscrit dans le cadre de la recherche en DDMES présentée par F. Conne lors de l'EEDM de 2003, et qui a pour intérêt non seulement un cadre de l'enseignement spécialisé

[1] À ce sujet, on se référera également aux actes du colloque "faut-il parler pour apprendre ? Dialogues, verbalisation et apprentissages en situation de travail à l'école : acquis et questions vives" qui a eu lieu à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais, Arras, en mars 2004.

et des particularités que celui-ci présente, mais espère ajouter une pierre à une réflexion plus générale sur le poids et le rôle qu'occupent certains fonctions du langage dans la théorie du milieu.

Contexte de l'étude

Notre préoccupation s'est portée sur le milieu offert à l'élève et sur ce que l'on pourrait nommer son « autopoiesis » en empruntant ce concept à Maturana &Varela (1980). Par le jeu de changements microscopiques et de différentes natures, le milieu va se développer et se modifier sous l'influence des acteurs de la situation didactique. La tâche initiale empruntée aux moyens d'enseignement des mathématiques de Suisse Romande (1986) donne naissance à une situation didactique particulière, composée d'un expérimentateur,[2] d'un milieu et de deux ou trois élèves. Proposé comme un milieu initial (M0), il va par le jeu des actions et des interactions se développer et se modifier et deviendra ce qu'en font l'expérimentateur et les élèves; ainsi sa pertinence didactique découle non seulement de la richesse ou de la pauvreté de M0, mais du milieu co-construit par tous les acteurs de la situation didactique. Il s'agissait dès lors pour nous d'interroger les caractéristiques sémiotiques du ou des milieux au même titre que d'autres contributions visent à cerner les significations des connaissances ou des objets de savoir construits durant la tâche.

La situation didactique de départ consiste en un une tâche proposée par la méthodologie romande de l'enseignement des mathématiques pour les degrés 5-6P[3] (cf. Scheibler et Del Notaro, même numéro) et qui comporte un matériel à construire, des commentaires didactiques et les modalités de gestion de l'activité dans la classe. Les consignes données au maître pour mener à bien la tâche accordent au lexique une place importante, puisque selon les commentaires didactiques, il est demandé au maître de nommer les quadrilatères ou de les faire nommer.

Cette injonction exige de réfléchir au rôle qui est attribué au langage, et plus particulièrement aux mots et aux conceptions didactiques, épistémologiques qui sous-tendent la situation. En regardant de plus près la tâche initiale (T0), la dénomination demandée et attendue de l'élève suppose que, pour les auteurs de cette activité, les propriétés mathématiques vont être extraites ou conjuguées essentiellement à travers la dénomination. Vue sous cet angle, on peut considérer que cette tâche a des relents quelque peu nominalistes, voire magicophénomémistes, comme si les propriétés de l'objet étaient toutes entières signifiées et contenues dans le nom. Les méthodologues seraient-ils de la même souche que Humpty Dumpty?

Est-il absolument nécessaire qu'un nom signifie quelque chose ? s'enquit, dubitative, Alice.
–Evidemment que c'est nécessaire, répondit, avec un bref rire, Humpty Dumpty. Mon nom à moi signifie cette forme qui est la mienne, et qui est, du reste, une très belle forme. Avec un nom comme le vôtre, vous pourriez avoir à peu près n'importe quelle forme.

Lewis Carroll (1871/1989, p.176)

Il est également envisageable, d'adopter un point de vue plus socioconstructiviste et d'entrevoir la tâche de dénomination comme une manière de définir et de stabiliser les

2 La situation didactique est particulière puisqu'un des acteurs de la situation est l'expérimentateur et non le professeur. Toutefois, la situation reste à nos yeux doublement didactique, puisqu'il y a volonté de la part des chercheurs de faire construire par les élèves de nouvelles connaissances et de la part des élèves, de venir faire des maths dans ce contexte particulier.

3 Les degrés 5P et 6P en Suisse Romande regroupent des élèves de 10 à 12 ans, avant leur intégration au degré secondaire (type collège).

propriétés mathématiques des quadrilatères. Cependant il nous apparaît très clairement que selon le point de vue théorique auquel l'expérimentateur va s'attacher, le milieu ne prendra pas la même configuration et n'évoluera pas de la même manière.

Dans la tâche de départ, nommer un quadrilatère, c'est-à-dire lui attribuer un signifiant au sens saussurien du terme, permet de créer l'objet mathématique tout en mettant en oeuvre différentes actions menées sur l'objet « puzzle » lui-même. A moins que l'inverse ne se produise, à savoir que les différentes actions effectuées sur l'objet, les transformations de celui-ci et la constitution d'invariants donne lieu à des nominalisations qui contiennent des propriétés voire l'ensemble des propriétés révélées par les actions conjointes des élèves et du chercheur.

"Les quadrilatères s'accumulant, il deviendra nécessaire de les nommer et de les classer".....
" De ce travail de description, de nomenclature, de classement vont émerger des concepts plus larges: le quadrilatère se sera plus un polygone à 4 côtés, mais sera une classe structurée dont les éléments ont des propriétés internes qui les distinguent."

Méthodologie 5/6, moyens d'enseignement romands, 2001, p.182.

Cette première remarque montre une tension épistémologique d'importance que les milieux M_1 .... M_n proposés aux élèves de l'enseignement spécialisé peuvent exploiter et orienter différemment. Ainsi nous supposons que le jeu portant sur le poids des facteurs *objet versus signe* va être un révélateur de l'enrichissement du milieu dont parle Conne (2002) ou de l'étirement de celui-ci, et qui est évoqué dans la contribution de Scheibler et Del Notaro (dans ce même numéro).

Méthodologie choisie

À partir d'une activité décrite dans la méthodologie romande 5P et appartenant au champ de l'étude nommé *surfaces et solides*, chaque expérimentateur a proposé en fonction de son appropriation du milieu de la tâche et de ses intérêts une succession de tâches. (T_1.... T_n) à deux élèves de l'enseignement spécialisé âgés entre 10 et 13 ans. Durant deux séances consécutives, deux filles et deux garçons ont ainsi été confrontés à différents milieux issus de transformations de M0. Une dernière séance regroupe trois filles, dont les deux qui avaient participé aux premières séances.

Analyse

L'analyse qui sera faite ci-dessous porte sur une série d'entretiens, partiellement retranscrits à partir des vidéos, que nous désignons par EF pour ceux des filles et par EG pour ceux qui sont menés avec les garçons.

Nous avons cherché d'une part à repérer quelles étaient les différentes caractéristiques des milieux donnés aux élèves et comment expérimentateurs et élèves transformaient ou donnaient sens au rôle attribué au langage par T0, à savoir le travail de nomenclature. Si pour ce champ sémantique, le lexique semble obéir à la logique des classes et être organisé en une arborescence hiérarchique relativement simple, il faut cependant souligner que le sens des mots n'est pas monolithique, mais est constitué de plusieurs traits sémantiques que Greimas (1986) nomme sèmes et qui sont autant de traces de l'activité du locuteur en relation à l'ordre du référentiel ou du conceptuel (et non pas en relation avec le linguistique). Pour les modèles connexionnistes, ces sèmes différents, mis ensemble, constituent le concept, à savoir le signifié du mot. Dans l'interlocution, les traits partagés permettent à la fois de constituer des catégories, des sous catégories et des individus et également de dichotomiser le champ sémantique en terme d'objets et en terme de relations et de propriétés (structures prédicatives). Le champ de la géométrie au même titre que d'autres champs lexicaux contient un certain nombre de termes qui lui sont spécifiques et un certain nombre de termes qu'il partage avec d'autres champs relevant ou non du lexique mathématique. Par ailleurs, le lexique obéit également à d'autres classifications d'ordre pragmatique, telle que la classification par catégorie d'usage et de lieu, dont nous tiendrons également compte pour l'analyse.

Afin de cerner l'évolution des milieux proposés lors des trois expérimentations, nous avons mené une succession d'analyses en cascade dont nous déclinons ici trois étapes.

1. Répertoire des éléments lexicaux descriptifs (descripteurs) des objets géométriques.

La première approche répertorie pour chaque entretien et indépendamment du statut du locuteur l'ensemble des premières instanciations lexicales qui ont trait à l'objet "quadrilatère" évoqué ou construit et présent, et qui représente soit l'objet ou la classe des objets, soit sa propriété.

De cette première approche ressort une liste de mots que l'on peut classer dans trois registres sémantiques différents.

Le registre scientifique :

Dans ce premier registre figurent tous les mots qui relèvent du vocabulaire spécifique et conventionnel au champ de la géométrie et des mathématiques:

objet ou classe d'objets géométriques: carré; losange; triangle, non quadrilatère; pentagone; pyramide; quadrilatère; rectangle; trapèze; surface; sommet; angles; côté

propriétés: isocèle; égal (égaux)

Leur usage par les élèves et les expérimentateurs ne contient de traces au référent qu'en vertu de l'objet désigné. L'accord ou le désaccord éventuel portera sur la liaison entre l'objet, ses propriétés visibles ou déduites par les locuteurs et le signifiant donné, sans pour autant que chaque locuteur partage la totalité des traits sémantiques attribué au signe utilisé.

Le registre quotidien :

Le 2ème registre est composé de mots appartenant à des champs lexicaux non spécifiques, qui dans le quotidien familier désignent des objets ou des qualités de ces objets.

objets ou classe d'objets: bords; cerf-volant; coin; (coque de) bateau; fenêtre ; vitre; maison; pièce; pointe; avion; fusée; porte; sens; terrain de foot; longueur; forme; rare; voile; on dirait une flèche

propriétés et relation: court; couché; déformé; différent; droit; grand; pareil; long; même; petit; penché; plat; tordu; travers; tourné

Dans ce registre, certains signifiants utilisés permettent de renvoyer à l'objet géométrique par analogie (ex : maison). D'autres mots de ce deuxième registre sont employés également dans le champ mathématique (ex : *longueur*, *sens*, *droit*) ou présentent un usage scolaire particulier qui sélectionne certains traits sémantiques du mot (ex : *cerf-volant*) et mène ainsi à des confusions classiques tandis que d'autres sont énoncés selon un rapport prototypique et parfois dans un usage synonymique (ex : le mot *pièce* de puzzle étant compris comme *forme* et non comme *partie*).

Le registre composite :

Le troisième registre est un ensemble de mots créés par composition de lexèmes empruntés à chaque registre sémantique cité précédemment formant ainsi des néologismes lexicaux appartenant au champ sémantique de la géométrie :

objets ou classe d'objets I: carré- tourné; grand-carré; triangle-déformé; triangle-cerf-volant; triangle-couché

objets ou classe d'objets II: losange-triangle; triangle-rectangle; triangle-triangle; triangle-carré ;

propriétés: presque-quadrilatère

Ce registre est constitué de deux groupes de mots. Dans la première classe de mots, les objets ainsi dénommés désignent à la fois la classe des objets et une particularité de celui-ci, montrant ainsi un usage descriptif du lexique géométrique. Le triangle ou le carré construit au moyen du puzzle se voient ainsi assignés à une forme précise, à une gestalt donnée. En accolant un prédicat tel que *tourné* ou *déformé*, une nouvelle classe d'objet est ainsi créée et définie. Non seulement la classe des carrés ou des triangles s'enrichit d'un nouvel objet, mais il le fait en lui attribuant une caractéristique nouvelle intrinsèque à l'objet, de façon presque agglutinative. Il y a ainsi des objets *triangles* et des objets *triangles-déformés*, sans que ces derniers appartiennent à la classe « triangle »[4].

Dans le deuxième groupe de néologismes (II), le même principe de composition est utilisé pour leur formation, mais les morphèmes le constituant ne sont pas de même nature. Le signe nouvellement créé désigne essentiellement la forme totale de l'objet et une forme contenue dans celui-ci. Ainsi un losange constitué de triangles durant l'activité sera dès lors nommé *losange-triangles*. Ce faisant, cette classe d'objets va attirer l'élève à prendre en compte d'autres caractéristiques de l'objet que son contour ou sa gestalt. Les traits sémantiques pertinents pour les locuteurs sont ici inclus de manière visible dans le signe lui-même et peuvent dès lors être ostensiblement partagés. A chaque objet quadrilatère construit peut ainsi être associé un signe singulier mettant ainsi à mal l'organisation hiérarchisée de la nomenclature. Cette dernière catégorie est particulièrement intéressante, car elle marque une certaine distance face à la tâche initiale et révèle les modifications du milieu.

2. Topographies des registres sémantiques (analyse intra- et inter-entretien)

Bien que notre analyse ne porte pour l'heure que sur les premières instanciations lexicales[5] dans chaque séance, l'évolution des milieux au cours des séances nous amène à nous interroger sur la chronologie des usages des descripteurs, faisant ainsi croiser les paramètres *énonciateur* (expérimentateur ou élèves), *registre sémantique* et *ordre des séances* (EF et EG). Nous pouvons ainsi dégager une première carte topographique révélatrice de certains épisodes symptomatiques de l'évolution du milieu.

[4] Une analogie avec la genèse des structures logiques permet d'éclairer cette conduite. Nous pouvons effectivement supposer que, langagièrement du moins, ces dénominations dénotent d'une lacune dans l'extension de l'emboîtement des triangles déformés avec la classe des triangles, lacune observée chez des enfants préopératoires dans les épreuves piagétiennes de logique des classes.

[5] Cette analyse met ainsi de côté volontairement toutes les reprises de ces descripteurs pendant l'entretien. Cependant il est manifeste que durant une même séance, les termes sont repris et que le taux de reprises intra-entretien exerce une influence sur la probabilité d'apparition de ce même terme dans les séances suivantes.

Champ sémantique		spécifique		non spécifique		composite		
	signifié	A1	A2	B1	B2	C1	C2	
Entretie	Enonciateur	Objet ou classe d'objets	Propriétés des objets	Objet ou classe d'objets	Propriétés des objets	Objet ou classe d'objets	Propriétés des objets	total
EF-1	élèves	5	0	9	1	1	0	16
	expérimen-tateur	2	1	2	1	0	0	4
EG-1	élèves	5	0	1	5	5	1	17
	expérimen-tateur	3	2	2	1	0	0	5
EF-2	élèves	1	0	4	0	0	0	5
	expérimen-tateur	3	0	1	0	0	0	4
EG-2	élèves	1	1	1	3	0	0	6
	expérimen-tateur	3	2	3	0	2	1	11
EF-3	élèves	1	1	3	3	2	0	10
	expérimen-tateur	3	2	4	3	0	0	11

tableau 1: répartition des 1ères instanciations lexicales *descripteurs* selon entretien et champ sémantique

Dans les entretiens EF-1 et EG-1, les éléments lexicaux en première instanciation portant sur le champ sémantique spécifique du domaine étudié sont énoncés prioritairement par les élèves, souvent sur demande implicite ou explicite de l'expérimentateur.

Exemple 1: EF – 1.
Exp. : *vous pensez que c'est un quadrilatère ?*
F1: *un triangle*

Exemple 2: EG – 1
Exp.: *tu connais les noms (des formes dessinées) ?*
G1: *rectangle, carré et puis.....*

Cette asymétrie est corrigée dans les deux dernières séances EF et est renversée dans EG-2, puisque c'est l'expérimentateur qui va introduire le plus souvent les premières instanciations lexicales *descripteurs* des figures construites.

Le troisième (EF-2) et quatrième entretien (EG-2) manifestent un recul du nombre total de descripteurs des formes géométriques. Nous constatons en particulier une diminution des termes spécifiques chez les élèves, et étonnamment dans l'entretien (EG-2) une très forte augmentation de la référence à ce registre chez le professeur-expérimentateur

Exemple 3: EF 2
Exp. : *quelqu'un m'a dit que c'est un triangle-carré*
F1+F2 : *ça n'existe pas*
Exp. : *oui, quand on met deux triangles comme ça (assemble deux triangles isocèles)*

L'utilisation des registres est variable selon la séance. Les éléments du registre quotidien sont plus nombreux dans ces deux premiers entretiens (EF-1 et EG-1) que dans les entretiens suivants. Les descripteurs énoncés en EF-1 se réfèrent surtout à la forme de l'objet créé et non pas à ses propriétés Dans EG-1, nous notons une tendance inverse, les élèves parlant plus des propriétés des formes dans leur ensemble (un carré est plus grand ou plus petit) ce qui va ainsi permettre l'émergence des dénominations composites plus fréquentes que pour EF-1. Cette construction de mots composites permet de créer un vocabulaire "pseudo scientifique" qui obéit vraisemblablement à un effet de contrat didactique et donne par là même l'illusion d'un savoir géométrique alliant l'objet à ses propriétés. Dans EF-3, les registres sont organisé grosso modo de la même manière que dans l'entretien EF-1 Cependant, à l'intérieur de chaque registre mentionné, nous constatons l'apparition d'éléments lexicaux qui vont attribuer aux objets des propriétés caractéristiques, délaissant dans une certaine mesure les éléments lexicaux désignant les objets.

L'analyse prenant en compte la dimension temporelle et les énonciateurs révèle deux phénomènes intéressants qui affinent la représentation topographique des registres. Le premier porte sur les reprises lexicales et le deuxième sur le changement de registre au cours d'une même séance.

1. Reprises lexicales

Nous constatons que dans EF-1, l'expérimentateur reprend souvent dans le tour de parole suivant, c'est-à-dire 10 fois sur 16 instanciations, le signe énoncé par les filles, agréant ainsi le signifiant et permettant par cette reprise imitative immédiate de construire un champ sémantique commun, en lien avec l'objet ainsi dénommé. Dans EG-1, ces reprises imitatives sont également relativement nombreuses, mais leur organisation chronologique diffère. En effet, plusieurs des premiers éléments énoncés par les garçons seront repris en fin de séance, comme éléments connus sur lesquels différentes actions peuvent se greffer. Seules cinq reprises imitatives immédiates sont instillées durant toute la séance. Dans les séances suivantes (EF–2, EG–2 et EF–3), nous observons une certaine parité des premières énonciations lexicales selon le statut des locuteurs, ainsi qu'une très nette diminution des reprises, laissant ainsi accroire un accordage de fait sur les traits sémantiques que les locuteurs attribuent aux différents signes.

2. Changements de registre

Dans l'analyse diachronique de l'entretien EF-1, on constate chez les élèves un déplacement des premiers mots énoncés allant du registre *scientifique* vers le registre *quotidien,* déplacement qui n'apparaît pas chez l'expérimentateur. En effet, chez les deux élèves le vocabulaire spécifique du domaine géométrique est concentré dans le début de l'entretien, puis il s'estompe au profit d'un vocabulaire d'usage quotidien. Un déplacement de registre aussi clairement circonscrit est également visible dans EG-2. Durant cet entretien, c'est l'expérimentateur qui d'emblée énonce une série de signifiants composites du troisième registre sémantique en première instanciation lexicale pour ensuite ultérieurement changer de registre et énoncer des mots appartenant au registre scientifique (registre 1).

Dans EF-2, l'enseignant initie la tâche en ayant recours au registre spécifique, dans les premières minutes, puis n'introduit plus de descripteurs nouveaux. Nous notons également dans l'entretien EG-2, la création de néologismes par l'enseignant, néologismes qui portent non pas sur la forme ou le pourtour du quadrilatère, mais sur ses composants. La tendance entrevue dans le premier entretien (à savoir plus d'usage non-spécifique chez les filles) perdure.

Le jeu des registres selon le statut des locuteurs et leurs localisations intra- et inter-entretiens sont révélateurs des différents milieux construits durant ces phases d'observation. Elèves et expérimentateurs vont à travers les actions menées modifier la représentation du champ sémantique évoqué par le milieu, amenant ainsi à prendre, par exemple, en considération les parties du quadrilatère sans en oublier la forme. Les mots ici sont au service de l'action, et la traduisent. Cependant il s'avère qu'à leur tour ils génèrent une modification du milieu et que sans changement de registre, le milieu de l'action n'aurait pas évolué de la même manière.

3. Fonction des descripteurs et changement de milieu.

L'usage des mots et plus particulièrement des descripteurs est à fin de dénomination ou de désignation. Ces deux fonctions présentent un rapport différent au langage. Dans le premier, il s'agit d'attribuer un signifiant, une image sonore ou écrite à un objet réel ou un objet de pensée. La désignation quant à elle permet d'évoquer le signifié, à savoir l'objet par l'intermédiaire du signifiant. Si dans les deux cas, l'objet référé par le signifiant est un construit mental, sorte d'abstraction qui met en scène les connaissances des locuteurs, dans le cas de la dénomination, l'objet est souvent concret et présent, les significations étant ainsi supposées partagées, sans toutefois comme nous le signalions plus haut que l'ensemble des sèmes le soient. Par contre la désignation apparaît plus tributaire des représentations de chaque locuteur, à moins qu'elle ne soit complétée par des ostensions, qui font appel à des procédés extralinguistiques. L'homogénéité, voire la cohésion des traits sémantiques attribués aux mots par chaque locuteur de la situation est opérée par le milieu de l'action et de l'interlocution.

L'analyse des mots dans leur première instanciation indique que les premiers entretiens (EF-1 et EG-1) posent les objets et installent leur dénomination. Le milieu , tout en jouant sur les propriétés des objets, travaille essentiellement à construire un ensemble de signes partagés qui permettra lors des troisième et quatrième entretiens (EF – 2 et EG- 2) de mettre en place un milieu propre à l'action sur les objets, qui seront dès lors simplement désignés.

Durant les entretiens, le rôle des locuteurs dans la dénomination n'est pas symétrique. Cependant si dans EF-1 on pourrait de prime abord supposer que cette asymétrie est révélatrice du statut plus didactique de la tâche que dans les expérimentations suivantes, nous constatons surtout que l'évolution des milieux induit un mouvement allant dans le sens d'une *dé-priorisation* progressive du langage et ce dès l'entretien EG-1. Si ce mouvement reste dans une large mesure dépendant du statut des locuteurs, l'expérimentateur autorisant l'utilisation de registres moins formels par une reprise de termes appartenant au 3ème registre, il incarne en soi et au travers même de cette succession d'activités l'évolution de la tâche qui se détache de cette volonté de dénommer pour connaître.

Les demandes de dénomination sont fréquentes durant les deux premiers entretiens, elles appartiennent surtout à l'expérimentateur et les élèves vont y répondre par dénomination. Le chercheur va reprendre le terme, confirmant ainsi l'utilisation possible du signifiant pour la forme ainsi nommée (effet de contrat). Ces échanges fréquents dans la conversation ordinaire permettent, comme c'est le cas dans l'acquisition du langage, de s'assurer le partage des significations, et joue dans ces premiers entretiens un rôle important pour la création d'un champ lexical commun et constitue également un aspect de validation de la réponse donnée.

Les désignations, sont par contre plus nombreuses dans les entretiens 3, 4 et 5. Elles se conjuguent en deux modalités: soit elles désignent un objet absent, soit elles s'accompagnent d'une ostension gestuelle (processus de deixis). La désignation invoque la mémoire didactique de l'élève et de l'expérimentateur, alors que la dénomination est un des aspects qui la constitue. Nommer n'est ainsi pas seulement la trace visible de la mémoire didactique, mais la constitue partiellement du moins et la restitue.

Exemple 4: EF 3

F2: (construisent un quadrilatère formé de 4 pièces)
F1: on prenait ça pour un terrain (en référence à l'entretien EF-1)

La succession des milieux créés rend nécessaire le recours à la désignation et permet ainsi de fixer l'attention non plus sur le signe, mais sur l'objet référé et ses propriétés et sur la tâche elle-même. Dès lors, si dénomination et désignation apparaissent comme des processus accompagnateurs des tâches, ces deux processus semblent cependant prendre des fonctions très différentes selon l'épisode didactique en cours ou le degré de connaissances des élèves, modifiant ainsi le statut de l'objet mental et des propriétés signifiées au cours des entretiens.

Chez les expérimentateurs, les signifiés utilisés renvoient à des savoirs différents des savoirs des élèves, savoirs qui sont dans le premier entretien un reflet assez prototypique de ce qui se passe en classe. A la demande de descripteurs, l'élève répond par un vocabulaire spécifique que l'enseignant ou en l'occurrence l'expérimentateur valide ou non. Cependant la situation évolue, car le nombre de formes créées ne permet plus de maintenir une correspondance biunivoque de type *une forme pour un signifiant.* Il faut donc, pour maintenir à la fois cette exigence sémantique et didactique, emprunter des termes au vocabulaire courant, qui est mieux partagé par les locuteurs, et qui donne ainsi l'illusion de communauté langagière. Dans un troisième moment, lorsque l'analogie avec des formes d'objets ne satisfait plus les contraintes de la tâche, on voit apparaître des mots exprimant certaines propriétés des objets simultanément à l'expression de l'objet. Ce troisième registre créé, nous pouvons supposer que sa transparence signifiant – signifié va conduire les élèves à construire des quadrilatères en tant que polygone.

En guise de conclusion

Regarder les mots selon les registres lexicaux ne suffit cependant pas à décrire totalement la progression/l'étirement du milieu. S'arrêter à une telle analyse reviendrait à adopter une position nominaliste, assez proche de la tâche décrite, à savoir penser que l'usage des mots relevant du domaine scientifique revient à en maîtriser le concept. S'il est vrai que durant les entretiens, l'usage des signes relevant du registre "termes spécifiques » ne présente pas des patrons identiques et n'ont pas les mêmes fonctions, beaucoup de choses restent à dire sur l'objet quadrilatère que le milieu présente.

L'étude que nous avons menée montre d'une part que l'étirement du milieu et les moments de changement de milieu ne coïncident pas nécessairement à des modifications de registres. Si le milieu de l'action paraît dans cette étude s'éloigner progressivement du milieu interactionnel verbal, allant ainsi dans le sens d'une indépendance des actions et du langage et s'éloignant ainsi de la tâche initiale. L'usage des termes descripteurs dans les cinq situations d'entretiens marque de manière assez nette une modification du milieu. Dans les deux premiers entretiens, nommer était pensé comme objectif/intention didactique durant toute la séquence (nommer différents quadrilatères revient à en re-connaître et à en partager les caractéristiques). Cette activité permet ou devait permettre de reconnaître l'existence d'un certain nombre d'objets intéressants et répondant à certains critères. En même temps, elle établit des consensus sémantiques et langagiers (représentations partagées entre locuteurs). De plus elle pourvoit la mémoire didactique d'indices plurimodaux (objets, signes). Malgré cet usage, le milieu objectif constitué des six pièces n'est d'emblée pas le même pour les élèves que pour le professeur. Passer par la dénomination pour appréhender le milieu s'est avéré créer de fait un nouveau milieu, connexe, comportant une autre tâche aux yeux des élèves, à savoir la dénomination d'objets et de formes qui présente un intérêt certain dans un cadre métalangagier, puisqu'il met en œuvre des fonctions de créativité langagières chez des élèves qui souvent en manque ! Mais ce milieu sur lequel opère les élèves, et qui est tout aussi antagoniste que le précédent, n'est pas celui que l'expérimentateur voit et rencontre. Ainsi la représentation de la tâche n'est pas partagée - du moins pas complètement -, même si l'expérimentateur tente par différents moyens de ramener l'élève au milieu "objet géométrique", voire de superposer ou de joindre les milieux de l'action et du verbal (reprise des dénominations données par les élèves) permettant un retour à la tache initiale. Dans le premier entretien EF-1, un clair mouvement de balancier peut être perçu par le miroir qu'offre l'étude des registres.

Dans les deux entretiens suivants, une autre tendance s'esquisse de manière très progressive. Nommer les figures permet un rappel de la situation antérieure. Il sert à la mémoire didactique de l'élève et est proposé comme cadre d'interprétation des différentes formes géométriques et de certaines de leurs propriétés. Les descripteurs spécifiques utilisés fixent le cadre puis sont mis de côté au profit de l'action sur le milieu. Dans ces entretiens EF-2 et EG-2, on perçoit une distinction assez nette quant au choix du cadre d'interprétation que l'élève ou l'enseignant élit. Les actions possibles sur le milieu et la résistance que ce dernier oppose ne sont pas identiques pour l'élève et pour l'enseignant. Les connaissances et savoirs des deux partenaires de la situation sont médiés par le langage que chacun utilise, mais il ne s'agit que d'une médiation. Les mots partagent ainsi une façade consensuelle très grande (la dénomination ayant été posé durant les deux premières séances). Ainsi les effets du milieu feront que chaque locuteur capture un certain nombre de traits sémantiques, qui peuvent désormais à leur tour être questionnés par les actions entreprises sur les formes, mais le langage n'est pas ou n'est plus l'objet de l'enjeu, il ne constitue que l'entour du milieu et n'est de fait pas le milieu.

En début de l'entretien EF-2 et dans l'entretien EG-2, l'utilisation des termes descriptifs des objets ou de leurs propriétés marque un nouveau visage. En effet, nommer sert de support à une conversation presque ordinaire sur fond d'action et de manipulation du milieu objectif. La façade consensuelle semble plus forte, mieux ancrée dans une fonction d'échanges communicatifs réciproques. Les pièces du puzzle sont dénommées, mais le milieu n'est pas constitué des descripteurs mais les objets nommés le sont en tant que propriétés des objets à confectionner.

Nos résultats montrent également que la structuration du milieu est pour le moins dépendante des processus de sémiotisation. Il apparaît même dans certains épisodes que le milieu se duplique ou se divise en un milieu de l'action (MA) et un milieu de sémiotisation (MS). Ces deux « co-milieux » se développent conjointement et participent à l'avancement de la situation didactique. Plus particulièrement, les interrelations entre les actions et la sémiotisation des figures et de leurs propriétés vont influencer le déroulement de la situation et les composantes du milieu. Les changements de registres, les lieux et les moments de leur utilisation ainsi que leur usage dans les situations que nous avons créées à partir du milieu initial prévu constituent des éléments-clés qui modifient les paramètres du milieu de la sémiotisation, voire du milieu de l'action. Cependant il y aurait lieu de s'interroger sur la contemporanéité des changements intervenant dans MA et MS. Dans les différents épisodes examinés, les changements d'action et d'interlocution ne semblent pas toujours produire nécessairement d'effets immédiats; chaque milieu présente et préserve une certaine autonomie de fonctionnement, s'autorégulant et se régénérant dans le cadre fixé. L'évolution des situations à travers cette duplication du milieu en un milieu de l'action et de la sémiotisation met en place un jeu complexe d'interrelations qui permet à partir du milieu d'étude du *quadrilatère pensé en tant que forme ou pourtou*r de conduire à une étude du milieu *quadrilatère pensé en tant que polygone*. Le milieu nouvellement composé allie les formes et le langage d'ordre prédicatif et c'est celui-ci qui est donné à travailler aux élèves.

Références bibliographiques

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objets d'étude et problématique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 19/1, 77-124.

Chastellain, M. & .Jaquet, F. (2001). *Mathématique 5ème année. Méthodologie – commentaires*. Neuchâtel: Corome.

Carroll, L. (1871). *A travers le miroir*. Traduction française (1989) Œuvres. Vol 2. Paris: Laffont.

Conne, F. (2003). Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l_enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. Education et francophonie, vol. XXXI, n°2 : *La spécificité de l_enseignement des mathématiques dans l_enseignement spécialisé*. [Online] http://www.acelf.ca/revue/collection.html.

Flückiger, A. & Mercier, A. (2002). Le rôle d'une mémoire didactique des élèves, sa gestion par le professeur. *Revue française de pédagogie, 141, oct/nov/déc, 27-35.*

Gilly, M., Roux, R. & Trognon, A. (1999). *Apprendre dans l'interaction*. Nancy et Aix en Provence: Presses Universitaires de Nancy. Publication de l'Université de Provence.

Greeno, J.G. (1997). On claims that answer the wrong questions. *Education Researcher*, 26(1),5-17.

Greimas, A J. (1986). *Sémantique structurale : recherche de méthode*. Paris : Presses universitaires de France.

Maturana, H.R. & Varela, F.J. (1980). *Autopoiesis and Cognition: The Realization of the Living*. Dordrecht : Boston Studies in the Philosophy of Science Vol. 42.

Margolinas, C. (2001). Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur. *Actes de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques.* (pp. 141-156). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Matheron, Y. Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire. *Recherche en didactique des mathématiques*, 21/3, 207-246.

Ratsimba-Rajohn, H. (1992). *Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradiction.* Thèse de l'Université de Rennes I. Rennes.

Salin, M.H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. IN : G. Lemoyne et F.Conne (Eds.). Étude des pratiques effectives : l'approche des didactiques.(pp. 327-352). Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

Salin, M.H. (2001). Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. *Actes de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques.* (pp. 111-124). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Saussure, F. (de) (1916) *Cours de linguistique générale*. Lausanne et Paris: Payot.

Scheibler, A. & Del Notaro, L. (2004). Modèles du milieu à l'épreuve de la contingence en enseignement spécialisé. (même numéro)

Sensévy, G. & Quilio, S. (2002). Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique. *Revue française de pédagogie, 141, oct/nov/déc, 47-56.*

Piaget, J. & Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant*. Paris: PUF

Piaget, J. (1930). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. Neuchâtel et Paris: Delachaux et Niestlé.

Vergnaud, G. (1999). On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget. In: Y.Clot. (sous la dir.) *Avec Vygotski.* (pp. 45 – 58). Paris: La Dispute.

Contrats, milieux, représentations : Étude des particularités de l'AIS

L'enseignement en SEGPA : Questions et outils théoriques d'analyse

Isabelle BLOCH & Marie-Hélène SALIN

DAEST, Université Bordeaux 2, et IUFM d'Aquitaine

Introduction

Les élèves qui sont l'objet d'un constat d'inaptitude à suivre l'enseignement dans une classe "ordinaire" de Sixième de collège (ou plus tard pour quelques-uns) sont envoyés dans des classes de SEGPA[1] où leur statut est assez ambigu : ils sont supposés être intégrés dans un collège et considérés comme des collégiens "normaux", mais les SEGPA relèvent de l'AIS (Adaptation et Intégration Scolaire) et de ce fait, le cursus des élèves est particulier ; les professeurs qui enseignent en SEGPA sont des maîtres spécialisés, le programme ordinaire de collège ne peut être suivi, et les élèves ne sont pas candidats au brevet des collèges : ils passent le Certificat de Formation Générale, une épreuve organisée en partie en contrôle continu et qui peut permettre aux meilleurs ou aux plus adaptés d'intégrer un lycée professionnel pour passer un CAP. Le CFG est une épreuve dont la conception s'inspire de la pédagogie par objectifs, les items mathématiques sont redoutablement décontextualisés : la préparation au CFG induit donc souvent une pédagogie par fiches centrée sur l'exécution de tâches isolées.

Dans les classes de SEGPA, les retards dans les savoirs mathématiques supposés acquis en primaire sont manifestes, et s'accompagnent souvent d'instabilité et de difficulté à observer des règles et à s'engager dans des apprentissages. L'organisation de progressions s'en trouve rendue difficile, et le rôle du professeur s'inscrit dans une négociation perpétuelle face au refus d'apprendre. Ainsi l'enseignement en SEGPA est-il le lieu d'une négociation du contrat didactique qui ne va jamais de soi, ainsi que d'une recherche incessante de situations qui soient adaptées à la fois au savoir visé et au public particulier de ces sections. De ce fait, des phénomènes ou des régulations qui passent inaperçus dans l'enseignement "ordinaire", se trouvent occuper le devant de la scène, et cela au détriment du savoir qui est habituellement le centre du travail du professeur et des élèves ; ou encore, ces phénomènes prennent des formes qui sont inhabituelles au niveau considéré. Dans les deux cas, ces manifestations attirent l'attention du didacticien ; elles correspondent parfois à des objets didactiques existant aussi dans les classes "ordinaires", mais considérablement amplifiés et mis en évidence par les conditions du système AIS.

Dans un premier temps d'une recherche dans un domaine encore peu exploré, notre ambition est d'identifier des phénomènes, et de les décrire et analyser, autant que faire se peut, avec les outils de la théorie didactique. Nous avons recours aux concepts de la théorie des situations, comme le contrat didactique ou la structuration du milieu, pour étudier les phénomènes évoqués ; mais nous nous intéressons aussi aux évènements de la classe liés à la représentation des objets mathématiques (registres, ostensifs, interprétation) en ce qu'ils

[1] Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté

permettent de comprendre certaines distorsions dans l'apprentissage chez les élèves des classes de SEGPA.
Nous ne nous interdisons pas de tester, dans ces classes, des situations issues de la recherche en didactique : le but est de réintroduire de l'adidacticité, et ces situations peuvent en effet permettre, a) de ré-instaurer un rapport des élèves de SEGPA à l'action et partant aux connaissances qui gouvernent ces actions, b) d'observer des comportements et procédures d'élèves, pouvant leur donner accès à la complexité des raisons d'agir ou de certaines formes du savoir.

1. Les milieux disponibles et les phénomènes de contrat

Les instructions de 1999 ont fait de l'élève de SEGPA un élève de collège comme les autres, les programmes de collège sont donc devenus, théoriquement, un horizon pour tous les élèves – et les professeurs – de ces classes. Ceci devrait donc conduire à appliquer dans ces classes toutes les recommandations du programme pour les classes de collège, y compris l'organisation, en mathématiques, d'activités de résolution de problèmes. Dans les faits il n'en est souvent rien, les fiches de type CFG constituant l'ordinaire des élèves de SEGPA. L'organisation de situations à composante a-didactique se heurte donc souvent à un public d'élèves d'autant plus réticent qu'il a été longtemps cantonné dans des tâches parcellisées, sans recherche, sans problématique. Dans ces conditions, l'introduction de situations plus complexes dans la classe s'accompagne de difficultés que nous avons analysées ; même si elles ne sont pas fondamentalement différentes de celles qui ont déjà pu être repérées chez des élèves en difficulté dans des classes "ordinaires", leur accumulation est en soi une caractéristique. De plus, dans les classes ordinaires la gestion du professeur peut gommer ces dysfonctionnements qui sont pris dans l'avancée du temps didactique de la classe entière. En SEGPA les phénomènes institutionnels liés au contrat et au temps rendent inéluctables l'apparition de distorsions que le professeur doit s'évertuer à contourner et aménager, pour pouvoir poursuivre le travail dans ces classes.

A l'Ecole d'Eté XI, I. Bloch (2002a) avait introduit trois types de milieux, dont deux théoriques, pour analyser la construction d'ingénieries didactiques : le milieu théorique d'inspiration épistémologique, le milieu expérimental a priori – celui qui préside à l'organisation de la situation et à son analyse a priori – et la contingence (la situation jouée expérimentalement) , dont les retours permettent de réajuster les variables didactiques et les phases de la situation. Le milieu expérimental a priori est le milieu de la prévision et l'analyse de la situation telle qu'elle va être organisée en classe à un niveau donné : c'est donc le lieu du choix des variables didactiques à disposition effective, de la description des scénarios avec les rôles des joueurs, de l'analyse a priori des savoirs et connaissances mis en jeu. Le schéma de structuration du milieu s'applique donc à ce niveau. Ce schéma permet de visualiser le rôle des différentes phases de la situation, et, tel qu'il a été complété dans différents travaux, le rôle du professeur (Bloch 1999).

1.1 Restaurer le milieu objectif ?

Dans la structuration du milieu, le milieu objectif apparaît comme l'environnement propre à favoriser la recherche, les essais / erreurs, le milieu heuristique par excellence.
Lors de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques, (Sackur et Maurel 2002) avaient mis en évidence le "manque" de milieu objectif, dans certaines situations d'enseignement, défaut qui entraînait l'incapacité, pour les élèves, de se saisir des outils de la situation, de comprendre "à quel jeu on jouait", d'entreprendre des essais, des tentatives dont

on constate le résultat, ce qui permet de se construire un bagage d'outils, d'ostensifs, et de passer au niveau supérieur de la formulation et la validation.
Lorsque ce milieu est absent, on assiste à des phénomènes bien connus de pertes de sens, d'utilisation de symboles formels, à des effets Jourdain ou Topaze, alors que l'élève est rigoureusement incapable d'associer des connaissances aux techniques qu'il est supposé capable de mettre en œuvre. Les enseignants du primaire dont certains ont surtout recours à des fiches de manuels, ne prévoient pas systématiquement, loin de là, la phase de l'apprentissage correspondant au milieu objectif.
Les élèves de SEGPA donnent souvent l'impression de faire des mathématiques à l'aide de quelques "recettes", algorithmes dont ils ne connaissent pas le sens ou la fonctionnalité. On pourrait donc penser "qu'il suffit" de réintroduire un milieu objectif approprié pour que ces élèves retrouvent "le sens" des apprentissages anciens qui ont été trop ou trop vite algorithmisés. De fait les tentatives se soldent par des résultats variables, dont nous donnons deux exemples.

1.1.1 Un exemple de réintroduction réussie du milieu objectif : Les carrelages en 6ème SEGPA (élèves de 12-13 ans)

L'ouvrage ERMEL propose, en milieu de CP, une situation sur la numération, situation nommée "Les carrelages" : les élèves reçoivent une "pièce" à carreler, pièce où les traces des carreaux sont visibles, et ils doivent commander au professeur le nombre de carreaux nécessaire pour carreler leur pièce. Dans un premier temps, l'élève commande des carreaux isolés ; puis, lors de la deuxième étape, le professeur impose de commander par paquets de dix carreaux, et pas plus de neuf carreaux isolés. Les élèves ont un bon de commande à remplir, où figurent les indications suivantes :

Je commande	Paquets de dix
....	Carreaux isolés
En tout .... carreaux	

L'expérience prouve que de nombreux élèves, même après avoir joué cette situation plusieurs fois avec des pièces différentes, peinent à voir ce qui saute aux yeux de "l'expert" en numération, professeur ou élève plus âgé, à savoir que commander 2 paquets de dix, et 4 carreaux isolés, en tout 24 carreaux, invite à repérer les chiffres 2 et 4…
En fin de CP ou début de CE1 – élèves de 7 ans environ – une seconde situation fait suite à celle-ci, il s'agit des carrelages additifs : les élèves, par groupe de deux, reçoivent trois pièces à carreler, et doivent remplir *un seul* bon de commande, à partir des bons correspondant à chacune des pièces.
Constatant la difficulté de certains élèves, en 6ème SEGPA, à maîtriser des situations de dénombrement additif simples, nous avons expérimenté cette situation des carrelages additifs : il s'est avéré que trois élèves peinaient à faire un bon de commande pour trois pièces (24 carreaux, 18 carreaux, 25 carreaux) alors qu'elles « savent » faire une addition en colonnes avec retenue. Lorsque finalement elles arrivent à carreler leurs pièces, l'addition en colonnes devient une révélation : le « 1 » entouré est le paquet de dix supplémentaire. Cette situation, quoique portant sur des savoirs de primaire, a été vécue de façon très positive par les élèves, même par ceux qui ont réussi très vite. Il n'y a pas eu de problèmes de dévolution : ce sont des élèves de 6ème, donc encore dans la mouvance de l'école élémentaire ; leur professeur enseigne beaucoup par situations, cette façon de procéder ne se heurte pas encore à trop de réticences. Mais dans les classes de niveau supérieur, lorsque ceci est tenté, on

rencontre des difficultés de dévolution, d'organisation et de conduite de la situation, d'institutionnalisation et de décontextualisation. Ces difficultés sont d'ailleurs les mêmes que celles analysées par M.J. Perrin- Glorian (Perrin- Glorian, 1993) qui pointe parmi les objectifs prioritaires, dans l'enseignement à des classes faibles, la dévolution d'un enjeu général à travers des enjeux plus ponctuels ; elle s'interroge aussi sur la "complexité optimale" des situations adidactiques à construire, et sur les moyens d'organisation à mettre en œuvre, pour obtenir une dévolution de la situation aux élèves et un travail pertinent pouvant être ensuite décontextualisé.

1.1.2 Un exemple de réintroduction difficile : L'enseignement des fractions, en 5ème SEGPA

Dans une classe de Cinquième SEGPA, la professeure a tenté une autre situation d'ERMEL, la situation de la bande unité : les élèves reçoivent une bande unité d'environ 8 cm de long et 2 cm de large, et plusieurs segments à mesurer. Les mesures des segments ont été choisies de façon à ce qu'elles s'expriment par des valeurs fractionnaires en fonction de la longueur de la bande unité. Les élèves doivent envoyer un message à un récepteur, de façon à ce que celui-ci reconnaisse, parmi un ensemble de segments tracés sur une feuille, les segments codés par l'émetteur. Ces messages peuvent prendre des formes attendues : par exemple "une bande unité et un quart de la bande unité", ou des formes non suffisamment mathématisées, par exemple : "une bande unité et un petit bout".

Cette situation, expérimentée en 5ème SEGPA par Laetitia Feydel, a été analysée dans son mémoire de spécialisation à l'enseignement en AIS. Les difficultés ont été nombreuses :

a) Difficultés de la dévolution

- Compréhension de la consigne difficile ;
- Blocages dès le départ : incapacité à se représenter la tâche ;
- Déblocages contextualisés (sur un exemple, le professeur dit ce qui doit être fait) avec risque d'effet Topaze ;
- Difficulté à organiser des relances.

b) Difficultés dans la conduite des situations

- Non maîtrise des savoirs antérieurs ;
- Validation approximative vue comme suffisante par les élèves ;
- Premier essai non validé par le professeur : relance non acceptée, abandon ;
- Passage de l'action à la formulation et à l'institutionnalisation très difficile, mais, si on rejoue des situations d'action, les élèves semblent se satisfaire éternellement de cette phase, et la voir comme un substitut de "faire des maths".

On se heurte donc à des phénomènes ***d'enlisement*** très accentués.

c) Difficultés de décontextualisation

Quelle progression organiser ? Les élèves semblent osciller entre le désir d'exercices sur des techniques algorithmiques, auxquels ils sont habitués dans certaines classes, et l'impossibilité, lorsqu'ils sont engagés dans une situation à dimension adidactique, de se dégager du contexte de la situation : la décontextualisation est rendue très difficile.

La formalisation est aussi très problématique : toute formalisation est vue comme un retour à des exercices algorithmiques, avec un "oubli" des circonstances qui ont présidé à la constitution des connaissances, donc, soit on est interdit de formalisation, soit on est interdit de retour aux milieux objectif et de référence. Les situations qui ont pu être jouées en classe ne peuvent donc pas fonctionner comme situations de référence sur lesquelles le professeur puisse s'appuyer.

d) La différenciation

On rencontre des problèmes d'articulation des contrats classe entière / soutien à un ou des élèves, et ceci d'autant plus, que des écrits sur la différenciation ont colporté, dans le milieu de l'enseignement l'illusion que l'adulte qui travaille avec un petit groupe serait capable de suivre la démarche de chacun d'eux. Or les professeurs n'ont pas de moyens didactiques pour faire cela, ni du point de vue de l'analyse de la situation, ni du point de vue des anticipations des procédures des élèves, et ils n'en ont pas la possibilité matérielle (excès de variables à gérer, de matériel à prévoir ...).

En conclusion :
Dans l'AIS, il est particulièrement difficile de remettre les élèves dans des tâches correspondant au milieu objectif. Cela nécessite des détours, pour plusieurs raisons :

- l'âge des élèves : certains jeux sont acceptés par les élèves à 8-10 ans, plus à 14-15 ans ;
- la difficulté des contrats de reprise ;
- les contraintes des institutions.

1.2. Le temps didactique et les phénomènes de contrat

Les élèves de SEGPA sont dépendants de contraintes et de représentations contradictoires, liées d'une part, à leur rattachement institutionnel, d'autre part à leur condition d'élèves n'ayant pas réalisé les acquisitions prévues dans les classes antérieures.
L'institution "collège" véhicule un contrat très différent de celui de l'école primaire : plus axé sur les savoirs, sur l'évaluation notée, et plus axé sur le passage en dernier cycle du secondaire. Les élèves de SEGPA sont fortement conscients de ces caractéristiques et revendiquent d'être traités comme des élèves de collège. L'enquête sur l'enseignement des mathématiques en SES réalisée à Marseille montre même une « sur-normalisation institutionnelle » chez eux.

1.2.1 Les élèves et les contraintes du temps didactique

- Les élèves sont toujours dans une demande de savoirs définitifs : on veut "avoir fait" les décimaux, la proportionnalité... et méconnaissent le fait qu'en mathématiques, le sens est provisoire et qu'il y a toujours un sens à venir : le temps de l'apprentissage est donc très difficile à repérer pour eux,

Le professeur est ramené sans cesse, par leurs demandes, sur les formes les plus algorithmiques du savoir, ce qui rend les fiches très confortables pour tous ; il y a peu d'engagement des élèves dans la recherche, donc difficulté à mobiliser des connaissances.

- De plus les élèves demandent fréquemment à changer d'activité, ou de thème de travail : le professeur a à peine le temps d'introduire une notion, que les élèves veulent travailler autre chose. L'enquête citée montre que beaucoup plus que les élèves de collèges, les élèves de SES préfèrent « un exercice nouveau à un exercice déjà rencontré », « le début d'une leçon à la fin d'une leçon », « une nouvelle leçon à une révision »..

Certes le professeur peut arguer de leur peu de connaissances sur le sujet pour continuer le travail ; mais pour les élèves de SEGPA, "apprendre" une notion, c'est en rencontrer, une fois, un ostensif emblématique, après quoi ils ne voient plus *ce qu'il leur reste à faire.* Il n'y a donc chez les élèves de SEGPA pas de place pour le temps de l'apprentissage.

1.2.2 La négociation de contrats de reprise
Les contrats à l'œuvre dans une classe comme la SEGPA sont le plus souvent des contrats de reprise (Brousseau 95), car les élèves n'ont pas acquis les connaissances prévues dans le primaire, mais ils ont cependant des connaissances... Il est éventuellement plus difficile de faire évoluer ces (fausses) connaissances que d'en enseigner de nouvelles.
Un des principaux problèmes de SEGPA, c'est donc ce contrat de reprise des connaissances. L'enseignement a pour but avoué, de "rattraper" le retard des élèves par rapport à des savoirs réputés à acquérir en primaire. Lorsque le professeur enseigne avec des fiches décontextualisées, le contrat semble respecté, car les élèves attendent de saisir enfin ce qu'ils n'ont pas compris dans ces savoirs étiquetés, comme la division, les décimaux, la

proportionnalité ; pour eux il faut que le savoir se manifeste quelque part de façon "reconnaissable".
Ainsi un manuel paru récemment, destiné à la SEGPA, titré : « Autrement » a pour ambition de reprendre l'apprentissage ; citons l'introduction :

> « nous ne trouvions pas dans les livres de CM2, trop dévalorisants, ni dans les livres de collège, trop complexes, un support vraiment adapté à nos demandes. Nous avons donc décidé de nous lancer dans la conception d'une progression mathématique en partant de ce dont nous avions besoin : revoir les bases souvent incomprises ou mal acquises en primaire, mais de façon non rébarbative et rebutante. »

Quand on examine les exercices proposés aux élèves, on s'aperçoit que beaucoup sont-des exercices algorithmiques d'application des savoirs du primaire ; en fait, pour que l'apprentissage soit efficace avec ce manuel, il faudrait que les connaissances soient déjà construites ; autrement dit, les activités proposées aux élèves sur une notion ne sont pas des situations d'apprentissage de cette notion (voir par exemple, les pages 16-17 du manuel, extrait en annexe).
Ou bien, dans certains contrats de reprise, les exercices donnés masquent l'insuffisance des connaissances des élèves derrière des réussites à des questions ne portant pas sur le savoir annoncé. Dans ce cas, le contrat de reprise n'est pas organisé pour que les élèves réapprennent vraiment, il s'agit d'un simulacre de ré-apprentissage, que le professeur n'arrive pas toujours à éviter avec ses connaissances mathématiques et didactiques.
Exemple : Pour la reprise des fractions en 6ème, certains manuels se limitent à des tâches comme : compter des parts ; ainsi déterminer 5/6 d'un gâteau déjà partagé en six, n'induit pas une tâche sur les fractions mais une tâche de comptage jusqu'à 5. Si plusieurs exercices sont donnés sur ce modèle, compter 4/7 sur une bande partagée en 7 , etc., et si figure un exercice où l'on demande par exemple 5/6 alors que la bande est partagée en douze, certains élèves vont évidemment compter 5 carreaux ; mais le professeur considèrera que les autres exercices sont réussis, et ne comptera cet échec que comme "statistiquement" négligeable. En effet, le professeur aux prises avec ce type d'outil pédagogique, se doit de ne pas décréter un échec total, sinon la relation didactique ne peut se poursuivre. On peut voir ainsi certaines classes où seuls des simulacres d'apprentissage sont organisés toute l'année, ce qui est ajouter la misère didactique aux difficultés déjà présentes.
En contraste avec ces "apprentissages" illusoires, le recours à des situations a-didactiques faisant jouer un rôle important au milieu objectif a pour but de permettre aux élèves de mobiliser leurs connaissances et de les faire évoluer. Mais il se heurte à des difficultés issues de cette sur-normalisation des élèves à l'institution collège. Toute "replongée" dans des situations d'action renforce la distance, et donc le décalage. Le retour au milieu objectif peut alors être interprété comme une régression par les élèves. En voici deux exemples :

Exemple 1: la distance d'un point à une droite
Séance filmée en 4ème SEGPA, et faite aussi en CM2 dans le cadre du COREM[2].
Les élèves sont dans la cour ; une ligne droite, non parallèle aux limites de la cour, a été tracée sur le sol. Des points sont placés à distance d'environ 150 à 210 cm de la ligne, et espacés les uns des autres (la ligne mesure quelques mètres de longueur). La consigne est de déterminer quels points sont les plus proches de la ligne. Les élèves disposent de ficelles, décamètres, règles, équerres de tableau.
Lors de l'expérience, dès le départ les élèves objectent à ce qui est demandé, ils ne voient pas pourquoi on ne fait pas de la géométrie sur une feuille de papier, et il s'avère difficile de négocier cette replongée dans l'espace. Certes les élèves sont en troisième année de collège –

[2] Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Ecole Jules Michelet, Talence.

14 ou 15 ans – et ils ont déjà des savoirs de géométrie. La situation a cependant fait émerger des difficultés de mesurage, des difficultés à déterminer d'une façon précise la plus petite distance du point à la droite, et l'orthogonalité n'est vraiment apparue que dans la situation « retournée », à savoir mettre un point à distance donnée de la droite.
Il est apparu aussi des interférences avec un vocabulaire de géométrie peu maîtrisé : par exemple, pour les élèves (et même une professeure), la ligne tracée dans la cour est une droite et non un segment car on n'a pas "marqué" les extrémités. Cette anecdote est un indice marquant de la façon dont peut fonctionner la géométrie dans des classes faibles : comme un vocabulaire visant la conformité mais non opérationnel dans les situations spatiales.

Exemple 2 (la bande unité, cf. Ermel CM1 p. 407) : pour indiquer la longueur du segment, un élève ne comprend pas le refus de l'enseignant de l'utilisation de son double décimètre. Les élèves de cet âge ont une certaine expérience du travail scolaire, et acceptent parfois mal de se voir "déconditionner", d'autant qu'ils ne voient pas les enjeux de l'apprentissage.
Face à ces difficultés, il nous paraît nécessaire d'engager des recherches spécifiques sur la façon dont peuvent être organisées des situations à dimension adidactique dans ce type de classes.

1.3 Spécificité de l'étude du milieu expérimental a priori

Malgré les difficultés énoncées, nous faisons donc l'hypothèse que, sans la réintroduction d'un milieu objectif approprié, beaucoup d'élèves ne peuvent progresser.
Nous avons déjà connaissance de quelques exemples de réalisation, qui contraignent de manière forte le travail du professeur : il doit mettre en place des dispositifs spécifiques pour obtenir que les élèves s'engagent dans le travail, acceptent de reconnaître du savoir / des connaissances déjà travaillés, déclarent du savoir, ... et, acceptent de repartir sur un dispositif ou une situation comportant une part de responsabilité quant au savoir.

Exemple 1 : la bande unité.
La professeur met en place des dispositifs d'étayage, des effets Topaze à dépasser, des situations de rappel de type 1 (Perrin-Glorian 1993), de l'appui sur l'écrit individuel et collectif, plus tard des situations de rappel de type 2 ... Ce travail a été fait par V. Dutour et L Feydel dans le cadre de leur mémoire professionnel : mais demande une organisation importante. Ceci rejoint les "coups de pouce" nécessaires du professeur, dont parle Jean-Michel Favre (cf. Favre 2004 dans ce même recueil).
Les professeurs sont ainsi toujours, confrontés à l'échec possible des élèves, qui, trop massif, rendrait impossible la poursuite de la relation didactique ; et ils tentent de contourner cette menace, soit par des dispositifs comme évoqués ci-dessus, soit comme ci-dessous, par des tentatives qui laissent perplexes :

Exemple 2 : la proportionnalité en Troisième SEGPA (élèves de 15-16 ans).
La professeure de la classe, revoyant les élèves après un stage, leur annonce qu'on va travailler sur la proportionnalité ; elle commence par leur demander d'écrire, sur une feuille, ce qu'est pour eux la proportionnalité. Les élèves, d'abord réticents, finissent par produire des réponses ; la majorité de celles-ci évoquent, soit le coefficient de proportionnalité, soit un tableau.
On peut se poser des questions sur l'organisation de cette phase de rappel : aurait-elle pu être organisée autrement ? la professeure aurait-elle pu s'appuyer sur une situation ? laquelle ? pourquoi décider de faire appel à du savoir déclaratif, au lieu de remettre les élèves dans une phase de recherche ? Il faut voir là, nous semble-t-il, les effets de cet *échec latent des élèves* dont parle Jean-Michel Favre ; cet échec, toujours anticipé par le professeur, est à l'origine d'un effet de contrat aux conséquences néfastes : comme le professeur ne fait pas confiance

aux élèves, ils sont paradoxalement, beaucoup plus que les autres, sommés de prouver ce qu'ils savent. Un élève "ordinaire" pourra, lui, camoufler ses ignorances locales dans l'avancée de la leçon, et "rattraper" le cours normal du savoir.
Dans l'exemple ci-dessus, la professeure a besoin de s'assurer que la mémoire des élèves n'est pas vide par rapport au savoir travaillé avant le stage. Ce procédé didactique assez peu performant – demander aux élèves de produire un vague écrit sur ce qu'est pour eux la proportionnalité – n'a pas eu, ici, d'effet très négatif car la professeure a interprété positivement les productions des élèves ; mais on pourrait imaginer que, dans les mains d'un professeur moins respectueux de la sensibilité des élèves, ce pourrait être un moyen de plus de confronter les élèves à leurs insuffisances, et donc de bloquer l'avancée du temps didactique.

1.4. Pour revenir à l'analyse du milieu :

L'analyse du milieu expérimental a priori est donc à modifier pour tenir compte de cet aspect de la contingence, pour pouvoir penser les situations à dimension adidactiques en SEGPA. Mais, dans l'état actuel de nos connaissances, notre approche de la façon dont nous pouvons prendre en compte les spécificités de l'AIS pour penser ce milieu se réduit encore à des questions :

- Faut-il penser des organisations complexes avec premières mises en contact, étapes, rappels de type 1 et 2, ...? Exemple : la proportionnalité, un savoir qui est repris sur plusieurs années ...
- Faut-il intégrer des étapes ciblées sur des savoirs intermédiaires avec variables didactiques "allégées" ? c'est le risque de retomber sur un découpage du savoir, de type pédagogie par objectifs ...
- Faut-il, au contraire, organiser le milieu expérimental a priori comme très ouvert dans la phase d'action, et poursuivre la situation en suivant le fil de tout ce que l'action permet ?

Auquel cas on fait l'hypothèse que le milieu objectif est à lui seul porteur de "connaissances préalables" indispensables ; lorsque le milieu objectif a manqué, ce qui est souvent le cas dans l'enseignement, ces connaissances seraient construites de façon non visible, transparente, par les élèves "ordinaires", et l'on ne les repèrerait ici que parce qu'elles sont manquantes.

- Et comment déterminer la marge légitime que l'on se donne ? (à quel moment arrêter le processus, ou changer de contrat ...)
- Et comment trouver les situations adidactiques, et les (bonnes) pistes à suivre pour les situations d'action ?
- Ce qui manque, est-ce le milieu objectif, ou, au contraire, dans certains cas, le milieu de référence ? (exemple de la multiplication, voir ci-dessous)
- A quel(s) moment(s) "raccrocher" sur le milieu de référence sans oublier la situation d'action qui a permis de mettre à jour des connaissances ?

Cette dernière question se pose différemment en SEGPA et en institut spécialisé ; comme nous l'avons déjà dit, en SEGPA est entretenu l'espoir d'un "rattrapage", ou au moins d'une réinsertion dans un cursus, comme celui du CAP, certificat d'aptitude professionnel. Ceci impose donc de retrouver, à un moment donné, des savoirs "utilisables", "(dé)montrables", dont l'élève pourra faire preuve au CFG par exemple.
L'une des questions ci-dessus paraît essentielle, c'est de trouver des pistes vers où poursuivre dans les situations d'action, sans d'ailleurs forcément s'interdire de faire des incursions dans le milieu de référence, c'est-à-dire dans la formulation et la validation – et même, en SEGPA, l'introduction du milieu de référence est à terme une nécessité institutionnelle.
Ouvrir de nouvelles situations d'action paraît en effet pertinent par rapport aux analyses précédentes, qui pointent la nécessité (et les difficultés) de restaurer un milieu objectif par

rapport à de nombreux savoirs repris en SEGPA. Une objection est qu'on ne peut envisager de mener des situations d'action dans des classes sans les avoir bien repérées par rapport aux savoirs en jeu : on sait bien qu'une situation d'action n'est pas, en elle-même, suffisante pour que l'élève accède au savoir.
Mais en SEGPA la perspective n'est souvent plus de faire accéder les élèves à un savoir nouveau, par l'organisation d'une situation d'action suivie d'une situation de formulation puis de validation : les savoirs auxquels les élèves – et le professeur – ont affaire sont pour la plupart des savoirs anciens, ou du moins non entièrement nouveaux, mise à part l'algèbre. Il s'agit plutôt d'organiser une opération *d'abduction* par le biais d'une situation. Par abduction nous entendons cette opération d'interprétation, définie par C.S. Peirce (Peirce 1995) comme le fait de s'apercevoir qu'un phénomène relève d'un savoir que l'on peut retrouver. Dans cette perspective d'abduction, des situations d'action serait construite pour (re)mettre l'élève face à des manifestations – aussi variées et pertinentes que possible – du savoir déjà-là. Il s'agit en quelque sorte de jouer sur une redondance des effets de savoir, face à des élèves qui ne veulent avoir de ce même savoir qu'une conception schématique réduite à quelques algorithmes. C'est donc, reprendre sur des bases nouvelles, que nous ne faisons actuellement qu'entrevoir, la construction de situations expérimentales ; l'idée de situation à dimension adidactique (Mercier 1995, Bloch 1999) est sans doute une des directions de cette recherche.

2. Les représentations sémiotiques

Il y a deux axes d'étude des représentations sémiotiques : soit on considère les ostensifs comme des donnés culturels, et on essaye de regarder comment ils fonctionnent, ou pas, dans l'AIS ; soit, on prend les situations comme points de départ, et on se pose la question d'aller chercher, ou construire, les ostensifs adéquats à l'organisation d'un milieu expérimental a priori.

2.1 L'usage des ostensifs dans l'AIS

Les quelques observations dont nous disposons nous montrent que l'usage des ostensifs mathématiques dans l'institution AIS est souvent peu conforme à l'usage habituel dans l'enseignement. Ainsi nous nous interrogeons sur ce qui se passe dans les classes de SEGPA, par rapport aux outils du travail mathématique que sont les ostensifs, et plus généralement par rapport au processus interprétatif : comment les élèves avancent-ils dans ce processus ? Cette avancée permet-elle une construction des connaissances qui autorisera le professeur à institutionnaliser du savoir ?
Les observations amènent à étudier les ostensifs et à tenter de caractériser la façon dont le professeur et les élèves les emploient, car celle-ci est révélatrice, 1) du travail fait ou en train de se faire, 2) des connaissances des élèves, 3) des difficultés de la relation didactique.
Nous serons donc amenés à distinguer signes (ostensifs mathématiques et autres signes) et interprétations, c'est-à-dire, ce que le professeur, ou les élèves, ***font*** avec ces signes du point de vue des connaissances et savoirs mathématiques.

Hypothèse sur les signes mathématiques[3]

[3] Nous nous appuyons ici sur l'analyse de Peirce. Voir par exemple, Nicole Everaert-Desmedt (1990) *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de C.S. Peirce*, Editions Mardaga, Liège.

L'usage et l'interprétation des signes mathématiques sont des axes d'analyse pour les phénomènes d'enseignement / apprentissage ; en SEGPA, on observe des distorsions de l'interprétation,

- du côté du professeur, par des effets Topaze ou Jourdain ; le professeur peut d'ailleurs être conscient de ces distorsions, et les effectuer sciemment pour ne pas décourager les élèves, ou pour relancer une situation ...
- du côté des élèves.

Ces distorsions sont de même nature : les signes sont "dégénérés", ainsi des signes qui donnent des indices de connaissances ne seront pris que pour des icônes ; ou des signes porteurs d'arguments sont tronqués, ou des arguments pris comme de simples indices d'un savoir mathématique ... c'est le cas, par exemple, dans des déclarations comme :
"La proportionnalité c'est quand on multiplie ou on divise"[4]. Autrement dit il y a affaiblissement de l'interprétation, et non prise en compte du but de ce que serait l'interprétation mathématique visée par le professeur.
Retenons qu'un argument est un signe porteur d'une règle : ainsi un tableau de proportionnalité, pour autant qu'il est reconnu pour tel, fournit la loi de proportionnalité, c'est-à-dire la fonction linéaire correspondante, dans un sens ou dans l'autre. Si l'élève ne le voit que comme un indice de proportionnalité, c'est-à-dire par exemple, une relation non spécifiée entre des nombres, il sera incapable de tirer de ce tableau les informations pertinentes si on lui demande la fonction linéaire ou sa réciproque (diviser au lieu de multiplier) ; et s'il ne le voit que comme une icône indiquant que, chaque fois que le professeur parle de la proportionnalité, il y a ce tableau, il ne pourra rien en *faire*.

2.2 Construire des ostensifs en raison de leur fonctionnalité dans la situation

Un travail que nous abordons actuellement, est de lier ostensifs et théorie des situations : jusqu'alors les études des signes (y compris celle menée sur les fonctions, voir Bloch 2003) envisagent comme étant "déjà là" les outils habituels du travail mathématique, comme des donnés culturels ou institutionnels incontournables. Il s'agit de se demander quels outils doivent être introduits pour quels savoirs et quelles situations, autrement dit, de reprendre le problème des ostensifs afin d'introduire les outils nécessaires à la création d'un milieu.

a) Les signes dans le milieu objectif

En SEGPA, lorsque le professeur a tenté une introduction d'une notion par une situation à dimension adidactique, par exemple une situation tirée d'ERMEL, on constate que le premier mode d'introduction des signes a tendance à être ensuite figé par les élèves : l'usage ultérieur des signes est très fortement lié aux usages dans le milieu objectif, autrement dit, il y a, comme dit plus haut, arrêt du processus interprétatif, à peine a-t-il commencé. Ceci est cohérent avec la demande perpétuelle de changement des élèves de SEGPA : si un objet n'a aucune profondeur, si un seul emblème suffit à en épuiser la représentation et le sens, il faut en changer très vite ...

b) Les signes dans le milieu de référence

Il s'agit d'envisager les représentations sémiotiques comme partie prenante du milieu de référence, et de montrer comment les représentations sémiotiques agissent dans ce milieu en donnant accès à des actions et donc à des connaissances qui n'étaient pas disponibles sans elle :

[4] En quoi ceci est-il un signe ? c'est un signe oral ...

Un exemple du travail en cours porte sur une situation d'apprentissage de la table de multiplication, « Le jeu de Pythagore » (Bonnet 1997). Les élèves ont à reconstituer la table de Pythagore par un jeu de loto avec des contraintes. L'application des règles conduit à chercher les fréquences des nombres qui apparaissent comme des produits, puis à décomposer des produits apparaissant plusieurs fois de toutes les façons possibles, par exemple 12 apparaît quatre fois, comme produit de 6 et 2, ou de 3 et 4, dans les deux sens (commutativité).
Ce travail a engagé deux élèves de Troisième SEGPA, réputés ne sachant pratiquement pas reconnaître des nombres inférieurs à dix, à produire des écritures comme $54 = 6 \times 9$ et à travailler avec des nombres écrits comme produits. Autrement dit, la représentation sémiotique les a amenés à passer du niveau du milieu objectif (on fait des produits, on regarde ce que ça donne...) au milieu de référence : décomposer un nombre en facteurs, et trouver toutes ses décompositions.

3. Pistes de recherche

Nous disposons pour le moment de trois axes d'investigation pour continuer l'étude de l'enseignement des mathématiques dans le système AIS :

- l'étude de processus de construction de situations, en particulier des modes de passage du milieu objectif au milieu de référence, afin de comprendre comment les élèves pourraient passer d'une rencontre avec une notion dans une situation d'action, à des savoirs mathématiques sur celle-ci ;
- l'étude des signes mathématiques et des spécificités de leur emploi dans ce système ; cette étude devant permettre de prévoir les signes afin de construire les milieux ad hoc, il s'agit donc de penser les ostensifs non plus comme déjà là, mais comme outils fonctionnels dans la construction de milieux ;
- et l'étude du partage des connaissances entre professeur et élèves dans la relation didactique, afin de comprendre le partage des responsabilités des uns et des autres dans l'enseignement des mathématiques dans la classe.

Les deux premiers axes concernent les outils de construction de situations, tandis que le dernier est aussi un outil d'étude de la contingence – savoir ce qui s'est réellement joué dans une séance, du point de vue de la dévolution et de la prise en charge, par les élèves, d 'une partie du savoir – même si nous en espérons des retours sur la façon de concevoir des situations d'enseignement.

3.1 Retournement de situation pour accéder au savoir : la situation duale

Dans Bloch (2000), le retournement de situation a été défini comme étant une opération qui permettait d'introduire, dans une situation, une connaissance comme nécessaire. Le retournement de situation est donc l'opération qui permet de passer du milieu objectif au milieu de référence (formulations, validation) :

> " la situation est (bien) construite en deux parties essentielles, un jeu direct et un jeu retourné :
> — le jeu direct est là pour familiariser le joueur avec la stratégie que requiert le jeu, et avec les objets mathématiques manipulés ; ce jeu ne contient pas la connaissance comme nécessaire, elle est seulement contingente (...) ;
> — le jeu est alors retourné pour que le joueur ne puisse plus jouer sans la connaissance visée, qu'il va rencontrer en action ; en effet les consignes (contraintes) l'obligent, pour gagner, à utiliser cette connaissance (en acte)." (Bloch 2000).

Le retournement se fait en imposant des conditions sur l'objet à obtenir dans la situation, donc en choisissant les variables didactiques et en fixant leur valeur de façon à ce que la connaissance visée se rencontre et contraigne le résultat. Le retournement est une action au niveau du milieu expérimental a priori, autrement dit, il s'agit de moyens de production de situations. On appelle *situation duale* celle qu'on obtient après retournement. On peut en donner quelques exemples :

- Le jeu des envahisseurs (cf. Bloch 2000) : les envahisseurs sont des nombres. Il s'agit d'envahir une série de nombres, en se servant des envahisseurs et éventuellement des opérations. Dans un premier jeu, les envahisseurs sont 3, 5, 7 ; ils ne doivent être utilisés qu'une fois, et on peut employer l'addition, la multiplication, la soustraction. Le but est d'essayer d'envahir le plus de nombres possibles entre 1 et 30. Dans un deuxième jeu, les nombres devant être envahis sont **tous** les nombres entre 1 et 80 ; on n'a droit qu'à une opération, l'addition ; le jeu consiste à **trouver les envahisseurs en nombre minimal** pour répondre à la consigne. Un même envahisseur peut être répété au plus deux fois, pour envahir un nombre donné. Il y a bien retournement de situation dans le deuxième jeu, et la situation retournée est celle où la connaissance visée – ce sont les puissances de 3 qui sont les envahisseurs gagnants – apparaît comme nécessaire pour gagner : le jeu consiste à prendre 1, on envahit 1+1, on prend ensuite 3, ce qui permet d'envahir jusqu'à 8 ; on prend 9, on envahit jusqu'à 26 ; on prend 27 (tiens ! 1, 3, 9, 27 ...) et on envahit jusqu'à 80. La condition : ne pas répéter plus de deux fois un envahisseur, est celle qui correspond au choix de la base : un chiffre est au plus 2, donc on est en base trois. Il y aurait une troisième phase réflexive, avec le même jeu où l'on peut répéter jusqu'à 9 fois un envahisseur, ce qui conduit à trouver les puissances de dix comme envahisseurs... la connaissance de ce niveau de milieu est alors la numération de position dans une base.
- Le jeu de Pythagore (cf. Bonnet 1997)
- Construire un point à distance donnée d'une droite, après avoir défini la distance d'un point à une droite comme la longueur la plus courte entre le point et les points de la droite.
- Le produit de fonctions (cf. Bloch 2003).
- La proportionnalité : dans un premier temps, une situation de proportionnalité est donnée, il faut simplement calculer les images ... Dans un deuxième temps, les images sont données, ou bien des conditions comme un partage équitable (Comin 2000), et il s'agit de déterminer si un tableau est bien un tableau de proportionnalité, ce qui exige de comparer et valider.
- Les vecteurs : le rallye des points (A.Berté, cf. Bloch 2002).
- Retrouver les termes d'une suites de Fibonacci, en en connaissant quelques-uns (Véron 2001).
- Situations de recherche de transformations géométriques avec Cabri. (Laborde et Capponi 1994, Capponi et Sutherland 1998)

Dans le retournement de situation, il s'agit bien de retrouver le savoir mathématique par ce processus déjà évoqué que C.S.Peirce appelle *abduction*, et qui pourrait être résumé par la phrase suivante : on va se rendre compte que *cette* expérience relève de (est interprétable par ...) *ce* savoir. C'est ce qui se produit dans le jeu des envahisseurs : on se rend compte que la situation de la deuxième phase – la situation retournée – amène à ne pas ajouter plus de deux fois un envahisseur, ce qui revient à ne pas prendre plus de 2 comme chiffre, et donc qu'on est en train de construire le système de décomposition des nombres avec 3, 3^2, 3^3, 3^4 ... et, reconnaître la base "trois" est une nouvelle abduction d'un niveau supérieur. C'est aussi ce qui est interprété dans la multiplication, à savoir, il ne s'agit plus de savoir effectuer un produit, mais savoir les tables permet de mettre en œuvre un procédé d'investigation des décompositions, et de reconnaître ce savoir ... De même, la situation des vecteurs est un retournement qui conduit à la notion de décomposition dans un système – une base.

Là est le lien avec les ostensifs : on est amené à chercher quelles représentations sémiotiques permettront de retourner, et surtout de le faire en permettant la manifestation et l'utilisation de connaissances.
Donc en fait il n'y a pas d'une part, analyse des ostensifs culturels et d'autre part, recherche des situations. La construction est liée : chercher quel milieu de référence peut être amené par quel problème et chercher les ostensifs qui vont correspondre, c'est-à-dire qui vont permettre de faire le travail demandé dans le milieu de référence.
Il y a donc conjonction de deux facteurs à organiser :

- La question qui va engendrer le niveau convenable de milieu, par retournement de situation ;
- Les représentations sémiotiques qui fonctionneront comme outils dans ce milieu.

3.2 Méthodologie d'enquête : la répartition des C/S entre le professeur et les élèves

Le troisième axe de recherche concerne les outils d'investigation du fonctionnement des situations dans la contingence : en effet, étant données les difficultés accrues que l'on éprouve dans cet environnement pour identifier les connaissances produites par les élèves, il est nécessaire de se donner les outils pour analyser très finement le fonctionnement des situations. Dans ce but nous nous référons aux travaux de F.Genestoux sur les niveaux de partage des connaissances (Genestoux 2000). Il s'agit d'étudier les enchaînements d'assortiments qui font évoluer un contrat didactique.[5]
Nous rappelons succinctement ses propositions méthodologiques, qui s'appuient sur les deux grilles suivantes permettant de relever chez les élèves, plusieurs niveaux de fonctionnement d'un savoir (Genestoux 2000, 465-466) :
La première grille est une liste des responsabilités possibles de « l'actant » dans la résolution d'une situation :

1. déterminer le contexte ou reconnaître le contexte qui appelle une certaine décision ;
2. adapter une décision à un contexte (connaissances)
3. contrôler la validité de la réponse par un raisonnement (savoirs réfléchis)
4. algorithmiser la décision en associant une connaissance au triplet (conditions, décision, contrôle)
5. contrôler l'emploi de l'algorithme devenu savoir par un raisonnement
6. maintenir dans un répertoire de formules, les conversions savoir – savoirs réfléchis, pour utiliser le nouveau triplet (conditions, algorithme, contrôle) comme moyen de décision. (Genestoux 2000, 464).

La deuxième grille permet d'examiner comment peut se réaliser le partage des responsabilités énumérées ci-dessus entre le professeur et l'élève. F Genestoux propose 7 niveaux :
a) Le niveau de la maîtrise
E porte toutes les responsabilités
b) Le niveau de l'expertise
E porte les responsabilités 1 à 5, le professeur porte la responsabilité 6
c) Le niveau de l'aptitude
E porte les responsabilités 1 à 4, le professeur porte les responsabilités 5 et 6
d) Le niveau de la production auto-contrôlée

[5] F. Genestoux définit les assortiments comme étant des collections de formules ou de problèmes, potentiellement reliés entre eux par des relations de nature logique, mathématique ou didactique, et qui sont spécifiquement et effectivement rassemblés dans une perspective didactique précise et pour une unité de temps didactique.

E porte les responsabilités 1 à 3, le professeur porte les responsabilités 4, 5 et 6
e) Le niveau de la production
E porte les responsabilités 1 et 2, le professeur porte les responsabilités 3, 4, 5 et 6
f) Le niveau de la construction
E porte la responsabilité 1, le professeur porte les responsabilités 2 à 6
g) Le niveau d'exécution d'une tâche
Le professeur porte toutes les responsabilités. E exécute la tâche demandée par le professeur, mais la signification didactique de celle-ci lui échappe : ce que E produit n'est pas pour lui une solution, mais seulement une réponse au professeur. Le résultat n'est reproductible que si les conditions sont identiques."

Ainsi l'utilisation de cette classification permet de modéliser l'apprentissage : au fur et à mesure de celui-ci, des théorèmes et propriétés fournis dans le milieu passent sous la responsabilité de l'élève, charge à lui de les utiliser pour agir sur le monde extérieur. Ce passage se fait, soit par des injonctions de la part du professeur, soit par dévolution dans une situation à dimension adidactique.

Ces trois méthodologies, le retournement de situations lié à l'étude des sémioses, et l'enquête sur les partages de connaissances, sont à confronter dans un second temps à la contingence afin de poursuivre notre recherche qui est de comprendre ce qui se joue dans ces classes de SEGPA. La prochaine étape est donc de disposer de protocoles afin de faire fonctionner ces outils.

Références bibliographiques

BLOCH I. (preprint 2000) Dimension adidactique et connaissance nécessaire : un exemple de "retournement" d'une situation. Actes du colloque Guy Brousseau, juin 2000, éditions Université Bordeaux 2.

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19/2, 135-193,* La Pensée Sauvage : Grenoble.

BLOCH I. (2002a) Différents niveaux de modèles de milieux dans la Théorie des Situations Didactiques. *In Dorier et coll. éds, Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, pp 125-139,* La Pensée Sauvage : Grenoble.

BLOCH I. (2002b) Transposition of didactical knowledge : the case of mathematics teachers' education. *Proceedings of the Second International Congress on Teaching Mathematics (at undergraduate level).* University of Heraklion.

BLOCH I. (2003) "Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove", *Educational Studies in Mathematics, vol.52-1, pp.3-28.*

BONNET N. (1997) Multiplication en ZEP. *Documents pour la formation des formateurs, COPIRELEM, pp.41-54.* IREM Paris VII.

BROUSSEAU G. L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques, Noirfalise et Perrin-Glorian éditeurs*, IREM de Clermont-Ferrand.

CAPPONI B., SUTHERLAND R. (1998) Interaction des cadres algébriques et graphiques dans la résolution de problèmes avec Cabri géomètre, *Petit x, n°50, pp. 41-55.*

COMIN E. (2002) L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 22/2.3, 135-182,* La Pensée Sauvage : Grenoble.

CONNE F. (1999) Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. *Le cognitif en didactique des mathématiques, Conne et Lemoyne éds, pp. 31-70,* Presses Universitaires de Montréal.

DUTOUR V. (2001) L'aménagement d'une situation-problème en SEGPA. *Mémoire CAPSAIS,* IUFM d'Aquitaine.
FEYDEL L. (2001) Les situations de référence pour construire du sens en mathématiques. *Mémoire CAPSAIS,* IUFM d'Aquitaine.
GENESTOUX F. (2000) *Fonctionnement du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques.* Bordeaux : Université Bordeaux 1.
LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 14/1.2, pp. 165-210.*
MERCIER A. (1995) Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations a didactiques, *Les débats de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
PERRIN- GLORIAN M. J. (1993) Questions didactiques soulevées par l'enseignement des mathématiques dans les classes "faibles", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 13/1.2, pp. 3-118.*
PEIRCE C. S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses*, Le Cerf éd. Paris.
SACKUR C. et MAUREL M (2002) La presqu'île, une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG. *In Dorier et coll. éds, Actes de la 11 ème Ecole d'été de didactique des Mathématiques. pp. 167-177* La Pensée Sauvage : Grenoble
SALIN M.H. (1999) Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. *Le cognitif en didactique des mathématiques, Conne et Lemoyne éds, pp. 327-349,* Presses Universitaires de Montréal.
VERON B. (2001) Calcul littéral, équations, inéquations. *Bulletin APMEP n°435, pp. 440-444.*

Didactique des mathématiques

et

champs connexes

Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : La dialectique matières - compétences

Carl Winsløw

Centre de Didactique des Sciences
Université de Copenhague, Danemark

1. Le problème

Quels sont les objectifs de l'enseignement des mathématiques, et comment les décrire ? Évidemment, la réponse dépend du contexte et de la personne qui répond. Globalement, elle est profondément liée à la *justification* de l'enseignement, qui dépend à son tour – au moins pour le grand public – très fortement de la nécessité, pour l'individu, de posséder des connaissances mathématiques afin de réussir dans les formations supérieures ou dans la société. Ces besoins sont bien sûr réels, généralement reconnus, et en général peu compris. A ceux-ci s'ajoutent des notions, souvent encore moins précises, concernant la valeur d'une culture mathématique, provenant de perspectives assez diverses : surtout, du point de vue historique (c'est un domaine cultivé depuis l'Antiquité), philosophiques (avec des racines dans l'Antiquité, mais aussi dans la pensée d'une multitude de philosophes depuis Descartes et Kant) ou idéologiques (par exemple, pour la participation du citoyen à la vie démocratique). Il y a un écart évident entre ces idées générales et la tâche de cerner les objectifs d'un enseignement concret, avec ses choix incontournables de sujets, méthodes, notions etc. à enseigner. Souvent, le didacticien doit considérer – comme une partie des conditions données – les objectifs formulés dans les programmes gouvernant l'enseignement en question.
Or il y a plusieurs raisons pour se livrer à une réflexion plus approfondie sur la nature des objectifs. La plus importante c'est la *nécessité de cohérence à travers les systèmes*. Actuellement, la nature des programmes varie énormément en fonction des contextes (niveau, pays, institutions...), non seulement par ses matières (ce qui est évident) mais aussi par ses catégories et par la manière employée pour les décrire. Un obstacle pour arriver à des catégories communes, c'est le problème du « programme implicite ». Souvent, la tradition joue un rôle au moins aussi important que les prescriptions officielles, même si certains manuels sont obligatoirement utilisés. Surtout, les pratiques plus ou moins centralisées des *examens* par lesquelles on évalue les résultats de l'enseignement, ont d'une influence considérable dans la réalisation des programmes dans l'enseignement. Bien que ces pratiques soient censées être en accord avec le programme, elles sont souvent bien plus nettes en ce qui concerne les attentes du système éducatif par rapport aux actions réalisées par le sujet enseigné. Dans le cas commun ou le succès de l'apprenant (et de son maître) dépend, dans l'immédiat, de la capacité à réaliser de telles actions, les pratiques d'évaluation peuvent être bien plus déterminantes qu'un programme officiel. Plus généralement, une bonne partie des objectifs réellement en jeux sont *implicites*.

Ces conditions se retrouvent sans doute pour toutes les disciplines scolaires. Nous nous intéresserons à la nature *spécifique* des difficultés – et des besoins – à expliciter les objectifs d'un enseignement mathématique. Localement, il s'agit du *contrat didactique* qui, selon Brousseau (1986), reste forcément en partie implicite : c'est même une condition pour un enseignement qui vise à développer la compréhension autonome de l'élève que l'enseignant ne dise pas 'ce qu'il faut faire', sous peine de réduire la tâche de l'élève à une simulation. Cela, évidemment, ne veut pas dire que les objectifs locaux ne doivent pas être explicités pour l'enseignant, ou qu'il faut les dissimuler à jamais à l'élève. Mais les objectifs locaux sont continuellement *négociés* dans l'interaction entre les deux parties, en fonctions de leurs actions et de leurs décisions. La situation est *asymétrique* dans le sens (et dans la mesure) où l'enseignant 'sait mieux'. 'Savoir mieux' ne veut pas seulement dire que l'enseignant sait mieux la *matière mathématique*, mais surtout qu'il sait ce qu'il faut en *pouvoir faire*. Et cela nous ramène à un niveau plus global, si cette potentialité – essentiellement un *potentiel d'action* – possède des traits susceptibles d'être explicités et généralisés. En mathématiques, nous parlons souvent de tels traits, par exemple de 'bien raisonner', de 'focaliser sur l'essentiel', de 'choisir les bons outils', ou de 's'exprimer clairement'. Tout cela, qui a l'apparence d'une généralité banale, ne l'est pas quand on y réfléchit : par exemple, de bien raisonner, en mathématiques, fait référence (entre autre) aux contraintes spécifiques des inférences valides dans un raisonnement mathématique. Il n'y a donc, *a priori*, aucune raison pour ne pas chercher une précision plus fine de tels 'traits du 'pouvoir faire'.

C'est finalement en prenant de telles exigences au sérieux que nous arriverons à cerner des objectifs plus globaux de l'enseignement des mathématiques en tant que telles. La matière, sans doute, ne consiste pas en des îlots isolées de notions et de faits divers, chacun avec ses méthodologies pour les traiter ; mais même les didacticiens se sont peut-être trouvé un peu trop éblouis par la cohérence des structures (relations, transformations) abstraites de notre discipline pour vouloir répondre à la question initiale telle qu'elle se pose du point de vue de l'élève : quels sons les objectifs de l'enseignement dans le sens du *pouvoir faire* à atteindre pour l'élève, et surtout, ne sont-ils pas, aussi, munis d'une certaine cohérence spécifique aux mathématiques ? Cette façon de poser la question s'impose pour deux raisons.

Premièrement, la justification d'un enseignement mathématique ne peut, en dehors de contextes très spécialisés, se borner à faire référence à des éléments de matière, surtout si on veut maintenir que l'enseignement mathématique porte bien sur une seule discipline. Certes, pour beaucoup de ceux qui apprennent les mathématiques sans choisir ni la discipline ni la matière, la motivation se trouve ailleurs, qu'elle soit interne ou externe. Et on ne peut pas rendre compte des attentes de la société vis-à-vis de l'éducation mathématique dans les termes de la seule matière enseignée.

Deuxièmement, il faut expliquer comment il se fait que les enseignements de divers éléments (voire de diverses branches) des mathématiques se supportent entre eux – au-delà de leur interdépendances logiques. Par exemple, les pratiques de raisonnement en géométrie euclidienne ne sont pas indépendantes de celles qui ont rapport à l'analyse. Il n'y a pas d'ordre nécessaire ici ; quoique la tradition puisse mettre l'expérience d'une pratique avant une autre, le soutien mutuel des deux instances du 'pouvoir raisonner' ne dépend pas d'une façon nécessaire de la structure de la matière.

Dans le reste de cet article, nous allons discuter pourquoi et comment les notions de *compétence* fournissent des cadres possibles pour un traitement plus systématique des problématiques que nous venons d'esquisser. Il est clair que l'on ne peut pas entièrement séparer le traitement théorique de l'emploi pratique des cadres, mais nous avons fait le choix d'accorder la plus grande partie de la section principale (2) au premier, en n'offrant qu'une esquisse d'une expérience contrôlée (section 3). Ce choix a été fait en partie en fonction de l'espace accordé, en partie en jugeant ce qui pourra intéresser le lecteur dans un premier temps.

2. La notion de compétences.

La notion de *compétences* est à la mode aussi bien dans les sciences de l'éducation (voir par ex. la périodique *Education permanente* 1999, no. 140-141) que dans le discours politique (voir par ex. Rychen et al., 2003). Quoique son usage par les différents agents de ces discours varie considérablement, il paraît être lié à un changement assez cohérent de la façon dont ceux-ci conçoivent la nature de l'éducation en tant que telle. Qu'on le veuille ou non, il représente en particulier un défi pour l'idée classique que la formation d'un individu consiste essentiellement à l'acquisition d'un certain ensemble de savoirs. Il ne s'agit pas seulement de l'internalisation qui s'opère dans l'acquisition où les savoirs objectifs (déterminés par un certain canon de textes, indépendamment des individus) se transforment dans des *connaissances* du sujet. Il s'agit d'une insistance sur le fait que ce qui compte en pratique – et ce qui peut être effectivement évalué – ce sont les *potentiels d'action* de l'individu liés à ces connaissances mais dépendant aussi des contextes où les actions sont réalisées. Ici 'contextes' *contextes* impliquent aussi *interactions sociales* (dans un milieu scolaire, dans une entreprise etc.) et donc les potentiels de l'individu ne sont pas purement individuels – ils dépendent du milieu social, aussi bien pour leur développement que pour leur réalisation. Un changement s'opère donc également par rapport à l'objet de la formation : ce n'est plus seulement l'individu mais aussi les organisations sociales d'individus. Finalement, le développement et la réalisation des potentiels d'actions sont considérés comme co-existant dans toutes ces organisations : on réalise ces potentiels et on les développe non seulement dans la vie scolaire mais aussi dans la vie de travail et dans la vie privée. Il y a donc une extension, aussi bien dans le temps que par rapport aux institutions, de la notion de formation : elle n'est plus vue comme une affaire essentiellement liée aux institutions scolaires ou au 'temps de scolarisation', précédant le temps de travail. Donc, les objectifs de formation à réaliser dans les organisations scolaires sont considérés dans un système plus large de développement de l'individu et des organisations dont il fait partie.

La réaction des didacticiens face à ces discours n'est pas toujours enthousiaste :

> « Un … point de vue, en émergence … consiste à voir dans une École fortement diluée dans la société civile un réseaux de lieux de diffusion et de validation de *compétences* variées, constamment et localement redéfinissables, acquises et validées sans référence ni révérence obligée aux savoirs « monumentaux »… Dans une telle problématique, l'École peut prendre l'allure d'une salle des marchés où, loin des trop longs détours de la connaissance « théorique », on gère fiévreusement un « portefeuille de compétence » qu'il convient d'actualiser rapidement pour répondre aux demandes des différents marchés sur lesquels l'individu est censé réaliser sa valeur. »(Chevallard, 2002, 54-55)

Ces propos reflètent aussi un sens du dépaysement (non réservé aux seuls didacticiens !) par rapport à la « dissolution institutionnelle » (voulue ou prévue) de l'apprentissage. Où vont les notions à la base de la didactique – le milieu, les situations, les contrats – toutes enracinées, au moins dans leur emploi, à l'organisation scolaire et aux savoirs d'une discipline ? Peut-on effectivement formuler les objectifs de la formation avec des notions abstraites comme 'potentiel d'action', organisations sociales, etc. ? Où est le savoir mathématique dans tout cela ?

La didactique des mathématiques est, effectivement, particulièrement défiée. Le savoir mathématique est certes enraciné dans les milieux universitaires où il est, pour une partie, développé, ainsi que dans les milieux scolaires chargés de l'entretenir. Mais par ses interactions avec d'autres savoirs (intellectuels et autres), il est également omniprésent hors du milieu scolaire, et en effet, la grande majorité d'individus n'en éprouvent un besoin réel qu'en fonctions de ces présences. Il ne s'agit pas, pour le didacticien, d'accepter d'emblée les déplacements des discours sur la formation que nous venons d'évoquer – il s'agit de les préciser, où même des les corriger, en vue d'identifier ce qu'ils apportent en défis et en ouvertures pour la réflexion sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. En particulier, il s'agit d'examiner – et c'est notre sujet ici – les apports possibles de la notion de potentiel d'action (après plusieurs précisions, de *compétence*) à notre réflexion sur la description des objectifs de l'enseignement mathématique.

2.1 Éléments de matière

Partons de territoires familiers : la *matière* d'un enseignement mathématique, décrit dans les termes de la discipline : équations du second degré, différentiation, homothéties... Plus précisément, parlons d'un *élément de matière* pour désigner le conglomérat de structures conceptuelles et textuelles impliquées par une telle expression : des notions de base, des formes de représentation, des définitions, des méthodes, des théorèmes, etc. (voir fig. 1 pour ces structures en fonctions des exemples d'éléments évoqués). Pour l'enseignant ainsi que pour le didacticien, chacune de ces expressions évoque également une structure mathématique encadrante, des bases théoriques nécessaires, des explications à faire, peut-être des *situations fondamentales* (Brousseau, 1986) pour faire sentir à l'élève la pertinence de la matière en question... bref, de telles étiquettes communément utilisées pour désigner un élément de matière à enseigner évoque aussi des éléments auxiliaires pour le mettre en relation avec des pratiques scolaires que l'enseignant est censé initier et gérer.

La *transposition* de la matière est censée s'opérer par l'interaction de l'enseignant avec l'élève ainsi que dans le travail individuel ou collectif des élèves selon les instructions plus ou moins ouvertes fournies par l'enseignant, basées sur les relations identifiées par celui-ci entre l'élément et la pratique. Quand tout se passe bien, les élèves se battent pour comprendre les explications et pour faire le travail approfondi suggéré par l'enseignant – on a 'appris la matière', on va passer l'examen pour ce qui la concerne, et on passe ailleurs.

	Notions de base	Formes de repr.	Définitions	Méthodes	Théorèmes
Équations du second degré	Variable, inconnu, solution...	[symbolisme algébrique] x^2+...	Équation de type $ax^2+bx+c=0$ où...	Complément de carrés, formules, vérification...	Si $b^2-4ac \geq 0$ ..., solutions conjuguées,...
différentiation	Fonction, variable, ...	$f\_$, dy/dx, ∂f, [tangente], ...	Si a est... $f\_(a) = \lim_{x\ a}$...	[m. de calcul, approx.,...]	Si a point d'extr. alors $f\_(a) =$ ...
homothétie	Espace, point, transformation...	[figures géom., symbolismes...]	Soit P ... et k ... $\underline{Cm_C(P)} = k_m\underline{CP}$	Calcul vectoriel, constructions...	Préservation de parallélisme,...

Fig. 1 : *exemples d'éléments de matière et de leurs structures impliquées.*

Cela n'est pas une caricature ; bien sûr, les activités proposées aux élèves peuvent viser une compréhension profonde, et non seulement l'acquisition de quelques techniques pour répondre à des questions standardisées de manière à satisfaire le professeur. Ces activités, quand elles sont bien conçues, peuvent amener les participants à s'engager avec ferveur dans la découverte de principes essentiels. Aussi, l'attention aux relations multiples d'une matière avec d'autres, déjà travaillées ou à découvrir plus tard, est certainement d'une grande importance pour la conception globale comme locale de l'enseignement. Mais la question reste incontournable :

est-ce qu'on peut, même en supposant que tout cela est bien en place, dire que l'on a appris la matière, ou plutôt est-ce que l'on a simplement vécu des discours et des situations provoquant une réflexion plus ou moins autonome ? Le produit de l'activité peut-il vraiment être décrit par la matière mathématique ? Quand on 'passe ailleurs', est-ce que ce que l'on apporte de l'activité vécue se réduit à des éléments de matière acquis ?

Pour la première question, il est clair que l'on peut, tout au moins, avoir 'appris la matière' plus ou moins bien, avec plus ou moins de solidité par rapport aux situations où l'on peut en faire un usage correct, et avec plus ou moins de stabilité par rapport au temps ou pour soutenir de nouvelles acquisitions. Une partie de ces aspects des résultats de l'apprentissage peut effectivement être décrit par rapport à des principes, méthodes, résultats etc. visés par l'enseignement, et qui ne seront qu'une partie de ceux qui sont disponibles. Une partie des choix de ces éléments peuvent effectivement être cruciaux aussi pour les activités envisagées plus tard, selon la structure mathématique des matières ; et donc, il faut sans doute veiller à ces relations clairement liées à la matière. Mais reste la pertinence des situations vécues, la réalité de la solidité des acquisitions de l'élève par rapport au temps et aux situations différentes. Les enseignants expérimentés et réfléchis savent bien que l'on n'a jamais appris une matière dans un sens définitif. Aucune situation n'est capable d'épuiser la richesse d'une matière. En se référant aux seules caractéristiques de la matière, on ne peut donc pas déclarer les résultats de l'enseignement de façon vérifiable dans le temps et par rapport aux individus et aux situations.

2.2 Compétences mathématiques spécifiques

Nous appellerons *compétence mathématique spécifique* le potentiel d'action d'un individu lié à un élément de matière et à une classe de situations ; ici, une 'classe de situations' est spécifiée de façon descriptive et non par énumération exhaustive. Ce n'est pas une définition très précise ; mais pour notre propos, elle suffira. Mieux vaut dire ce que nous voulons faire d'une telle 'compétence':

- la *décrire* dans des termes qui soient accessibles aux personnes concernées, et
- dans un sens qualitatif et partiel, *constater sa présence chez un individu* (ou chez un groupe d'individus).

Par exemple, nous pouvons décrire une compétence, spécifique à l'élément « différentiation », comme pouvoir utiliser la fonction dérivée dans les problèmes d'optimisation, ou encore pouvoir justifier cet usage. Bref, nous parlons du 'pouvoir faire' de l'individu où le 'faire' consiste à utiliser ses connaissances de la matière par rapport à une classe de situations susceptibles de les mobiliser. Nous pouvons constater sa présence chez un individu dans la mesure où il réussit effectivement à agir de façon convenable dans ces situations. Notons, toutefois, que la compétence spécifique ne se réduit ni à la maîtrise d'une technique associée, ni à des formes de comportement, ni à une connaissance théorique ; elle réside dans le *potentiel de l'individu* de faire usage, dans les situations visées, de tous les éléments de sa connaissance par rapport à l'élément.

Avant de nous perdre dans les abstractions, retournons tout de suite au problème de décrire les objectifs : que'est-ce que cela vous apporte de compléter la descriptions des éléments de matière par une spécification des compétences spécifiques à viser ? Le pas n'est pas dramatique, dans le sens où nous rendrons simplement explicite ce qui peut sensiblement à la fois être de vrais objectifs d'apprentissage (ce qui n'est pas vrai pour les éléments de savoir), et en même temps être effectivement décrit (ce qui n'est pas vrai pour les connaissances individuelles associées). Dans un sens pratique, pourtant, ce pas peut pourtant être déjà important, au moins dans les contextes d'enseignement où les descriptions des objectifs se réfèrent autrement aux seuls éléments de matière. Nous en présenterons un cas plus détaillé plus tard ; mais voici quelques effets principaux de cet élargissement des descriptions :

- tout d'abord, celui qui est censé apprendre fait partie de la description, au moins dans un sens idéal, comme on s'occupe explicitement de ce que celui-ci devra, dans quelque mesure, devenir capable de *faire* ; l'attention se déplace donc, en partie, du domaine de l'institution (savoirs à transmettre par l'enseignant) au domaine de l'apprenant et de ses actions ;
- ce déplacement d'attention se transpose aussi à l'enseignement, qui – de façon officielle où institutionnalisée – se conçoit pour faciliter et assister le développement de pratiques par rapport aux éléments, plutôt que de les « transmettre »
- la matière n'est plus considérée uniquement dans son objectivité abstraite mais aussi comme base d'une classe limitée d'actions ; on est forcé à expliciter des priorités réalistes par rapport à l'infinité potentielle de situations qui, normalement, est liée à un élément de matière – ce qui peut considérablement nuancer la conception de la matière, surtout chez l'enseignant ;
- il devient possible de considérer l'évaluation des objectifs au-delà de l'implicite des pratiques habituelles.

La plupart de ces effets ne sont pas des 'déductions théoriques' ; ils visent à systématiser les observations de pratique. Tous sont d'ailleurs observés dans (Grønbæk et al., 2003a).

Concrètement, ce qui est proposé ici est donc de compléter la description d'objectifs, formulée initialement dans les termes d'éléments de matière, par des *objectifs de compétences spécifiques* (en abrégé dans la suite : OCS) pour chacun des éléments. La description des OCS sera sans doute un peu abstraite, malgré ses références à des classes de situations ; il est donc conseillé d'en donner des *exemples illustratifs* (comme des exercices ou tâches, des problématiques concrètes, ...) tout en précisant qu'ils sont, justement, des exemples.

Ces propositions ne sont pas, je le crois, très surprenantes ; mais selon la façon d'implémentation, et selon le contexte, les effets peuvent l'être. Il faut donc les contrôler. Par exemple, un effet qui sera rarement recherché est un effet *behavioriste* où les OCS dégénèrent simplement en des prescriptions pour l'entraînement de certains schèmes d'action ; pour l'éviter, il faut veiller à ne pas trop restreindre les classes d'action, par exemple à un inventaire de types d'exercices. Un autre effet non désirable sera l'*atomisation* de l'apprentissage, qui pourrait résulter d'un défaut d'attention aux relations et à la coordination des OCS. Le souci d'éviter ces effets (et plus généralement, les effets *réducteurs* ou dégénérés) est un des motifs pour procéder aux considérations de la prochaine section.

2.3 Compétences mathématiques générales

Nous venons maintenant au point le plus difficile et, sans doute, controversé de l'article. Posons-le donc sous forme de question : peut-on parler de compétences mathématiques générales, qui (pour leur définition) sont *indépendantes d'une matière mathématique concrète* ? La réponse naïve est oui, on en parle effectivement (comme nous allons le voir). La question, plus subtile, est alors: à quelles fins et avec quelles conséquences peut-on envisager d'utiliser de telles notions de compétence dans la description des objectifs de l'enseignement mathématique ?

Avant de présenter et discuter une réponse alternative et remarquable à ces questions, développée par M. Niss et autres, voici une façon de voir l'idée de 'compétence mathématique générale' par rapport aux compétences spécifiques discutées dans la section précédente: comme une *abstraction* de ces dernières *faite à travers les éléments de matière* (Winsløw, 2001). Une métaphore mathématique de cette position est donné en fig. 2 (pris de Winsløw, 2004) : il y a *d'abord* des compétences spécifiques, représentées dans la figure comme les points (ou des régions) dans un plan. Celles-ci peuvent se voir comme situées dans un espace bidimensionnel, engendré par *les éléments de matière* et par des formes abstraites de 'potentiels d'action' – ce que nous appellerons les *compétences générales* – définies par la similitude des formes d'action associées aux compétences spécifiques.

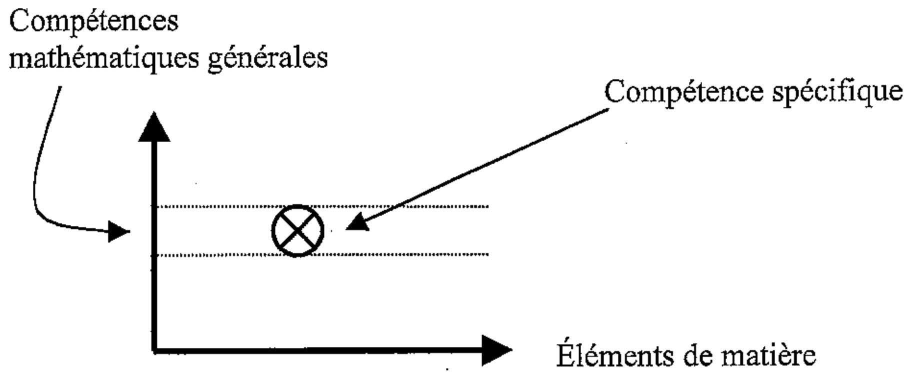


Fig. 2: *Compétences spécifiques par rapport aux compétences générales et matière* (Winsløw, 2001, 2004).

De ce point de vue, les compétences générales sont considérées comme une notion *dérivée* de la notion de compétence spécifique. Elles ne sont donc pas premières.

2.3.1 Le modèle Niss

Par contre, la notion de compétence (générale) est primaire dans un cadre théorique récent, issu de certaines traditions de la didactique scandinave. Il a été élaboré déjà il y a quelques années (cf. Niss, 1999), et au cœur d'un projet (dit le « projet KOM »), initié et financé par le Ministère de l'Éducation du Danemark (Niss et al., 2002), dont le but est formulé ainsi par le directeur du projet, Mogens Niss:

> The fundamental idea of the project is to base the description of mathematics curricula primarily on the notion of a « mathematical competency », rather than on syllabi in the traditional sense of lists of topics, concepts and results. This allows for an overarching conceptual framework which captures the perspectives of mathematics teaching and learning at whatever educational level (Niss, 2003).

Une *compétence mathématique*, pour Niss, c'est un composant de *l'expertise* mathématique : la puissance d'agir avec intelligence et d'une façon convenable dans des situations comportant une certaine forme de défi mathématique (Niss et al., 2002, 43). A priori cette notion n'est donc qu'un potentiel d'action lié à une certaine forme de défi, voire tâche. Mais un élément central du cadre consiste dans l'identification de *huit compétences mathématiques* qui seront majeures, clairement reconnaissables et distinctes (sans être forcément indépendantes où disjointes). En voici les descriptions sommaires (tirée de Niss et al., 2002 ; cf. aussi Niss, 2003 pour une explication plus détaillée en anglais) :

1. maîtriser les formes caractéristiques permettant de poser et résoudre des questions mathématiques (formes de *pensée* math.)
2. pouvoir reconnaître, formuler et résoudre des *problèmes* mathématiques
3. pouvoir comprendre, évaluer et construire des *modèles* mathématiques (pour les phénomènes non mathématiques)
4. pouvoir suivre, analyser, évaluer et construire des *raisonnements* mathématiques

5. pouvoir manier diverses *représentations* de phénomènes mathématiques
6. pouvoir manier les *formalismes* mathématiques
7. pouvoir *communiquer* en et sur les mathématiques
8. pouvoir utiliser les *outils* appropriés pour l'activité mathématique

Selon l'auteur, le choix de ces huit compétences est pragmatique et n'exclue pas, théoriquement, les alternatives : *It just so happens that the present set seems to be able to capture the essential aspects of mathematical mastery reasonably well* (Niss, 2003). Dans le projet KOM, cette affirmation est illustrée par des exemples tirés d'un nombre de contextes d'enseignement mathématique au Danemark, de l'école primaire à l'université. Il faut d'ailleurs ajouter que chacune des compétences est censée être évaluée, chez l'individu, selon trois dimensions : dans quelle mesure la personne maîtrise ses aspects caractéristiques, le rayon du domaine de contextes et de situations où il peut les appliquer, et le niveau technique de ces applications maîtrisées.

Le projet KOM est à la base de nombreuses initiatives actuellement en réalisation dans le cadre de révisions de programmes au Danemark. Le modèle de huit compétences a été également fondateur pour le cadre théorique à la base de la partie *mathematical literacy* du programme PISA (OCDE, 1999). Le directeur du groupe international d'experts pour cette partie était, d'ailleurs, Mogens Niss.

Étant donné l'influence de ce « modèle Niss », au moins dans la Scandinavie et dans certaines parties de la scène internationale, il faut au moins se poser trois questions :

1. Quelles sont les fondements théoriques et empiriques de ce modèle ? En particulier, quelles sont ses relations (explicites ou implicites) aux théories classiques de la didactique ?
2. Quelles sont ses conséquences – visées, plausibles ?
3. Quelle place accorde-t-il à la matière, au sujet, par ex. par rapport à notre discussion sur les compétences spécifiques ?

Nous ne pouvons, naturellement, donner ici une réponse satisfaisante à ces questions ; en effet, ne serait-ce que pour clarifier leur importance, l'exposé sommaire que nous venons de donner du modèle et de ses applications est très insuffisant. Osons quand même, avant de procéder à une analyse critique depuis notre point de vue, signaler quelques pistes de réflexion.

Il y a, en Scandinavie, une tradition assez longue de considérer l'éducation mathématique dans la perspective de *démocratisation.* C'est-à-dire, une justification majeure en serait de développer les capacités du citoyen pour s'orienter et participer dans une société de plus en plus influencée par les « applications de modèles mathématiques », que ce soit dans la technologie, dans les formes de décrire où de concevoir la réalité, etc. (Niss, 1994). Pour une partie, cette tradition est proche d'une pédagogie optimiste d'émancipation, où la propagation de compétences mathématiques est vue comme une voie (parmi d'autres) pour libérer l'individu de la manipulation, de l'incompréhension de son environnement, et ainsi de suite. Elle est liée aussi à une vision plus sinistre de la technologie comme un outil potentiel d'asservissement, et donc à une pédagogie critique (voir par ex. Valero et al., 2002). C'est donc une tradition qui refuse de voir l'enseignement mathématique comme un terrain qui soit politiquement neutre ; et donc, en particulier, elle se veut un défi pour une didactique qui se voit, de façon neutre, en service de la diffusion de savoirs scientifiques.

Pour certains, comme Niss, c'est aussi une tradition qui est fortement liée à l'expérience de nouvelles formes d'enseignement au niveau universitaire, centrées autour de la « pédagogie de projets » pratiquée, depuis le début des années 70, au Centre Universitaire de Roskilde (Niss, 2001). Ces formes sont délibérément alternatives aux pratiques de l'université « classique », avec ses cours magistraux, son organisation du cursus selon les disciplines mathématiques, etc. Il est clair que l'opposition savoirs-compétences est à la base de ces formes : on veut que l'acquisition des connaissances se fasse au fur et à mesure que l'étudiant en éprouve le besoin selon les exigences d'un problématique qui, par préférence, se situe dans un contexte « réel » (d'où le grand intérêt des modèles pour ces mathématiciens). Naturellement, dans la pratique, il y a plus de nuances ; de nos jours, on donne aussi des cours plus classiques à Roskilde, et les projets plus autonomes font partie (et l'ont toujours fait, au moins vers la fin des études) de l'expérience des étudiants à toutes nos universités. La base idéologique du milieu de Roskilde s'est également adoucie considérablement ; en effet, il a noué depuis quelque temps de fortes relations avec les entreprises privées qui sont, d'ailleurs, assez preneurs de ses diplômés. Le fait que sa production de chercheurs en mathématiques pures est pratiquement nulle choque sans doute peu.

Il y a donc, derrière le modèle Niss, une expérience intéressante et unique d'une conception alternative des études supérieures en mathématiques. Elle n'est pas sans consonances avec le développement récent des programmes de l'école unique du Danemark (couvrant neuf ans de scolarité pour les élèves âgés de 7 à 15 ans), où les applications pratiques de la discipline sont très favorisées au dépens de ses éléments plus théoriques (notamment les preuves qui sont presque totalement absentes jusqu'au lycées). Parmi les tendances observées dans les évaluations internationales de compétences mathématiques chez les élèves de moins de 15 ans, on voit donc d'un côté une certaine faiblesse, chez les élèves danois, pour ce qui concerne les aspects formels et théoriques, des résultats un peu meilleurs pour les tâches appliquées, et des attitudes relativement positives et confiantes vis-à-vis la discipline (Weng et al., 2004). On peut supposer que l'application du modèle Niss à un programme d'enseignement des mathématiques devrait renforcer de telles tendances.

Un contrepoids à de tels effets – qui ne sont pas sans éveiller les critiques – est pourtant contenu dans la formulation finale du projet KOM (Niss et al., 2002), qui envisage une structure 'matricielle' pour la description d'objectifs de l'enseignement, effectivement assez proche de la fig. 2. Un objectif devra, dans cette structure, se situer par rapport à une des 8 compétences générales ainsi que par rapport à une (parmi quelques 10) catégories assez larges de matière. La progression du programme serait alors considérée aussi par rapport aux grands thèmes de la discipline, même si un motif central et explicit du projet KOM a été de leur ôter le rôle principal dans les programmes.

2.3.2 Évaluation critique du modèle Niss

En dépit des bases d'expérience que nous venons d'évoquer, le modèle Niss n'est pas sans rappeler le projet des Bourbakistes. Bien sûr, le projet KOM est complètement opposé à ses dérivées didactiques qui voulaient que l'organisation du cursus dérive, de façon aussi fidèle que possible, d'une analyse de la structure des savoirs scientifiques. Mais le dessein de partir de bases primaires et universelles – cette fois-ci liées à des idées de l'exercice de la discipline plutôt qu'à sa structure interne – est bien de même nature. Ce qui est décrit par les huit compétences est une expertise idéalisée – voulue indépendante des savoirs, des individus et des contextes. Même si on reconnaît qu'elles ne peuvent se passer, dans la pratique, de savoirs quelconques, le point c'est que ces huit compétences seraient essentielles dans l'expertise par rapport à n'importe quel savoir mathématique. On veut donc, pour ainsi dire, rendre compte de *la connaissance qui peut être exercée* dans des termes objectifs et universels. Il y a, derrière cette volonté, la reconnaissance (déjà soulignée dans les premières sections de cet article) que ni les savoirs ni les connaissances peuvent en soi être détectées et évaluées, et donc être réellement des objectifs de l'enseignement. Comme nous l'avons vu, on n'a même pas tenté d'avancer des arguments théoriques justifiant le système des huit compétences générales. Il apparaît plutôt comme un système axiomatique de modélisation, à évaluer par ses usages et effets dans la pratique. Nous avons touché brièvement, dans la section précédente, à certaines conséquences possibles de telles expériences, quoique évidemment cela dépende beaucoup des mesures de l'implémentation (tout comme dans l'histoire des 'maths modernes'). Passons quand même à quelques remarques critiques du point de vue théorique.

D'abord, les huit compétences ne nous semblent pas très bien définies. Bien sûr, la description de chacune – et plus encore les exemples qui sont fournis dans (Niss et al., 2002) – évoquent des aspects réels et centraux de l'expertise mathématique, quoique presque uniquement dans des termes phénoménologiques. Le problème majeur c'est qu'aucune, parmi ces huit catégories, ne soit concevable indépendamment des autres, et que la reconnaissance de chacune, dans les actions de l'apprenant, demande une interprétation pour laquelle aucun outil n'est fourni. On a beau évoquer le spectre du behaviorisme pour se décharger de la dernière critique ; l'absence d'outils ne les rend pas moins impraticables pour la vie scolaire. Encore plus grave, me semble-t-il, est le fait que certaines des compétences sont fondamentales pour toutes les autres (même en supposant qu'elles soient clairement définies, ce qui est sans doute un but difficile à atteindre pour un système voulu aussi général) : par exemple, la maîtrise des systèmes de représentation sémiotique, évoqué dans la compétence numéro 5 et étudiée sérieusement, par exemple, dans (Duval, 1995), est indispensable pour n'importe quelle activité liée aux mathématiques, tandis que la maîtrise des processus de modélisation semble beaucoup plus spécifique de certaines activités. En mettant tout sur le même plan, on offre en effet une image déconstruite d'une vision qui devrait justement servir à faire voir – et à développer – la cohérence et la totalité de l'expertise mathématique. Nous y revenons dans la section suivante.

Un point plus subtil se situe dans les rapports voulus entre les compétences générales et la matière enseignée. Comme nous l'avons déjà dit, ils dépendent, pour le projet KOM, de la mise en pratique du modèle dans des contextes où certains éléments de matière seraient plus ou moins pertinents (quoique, selon les recommandations du projet, ces éléments ne soient pas prescrits en détail). On admettrait sans doute aussi que les compétences acquises dans un contexte donné (y compris des éléments de matière) soient de quelque façon imprégnées par le contexte, en se gardant bien sûr des positions extrêmes de la théorie de « l'apprentissage situé » (*situated learning* ; voir Anderson, 1997 pour une revue critique). Or en voyant la priorité – en effet, le sens – de l'apprentissage dans les compétences générales, comment règle-t-on les raisons diverses pour qu'une matière plutôt qu'une autre soit enseignée ? Ne pourrait-on s'imaginer que les compétences seraient mieux acquises (et cela pour les trois dimensions !) dans des domaines très restreints de matière (par exemple, la théorie des nombres entiers, ou la seule géométrie euclidienne) ? En effet, le terme 'mathématique' employé pour qualifier et décrire les compétences, est en soi redoutable ; les compétences, par exemple, de raisonnement, ont-elles un sens indépendamment d'un cercle de problèmes et de méthodes liées à un contexte de matière, au-delà des pures structures logiques ? Quelle est la relation entre la capacité à résoudre des problèmes de géométrie et des problèmes de l'analyse, au-delà des généralités légères de l'heuristique ?

Bref, en réduisant le rôle des contextes de matière à des terrains nécessaires mais plus ou moins arbitraires pour développer et exercer les compétences générales, on risque de considérer comme des faits accidentels, un nombre de résultats et de préoccupations de la didactique qui vise les problèmes spécifiques de ces contextes. De plus, tout comme le compte-rendu des Bourbakistes, on se situe par là dans une position *ahistorique* par rapport aux mathématiques (ici, il semble juste de mettre le mot au pluriel !) – certes, les développements historiques de la discipline ne sont guère concevables comme une progression collective en compétences générales. Par exemple, toute nouvelle technologie de représentation a été liée de façon intrinsèque à des éléments de matière. Même d'un point de vue strictement didactique, il faut bien se méfier d'objectifs d'apprentissage pour lesquels les obstacles spécifiques pour ces éléments sont secondaires. Si ces obstacles ne sont que des accidents sans importance intrinsèque pour les objectifs primaires, une résolution toute proche serait d'éviter les terrains difficiles. Ce faisant, on arrive à une conception réductrice de l'apprentissage des mathématiques. Bien sûr, ce n'est pas une conséquence nécessaire, dans la pratique, de programmes conçus selon le modèle en discussion; mais il me semble néanmoins que c'est une possibilité qui n'est pas que théorique.

2.4 Les niveaux de description des compétences.

Revenons maintenant aux principes que nous envisageons pour la conception de programmes de l'enseignement mathématique. Il faut distinguer au moins les trois niveaux suivants par rapport aux contextes d'enseignement:

- le niveau de *tout un programme*, où les contextes globaux de matière ainsi que les catégories de compétences générales sont les plus importants
- le niveau d'*une unité d'enseignement* (un cursus par ex. d'une durée de quelques mois), normalement située dans un seul contexte global de matière, et donc où la description principale se fait dans les termes d'objectifs de compétences spécifiques (OCS), tout en veillant à leur cohérence relationnelle ainsi qu'en identifiant leurs relations aux compétences générales du programme,
- le niveau d'*une entité d'enseignement minimale* centrée, typiquement, autour d'un petit nombre de compétences spécifiques, liées entre elles au point d'être inséparables.

La description de ces niveaux ne peut pas se faire strictement dans l'ordre donné ; et ce d'autant plus que, comme nous l'avons déjà noté, les compétences générales visées dérivent des compétences spécifiques du programme. Sans doute le dernier niveau sera le plus proche des considérations majeures de la didactique, les situations d'enseignement et d'apprentissage en temps réel. Dans beaucoup de contextes, ce niveau ne figure pas du tout dans les programmes ; dans ce cas, il faut y penser quand même en concevant la description des OCS au niveau encadrant des modules.

Les programmes sont, surtout, des outils de *communication* – aux enseignants, aux institutions, aux sujets enseignés (même si ceux-ci sont souvent oubliés !), à ceux qui produisent les matériaux scolaires, aux responsables de l'extérieur... et ceux-ci seront différemment intéressés par les niveaux que nous venons d'énumérer. L'avantage de focaliser sur les objectifs *réellement réalisables* par l'enseignement, et ensuite *évaluables* – c'est-à-dire l'accroissement des compétences spécifiques aux sujets enseignés – dépend évidemment de l'efficacité de cette communication aux agents concernés. Par exemple, un élève (au moins dès le secondaire) devrait comprendre, au niveau d'une entité d'enseignement, la déclaration des OCS et ses relations aux activités dans lesquelles il s'engage à ce niveau. Les compétences générales devraient aider à élucider et à expliquer les grands objectifs du programme aux concernés externes, même ceux qui ne sont pas des experts de la matière mathématique ou de son enseignement. Il est naturellement très important que tous les niveaux, aussi le deuxième, soient entièrement accessibles et acceptables pour les enseignants.

Ces considérations imposent des conditions importantes à ceux qui ont à rédiger de tels programmes. D'un côté, il faut que la description soit basé sur une analyse didactique de la structure locale comme globale de l'apprentissage, y compris les niveaux épistémologiques et cognitifs; d'autre part, il faut que la communication du programme tienne compte des agents concernés, c'est-à-dire il faut en plus une considération phénoménologique (cf. Duval, 2002) et discursive les concernant.

2.5 Par rapport à l'approche anthropologique.

Avant de clore cette section largement théorique, je voudrais signaler quelques parentés qui me sont apparues au cours de la rédaction entre la structure conceptuelle proposée et certaines notions clés de l'approche anthropologique (sans doute plus familières à la plupart des lecteurs qu'à l'auteur). Quelques-unes sont signalées dans fig. 3.

Notions utilisées ici	Notions « parents » de l'approche anthropologique
Classe de situations	Type de tâche
Méthode	Technique
Élément de matière	Organisation mathématique
Compétence spécifique	Liée aux praxéologies (qui sont, pourtant, dépersonnalisées)
Niveaux de contextes d'enseignement	Hiérarchie de niveaux de détermination didactique (Chevallard, 2002, §3)

Fig. 3 : *quelques similitudes conceptuelles*

Il n'est pas facile de voir comment situer les compétences (spécifiques ou générales) par rapport à l'approche anthropologique. Une compétence est, dans le sens le plus général et classique, un potentiel d'action (ou de *performance*, cf. Chomsky, 1965), bref un *pouvoir-faire* individuel. Une *praxéologie* dans le sens de Chevallard (1999) se compose de *savoir* (au « sens restreint », théorie et technologie) et de *savoir-faire* (technique lié à une type de tâche) ; c'est une entité *culturelle.* Au cœur des deux notions on trouve donc *un type d'action* (dans un sens large) et les deux visent à articuler les conditions pour l'accomplissement des actions en question. Il y a pourtant, me semble-t-il, au moins deux types de différences majeures dans leur usage : la place accordée aux *agents* (les individus qui agissent) et la qualité épistémologique des conditions envisagées. Pour le dernier point, les composants de la praxéologie apparaissent être explicitables à volonté et ils sont situés dans une hiérarchie simple de quatre niveaux verticaux liant l'action concrète au savoir le plus abstrait. Les compétences, pourtant, sont généralement vues comme fondées sur des systèmes « complexes » de capacités cognitives, dont on décrit surtout l'émergence ; pour le reste, seulement des traits partiels sont explicitables (il se peut que l'individu « compétent » ne sache pas du tout rendre compte du « savoir » dont il fait usage, l'exemple classique étant l'usage de « règles » grammaticales dans la langue maternelle). Dans l'approche anthropologique, ce sont plutôt les *agents* qui sont considérés d'un point de vue systémique, au point de disparaître entièrement, selon *l'axiome qu'une personne n'est en fait rien d'autre que l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels* (Chevallard, 1992, 91). La complexité d'un tel système reste pourtant abordable, car là encore on se trouve en présence de hiérarchies verticales (reliant, par exemple, le niveau d'un sujet mathématique (et donc les types de tâches) avec celui de la société). L'usage courant de la notion de compétence est partagé entre l'usage classique lié à l'individu (comme le « *ideal speaker* » chez Chomsky, 1965) et un usage tourné vers les systèmes sociaux (on parle alors, par exemple, de développement de compétence d'une organisation). Il me semble pourtant qu'il n'y a là, normalement, que la reconnaissance banale que les compétences individuelles « interagissent » (par les individus, bien sûr) dans un milieu social, et que la somme de ces interactions ne se réduit pas à ses parts.

3. Un exemple provenant de l'enseignement supérieur des mathématiques.

Rappelons les tendances esquissées au début de la section. 2, qui sont pour une partie issues des milieux universitaires, mais qui les concernent aussi dans un sens plus large, important pour comprendre le contexte du projet que nous allons décrire. Il est banal de constater que la situation des universités dépend, plus que jamais, des changements qui s'opèrent dans la société, et que ces changements ont des traits de plus en plus communs à travers les pays, au moins du premier monde. Les services attendus de l'université ne sont plus limités à fournir des formations et des produits de recherche plus ou moins déterminés par les traditions des disciplines ou des professions. D'une partie, l'expertise universitaire se communique de plus en plus par d'autres voies que le texte académique (destinée surtout aux experts confrères), surtout par la fonction des universitaires comme conseillers dans une variété de contextes, et par l'usage grandissant d'avis d'expert dans les médias à propos de questions d'actualité et d'intérêt publique. D'autre part les formations sont de nos jours l'objet d'évaluation et de réformes toujours plus fréquentes, fondées sur des attentes et des analyses d'origine souvent extérieure au milieu universitaire susceptibles à produire les formations. La notion de compétence est centrale dans la communication entre la société et l'université sur ces matières ; au Danemark, les universités sont maintenant demandées (et ont généralement accepté) de décrire leurs formations et leur développement du personnel en termes de compétences. En particulier, les *programmes* des formations universitaires (comme aux niveaux antérieurs) sont actuellement en récriture sous cette contrainte fixée (avec d'autres) par arrêtés ministériels. Ce n'est donc pas un choix que l'on serait libre de faire ou non, et l'option d'adopter une attitude défensive ou offensée ne me semble ni juste (pour les raisons déjà discutée), ni sage (pour des raisons pragmatiques évidentes). Au contraire les milieux universitaires devraient profiter de ces conditions pour clarifier leurs priorités.

Cela affecte aussi le rôle de la didactique par rapport à un enseignement universitaire qui doit faire face à ces demandes, et d'autres, de professionnalisation. Par conséquence, toutes les universités danoises ont établi un ou plusieurs centres ou instituts pour la recherche et le développement didactique. Le centre de la faculté des sciences de l'Université de Copenhague est un des plus récents. Il publie, à côté des textes de recherches habituels, des fichiers comme (Grønbæk et al., 2003b) – un « guide de description de compétences », destinées aux enseignants comme aux auteurs des nouveaux programmes. Ce texte est d'ailleurs basé en partie sur le projet que je vais brièvement esquisser dans cette section (pour plus de détail des analyses et des résultats, voir Grønbæk et al., 2003a).

3.1 Contexte du projet

Il s'agit d'un projet de développement, réalisé dans l'automne 2002 et continué dans l'automne 2003, d'un cours d'analyse situé dans la deuxième année du programme de mathématiques pures à l'Université de Copenhague. En voici la description officielle (du programme en cours jusqu'en 2003) :

> Analyse mathématique : espaces métriques, continuité ; espace de Hilbert ; analyse de Fourier ; équations différentielles partielles.

A ceci s'ajoute les cadres prescrits pour l'examen, qui consiste en deux parties : une épreuve écrite suivi d'une épreuve orale (quelque semaines après). Une seule note est donnée pour l'ensemble de l'examen.

Bien sûr, la « tradition » ainsi que certains faits divers en disent plus. Le cours est suivi par environ 200 étudiants chaque année (redoublants compris). Une raison pour s'y intéresser est le taux d'échec relativement élevé du cours : en 2001, environ 50% des inscrits au cours ont passé l'examen final. Le cours est réputé difficile et beaucoup d'étudiants le remettent á la troisième année d'étude. Le cours est pourtant une condition d'accès pour plusieurs cours plus avancés du programme « bachelor » (licence).

L'enseignement se fait, comme dans tous les cours du niveau élémentaire, sur 15 semaines et dans deux formats : les *cours magistraux* (2 fois 2 heures par semaines), et des *classes d'exercice* (1 fois 3 heures par semaine). Seul le cours magistral est dispensé par le professeur responsable du cours, les sessions d'exercices étant généralement conduites par des étudiants plus avancés dans leurs études (les « instructeurs »).

3.2 L'ingénierie

Nous avons identifié et analysé un complexe de facteurs qui, avec plus ou moins d'évidence, semblent contribuer au dysfonctionnement de ce cours, dont voici des traits principaux :

(1) Tout d'abord, *la matière enseignée* est réellement « difficile » dans le sens qu'elle représente un saut sur plusieurs niveaux : celui d'abstraction (antérieurement les étudiants ont étudié l'analyse 'concrète' des fonctions et des espaces vectoriels à dimension finie), celui de niveau technique (surtout en matière de raisonnement), celui de l'indépendance du travail requis par l'étudiant. Ces « sauts » sont peut-être inévitables en général si on veut continuer avec l'analyse moderne.

(2) Les étudiants, en général, ont du mal à se former une compréhension plus que locale de la matière, et ont souvent recours à des stratégies peu pertinentes (comme la mémorisation des preuves en guise de préparation à l'examen oral). Aussi, ils n'arrivent pas, pour la plupart, à percevoir un sens plus global de la matière où des méthodes pour la traiter, où à les maîtriser de manière à pouvoir en faire usage au-delà des tâches simples et connues.

(3) Une partie des dysfonctionnements peuvent être localisés dans l'enseignement même : le cours magistral tend à vouloir « couvrir » la matière abstraite (tous les théorèmes et preuves sont passés en revue sur le tableau, souvent dans une forme très proche du texte qu'il fallait lire) ; les sessions d'exercices se limitent souvent à des présentations, par l'instructeur, de solutions que les étudiants n'ont même pas tenté de faire par eux-mêmes. Il y a donc une passivité tolérée et renforcée chez les étudiants par des contrats didactiques dégénérés.

(4) Finalement, les étudiants ont des tendances peu reconnues à se focaliser sur la maîtrise purement formelle de procédures et de techniques liées aux formes de représentation, de façon à ne pas voir les relations entre les représentations sous formes différentes d'un même objet (cf. Duval, 1995, 67). Par conséquence ils sont souvent incapables, par exemple, de suivre même les pas simples d'un raisonnement (au-delà de calculs), et encore plus de les produire.

L'identification et l'analyse de telles difficultés nous ont amené à introduire plusieurs changements dans la réalisation du cours, en partant d'une description toute neuve de ses *objectifs* (consistante avec la liste de thèmes mathématiques mentionnées en haut, mais – dans le sens de la fig. 2 – « orthogonale » à ces thèmes) : une explicitation des compétences *générales* visées ainsi qu'une description des OCS par rapport à une énumération beaucoup plus fine des éléments de matière. Chaque OCS est en plus illustré par des exemples d'exercices où la compétence spécifique peut se manifester de façon « typique ».

Ensuite, comme l'évaluation doit correspondre aux objectifs, et comme l'évaluation est toujours déterminante pour une grande partie de comportements dans l'enseignement même, nous avons annoncé des changement de *contenu* (mais non de forme) pour l'examen : l'épreuve écrite serait lié de façon très visible aux OCS, dans le sens que les questions posées visent clairement un seul OCS (ou, moins souvent, deux ou trois). Par contre, l'épreuve orale, au lieu de viser essentiellement la capacité de l'étudiant à reproduire une partie du texte (comme quelque théorème majeur et sa démonstration), est consacrée à la présentation de *projets thématiques* élaborés, par des groupes d'étudiants, dans le courant du cours. Ces projets, de nature théorique mais avec des questions de difficulté variée (y compris par le degré où elles sont ouvertes), visent à effectuer la *coordination* de compétences spécifiques autour d'un thème d'analyse voisin (et dépendant) de la théorie présentée dans le texte des manuels, mais non traité explicitement au moins pour les problématiques posées. La consigne pour chaque projet était accompagnée d'une explication de sa pertinence pour certains OCS ainsi que de ses buts par rapport aux compétences générales du cours. Nous ne pouvons, ici, entrer dans tous les détails de ce format pour l'évaluation, mais le point à retenir est qu'il remplace, pour l'évaluation de la maîtrise de la théorie, la présentation de raisonnements fournis dans un manuel par des raisonnements élaborés par les étudiants eux-mêmes.

L'enseignement, également, a été réorienté de plusieurs façons en vue des objectifs précisés, pour faciliter le travail des étudiants en vue de les atteindre et, par conséquence, réussir à l'examen. Le cours magistral a été focalisé sur ce que devait faire les étudiants, par exemple en exemplifiant une lecture détaillée d'un extrait du manuel, en explicitant les grandes lignes du développement théorique, et en fournissant des liens entre la théorie et les exercices et les projets thématiques à travailler par les étudiants. Les consignes pour les sessions d'exercices ont été complétées par une indication des OCS correspondants aux exercices posées, quoique dans des termes très concrets, pour faire face à une question autrement souvent oubliée : quel est le sens – l'apport visé – de travailler ce problème ? Les instructeurs ont été instruits à focaliser l'attention des étudiants à l'objectif des tâches individuelles, et à discuter plutôt les difficultés des tâches que présenter simplement leurs solutions. En outre, une partie du temps de ces sessions a été accordée au travail sur les projets thématiques, dans les groupes formés par les étudiants et sous la guidance de l'instructeur. Ainsi, dans ce contexte aussi, l'organisation de l'enseignement a été déterminée par un souci de promouvoir et de faciliter le travail autonome des étudiants, plutôt que de nourrir l'illusion (particulièrement inappropriée dans un cours universitaire !) que l'enseignement le rende facile ou même superflu.

3.3 Résultats et perspectives

Le projet s'est étendu sur deux années consécutives (automnes de 2002, 2003), avec des modifications surtout pour la forme et le contenu des projets thématiques pour la deuxième année. Voici des résultats principaux (tirés de Grønbæk et al., 2003) :

- Les étudiants ont beaucoup apprécié le format des projets thématiques pour l'examen, le trouvant plus juste et satisfaisant ; en même temps, surtout la première année, ils ont trouvé la charge de travail très (souvent trop) lourd. Il apparaît que ce sont les étudiants plutôt forts qui sont les plus enthousiastes pour ce format.
- Contrairement aux suppositions de certains, il n'y a pas eu de problèmes de 'travaux de copie' dans le contexte des projets ; au contraire, une grande variété d'approches et de niveaux d'ambition s'est montrée dans les prestations écrites comme orales offertes par les étudiants à l'examen.

- Les instructeurs n'ont pas toujours suivi (ou compris) la nature des consignes pour les sessions d'exercices, qui ont donc, surtout la première année, préservé certains des traits problématiques décrit plus haut.
- L'examen de la première année s'est déroulé à la satisfaction des examinateurs externes (certains ont même été très enthousiastes du nouveau format, y voyant une solution à des problèmes classiques chez nous). Les résultats ont été meilleurs pour la moyenne des notes obtenues, tandis que le taux d'étudiants ayant passé n'a pas significativement changé. Pour la deuxième année les résultats sont nettement meilleurs sur ce dernier point, avec les notes restant sur le niveau amélioré.
- Il y a une très forte augmentation de contact entre les enseignants et les étudiants : plus de questions posées, plus d'usage des offres de consultation, notamment en relation avec les projets thématiques.
- La description du cours a été utilisée activement seulement par une partie des étudiants. Il paraît décisif pour son rôle dans le cours qu'elle soit communiquée dans ses contextes locaux. Certains (étudiants comme instructeurs) ont du mal à utiliser la description en soi.

Une conclusion plus globale, peut être attendue mais à retenir quand même, c'est que la description en soi ne fait pas de miracles ; il faut qu'elle soit accompagnée de formes de travail est d'évaluation correspondantes. Aussi, la focalisation sur les objectifs de compétences – et donc sur le travail autonome de l'étudiant – doit se faire avec un souci de poser des buts réalistes et raisonnables du point de vue de l'étudiant (ce qui est évident mais plus facilement dissimulé quand les objectifs sont formulé par rapport au seul contenu à « couvrir »).

Pour l'enseignement supérieur des mathématiques, c'est peut-être surtout le rapport des étudiants avec les parties les plus théoriques de la matière qui est transformé par notre approche. Nous trouvons important que le travail visant à développer les compétences spécifiques se fasse aussi bien (et initialement) dans des contextes assez fermés, comme dans des contextes plus libres (pour les intégrer, et pour développer l'autonomie du sujet dans ses rapports avec la matière). Il faut noter que le contenu officiel du cours, ainsi que la plupart de ses formats, n'ont pas été changé. La plupart des modifications ont simplement contribué à améliorer qualitativement le travail des étudiants dans un cadre ordinaire. Cela résulte en partie de la focalisation de l'attention des agents sur des objectifs globaux du cours (comme potentiellement, du programme) par rapport à ce travail – notamment ceux qui concernent l'expression mathématique par les étudiants, et leur choix autonome de méthodes et de niveau d'ambition – qui sont autrement moins explicites voire totalement ignorés. Le manque de familiarité des étudiants comme de certains des instructeurs avec le discours accompagnant devrait se réduire par une généralisation à tout le programme comme à ses pratiques.

Remerciement. Je tiens à remercier Viviane Durand-Guerrier, présidente de l'ARDM, de m'avoir aidé pour la correction linguistique de ce texte. Il va sans dire l'auteur reste responsable de toute imperfection de forme et de contenu.

Références

Anderson, John R. (1996) Situated Learning and Education. *Educational Researcher* **25** (4), 5-11.

Brousseau, G. (1986) Fondations et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7** (2), 33-115.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12** (1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19** (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002) Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In: Dorier, J. L. et al. (éds), *Actes de la 11e école de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chomsky, N. (1965) *Aspects of the theory of syntax*. Cambridge: MIT Press.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (2002). Quel ou quels point(s) de vue pour analyser la connaissance scientifique dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage? (Manuscript)

Grønbæk, N. & Winsløw, C. (2003a) Developing and assessing specific competencies in a first course on analysis. Manuscrit en lecture.

Grønbæk, N. & Winsløw, C. (2003b) *Kompetencebeskrivelser i universitetets virkelighed. Didaktips* **1**, Centre de Didactique des Sciences, Université de Copenhague.

Niss, M. (1994) Mathematics in society. In R. Biehler et al., *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*, 367-378. Dordrecht: Kluwer.

Niss, M. (1999) Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse* **9**, 21-29.

Niss, M. (2001) University mathematics based on problem-oriented student projects: 25 years of experience with the Roskilde Model. In: D. Holton (éd) *Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study*, 153-165. Dordrecht: Kluwer.

Niss, M & Jensen, T. (2002)(éds) *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Copenhague: Undervisningsministeriet.

Niss, M. (2003) Mathematical competences and the learning of mathematics: the Danish KOM-project. Trouvé le 31 Déc. 2003 à l'adresse http://www7.nationalacademies.org/mseb/ Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

OCDE (1999) *Measuring student knowledge and skills – a new framework for assessment.* Paris: OCDE, Programme for International Student Assessment (PISA).

Rychen, D. & Salganik, L. (2003) (éds) *Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society*. Hogrefe & Huber.

Valero, P. & Skovsmose, O. (2002) (éds) *Mathematics education and society. Proceedings of the third international Mathematics and Society conference.* Copenhagen: The Danish U. of Education.

Weng, P. et Winsløw, C. (2004) The Nordic countries in international comparison. In: *Mathematics education in the Nordic countries*, livret pour la présentation Nordique à ICME 10 (Presses de l'U. de Trondhjem, à paraître).

Winsløw, C. (2001) Two dimensions in the conception of mathematics in tertiary education. *Proceedings of third Nordic Conf. on Math. Education*, Kristiansstad, Suède, 2001.

Winsløw, C. (2004) Hvad skal vi med matematikdidaktikken? In K. Schnack (éd.), *Didaktik på kryds og tværs*, 325-344. Copenhague: Presses Univ. Danoise de l'Éducation.

La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques : *aspects logiques, perspectives didactiques et aperçus linguistiques*

Viviane DURAND-GUERRIER,

IUFM de Lyon & LIRDHIST Université Lyon 1

I. Introduction

Dans de nombreux travaux, nous avons mis en lumière la pertinence de la logique des prédicats comme outil d'analyse des raisonnements mathématiques dans une perspective didactique. En particulier, nous avons montré l'intérêt des notions de phrase ouverte, de satisfaction d'une phrase ouverte par un objet et d'énoncé contingent pour un sujet donné dans une situation donnée. La lecture des textes fondateurs de Tarski sur la *théorie sémantique de la vérité* et sur la notion de *conséquence logique* puis sur la *méthodologie des sciences déductive* devenue *Théorie des modèles* nous a convaincu de l'intérêt de relire nos propres travaux à la lumière de cette référence épistémologique. Tout naturellement, ce travail nous a conduit à nous intéresser aux travaux développés en sémantique formelle, dans la filiation des travaux de Montague visant à appliquer aux langues naturelles le projet de Tarski. L'objet de cette présentation est de donner quelques clés de ce travail, sans entrer dans le détail des exemples illustrant notre propos. Nous renverrons pour cela le lecteur aux publications où ces exemples sont traités.

Dans la première partie de ce texte, nous nous proposons de présenter les éléments de théorie des modèles qui nous servent d'appui dans notre travail sur le raisonnement mathématique dans une perspective didactique en essayant de mettre en lumières les résonances entre le projet de Tarski et nos préoccupations de recherche. Les deux autres parties seront consacrées à une réflexion sur les outils logiques et linguistiques susceptibles de contribuer à approfondir la question de l'interprétation des énoncés dans la classe de mathématiques.

II. Théorie élémentaire des modèles (*aspects logiques)*

Préliminaire : Pour présenter les éléments de cette théorie, nous nous appuyons sur la version française de trois articles de Tarski publiés en 1972 dans un recueil en deux volumes intitulé : *Logique, sémantique, métamathématique*, sous la direction de Gilles Gaston Granger, qui souligne le caractère fondamentalement novateur des orientations apportées par l'œuvre de Tarski en ce qui concerne la sémantique et la métamathématique. Le premier, « Le concept de vérité dans les langages formalisés » (Tarski 1936a), est l'article fondateur de la théorie ; c'est le chapitre VIII ; le deuxième (Tarski 1944) est l'article intitulé « La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique » ; il s'agit du chapitre XX1. Moins technique que le premier, il revient sur les intentions du projet, énonce les résultats établis et répond à un certain nombre d'objections. Le troisième (Tarski 1936b), est l'article intitulé « Sur le concept de conséquence logique » ; il s'agit du chapitre XVI. Les pages indiquées sont celles de Tarski 1972 pour lesquelles nous précisons VIII, XX1 ou XVI.

II.1 Le problème de la définition de la vérité

Dès les premiers lignes de l'article de 1936a, Tarski énonce son projet en ces termes :

> « Le présent travail est presque exclusivement consacré à un seul problème, *au problème de la définition de la vérité*. Il s'agit en effet – compte tenu de tel ou tel langage – de construire une définition de l'expression « proposition vraie », définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte. (...) dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « *classique* » de la vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle « vraiment » signifie la même chose que « conformément à la réalité ». (par opposition à la conception « *utilitariste* » d'après laquelle « vrai » signifie utile sous tel ou tel rapport).» (VIII, pp.159-160).

Mathématicien et logicien, Tarski s'attaque ici à un problème philosophique difficile (il défendra à plusieurs reprises l'intérêt de son travail pour la philosophie) ainsi qu'il le dit lui-même :

> « La solution de ce problème, l'un des problèmes classiques de la philosophie, rencontre des difficultés particulières : bien que la signification courante [« donnée au départ »] de l'expression en question paraisse nette et transparente, toutes les tentatives pour la préciser se sont soldées jusqu'ici par un échec et maintes recherches, où cette expression figure fondée sur des prémisses apparemment intuitives [évidentes], ont abouti à des paradoxes ou antinomies (qu'on réussissait du reste à résoudre de manière plus ou moins satisfaisante). » (VIII, p.159).

Tarski s'inscrit ainsi dans l'héritage aristotélicien comme il le dira explicitement dans l'article de 1944 dans lequel il revient sur ce qu'il faut entendre par la notion de proposition vraie dans son travail :

> « La vérité d'une proposition consiste en son accord (ou sa correspondance) avec la réalité, ou encore « une proposition est vraie si elle désigne un état de choses existant ». (XXI, pp.270-271).

Cette définition fait également écho à Wittgenstein (1921, 1961) qui écrit :

> "La proposition montre ce qu'il en est, *quand* elle est vraie. Et elle *dit* qu'il en est ainsi"(4.022).
> "La proposition est la description d'un état de choses" (4.023).

Dès le début, Tarski considère que ce qu'il propose ne s'applique pas au langage quotidien

> «(...) la possibilité même d'employer avec cohérence et en accord tant avec les principes de la logique qu'avec l'esprit du langage quotidien l'expression « proposition vraie », et partant la possibilité de construire une définition correcte de cette expression semble fortement mise en question. » (VIII, p.171).

Ceci est une conséquence de la nécessité, dans l'élaboration d'une théorie sémantique de la vérité, de disposer d'un langage objet et d'un métalangage avec lequel peut se construire la définition de la vérité sur ce langage objet. En effet, selon Tarski, les langages sémantiquement clos (i.e. qui contiennent leurs expressions, le nom de leurs expressions ainsi que les termes sémantiques comme « vrai ») sont nécessairement inconsistants (contiennent des propositions contradictoires du type *« s » est vraie si et seulement si « s » n'est pas vraie*, ceci en lien avec l'antinomie du menteur) (XX1, p.277).
Tarski va donc s'intéresser exclusivement aux langages formalisés pour lesquels il élabore une construction récursive de la vérité s'appuyant sur la notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle par un élément de l'univers du discours.

> « Aussi ne voit-on pas de méthode permettant, dans ce contexte, de définir le concept examiné directement par la voie récursive. Il se révèle, par contre, possible d'introduire un concept de nature plus générale, concept applicable à des fonctions propositionnelles quelconques et qui se laisse définir récursivement. Appliqué aux propositions, il conduit indirectement au concept de vérité ; c'est le concept de satisfaction d'une fonction propositionnelle par tels et tels objets (...) » (VIII, p.193).

Ainsi on dira que :
Pour tout a, a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc.
D'où il vient la formule célèbre :
La proposition "La neige est blanche" est vraie si et seulement si la neige est blanche.
où il faut entendre l'expression entre guillemets comme une entité linguistique tandis que la deuxième occurrence est une description d'un état du monde. Seules les entités linguistiques portent le vrai et le faux. Les jugements de vérité et de fausseté sur les entités linguistiques se font dans le métalangage. Avec ce point de vue, on peut dire de manière non paradoxale :
« Cette phrase est fausse». En effet, d'après ce qui précède,
la proposition « Cette phrase est fausse» est vraie si et seulement si cette phrase est fausse.
où le prédicat vrai ne s'applique pas à la phrase dont il est question, mais à l'entité linguistique écrite entre guillemets.
Une conséquence immédiate et essentielle de cette définition, c'est que :

> « En fait, la définition sémantique de la vérité n'implique rien concernant les conditions sous lesquelles une proposition telle que (1) :
> (1) *La neige est blanche*
> peut-être affirmée. Elle implique seulement que lorsque nous admettons ou rejetons cette proposition, nous devons être prêts à affirmer ou à rejeter la proposition corrélative (2) :
> (2) *La proposition « la neige est blanche » est vraie.*

Aussi pouvons-nous accepter la conception sémantique de la vérité sans abandonner nos positions épistémologiques quelles qu'elles soient. Nous pouvons demeurer naïfs, réalistes critiques ou idéalistes, empiristes ou métaphysiciens ; comme nous l'étions avant. La conception sémantique de la vérité est entièrement neutre par rapport à toutes ces attitudes. » (XX1, p.295).

Il faut noter que dans une perspective didactique, le fait d'avoir une conception de la vérité neutre sur le plan épistémologique, sans pour autant ouvrir sur un relativisme incompatible avec la construction de connaissances scientifiques est un atout considérable qui, selon nous, ne devrait pas être négligé car la variété des arrière-plans épistémologiques, tant chez les chercheurs que chez les enseignants, tend à brouiller les positions des uns et des autres.

II.2 Deux notions essentielles en théorie des modèles

Les deux notions centrales dans la construction élaborée par Tarski sont celles de *modèle d'une formule* et celle de *conséquence logique* qui toutes deux réfèrent à la notion d'interprétation des formules d'un langage formalisé dans une structure donnée.

II.2.1 Modèle d'une formule du langage formalisé

On appelle structure interprétative d'un langage donné, un domaine d'objets, et autant de propriétés (*respectivement* de relations) que de prédicats à une place (*respectivement* plusieurs places). Lorsque une formule close (sans variable libre) Ψ est vraie dans une structure interprétative donnée, on dit que cette structure est un modèle de Ψ.
Soit, par exemple, Ψ la formule « $\forall x\ (x^2 + 1 \neq 0)$ ». L'ensemble R des nombres réels, muni des opérations habituelles, est un modèle de Ψ, tandis que l'ensemble C des nombres complexes, muni également des opérations habituelles, n'est pas un modèle de Ψ.
De cette définition, va découler la notion de validité universelle d'une formule d'un langage formalisé donné. Une formule Ψ est universellement valide si toute structure interprétative de Ψ est un modèle de Ψ, ou encore si Ψ est vraie pour toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide. Cette définition prolonge la notion de tautologie introduite par Wittgenstein (1921) : une tautologie est une formule du calcul des propositions vraie pour toute distribution de valeurs de vérité sur les propositions élémentaires qui la compose, et par conséquent vrai pour toute interprétation dans tout univers non vide. Cependant, on ne dispose pas ici d'une procédure de décision aussi confortable que les tables de vérité.

II.2.2 Le concept de conséquence logique dans un langage formalisé donné

On dira qu'une formule Φ est conséquence logique d'une formule Ψ si et seulement si le conditionnel dont Φ est l'antécédent et Ψ le conséquent est universellement valide. Autrement dit, une formule Φ est conséquence logique d'une formule Ψ si tout modèle de Φ est un modèle de Ψ.
En accord avec Wittgenstein (1921) et Quine (1950), on peut dire que la notion de conséquence logique se traduit structurellement par le fait que l'implication entre antécédent et conséquent est une tautologie, ce que la structure logique montre, comme, par exemple, dans la formule : "$P(x) \wedge \forall t(P(t) \Rightarrow Q(t)) \Rightarrow Q(x)$".
Cependant, dès que les formules se compliquent avec en particulier l'augmentation du nombre de quantificateurs, il se peut que l'on ne soit plus capable de voir cette propriété structurelle. Pour établir qu'un conditionnel donné est universellement valide ou non, on dispose de

procédures syntaxiques et sémantiques qu'il convient de marier selon les cas; les procédures sémantiques étant particulièrement adaptées lorsque l'on veut prouver qu'une formule donnée n'est pas conséquence logique d'une autre formule, comme le savait déjà Aristote.
Dans l'activité mathématique, une question que l'on est amené à se poser, particulièrement dans les activités de modélisation, est celle de savoir si un énoncé donné suit logiquement des axiomes d'une théorie donnée. C'est à cette question que la théorie des modèles, anciennement appelé "méthode déductive" se propose de répondre.

II.3 La méthode déductive

Dans son ouvrage *Introduction à la Logique* (Tarski, 1936, 1960 pour la traduction française), Tarski présente *la méthode déductive* qui deviendra ensuite *la théorie des modèles*. Il écrit dans la préface de l'édition polonaise :

> «J'ai voulu montrer que les concepts logiques pénètrent l'ensemble des mathématiques, qu'ils admettent tous les concepts mathématiques comme cas particuliers et que les lois logiques sont - consciemment ou pas - toujours appliquées dans les raisonnements mathématiques. Enfin, j'ai essayé de présenter les principes les plus importants dans la construction des théories mathématiques, principes qui constituent la matière d'une autre discipline, la méthodologie des sciences mathématiques, et de montrer comment on utilise ces principes dans la pratique. » (Tarski, 1960, p.IX).

Ce que l'on trouve en effet dans cet ouvrage, c'est une véritable initiation à cette méthode des sciences déductives, présentée à partir de l'exemple de la congruence des segments. La méthode consiste à associer à une théorie déductive donnée (dont les constituants fondamentaux sont les termes primitifs, les termes définis, les axiomes et les théorèmes) un système axiomatique formel, sans aucune référence à des objets, de sorte que la théorie déductive dont on est partie soit un modèle de ce système formel (i.e. chacune des formules de ce système axiomatique est interprétée par un énoncé vrai dans cette théorie). Pour obtenir ce système axiomatique, on remplace dans les axiomes les termes par des variables, les propriétés et les relations par des lettres de prédicats. On peut alors considérer des réalisations ou modèles, c'est-à-dire des domaines d'objets dans lesquels les interprétations des axiomes sont vraies. Un premier modèle est naturellement constitué par les objets dénotés par les termes primitifs de la première théorie. Cependant, une fois le système axiomatique construit, le modèle de la théorie initiale ne joue aucun rôle particulier ; ce n'est qu'un modèle parmi d'autres. On obtient alors le théorème de la déduction :

> « Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre » (Tarski, 1960, p.112).

Une conséquence immédiate de ce théorème est que : « Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (ibid. p.112). Le théorème de la déduction est le fondement de toutes les méthodes de preuve par construction d'un modèle appelées aussi preuves par interprétation : pour prouver qu'un énoncé donné de la théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle

du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la fonction propositionnelle associée à cet énoncé. Notons que si l'on excepte les cas où la négation de l'énoncé considéré est conséquence logique des axiomes, il existe aussi des modèles dans lesquels cet énoncé est vrai.
Tarski remarque que dans son travail, il ne s'intéresse pas aux systèmes axiomatiques qui n'auraient aucun modèle, ce qui n'est jamais le cas si le système axiomatique provient d'une théorie déductive « concrète ». On peut aussi cependant proposer d'abord un système axiomatique, en d'autres termes une théorie axiomatique, et chercher à savoir si elle admet ou non des modèles. Une telle théorie est *consistante* si elle admet au moins un modèle, autrement dit, si « de deux énoncés contradictoires, l'un au moins ne peut pas être prouvé » ; elle est *complète* si « de deux énoncés contradictoires, l'un au moins peut être prouvé ». Deux modèles quelconques d'une théorie consistante et complète sont élémentairement équivalents (c'est-à-dire vérifient les mêmes formules closes du calcul des prédicats du premier ordre). Les preuves par interprétation prennent tout leur sens dans des théories consistantes mais incomplètes. Tarski n'est pas le seul à s'être intéressé à cette question des différents modèles pour une théorie axiomatique donné, que l'on pense seulement à Hilbert. Selon Sinaceur (1991a), l'originalité du travail de Tarski réside dans l'importance accordée aux procédures sémantiques :

> « Ainsi contrairement à la *Beweistheorie* de Hilbert, la théorie des modèles donne une grande importance à l'interprétation sémantique des ensembles d'énoncés, c'est-à-dire aux structures mathématiques où les énoncés formels reçoivent un sens concret. L'étude structurale se fait au niveau des modèles autant qu'à celui des axiomes. Par là, elle noue des liens étroits avec le travail mathématique ordinaire et reprend à son compte, en lui donnant une réponse exacte, l'une des questions épistémologiques de Hilbert : celle relative aux rapports en mathématiques, de la forme et du contenu. » (Sinaceur, 1991a, p.313)

Cette citation met en évidence le fait que l'analyse logique assume ainsi un rôle épistémologique ; ce que l'auteur explicite par ailleurs dans un texte en hommage à Desanti :

> « La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.(...) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique ; (...) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir. » (Sinaceur 1991b)

II.4 Conséquences pour la didactique

Une telle conclusion ne saurait laisser indifférent le didacticien des mathématiques, puisque nombre de ses objets d'étude sont confrontés à cette problématique. Il est tout à fait clair que les objets et théorie mathématiques visés par Hourya Sinaceur sont au-delà des théories mathématiques avec lesquelles travaillent, en général, les didacticiens des mathématiques, Cependant, notre propre travail témoigne de la pertinence de cette analyse logique pour l'analyse didactique du raisonnement mathématique. Nous avons montré (en particulier dans Durand-Guerrier, 2005a, à paraître) comment cette méthode pouvait être utilisée pour repenser les relations entre vérité, nécessité et certitude à propos d'une récréation mathématique relevée dans le kangourou des mathématiques 1994. D'autres exemples, comme la situation *du Labyrinthe,* analysée dans Durand-Guerrier (1995, 1999), ressortent de ce type d'analyse, et d'une manière générale, toutes les situations pour lesquelles se pose la question de savoir si un énoncé donné est conséquence logique d'une théorie donnée, autrement dit s'il est vrai (ou faux) accidentellement, ou nécessairement. Plus généralement, ce type d'analyse permet de traiter les situations dans lesquelles le mode de raisonnement utilisé laisse planer un doute sur la validité du raisonnement. En effet, une fois que l'on s'est débarrassé des références aux objets, on peut examiner dans le système formel si l'on peut prouver qu'il y a ou non conséquence logique, soit par des méthode de preuve syntaxique[1], soit par construction d'un modèle, que l'on peut en général choisir plus simple et même souvent fini, soit en mariant les deux procédures comme dans les systèmes de déduction naturelle[2].

III. L'interprétation des énoncés mathématiques (1)

Il est habituel de considérer que les énoncés mathématiques sont atemporels, que leur vérité est indépendante des conditions d'énonciation et que, par suite, il importe peu de savoir dans quel contexte ils sont émis. Nous avons déjà vu avec la théorie élémentaire des modèles que cette affirmation doit être relativisée dans la mesure où l'interprétation d'un même énoncé d'une théorie axiomatique peut être vraie dans certains modèles, et fausse dans d'autres, ce que la découverte des géométries non euclidiennes avait mis en évidence. Ce que montrent, plus modestement, les quelques exemples que nous avons étudiés depuis plusieurs années, c'est que, même pour des énoncés très élémentaires, dans la classe de mathématiques, des divergences d'interprétation peuvent apparaître, qui ne sont pas toujours réductibles à l'*ignorance* des élèves. Nous avons alors indiqué à plusieurs reprises[3] que certaines des réponses proposées par les enseignants ne pouvaient être comprises que comme relevant de considérations *pragmatiques*. Nous nous proposons dans ce qui suit de préciser ce que nous entendons par ce terme de *pragmatique*, en relation avec la *syntaxe* et la *sémantique*, puis d'illustrer brièvement l'usage que nous en faisons à partir de deux exemples. Le premier sera pris en dehors du champ des mathématiques ; le deuxième est une relecture à travers cette grille d'une situation mathématique présentée dans Arsac et al. (1992) et déjà analysée dans notre thèse. Nous l'avons choisie pour son caractère tout à fait exemplaire pour illustrer l'usage didactique de cette catégorisation.

III.1 Syntaxe, sémantique et pragmatique

On pourrait s'étonner de voir apparaître, dans un travail consacré à l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique, une référence à la pragmatique. Cependant, bien que, seules, la syntaxe et la sémantique appartiennent stricto sensu à la logique, nous reconnaissons avec Gardies (1994) que :

> « l'analyse de la connaissance ne s'épuise pas dans les considérations syntaxiques ou sémantiques où se confine essentiellement la logique, mais

[1] Un exemple traité dans Arsac & Durand-Guerrier 2000 illustre ce point de vue, même si il n'y a pas de référence à la théorie des modèles : il s'agit de l'analyse d'une preuve de l'existence et de l'unicité du barycentre à partir de la fonction de Leibniz.

[2] Pour un exemple de tels systèmes, voir Durand-Guerrier & Arsac 2003.

[3] En particulier pour les deux exemples du *losange* et du *labyrinthe*

accordons à Frege que la porte ne se trouve pas pour autant ouverte à des conditions proprement psychologiques mais plutôt à ce que nous proposerons d'appeler une pragmatique » (opus cité. p.186)

Il ajoute plus loin qu'il se réfère à Morris (1938), qu'il est conscient que le terme de pragmatique est utilisé dans un sens différent par certains auteurs, et qu'il choisit de continuer à désigner par sémantique toutes les extensions possibles de référence au contexte pour :

> «(...) laisser le terme de pragmatique disponible pour désigner par exemple la manière ou les manières mêmes dont la vérité peut accéder à la conscience du sujet connaissant (..) » (ibid. p.188).

Cette difficulté à délimiter le sens du terme *pragmatique* est indéniable. Il nous faut par conséquent essayer d'indiquer le plus précisément possible ce que nous entendons par ce terme, que nous utilisons en un sens beaucoup plus restreint que, par exemple, Reboul & Moeschler (1998), et toujours dans son articulation avec la *syntaxe* et la *sémantique*. Le point de vue que nous adoptons ici remonte à Morris (1938, 1946) pour qui la *sémiotique* ou *science du langage* se divise en *syntaxe, sémantique* et *pragmatique* (Da Costa, 1997, p.40). Eco (1980) présente cette distinction, en indiquant « qu'elle a été largement reçue dans le monde scientifique » et en donne les définitions suivantes :

> « *sémantique* : le signe est ici conçu dans sa relation à ce qu'il signifie ;
> *syntaxique* : le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaisons ; (...)
> *pragmatique* : le signe est ici perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font, etc... » (p.41)

Jacques (1990), quant à lui, écrit que

> « (...) la dimension pragmatique concerne la production du sens dans les systèmes de signes. Elle ne regarde la rationalité que pour autant que celle-ci dépend du discours en contexte. Elle déborde donc ses racines pragmatistes. » (p.856)

Da Costa (1997) reprend cette distinction entre *pragmatique* et *pragmatiste* : « (...) nous emploierons l'adjectif « pragmatique » seulement selon sa signification sémiotique. Le peu de fois où nous nous référerons à la doctrine de W. James et de ses continuateurs, nous utiliserons l'adjectif « pragmatiste[4] ».
C'est en ce sens que nous utiliserons le terme *pragmatique*, et nous nous attacherons précisément à montrer la pertinence didactique de ce point de vue pour aborder la question de la rationalité des élèves. On ne s'étonnera pas que nous choisissions comme définitions pour les dimensions *syntaxique* et *sémantique* celles issues de la théorie des modèles de Tarski que nous avons présentée dans la partie II, suivant en cela Jacques (1990) qui écrit que :

> « Morris (1938) voyait dans la pragmatique la science universelle de l'usage. Son intuition allait être directement corroborée par l'école polonaise qui introduisit la construction des métalangages. Ce devrait être,

[4] Da Costa 1997 p.43n

> après la syntaxe et la sémantique la troisième forme d'étude métalogique. Elle étudie les relations entre les systèmes formels et leurs utilisateurs. De quelque langage qu'il s'agisse (formel aussi bien) toute expression possède telle propriété syntaxique (est bien ou mal formée) ou sémantique (est vraie ou fausse) uniquement pour les locuteurs virtuels ou actuels de ce langage.»(p.857)

Cette longue citation montre que l'auteur inscrit clairement la pragmatique dans une filiation logique, et ceci quoi que naturellement, la pragmatique ne fasse pas partie de la logique. Le point de vue adopté est ce que l'auteur appelle le *contexte référentiel* « où les signes prennent sens par rapport à leurs référents : le monde des objets et des états de choses. » et où « l'on passe de la sémantique à la pragmatique dès lors que les agents concrets de la communication et leur localisation spatio-temporelle sont tenus pour des indices du contexte existentiel » (p.858). De la même manière, Da Costa (1997) fait référence à Tarski et à Carnap pour définir la dimension sémantique d'un langage *L*, composé de symboles écrits, dans laquelle « on s'intéresse aux interrelations existant entre les langages et les objets et les situations auxquels ils se réfèrent. » ; il ajoute que « l'investigation sémantique de *L* présuppose son étude syntaxique » (p.40) ; puis se réclame de Morris pour affirmer la nécessité de la prise en compte de la dimension pragmatique, « qui prend en compte l'usage des signes dans la totalité de leur usage » (p.40). Da Costa distingue entre *sémiotique pure*, qui a pour finalité l'étude des langages idéaux, construits axiomatiquement, et *sémiotique appliquée* dans laquelle on considère les langages ordinaires, et il ajoute que contrairement à ce qu'« il pourrait sembler à un lecteur non averti », il pense que « les trois niveaux – syntaxique, sémantique et pragmatique – sont essentiels pour la compréhension parfaite de l'état actuel des disciplines logico-mathématiques »(p.42).

Dans notre travail, nous nous employons à défendre la thèse suivante :
Dans l'analyse des raisonnements, la prise en compte de la dimension sémantique dans l'analyse des énoncés fait émerger des interprétations possibles qui doivent être examinées sous l'angle pragmatique, en référence au contexte, à la situation d'énonciation et aux connaissances du sujet.
Dans une perspective didactique, ceci permet d'une part d'enrichir l'analyse a priori des situations proposées, d'autre part d'interpréter de manière plus fine les productions langagières des élèves et de prendre en compte de manière rigoureuse leurs connaissances.

III.2 Deux exemples illustrant cette thèse

Les deux exemples que nous présentons brièvement ici sont développés de manière plus substantielle dans Durand-Guerrier (2005b, à paraître). Le premier exemple, emprunté à Agatha Christie, permet d'illustrer cette classification tandis que le second montre quel usage didactique on peut en faire.

III.2.1 La résolution géniale d'une contradiction

On trouve dans le roman d'Agatha Christie, traduit en français sous le titre *Meurtre au champagne* une illustration particulièrement claire de la distinction et de l'articulation entre les trois catégories syntaxe, sémantique, et pragmatique.
A ce moment du roman, un des personnages, Georges, a été assassiné. Tony, qui était présent le jour du meurtre expose à Iris, elle aussi présente le jour du meurtre, sa solution au problème insoluble à priori qui s'est posé suite à l'assassinat de Georges, solution qu'il qualifie de

géniale. En effet, il apparaît que *Georges n'a pas pu être empoisonné*, et pourtant *Georges a été empoisonné.* On a donc un énoncé de la forme « *p* et il est impossible que *p* », d'où dérive l'énoncé : « $p \wedge \neg p$ ». La conjonction des deux phrases est une phrase fausse en raison de sa structure, indépendamment de la signification de chacune des phrases ; il s'agit d'un argument de nature *syntaxique.* En considérant l'implicite suivant lequel on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de Georges sans l'avoir touché, un autre énoncé contradictoire est relevé par Tony : *Personne n'a touché à la coupe de Georges et Quelqu'un a mis du poison dans la coupe de Georges.* Le paradoxe que Tony doit résoudre provient du fait que cet énoncé contradictoire, qui a priori ne décrit aucun état de choses (Wittgenstein, 1921, 1961, 4.462), décrit bel et bien un état du monde (au sein de la fiction).
Tony propose alors de se placer sur le niveau ***sémantique*** en considérant les différents degrés d'appartenance selon les objets considérés : *l'oreille de Georges / la montre de Georges / la coupe de Georges.* Bien que les structures soient analogues, la « force » de relation d'appartenance dépend des objets dont on parle. La reconnaissance de la faiblesse de la relation concernant la coupe laisse entrevoir une possibilité de résolution : on pourrait imaginer qu'il y ait eu un changement dans les coupes. Mais, à ce stade, rien ne permet de l'affirmer.
La fin de l'argumentation concerne le niveau *pragmatique* : ce qui s'est réellement passé ce jour-là, dans cette situation et dans ce lieu, et qui permet que ce qui était possible (niveau sémantique) s'est effectivement réalisé : *Georges a bu dans une coupe qui n'était pas* la sienne.

III.2.2 Comment lever un soupçon d'incohérence

La question de savoir si les élèves sont illogiques (rationnels) ou non, même si elle ne se pose en général pas de manière si brutale, est sous-jacente à de nombreuses réflexions sur l'enseignement des mathématiques. Dans *Le mot et la chose*, Quine (1960, 1977 & 1999 pour la traduction française) énonce *le principe de charité,* qui accorde au sujet une présomption de rationalité : l'interprétation de ses réponses doit préserver les lois de la logique classique et

> «La vérité de bon sens qu'il y a derrière cette maxime, c'est que la stupidité de notre interlocuteur, au-delà d'un certain point, est moins probable qu'une mauvaise traduction – ou dans le cas domestique, qu'une divergence linguistique » (Quine, 1999, p.101)

En écho à Quine, Engel, dans la *Norme du Vrai*, écrit « En un sens faible, un sujet accepte une règle de logique si son comportement peut se décrire en conformité avec cette règle» (Engel, 1989, p.196). Autrement dit, un sujet est rationnel si son comportement peut se décrire en conformité avec les règles de la logique. Engel en tire la conséquence que l'on ne peut pas éviter d'attribuer aux sujets dont on étudie les raisonnements déductifs une compétence logique générale (ibid. p.197). La question qui se pose alors est celle des outils dont nous disposons pour aller au-delà des apparences lorsqu'un sujet (un élève) semble produire des raisonnements contradictoires. Nous allons montrer sur un exemple que la sémantique logique ouvre des perspectives en ce sens[5].
L'exemple que nous analysons brièvement est tiré de Arsac et al. (1992) ; nos analyses illustrent la thèse selon laquelle le point de vue sémantique sur la vérité permet de reconsidérer les réponses de certains élèves pour ouvrir la possibilité de leur cohérence, permettant de les créditer d'un comportement rationnel.

[5] Pour une étude philosophique de ces questions voir Héraud & Errera (2005, à paraître).

Dans cette situation, les élèves qui travaillent en groupe doivent répondre à la question suivante : «Dans l'expression $N^2 - N + 11$, si on remplace N par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ? ». A l'issue du travail de groupe, les élèves discutent sur une affiche sur laquelle les auteurs ont répondu OUI. Des objections sont apparues car certains élèves ont trouvé le contre-exemple *11*. Une des élèves, G., dit *: « c'est pas entièrement juste, mais c'est pas entièrement faux non plus »*. Le professeur dit alors *: « G croit qu'une phrase peut être à la fois vraie et fausse. »*
Peut-on conclure de ce que dit G. qu'elle assume un énoncé de la forme «$p\wedge\neg p$ »? Ce qui voudrait dire qu'elle ne *suivrait* pas les règles de la logique et donc n'aurait pas un comportement rationnel ? Ou bien peut-on trouver une interprétation de ses propos qui restituerait sa cohérence ? Le niveau sémantique permet d'ouvrir cette possibilité ; en effet, l'énoncé a des exemples et des contre-exemples. On peut donc écrire, dans cette situation : «$(\exists a\ F(a)) \wedge (\exists b \neg F(b))$ », certains éléments satisfont la phrase ouverte, d'autres ne la satisfont pas. Comme G. a d'abord trouvé des exemples, et ensuite seulement reconnu l'existence de contre-exemples, cette interprétation est plausible (niveau pragmatique), cependant, il n'y a pas dans ce cas de certitude, comme c'est souvent le cas en situation scolaire. Il faut noter que ce type d'analyse, non seulement ouvre la possibilité de restituer la cohérence des propos de G., mais montre également que seule l'explicitation de la présence de la quantification universelle permet de déclarer l'énoncé faux. On peut en effet faire l'hypothèse que, bien que l'énoncé proposé soit universellement quantifié, comme le travail fait par les élèves concerne l'énoncé ouvert (celui avec lequel il font des essais), c'est ce dernier qui sert de référence pour les réponses de certains élèves. Nous venons de voir que ce pourrait être le cas de G. Une autre élève, M., pourrait également être dans ce cas. En effet, celle-ci intervient à plusieurs reprises pour réfuter les contre-exemples produits par ses camarades.

« on n'a pas pensé à 11, mais s'il y en a d'autres, on serait d'accord avec ce qu'il dit. »
« Oui, mais 22, c'est le double de 11, on peut peut-être essayer avec 33, à mon avis ce sera aussi une exception. »
« ça devient plus des exceptions car 22, 33, c'est tous des multiples. »
« Je crois qu'ils ont gagné car il y a aussi 25 comme exception. »
« A mon avis pour qu'il n'y ait pas d'exception, le résultat ne devrait pas être supérieur à 100. »

Le discours de M. se déploie avec dans un premier temps un refus de renoncer à l'énoncé ; elle rend les armes lorsque le contre-exemple 25 apparaît. La dernière remarque peut laisser penser qu'elle cherche à sauver l'énoncé : en d'autres termes, on pourrait dire qu'elle cherche un modèle de l'énoncé, un domaine numérique dans lequel l'énoncé est vrai.
Du point de vue pragmatique, la posture de M. est tout à fait pertinente ; si les seuls contre-exemples étaient les multiples de 11, on aurait intérêt à énoncer le théorème correspondant (ceci renvoie aux travaux de Lakatos, 1976), plutôt qu'à le déclarer faux.
Dans cet exemple, il apparaît clairement que la prise en compte des possibilités offertes par une analyse sémantique nous renvoie sur les aspects pragmatiques de la situation. Et finalement, G. et M. qui pourraient sembler ne pas participer au jeu mathématique se révèlent avoir des postures qui non seulement sont tout à faites cohérentes, mais qui pourrait en outre être un moteur éventuel de progrès pour la classe tout entière dans le cadre du débat, sous réserve que ces potentialités soient reconnues.[6]

[6] Plusieurs exemples en mathématiques ; en physique ; en sciences de la vie et de la terre et en français sont décrits dans Durand-Guerrier, Héraud & Tisseron (eds.), 2005, à paraître.

IV. L'interprétation des énoncés (2) : aperçus linguistiques

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment une analyse logique articulée sur le point de vue de la sémantique logique permettait d'ouvrir le champ des possibles dans deux situations, dont l'une en mathématiques. Nous avons rappelé l'importance de la prise en compte explicite de la quantification déjà illustrée dans la plupart de nos travaux, où nous avons montré en particulier l'importance de la prise en compte de la portée des quantificateurs vis à vis des connecteurs propositionnels (en particulier implication[7] et négation[8]). Dans l'exemple emprunté à Agatha Christie, notre attention a été attirée sur la distinction entre l'article défini "le" et l'article indéfini "un"[9]. Un examen attentif des textes mathématiques montre que l'usage en mathématiques des articles et des pronoms joue un rôle important sans que, le plus souvent, ceci ne soit explicité. Ces questions se posent clairement lorsque l'on veut formaliser un énoncé dans la logique des prédicats et ceci nous renvoie sur la nécessité d'une analyse des énoncés de type linguistique de manière concomitante au travail de formalisation lui-même. Or dans la plupart des travaux de didactique des sciences s'intéressant aux échanges langagiers dans la classe, l'unité d'analyse est la phrase, ce qui conduit à évacuer les questions relatives à la quantification, à l'anaphore, et aux ambiguïtés référentielles, toutes dimensions dont selon nous la prise en compte est cruciale dans l'analyse du discours en contexte scolaire. Ceci nous a conduit à nous intéresser aux travaux développés en sémantique formelle dans la tradition initiée par Montague qui s'est proposé d'étendre aux langage quotidien les outils de la théorie des modèles élaborée par Tarski. A ce stade de notre travail, nous faisons en effet l'hypothèse qu'une analyse dynamique du discours avec les outils de la linguistique formelle croisés avec les outils didactiques d'analyse du milieu et d'analyse logique, devrait nous permettre d'introduire une plus grande rigueur conceptuelle dans les interprétations que nous proposons. Dans ce qui suit, nous présentons, modestement et de manière non technique, quelques aperçus sur l'émergence de la sémantique formelle en indiquant en quoi ce champ théorique rencontre nos propres préoccupations de recherche.

IV.1 Une sémantique récursive pour les langues naturelles

Comme nous l'avons vu plus haut, Tarski pensait que la théorie sémantique de la vérité qu'il avait construite ne s'appliquait pas aux langues naturelles. La question qui se pose alors est celle de savoir ce que serait une sémantique pour les langues naturelles en relation avec deux interrogations principales : comment une théorie de la vérité permet-elle d'accéder à une théorie de la signification ? et en quoi une définition de la vérité contribue-t-elle à l'étude de la compétence sémantique ? Davidson d'une part, Montague d'autre part essayent de répondre à ces deux questions.

IV.1.1 Une sémantique pour les langues naturelles (Davidson, 1970)

Dans l'ouvrage traduit en français par Pascal Engel sous le titre "Enquêtes sur la vérité et l'interprétation", (Davidson, 1984, 1993 pour la traduction française), on trouve une reprise d'un essai publié en 1970 dans la revue Synthèse (Davidson, 1970) dans lequel l'auteur indique clairement qu'il se situe dans la filiation de la théorie de la vérité due à Tarski.

---

[7] Voir Durand-Guerrier, 1996, 2003.

[8] Voir Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004.

[9] Dans Seymat, Durand-Guerrier & Claraz (à paraître en 2005), nous rapportons l'exemple d'élèves qui insistent sur la différence entre "un contraire" et "le contraire".

« (...) On ne saurait tenir pour adéquate une théorie sémantique d'une langue naturelle si elle ne rend aucunement compte du concept de vérité pour ce langage dans la veine inaugurée par Tarski. » (p.93)

Il se propose cependant de relever le défi auquel Tarski avait apporté une réponse négative, en précisant certaines conditions dues à la spécificité des langues naturelles :

« Une théorie de la vérité pour une langue naturelle doit tenir compte du fait que de nombreuses phrases varient en valeur de vérité selon le temps où elles sont émises, le locuteur, et même peut-être le public auquel elles s'adressent. On peut accueillir ce phénomène, soit en déclarant que ce sont des énonciations ou des actes de paroles particuliers et non des phrases, soit en faisant de la vérité une relation qui vaut entre une phrase, un locuteur et un temps. » (p.97)

Son projet est de montrer d'une part qu'il n'y a « (...) aucun obstacle décisif qui empêche la production d'une théorie formelle de la vérité pour une langue naturelle (...). » (p.99) et d'autre part que « (...) il n'y a aucun moyen de donner les conditions de vérité de toutes les phrases sans montrer que certaines d'entre elles sont les conséquences logiques d'autres phrases. » (p.101) et finalement son but est de « (...) justifier la thèse selon laquelle une théorie [de la vérité] montre comment " la signification de chaque phrase dépend de la signification des mots " » (p. 101). En conclusion de ce texte, il laisse ouverte la possibilité que la structure profonde des phrases soit la structure logique. En d'autres termes, on pourrait dire que l'analyse logique au moyen d'une théorie sémantique de la vérité des phrases pourrait mettre à jour des différences de structures restées inaperçues par une analyse de type syntaxique. Nous avions donné dans Durand-Guerrier (1996) un exemple pouvant illustrer ce point de vue concernant la tâche de sélection de Wason, en soulignant que ce n'est pas la même chose de dire que " si une enveloppe est cachetée, alors elle doit porter un timbre à 50 centimes" et de dire que "si une carte porte une voyelle sur une face, alors il y a un chiffre impair sur l'autre face". En effet, si la première se formalise par un énoncé de la forme "$\forall x$ "$C(x) \Rightarrow T(x)$" ou C s'interprète par "être cachetée" et T par "être timbrée", ces deux propriétés s'appliquant aux enveloppes, la seconde se formalise par un énoncé de la forme $\forall x\ (V(x) \Rightarrow I(f(x)))$, où f s'interprète par le fonction "est l'autre face", V et I s'interprétant respectant respectivement part les propriétés "porter une voyelle" et "porter un nombre impair" qui s'appliquent aux faces (et non pas aux cartes). Une conséquence de cette différence de structure profonde étant que pour résoudre la tâche, il est nécessaire de retourner mentalement la carte pour pouvoir répondre. Les deux exemples présentés au paragraphe III illustrent également ce point de vue.

IV.1.2. Universal Grammar (Montague 1970)

Selon Tamba-Mecz (1998), « L'année 1970 marque un tournant capital avec les travaux de Montague qui met en place une représentation sémantique logique fondée sur la théorie des modèles. » Dans une perspective proche de celle de Davidson, Montague défend la possibilité et la nécessité d'une théorie "mathématiquement précise" de la vérité :

« There is in my opinion no important theoretical difference between natural languages and the artificial languages of logicians ; indeed, I consider it is possible to comprehend the syntax and semantics of both kind of languages

> within a single natural and mathematically precise theory" (cité in Chambreuil 1989, p.13)

Pour cela, il explicite les rôles respectifs entre syntaxe et sémantique, la sémantique étant clairement pour lui la notion fondamentale :

> "The basic aims of semantics is to characterize the notions of a true sentence (under a given interpretation) and of entailment while that of syntax is to characterize the various syntactical categories, especially the set of declarative sentences, (...) and I fail to see any great interest in syntax except as a preliminary to semantics." (ibid, pp.16-17)

En préface à la traduction qu'il donne en 1989 de Universal Grammar, Chambreuil écrit :

> " La grammaire de Montague constitue un champ conceptuel suffisamment riche pour qu'il soit difficile de l'ignorer. En effet, un des faits marquant de la grammaire de Montague est qu'elle repose sur l'explicitation d'au moins trois objets. L'un conduit à associer aux énoncés d'une langue naturelle des structures, spécifiques de la grammaire de Montague ; un autre permet de traduire ces structures sur une logique où il est possible d'effectuer des calculs, en particulier d'inférence logique ; le troisième propose des éléments de structuration d'un univers extralinguistique constitué d'entités mises en correspondance avec les énoncés d'une langue naturelle et des constituants de ces énoncés. « Extralinguistique» doit être entendu en opposition à la matérialité des entités linguistiques au sens de l'opposition système formel/interprétation des logiciens (...).» (Chambeuil 1989, p.12)

Nous trouvons dans cette citation l'écho des préoccupations que nous rencontrons lorsque nous nous interrogeons sur les outils nécessaires pour analyser les énoncés, les raisonnements ou d'une manière plus générale les discours qui se déploient dans la classe de mathématiques. Cependant, malgré sa proximité avec les mathématiques, la grammaire de Montague a peu diffusé semble-t-il auprès des chercheurs en didactique des mathématiques qui pourtant s'interrogent depuis les premiers travaux sur les questions langagières ; elle semble en particulier beaucoup moins connue que la grammaire générative (transformationnelle) de Chomski (1957, 1979 pour la traduction française), à laquelle elle offre une alternative par la mise en place d'une sémantique récursive (Gochet, 1982).

IV.2 La sémantique formelle dans la filiation de la théorie des modèles

IV.2.1 Pourquoi la sémantique formelle ?

Le travail de Montague inaugure la tradition de la sémantique formelle dans la filiation de Tarski pour les aspects logiques et celle de Morris pour les aspects sémiotiques.

> « Les sémanticiens rejoignent ainsi les logiciens, à qui ils empruntent, en même temps qu'un système de *notation métalinguistique* (le calcul des prédicats), une conception proprement logique du sens (en termes de *valeurs de vérité* et de *contenu descriptif*) et de la *sémantique*, dont l'objet d'étude consiste dans la relation des *signes* à leur *denotata* et se distingue de celui de la *syntaxe* (rapports des signes entre eux) et de *la pragmatique* (rapports des signes à leurs utilisateurs), selon la tradition de C.Morris (Foundations

of the theory of signs, 1938), popularisé par les travaux des logiciens de Carnap à Tarski (Tamba-Mecz (1998) p.29).

De ce fait, les objets d'étude de la sémantique formelle vont rejoindre ceux qui nous intéressent dans nos propres travaux d'analyse du raisonnement mathématique dans une perspective didactique :

> «La sémantique formelle [s'intéresse aux] rapports entre les propriétés *logico-sémantiques des langues et des langages formels*. De là dépendent, en dernière analyse, la validité de ses « modèles » et la pertinence de ses objets d'étude (référence, quantification, inférence, équivalence, contradiction etc.), tous issus d'une optique véri-conditionnelle du sens. » (ibid. pp.29-31)

A la question " A quelle théorie du langage se référer dans les travaux de didactique des sciences ?" que se posent de nombreux chercheurs[10], nous sommes tentée de répondre que, pour nos propres travaux, la continuité entre une référence épistémologique fondamentale dans notre travail, la théorie des modèles de Tarski, et une théorie linguistique qui s'y réfère explicitement devrait nous permettre de construire un cadre cohérent permettant d'aborder ce qui, dans le discours, ne ressort pas de la seule analyse logique telle que nous la conduisons dans nos travaux depuis une quinzaine d'années. Nous souhaitons, en particulier, pouvoir examiner comment l'étude de la dynamique du discours peut nous renseigner sur des évolutions potentielles du milieu au sens de Brousseau (1986) permettant en particulier d'affiner nos analyses des raisonnements des élèves.

IV.2.2 La DRT, une théorie des représentations discursives

Dans le développement des travaux en sémantique formelle, il apparaît assez rapidement que

> « La prise en compte de phénomènes de plus en plus fins et complexes amène à élargir le cadre d'analyse et à modifier les procédures de description et de formalisation.
> Ainsi Kamp développe entre 1979 et 1993 *une théorie des représentations discursives* (DRT) pour traiter de phénomènes interphrastiques comme l'anaphore et le temps (*Kamp 1981 ; Kamp et Reyle, 1993).* Il remplace les descriptions sémantiques statiques par des représentations dynamiques qui intègrent des données pragmatiques contextuelles et situationnelles. » (Tamba-Mecz, p.32)

On trouve en français (Corblin, 2002) une présentation de la DRT qui permet au lecteur non spécialiste de se familiariser avec ce domaine. Par rapport au schéma classique hérité de Tarski, dans la DRT, un niveau de représentation intermédiaire entre la phrase et le modèle où on l'interprète est introduit, c'est :

> « (...) la *représentation du discours*, qui encode des éléments de signification non captés en termes de conditions de vérité et cruciaux pour la contribution du discours à son contexte d'interprétation.

[10] Comme le montrent les nombreux colloques sur ce thème depuis quelques années (Grenoble, Bordeaux 2003, Arras 2004).

En substance, selon la formule attribuée à Frege, la signification d'une phrase nous dit comment est le monde si la phrase est acceptée pour vraie. La DRT, et à sa suite les approches dites dynamiques, sans nier qu'une part de la signification soit ainsi exprimable, insiste sur le fait que cette approche ne dit rien du potentiel du changement d'information d'une phrase, lequel se révèle cependant crucial en contexte. » (Corblin, 2002, p.4)

Pour illustrer ce qui précède, Corblin donne l'exemple suivant :

(1) Sur dix billes que j'avais dans la main, neuf sont tombées.

(2) Une des dix billes que j'avais dans la main n'est pas tombée.

D'un point de vue strictement véri-conditionnel, ces deux phrase décrivent le même « état de choses » ; toute situation rendant l'une vraie, rend l'autre également vraie. Elles ne sont donc pas distinguables du point de vue de la signification (entendue comme conditions de vérité). Cependant, dans le discours :

(3) Une des dix billes que j'avais dans la main n'est pas tombée. Elle est restée coincée entre le majeur et l'index

On ne peut pas substituer (1) à (2) sans obtenir un effet d'étrangeté :

(4) Sur dix billes que j'avais dans la main, neuf sont tombées. Elle est restée coincée entre le majeur et l'index.

En effet, comme l'écrit Corblin,

« Ce qui n'est pas capté par cette définition [véri-conditionnelle] c'est le fait que le pronom singulier *elle* ne peut pas être utilisé dans une phrase postérieure à (1) pour référer à la bille qui n'est pas tombée, laquelle n'a pas été *introduite* en (1). » (p.5).

Il est facile de trouver des exemples de même nature en mathématiques. Nous en proposons deux. Le premier est calqué exactement sur celui que nous venons de présenter. Le second est un exemple que nous avons analysé dans notre thèse (Durand-Guerrier 1996);

Premier exemple :

(1) Sur les dix nombres que j'ai testés, neuf exactement sont des exemples de la propriété étudiée.

(2) Un seul des dix nombres que j'ai testés est un contre-exemple à la propriété étudiée.

(3) *Un* seul des dix nombres que j'ai testés est un contre-exemple à la propriété étudiée. *Il* est plus grand que 10.

(4) Sur dix nombres que j'ai testés, neuf exactement sont des exemples de la propriété étudiée. *Il* est plus grand que 10.

(1) permet d'inférer *l'existence d'un contre*-exemple, mais n'introduit pas un tel contre-exemple, tandis que (2) *désigne explicitement un contre-exemple.* Seul (2) permet une reprise par le pronom *il.* Ceci renvoie à une pratique mathématique courante qui consiste à ne pas distinguer entre l'affirmation d'un énoncé existentiel et l'introduction d'un élément, ce qui correspond en logique à la règle *d'instantiation existentielle*

(5) « Il existe x tel que $f(x) = x$; x est positif

(6) « Il existe x tel que $f(x) = x$; *il* est positif »

(7) « Il existe x tel que $f(x) = x$; soit a un tel élément ; *il* est positif »

En toute rigueur, parmi ces trois formulations, seule la formulation (7) est correcte. En effet, dans (5), on ne distingue pas entre une lettre de variable liée et un nom d'objet, et dans (6), la reprise par le pronom "*il*" laisse supposer que l'énoncé existentiel a introduit un élément et que de plus l'existence entraîne l'unicité. Nous avons montré (Durand-Guerrier & Arsac, 2003) que cette pratique mathématique, largement répandue, est une source d'erreur, principalement lorsqu'on manipule des énoncés de la forme "*Pour tout x, il existe y tel que...*".

Deuxième exemple :

Dans Arsac & al. (1992), on trouve énoncées plusieurs règles du débat mathématique, dont celle-ci : " *Plusieurs éléments qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai*", dont l'apprentissage vise à éviter les généralisations hâtives suite à la vérification d'une propriété sur quelques éléments. Cette règle permet de légitimer le discours suivant :

(8) Plusieurs éléments *vérifient cet énoncé.* Cependan*t, il* est *faux.*

Les règles de la grammaire française nécessitent que le pronom 'il" réfère à l'instance du terme "énoncé" de la première phrase. Si l'on substitue " rendre vrai" à "vérifier" dans (8), on obtient :

(9) Plusieurs éléments rendent *vrai* cet énoncé. Cependan*t, il* est *faux.*

On se trouve en présence d'un énoncé paradoxal qui semble dire d'un énoncé qu'il est à la fois vrai et faux. En fait, on est ici à nouveau en présence d'un phénomène d'anaphore. Le pronom "il" devrait en effet référer à "l'énoncé" mentionné dans la première phrase : or ce dernier est un énoncé ouvert qui est susceptible d'avoir des exemples qui le rendent vrai et des contre-exemples qui le rendent faux, mais qui n'a pas en soi de valeur de vérité. En fait, dans ce cas, le pronom "*il*" réfère à l'énoncé universellement quantifié correspondant à cet énoncé ouvert. Or, cet énoncé clos n'a pas été introduit, il ne peut donc pas être repris par un pronom. Nous avons montré sur l'exemple présenté au paragraphe III.2.2 que certains élèves peuvent considérer un tel énoncé ouvert, et déclarer qu'il est à la fois vrai et faux au motif qu'il a des exemples et des contre-exemples, tandis que le professeur et d'autres élèves se réfèrent à l'énoncé clos, qu'ils déclarent faux puisqu'il a un contre-exemple.
Ce que ces deux exemples illustrent, c'est que le discours mathématique comporte des raccourcis qui sont susceptibles d'occulter certaines étapes dans l'interprétation des phrases et de rendre ainsi la référence opaque. Or, justement :

> « L'idée centrale des théories dynamiques est que l'interprétation d'un discours est un processus incrémental : l'interprétation de chaque phrase met à jour un état d'information préalable sur le monde, pour aboutir à un nouvel état d'information. Un état d'information se conçoit comme la conjonction de deux contraintes au moins :
>
> 1/ Une contrainte sur la classe de Modèles où cet état d'information peut-être dit vérifié ou satisfait. Un état d'information sur le monde nous dit comment est le monde conforme aux informations qu'il contient.

2/ Une contrainte sur l'accessibilité de cet état d'information à des mises à jour ultérieures.
L'objectif des théories dynamiques de l'interprétation est de donner une sémantique du discours d'où puissent se déduire *à la fois* ces deux aspects de la signification, et qui permette de décrire l'interprétation d'une phrase comme une fonction partielle d'un état d'information dans un autre état d'information. » (Corblin, 2002, p.6)

Si l'on voulait reformuler le règle de l'instantiation existentielle en ces termes, on pourrait dire que, d'une certaine manière, affirmer un énoncé existentiel dans un modèle donné (au sens de Tarski) permet de faire une mise à jour en introduisant un objet satisfaisant la propriété considérée. Ne pas faire *la mise à jour* peut conduire à fournir un état d'information non pertinent (par exemple, l'information selon laquelle il y a un unique élément satisfaisant une propriété donnée alors que tel n'est pas le cas).

V. Conclusion et perspectives

Dans la première partie de ce texte, nous sommes revenue sur le projet de Tarski afin de mettre en lumière sa pertinence par rapport aux questions didactiques posées par l'analyse du raisonnement mathématique. Plus précisément, nous avons essayé de montrer que l'analyse sémantique des énoncés et des raisonnements mathématiques est riche de potentialités pour les analyses didactiques qui nous intéressent. La relecture de l'ensemble de nos travaux à la lumière de cette référence épistémologique fait l'objet de notre projet d'habilitation à diriger des recherches (en cours). La dernière partie est plus prospective. La contribution de la sémantique formelle à l'analyse du discours dans la classe de mathématiques est aujourd'hui pour nous une hypothèse de travail que nous commençons seulement à explorer. Les aperçus que nous avons présentés au paragraphe IV soutiennent nos motivations à nous engager dans ce travail.

Références

ARSAC, G. & al. (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Presses Universitaires de Lyon; I.R.E.M. de Lyon

ARSAC, G. & DURAND-GUERRIER, V. (2000) Démonstration et quantification existentielle. Atelier, Houlgate, Août 1999. *Actes de la X° Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. ARDM et IUFM de Caen.* 55-83

BROUSSEAU, G. (1986), Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*7(2) 33-115.

CHAMBREUIL, M. (1989) *Grammaire de Montague*, ADOSA.

CHOMSKY, N. (1957) *Syntactic Structures,* Mouton & Co, La Haye, *Structures syntaxiques*, Le Seuil; 1969 pour la traduction française.

CHRISTIE, A. (1995) Meurtre au Champagne in *Intégrale : Les années 1945-1949.* Librairie des Champs Elysées.

CORBLIN, J. (2002) *Représentation du discours et sémantique formelle.* PUF

DA COSTA, N.C.A.(1997), *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique.* Paris : Masson.

DAVIDSON, D. (1970) Sémantique pour les langues naturelles in Davidson (D) 1984 *Inquiries into Truth and Interpretation,* Oxford Univbersity Press, New-York, *Enquêtes sur la vérité et l'inteprétation,* Editions Jacqueline Chambon, 1993, pour la traduction française.

DELPLA, I. (2001) *Quine, Davidson Le principe de charité.* Paris : Presses Universitaires de France.

DURAND-GUERRIER,V. (1995) Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien, *Différents types de savoirs et leurs articulations*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
DURAND-GUERRIER,V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Lyon1.
DURAND-GUERRIER, V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, in *Petit X 50, .57-79*. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier Grenoble1.
DURAND-GUERRIER,V. (2003) Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective in *Educational Studies in Mathematics,* 53 5-34
DURAND-GUERRIER, V. Théorie des modèles et certitude. A propos d'une récréation mathématique, à paraître en 2005 dans les *Actes du colloque ARDéCO, Les processus de conceptualisation en débat, Hommage à Gérard Vergnaud*, 28 -31 janvier 2004. (2005a).
DURAND-GUERRIER, V. La résolution des contradictions : l'apport de la sémantique logique, à paraître en 2005 in Durand-Guerrier & al. (eds) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*, PUL. (2005b).
DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23/3 295-342
DURAND-GUERRIER,V. & BEN KILANI, I. (2004) Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire tunisien. in *Les Cahiers du Français Contemporain n° 9, 29-55.*
DURAND-GUERRIER & al. (eds) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe,* à paraître en 2005 aux Presses Universitaires de Lyon (2005b).
ECO, U. (1980) *Segno.* Milan : A. Mondatori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Editions Labor.
ENGEL, P. (1989) *La norme du vrai. Philosophie de la logique*, Gallimard
FREGE, G. (1970) *Ecrits logiques et philosophiques*, Editions du Seuil
GARDIES, J.L. (1994) *Les fondements sémantiques du discours naturel.* Vrin : Paris.
GOCHET, P. (1982) La sémantique récursive de Davidson et de Montague, in Loi & al., *Penser les mathématiques, Séminaire de philosophie et mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure*, Le Seuil.
GRANGER, G-G. (1994) *Formes, opérations, objets*, Vrin
HERAUD, J.L. & ERRERA, J.P. Sémantique et didactique des jeux de langages in Durand-Guerrier & al., *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe,* à paraître aux Presses Universitaires de Lyon en mai 2005).
JACQUES, F. (1990) Article Pragmatique, in *Encyclopedia Universalis*, vol. 18, pp.856-860.
KAMP, H. (1981) A theory and truth and semantuc representations, in Groenondijk & al. (eds) *Formal methods in the study of langage*, Amsterdam, Mathematical Centre Tracks 135, pp.13&-175.
KAMP, H. & REYLE, U. (1993) *From discourse to logic*, Kluwer.
LAKATOS, I. (1976) *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte scientifique.* Hermann (1984) pour la traduction française
MONTAGUE, R. (1970) Universal grammar (UG). *Theoria* 36, 373--398.
MONTAGUE, R. (1974) *Selected papers of Richard Montague*, R.Thomason editor, Yale University Press, cité in CORBLIN 2002.
MORRIS, C.W. (1938), *Foundations of the theory of signs*, Chicago : Chicago University Press, cité in Hottois G. (1997), *De la renaissance à la post-modernité* (p.258). Bruxelles : De Boeck Université.
QUINE, W.V.O. (1950) *Methods of logic,* Holt, Rinehart & Winston; Traduction française Armand Colin, 1972
QUINE, W.V.O. (1960) *Word and Object.* MIT press. Traduction française Flammarion 1978, champs Flammaraion 1999.
REBOUL, A. & MOESCHLER, J. (1998) *La pragmatique aujourd'hui.* Points Seuil.
SEYMAT, M. & al. « Le contraire du carré rose ». Parler en arts plastiques au collège en 6ème, in Durand-Guerrier & al. (eds) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*, à paraître en 2005 aux Presses Universtaires de Lyon.
SINACEUR, H. (1991a) *Corps et Modèles.* Paris : Vrin
SINACEUR, H. (1991b) Logique : Mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? in *Hommage à Jean-Toussaint Dessanti.* T.E.R.
TAMBA-MECZ, I. (1998) *La sémantique* PUF, Que sais-je n° 655
TARSKI, A. 1936a. Le concept de vérité dans les langages formalisés in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 157-269. Armand Colin, 1972.
TARSKI, A. 1936b. Sur le concept de conséquence in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 141-152. Armand Colin, 1972.

TARSKI, A. 1944. La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 2* : 265-305. Armand Colin, 1972.
TARSKI, A. (1960) *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars, Paris-Louvain
TARSKI, A. (1972) *Logique, sémantique et métamathématique.* Armand Colin.
WITTGENSTEIN, L.(1921) *Tractatus logico-philosophicus.* Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française, Gallimard, 1961.

Traitement de la validité de l'implication par des étudiants, corrélations avec leurs performances mathématiques, liens avec diverses questions de psychologique cognitive

Janine ROGALSKI, Marc ROGALSKI

Laboratoire Cognition et Usages, Université Paris 8
Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1-CNRS

Introduction

Nous présentons un ensemble de résultats d'une étude faite sur deux groupes d'étudiants licenciés de mathématiques entrant dans la préparation au CAPES de mathématiques à l'Université de Lille, la plus nombreuse en septembre 1999 (test 1: 107 étudiants) et la deuxième en septembre 2001 (test 2 : 71 étudiants).

La motivation de l'étude réside dans l'importance, pour des enseignants de mathématiques en collèges ou lycées, de savoir distinguer dans les "erreurs de raisonnement" des élèves celles qui proviennent directement de la mauvaise compréhension des mathématiques enseignées, et celles qui sont liées à un maniement erroné de la logique en œuvre en mathématiques ; par exemple, un certain nombre d'élèves et d'étudiants pensent spontanément, en actes, que $P \Rightarrow Q$ et non$P \Rightarrow$non$Q$, "c'est pareil", ou que la négation — souvent d'ailleurs dénommée "contraire" — de "$\forall x$ P(x) est "$\forall x$ non-P(x)", ou distinguent mal une implication et sa réciproque : " dire $P \Rightarrow Q$ et dire $Q \Rightarrow P$ c'est dire la même chose" (une étude extensive sur de bons élèves du niveau de 4ème — 8th grade — met en particulier ce point en évidence :Küchemann & Hoyles, 2002). L'origine de ces erreurs est souvent plus cachée, et nous faisons l'hypothèse que les enseignants ne seront vraiment aptes à les détecter et à proposer des remédiations éventuelles que si eux-mêmes ont des idées claires sur le sujet (cf. Durand-Guerrier, 1996 ; Durand-Guerrier et al., 2000). Ce sont donc ces idées que nous nous proposons d'étudier sur ces futurs enseignants.

L'étude reprend d'abord en partie des résultats publiés par ailleurs (Rogalski & Rogalski, 2003), et nous renvoyons le lecteur à ce texte pour plus de détails. Dans un premier temps, nous nous sommes concentrés sur l'implication, et en particulier sur les divers modes de traitement de la validité de l'implication que ces étudiants "avancés" pratiquent. Nous avons laissé de côté pour l'instant l'étude de "modes de raisonnement mathématiques" plus globaux, que nous reprendrons éventuellement plus tard : nous travaillons plutôt sur "le pas de raisonnement" au sens de R. Duval (1991), mais en prenant en compte aussi bien des pas de raisonnement sans quantificateurs, qu'avec un – ou plus d'un – quantificateur (voir à ce sujet les travaux de V. Durand-Guerrier et ceux de M. Legrand).

On présente ensuite les relations entre modes de traitement de la validité de l'implication et traitement de questions mathématiques, posées dans le cadre des mêmes tests. Les résultats globaux du concours du CAPES sont également considérés de ce point de vue, pour évaluer la pertinence d'une étude centrée sur l'implication. De multiples travaux ont montré le rôle de la preuve dans l'enseignement des mathématiques (voir la revue de questions de Hanna, 2000), ainsi que les relations entre compétence logique et compétences mathématiques, qu'il s'agisse du langage mathématique (différant de l'usage de la langue naturelle), de la disponibilité limitée des contre-exemples (Benbachir & Zaki, 2001).

Nous pensons en effet que le "pas implicatif" en mathématiques est une forme d'inférence constamment présente dans tous les raisonnements heuristiques et toutes les argumentations en jeu dans une recherche mathématique, bien avant la mise en forme rigoureuse de la démonstration. Anticipant sur les résultats qui suivent, nous ajoutons qu'il faudra aussi s'engager dans une prise en compte du contexte d'ensemble de ces activités de raisonnement (niveau des sujets —élèves, étudiants, enseignants—, visée du travail mathématique, contenu mathématique et rapports des sujets à ce contenu mathématique, types d'implications en jeu, visée didactique elle-même).

Du point de vue de l'implication, nous nous sommes centrés sur les modes de traitement par les étudiants des implications à hypothèse fausse, ou "parfois fausses" lorsque les implications concernent des assertions quantifiées (les "hors-sujet", Legrand, 1990, p. 141, cf. *infra*). Ce faisant, nous nous démarquons fortement des très nombreuses études de psychologie sur le raisonnement et particulièrement la déduction, qui partent de propositions tenues pour vraies. De plus, nous nous sommes intéressés aux relations entre un ensemble de réponses à des tâches mettant en jeu l'implication, pour identifier des différences individuelles – des "profils" dans les modes de traitement de l'implication, et les cohérences ou contradictions entre réponses. Pour situer nos résultats par rapport à ceux apportés par la psychologie, nous avons introduit un "classique" des études sur la déduction : la tâche de sélection de cartes de Wason (1966), et la version qu'en a construite Radford (1985).

La dernière partie de ce texte fait un point sur le développement des approches de la psychologie cognitive sur la déduction, le raisonnement, et la rationalité. Ce tour d'horizon est évidemment schématique, vue la profusion des travaux sur ces thèmes (ainsi, une revue leur est maintenant consacrée: "*Thinking and Reasoning*").

I. Hypothèses, typologie des implications, "profils" de réponses

Détaillons maintenant les hypothèses qui sous-tendent l'exploitation empirique des données recueillies.

La première hypothèse que nous avons faite est qu'on peut avoir accès aux schèmes d'utilisation de l'implication présents dans la population étudiée et aux effets de ces schèmes en dépouillant les réponses des étudiants à des items qui, soit sont des questions de validation d'implications dont l'hypothèse est toujours fausse, soit attirent l'attention des sujets sur la valeur de la ou des variables qui rendent fausse l'hypothèse — les "hors-sujet" de M. Legrand (1990).

La méthode choisie a donc été de faire passer un test (non anonyme) aux étudiants en cours d'inscription au Capes au mois de septembre, réunis dans un amphithéâtre, pendant une durée de 4 heures. Les items des deux tests (1999 et 2001) étaient très variés, allant de questions concernant en apparence la vie courante à d'autres très mathématiques (on pourra voir en annexe 2 les items analysés ici).

Types d'implications

La deuxième hypothèse faite, pour le dépouillement, est qu'on peut détecter l'éventail des structurations des modes de validation de l'implication par l'étude des conjonctions de réponses à certains types d'implication présents dans plusieurs items.

Ceci nous a amené à établir une typologie de nos diverses implications au moyen de catégories prenant explicitement en compte les contenus mathématiques ou non mathématiques, tant des assertions en jeu que des modes de validation possibles.

Nous avons ainsi distingué :

* les implications "*calculables*", à des degrés variés (et donc à contenu mathématique) : "$H_n \Rightarrow H_{n+1}$", "si 1=2...", "si $(x^2+1) \leq 0$", les deux items à contenu polynomial ;
* les implications "*arbitraires*", correspondant à la définition d'une "règle" (en général non mathématique) :"Wason", "Radford" ;
* les implications de "*contrat social*": "les bonbons de la maîtresse" ;
* les implications "*factuelles*", *non calculables*, où les assertions P et Q (hypothèse et conclusion) sont des données immédiatement saisissables par le sujet, pratiquement sensibles, et qui peuvent éventuellement être à contenus mathématiques "routiniers" pour les sujets : "Triangle", "Circuit", "Labyrinthe".

Les résultats au premier test : existence de profils types, corrélations de ces types avec le succès à certains types d'items implicatifs

Nous avons lors du dépouillement du test proposé à la première population (Rogalski & Rogalski, 2001) classé les sujets selon quatre profils de comportement, avec variantes pour les trois premiers, en croisant les réponses à la validation de trois implications de type factuel (voir annexe 2) à hypothèse fausse (en fait : toujours fausse, dans la mesure où il y a une variable universellement quantifiée, parfois cachée) : le "circuit électrique" de Marc Legrand (Legrand, 1990), le"labyrinthe" d'Evapm étudié par V. Durand-Guerrier (1996), et le"triangle".

Le choix de ces items comme permettant de tester ces profils repose sur leur aspect factuel ou "matériel", leur immédiate intelligibilité par les sujets, l'absence de référence à des connaissances mathématiques non routinisées (autres qu'immédiates pour les sujets considérés), et la non-calculabilité de l'implication : la proposition "conclusion" ne peut être dérivée de l'hypothèse par un calcul, qui permettrait aux étudiants de dérouler un schème d'enchaînement de calculs simples. Aussi bien le sens des propositions que la valeur de vérité de l'hypothèse et de la conclusion sont aisément évaluables par référence aux propriétés des objets en jeu (pour les sujets adultes cultivés de la population concernée).

Les profils obtenus sont les suivants :

* **logique stable** (10 sujets)
(réponse du type : "*l'implication est vraie" — en général avec l'argument "parce que l'hypothèse est fausse"*— dans les 3 items) ;
* **logique instable** (9 sujets)
(la même réponse dans 2 items sur 3) ;
* **pertinent stable** (9 sujets)
(réponse du type : "*l'implication est stupide", "elle n'a pas de sens"*, dans les 3 items);
* **pertinent instable** (14 sujets)
(la même réponse dans 2 items sur 3) ;
* **non conditionnel stable** (22 sujets)
(réponse du type : "*l'assertion est fausse car l'hypothèse est fausse"*, dans les 3 items) ;
* **non conditionnel instable** (23 sujets)
(la même réponse dans 2 items sur 3) ;
* **sans dominante** ou indifféremment"**mixte**" (20 sujets)
(tous les autres types de réponses ou de distributions de réponse aux 3 items, incluant les non-réponses éventuelles).

Le terme "non conditionnel" est choisi pour rendre compte du fait que ces étudiants ne conçoivent pas la vérité de l'implication comme un lien conditionnel entre les valeurs de vérité des propositions.

Bien sûr, la question qui se pose alors est la pertinence de cette définition des profils : sont-ils un moyen de prédiction statistique au succès ou à l'échec aux autres items? Y a-t-il corrélation avec le succès au Capes ? En ce qui concerne la population du test 1, la réponse à ces deux questions est développée dans (Rogalski & Rogalski, 2001), et reprise dans (Rogalski & Rogalski, 2003), et c'est chaque fois : oui ! Nous renvoyons à ces textes, et aux graphiques donnés en annexe 1.

Confirmation des résultats au deuxième test

Nous nous sommes naturellement demandé si les résultats obtenus avec le premier test étaient relatifs à la population particulière testée, ou s'il y avait stabilité d'une population à une autre (comparable). Nous avons donc recommencé l'opération test en septembre 2001, exactement dans les mêmes conditions, avec un texte reprenant, parmi d'autres, les mêmes items que ceux étudiés dans le premier dépouillement (avec parfois quelques différences de formulation dont nous voulions tester l'effet, en particulier l'introduction de la forme "*si...alors...*", dans certains items). Disons tout de suite que cette modification a été sans effet sur l'item "triangle" ce qui nous a permis de le garder pour la définition des profils, avec les deux autres implications non calculables à prémisse fausse (de formulation inchangée).

Nous avons construit les mêmes catégories avec les mêmes trois items, et aussi étudié la corrélation entre ces catégories et le succès aux mêmes autres items que dans le premier test. La population ayant baissé (moins de candidats au Capes...), nous avons dû opérer des regroupements pour éviter des dispersions qui auraient rendu les résultats peu significatifs ; précisément, nous avons regroupé les catégories "stable" et "instable" de même type en une seule catégorie ; nous travaillons donc à partir d'ici avec quatre catégories ou quatre profils : "Logique", "Pertinent", "Non conditionnel", et "Sans dominante".

La répartition en catégories de la population testée est alors semblable à celle obtenue avec la première population, ainsi que le montre le tableau 1 ci-dessous.

Tableau 1.Distribution —en pourcentage—des étudiants selon leur profil de réponse aux implications "non calculables à prémisse fausse".

PROFIL	TEST 1 (N=107)	TEST 2 (N=71)
LOGIQUE	17,7	21,1
PERTINENT	21,5	23,9
NON CONDITIONNEL	42	39,4
SANS DOMINANTE	18,7	15,5

Traitement de différentes implications

Les distributions des réponses selon les profils sur chacun des trois autres items de raisonnement sont globalement semblable pour les deux tests, à des détails près qui s'expliquent par les variations de formulation, avec cependant quelques différences locales qui soulèvent des questions dont les réponses sont présentées dans (Rogalski & Rogalski, 2003) auquel nous renvoyons le lecteur.

Tableau 2a. Pourcentages de réponses correctes à l'implication calculable à prémisse fausse ($H_n \Rightarrow H_{n+1}$) selon les profils des étudiants, pour chacune des deux populations.

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
TEST 1	73,7	56,5	46,7	35
TEST 2	73,3	29,4	28,6	54,5

Tableau 2b. Pourcentages de réponses correctes (selon la logique mathématique) à l'item de contrat social selon les profils des étudiants, pour chacune des deux populations.

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
TEST 1	63,2	21,7	26,7	20
TEST2	60	35,3	35,7	18,2

Tableau 2c. Pourcentages de réponses correctes aux items de sélection (Wason & Radford) selon les profils des étudiants, pour chacune des deux populations.

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
TEST 1	68,4	52,2	37,8	30
TEST 2	66,7	52,9	60,7	36,4

Étude de points plus spécifiques

Les tests comportaient 20 items dans le premier passage, et 18 dans le second. De nombreuses questions pouvaient ainsi être étudiées, concernant par exemple : l'usage des quantificateurs (en particulier en rapport avec la notion de contre-exemple et dans des items utilisant des polynômes du second degré dépendant de plusieurs paramètres) ; les corrélations éventuelles entre les profils et certains items très mathématiques (différence entre suite numérique non majorée et suite tendant vers $+\infty$, par exemple) ; l'effet de certaines formulations "à l'envers" ("nul n'est P s'il n'est Q", "parmi les rationnels, seuls les décimaux peuvent avoir 2 développements décimaux illimités différents"...).

Dans un premier temps, nous avons étudié quatre questions centrées sur l'implication elle-même : quelle est l'utilisation de la contraposée ? que se passe-t-il quand on attire l'attention des étudiants sur l'existence de "hors-sujet" (au sens de M. Legrand, c'est-à-dire des x pour lesquels l'hypothèse P(x) est fausse)? comment sont traitées des implications calculables à prémisse toujours fausse ? y a-t-il des effets des changements de formulation de l'implication ?

Nous rappelons ici les résultats sur l'utilisation de la contraposée dans les items communs aux deux tests (ci-dessous). Les résultats sur le traitement des implications calculables concernent le seul test 2 (où on avait spécifiquement ajouté des items de cet ordre) ; on peut les trouver dans (Rogalski & Rogalski, 2003). Le traitement des "hors-sujet" est présenté dans la partie II consacrée aux relations entre profils et traitements ou performances mathématiques. L'effet des changements de formulation a été plus particulièrement introduit dans des visées de comparaison avec des études de psychologie : nous les traitons dans la partie III.

Utilisation de la contraposée pour valider une implication

Sur l'ensemble des 8 items identiques ou à formulations voisines figurant dans les deux tests, nous avons comparé l'usage de la contraposée. Les résultats sont les suivants, en pourcentage des étudiants :

Tableau 3. Utilisation de la contraposée dans les deux tests (sur les items communs).

Utilisent la contraposée	0 fois	1 fois	2 fois	3fois	4 fois
Test 1	59 %	27 %	12 %	2 %	--
Test 2	45 %	24 %	24 %	5,6 %	1,4 %

Au total, 41 % des sujets utilisent au moins une fois la contraposée lors du premier test, et 55 % lors du deuxième test. Le fait qu'un étudiant sur deux, en moyenne, utilise au moins une fois la contraposée est un résultat qui contraste avec une remarque figurant dans (Deloustal-Jorrand, 2000) sur l'absence d'utilisation de la contraposée. Mais son étude clinique concernait un petit nombre d'étudiants, et par ailleurs on peut faire l'hypothèse que les implications à absence de lien sémantique ne déclenchent pas l'usage de la contraposée, même (ou surtout ?) chez des étudiants de mathématiques.

Par ailleurs, il faut noter que la quasi-totalité de l'augmentation d'une population à l'autre entre les deux tests est concentrée dans la réponse à l'item "Wason", dont la formulation avait été changée, la nouvelle formulation en 2001 utilisant un "Si...alors...".

Tableau 4. Pourcentage (par item) d'utilisation explicite de la contraposition dans quatre types de situations d'évaluation d'implications dans les deux tests.

Types de tâches d'évaluation d'implication	Test 1 N=107	Test 2 N=71	Ensemble N=178
Implication non calculable (sur 3items)	3,1	3,7	3,3
Implication calculable ($H_n \Rightarrow H_{n+1}$)	7,5	4,2	6,2
Vérification de règle : sélection de cartes (Wason)	7,5	29	*
Vérification de règle : évaluation de procédures	4,7	10	6,8
Évaluation de contre-exemples **	23,4	32,4	27

* Le fort effet, sur ce seul item, de la différence de formulation ne donne pas de sens à un regroupement des populations des deux tests.

** Il s'agissait d'exhiber un contre-exemple à des affirmations d'étudiants concernant des propriétés de fonctions.

II. "Profils" et réponses aux items mathématiques

Pour étudier les corrélations entre les profils et les performances mathématiques, nous allons analyser trois items où les mathématiques interviennent plus directement, et étudier le succès global des étudiants au concours du Capes. Le premier item étudie les réactions des étudiants, dans le contexte d'inégalités concernant des polynômes du second degré, constatant que dans l'étude d'une implication du type « $\forall x \in X\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ » il peut y avoir des "hors-sujets", c'est-à-dire des éléments x de X pour lesquels P(x) est fausse (voir Legrand, 1990). Les deux items suivants sont purement mathématiques : le premier est une tâche de traduction en langage mathématique formel d'une propriété du développement décimal illimité (DDI) d'un nombre rationnel ; le second demande de trouver toutes les implications et non-implications entre 6 propriétés éventuelles d'une suite de nombres réels. Enfin, le succès ou l'échec au Capes est un indicateur très global, qui teste l'ensemble des performances mathématiques sur des problèmes du niveau des deux premières années d'université et des connaissances et savoirs faire à propos des cours et exercices portant sur les trois dernières années de l'enseignement secondaire (lycée) et la première année d'université.

1. Les "hors sujet"

Dans la conduite des situations de débat scientifique, M. Legrand a identifié trois types de cas particuliers ou d'événements élémentaires apparaissant dans le débat : des *exemples* qui vérifient l'hypothèse et la conclusion de l'assertion, des *contre-exemples* qui vérifient l'hypothèse et pas la conclusion, et des "*hors-sujet*", qui ne vérifient pas l'hypothèse.

Dans une implication de type "quel que soit x, si P(x) alors Q(x)", il peut y avoir des situations où P(x) est vrai pour certains des x et faux pour d'autres. M. Legrand a proposé d'appeler ces derniers "hors-sujet" pour pouvoir en parler dans les débats, après avoir constaté qu'environ un étudiant sur trois en Deug les assimilait spontanément à des contre-exemples. Cette tendance à traiter ces cas comme des contre-exemples peut conduire ces étudiants à considérer qu'une implication est fausse "quand P(x) n'est pas vraie" (ce qui revient aussi à considérer comme du calcul propositionnel et avec un traitement erroné une affirmation dont la validité devrait être testée dans le calcul des prédicats —cf. Durand-Guerrier).

Deux items du test 2 proposent des implications dans lesquelles existent de tels "hors-sujet" : ils concernent des polynômes du second degré, avec paramètre.

Dans un cas (Q5) une question, qui suit la présentation d'un calcul qui permet d'amorcer la validation de l'implication, conduit à identifier un ensemble de valeurs de la variable l pour lequel l'hypothèse est fausse (si l'étudiant y répond sans erreur de technique mathématique). La question suivante porte sur la validité de l'implication. C'est un des items les plus mal réussis dans les implications calculables (environ 20 % de réponses correctes), bien qu'il soit d'une forme tout à fait usuelle *a priori* pour un étudiant de mathématique.

L'autre item (Q13) qui propose de commenter des réactions d'étudiants est un peu moins mal réussi, mais pose néanmoins problème à une majorité d'étudiants (seulement 41 % de réponses correctes).

Si on considère les réponses en fonction des profils, on constate les points suivants :

– les profils "non conditionnel" et "sans dominante" correspondent aux taux les plus bas de réussite, et aucun étudiant à profil "non conditionnel" ou "sans dominante" ne répond correctement à la fois aux deux items de "hors-sujet" ;

– les étudiants à profil "logique" répondent à 87 % correctement pour l'item de discussion (n° XIII. 2001), mais un très grand nombre d'entre eux ne répondent pas à la question de l'item V. 2001, montrant l'existence des "hors-sujet" (conduisant à un faible taux de succès : 33 %) ;

- les étudiants à profil "pertinent" se situent à un niveau intermédiaire.

Alors que les étudiants sont tout à fait susceptibles de "suivre" un calcul montrant que Q(x) est vérifié pour les x vérifiant P(x), ils sont déstabilisés quand on attire leur attention sur l'existence des hors-sujet. Cela nous semble confirmer la fragilité pour nombre d'entre eux du traitement d'une implication en tant que relation entre antécédent et conséquent, fragilité se traduisant par un glissement de l'évaluation de la validité de l'implication à celle de la validité de l'hypothèse (ou de l'antécédent).

2. Traduction d'une propriété concernant les développements décimaux illimités

L'un des items d'analyse élémentaire est un test de traduction en langage mathématique formel d'une propriété des développements décimaux illimités (DDI) des nombres rationnels (voir annexe 2).

Analyse *a priori* du test DDI

L'assertion proposée peut se traduire ainsi :

"$\forall x \in \mathbb{Q}$, {x a 2 DDI différents}$\Rightarrow${x est un nombre décimal}". On peut aussi écrire la contraposée :

"$\forall x \in \mathbb{Q}$, {x n'est pas un nombre décimal}$\Rightarrow${x n'a qu'un seul DDI}".

Plusieurs erreurs peuvent se présenter.

(1) L'écriture de *l'implication réciproque* : "$\forall x \in \mathbb{Q}$, {x est un nombre décimal}$\Rightarrow${x a 2 DDI différents}". Bien que cette implication soit vraie, ce n'est pas la traduction formelle de l'implication proposée. L'erreur peut provenir de la connaissance que peuvent avoir les étudiants de l'équivalence des deux propriétés en jeu, ou bien de ce que l'implication est donnée dans la langue naturelle en sens inverse de ce qu'on écrirait en mathématiques. Cette erreur est codée dans la suite CONV.

(2) Les étudiants peuvent avoir du mal à comprendre le terme "seulement", en pensant que sa traduction mathématique est la notion d'équivalence.

(3) Il peut y avoir des difficultés dans la compréhension de la forme langagière " ...seuls ...peuvent avoir...", avec une interprétation stricte : "ce n'est pas le cas pour tous les décimaux". Il n'y a alors plus d'implication du tout, puisqu'on peut répartir dans ce cas les nombres décimaux en deux catégories : ceux qui ont deux DDI, et ceux qui n'en ont qu'un...

Par exemple, parmi les 50 étudiants du test 2 qui ont répondu à la tâche DDI, 8 ont commis les erreurs d'interprétation (2) et (3).

Ces deux erreurs et des variantes sont regroupées dans notre analyse avec les non-réponses, sous le code NOIM (pas d'implication donnée).

Ces trois erreurs révèlent des problème de traduction en langage formel. Le terme "seuls" doit être compris comme "c'est seulement dans le cas où...", formulation typique de la *condition nécessaire* (CN) que signifie une implication. De même, le terme "peuvent avoir" doit être compris comme associé à la *condition suffisante* (CS) exprimée par une implication. Le sens de l'assertion est "c'est seulement s'il est décimal (CN) qu'un nombre rationnel peut avoir deux DDI différents (CS)". Une bonne compréhension de l'assertion donnée en langue naturelle demande une interprétation de la relation entre une CN et une CS.

Corrélations entre profils et succès au test de traduction formelle sur les DDI

Les réponses des 178 étudiants sont présentées dans le tableau 5 ci-dessous.

Tableau 5. Distribution des types de réponses au test DDI selon les profils (effectifs).

Réponses → Profils ↓	CORRECT	CONV	NOIM	Total
Logique	18	9	7	34
Pertinent	19	8	13	40
Non condition.	19	31	23	73
Mixte	11	7	13	31
Total	67	55	56	178

Commentaires

(1) Seulement 38 % des étudiants traduisent correctement l'assertion proposée ; 31 % ne donnent aucune implication, et 31 % traduisent la réciproque.

Cela montre que les étudiants ont, globalement, des difficultés notables dans la traduction "technique" du langage (mathématique) naturel, même dans le cas d'un contenu mathématique simple (pour leur niveau mathématique : étudiants licenciés avec 3 ou 4 ans d'études universitaires).

(2) Les profils "logique" et "pertinent" réussissent assez bien, de façon similaire (53 % et 47,5 % donnent une réponse correcte), en contraste avec les performances assez faibles des étudiants "non-conditionnel" (42 % d'entre eux donnent la réponse CONV et seulement 26 % la réponse correcte) et des étudiants à profil "mixte" (42 % ne donnent pas d'implications, 35 % répondent correctement).

(3) Les réponses correctes au test DDI proviennent principalement des étudiants "logique" et "pertinent" (55 %, alors qu'ils représentent 42 % de l'effectif total). Inversement, la réponse CONV est donnée principalement par les étudiants à profil "non conditionnel" (56 %, alors qu'ils sont 41 % de l'effectif).

En définitive, la capacité à résoudre un problème de traduction formelle semble relativement corrélée aux profils des étudiants, au moins si nous regroupons les catégories "logique" et "pertinent" d'une part, et "non conditionnel" et "sans dominante" de l'autre.

3. Test sur les implications et non implications entre six propriétés d'une suite de nombres

Le deuxième test purement mathématique demande aux étudiants d'énoncer toutes les implications et non implications existant entre six propriétés éventuelles d'une suite de nombres réels (voir l'énoncé à l'annexe 2).

Analyse *a priori* du test sur les suites

Analyse mathématique

Les implications et non implications sont résumées dans le réseau suivant :

$$\textbf{(a)} \Leftrightarrow \textbf{(f)} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \textbf{(c)} \Leftrightarrow \textbf{(d)} \Leftrightarrow \textbf{(e)} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \textbf{(b)}$$

Les assertions (a) et (f) signifient que u_n tend vers $+\infty$ (comme (f) le dit explicitement), (b) affirme explicitement que u_n n'est pas bornée, et (c), (d) et (e) sont différentes manières d'écrire que u_n n'est pas majorée. Ainsi, le réseau d'implication peut se réécrire en langue naturelle ainsi :

$$(u_n \text{ tend vers } +\infty\,) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (u_n \text{ n'est pas majorée}) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (u_n \text{ n'est pas bornée})$$

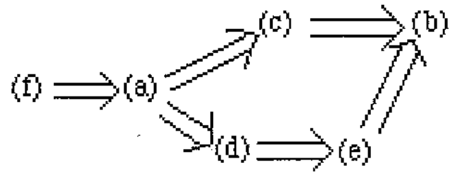
L'équivalence entre les propriétés (a) et (f) est spécifique des suites (il n'y a pas d'analogue pour les fonctions). Elle dépend du fait qu'un sous-ensemble de N (les entiers) est fini si et seulement si son complémentaire contient un intervalle $[A, +\infty[$. Cette équivalence doit utiliser une "traduction" entre un aspect sémantique (en langue naturelle) et une expression formelle d'une propriété.

Une interprétation de (c), (d) et (e) pourrait être : u_n a une sous suite u_{n_p} qui tend vers $+\infty$; une telle forme de ces propriétés pourrait apparaître dans une preuve de l'équivalence entre (c) et (d).

L'équivalence entre (d) et (e) renvoie à la compréhension du rôle de la variable quantifiée r dans l'expression qui signifie qu'une suite n'est pas majorée ($\forall r\ \exists n$ tel que $u_n \geq r$) : r peut être astreint à vérifier une condition supplémentaire qui lui permet d'être "aussi grand qu'on veut". La compréhension de ce point par les étudiants révèlerait la prise de conscience du fait que les inégalités avec quantificateurs qui expriment des concepts d'analyse (être convergente, bornée,...) *ne signifient toujours que des conditions suffisantes*. Ainsi, cette prise de conscience est corrélée avec une conception correcte de l'implication.

Enfin, il faut noter que l'implication (d)$\Rightarrow$(c) est difficile à prouver si on veut construire l'infinité d'entiers demandée (cela renvoie aussi à la construction éventuelle d'une sous-suite...) ; elle est bien plus simple à prouver par contraposition.

Principe d'analyse des réponses



Dans le test sur les suites, on ne demandait pas explicitement aux étudiants de prouver leur réponse. Presque aucun des 178 étudiants n'a donné de justification. La structure très fréquente des réponses est une liste d'assertions : (d) $\Rightarrow$ (b), (c) $\not\Rightarrow$ (f), (d) $\Rightarrow$ (e), etc... Plus rarement, les étudiants écrivent des équivalences telles que (d)$\Leftrightarrow$(e) ou des suites d'implications ou parfois des réseaux d'implications comme sur le dessin de la figure. Dans ces cas, nous avons codé les réponses comme si ces suites ou ces réseaux d'implications contenaient celles dérivables de celles écrites par transitivité (par exemple, dans la figure : (a)$\Rightarrow$(b), (f)$\Rightarrow$(e), etc...).

Il y a ainsi 30 implications ou non implications (en abrégé : I ou NI) correctes possibles, en fait 19 I et 11 NI ; les scores des étudiants sont référés à ces nombres.

Globalement, nous avons utilisé deux types d'analyse.
(1) La première est basée sur le nombre de I et NI correctes explicitement ou implicitement (par transitivité) données dans la réponse, et sur le nombre de I et NI données, qu'elles soient justes ou fausses.
(2) La seconde se focalise sur les I et NI reliant respectivement : (f) et (a) ; (f) et (b) ; (d) et (e). Et cela à cause du contenu mathématique important de ces I et NI. Par exemple, les relations entre (f) et (b) mettent en jeu un aspect important de la sémantique mathématique sur les suites ; celles entre (f) et (a) sont reliées à la formalisation de (f) en terme de quantificateurs et d'inégalités; enfin les relations entre (d) et (e) mobilisent, on l'a déjà dit, la compréhension du fait que les implications standard de l'analyse ne sont que des conditions suffisantes.

Mais dans la présente rédaction nous n'aborderons que les relations entre (f) et (b) et leur aspect sémantique. Nous nous attendions d'ailleurs à un bon score, compte-tenu du niveau d'étude des sujets.

Corrélations entre les profils et les performances globales sur le test sur les suites

Nous signalons d'abord brièvement un résultat un peu inhabituel. Dans les deux années (1999 et 2001), les hommes réussissent mieux que les femmes (plus de I et NI exprimées : 13, 8 en moyenne contre 10,2 ; plus de réponses correctes : 70 % contre 59 %). Ce résultat contredit certains travaux sur la comparaison entre les performances mathématiques des femmes et des hommes. Dans l'étude présentée ici, la différence renvoie sans doute déjà à la différence de la distribution des profils dans la population : 42 % des femmes sont dans le profil "non conditionnel", mais seulement 29 % des hommes (voir Annexe 3). Cependant, cette différence entre les hommes et les femmes est beaucoup moins présente dans les performances au test sur les DDI (la différence apparaît seulement dans le fait que 46 % des femmes à profil "non conditionnel"donnent la réponse CONV, mais seulement 33 % des hommes de ce même profil). Les explications à cette différence hommes-femmes sont sans doute complexes, et demanderaient une étude plus fine de tous les items des tests des deux années, et une étude des raisons qui amènent à la préparation au Capes des étudiants des deux sexes.

Concernant les performances au test sur les suites, le tableau 6 les présente en relation avec les profils. Dans les lignes, nous présentons les nombres moyens de réponses (sur les 30 possibles) dans chaque profil.

Tableau 6. Performances dans le test sur les suites : moyennes des I et NI, exprimées et correctes, en fonction du profil.

	Profil logique	Profil pertinent	Profil non cond.	Profil mixte	Total
I ou NI exprimées	11.6	12.7	11.8	8.7	11.5
I ou NI correctes	8.6	8.7	7	5.8	7.5

Commentaires

Ce test apparaît comme *très difficile* pour les étudiants. Le nombre moyen de I ou NI explicitement données dans les réponses est de 11,5 (pour un maximum de 30). Le nombre moyen de I ou NI corrects est très bas : seulement 7,5. En moyenne, seulement 38 % des I ou NI possibles sont présentes dans les réponses, et 65 % d'entre elles sont résolues correctement, autrement dit il n'y a que 25 % des I ou NI possibles correctement avancées.

La proportion des relations exprimées qui sont correctes est de 83 % pour les implications, et seulement 59 % pour les non implications.

Les profils "logique" et "pertinent" expriment ensemble en moyenne 12,2 I ou NI, avec 8,6 réponses correctes (un score de 70 %), et les profils "non conditionnel" et "mixte" expriment ensemble en moyenne 10,9 I ou NI, avec 6,7 réponses correctes (un score de 61 %). Les profils "logique" et "pertinent" ont des résultats semblables. Il apparaît qu'effectivement, en moyenne, les deux premiers profils donnent un meilleur pronostic pour le succès à ce test que les deux derniers.

Performances des étudiants d'un point de vue sémantique :
I et NI entre les assertions (b) et (f)

La relation entre (b) et (f) a une nature sémantique, car elles expriment des propriétés classiques de suites et sont toutes deux données en langage naturel : (b) est "la suite n'est pas bornée" et (f) est : "la suite tend vers $+\infty$". Regarder les I et NI exprimées par les étudiants devrait nous renseigner sur leurs conceptions sur ces notions.

Nous donnons dans le tableau 7 la distribution des réponses des étudiants.

Tableau 7. Distribution (en pourcentage) des I et NI entre (b) et (f) exprimées, en fonction des profils.

	Logique	Pertinent	Non cond	Mixte	Total
(f)$\Rightarrow$(b) et (b)$\not\Rightarrow$(f) totalement correct	32.4	40	17.8	22.6	26.4
(f)$\Rightarrow$(b) seulement	38.2	17.5	21.9	12.9	22.5
(b)$\Rightarrow$(f) exprimée (fausse)	11.8	15	26	16.1	19.1
aucune relation exprimée	17.6	27.5	34.2	48.4	32

Commentaires

D'abord, il est très surprenant que plus de la moitié des étudiants n'expriment pas l'implication (f)$\Rightarrow$(b), et que presque la moitié d'entre eux donnent l'implication réciproque fausse (b) $\Rightarrow$ (f).

En ce qui concerne la corrélation avec les profils, les étudiants de profils "logique" ou "pertinent" réussissent nettement mieux que les "non conditionnel" ou les "sans dominante" : 63,5 % des deux premiers profils donnent une réponse sans l'erreur (b) $\Rightarrow$ (f), et seulement 38,5 % des deux derniers profils. Globalement, presque 40 % des "non conditionnel" ou"mixte" n'expriment aucune I ni NI, pour seulement 23 % des "logique" ou "pertinent". Il semble que plus de 60 % des étudiants à profil non conditionnel et des étudiants "mixte" n'exercent aucun contrôle sémantique sur les implications possibles, pour une suite, entre "être non bornée" et "tendre vers $+\infty$".

4. Comparaison des performances à l'item (b)/(f) du test sur les suites à celles sur le test sur les DDI

Il est intéressant de comparer les performances à l'item de comparaison de (b) et (f) du test sur les suites à celles du test sur les développements décimaux illimités. Nous présentons les termes de cette comparaison dans le tableau 8.

Tableau 8. Relations exprimées entre (b) et (f) en fonction des réponses au test DDI (effectifs).

Type de réponse au test DDI→ Relation entre (b) et (f) ↓	Correct	CONV	NOIM
(f)$\Rightarrow$(b) et (b)$\not\Rightarrow$(f) totalement correct	24	13	8
(f) $\Rightarrow$ (b) seulement	19	12	7
(b) $\Rightarrow$ (f) exprimée (fausse)	4	14	15
aucune relation exprimée	20	16	26
Total (178)	67	55	56

Commentaires

Bien que les contenus mathématiques soient très différents entre ces deux items, clairement les réponses ne sont pas indépendantes. Moins de 6 % des étudiants donnant la formulation correcte dans le test DDI font une erreur concernant les I ou NI entre (b) et (f). Et presque la moitié des étudiants ne donnant aucune implication dans le test DDI n'en donnent aucune non plus dans l'item (b)/(f).

Ce dernier point confirme l'hypothèse que la question "exprimer une implication ou une non implication" peut n'avoir pas de sens pour nombre d'étudiants, principalement parmi ceux ayant un profil "non conditionnel" ou "mixte". Les seules inférences que ces étudiants tirent d'une implication P$\Rightarrow$Q sont du type : "P est vraie, donc Q est vraie" et/ou "P est fausse, donc Q est fausse". Ainsi ils ne peuvent plus exprimer de relation entre P et Q lorsque la valeur de vérité de P reste ouverte (c'est en rapport avec ce que nous avons vu dans la question des "hors-sujet"). De plus, il semble que la sémantique mathématique leur soit d'une aide limitée.

Une analyse plus fine de la comparaison des deux items fait apparaître deux pôles d'étudiants. Un sous-groupe A est formé de 37 étudiants à profil "logique" ou "pertinent" qui répondent correctement au test DDI ; 86 % d'entre eux expriment au moins la relation (f)$\Rightarrow$(b), sans fausse réponse (la moitié sont totalement correctes). Un sous-groupe B comprend 35 étudiants à profils "non conditionnel" ou "mixte" qui ne donnent aucune implication dans le test DDI ; 51 % d'entre eux n'expriment aucune relation entre (b) et (f), et 22 % proposent l'implication fausse (b) $\Rightarrow$ (f) (moins de10 % d'entre eux écrivent la relation correcte entre (b) et (f)).

5. Lien des profils avec les résultats au CAPES

Tableau 9. Pourcentages d'admissibles et de reçus au Capes selon les profils.

Profils	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
TEST1				
admissibles	53	52	35	31
reçus	26	30	16	25
TEST2				
admissibles	66,7	52,9	53,6	45,5
reçus	33,3	17,6	28,6	27,3

Globalement, il n'y a pas une différence marquée entre les deux populations pour l'admission (22,5 % pour le test 1 *vs*-26,8% pour le test 2), alors qu'elle est forte pour l'admissibilité, qui est nettement plus importante dans le test 2 (près de 55%). Le profil "logique" est dans les deux cas le plus performant. Il apparaît en revanche des différences pour les autres profils. Le profil "non conditionnel" a de bien meilleures performances dans le test 2. Quant au profil "pertinent", il présente le plus faible pourcentage de reçus.

Il n'est pas évident de savoir à quoi peut être due la forte atténuation, du test 1 au test 2, de la différence entre les profils pour l'admissibilité au CAPES. Une hypothèse, mais que nous n'avons pas testée, serait que la diffusion pendant l'année 2000 des résultats au test 1 et de leur analyse auprès des enseignants du CAPES a pu avoir un effet sur les enseignants, qui, même inconsciemment, seraient plus intervenus sur les questions de logique : cela pourrait expliquer partiellement une certaine atténuation des différences entre profils entre le passage du test 2 en septembre 2001et l'écrit du CAPES en mars 2002.

III. Les approches de la psychologie

Les études sur l'implication sont développées depuis quatre décennies dans des situations expérimentales qui s'intègrent dans le champ plus large des études sur le raisonnement et la rationalité humaines, de Piaget aux études de neuropsychologie sur les processus d'activation / inhibition dans le raisonnement.

1. Qui est rationnel ?

La référence "princeps" est le travail de Wason (1966) visant à mettre à l'épreuve l'existence d'un "stade des opérations formelles" tel que Piaget le postulait. Selon Piaget, ce stade de développement était celui où le sujet (enfant ou adolescent) devenait capable de traiter des propositions indépendamment de leur contenu. (Le stade précédent selon Piaget étant celui des "opérations concrètes" où le raisonnement porte sur des contenus sémantiques, et ne peut en être détaché).

A ce stade, le sujet devient capable de faire des tests d'hypothèses caractéristiques du raisonnement scientifique : la "logique de l'enfant" rejoint la logique scientifique. Pour tester si, conformément au modèle de développement, l'adulte "éduqué" était au stade des opérations formelles, Wason a élaboré deux tests désormais classiques, l'un sur le raisonnement déductif lié au test d'hypothèse : le test de sélection de cartes, l'autre sur le raisonnement inductif lié à l'élaboration d'hypothèse : le test de la complétion de suite de nombres.

Le test de la sélection de cartes a été l'objet d'une multitude de reprises, et de variations : il s'agit dans tous les cas de sélectionner des informations à prendre pour savoir si une règle donnée est vérifiée ou non. Les variations ont concerné la sémantique de la règle (son contenu et sa nature par rapport à l'expérience quotidienne) ou la consigne de la tâche.

Concernant la consigne les principales versions sont les suivantes : on peut demander quelles cartes doivent être retournées (au minimum) (version "*classique*" de sélection) ou proposer au sujet chaque carte en demandant s'il est nécessaire de la tester (version voisine de celle de *Radford*), ou demander quelles sont les cartes critiques (qui permettent de trancher éventuellement) et celles non pertinentes (qui n'apportent pas d'information sur le fait que la règle est suivie ou non) (version de *focalisation*) ; dans certaines expériences la consigne élimine d'abord les cartes qui ne posent pas de problèmes (pour les adultes) dans la version "classique" : P qui est quasiment toujours donnée et non P qui n'est quasiment jamais donnée (version STRA – sélection *avec réduction d'empan* de cartes à sélectionner) ; certaines versions donnent une information sur le fait qu'il faut retourner deux cartes.

Concernant la sémantique, on a différencié des implications avec règle "abstraite", comme celle utilisée par Wason à l'origine, des implications matérielles, des règles "déontiques". Les résultats les plus marquants et les plus constants concernent la facilité de réponse correcte aux règles déontiques (comme celle qui interdit de servir aux moins de 16 ans une boisson alcoolisée) opposées à la dominante de réponses non "logiques" pour les règles abstraites.

Deux grandes théories s'opposent dans un cadre général de psychologie de traitement de l'information : existence d'une logique mentale propositionnelle (on cherche les opérateurs qui rendent compte du traitement des données et de la consigne, avec l'hypothèse d'un module de traitement logique à la Fodor), ou traitement via des modèles mentaux (Johnson-Laird). Les tâches utilisées par les tenants de l'une ou de l'autre ne se sont pas montrées discriminantes. Une proposition (George, 1997) est que les sujets essaient d'abord de se représenter la règle à travers des modèles de réalisation, et en cas d'échec effectuent (ou essayent d'effectuer) un traitement propositionnel. Ces théories rendent par ailleurs mal compte d'une part de l'existence de raisonnement logique dans des situations complexes (dans le raisonnement scientifique de justification par exemple, ou dans le raisonnement mathématique), et d'autre part des effets de changement de domaine ou de contrat.

Un point très clair sur les théories dans le domaine est fait par Mankeltow (2000), vu du côté de la modélisation logique, ou de la modélisation mathématique de théorie des jeux s'agissant de la prise de décision.

Une approche différente — et plus convaincante que celle conduisant au débat cité ci-dessus — est celle de la pragmatique et de la pertinence (Sperber, Politzer). Par exemple, dans les communications humaines on traite la conditionnelle essentiellement dans son sens de double condition "si A alors B sinon pas B" (exemple classique : "si tu ranges ta chambre, tu pourras sortir jouer", si on voulait un "si alors" logique permettant de toute façon de sortir, on dirait simplement "tu pourras sortir", en insistant sur la conclusion toujours vraie et non sur la condition sans effet). Nous évitons de parler d'équivalence, car le rapport ne concerne pas le modèle logique, mais les implicites de la communication. Par ailleurs, il résulte de l'étude des processus d'influence que "accorder" "si P alors Q" conduit à augmenter l'accord sur la validité de P, et accorder Q encore plus. Donc si P est faux, on récusera l'implication, sauf si la conclusion est clairement aussi fausse que P.

Par ailleurs, dans la vie quotidienne, on s'intéresse le plus souvent aux inférences que l'on peut faire, au sens de "quelles données nouvelles je peux tirer des données que j'ai déjà", et plus rarement au traitement de ce qui ne permet pas de tirer une nouvelle donnée, ou aux relations en tant que telles. Par ailleurs, on cherche en général des réponses satisfaisantes plus que des réponses optimales : c'est la théorie de la rationalité limitée, initiée par Simon pour rendre compte du décalage systématique entre les modèles de prise de décision rationnelle et l'activité effective (dominante) des décideurs.

Un développement théorique introduit par Cosmidès est même que le traitement que font "spontanément" de l'implication les adultes, même cultivés, tient à un processus d'adaptation : ce qui a été favorisé par l'évolution - sur le long terme de la phylogenèse - est ce qui est adapté à la vie courante, où il suffit de manière dominante de tirer des conséquences positives et où on ne se règle pas par les exceptions (il suffit qu'une relation soit suffisamment souvent observée pour être traitée efficacement comme une implication). ("*We propose the principle of pre-emptive specificity - that the human cognitive architecture should be designed so that more specialized inference systems pre-empt more general ones whenever the stimuli centrally fit the input conditions of the more specialized system. This principle follows from evolutionary and computational considerations that are common to both relevance theory and the ecological rationality approach*", Fiddick & Cosmides, 2000). Cette dernière théorisation est impuissante à rendre compte du fait qu'il y a autour de 10% des sujets qui répondent de manière logique, dans la population des sujets habituels des expériences (à savoir en général des étudiants en psychologie ou en "*management*"), et qu'un raisonnement scientifique s'est effectivement développé ...

Une extension de l'approche de la pertinence est la prise en compte du contrat dans lequel se situe la tâche (Politzer). Le sujet fait des hypothèses sur ce qui est attendu de lui, en fonction de la situation dans laquelle il se représente être par rapport à celui qui lui soumet une tâche de raisonnement. Il utilise évidemment son expérience pour cela. Cette approche rend compte d'un grand nombre de résultats, y compris ceux où le positionnement qu'on propose au sujet de prendre a un effet sur ses réponses. On retrouve dans ce cadre théorique un élément présent dans les théories de l'activité : l'activité d'un sujet est doublement déterminée et régulée : par les propriétés de la situation et par ses propres propriétés, ici entre autres d'une part sa compétence logique – les instruments cognitifs dont il dispose en ce domaine – et d'autre part son expérience.

Enfin, l'articulation de la psychologie du développement et de la neuropsychologie conduit à mettre en avant les processus d'activation et d'inhibition qui sont en jeu dans les réponses à des tâches comme celles de Wason. Schématiquement, si les expériences dominantes conduisent à des "biais cognitifs" en activant des schèmes non conformes à la logique (comme ceux postulés par la pragmatique ou les schèmes précocement construits dans l'expérience du petit enfant), des processus d'inhibition peuvent les "contrer", et permettre l'expression d'un rationnel construit lui aussi au cours du développement. Cela permet d'expliquer "la coexistence possible du *rationnel construit*, la compétence déductive, et de l'irrationnel présumé révolu : sa transgression par les biais de raisonnement" (Houdé, 1997, p. 27).

Nous retiendrons pour notre part le cadre d'une théorie de l'activité, issue des chercheurs ayant travaillé avec Vygotsky, intégrant dans les déterminants du côté du sujet, à côté de sa compétence dans le champ de la logique, les schèmes d'inférences qui peuvent s'activer ou doivent être inhibés pour répondre aux exigences logiques d'une tâche de raisonnement.

La figure 1 résume la présentation schématique que nous venons de faire.

2. La réponse des scientifiques dans les tests de sélection des cart es

Un certain nombre d'études de psychologie ont proposé la tâche des cartes de Wason à des scientifiques de différents domaines. Diverses formes de la tâche ont été utilisées. Les résultats montrent que les scientifiques dans les conditions « habituelles » de la passation des tâches expérimentales sont meilleurs que les sujets « lambda », c'est-à-dire pour l'essentiel des étudiants de psychologie ou de sciences de la gestion.

Ainsi, Tweney et Yachinin (1985) utilisant la tâche classique de sélection trouvent de meilleures performances pour les scientifiques. Kern, Mirels et Hinshaw (1983) comparent des scientifiques – psychologues, biologistes ou physiciens– sur la tâche des cartes où il s'agit d'identifier les cartes non pertinentes et les cartes critiques (celles qui invalideraient la règle). Les proportions de

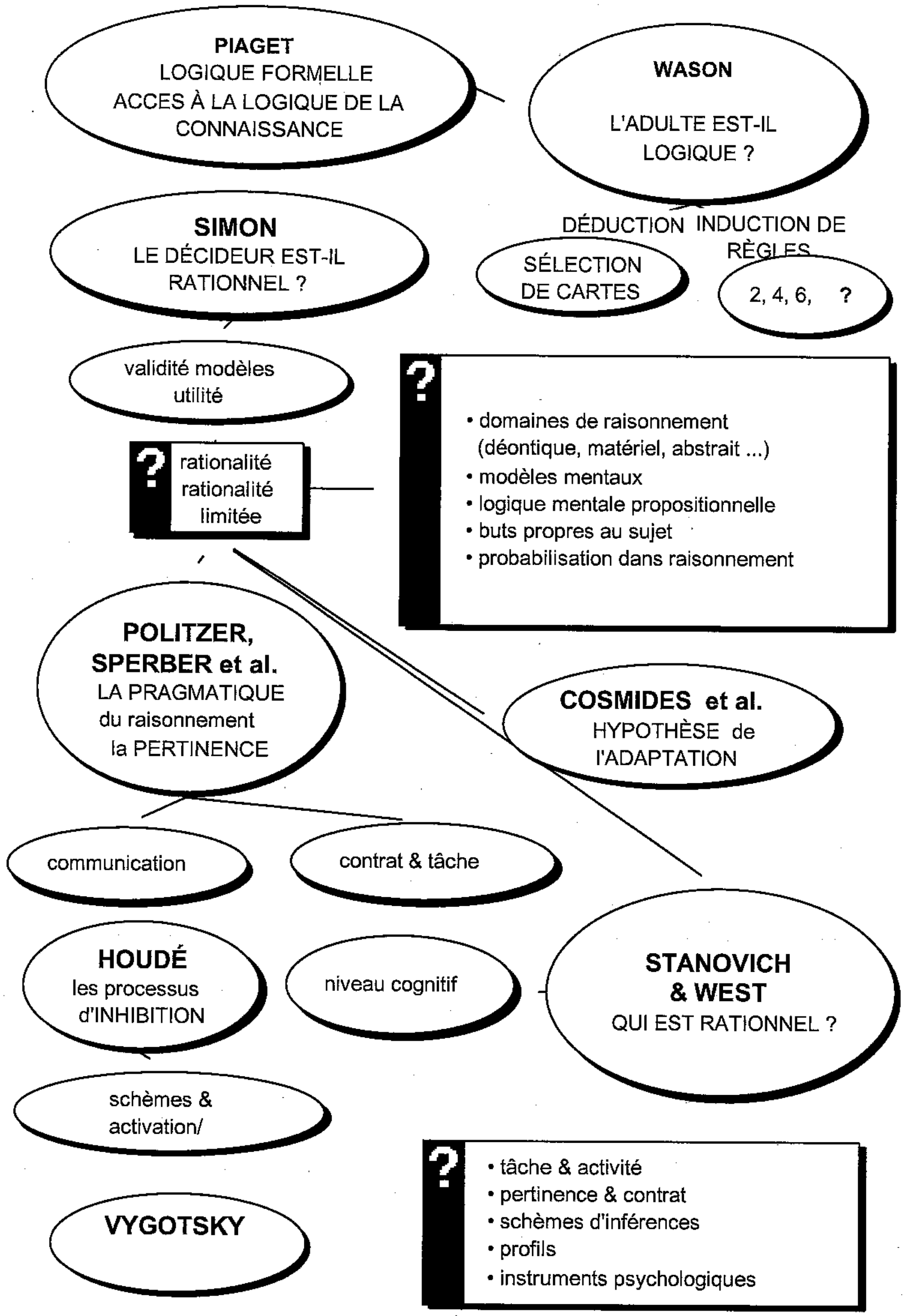


Figure 1. *Schéma du champ des recherches en psychologie cognitive sur le raisonnement et la rationalité humaine.*

réponses correctes (logiques) sont de l'ordre de 15% pour les psychologues, 11% pour les biologistes, et 23% pour les physiciens (il n'y a pas eu d'interrogation de mathématiciens). Quant aux étudiants ayant « suivi un cours de logique » environ 14% d'entre eux répondent correctement. C'est la même proportion que celle obtenue par Love et Kessler (1995) avec des étudiants « lambda », ce qui indique que la focalisation sur les cartes pertinentes améliore légèrement les réponses par rapport à la tâche de sélection classique.

Par ailleurs, dans une recherche sur "*Qui est rationnel*", une étude différentielle mettant en relation les scores aux tests d'entrée en université (dits scores SAT) montre que ces scores SAT sont meilleurs pour les étudiants réussissant la tâche classique de sélection de cartes (Stanovich, & West, 1998).

Les conclusions tirées par les auteurs de ces études sur la rationalité des scientifiques ont été discutées par Politzer, qui a mis en évidence un fort effet de contrat dans cette tâche de Wason. Il a en effet présenté la tâche classique de sélection à des élèves de Polytechnique (issus donc de classe préparatoires scientifiques à dominante à l'époque mathématique) dans deux situations différant par le contrat : dans la première situation, la tâche a été présentée comme une tâche expérimentale par un psychologue, dans la seconde situation, elle a été présentée explicitement comme une tâche sur l'implication. Les réponses correctes passent alors de 25% dans la première situation (celle des études habituelles des psychologues) à 60% dans la seconde situation en appelant au champ conceptuel de la logique (déductive) (Politzer, séminaire de laboratoire, juin 2001).

Les résultats obtenus dans nos tests vont dans le sens des interprétations proposées par Politzer, et rejoignent même précisément les valeurs qu'il avait obtenues avec des étudiants scientifiques sélectionnés, dans la condition d'un contrat en appelant au champ de la logique— ce qui était le cas avec les étudiants de nos tests.

Les études de psychologie cognitive se sont centrées sur l'explication des 90% de réponses non "logiques", et la prise en compte du contrat et de la compétence logique formée dans l'activité d'étudiant en mathématiques rend compte du taux substantiel de réponses logiques chez nos étudiants. Mais, la psychologie cognitive reste discrète sur les 10% de réponses correctes chez les sujets "lambda" et le problème demeure des 40% de réponses non conformes à la logique mathématiques chez des étudiants futurs professeurs de mathématiques ...

3. L'importance des formulations ? Réponses aux implications calcula bles selon l'usage ou non du "si ... alors...".

Les changements de formulation ont concerné trois des items d'implications. Lors du premier test, des formulations "non canoniques" avaient été utilisées, et la forme retenue sans utilisation du "si" conditionnel est inhabituelle dans les études de psychologie : pour comparer notre population de futurs enseignants de mathématiques aux populations de ces travaux nous avions besoin de reprendre leur formulation. Par ailleurs, l'utilisation de formes où le conditionnel de surface n'était pas apparent pouvait modifier les traitements par les étudiants (Politzer, communication privée).

La formulation non canonique pouvait avoir trois types d'effets : 1) "bloquer" le recours au traitement de la conditionnelle dans la vie quotidienne (moins d'effet de "pragmatique") ; 2) empêcher au contraire des étudiants de reconnaître l'implication (conduisant à plus d'erreurs), par exemple la formulation avec le terme "tout" ("tout triangle" ou "toutes les boules blanches") pouvaient cantonner des sujets à ne se placer que dans le cas de l'hypothèse vraie, favorisant ainsi a priori un mode d'évaluation de type "pertinent" ; 3) ne pas avoir d'influence sur les réponses, étant donné le niveau des étudiants passant le test (ce qui était notre propre hypothèse).

Nous avons donc effectué les modifications de formulation pour utiliser la formulation canonique "*si ... alors ...*" dans les tâches de sélection (version Wason et version Radford), et les trois implications non calculables à prémisse fausse (Triangle, Circuit et Labyrinthe). Nous donnons ci-dessous, dans la figure 2, les versions utilisées respectivement dans Test 1 et Test 2.

On observe effectivement un changement dans la réussite à la tâche classique de sélection de

Wason : la formulation « si ..alors .. » s'accompagne d'une augmentation de la proportion de réponses « logiques » d'un peu moins de 48% à près de 65%. (Khi2 (dl=1,N=178) = 5, p<.02). On a vu que la formulation en « si ...alors... » s'accompagne d'une augmentation de l'utilisation de la contraposition pour le profil « non conditionnel ». Néanmoins, l'effet n'est pas très important et la non-prise en compte du nombre impair reste l'erreur dominante, avec plus de 30 % des réponses.
En revanche, sur l'item "Radford" il n'y a pas d'effet du changement de formulation. Par ailleurs, l'impact sur les réponses correctes à la fois à la tâche classique (« Wason ») et à celle de l'évaluation de procédures (« Radford ») est en fait très modéré (on passe de 45% dans le test 1 à un peu plus de 56% dans le test 2). En fait, le pourcentage d'étudiants répondant correctement à « Radford » après avoir répondu correctement à « Wason » passe de 94% dans Test 1 à 87% dans Test 2. De fait, avec l'usage de la formulation conditionnelle "canonique" "*Si... alors ...*", les distributions de réponses aux deux versions de la tâche de sélection de cartes "Wason" et "Radford" se rapprochent, ce qui ne va pas dans le sens des résultats obtenus dans les expériences de psychologie avec des populations "tout venant".

Enfin, le changement de formulation a un effet tout à fait négligeable sur l'item "Triangle" (un peu plus de réponses « vrai » et un peu moins de réponses « non pertinent », mais pas statistiquement significatif, et pas de changement sur les réponses « assertion fausse » ou « autres »).

Pour interpréter cette très minime modification, il faut la comparer à celle tenant simplement à la variation de population. Le tableau ci-dessous montre qu'il apparaît la même tendance à un peu plus de réponses logiques également pour les deux autres implications, bien que leur formulation soit inchangée : on reste dans les variations statistiques attendues sous l'hypothèse d'une absence d'effet de formulation, et des populations globalement semblables.

<table>
<tr><th>versions du test 1</th><th>versions du test 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">• Wason sélection de cartes
la règle suivante</td></tr>
<tr><td>"derrière une voyelle il y a un chiffre pair".</td><td>si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un nombre pair sur son autre face".</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Radford choix de procédures
on s'intéresse à</td></tr>
<tr><td>la question suivante : "est-ce que, dans l'urne, toutes les boules blanches ont un numéro pair?".</td><td>la véracité de l'assertion suivante: "dans l'urne, si une boule est blanche, alors son numéro est pair"</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Implication factuelle à prémisse fausse (Triangle)
que pensez-vous de l'assertion suivante ?</td></tr>
<tr><td>"Tout triangle non aplati du plan, dont les médiatrices ne sont pas concourantes, est équilatéral".</td><td>"Si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral".</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Implication factuelle à prémisse fausse (Circuit de Legrand) (inchangée)
Que peut-on dire de la vérité de l'assertion suivante</td></tr>
<tr><td colspan="2">"si L1 est allumée et si L3 est allumée, alors L2 est allumée et L5 n'est pas allumée"</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Implication factuelle à prémisse fausse (Labyrinthe de Durand-Guerrier) (inchangée)
dire si la phrase est vraie, si elle est fausse ou si on ne peut pas savoir</td></tr>
<tr><td colspan="2">(7) si X est passé par S, il est passé par T</td></tr>
</table>

Figure 2. *Les versions des items Wason, Radford, et d'implications factuelles à premisses fausses.*

Tableau 10. Distribution en pourcentage des catégories de réponses aux implications non calculables à prémisse fausse selon la formulation test1 / test 2

	VRAI	NON PERTINENT	FAUX	X OU RIEN
TRIANGLE				
Test1	14	35,5	43	7,5
Test2	19,5	29,5	45	5,5
CIRCUIT				
Test1	12	31	48	9
Test2	19,5	29,5	35,5	15,5
LABYRINTHE				
Test1	27	22,5	45	5,5
Test2	34	20	41	5,5

Rappel : dans le cas de la tâche du « Labyrinthe », la réponse vraie peut être obtenue non pas dans un raisonnement logique, parce que la prémisse a été évaluée comme fausse, mais du fait d'une non-prise en compte de la condition « ne pas repasser deux fois par la même case », qui permet de rendre vraie la prémisse. Impossible de mettre ceci en évidence dans notre situation de réponse écrite collective.

Conclusion

La compétence logique d'étudiants se préparant à devenir enseignants de mathématiques a été étudiée dans un test comportant un ensemble de questions portant spécifiquement sur l'implication, avec des contenus variés. Deux épreuves d'évaluation de règle (Wason et Radford) ont été introduites pour situer les productions de ces étudiants par rapport à celles étudiées dans des tâches expérimentales de la psychologie. Une attention particulière a été donnée à des situations non étudiées par la psychologie : l'évaluation d'implications à prémisses toujours fausses, ainsi qu'à des "hors-sujets" rendant la prémisse de l'implication fausse.

On a défini une typologie d'implications, susceptibles de provoquer des traitements différents. Trois implications non calculables à prémisse fausse ont servi de base pour définir des "profils" définissant des modes de traitement de ce type d'implication. Un profil "logique" correspond au mode de traitement attendu de mathématiciens : il est le fait d'environ 20% des étudiants. Un profil "pertinent" correspond à un mode de traitement qui, de manière dominante, ne considère une implication que lorsque la prémisse est vraie (et qu'on peut donc en déduire la véracité de la conclusion) ; il regroupe environ 23% des étudiants. Un profil "non conditionnel" traite les implications comme fausses dès que la prémisse est fausse, ne distinguant pas la valeur de vérité de la prémisse de celle de l'implication : 40% des étudiants traitent ainsi les implications à prémisse fausse. Les modes de traitement mixte (variant pour toutes les implications) sont regroupés dans un "profil" sans dominante".

Ces profils sont corrélés aux réponses que les étudiants donnent quand ils doivent tester ou évaluer d'autres types d'implication. Dans leur majorité (de 60% à 70%) les profils "logique" traitent de façon logique ces autres implications ; Les profils "pertinent" sont presque aussi souvent logiques sur les implications calculables et le test d'hypothèse de Wason (50%), mais traitent de manière dominante une implication de contrat social en rendant vraie la prémisse (en interprétant la situation présentée), donc en cohérence avec leur approche de "pertinence". Les autres profils traitent beaucoup moins les autres implications de manière logique. Toutefois, l'utilisation de la contraposée, dans la tâche de test d'hypothèse de Wason permet à certains d'entre eux de retrouver une prémisse positive et de donner en conséquence une réponse logique.

On a ensuite analysé les relations entre ces profils à base logique et le comportement des étudiants confrontés à des tâches de raisonnement en analyse. Une tâche de "traduction" demandait de mettre sous la forme d'une implication quantifiée une relation exprimée en "langage mathématique naturel" (IDE). La capacité à résoudre une telle tâche est apparue liée aux profils des étudiants : les profils "logique" et "pertinent" réussissant de manière analogue (mais seulement pour la moitié d'entre eux), les profils "non-conditionnel" donnant la réciproque comme réponse dominante, alors qu'un grand nombre des profils "mixte" ne proposaient aucune implication.

Une seconde tâche d'analyse demandait d'écrire toutes les implications et les non-implications reliant six assertions sur une suite réelle (Suite). Les réponses étaient corrélées aux profils d'une manière similaire : ici aussi, les profils "logique" et"pertinent" ont exprimé plus de relations, avec moins d'erreurs. Toutefois il s'agit d'une tâche difficile, impliquant trois composants : la compétence logique, telle qu'on peut l'apprécier à travers les profils, la disponibilité des connaissances mathématiques (en particulier pour exprimer des non implications), et la capacité à élaborer une stratégie pour organiser les réponses (nécessaire, vue la combinatoire *a priori*).

Une analyse particulière des implications entre deux propositions exprimant des propriétés simples de suites réelles en "langage naturel mathématique" ont confirmé la corrélation avec les profils : plus de 60% des profils "non-conditionnel" et "mixte" n'exercent aucun contrôle mathématique sur les implications entre les propositions concernées.

La mise en relation des réponses aux deux tâches (IDE et Suite) montre des relations fortes entre les réponses des étudiants, alors que ces tâches diffèrent à la fois dans leur contenu mathématique et dans le type de réponse à produire : les réponses sont meilleures pour les profils "logique" et "pertinent" ; à peu près la moitié des étudiants qui ne donnent pas d'implication pour la tâche IDE ne peuvent pas non plus produire d'implication entre les deux propositions "sémantique" concernant une suite. Les données indiquent que pour nombre d'étudiants parmi les profils "non conditionnel" ou "mixte" la question d'exprimer une implication (et *a fortiori* une non implication) peut manquer de sens. Ces étudiants peuvent faire des inférences d'une implication P=>Q, sous la forme (correcte) comme "P est vraie, donc Q est vraie"ou sous la forme (incorrecte) "P est fausse, donc Q est fausse", mais ils ne peuvent pas exprimer la relation entre P et Q quand leur valeur de vérité reste ouverte. De plus, la sémantique mathématique ne leur semble que d'un secours limité.

Les relations des profils avec le traitement de tâches mathématiques ne se retrouvent pas aussi nettement avec les résultats au CAPES : pour les étudiants du premier test, l'admissibilité au CAPES était nettement plus importante pour les profils "logique" et "pertinent", et plus particulièrement pour les profils stables (même type de réponse aux trois implications non calculables) ; on ne retrouve pas une telle différence pour les étudiants du second test, même si les profils logiques sont un peu plus souvent parmi les reçus (mais de manière générale le taux de réussite a été plus élevé cette année-là).

Notre étude se situe d'une manière originale par rapport à celles de psychologie sur le raisonnement déductif, tout d'abord par le rôle donné aux implications à prémisse fausse et l'approche de la quantification à travers le traitement des "hors-sujets", et ensuite par la définition de types d'implication au-delà de leur domaine sémantique, en distinguant des implications non calculables et des implications calculables, et par la définition de profil dont nous considérons qu'ils reflètent des schèmes de traitement de l'implication. Dans cette approche différentielle on cherche à analyser les différents types de réponses en cherchant la cohérence qui existe entre elles.

L'insertion de tâches reprenant celles d'expériences classiques permet par ailleurs de situer les résultats des étudiants par rapport à ceux des expériences : ils traitent beaucoup mieux les questions d'évaluation de règles abstraites comme celle de la tâche de "Wason", même quand on compare aux — rares—scientifiques réalisant ce type de tâche. L'utilisation de la forme canonique de l'implication en "si … alors …" semble déclencher chez certains profils "non conditionnels" une utilisation de l'instrument cognitif que constitue la contraposition, conduisant à un traitement logique, utilisation par ailleurs au moins épisodique chez plus de la moitié des étudiants, ce qui pourrait constituer un point d'ancrage pour développer leur compétence au traitement logique.

De nombreux autres résultats de nos tests restent à analyser pour affiner l'image des schèmes et les représentations de l'implication. Des entretiens conduits avec des étudiants seront également analysés pour une compréhension plus approfondie.

Les résultats conformes à la logique restent cependant d'un niveau loin de ce qu'on pourrait attendre raisonnablement de futurs enseignants de mathématiques (même si un profil "pertinent" permet de faire la plupart des mathématiques suffisantes pour réussir), on peut s'interroger sur la capacité à bien identifier les problèmes que rencontreront les élèves quant à la justification et la preuve mathématique. Nous avons abordé la question de la formation des futurs enseignants (et en amont des étudiants) ; nous n'y revenons pas ici, sinon pour souligner la nécessité pour les enseignants à l'université d'être conscient de la maîtrise insuffisante dont soufrent de trop nombreux étudiants concernant l'implication en général et en mathématique en particulier (même ceux qui n'ont pas été particulièrement en échec et s'intéressent assez aux mathématiques pour vouloir les enseigner).

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies inMathematics,18*, 147-176.

Benbachir, A., & Zaki, M. (2001). Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude en première année d'université. *Educational Studies in Mathematics, 47(*3), 273-295.

Boero, P. (2000). Entrer dans la culture des théorèmes à 12-14 ans: un défi pour la didactique des mathématiques. In T. Assude & B.Grugeon (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 41-54). Paris : DIDIREM Université Paris7.

Deloustal-Jorrand, V. (2000). L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x, 55*,35-70.

Dreyfus, T. (1997). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics, 28*, 85-109.

Durand-Guerrier, V. (1996). Conférence à l'Université de Cornell, USA.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique.* Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics, 53*(1), 5-34.

Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M. C., & Reynaud-Feurly, J.(2000). *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Éléments d'analyse pour les enseignants.* IREM de Lyon.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics, 44* (1/2), 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H.E. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 421-438.

Houdé, O. (1997). Développement cognitif et inhibition. De l'erreur A-non-B aux biais de raisonnement. *Psychologie Française, 42(*1), 23-29.

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning stratégies of above-average mathematical students. *Educational Studies inMathematics, 53*(2), 139-158.

Johnson-Laird, P.N., & Byrne, R.M.J. (1991). *Deduction.* Hove andLondon, UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Jones, K., Gutiérrez, A., & Mariotti, M. A. (Eds). (2000). (Special issue on proof in dynamic geometry environments). *Educational Studiesin Mathematics, 44* (1/2).

Kern, L. H., Mirels, H. L., & Hinshaw, V. G. (1983). Scientists' understanding of propositional logic : an experimental investigation. *Social Studies of Science, 13*, 131-146.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school teachers' conceptions of proof. *Journal of Research in Mathematics Education, 33*(5),379-405.

Küchemann, D., & Hoyles, C.(2002). Students' understanding of a logical implication and its converse. In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *PME26. Proceedings of the 26th Annual Conference IGPME*, (pp. 3-241–3-248). Norwich: SEPD UEA Norwich.

Legrand, M. (1989). Genèse et étude sommaire d'une situationco-didactique : le débat scientifique en situation d'enseignement, in C. Laborde (Éd.), *Premier Colloque Franco-Allemandde Didactique des Mathématiques etde l'Informatique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Legrand, M. (1990). "Circuit" ou les règles du débat mathématique, in Commission Inter-Irem Université (CI2U) (Eds.), *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*, (pp.129-161). IREM de Paris 7:

Love, R. E., & Kessler, C.M. (1995). Focusing in Wason's selection task : content and instruction effects. *Thinking and Reasoning, 1*(2), 153-182.

Manktelow, K. (2000). *Reasoning and thinking.* Hove: Psychology Press (1ère édition: Taylor& Francis).

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 249-266.

Pellissier, R. (2002). L'enseignement du raisonnement scientifique, in *Une expérience d'enseignement à Nice*, publication de la Commission Inter-IREM Université (CI2U), IREM de Lyon

Politzer, G. (2001). *Communication Séminaire Cognition & Activités Finalisées*, juin2001, Université Paris8.

Politzer, G. (2002). Premise interpretation in conditional reasoning. In D.Hartman & L. Macchi (Eds.), *Reasoning and decision making: A hanbook.* Chichester: Wiley.

Radford, L. (1985). *Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques. Contribution à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée.* Thèse de l'Université Louis Pasteur Strasbourg.

Raffalli, C., & David, R. (2002). Apprentissage du raisonnement assisté par ordinateur. *Gazette des mathématiciens, 92*, 48-56.

Recio, A. M. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proofs. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1),83-99.

Rogalski, J., & Rogalski, M. (2001). How do graduate mathematics students evaluate assertions with a false premise? In M. van der Heuvel-Panhuisen(Ed.), *Proceedings of the 25th Conference PME25@NL* (pp. 4.113-4.121).Utrecht, NL: Freudenthal Institute Utrecht University.

Rogalski, J., & Rogalski, M. (2003). Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de Didactique et de*

Sciences Cognitives, 9, 2003,Strasbourg.

Sperber, D., Cara, F., & Girotto, V. (1995). Relevance theory explains the selection task. *Cognition, 57*, 31-95.

Sperber, D., & Wilson, D. (1989/1986). *La pertinence. Communication et Cognition*. Paris : Les Editions de Minuit. (Première édition, 1986, Relevance: communication and cognition. London: Blackwell.)

Stanovich, K.E. (1999). *Who is rational ? Studies of individual differences in reasoning*. Mahwah, NJ, London : Lawrence Erlbaum Associates.

Stanovich, K. E., & West, R. F.(1998). Cognitive ability and variation in selection task performance. *Thinking and Reasoning*, 4(3), 193-230.

Stanovich, K.E., & West, R. F.(2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate? *Behavioral and Brain Science, 23*, 645-726.

Tweney, R.D., & Yachinin, S.A. (1985). Can scientists rationaly assess conditional inferences ? *Social Studies of Sciences, 15*, 155-173.

Wason, P. C. (1966). Reasoning. In B.M.Foss (Ed.), *New horizons in psychology* (Vol.1).Harmondsworth: Penguin.

Annexe 1 : relation entre profils et admissibilité au Capes, et entre profils et réponses correctes aux différents types d'implication.

Figure A.

Pourcentage des étudiants admissibles au Capes en fonction de leur profil.

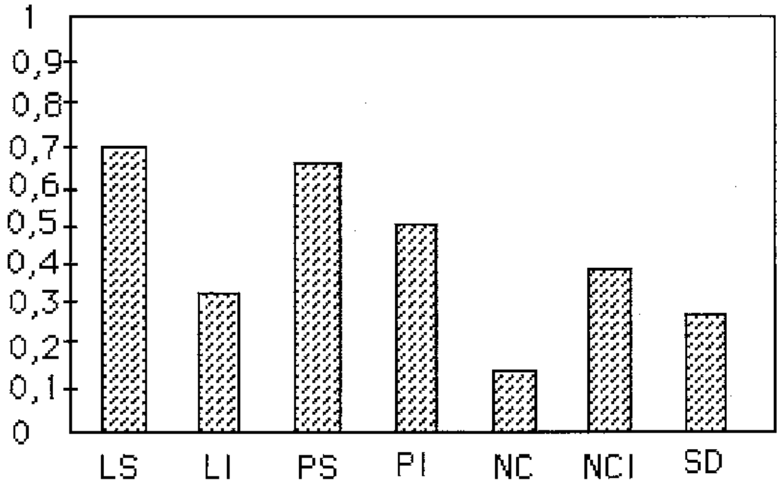
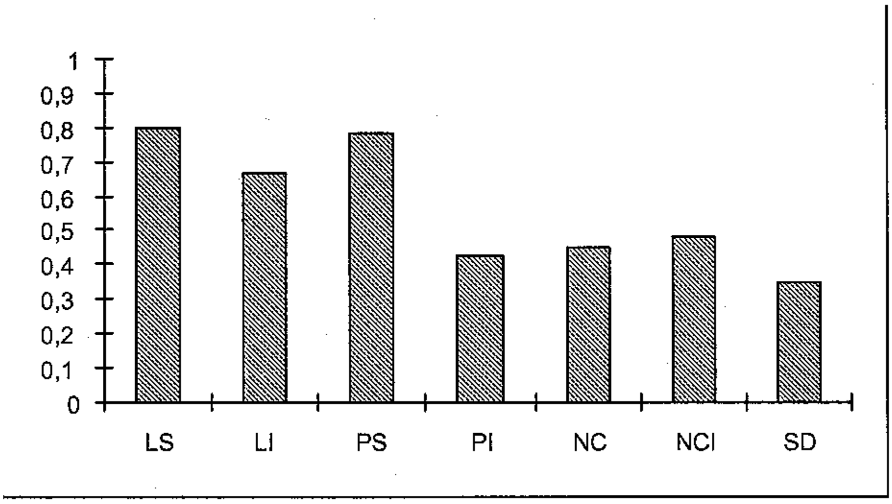


Figure B

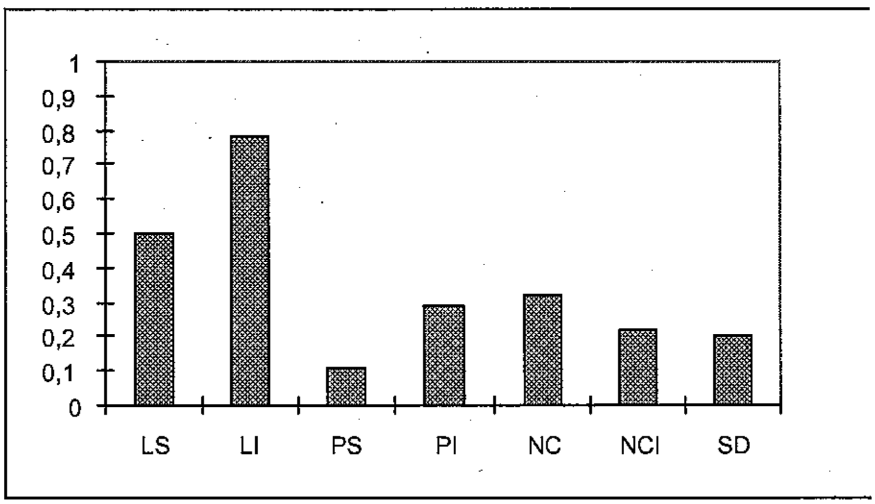
Pourcentage d'étudiants donnant une réponse correcte à l'*implication calculable* $H_n \Rightarrow H_{n+1}$, selon leur profil.



28

Figure C.

Pourcentage d'étudiants donnant une réponse selon la logique à l'*implication de contrat social*, selon leur profil.



Annexe 2 : Texte des items des deux questionnaires (1999, 2001) analysés ci-dessus.

On donne les numéros des items dans chaque questionnaire, en soulignant dans certains cas ce qui est spécifique de chacun des deux tests.

Avertissement (commun aux deux passations): *les phrases, assertions, énoncés, ...mathématiques qui figurent dans les exercices suivants sont souvent donnés sous forme naïve, non formalisée, comme on le fait dans un texte mathématique courant, voire dans la conversation de tous les jours. C'est volontairement, et vous devez vous sentir très libre dans vos réponses, qui peuvent (doivent!) comporter beaucoup de commentaires, et même si vous le voulez aller jusqu'à : "cette question est idiote !".*

Assertion calculable à prémisse fausse

I. 1999 / 2001

Etant donné $l \in R$, on considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = l$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Soit H_n l'assertion " $u_n \leq 2^n/3 - 1$".

(a) L'implication " $H_n \Rightarrow H_{n+1}$" est-elle vraie pour certains n ? pour tout n ?

(b) Calculer explicitement u_n en fonction de l et de n [on pourra poser $u_n = v_n - 1$].

(c) Montrer que si $l > -2\backslash 3$, toutes les assertions H_n sont fausses.

(d) Si $l = 10$, que peut-on dire de l'assertion " $\forall n \; H_n \Rightarrow H_{n+1}$ " ?

(e) Soit $P_n(l)$ l'assertion "$u_n = 2^{n+5}(l + 1) - 1$". Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) " $\forall n \; \forall l \; P_n(l)$ est vraie" ;

(2) " $\exists \, l$ tel que $\forall n \; P_n(l)$ est vraie" ;

(3) " $\forall n \; \forall l \; P_n(l) \Rightarrow P_{n+1}(l)$".

Assertion non calculable à prémisse fausse (triangle)

III. 1999

Que pensez-vous de la véracité de l'assertion suivante ?

<u>"Tout triangle non aplati du plan, dont les médiatrices ne sont pas concourantes, est équilatéral".</u>

III. 2001

Que pensez-vous de la véracité de l'assertion suivante ?

<u>"Si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral".</u>

Hors-sujet

V. 2001

On se propose d'évaluer la véracité de l'assertion (A) suivante :

(A) : "$\forall x \in R \; \forall l \in R$, si $x^2 - 2lx + 2l + 3 \leq 0$, alors $|x| \leq 2|l| + 1$".

(a) Montrer que l'hypothèse se réécrit sous la forme : $(x - l)^2 \leq (l - 1)^2 - 4$.

(b) Que se passe-t-il si $-1 < l < 3$?

(c) Selon vous, l'assertion (A) est-elle vraie ?

Tâche de sélection de Wason (version classique)

IX. 1999

On dispose de cartes sur lesquelles figurent sur une face une lettre et sur l'autre un chiffre.
On veut tester la règle éventuelle : "derrière une voyelle il y a un chiffre pair". Pour cela on prend un échantillon de 4 cartes, qu'on pose sur la table ; on voit alors la disposition ci-contre .

E	4	K	7

Quelle(s) carte(s) exactement doit-on retourner pour savoir si la règle est respectée sur l'échantillon?

VII. 2001
On dispose de cartes sur lesquelles figurent sur une face une lettre et sur l'autre un nombre.
On veut tester la règle éventuelle : "si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un nombre pair sur son autre face". Pour cela on prend un échantillon de 4 cartes, qu'on pose sur la table ; on voit alors la disposition ci-contre .

E	4	K	7

Quelle(s) carte(s) exactement doit-on retourner pour savoir si la règleest respectée sur l'échantillon?

Assertion calculable à prémisse fausse (arithmétique)
XI. 2001
L'assertion "si 1 = 2, alors 2 = 3" est-elle vraie ?

Version "Radford" de la tâche de sélection de Wason
XV. 1999
Dans une urne, on dispose d'un certain nombre de boules numérotées. Les boules sont soit blanches soit noires. On s'intéresse à la question suivante : "est-ce que, dans l'urne, toutes les boules blanches ont un numéro pair ?".
On envisage 4 procédures pour répondre à la question :
procédure 1 : on sort de l'urne les boules de numéro pair, puis on regarde leurs couleurs ;
procédure 2 : on sort de l'urne les boules de numéro impair, puis on regarde leurs couleurs ;
procédure 3 : on sort de l'urne les boules blanches, puis on regarde leurs numéros ;
procédure 4 : on sort de l'urne les boules noires, puis on regarde leurs numéros.
Pour chacune des 4 procédures, choisissez parmi les deux options :
(a) la procédure me permettra sûrement de répondre à la question ;
(b) la procédure risque de ne pas me permettre de conclure.

X. Le test sur les DDI
On considère l'assertion suivante :
"Parmi les nombres rationnels, seuls les nombres décimaux peuvent avoir deux développements illimités différents",
(où on précise que par exemple 3, 24 a pour développement décimal illimité 3, 2400000...).
Ecrire cette assertion sous la forme "$\forall x \in X\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$", en précisant X, P et Q.

XII. Le test sur les suites
Déterminer toutes les implications et non-implications entre les assertions suivantes concernant une suite réelle arbitraire $(u_n)_n$:
(a) [1999] étant donné un nombre a>0, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n tels que $u_n \leq a$;
[2001] chaque fois qu'on se donne un nombre a > 0, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n tels que $u_n \leq a$;

(b) la suite $(u_n)_n$ n'est pas bornée ;

(c) pour tout M réel, il y a une infinité d'entiers n tels que $u_n \geq M$;

(d) pour tout $r > 0$, on peut trouver un entier n tel que $u_n \geq r$;

(e) pour tout $b > 0$, on peut trouver un entier n tel que $u_n \geq b^2 - b$;

(f) u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Hors-sujet

XIII. 2001

On a posé la question suivante à un étudiant : la proposition (P) suivante est-elle vraie ?

(P) : "$\forall(x, y)\in R^2$, si $y^2 -2xy + 8x + 9 \leq 0$, alors $|y| \leq 2|x| + 4$".

Il a donné la réponse suivante :

"L'assertion (P) est fausse. En effet, l'hypothèse signifie que l'on a $(y - x)^2 \leq (x - 4)^2 - 25$; mais si $-1 < x < 9$, alors $(x - 4)^2 - 25 < 0$, donc l'hypothèse n'est pas vérifiée, et n'impose donc aucune contrainte à y (on est dans la bande]-1,9[") ; mais la conclusion, dans ce cas, entraînerait sur y la contrainte $|y| \leq 22$, ce qui serait absurde".

Que diriez-vous à cet étudiant ?

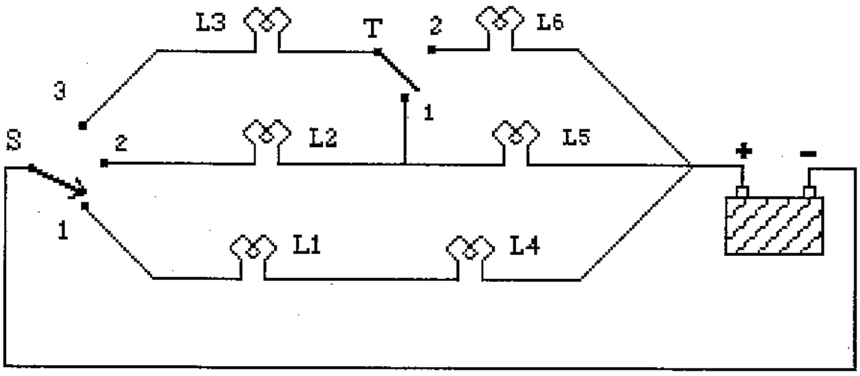
Assertion non calculable à prémisse fausse : circuit de Legrand

XVII. 1999 / XV 2001

Le circuit électrique ci-dessous comporte six lampes identiques notées L1, ..., L6, et deux commutateurs S et T ; S peut prendre trois positions S1, S2, ou S3, et T peut prendre deux positions T1 ou T2.

(a) Que peut-on dire de la vérité de l'assertion suivante
"si L1 est allumée ou si L6 est allumée, alors L3 est allumée ou L4 est allumée" ?

(b) Que peut-on dire de la vérité de l'assertion suivante
"si L1 est allumée et si L3 est allumée, alors L2 est allumée et L5 n'est pas allumée" ?



Question de contrat social (les bonbons de la maîtresse)

XVIII. 1999 / XVI 2001

Dans une école primaire, la maîtresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit : "cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".

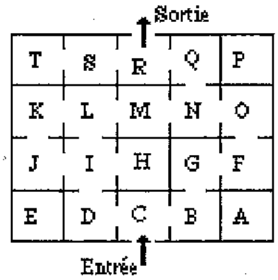
Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maîtresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent : "Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons !". Goguenarde, la maîtresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat ...

Quels commentaires vous inspire ce récit ?

Assertion non calculable à prémisse fausse : labyrinthe de Durand-Guerrier

XIX. 1999 / XVII 2001

Une personne nommée X a traversé le labyrinthe ci-dessous, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte. Les pièces séparées parles portes sont notées A, B,..., T.



Pour chacune des sept phrases suivantes, dire si elle est vraie, si elle est fausse ou si on ne peut pas savoir :

(1) X est passé par T ;
(2) X est passé par N ;
(3) X est passé par M ;
(4) si X est passé par O, alors X est passé par F ;
(5) si X est passé par K, alors X est passé par L ;
(6) si X est passé par L, alors X est passé par K ;
(7) si X est passé par S, il est passé par T.

Assertion calculable à prémisse fausse (fonction)

XVIII. 2001

Un étudiant A affirme que la proposition (I)

(I) : $\forall x \in \mathrm{R}$, si $x^2 + 1 \leq 0$, alors$(x^2 + 1)^2 \leq 0$

est vraie, et justifie ainsi son affirmation :

"On a $(x^2 + 1)^2 = x^2(x^2 +1) + (x^2 + 1)$, donc si $x^2 + 1 \leq 0$, alors $x^2(x^2 + 1) \leq 0$, et $(x^2 +1)^2$ est la somme de deux quantités négatives, donc est négative".

Un étudiant B conteste son affirmation ainsi :

"Mais c'est absurde ! L'hypothèse $x^2 + 1 \leq 0$ n'est jamais vraie, ni la conclusion $(x^2 + 1)^2 \leq 0$!De plus, quel que soit le signe de $x^2 + 1$, son carré est évidemment strictement positif ! Cette assertion est donc complètement fausse !"

Que pensez-vous de ce dialogue … et de la proposition (I) ?

Annexe 3 : les différences femmes (à gauche dans le diagramme)/ **hommes** (à droite)

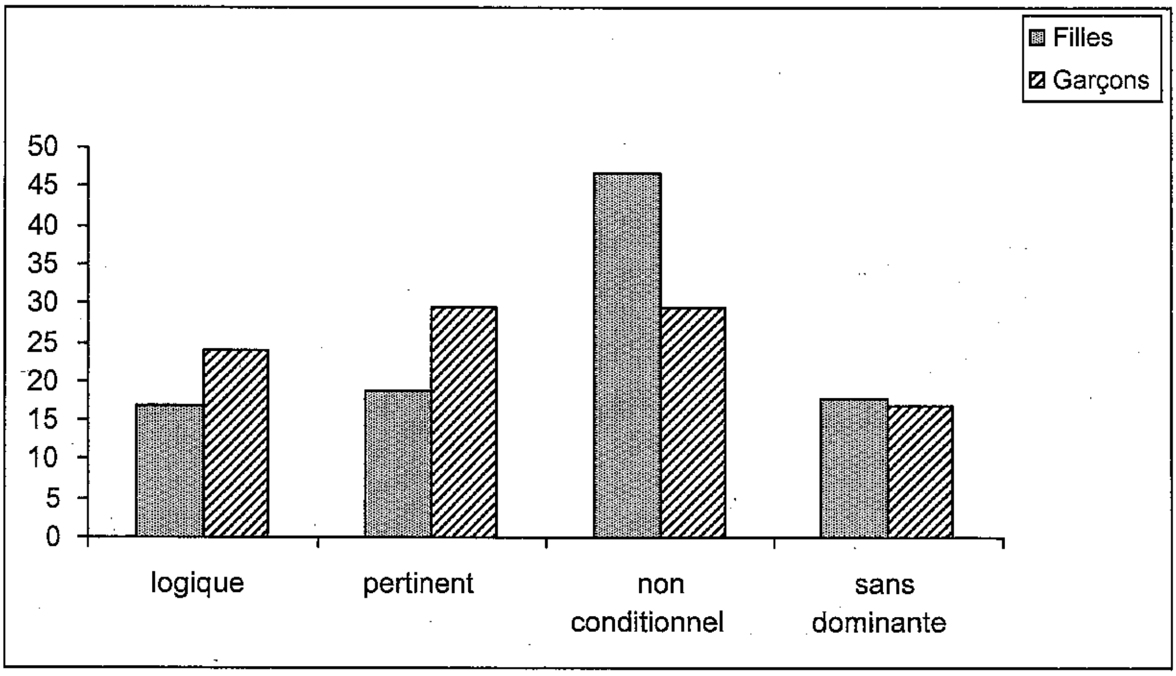


Figure D. *Distribution des profils selon le sexe (test1 + test2 ; N=178)*

Annexe 4. Le faux entraîne le faux, quelques exemples

En psychologie cognitive, les questions sont centrées sur des cas d'inférences où "le vrai entraîne le vrai". Manketow exprime par exemple que "la déduction conserve la vérité" (*Deduction is truth-preserving*), ce qui est exact, mais correspond à une orientation des recherches sur l'implication vers les seules situations où on part du vrai (ou du connu). Mankeltow souligne aussi dans son introduction que "la déduction n'augmente pas l'information: il n'y a pas plus de représentations du monde qui sont exprimées par la conclusion qu'il n'y en avait d'exprimées dans les prémisses. Au mieux, la déduction rend explicite ce qui est déjà là." ("*it does not increase information: no more models are ruled out by the conclusion than were ruled out by the premises. A deduction at best makes explicit what was already there.*". Une telle interprétation exclut les implications à hypothèse fausse et conclusion vraie. (Mankeltow relève par ailleurs le fait qu'on porte aussi des jugements de vraisemblance ; de ce point de vue, il a été montré que l'incertitude sur la vérité des prémisses se transmet aux conclusions).

Ces propriétés avancées pour l'implication peuvent conduire à glisser de "la conservation de la vérité" à"la conservation de la valeur de vérité" : les difficultés observées en programmation dans l'écriture des conditions sous forme de test sur une variable logique, indiquent que même les étudiants de mathématiques ont des problèmes à bien différencier les deux. De là à passer au "théorème en acte" "dans l'implication "le vrai entraîne le vrai et le faux entraîne le faux", il n'y a qu'un pas.

Nous en avons trouvé un bel exemple dans un numéro de"Sciences Humaines" (mai 2001) consacré à l'intelligence. Sur les formes de raisonnement on y trouve (p. 29) une illustration avec des perroquets, et la"légende" suivante :

"Tous les perroquets ont des ailes ; tous les oiseaux ont des ailes ; donc, tous les perroquets sont des oiseaux."Beaucoup de personnes se laissent piéger par ce type de raisonnement qui n'est pas valide logiquement. Par contre, le syllogisme suivant :"Tous les perroquets sont des marins ; tous les marins sont des cachalots ; donc, tous les perroquets sont des cachalots"est un raisonnement parfaitement valide, même si chacune des prémisses qu'il contient est absurde. ***Et donc****, la conclusion aussi. CQFD.*

La lecture du texte lui-même (p. 29) confirme que le "donc" qui relie l'absurdité de la conclusion à celle des prémisses (et donc relève de la conservation de la valeur de vérité : vrai, faux ou absurde !) n'est pas là par hasard :

.. *"Beaucoup de sujets se laissent abuser par le raisonnement suivant : "Tous les perroquets ont des ailes ; tous les oiseaux ont des ailes ; donc, tous les perroquets sont des oiseaux." Car si chacune de ces propositions est empiriquement vraie, le raisonnement, lui, n'est pas valide. Pour se rendre compte de la faille logique, il suffit de remplacer "perroquets" par"mouches". Les mouches ont des ailes, tout comme les oiseaux, mais on ne peut en conclure que les mouches sont des oiseaux ... Inversement, tout le monde admet que le raisonnement suivant conduit à une absurdité :"tous les perroquets sont des militaires ; tous les militaires allaitent leurs petits ; donc, les perroquets allaitent leurs petits."*

Pourtant, le raisonnement lui-même est parfaitement rigoureux. Ce sont les prémisses, et ***partant*** *la conclusion, qui sont fausses*".

Un autre exemple a été relevé dans le traitement par des stagiaires et leur instructeur dans le cadre de la préparation à l'utilisation de la résonance magnétique pour tester la qualité de pièces d'acier. Il s'agit d'une implication physique introduite pour tester l'acquisition des connaissances sur l'aimentation, et plus particulièrement la connaissance que l'existence des pôles d'une barre aimantée est indépendante de la forme de la barre (si elle reste assez "ouverte").

La conditionnelle suivante est introduite : "*si on tord une barre aimantée (sans la chauffer) alors elle garde ses deux pôles*". Il s'agit de choisir la bonne réponse parmi quatre (c'est vrai).

Les stagiaires savent par ailleurs qu'une barre fortement chauffée perd son aimantation.

Les réactions des stagiaires à cette question sont : "*on peut pas*" (tordre une barre sans la chauffer), "*ça n'a pas de sens*", et contestent la pertinence de la réponse dite "correcte". L'instructeur répond en se réfugiant derrière le fait que "tout ça c'est abstrait". Un autre exemple du même ordre est cité par l'auteur qui le traite dans le cadre de sa problématique, qui ne concerne en rien la logique (Delgoudet, C. (2001). La construction des liens entre situations de travail et situations d'apprentissage dans la formation professionnelle. PISTES, 3(2).http://www.unites.uqam.ca/pistes/v3n2/articles/v3n2a2.htm.)

Dimensions sensibles des situations de tutelle et travail de l'enseignant de mathématiques

Marie-Paule VANNIER-BENMOSTAPHA

Directrice d'école d'application
Formatrice associée à l'IUFM de Créteil (centre de Melun)

Le travail de recherche présenté ici a été mené en étroite collaboration avec Maryvonne Merri[1], et a fait l'objet d'une thèse, soutenue en octobre 2002, sous la direction de Gérard Vergnaud (Vannier-Benmostapha, 2002). Il s'agit de décrire et de comprendre les compétences professionnelles mises en œuvre par les enseignants lorsqu'ils aident leurs élèves à résoudre des problèmes mathématiques. Enseignants et élèves appartiennent à trois institutions scolaires différentes : la CLIPA (ou Classe d'Initiation Préprofessionnelle en Alternance[2]), la 4ème technologique agricole[3] et le CM2 (dernière année de l'école primaire).

Cette étude participe au développement d'une didactique professionnelle. En effet, en privilégiant l'observation de classes dans lesquelles les élèves sont reconnus en grande difficulté, nous souhaitons contribuer à une formation spécifique des professeurs intervenant auprès de ces publics tels que les professeurs de lycées professionnels, les formateurs de CFA (Centre de Formation d'Apprentis) voire les enseignants spécialisés intervenant dans les SEGPA (Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté).

---

[1] Maryvonne Merri est Maître de Conférences en Psychologie des processus d'apprentissage à l'Ecole Nationale de Formation Agronomique (ENFA). Notre collaboration s'inscrit dans un contrat entre le Ministère de l'Agriculture et de la Pêche (MAP) et l'ENFA, au titre de l'appel d'offres "*Professionnalité des enseignants du MAP : spécificités, nouveaux contextes, évolutions des rôles et des fonctions, conséquences pour la formation* " (période 1997-2000)

[2] « *Ces classes accueillent à partir de l'âge de quatorze ans, (et de préférence avant l'âge de dix-huit ans), des élèves sous statut scolaire qui choisissent d'acquérir un enseignement préprofessionnel par la voie de l'alternance. Il en existe douze en France dans l'enseignement agricole.* » (Brochure du Ministère de l'Agriculture et de la Pêche, 2001). Il existe également des CLIPA dans l'Education Nationale.

[3] « *Les classes de quatrième et troisième technologiques ont pour finalité d'accueillir les élèves attirés par un enseignement moins abstrait et non des élèves en difficulté pour lesquels d'autres dispositions sont à envisager. Leur originalité est de prendre appui sur un enseignement technologique important permettant la mise en œuvre de projets techniques dans le cadre d'un projet pédagogique global* » (Préface des Programmes de 1990). Ces classes ont été créées officiellement en 1990, (mais existaient à titre expérimental depuis 1984). Elles ont été supprimées en 1996 dans l'Education Nationale alors qu'elles demeurent, à ce jour, maintenues dans les lycées professionnels de l'enseignement agricole.

1. La définition de l'objet de recherche

1.1 Un projet de didactique professionnelle

Le projet de la didactique professionnelle, initié par Pastré (1992), comporte plusieurs étapes allant de l'identification des situations problématiques, auxquelles les professionnels sont confrontés dans l'exercice de leur métier, jusqu'à l'élaboration d'ingénieries de formation, favorisant le développement des compétences professionnelles ainsi identifiées et la construction des savoirs de référence sous-jacents aux conduites expertes.

Dans ce travail, notre réflexion porte essentiellement sur l'articulation entre des *savoirs théoriques* disponibles dans deux grands domaines – en psychologie des apprentissages et du développement des connaissances (ou psychologie cognitive) et en didactique des mathématiques - et des *savoirs pratiques*, produits de l'expérience des sujets. Notre souci a été de faire correspondre deux logiques : celle d'une théorie de l'apprentissage, qui définit les conditions nécessaires au développement des connaissances de tous les élèves, et celle de l'activité de l'enseignant dans des contextes institutionnels particuliers.

1.2 Une question récurrente en formation

Notre investissement dans la formation professionnelle nous conduit à privilégier l'analyse des aspects problématiques de l'activité enseignante. En effet, l'intérêt de la recherche et son écho positif parmi les professionnels dépendent essentiellement de la pertinence des questions auxquelles tente de répondre le chercheur au regard des difficultés rencontrées sur le terrain par les praticiens. Autrement dit, le rôle du chercheur est de transformer les questions du terrain en problématiques relatives à des théories dans son champ disciplinaire.

Nous isolons une question récurrente en formation initiale et continue des enseignants : comment aider les élèves qui rencontrent des difficultés dans les apprentissages ? Les psychologues intervenant en formation des enseignants assimilent le plus souvent cette question aux problématiques de la *médiation* et de la *tutelle*. Aussi avons-nous choisi d'étudier l'*activité de tutelle* des enseignants.

Le choix des mathématiques répond à une double préoccupation, de chercheur et de formateur : le peu de prise en compte, dans les propositions didactiques, de la spécificité de l'enseignement des mathématiques à des publics en grand échec scolaire et l'absence de formation didactique des professeurs chargés d'enseigner cette matière à ces publics, les deux étant liés sans doute.

1.3 Une analyse ergonomique

Plutôt que de décrire la totalité des compétences en jeu dans l'activité de l'enseignant, nous nous sommes intéressée aux compétences « critiques » - au sens de « remarquables » - mises en œuvre par chacun, étant donné un contexte particulier d'enseignement. Autrement dit, la notion de *compétence critique* correspond à une adaptation optimale du sujet au système de contraintes et de ressources de la situation de travail. C'est en ce sens que nous parlerons d'analyse ergonomique de l'activité professionnelle observée.

En référence aux propositions de Vergnaud (1996, 2001), nous appréhendons la notion de compétence en relation avec celle de conceptualisation. En effet, si l'acception la plus courante de la compétence est relative à la performance (le sujet est jugé compétent s'il réalise la tâche), la compétence peut également être évaluée en fonction de la nature des procédures mises en œuvre par le sujet pour réaliser la tâche (le sujet s'y prend de telle ou telle manière, jugée plus rapide, plus économique, plus fiable...) ou plus finement encore, en considérant non pas la nature des conduites en soi, mais leur adaptation aux variables de la situation (le sujet adapte sa réponse à la diversité des cas rencontrés). Autrement dit, est compétent celui qui dispose de catégories de lecture du réel suffisamment élaborées pour distinguer une variation là où un sujet moins compétent ne percevra pas de différence.

Ce dernier niveau de définition de la compétence fait référence à la théorie de la représentation dont le concept de schème est l'élément central (Vergnaud, 1985). L'adaptation du sujet en situation suppose, en effet, une conceptualisation du réel dont les deux premiers niveaux de définition ci-dessus ne rendent pas compte. Mais l'activité doit également intégrer les deux niveaux précédents : elle est orientée vers un but et exige des conduites disponibles.

Décrire et comprendre l'activité de tutelle mise en œuvre par les enseignants en termes de compétences critiques suppose donc que nous disposions, d'une part d'une théorie de la tutelle qui prenne en compte la spécificité des apprentissages mathématiques dans un cadre scolaire, d'autre part, d'une méthodologie adaptée à l'observation de compétences critiques.

2. L'élaboration d'un cadre théorique

La thèse développée est issue d'un triple ancrage théorique : en psychologie des apprentissages, en didactique des mathématiques et en ergonomie cognitive. La volonté d'articuler ces trois points de vue nous conduit : 1) à élargir le concept de tutelle, proposé par les psychologues, aux situations scolaires, avec enjeu de savoir ; 2) à déterminer une méthodologie particulière d'analyse des pratiques, prenant en compte les conditions spécifiques du travail de l'enseignant, dans des contextes institutionnels donnés, principalement auprès d'élèves en grande difficulté ;3) à privilégier des études de cas qui ouvrent la discussion sur les compétences à développer pour améliorer l'efficacité de l'enseignement auprès de cette catégorie d'élèves.

2.1 La référence aux propositions brunériennes

La recherche princeps de Wood, Bruner et Ross (1976) occupe une place privilégiée dans notre travail. Ce choix répond à une double préoccupation : il s'agissait, d'une part, de prendre en compte l'existence d'une telle référence dans les instances de formation; d'autre part, d'opérationnaliser la proposition brunérienne pour décrire et comprendre les interactions de tutelle dans le cadre scolaire.

Une tâche générique de tutelle pourrait être définie en ces termes : aider l'enfant à résoudre un problème qu'il ne saurait pas résoudre seul mais pour lequel il est néanmoins capable de reconnaître des solutions acceptables. Le programme de tutelle mis au point par Wood, Bruner et Ross correspond donc à une *approche fonctionnelle* de la tutelle : les tâches prescrites au tuteur permettent la réalisation des conditions nécessaires à l'activité selon la théorie de l'apprentissage socialement médiatisé avancée par Vygotski (1985). La tutelle représente un des moyens de réaliser la médiation culturelle.

L'analyse de l'activité de la tutrice aboutit à la définition de six fonctions de tutelle : l'enrôlement dans la tâche, le maintien de l'orientation, la réduction des degrés de liberté, la signalisation des caractéristiques déterminantes, le contrôle de la frustation et la démonstration.

Nous distinguons, pour notre part, deux acceptions du terme « fonction ». En effet, il correspond : 1/- aux conditions générales à réaliser pour que l'activité de l'enfant ait lieu. Les auteurs nous semblent alors distinguer, en ce sens, la fonction *d'enrôlement*, la fonction *de prise en charge* des éléments qui dépassent la compétence du sujet, et enfin, la fonction *d'assurance* de l'activité du sujet. Nous parlerons à ce propos de *modèle tri-fonctionnel « enrôlement – prise en charge – assurance »* ;2/- au type d'action du tuteur nécessaire à l'activité de l'enfant. Ces actions sont basées en partie sur l'importance théorique de l'imitation et du langage dans l'apprentissage socialement médiatisé. Les actions du tuteur réalisent alors, en ce sens aussi, les conditions des progrès de l'activité du sujet.

2.2 Le modèle tri-fonctionnel « enrôlement – prise en charge – assurance »

L'étude des conditions d'émergence du concept de tutelle nous conduit à définir un modèle tri-fonctionnel *enrôlement – prise en charge – assurance* (document 1) à partir de la catégorisation initialement proposée par Bruner (1983).

Ce modèle rend compte des trois conditions d'une tutelle efficace :

1. que l'élève accepte de résoudre le problème ;
2. que l'élève puisse bénéficier d'une aide nécessaire suffisante et adaptée ;
3. que l'élève puisse être assuré dans sa compétence.

<u>ACTIONS DU TUTEUR SUR L'ACTIVITE DE L'ENFANT</u>	<u>CONDITION DE MAINTIEN DE L'ACTIVITE</u>
<u>L'enrôlement dans la tâche</u> : le tuteur engage l'intérêt et l'adhésion de l'enfant	**ENROLEMENT**
La réduction des degrés de liberté : le tuteur simplifie la tâche jusqu'au niv eau où l'enfant peut reconnaître qu'il a réussi ou non à répondre aux exigences de la tâche Le maintien de l'orientation : le tuteur maintient l'enfant dans la poursuite d'un objectif défini <u>La signalisation des caractéristiques déterminantes</u> : le tuteur signale les caractéristiques de la tâche qui sont pertinentes pour son exécution La démonstration : le tuteur présente des modèles de solution. Il procède à une certaine stylisation de l'action.	**PRISE EN CHARGE**
Le contrôle de la frustration : le tuteur installe un climat de confiance	**ASSURANCE**

<u>Document 1</u> : Le modèle tri-fonctionnel *« Enrôlement – Prise en charge – Assurance »*

Chacune de ces trois fonctions prend place dans un continuum qui signifie le transfert de responsabilité[4] opéré dans le cadre d'un apprentissage socialement médiatisé (Vygotski, 1985 ; Rogoff, 1990).

2.2.1 Le caractère « critique » des fonctions d'enrôlement et d'assurance auprès des élèves en difficulté

La *prise en charge* est, de loin, la fonction de tutelle la plus étudiée par les psychologues[5], à tel point qu'existe un risque de confusion entre cet aspect du concept et le concept lui-même. S'il est vrai que cette fonction reste le vecteur du progrès cognitif, l'observation de l'activité de tutelle auprès d'élèves en grande difficulté révèle le caractère *critique* des fonctions d'enrôlement et d'assurance. L'expérience de l'échec répété (ou le manque d'expérience de la réussite) handicape la prise de risque nécessaire à l'apprentissage (entreprendre sans savoir faire a priori). Le sentiment de compétence nécessaire à toute activité autonome fait souvent défaut et les élèves ont alors tendance à s'installer dans une relation de dépendance qui leur assure un minimum de réussite. L'idée même de continuum permet de penser les risques de confusion entre fonctions (ou faux-semblants) : croyant s'ajuster aux besoins avérés des élèves, l'enseignant ne fait que sur-étayer un semblant d'activité, au risque de « tuer » l'apprentissage.

2.2.2 La notion de « sur-étayage »

Parler de « sur-étayage » ou d' « over-sacaffolding », c'est faire référence aux travaux menés par Wood auprès d'enfants sourds (Wood, 1989). La catégorisation des actes de tutelle proposée par Wood est fondée sur la distinction entre deux modes d'interventions possibles : le mode verbal et le mode non-verbal[6]. Le recours au langage est un moyen pour le tuteur d'agir de moins en moins directement sur l'activité de l'enfant. Or intervenir auprès d'enfants sourds prive le tuteur du recours au seul mode verbal. L'enseignant a alors tendance à trop aider ses élèves, les privant ainsi du bénéfice cognitif des interactions.

Les trois risques principaux liés au sur-étayage établissent, selon nous, une première définition « en creux » de ce que pourrait être une bonne intervention de tutelle :

- Trop d'aide nuit à l'activité cognitive : l'élève ne cherche plus à résoudre le problème posé ;
- Trop d'aide prive l'élève du contrôle de son activité : l'élève ne peut plus reconnaître si son activité répond aux exigences de la tâche ;
- Trop d'aide génère chez l'élève un sentiment d'incompétence et de possibles répercussions sur son comportement général face à l'apprentissage.

---

[4] Pour Rogoff, un vrai guidage comporte un transfert de responsabilité du tuteur à l'élève. Cette proposition introduit une dimension diachronique dans la tutelle. Elle reprend une importante thèse vygotskienne : le tuteur doit assurer le passage d'une pensée intersubjective à une pensée intrasubjective (Rogoff, 1990).

[5] Une étude approfondie des nombreux travaux consacrés à l'analyse de l'activité de tutelle étaye notre propos. Nous proposons, en effet, dans la partie théorique de la thèse (chapitres 3 à 5) une analyse détaillée de la littérature psychologique traitant de problématiques faisant écho aux propositions brunériennes.

[6] Pour une analyse approfondie des propositions de Wood en terme d' « approche contingente », le lecteur pourra se référer au chapitre 4 de la thèse présentée ici.

L'hypothèse avancée par Wood[7] selon laquelle l'origine des caractéristiques psychologiques des enfants sourds pourrait être le sur-étayage de l'adulte dans l'aide à la résolution de problèmes, apparaît particulièrement intéressante pour aborder le paradoxe de l'intervention auprès de certains publics reconnus en difficulté. Cette hypothèse rejoint la critique faite par Vygotski sur l'enseignement aux élèves en difficulté. La tendance, avec de tels enfants, est d'enseigner à la limite inférieure de la ZPD. De tels tuteurs renforcent eux aussi le sentiment d'incompétence des élèves (Vygotski, 1985).

2.3 Les quatre niveaux d'intervention didactique

La problématique brunérienne traite de l'aide à la réalisation d'une tâche particulière sans enjeu de construction de savoirs. Mais l'école, en tant qu'institution, a une responsabilité que n'a pas le laboratoire : l'apprentissage de savoirs définis par des programmes officiels. L'exécution de la tâche n'est qu'un levier : encore faut-il tirer bénéfice de cette réussite. Autrement dit, l'interaction et la performance fondent une situation qui doit également permettre la construction du savoir. Le contexte scolaire implique, par conséquent, la prise en compte de niveaux d'intervention situés en amont et en aval de la seule collaboration in situ.

Nous proposons un élargissement de la définition de la tutelle à toute intervention sur l'activité de l'élève allant du choix de la situation à la mise en exergue d'un savoir. La définition de quatre niveaux d'intervention hiérarchisés situe ainsi l'activité de tutelle de l'enseignant (au sens strict du terme) dans une perspective plus large de médiation culturelle (document 2 ci-dessous).

Le premier niveau d'intervention correspond à la définition d'un projet didactique en amont de l'interaction avec la classe : l'enseignant organise les conditions de l'activité de ses élèves. S'ajoutent à cette tâche initiale et fondamentale, trois autres tâches déterminantes pour l'apprentissage. Ces tâches sont comprises comme une extension du modèle tri-fonctionnel *enrôlement – prise en charge – assurance* à la problématique de construction de savoirs mathématiques, en référence à la théorie des situations didactiques (Brousseau,1986).

Ainsi, notre définition de l'enrôlement comprend des gestes de *dévolution* du problème à l'élève (niveau 2 d'intervention) tandis qu'à l'autre extrémité du processus didactique, la fonction d'assurance englobe les gestes *d'institutionnalisation* (niveau 4 d'intervention). Le point de vue psychologique sur la tutelle s'est donc enrichi d'une dimension épistémologique.

Le troisième niveau d'intervention didactique correspond à toutes les aides apportées au cours de la réalisation effective de la tâche par les élèves. L'enseignant prend alors en charge une partie de l'activité de l'élève de manière à permettre à celle-ci de se poursuivre et d'être menée à bien.

Ce travail d'élaboration théorique précise la proposition de Vergnaud (1994) qui distingue, pour sa part, deux grandes catégories d'actes dans l'activité de l'enseignant : le choix de la situation (niveau 1 d'intervention) et l'action sur les composantes du schème de l'élève (niveau 3).

---

[7] *Aspects of « deaf psychology » such as egocentrism, rigidity, and impulsivity, I have argued, are not inevitable, biological consequences of the disability but products of such distorded experiences in social interaction. » (Wood, 1989, p 78).*

1 - Choisir la situation

L'enseignant définit un projet didactique adapté aux élèves de sa classe : il organise une mise en scène de l'apprentissage visé.

2 – Faire émerger le problème

L'enseignant favorise l'émergence du problème : il fait en sorte que les élèves se rendent compt e de l'insuffisance de leurs propres compétences pour résoudre le problème posé. Il s'agit d'organiser, in situ, la rencontre des élèves avec leur propre ignorance, source de l'apprentissage par adaptation.

3 – Aider à la résolution du problème

L'enseignant peut être amené à répondre à des besoins locaux pour permettre à l'activité de se poursuivre.

Il dispose, pour cela, de toute une panoplie de ressources. Le cadre de la classe lui permet, par exemple, de déléguer à d'autres élèves l'apport d'une aide locale.

4 – Favoriser l'entrée dans la culture

L'enseignant décontextualise la compétence acquise en évaluant sa pertinence par rapport au passé et à l'avenir du développement des connaissances de l'élève. Il établit les liens nécessaires entr e concepts de manière à favoriser la structuration du savoir. Il peut également introduire des objets qui resteront pendant longtemps au - delà des possibilités des élèves. Il construit ainsi, en quelque sorte, la zone de proche développement de l'élève en l ui permettant d'inscrire son activité autonome dans le long terme de l'apprentissage.

Document 2 : Les quatre niveaux d'intervention didactique

2.4 L'action de l'enseignant sur le répertoire de schèmes de l'élève

La conceptualisation est au cœur de l'activité cognitive (Vergnaud, 1996). Pour autant, l'activité cognitive ne se réduit pas à sa composante conceptuelle : reconnaître un problème ne suffit pas à le résoudre. Le sujet doit être capable de décider de la tâche (ou des tâches) à réaliser pour résoudre le problème ; de disposer des moyens de réaliser cette tâche (c'est-à-dire d'atteindre le ou les buts qu'il s'est fixés dans les conditions particulières de la situation) ; de contrôler la validité de la solution trouvée. Le concept de schème intègre ces différentes composantes dans un tout organisé en système[8].

La définition analytique du schème permet de distinguer la nature des actes en fonction de leur effet supposé sur l'une ou l'autre composante de l'activité de l'élève. Cette distinction est importante. Elle invite notamment à repérer les éléments privilégiés par l'enseignant et/ou d'en

[8] Vergnaud définit le concept de schème en ces termes : « *En affinant, progressivement la définition d'un schème, je dirai d'abord que (1) c'est une totalité dynamique fonctionnelle, c'est-à-dire quelque chose qui fonctionne comme une unité ; en second lieu que (2) c'est une organisation invariante de l'activité[8] pour une classe de situations données (l'algorithme est un cas particulier du schème) ; et en troisième lieu (3) qu'un schème est composé de quatre catégories d'éléments : des buts, intentions et anticipations ; des règles d'action, de prise d'information et de contrôle[8] ; des invariants opératoires ; des possibilité d'inférences en situation* ». (Vergnaud, 1994, p284))

évaluer l'absence éventuelle. Julo (1996) montre, à ce propos, que l'une des spécificités de l'enseignement à des élèves en difficulté est d'en rester au niveau de la composante à proprement parler opératoire de l'activité (c'est-à-dire la mise en œuvre de règles d'action), alors que la principale difficulté rencontrée par ces élèves, en situation de résolution de problèmes mathématiques, réside dans une incapacité à se représenter les exigences de la tâche. Face à certains publics, l'aide à la sélection des informations pertinentes devient alors une compétence critique de l'activité de l'enseignant.

Paour insiste, quant à lui, sur le besoin d'étayer les opérations de contrôle permettant le maintien du niveau d'exigence de la tâche. Dans le cadre d'une activité autonome, l'élève doit en effet maintenir un niveau d'exigence suffisant pour pouvoir dépasser l'immédiateté de la réponse. Or les élèves les plus en difficulté présentent justement *un degré d'exigence interne faible*[9] : *« Alors que les enfants brillants se contraignent à donner une réponse pertinente, pour les retardés et les " moyens ", l'essentiel semble être de répondre. C'est d'ailleurs un fait d'observation courante que les retardés mentaux et les élèves en échec scolaire ont généralement une attitude très peu critique vis-à-vis de leurs réponses »*. (Paour, 1988).

2.5 Le lien *situation/schème*

L'action sur l'une ou l'autre composante du schème de l'élève est médiatisée par la situation didactique choisie. Vergnaud (1994) distingue deux catégories de situations : des situations dites « de résolution de problème », pour lesquelles le sujet ne dispose pas de schèmes adaptés et des situations « d'exercice » de schèmes existants[10]. Nous parlerons, pour notre part, de situation de *découverte* ou de situation de *réinvestissement.*

2.5.1 Les situations de réinvestissement

Trois types de projets rendent compte, selon nous, des situations dites « de réinvestissement » (par opposition aux situations « de découverte ») :

- *Automatiser un schème* : le projet de l'enseignant est d'inciter les élèves à exercer un schème particulier. C'est l'idée d'*entraînement.*
- *Accroître la portée des schèmes* en introduisant un peu de variété à la marge des situations connues. C'est l'idée d'*élargissement.*
- *Affiner l'efficacité des schèmes* en privilégiant l'étude de sous-classes de situation. C'est l'idée d'*approfondissement.*

[9] Selon Paour " *Le degré d'exigence influence l'ensemble des étapes de la résolution [...] et conditionne son arrêt (exigence de cohérence et de non-contradiction, degré de satisfaction)* " (Paour, 1988, p 200). Nous faisons ici référence à l'hypothèse du sous-fonctionnement cognitif développé par Paour (1988) dans ses travaux sur les retardés mentaux. Relatant la réalisation d'une tâche de classification où il était demandé aux sujets de trouver toute une série de nouveaux classements, l'auteur remarque que les élèves le plus en difficulté répondent en proposant des classements déjà effectués là où les autres affirment ne pas pouvoir en donner de nouveaux tant qu'ils n'en sont pas capables effectivement.

[10] *« Le rôle de l'enseignant, c'est d'abord d'offrir des occasions d'exercer des schèmes existants, de mieux contrôler les opérations et les conditions, d'en automatiser certaines parties, et de développer des schèmes nouveaux, des conceptualisations et des règles d'actions nouvelles face à des buts et des tâches inhabituels »*. (Vergnaud, 1994)

L'élargissement et l'approfondissement de l'efficacité des schèmes relèvent d'un processus d'apprentissage par adaptation au même titre que la découverte de nouveaux schèmes bien qu'il s'agisse d'accommodations beaucoup plus locales. Le jeu des variables didactiques représente alors un ressort important des situations de réinvestissement.

L'analyse des compétences professionnelles doit prendre en compte cet aspect critique de l'activité de l'enseignant : il est sans doute plus difficile d'organiser des situations de réinvestissement qui répondent aux critères de l'apprentissage par adaptation. Face à certains publics, le défi est encore plus grand car l'expérience de l'échec répété conduit le plus souvent les élèves à refuser de jouer le jeu de l'ignorance. Toute la difficulté de l'enseignement tient alors dans cette tension entre *déstabilisation* et *stabilisation* des connaissances : si l'enseignant ne parvient pas à déstabiliser les connaissances déjà-là, les élèves n'apprennent pas ; s'il les déstabilise trop, ils n'apprennent pas non plus ! L'apprentissage suppose des exercices, des répétitions avec cependant une variété suffisante pour que les élèves ne s'ennuient pas trop. C'est à cette exigence que doivent répondre les situations de réinvestissement.

2.5.2 Les situations d'action, de formulation et de validation

Brousseau distingue trois catégories de situations reposant respectivement sur les dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation des connaissances (Brousseau, 1986). Chacune de ces dialectiques privilégie l'action sur l'une des deux formes de la connaissance : la dialectique de l'action agit principalement au niveau de la forme opératoire (le répertoire de schèmes) alors que les dialectiques de la formulation et de la validation visent le développement de la forme prédicative de la connaissance (les énoncés et conceptions)[11]. Nous comprenons ces dialectiques comme autant de catégories d'action sur les systèmes d'invariants opératoires ou sur la composante conceptuelle de l'activité. Ainsi,

- *Les situations d'action* sont l'occasion de développer des invariants *opératoires*, c'est-à-dire des invariants *permettant de résoudre le problème posé*. Ces invariants peuvent rester totalement implicites à moins que la résolution du problème ne s'accompagne de commentaires et/ou de demandes de verbalisation des opérations de pensée ;
- *Les situations de formulation* donnent un nouveau statut aux invariants opératoires. D'implicites, ils deviennent explicites et communicables. Dans la théorie des situations, la formulation des connaissances mobilisées dans l'action ne s'arrête pas, en effet, à la seule mise en mots : des exigences de communicabilité sont également requises. La dialectique de la formulation va par conséquent plus loin que la seule prise de conscience : le sujet peut avoir compris le comment et le pourquoi de ses actions (statut explicite des connaissances) sans pour autant être capable de les communiquer à autrui (statut social des connaissances). Le « réussir et comprendre » de Piaget (1974a, 1974b) est enrichi par le caractère social de l'apprentissage et du développement ;
- *Les situations de validation* permettent encore d'affiner la formulation des connaissances : la confrontation de points de vue différents, voire contradictoires, amène les élèves à développer des arguments pertinents pour convaincre. Elle les conduit également à s'intéresser à d'autres perspectives sur la résolution du problème. Nous reconnaissons là les phénomènes de décentration mis en évidence dans la théorie piagétienne.

[11] En référence à la théorie de la représentation proposée par Vergnaud qui distingue les deux formes de la connaissance *opératoire* et *prédicative*.

Enfin, l'imbrication des milieux de l'action, de la formulation et de la validation concourt à l'institutionnalisation d'un savoir mathématique. L'action de l'enseignant vise alors à articuler les productions du système didactique (c'est-à-dire les énoncés sur lesquels les élèves se sont mis d'accord) avec la Culture mathématique. L'action de l'enseignant sur le répertoire de schèmes doit, en conséquence, être appréhendée au-delà de la seule confrontation des élèves à une situation particulière (cf. supra le niveau 4 d'intervention didactique).

3. Les conditions de l'analyse du travail de l'enseignant

3.1 La notion de *tâche redéfinie* en référence au modèle « *tâche-activité* »

Rogalski (2000) appréhende l'activité de l'enseignant comme « *la gestion d'un environnement dynamique particulier : le rapport de l'élève au savoir mathématique* ». Le modèle qu'elle propose, en référence aux propositions de Leplat (1997), met en relation trois types d'acteurs : les prescripteurs, les enseignants et les élèves (document 3)[12].

Les prescripteurs peuvent être les rédacteurs des programmes et instructions officielles, les membres des communautés scientifiques travaillant sur le système éducatif et les responsables politiques. Selon ce modèle, l'activité de l'enseignant comporte une double contrainte : le contrat professionnel qui lie l'enseignant aux institutions et le contrat didactique, système d'attentes réciproques entre les élèves et l'enseignant.

PRESCRIPTEUR	TACHE ATTENDUE (par la noosphère, prescripteur latent)
	TACHE PRESCRITE (par l'institution, dans les textes officiels)
ENSEIGNANTS : contrat professionnel entre prescripteurs et enseignants	TACHE REDEFINIE (par l'enseignant)
	TACHE REALISEE (effective)
	ACTIVITE DE L'ENSEIGNANT (observables et inférences)
ELEVES contrat didactique entre l'enseignant et l'élève	TACHE ATTENDUE DE L'ELEVE par l'enseignant (mise en œuvre de certains savoirs)
	TACHE PRESCRITE A L'ELEVE (consigne donnée)
	TACHE REDEFINIE (par l'élève)
	TACHE REALISEE (par l'élève)
	ACTIVITE DE L'ELEVE de l'ordre des observables pour l'enseignant ou à inférer par l'enseignant

Document 3 : Modèle d'analyse de l'activité de l'enseignant d'après Rogalski (2000)

[12] Notons la référence d'un article paru dans la revue RDM fin 2003, qui précise les propositions de l'auteur exposées ci-dessus : Rogalski, 2003, Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol.23, n°3, pp. 343-388.*

Lorsque le public est reconnu en difficulté, l'institution prescrit explicitement une aide individualisée aux élèves. Mais comme le défend Clot (1999), une référence à la tâche et à la compétence prescrites est insuffisante car elle n'est pas sensible aux dimensions subjectives de l'activité. Si la tâche redéfinie par le sujet comprend bien une interprétation des attentes du prescripteur, cette redéfinition par le sujet se fait également en fonction de ses intérêts et priorités personnelles et corporatistes.

C'est à travers la situation didactique créée par l'enseignant que le chercheur a accès à la tâche redéfinie. L'analyste du travail doit donc utiliser une méthodologie qui lui permette de dégager les « ingrédients » de cette situation didactique.

3.2 Les notions de *dimension sensible* et de *compétence critique*

L'enseignant définit une situation qu'il juge a priori adaptée aux caractéristiques des élèves de sa classe et du savoir, enjeu de l'apprentissage. Autrement dit, le projet et les conditions de sa mise en œuvre concourent normalement au développement des connaissances visées. Mais il s'agit là d'une définition idéale de l'activité professionnelle. En réalité, l'enseignant ne maîtrise pas toutes les conséquences du choix de la mise en scène. Des contradictions internes au projet, une mauvaise représentation des capacités réelles des élèves, une posture inadaptée représentent autant d'obstacles auxquels l'enseignant aura à faire face in situ. A quelles conditions l'activité de tutelle pourra-t-elle être menée à bien ? Pour répondre à cette question, le chercheur doit mettre à jour les systèmes de contraintes qui peuvent entraver une tutelle de bonne qualité. Ce sont ces systèmes de contraintes que l'on appellera *« dimensions sensibles »* du protocole. Une mise en scène qui privilégie la gestion collective d'un groupe très hétérogène ou, au contraire, une individualisation sans retour au groupe représentent, à ce titre, des dimensions sensibles de l'activité de tutelle. Deux cas peuvent être envisagés : 1) la mise en scène imaginée par le professeur semble favorable à l'apprentissage des élèves selon les critères théoriques retenus. Mais il semble que les caractéristiques des publics puissent mettre à mal le projet du professeur. La question de recherche devient alors *la caractérisation de l'activité de tutelle à déployer pour mener à bien ce projet* ; 2) la mise en scène imaginée par le professeur est conforme à une pratique privilégiée dans une institution scolaire donnée et/ou par son groupe professionnel d'appartenance. La question de recherche devient alors *l'examen de la validité de ces pratiques en rapport à la contingence et à la qualité de l'apprentissage.*

L'analyse des pratiques porte avant tout sur les réponses apportées in situ par les enseignants pour maintenir les conditions de l'apprentissage et non sur le choix a priori d'une mise en scène didactique. L'activité de tutelle est alors appréhendée dans sa dimension *critique* et la compétence professionnelle étudiée dans un rapport de nécessité : qu'est-ce que la situation exige comme compétences chez l'enseignant pour permettre l'apprentissage de tous les élèves ? La notion de *dimension sensible* réalise l'articulation nécessaire entre des exigences « théoriques » (théorie de la bonne tutelle) et des exigences « pratiques » (adaptation aux conditions d'exercice du métier).

L'observation de certaines conduites « qui font la différence » - celles qui consistent à laisser les enfants s'exprimer, les aider à le faire et obtenir qu'ils le fassent de manière constructive, par exemple – incite souvent les formateurs à évaluer positivement des pratiques professionnelles. Or, rien ne prouve que les conduites mises en œuvre aboutissent, in fine, au progrès cognitif attendu. Le risque est alors de confondre l'apprentissage et les moyens de l'obtenir. S'il est vrai que faire parler les élèves, animer un débat scientifique, organiser un travail de groupe sont autant de moyens de favoriser l'activité cognitive des élèves, les produits intermédiaires obtenus tels la formulation des procédures, la confrontation des points de vue, la coopération entre élèves ne doivent pas être confondus avec le produit lui-même défini en termes de savoir.

Est expert, celui qui parvient à maintenir les conditions de l'apprentissage dans n'importe quelle situation. La nécessité de répondre à certaines exigences des publics les plus en difficulté peut en particulier restreindre la marge de manœuvre des enseignants. Mais l'expérience professionnelle de l'enseignant et sa connaissance des publics enseignés lui permettent quelquefois de faire preuve d'un certain génie didactique (Mercier, 2001). Nous désignons donc comme *critique* la compétence de l'enseignant qui parvient à adapter sa conduite à un système de contraintes qui resteraient contradictoires pour une autre personne. Ce faisant, il maintient l'exigence d'apprentissage de la situation mise en œuvre.

4. Une méthodologie particulière

Notre échantillon comporte trois CLIPA, deux 4ème technologiques et cinq classes de l'école élémentaire. Huit enseignants au total ont participé à notre recherche. Deux d'entre eux ont été suivis sur deux années consécutives. Certains enseignants sont stagiaires alors que d'autres ont plus ou moins d'ancienneté dans le poste.

Nous avons demandé aux enseignants d'utiliser une même tâche de désignation de fractions[13] afin de créer[14] une ou plusieurs situations didactiques adaptées à *leurs* élèves. La ressource proposée est relativement brute. Un seul aspect du concept est travaillé : la fraction comme représentante d'une relation Partie/Tout. Aucune analyse en termes de « variables didactiques » n'est fournie aux enseignants. Il leur revient donc de dégager des savoirs, enjeux d'apprentissage pour leurs élèves, étant donné des programmations spécifiques.

La référence aux trois niveaux de scolarité nous a permis de questionner l'importance du statut du savoir dans la tutelle exercée. En effet, les élèves des classes retenues pour notre recherche sont également différentiables par la nouveauté ou l'usure de l'objet de savoir. Alors que le travail sur les fractions est nouveau en CM2, les professeurs de mathématiques de 4ème technologique et de CLIPA ont à gérer du « déjà vu ».

La situation didactique conçue est alors définie comme la résultante de différentes influences : la demande institutionnelle, la connaissance particulière des élèves, les pratiques caractéristiques d'un groupe professionnel donné, la formation suivie et l'expérience personnelle.

Les séances dans les classes ont été filmées puis transcrites intégralement.

---

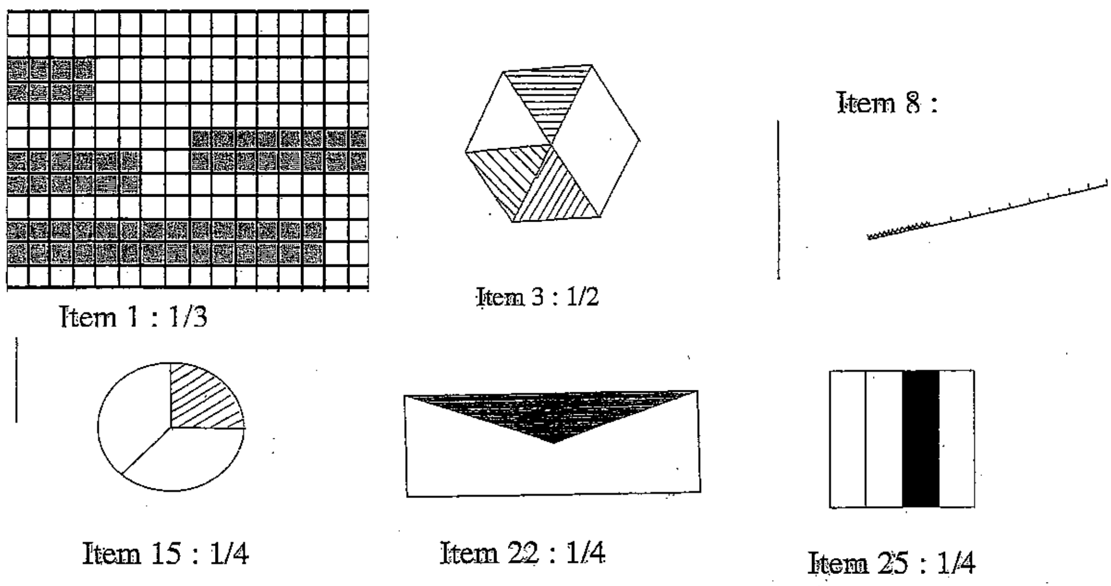
[13] Bien que l'apprentissage des fractions ait fait l'objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques, la ressource fournie n'est pas une ingénierie didactique. Nous avons choisi, pour notre part, de fournir aux enseignants une tâche assez « classique » afin de ne pas trop déstabiliser les pratiques existantes.

[14] L'enseignant *crée* une situation didactique pour *ses* élèves. Pour cela, il utilise généralement les ressources mises à sa disposition. Nous touchons là un point clé dans la formation des enseignants : comment les enseignants utilisent-ils les ressources mises à leur disposition ? Ils sont les seuls à pouvoir juger d'un certain nombre d'éléments parce qu'ils ont un suivi au jour le jour des élèves, qu'ils savent que tel ou tel va rencontrer un obstacle. Même si les enseignants ont à leur disposition des ressources, ce sont toujours, en définitive, eux qui les choisissent et qui les adaptent.

4.1 Une même ressource fournie aux enseignants

La ressource fournie aux enseignants comporte trente-six items.

Voici quelques exemples d'items:



Document 1 : Quelques items extraits de la ressource fournie aux enseignants

La tâche de base suggérée par le chercheur consiste à exprimer la partie hachurée de chaque figure par une fraction irréductible (document 4). Les figures sont variées. L'unité de partage de la figure peut être donnée, seulement suggérée ou doit être trouvée par l'élève. La fraction obtenue peut nécessiter une simplification. Par le jeu des variables introduites, cette tâche offre la possibilité d'exercer un grand nombre de procédures de reconnaissance de fractions. Notre idée était alors d'assurer, au moins en partie, la confrontation des élèves à un problème mathématique.

4.2 L'analyse a priori des projets didactiques

Chaque situation créée par les enseignants à partir de la ressource fournie a été analysée en répondant aux trois questions suivantes : 1/ Quel est le projet didactique de l'enseignant en termes de tâches prescrites et de compétences attendues ? 2/ Quelles sont les ressources et les contraintes de l'activité des élèves ? 3/ Quelles sont les ressources et les contraintes de l'activité du professeur ?

Les projets didactiques élaborés par les enseignants sont très variés et permettent d'observer l'ancrage institutionnel des pratiques. En effet, certaines caractéristiques des situations choisies mettent en évidence l'assujettissement de l'enseignant à une institution donnée. Par exemple, les formateurs en CLIPA n'apportent aucune modification à la ressource fournie et organisent une résolution individuelle de la totalité des items dans l'ordre de numérotation de ceux-ci[1]. La tâche prescrite aux élèves correspond à l'application d'un algorithme déclaré en début de séance. En 4ème technologique, les professeurs de mathématiques réalisent une fiche d'activité qui témoigne d'une prise en compte de variables didactiques : groupement d'items selon des critères de formes de la figure (segments, disques, quadrillages) et/ou des degrés de difficulté (lecture directe de la fraction représentée / figure prototypique, indices de partage incomplets, indices incohérents[2]). La réalisation de la tâche prescrite est orchestrée par l'enseignant qui rythme l'activité du groupe classe selon un schéma récurrent (résolution individuelle d'un item, formulation et validation collectives, phases d'institutionnalisation). Seuls les enseignants de CM2 prévoient une différenciation des items selon les élèves mais les motifs de ce choix diffèrent d'un enseignant à l'autre : ne donner que la moitié des items à résoudre afin de limiter le temps imparti à la réalisation de la tâche ou différencier les tâches de manière à adapter la difficulté au niveau des élèves de la classe. A l'école primaire, c'est l'organisation d'un travail de groupe qui est privilégiée. La synthèse collective est au service d'une correction des items ayant occasionnés le plus d'erreurs.

5. Les dimensions sensibles observées

Les exigences et la fragilité de l'enrôlement, le déficit de compétences langagières, la représentation de la compétence en termes de performance, fondent les principales dimensions sensibles de l'activité de tutelle auprès des élèves reconnus en difficulté.

5.1 Exigences et fragilité de l'enrôlement

Les observations réalisées en CLIPA et en 4ème technologique laissent apparaître deux adaptations possibles au problème de l'enrôlement des élèves dans une activité mathématique.

DAN, formateur en CLIPA, fournit explicitement l'algorithme à appliquer pour résoudre les trente-six items. Ce geste d'ostension peut être considéré comme une réponse possible à l'obstacle de l'enrôlement. Il assure ainsi les conditions de l'entrée de tous les élèves dans une activité mais pas l'activité elle-même. Seule la rencontre avec les limites de validité de l'algorithme aurait permis d'assurer un progrès cognitif. Or DAN ne dispose ni des gestes de rupture appropriés ni d'une analyse de la tâche suffisante pour faire évoluer la situation au-delà de l'exécution de la tâche prescrite. L'activité de tutelle repose alors sur un jeu de faux-semblant : le professeur, croit répondre à un besoin cognitif alors qu'il ne fait que maintenir l'activité de l'élève qui se décharge de toute responsabilité en se contentant d'appliquer l'algorithme.

JEM réussit l'enrôlement de ses élèves de 4ème Technologique sur la base d'une dynamique de classe. Il installe une routine qui engage les élèves dans une activité maîtrisée avant de créer la rupture. L'activité de tutelle s'appuie ici sur une analyse a priori de la ressource fournie : JEM

---

[1] Rappelons que l'ordre de numérotation des items de 1 à 36 est totalement aléatoire. Ainsi l'item n°1 est plus difficile que l'item n°25 (cf. document 4 ci-dessus).

[2] En référence aux travaux de Lesch et al (1983) qui soulignent l'impact des indices perceptuels sur la mobilisation des savoirs chez l'élève. Voir également Chvika-Mimran, 1999

assure l'émergence du problème. Mais la fragilité de l'enrôlement obtenu, sur la base d'une activité « évidente », handicape le maintien d'un niveau d'exigence à la hauteur de ses ambitions.

5.2 Un déficit de compétences langagières

JEM organise un débat collectif en installant une dynamique favorable à la confrontation d'arguments mathématiques C'est un objectif ambitieux qui vise la conceptualisation au-delà de l'action. Cependant, le professeur ne réussit pas à tirer profit des éléments présents dans le milieu. JEM se heurte aux déficits langagiers des élèves qui ont non seulement du mal à mettre en mots leur pensée mais de plus n'en voit pas forcément l'utilité. Leur représentation de l'activité attendue s'arrête à la production de la bonne réponse.

L'activité langagière attendue ne fait pas l'objet d'une tutelle spécifique: tout se passe comme si JEM s'en tenait à une participation des élèves sans plus exigence. Le besoin d'étayage de l'activité de formulation et d'argumentation des élèves reste ignoré.

Ce constat révèle un des paradoxes de la tutelle auprès d'élèves en difficulté : les élèves qui ont le plus besoin des interactions langagières pour développer leurs compétences (le langage est une aide à la pensée) sont ceux qui en bénéficient le moins quand elles existent faute de compétences suffisantes pour y participer.

Trois hypothèses peuvent être avancées pour expliquer nos observations : 1) JEM pense ses élèves incapables de faire mieux ; 2) JEM évalue le risque de perdre l'enrôlement des élèves si jamais il en venait à définir un niveau d'exigence trop élevé ; 3) JEM ne conçoit pas le rôle du langage dans une théorie cognitive qui relie l'exigence de production langagière à la transformation des connaissances (le langage est une aide à la pensée). Seule une observation longitudinale, sur un nombre important de séances, permettrait d'affiner ces « propositions tenues pour vraies sur le réel » (Vergnaud, 1985) que nous prêtons ici à JEM.

5.3 La représentation de la compétence en termes de performance

JUL attend de ses élèves de CM2 qu'ils résolvent, en groupe, le maximum d'items dans un temps limité : c'est un enjeu de performance. Il s'agit de *faire vite et juste* ! Dans la situation ainsi définie, l'existence d'interactions entre élèves repose sur *a)* le fait qu'aucun élève du groupe ne sache résoudre un item donné ; *b)* une demande explicite de tutelle entre pairs (un élève demande à son voisin de l'aider à résoudre un item donné) ; *c)* une redéfinition des rôles de chacun au sein du groupe (un élève est chargé de vérifier les réponses apportées par ses camarades). En cas de résolution individuelle d'une partie des items (organisation la plus fréquente), les élèves n'interagiront que si l'un d'entre eux reconnaît les limites de sa propre compétence.

Dans tous les cas, les enjeux de formulation et de validation sont soumis aux aléas de la répartition des élèves dans les groupes et restent à la seule initiative des élèves. De plus, l'enjeu de performance dans un temps limité n'invite pas les élèves à « perdre du temps » à expliquer aux autres ce qu'il conviendrait de faire et encore moins les raisons de le faire. Aussi, l'activité attendue n'est-elle pas clairement définissable au-delà de la seule réalisation de la tâche.

Plus généralement, les enseignants observés ne montrent pas de gestes d'étayage de l'activité de formulation et d'argumentation. L'activité des élèves n'est orientée que vers la réussite, la conceptualisation sous-jacente restant le plus souvent à leur charge. Le rôle du langage dans le développement des connaissances et l'accès à la Culture mathématique ne sont pas appréhendés.

Ce constat nous a conduit à poursuivre nos travaux de recherche sur les modalités de formation propres à développer chez les enseignants des compétences spécifiques d'étayage de l'activité langagière auprès de ces publics[3].

6. Nos perspectives de recherche

Les dimensions sensibles étudiées sont autant de catégories de lecture du réel au service de la description, de la compréhension et de l'amélioration des compétences professionnelles des enseignants. Avec Maryvonne Merri, nous retenons deux questions fondamentales, objets de recherches en cours : 1/- Quelles sont les conditions de l'engagement des élèves, reconnus en grande difficulté par le système scolaire, dans une activité de résolution de problème mathématique ? Notre projet est de penser l'articulation des concepts *d'enrôlement* et de *dévolution* ; 2/- Comment développer les compétences langagières des élèves pour permettre au langage de jouer son rôle d'aide à la conceptualisation ?

Depuis septembre 2003, nous étudions plus particulièrement les fonctions des interactions langagières dans l'activité de résolution de problèmes de mathématiques et plus particulièrement l'importance du langage dans l'accompagnement de la pensée de l'élève et la conceptualisation, ainsi que les conditions du développement, chez le professeur de mathématiques, des gestes d'étayage de l'activité de formulation des élèves en grande difficulté scolaire. Notre projet est de remédier au déficit d'organisation et d'étayage des activités langagières des élèves mis en évidence par nos observations antérieures.

Nous cherchons notamment des réponses aux questions suivantes : a) le langage accompagne-t-il l'activité de pensée de ces élèves ? b) quelles sont les fonctions du langage que nous pouvons distinguer en relation avec une théorie de l'activité cognitive en situation de résolution de problèmes ? c) quels dispositifs didactiques pourrions-nous concevoir ? d) comment pouvons-nous développer chez les enseignants de mathématiques des gestes d'aide à la formulation des objets mathématiques par les élèves ?

7. Références bibliographiques

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 7(2), 33-115.

Bruner J.S. (1983), Le rôle des interactions de tutelle dans la résolution de problèmes. In *Le développement de l'enfant savoir faire savoir dire.* Paris : PUF. 261-280.

Clot Y. (1999), *La fonction psychologique du travail.* Paris : PUF.

Julo J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématique. Un apport de le psychologie à l'enseignement* ; Presses Universitaires de Rennes.

Leplat J. (1997), *Regard sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris : PUF.

[3] Ce travail est mené, avec Maryvonne Merri, au sein de l'Unité Propre de l'ENFA « Professionnalité des enseignants du Ministère de l'Agriculture et de la Pêche.

Mercier A., Lemoyne G., Rouchier, A., (Eds), (2001), *Le génie didactique. Usages et mésugages des théories de l'enseignement.* Bruxelles : De Boeck Université.

Paour J-L. (1988), Retard mental et aides cognitives, *In* J-P. Caverni, *Psychologie cognitive, modèles et méthodes*, P.U.G.

Pastré P. (1992), *Essai pour introduire le concept de didactique professionnelle. Rôle de la conceptualisation dans la conduite de machines automatisées.* Thèse de doctorat, Université Paris V

Piaget J. (1974a), *La prise de conscience,* Paris : PUF

Piaget J. (1974b), *Réussir et Comprendre,* Paris : PUF

Rogalski J. (2000), Y a-t-il un pilote dans la classe ? Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. Communication au *Séminaire National de Didactique des mathématiques*, Paris, Mars 2000

Rogoff B. 1990, *Apprenticeship in thinking. Cognitive Development in Social Context*, Oxford University Press.

Vannier-Benmostapha M.P. (2002), *Dimensions sensibles des situations de tutelle et analyse du travail de l'enseignant de mathématiques. Etude de cas dans trois institutions scolaires en CLIPA, 4ème Technologique agricole et CM2.* Thèse de Doctorat en Sciences de l'Education, Université Paris V –René Descartes.

Vergnaud G.(1985), Concepts et Schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie Française, 30-3,* 245-252.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10 (2/3), 133-170.

Vergnaud G. (1994), Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde P. Tavignot, (eds), *20 ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* Grenoble : La pensée Sauvage, 177-191.

Vergnaud G. (1996), Au fond de l'action, la conceptualisation. In Barbier J.M. (dir) *Savoirs théoriques et savoirs d'action.* Paris : Presses Universitaires de France.

Wood D. (1989), Social Interaction as Tutoring. In Bornstein M.M. & Bruner J.S. (eds), *Interaction in human development* (pp 54-80). Hillsdale (N.J.) : Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, D., Bruner J.S., Ross G. (1976), The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology & Psychiatry.* 17, 89-100.

Analyses interactionnelle et didactique de pratiques d'enseignement/apprentissage : étude d'un exemple

Robert BOUCHARD
ICAR, CNRS et Université Lumière Lyon 2
Christiane ROLET
ICAR, CNRS et Université Lumière Lyon 2

Notre propos dans cette communication est de tenter de faire se rejoindre deux types d'analyse de séquence de classe, l'une se situant dans le cadre de la pragmatique des interactions et l'autre dans celui de la didactique des mathématiques. Pour la première de tels corpus de classe posent la question de la pertinence des unités classiques pour l'analyse des polylogues et des interactions praxéologiques. Pour la seconde, il s'agit de relier les concepts de contrat didactique, de dévolution et d'étayage avec la prise en compte fine des interactions entre enseignant et élèves.

Notre présentation montre :

1. Des propositions sur la forme des transcriptions de polylogues didactiques
2. Une problématique de l'organisation de l'événement global
3. Une analyse des actions verbales et non verbales dans l'inter-action : dans deux exemples nous entamons l'étude du lien entre le type d'inter-actions et des caractères didactiques de la situation, entre des échanges enchâssés et leurs significations didactiques.

Nous espérons ainsi contribuer à construire :

une méthodologie permettant d'étudier la nature des pratiques interactionnelles dans le cadre pédagogique général du cours « dialogué »

des hypothèses pragmatiques sur l'organisation et les unités du « polylogue praxéologique » dont la classe est un exemple.

Notre corpus est constitué de deux fragments d'une séance de calcul mental en CE1.

Mode de transcription inter-actionnelle

Nous avons transcrit dans un tableau les interactions en faisant intervenir les acteurs et réacteurs avec leurs actions langagières et non-langagières.
Dans le langagier, nous avons distingué le langagier oral (langue naturelle et langue formelle oralisée) et le langagier écrit (langue formelle, langue naturelle, figures et autres inscriptions).
Dans le non-langagier, nous avons distingué les gestes ayant valeur inter-actionnelle et les gestes d'accompagnement de l'action langagière.
Des exemples illustrent ces modes de transcription.

Organisation de l'événement global

Nous avons fait se rejoindre une segmentation en grandes unités principalement liées à la didactique et une segmentation plus fine venant de la pragmatique.

Segmentation et analyse des unités didactiques

Nous sommes partis des différentes activités prévues par l'enseignant. Puis nous avons fait une segmentation descendante en **phases, épisodes** et **étapes**, définis selon leur degré de bornage pédagogique, didactique et langagier (très fort, fort, faible ou variable, inexistant).
L'étape a constitué le segment où l'analyse en unités pragmatiques a pris le relais.

Unités pragmatiques

L'action est la plus grande unité individuelle (combinaison d'actes), déterminée par une unité sémantique. Elle est simple ou complexe, sa complexité étant saisissable dans l'échec "local" de l'action. Les actions sont soit en séquence, soit simultanées.
Une **inter-action** est vue comme un couple d'une action initiatrice et d'une action réactive. C'est

- un ensemble d'actions accomplies par les partenaires et se déterminant réciproquement
- la plus petite unité de collaboration interindividuelle

Les inter-actions sont soit enchaînées, soit enchâssées (changement d'interlocuteur et/ou changement de "topic").
Les interactions peuvent être analysées en fonction des registres intervenant dans les actions initiatrice et réactive.

Analyse d'un premier segment

Une première analyse est proposée sur la mise en route de la séance de calcul mental.
La première inter-action ("alors vous sortez vos ardoises") se poursuit avec trois échanges enchâssés du fait du problème de trois élèves et de deux échecs de l'enseignante pour clore l'inter-action. L'ordre donné est "rituel" (histoire conversationnelle, contrat didactique habituel). Son exécution conditionne la suite ; par suite, les élèves qui ne peuvent obéir initient une action.

Analyse du deuxième segment

Le deuxième segment est un moment de correction d'un calcul et d'aide à une élève.
Les inter-actions sont très nombreuses et très courtes. Il y a de nombreux échanges ternaires (question orale de l'enseignant, réponse orale de l'élève, évaluation orale de l'enseignant), ce qui est à mettre en relation avec la forme du cours dialogué et le peu d'autonomie laissé à l'élève.

Les enchâssements successifs correspondent à un étayage apporté par l'enseignant sur des savoirs pré-requis et manquants (remontant à la numération) chez l'élève. La non-clôture des échanges enchâssés pose problème (pas de résolution des sous-problèmes pour Sa, pas de réponse globale à la question à la question globale posée)

L'enseignant emploie majoritairement le registre oral ; il a recours au registre écrit pour offrir à l'élève un autre registre (pensant ainsi lui apporter une aide ?), et aussi pour assurer la communication avec la classe.

Les interactions initiées par l'enseignant et qui restent sans réponse sont suivies d'une ré-initiation, d'un enchâssement ou d'un changement de registre.

Conclusion

Le travail nous semble fructueux et nous avons entamé une rencontre enrichissante (à poursuivre) entre les deux cadres théoriques.
Nous sommes arrivés à une transcription commune et à une segmentation des activités.
Nous avons fait un meilleur repérage des enchâssements et avons une meilleure connaissance de leurs causes et de leurs effets (didactiques et/ou gestionnelles).
Nous avons une meilleure connaissance des registres des actions de l'enseignant .

Pour des développements, on pourra se reporter à :

BOUCHARD R. et ROLET C. (2003) Pour une méthodologie d'analyse didactico-interactionnelle des pratiques d'enseignement/apprentissage : A propos d'une séance de mathématiques à l'école primaire. Actes du colloque « Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement » Bordeaux 3-5 Avril 2003

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

ACTES DU SÉMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES. ANNÉE 2003

AUTEUR (S) :

Viviane DURAND-GUERRIER & Claude TISSERON (EDS)

RESUME :

Ces actes recouvrent la plupart des textes correspondant aux communications données dans les trois séances du séminaire national de didactique des mathématiques qui ont eu lieu à Paris au cours de l'année 2003. Ils abordent les thèmes suivants :

- Didactique des mathématiques, TICE et sciences cognitives,
- Didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé,
- Didactique des mathématiques et champs connexes.

MOTS CLES :

Didactique des mathématiques
TICE
Enseignement spécialisé
Situations didactiques
Milieu
Contrat didactique
Connaissances et savoirs
Compétences
Sciences du langage
Logique
Ergonomie cognitive
Psychologie de l'apprentissage

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 2004
ISBN : 2-86612-261-5