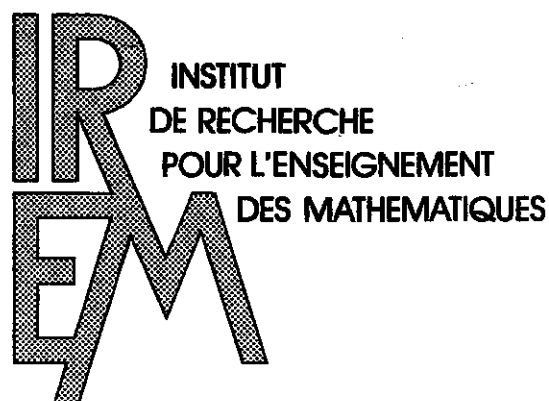




ASSOCIATION
POUR LA
RECHERCHE
EN
DIDACTIQUE
DES
MATHÉMATIQUES



Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2002

Édités par Viviane Durand-Guerrier et Claude Tisseron

LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1

ARDM et IREM de Paris 7

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2002

Édités par Viviane Durand-Guerrier et Claude Tisseron

LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon1

ARDM et IREM de Paris 7

Sommaire

Présentation	4
Le domaine géométrique	
Ghislaine GUEUDET-CHARTIER, <i>Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire</i>	11
Néri BOTH CARVALHO & Madeleine EBERHARD, <i>Questions sur la modalité outil des transformations géométriques dans l'enseignement, le cas des problèmes de construction</i>	32
Sophie GOBERT-SANOU, <i>Questions didactiques liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire</i>	51
Catherine HOUEMENT & Alain KUZNIAK, <i>Des paradigmes géométriques aux petites provocations.</i>	69
Marie-Hélène SALIN & René BERTHELOT, <i>Quelle géométrie pour la formation des maîtres ? Contribution au débat, après l'exposé de Catherine HOUEMENT et Alain KUZNIAK</i>	77
Enseigner les mathématiques	
Eric RODITI, <i>Les pratiques des professeurs de mathématiques. Le cas de l'enseignement des nombres décimaux en classe de sixième</i>	83
Denis BUTLEN, Bernadette NGONO, Marie-Lise PELTIER, Monique PEZARD, <i>Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP</i>	99
Annie PEIX & Claude TISSERON, <i>Concepts didactiques pour analyser et réorganiser une formation à la conduite de problèmes de recherche à l'école élémentaire</i>	123
Argumentation et raisonnement	
Bettina PEDEMONTE, <i>Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques</i>	153
Maria Alessandra MARIOTTI, <i>Introduire les élèves à une théorie. La médiation du logiciel Cabri</i>	175
Denise GRENIER & Charles PAYAN, <i>Situation de recherches « en classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation</i>	189
Guy BROUSSEAU & Patrick GIBEL, <i>Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe</i>	205
André ANTIBI, <i>Une recherche possible de contre-exemples</i>	219

Présentation

Les séminaires de l'année 2002 ont été organisés autour de trois thématiques : *Le domaine géométrique*, *Enseigner les mathématiques* et *Argumentation et raisonnement*, que nous décrivons brièvement ci-dessous.

Le Domaine Géométrique

Les travaux de recherche présentés concernent des domaines d'enseignement et de formation variés, de l'école élémentaire à l'université et à la formation des enseignants. **Ghislaine Gueudet-Chartier** s'interroge sur la place du géométrique dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire, et son rôle supposé comme support intuitif pour les dimensions supérieures à trois ; cette question s'inscrit dans la problématique de l'articulation entre le secondaire et l'université. L'auteur s'appuie sur les travaux de Fischbein pour clarifier la notion d'intuition géométrique et sur une analyse épistémologique pour établir que l'algèbre linéaire ne peut pas être considérée comme une généralisation de la géométrie. Elle en tire un certain nombre de conséquences didactiques permettant d'ouvrir des pistes pour l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les premiers cycles universitaires. **Neri Both Carvalho** dans sa thèse, présentée ici par **Madeleine Eberhard**, étudie la modalité « outil » des transformations géométriques dans l'enseignement secondaire français. Dans le cadre de la théorie anthropologique, elle examine plus précisément la question de savoir *comment la mise en oeuvre des transformations s'insère dans une démarche générale de résolution de problèmes de construction en classe de seconde dans l'enseignement français*. Dans sa thèse, **Sophie Gobert-Sanou** étudie les questions didactiques liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire. Les travaux s'inscrivent dans le cadre de la théorie des situations didactiques, principalement les concepts de milieu et de situation fondamentale ; l'ensemble des éléments présentés montre que la problématique pratique est incontournable à l'école élémentaire, ce qui nécessite que l'entrée dans une problématique géométrique se fasse par les situations. Prolongeant la notion de cadres géométriques de Régine Douady, **Catherine Houdement et Alain Kuzniak** proposent des *paradigmes géométriques* visant à favoriser la compréhension des rapports entre géométrie et réalité, en s'appuyant sur les trois modes de connaissance de l'espace proposés par *Gonseth* : intuition, expérience et déduction. De cette étude, se dégage la proposition de situations de formation pour les maîtres, les *petites provocations didactiques*, permettant de mettre en évidence les différents rapports aux objets créés par les différentes géométries. En introduction au débat : - *quelle géométrie pour la formation des maîtres ?* - , **Marie-Hélène**

Salin et René Berthelot ont réagi, à notre demande, à cette communication. Au-delà de la convergence des objets d'étude, ils expriment une divergence de fond concernant la distinction de plusieurs géométries dans le cadre de la formation des enseignants, considérant que la géométrie est un ensemble unifié de connaissances et de pratiques. D'autres points de vue sur cette question apparaissent également dans les différents exposés, ce qui ne peut manquer d'interroger le processus de transposition didactique aux différents niveaux d'enseignement.

Enseigner les mathématiques

Les exposés s'inscrivent dans un ensemble de travaux visant d'une part à mieux connaître les pratiques réelles des enseignants et d'autre part à transformer des savoirs issus de la recherche en savoirs professionnels communicables et opérationnels sur le terrain. Ces recherches pourraient ainsi contribuer à moyen terme à construire pour les maîtres des outils spécifiques susceptibles d'être proposés en formation. Deux exposés proposent des recherches visant à mieux identifier les spécificités des pratiques ordinaires. Elles sont issues de l'équipe qui travaille autour d'Aline Robert ; elles partent de l'hypothèse que l'analyse des pratiques enseignantes gagne à compléter l'étude des conditions d'apprentissage des élèves par celle des contraintes du métier d'enseignant. Ces recherches sont ainsi menées avec une double approche des pratiques : l'une concernant l'apprentissage, l'autre concernant l'exercice du métier. *Denis Butlen, Bernadette Ngono, Marie Lise Peltier et Monique Pezard* s'appuient sur des résultats de recherches en ergonomie cognitive et en didactique professionnelle pour aborder l'étude des pratiques selon " cinq composantes : cognitive, médiative, personnelle, sociale et institutionnelle". À partir de l'hypothèse que les pratiques effectives sont le résultat des interactions entre un système de pensée issu de l'action et un autre issu de connaissances, leurs recherches permettent de préciser notablement les contraintes et les marges de manœuvres entre lesquelles évoluent les professeurs d'école étudiés. Ces professeurs sont des enseignants en REP, milieu scolaire particulier, peu encore étudié et probablement susceptible de jouer un rôle de « loupe » pour l'analyse des pratiques enseignantes, comme le suggèrent les auteurs. *Eric Roditi* étudie les pratiques de quatre professeurs et montre qu'elles répondent à des contraintes de l'institution scolaire mais aussi à des exigences liées à l'exercice même du métier d'enseignant, conciliant ainsi des objectifs d'apprentissage et des impératifs professionnels. Il montre que les scénarios envisageables a priori ne sont pas tous réalisables dans l'enseignement ordinaire et que les spécificités personnelles des professeurs engendrent une cohérence de leurs pratiques -en rapport avec leurs conceptions de l'apprentissage et de

l'enseignement- qui limitent les choix possibles. Ce travail permet de "dégager plus précisément ce qui est variable, et qui tient aux personnes, de ce qui est partagé par tous, qui tient aux contraintes mais peut-être aussi, plus largement, au métier". Un troisième exposé porte sur l'utilisation en formation de savoirs issus de la recherche, à la fois pour proposer des objets de formation – ce qui est courant - et également - ce qui est plus rare - pour concevoir et structurer le dispositif de formation. Dans le contexte de stages de formation de professeurs d'école à la conduite de "problèmes de recherche" en classe, *Annie Peix et Claude Tisseron* montrent comment l'utilisation des concepts de la théorie des situations et de l'approche anthropologique permet d'analyser et de reconstruire un dispositif de formation. Le modèle de problème de recherche proposé dans la formation est le "problème ouvert" avec travail en groupe et débat, qui amène enseignants et élèves à assumer diverses positions et rôles. L'enjeu du dispositif de formation est de permettre une intégration par les enseignants des divers types de savoirs en jeu par plusieurs moments de construction collective de la signification de ces diverses positions et de ce qu'elles permettent.

Argumentation et raisonnement

Dans la Lettre de la preuve de Mai/Juin 1999, Nicolas Balacheff proposait d'élargir la problématique d'étude didactique de la preuve en mathématique à un univers qui échappe aux «règles rigides» auxquelles la démonstration est soumise. Les travaux proposés dans le séminaire apportent chacun à leur façon, une approche originale qui approfondit nos connaissances sur le fonctionnement cognitif de la preuve et les fonctions didactiques de situations qui en provoquant la production. *Bettina Pedemonte* présente une analyse cognitive des rapports entre l'argumentation et la démonstration. En utilisant le modèle de Toulmin, elle met en évidence des continuités et des écarts selon deux points de vue sur les raisonnements produits : leur structure, et leur système de référence. L'analyse structurelle lui permet de rendre compte de certaines continuités ou écarts nécessaires pour passer d'une argumentation à une démonstration. Ce travail approfondit de façon importante les connaissances sur le sujet : d'une part en montrant qu'il n'y a pas toujours une distance cognitive entre argumentation et démonstration, ce qui précise les travaux de Duval ; d'autre part en montrant qu'une rupture cognitive est nécessaire lorsque l'usage d'une apparente continuité "naturelle" entre argumentation et démonstration produit une démonstration fautive. Ce qui précise les recherches italiennes sur l'unité cognitive. *Maria Alessandra Mariotti* présente une recherche conduite en Italie dans le cadre d'un plan de type "recherche innovation", qui se caractérise par la longue durée et l'association de chercheurs et d'enseignants. Il s'agit de s'appuyer sur

la médiation du logiciel cabri géomètre pour initier les élèves à la notion de théorème. Les travaux s'inscrivent dans les champs théoriques de la médiation sémiotique, de la genèse instrumentale et tentent de répondre à la question : « comment traiter la relation délicate entre la base de connaissances géométriques intuitives des élèves et une nouvelle approche des connaissances selon une perspective théorique. *Denise Grenier* et *Charles Payan* partent de l'idée que "le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche, en particulier par la résolution de questions". Leur travail porte sur les possibilités d'existence et de fonctionnement d'organisations didactiques autour de situations de recherche en classe (SRC). Ce qui pose plusieurs questions : d'abord quelles mathématiques sont pertinentes et possibles pour de telles situations, quels sont les savoirs qui perdurent au-delà de la scolarité chez les non professionnels des sciences, quels sont les apprentissages "transversaux" (expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation...) qui peuvent y être travaillés ? Ces derniers étant déclarés de façon récurrente par les programmes comme des objectifs "essentiels". Un des résultats est que les SRC modifient le rapport des élèves et des étudiants à l'activité mathématique et à la démarche scientifique ; elles sont sources d'apprentissages repérables concernant les savoirs transversaux. *Guy Brousseau* et *Patrick Gibel* étudient le raisonnement tel qu'il apparaît dans une classe ordinaire, "notamment comme moyen pour l'élève d'interroger la situation, de produire des arguments, d'organiser une solution, de justifier une organisation, et comme moyen pour l'enseignant de justifier un apprentissage". Comme l'arithmétique scolaire élémentaire est le domaine où le raisonnement global est le mieux pris en compte, à la fois implicitement et explicitement, c'est dans ce champ que le raisonnement est étudié dans le cadre de l'activité de résolution de problèmes. L'étude se centre sur les raisonnements considérés comme moyens de "détransposition des savoirs enseignés", c'est-à-dire comme outils permettant la "remathématisation des discours mathématiques" tenus en classe. L'analyse utilise la notion de situation d'apprentissage "dédidactifiable" qui précise la notion de situation problème de Régine Douady. L'exposé d' *André Antibi* se place dans la ligne des travaux sur la preuve en se centrant sur la production de contre-exemples. Il nous présente une méthode possible de recherche de contre-exemples basée sur deux techniques : le "rétrécissement d'ensemble" qui consiste à limiter le champ des objets à considérer par utilisation de propriétés nécessaires, "l'utilisation de célébrités" consistant à étudier plus ou moins systématiquement ce qui se passe pour les objets usuels bien connus du champ ainsi délimité. L'auteur fait l'hypothèse que l'explicitation de cette méthode "pourra permettre au plus grand nombre d'élèves d'avoir une activité mathématique fructueuse, et de mieux comprendre comment la plupart des contre-exemples peuvent être trouvés".

Le domaine géométrique

Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire

Ghislaine Gueudet-Chartier

Laboratoire de didactique des mathématiques, Université de Rennes 1

&

Equipe de didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz - Grenoble

Les difficultés posées par l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG sciences en France sont bien connues des enseignants de l'université. Elles ont déjà donné lieu à plusieurs recherches didactiques, dont l'essentiel est présenté dans le livre : "L'algèbre linéaire en question" (Dorier et al. 1997). Dans les opinions exprimées par des enseignants-chercheurs comme dans les travaux de didacticiens, la géométrie est fréquemment évoquée comme pouvant contribuer à élaborer une approche de l'algèbre linéaire accessible aux étudiants. Ainsi, dans son rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques écrit :

"En fait, l'intérêt du lien entre algèbre linéaire et géométrie nous semble plutôt en sens inverse¹, dans le fait que la géométrie usuelle en dimensions 2 et 3 fournit un support intuitif pour travailler en dimension supérieure à 3, voire en dimension infinie (par exemple en analyse fonctionnelle), voire sur un anneau au lieu d'un corps (en algèbre commutative), etc." (C.R.E.M. 2000, p.14)

Il nous semble que plusieurs des points mentionnés dans cette citation demandent à être éclaircis. Qu'appelle-t-on "géométrie usuelle en dimensions 2 et 3" ? S'agit-il de géométrie vectorielle, analytique, ou de géométrie euclidienne (au sens historique du terme) ? Ou encore de la géométrie actuellement pratiquée dans l'enseignement secondaire ? Qu'est-ce qu'un "support intuitif" ? Cette notion est-elle simplement associée à la possibilité de visualisation ? Et à qui un tel support peut-il être utile ? A des mathématiciens, à des étudiants abordant les premières notions d'algèbre linéaire, à des étudiants plus avancés ?

Apporter des éléments de réponse à ces questions demande selon nous une étude didactique précise ; c'est l'objet de notre thèse, intitulée "rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire", et effectuée sous la direction de Jean-Luc Dorier (soutenue le 21 novembre 2000). Nous allons présenter ici certains des résultats que nous y avons obtenus.

1. Présentation du sujet

Nous allons préciser dans un premier temps ce que nous qualifierons de "géométrie". Ceci est crucial ici, puisque pour certains mathématiciens, l'algèbre linéaire elle-même peut être considérée comme une sorte de géométrie.

Nous avons choisi, dans le cadre de ce travail, d'appeler "géométrie" une théorie qui a pour objet la modélisation² de l'espace physique, et présente un lien spécifique avec la réalité (en

¹ Cette citation est extraite d'une critique de la réforme des mathématiques modernes. Il s'agit d'une réaction allant à l'encontre de la présentation de la géométrie comme application de l'algèbre linéaire.

² Ici, le terme modélisation est employé au sens de "modélisation mathématique", et non en référence à la définition de modèle qui sera utilisée par la suite.

particulier, une géométrie est dans ce cas limitée à la dimension trois). Ce lien confère aux notions et aux propriétés relevant de cette géométrie l'aspect d'objets concrets, un caractère d'évidence intrinsèque. Ce choix de définition est restrictif ; il repose sur une référence au savoir enseigné (dans le secondaire en particulier) et non au savoir savant. En effet les géométries que nous serons amenés à considérer resteront apparentées à la géométrie vue dans le secondaire, et ce même si elles sont fondées sur l'algèbre linéaire. La caractéristique de lien avec l'espace physique ne serait sans doute plus pertinente si nous cherchions à déterminer, dans les mathématiques actuelles, quels domaines peuvent être désignés comme "géométrie".

Toute géométrie est évidemment "géométrique", et l'emploi, en algèbre linéaire, d'un exemple issu d'une géométrie est une forme de recours au géométrique. Mais nous considérerons également l'emploi de figures en algèbre linéaire comme une autre forme de recours au géométrique. En effet, le dessin est un objet matériel, qui confère à la figure³ l'aspect concret qui caractérise selon nous le géométrique.

Il nous faut par ailleurs préciser ce qui relève de "l'intuition géométrique". C'est dans les travaux de Fischbein que nous avons trouvé les éléments nécessaires à une étude de l'intuition portant à la fois sur les mathématiciens, les enseignants et les étudiants. Nous allons brièvement présenter ici ces travaux et le cadre théorique que nous avons retenu.

L'intuition géométrique

Selon Fischbein, le rôle essentiel de l'intuition est de répondre à notre besoin naturel de certitudes ; c'est ce besoin, élément incontournable de toute activité mentale, qui nous conduit à fabriquer des représentations et des interprétations apparemment évidentes.

"L'intuition n'est pas la principale source de connaissances certaines, mais elle semble l'être, parce que c'est exactement son rôle : créer l'apparence de certitude, conférer à différentes interprétations ou représentations un caractère de certitude intrinsèque et indiscutable." (Fischbein 1987, p.12)

Nous avons besoin de certitudes pour agir, quand bien même celles-ci ne seraient qu'apparentes.

Les modèles constituent une source fondamentale de connaissances intuitives ; ils permettent de remplacer une notion par un substitut intuitivement acceptable. Fischbein définit ainsi la notion de modèle :

"Un système B représente un modèle du système A si, sur la base d'un certain isomorphisme, une description ou une solution produite dans A admet un correspondant cohérent dans B et vice versa." (ibid., p.121)

Un modèle suggère des questions pertinentes, inspire des stratégies de résolution, permet de vérifier la validité d'un résultat ; un modèle sera efficace s'il est suffisamment fidèle à l'original (sur un plan structurel), et qu'il a cependant une relative autonomie par rapport à celui-ci. La relation modèle-original, étant basée sur un isomorphisme, est bien entendu réversible ; il est donc possible que l'original suggère à son tour des propriétés du modèle.

Fischbein distingue différents types de modèles. Nous avons retenu ici certaines des oppositions qu'il mentionne, et qui seront centrales dans notre étude :

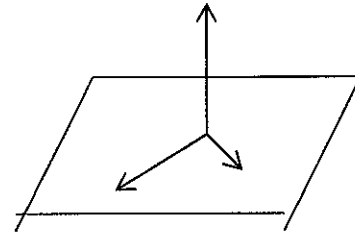
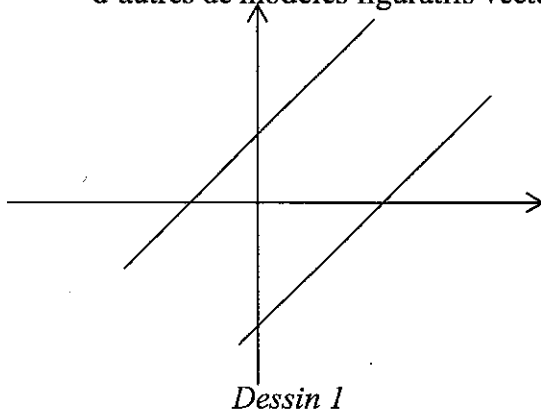
- Modèle abstrait/Modèle intuitif

³ Pour la définition de figure, et la distinction entre figure et dessin, nous nous référons à Laborde et Capponi (1994).

Nous mentionnons ici cette distinction pour clarifier le lien entre les modèles au sens de Fischbein et la modélisation mathématique, à laquelle nous avons fait référence dans notre définition de géométrie. Le terme de modèle abstrait qualifie une modélisation mathématique ; une relation mathématique peut ainsi être un modèle abstrait pour une certaine réalité concrète. Un modèle intuitif offre en revanche l'apparence d'une réalité concrète (c'est le cas d'une géométrie, au sens où nous l'avons définie), bien qu'il dépasse souvent celle-ci.

- **Modèle intramathématique/Modèle extramathématique :**

Il y a emploi d'un modèle intramathématique lorsque le modèle et l'original sont tous deux issus de théories mathématiques. Ce sera le cas ici lorsque nous parlerons de modèles géométriques utilisés en algèbre linéaire. En revanche, l'emploi de dessins correspond à l'intervention d'un modèle extramathématique ; nous parlerons pour les dessins de modèles figuratifs. Nous y ajoutons une distinction personnelle : certains des modèles figuratifs que nous rencontrerons seront qualifiés de modèles figuratifs affines, et d'autres de modèles figuratifs vectoriels. Donnons ci-dessous un exemple :



Le dessin 1 peut par exemple être utilisé pour représenter deux droites parallèles du plan ; il sera donc employé en géométrie affine, et n'apparaîtra probablement pas en algèbre linéaire.

Le dessin 2 peut être utilisé pour illustrer le théorème de la base incomplète : le parallélogramme représente un plan, ou un hyperplan, ou un sous-espace vectoriel de dimension quelconque ; les deux flèches à l'intérieur du parallélogramme constituent une base du plan, et la flèche verticale est un vecteur (ou suggère une famille libre de vecteurs !) permettant de compléter la base du sous-espace en base de l'espace complet.

- **Modèle analogique/modèle paradigmatique :**

Il s'agit d'une distinction entre modèles intramathématiques. Un modèle est analogique si le modèle et l'original relèvent de deux théories mathématiques indépendantes ; à l'opposé, un modèle paradigmatique est une sous-classe de l'original. Le modèle paradigmatique est bien plus qu'un exemple : c'est l'objet de référence sur lequel s'appuie le raisonnement. Dans notre cas, un modèle géométrique pourra être analogique ou paradigmatique selon qu'il relève d'une géométrie indépendante de l'algèbre linéaire ou non.

L'intuition géométrique correspondra donc, selon nous, au recours à un modèle géométrique. Cependant le terme même de recours à un modèle, géométrique ou figuratif, est plus adapté à

notre étude que celui d'intuition. C'est donc cette terminologie que nous emploierons par la suite.

Questions étudiées

En adoptant la terminologie présentée ci-dessus, nous pouvons résumer notre questionnement de la manière suivante :

- Quels sont les possibilités de recours à des modèles géométriques et figuratifs en algèbre linéaire ?
- Quels sont les recours effectivement pratiqués (en France, de nos jours) par les enseignants et les étudiants ?

Pour répondre à ces questions nous avons utilisé différents moyens. Tout d'abord une étude historique portant sur l'emploi de modèles géométriques dans la genèse de l'algèbre linéaire. Une fois l'algèbre linéaire établie sous sa forme moderne, un processus de transposition didactique a conduit au texte de savoir actuellement en place. Nous avons analysé ce processus, et étudié d'autre part l'articulation algèbre linéaire-géométrie dans les textes de savoir actuels sous l'angle de l'évolution de concepts issus de la géométrie. Par ailleurs, nous avons interrogé enseignants et étudiants de l'université, et nous avons observé des séances de cours et travaux dirigés pour déterminer les recours au géométrique en algèbre linéaire.

Notons ici, avant de passer aux résultats établis, que nous emploierons le terme "algèbre linéaire" par souci de concision, mais que celui-ci désigne aussi bien l'algèbre linéaire proprement dite que l'algèbre bilinéaire et même certaines parties de l'analyse fonctionnelle (en particulier l'étude des espaces de Hilbert).

2. Possibilités et limites du recours au géométrique

Nous allons détailler ici trois résultats concernant les possibilités et les limites du recours au géométrique en algèbre linéaire :

- **L'algèbre linéaire ne peut pas être présentée comme une simple généralisation d'une géométrie, quelle que soit celle-ci ;**
- **Des liens avec la géométrie enseignée en France au lycée existent, et sont exploitables dans l'introduction de l'algèbre linéaire (il existe évidemment aussi des ruptures, que nous signalerons) ;**
- **La présentation de l'algèbre linéaire limitée à la dimension 3 permet d'aborder certaines notions et propriétés d'algèbre linéaire, et pourrait donc constituer un support à l'introduction de la théorie générale.**

Ces résultats découlent de différentes parties de notre étude, que nous évoquerons donc simultanément.

2.1 Impossibilité de généralisation d'une géométrie

Nous allons montrer pourquoi il est selon nous impossible de présenter l'algèbre linéaire comme une simple généralisation (à d'autres objets, en dimension supérieure à trois) d'une

géométrie. Trois types d'arguments développés dans notre thèse conduisent à cette conclusion :

- L'étude du rôle de la géométrie dans la genèse de l'algèbre linéaire montre que celle-ci a toujours été en interaction avec d'autres domaines dans les travaux qui ont constitué des avancées significatives ; nous détaillons ce point ci-dessous.
- L'étude du phénomène de transposition didactique qui a conduit à l'introduction de l'algèbre linéaire dans les programmes de lycée en 1969 montre que le lien entre algèbre linéaire et géométrie a été nettement accentué dans le savoir enseigné, sans comparaison avec le savoir savant. Ceci est dû au fait que cette introduction a eu lieu lors de la réforme des mathématiques modernes, et était associée à la rénovation de l'enseignement de la géométrie. Ainsi les débats, entre Dieudonné et Choquet notamment, opposaient les partisans d'une approche structuraliste, consistant à présenter l'algèbre linéaire d'abord, la géométrie étant alors une simple application de celle-ci, aux tenants d'une géométrie axiomatique présentée avant l'algèbre linéaire.
- Par ailleurs, la limitation à la dimension 3 induit des restrictions, que nous aborderons lorsque nous évoquerons les possibilités offertes par l'algèbre linéaire limitée à la dimension 3 (partie 2.3).

Genèse de l'algèbre linéaire

L'étude du processus qui a mené à l'algèbre linéaire sous sa forme actuelle montre que la géométrie y a tenu une place importante, mais le plus souvent en association avec une autre partie des mathématiques, en particulier dans les travaux qui ont conduit à des avancées déterminantes de la théorie. Plus précisément, des modèles géométriques très variés sont en jeu ; et, lorsque le rôle de la géométrie est prépondérant, il semble freiner l'avancée de la théorie. Nous présentons ici des exemples de différents emplois de modèles ; nous commencerons par examiner des travaux d'analyse fonctionnelle, car ces travaux ont été déterminants dans l'élaboration de l'algèbre linéaire sous sa forme actuelle.

Maurice Fréchet

Les travaux de Fréchet portent sur les espaces fonctionnels topologiques ; la structure linéaire elle-même n'y est pas fondamentale, contrairement aux autres cas que nous allons évoquer ; cependant ces travaux présentent pour notre étude un intérêt certain, du fait de l'interaction entre analyse et géométrie que l'on y observe.

En termes de modèles, la démarche de Fréchet peut se formuler de la manière suivante : recherche d'un modèle analogique (symbolique) commun pour la géométrie élémentaire et certaines parties de l'analyse fonctionnelle. Dans son livre " Les espaces abstraits " (Fréchet 1928), il déclare avoir été guidé par les analogies entre ces domaines, analogies qui lui ont permis de supposer qu'il pouvait les considérer comme les branches d'une théorie plus générale.

Selon Fréchet, une suite, ou une fonction caractérisée par une suite de coefficients, peut être considérée comme un point :

" On peut considérer les nombres de la suite qui définit chacun de ses éléments comme les coordonnées de cet élément envisagé comme un point d'un espace (E_∞) à une infinité dénombrable de dimensions. Il y a plusieurs avantages à opérer ainsi. D'abord l'avantage qui se présente toujours quand on emploie le langage géométrique si propice à l'intuition par les analogies qu'il fait naître." (Fréchet 1906, p.39)

Fréchet souligne même explicitement l'importance de l'intuition, et de l'emploi du langage géométrique pour développer celle-ci. Bien qu'il soit à la recherche d'un modèle commun, pour la géométrie et d'autres domaines, celle-ci joue un rôle particulier ; il considère qu'elle seule peut être facteur d'intuition. En fait la spécificité du modèle géométrique repose sur son lien avec l'espace physique, qui confère aux objets de la géométrie l'aspect d'objets réels.

Dans les travaux de Fréchet, la première impulsion a été donnée à l'analogie par les coordonnées, puis l'importance prise par l'aspect synthétique de la géométrie auquel correspond un aspect synthétique de l'analyse permettant l'étude directe des fonctions.

Ehrard Schmidt et Frédéric Riesz

Les travaux de Riesz et Schmidt portent sur les espaces de Hilbert, selon une terminologie moderne.

C'est Schmidt qui introduit le premier, dans sa thèse soutenue en 1905, un vocabulaire géométrique à propos des fonctions de carré sommable : il y parle d'orthogonalité, de norme de fonctions, et développe des propriétés analogues à certaines propriétés géométriques.

Il emploiera ensuite le même type de vocabulaire à propos de suites : il définit un produit scalaire pour les suites (sans employer ce terme), et montre le théorème de Pythagore dans ce contexte (le théorème en question est effectivement appelé théorème de Pythagore). A propos des suites, il écrit que les résultats qu'il établit ont une signification géométrique claire, en particulier si l'on considère les suites comme des points d'un espace de dimension infinie. Cependant il ne détaille pas l'emploi du modèle géométrique, qui reste presque implicite. En particulier, bien qu'il utilise un vocabulaire identique pour les suites et les fonctions, il traite séparément ces deux cas, sans effectuer de rapprochement, et sans allusion à la dualité analytique/synthétique.

Cette dualité est au contraire soulignée dans les travaux de Riesz ; elle y est le moteur de l'analogie. Riesz établit tout d'abord une correspondance entre les suites et les fonctions de carré sommable, en considérant une suite de carré sommable comme les coefficients de Fourier d'une fonction. Il adopte une démarche qui se rapproche de celle de Fréchet : Riesz cherche à définir une distance entre fonctions, qui permette de développer une théorie synthétique.

Cependant Riesz, contrairement à Fréchet, ne cherche pas à déterminer une théorie générale qui s'applique aussi bien à la géométrie qu'aux suites et aux fonctions. Il souhaite avant tout mettre en rapport les suites et les fonctions ; puisqu'il existe en géométrie un aspect analytique et un aspect synthétique, et que la notion de distance confère un caractère géométrique aux suites et aux fonctions, le rapport cherché se dessine naturellement.

Hermann Günther Grassmann

Grassmann publie en 1844 l'*Ausdehnungslehre* ou *théorie de l'extension*. Bien que les correspondances avec des mathématiques actuelles soient délicates à établir, on peut trouver dans cette œuvre différents types de géométrie : affine, projective... ainsi qu'une part importante des résultats de l'algèbre linéaire. Grassmann fait le choix d'une présentation aussi formelle et rigoureuse que possible. La théorie de l'extension est selon lui une des quatre branches de la théorie des formes, qui concerne (et même, devrait précéder) toutes les branches de la mathématique.

Cependant la description que fait Grassmann de son processus de découverte de la théorie de l'extension montre l'importance de l'intuition géométrique dans celui-ci.

Dès le début de l'Ausdehnunglehre, il souligne en effet l'importance de l'intuition pour un éventuel lecteur, intuition dont la géométrie sera le principal moteur.

“ Pour ne pas fatiguer le lecteur avec de continuelles abstractions et pour le mettre également en état, partant de choses connues, de se mouvoir avec plus de liberté et d'indépendance, je me rattache partout à la géométrie pour la déduction des concepts nouveaux, dont notre science constitue la base. Mais en posant toujours à la base le concept abstrait pour la déduction des vérités qui constituent le contenu de cette science, sans jamais me fonder sur une vérité démontrée en géométrie, j'obtiens cependant ainsi la science dans son contenu totalement pure et indépendante de la géométrie. ” (Grassmann 1844 trad.Flament 1994, p.11)⁴

On observe en fait dans l'Ausdehnunglehre une géométrie indépendante de la théorie de l'extension ; il s'agit, selon Grassmann lui-même d'une science appliquée, “ tirant ses lois des propriétés de l'espace ” ; cette géométrie fournit un modèle analogique pour la théorie des formes. Par ailleurs, une fois la théorie établie, celle-ci est illustrée par des applications géométriques ; on observe alors l'intervention d'un modèle géométrique paradigmatique, la géométrie associée étant une partie de la théorie des formes.

Grassmann insiste à plusieurs reprises sur le fait que sa théorie est indépendante de la géométrie qui l'a inspirée ; mais l'importance du modèle géométrique paradigmatique fait que la distinction entre la théorie générale et son application à la géométrie est extrêmement difficile à réaliser. Grassmann lui-même en vient à utiliser parfois un vocabulaire spécifiquement géométrique, dans la théorie générale.

Il est évidemment impossible de déterminer les conséquences effectives, sur un éventuel lecteur de l'époque, de ce recours systématique aux deux modèles géométriques que nous avons mentionnés. L'œuvre de Grassmann fut peu diffusée, et resta longtemps méconnue pour différentes raisons : la position de l'auteur, en dehors du milieu académique, et ses choix de présentation très formalistes, accompagnés de discours philosophiques obscurs, ont certainement freiné la diffusion de l'Ausdehnunglehre.

Cependant certains mathématiciens reconnurent la richesse de son contenu ; c'est en particulier le cas de Peano, qui publia en 1888 : “ *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnunglehre di H.Grassmann* ”. Dans ce livre, Peano présente la théorie des formes, mais en se limitant aux applications à la géométrie. Il a donc repris, en les accentuant, les choix faits par Grassmann dans l'Ausdehnunglehre ; seul le modèle paradigmatique géométrique est conservé, en tout cas dans la majeure partie du “ *Calcolo geometrico* ”. On peut donc supposer que l'attachement de Grassmann au modèle géométrique a été l'un des facteurs qui ont limité l'influence de l'Ausdehnunglehre dans la genèse de l'algèbre linéaire.

2.2 Evolution de notions géométriques et liens avec le secondaire

Le passage de la géométrie vectorielle enseignée au lycée à l'algèbre linéaire et bilinéaire, voire ensuite à l'analyse fonctionnelle, peut être interprété en termes de niveaux de conceptualisation. Cette notion, introduite par Robert, désigne :

“ Un palier dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel), correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes, et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré. ” (Robert, in Dorier et al. 1997, p.149).

⁴Les citations de Grassmann en français sont extraites de [Flament 1994]

De nombreuses notions rencontrées en géométrie au lycée sont ensuite revues en algèbre linéaire, voire en analyse fonctionnelle ; les définitions données changent, de nouvelles propriétés sont introduites, et bien entendu, de nouvelles tâches sont proposées. Nous avons tenté de repérer les continuités et les ruptures dans ce processus, afin d'une part de mettre à jour des liens possibles avec ce qui est fait dans le secondaire, et d'autre part d'identifier des possibilités et les limites de l'emploi d'une géométrie, à préciser, pour atténuer les ruptures observées.

Nous allons présenter ici l'analyse que nous avons faite autour de la notion de base.

Notion de base : définition, propriétés

DEUG

Une base d'un espace vectoriel est définie comme une famille libre et génératrice de cet espace. Cette définition est valable en dimension finie comme en dimension infinie (les termes "libre" et "génératrice" traduisent cependant en dimension infinie des propriétés différentes).

Les propriétés et théorèmes suivants sont ensuite établis :

- (P₂₁) B est une base de E si et seulement si tout élément de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire (finie) d'éléments de B (les coefficients de cette combinaison linéaire sont alors appelés composantes, ou coordonnées de cet élément) ;
- (P₂₂) Tout espace vectoriel non réduit au vecteur nul admet des bases ;
- (P₂₃) De toute famille génératrice on peut extraire une base ;
- (P₂₄) Toute famille libre peut être complétée en une base ;

Plus, en dimension finie :

- (P₂₅) Dans un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps K , toutes les bases ont même cardinal. Ce nombre est appelé dimension de E sur K .
- (P₂₆) Dans un espace de dimension n , une famille libre a au plus n éléments ; si elle a n éléments, c'est une base.
- (P₂₇) Dans un espace de dimension n , une famille génératrice a au moins n éléments ; si elle a n éléments, c'est une base.

Licence-Maîtrise

Dans les espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets), on introduit des bases vérifiant des propriétés particulières. On dit que $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base de Schauder d'un espace de Banach E si pour tout u de E , il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ unique telle que $u = \sum_{n \geq 1} u_n$. On retrouve donc ici la propriété d'existence d'une décomposition unique, devenue centrale puisqu'elle constitue la définition d'une telle base. En revanche la propriété d'existence (P₂₂) n'est pas valable dans le cas des bases de Schauder.

Lycée

La notion de base du plan est définie en classe de seconde comme un couple de vecteurs non colinéaires ; la notion de base de l'espace est définie en première comme un triplet de vecteurs non coplanaires. Cette notion est immédiatement associée à celle de repère de l'espace ou du plan : un repère est une base à laquelle on adjoint un point origine. Notons que la notion de repère orthonormal du plan avait déjà été vue en classe de troisième. Dans le manuel Hachette de troisième on trouve en note cette définition de repère orthonormal du plan : ce sont deux axes perpendiculaires, gradués avec la même unité. Notons que, comme les élèves rencontrent d'abord la notion de repère sous la forme " repère orthonormal ", et que cette notion de repère et celle de base sont ensuite fortement associées, la notion de base non orthonormale semble peu naturelle.

La notion de base dans le cours de géométrie vectorielle du lycée renvoie à deux définitions distinctes, pour le plan et pour l'espace. Si le caractère " famille libre " apparaît en germe dans ces deux définitions, le caractère " famille génératrice " en est absent⁵. En effet, la dimension des espaces est connue a priori ici, bien que la notion même de dimension ne soit pas abordée. Le nombre de vecteurs fait ainsi partie de la définition de base.

Au lycée, la notion de base n'est pas évoquée à propos d'autres ensembles que l'espace (ou le plan) complet : on parle de vecteur directeur d'une droite, de couple de vecteurs directeurs d'un plan, mais le terme même de base n'est pas employé pour des objets du type sous-espace. Ceci accentue le fait que l'espace complet (ou le plan, en dimension 2) semble de nature tout à fait différente dans ce cadre géométrique de celle d'une droite ou d'un plan ; la structure commune n'est pas soulignée.

Parmi les propriétés vues en DEUG et citées ci-dessus, seules (P₂₁) et (P₂₆) présentent une parenté avec des propriétés du lycée. Ainsi, le théorème d'existence et d'unicité des coordonnées d'un vecteur sur une base est vu en seconde pour le plan et en première pour l'espace. Toutefois, la propriété (P₂₁) est une équivalence ; un seul des sens est vu au lycée, caractériser les bases par l'existence et l'unicité d'une décomposition n'y étant pas pertinent (voir l'étude de tâches qui suit). Dans le cas de (P₂₆), c'est seulement la partie " une famille libre de n vecteurs en dimension n est une base " qui est apparentée à la définition de base donnée au lycée.

Pour les autres propriétés, la connaissance a priori de la dimension, et l'absence de la notion de famille génératrice ne permet pas d'évoquer (P₂₃) , (P₂₅) , (P₂₇) . L'existence de bases, (P₂₂), n'est pas une propriété pertinente dans le cadre géométrique, elle semble évidente. La possibilité de compléter une famille libre (P₂₄) pourrait être évoquée ; mais les bases sont fréquemment données à l'avance dans les exercices, on ne recherche pas de base possédant des caractéristiques particulières qui pourraient conduire à compléter, par exemple, un couple de vecteurs directeurs d'un plan. De plus, la possibilité de compléter une base reste une propriété peu pertinente en dimension inférieure ou égale à trois, étant donné le faible nombre de vecteurs en jeu.

⁵ Dans l'ensemble du cours de géométrie vectorielle du lycée, peu d'éléments renvoient à la notion de famille génératrice. On peut l'associer à celle de vecteur directeur d'une droite, ou de couple de vecteurs directeurs d'un plan, au vu de la caractérisation vectorielle de la droite par " l'ensemble des points M tels que $\vec{OM} = t \vec{AB}$ ", ou du plan par " l'ensemble des points M tels que $\vec{OM} = r \vec{AB} + s \vec{AC}$ "; mais dans les deux cas il s'agit du cas particulier d'une base du sous-espace sous-jacent.

Les élèves ne rencontrent jamais dans le cours de géométrie du secondaire de famille génératrice qui ne soit pas une base ; ceci n'est pas surprenant, étant donné que le calcul vectoriel n'est enseigné qu'en tant qu'outil, et que la notion de dimension n'est pas abordée ; les dimensions manipulées sont faibles, et toujours connues d'avance.

Notion de base : types de tâches

Nous avons employé dans notre thèse, pour une étude détaillée des tâches, qui complète l'étude des différents niveaux de conceptualisation, la notion de praxéologie introduite par Chevallard. Une praxéologie, ou organisation praxéologique, est selon Chevallard un quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$. T représente un type de tâches, présent dans une institution donnée. τ , la technique, est une manière d'accomplir les tâches appartenant au type de tâches T . La partie $[T/\tau]$ représente selon Chevallard le bloc *pratico-technique*, usuellement appelé savoir-faire.

Nous présentons ici un exemple lié à la notion de base ; nous observerons des liens avec ce qui est vu au dans le secondaire, et poserons la question de ce qui pourrait être vu, mais ne l'est pas.

T_{base} : Déterminer si des vecteurs donnés forment une base d'un espace vectoriel

DEUG

Cette tâche sera effectuée différemment selon que l'on connaît, ou non, la dimension de l'espace ; nous nous plaçons ici dans le cas d'une dimension finie, et connue.

Si la dimension est connue (et finie), alors soit le nombre de vecteurs de la famille est différent de cette dimension et il suffit de faire cette remarque ; soit ce nombre est égal à la dimension, et il suffit de déterminer si la famille est libre, ou éventuellement génératrice (ce dernier cas de figure étant beaucoup plus rare). On est donc conduit à effectuer une sous-tâche du type :

T_{libre} : déterminer si une famille est libre

Pour cette tâche, les techniques employées varieront en fonction de l'espace étudié ; nous allons examiner l'exemple de $\mathbb{R}^n$, auquel on peut toujours se ramener par l'isomorphisme canonique (en supposant bien entendu que les notions correspondantes ont été rencontrées). Toutes les techniques évoquées ci-dessous peuvent donc être employées dans tout espace de dimension finie. Cependant, il existe des techniques spécifiques selon les objets étudiés : polynômes, suites, fonctions.

Exercice DEUG

Déterminer si n vecteurs $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Plusieurs techniques sont disponibles pour déterminer si la famille est libre :

- τ_S : emploi d'un système linéaire, dont les solutions sont les coefficients d'une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille ;
- τ_{MC} et τ_{ML} : emploi d'une matrice, qui sera échelonnée selon les lignes ou selon les colonnes ;
- τ_D : calcul d'un déterminant.

Etudier si des vecteurs du plan sont colinéaires, ou si des vecteurs de l'espace sont coplanaires pourrait être perçu comme une tâche du type T_{libre} , si l'on disposait dans l'institution "lycée" des éléments théoriques relatifs à la notion de famille libre.

Montrer que des vecteurs sont ou ne sont pas colinéaires peut se faire dès la classe de seconde, d'abord en utilisant des configurations particulières : dans un "vrai" triangle ABC, les points A, B et C n'étant pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Ensuite, une fois introduite la notion de coordonnées dans une base, les élèves peuvent montrer que deux vecteurs donnés par leurs coordonnées ne sont pas colinéaires car les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Ils peuvent utiliser directement cette propriété, ou employer la technique qui consiste à calculer le déterminant 2×2 de ces vecteurs (technique de type τ_D) ; les vecteurs donnés par leurs coordonnées sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul.

La technologie correspondante repose sur cette dernière propriété, qui est démontrée ; en fait il s'agit essentiellement d'une commodité d'écriture, permettant de ne pas distinguer les cas de nullité d'une des coordonnées. Le déterminant apparaît ici comme un élément relevant d'un niveau de conceptualisation supérieur, introduit dans un cas très restreint (il ne sera pas question de déterminant au-delà de la dimension 2).

Montrer que trois vecteurs de l'espace ne sont pas coplanaires peut se faire aussi à l'aide d'une configuration particulière : dans un "vrai" tétraèdre ABCD, les points A, B, C et D n'étant pas coplanaires, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

Il est également possible de vérifier si des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires en cherchant à déterminer s'il existe des coefficients x et y avec $\vec{w} = x \vec{u} + y \vec{v}$. Cette démarche est essentiellement proposée pour montrer que des vecteurs sont effectivement coplanaires, et lorsque la relation ci-dessus peut être déduite des propriétés d'une configuration particulière, avec la relation de Chasles par exemple. Ces techniques (emploi d'une configuration géométrique particulière), spécifiques du cadre géométrique, ne sont pas généralisables.

Dans les manuels que nous avons étudiés, nous n'avons rencontré le type de tâches : montrer que des vecteurs donnés forment une base de l'espace ou d'un plan que dans le cas de bases orthonormales, cas que nous n'examinerons pas ici.

On peut alors se demander pourquoi ce type de tâches est absent des manuels du secondaire, alors que les éléments technologico-théoriques permettant de développer les techniques nécessaires sont disponibles.

En effet, une base du plan étant définie comme un couple de vecteurs non colinéaires, et une base de l'espace comme un triplet de vecteurs non coplanaires, déterminer si des vecteurs forment une base pourrait être fait en vérifiant d'abord qu'on a bien le bon nombre de vecteurs, puis en étudiant s'ils sont non colinéaires ou non coplanaires.

L'absence de ce type de tâches tient au rôle de la notion de base au lycée : celle-ci a un statut d'outil, employé le plus souvent implicitement ; on dispose en général d'une base, donnée au départ, associée à un repère, et qui permet de caractériser des points ou des vecteurs par leurs coordonnées. Un choix de base adaptée peut éventuellement intervenir (mais ceci est très rare) pour une configuration géométrique particulière, mais celui-ci ne conduira pas à montrer que les vecteurs choisis forment une base, cette propriété étant généralement évidente au vu de la configuration. Ce qui manque ici est donc la raison d'être de ce type de tâches.

Ruptures constatées

Nous dressons ici un rapide bilan des ruptures qui se dégagent de l'étude de l'évolution des différentes notions (familles libres, bases, orthogonalité, produit scalaire, équations d'un sous-espace, projection, projection orthogonale, automorphismes orthogonaux).

Tout d'abord, l'enseignement du lycée se déroule dans le cadre de la géométrie affine euclidienne. L'aspect " affine " implique que l'élément premier est le point ; les sous-espaces considérés sont affines, les applications également, elles agissent presque uniquement sur des points. L'introduction du vecteur est liée à la notion de translation ; cette introduction entraîne des difficultés didactiques connues, par exemple en ce qui concerne la séparation entre un vecteur et un représentant de ce vecteur. L'objet premier reste le point ; le vecteur prend toutefois de l'importance après la définition du produit scalaire. L'anne et l'euclidien sont fortement associés, et leur séparation semblerait contraire à l'intuition dans ce cadre : l'orthogonalité, la norme y sont des notions naturelles.

De plus, au lycée, l'étude du plan et celle de l'espace sont effectuées séparément, avec des différences de vocabulaire (il s'agit notamment de " plan " et " d'espace ", et non d'espaces de dimension 2 et 3, le terme dimension n'étant pas employé). De même dans l'espace, droites et plans apparaissent comme des objets de nature tout à fait différente de celle de l'espace complet, la structure commune n'est pas soulignée.

D'une manière générale, les propriétés spatiales restent centrales, en particulier dans les exercices proposés, mais également dans les définitions et les propriétés données. L'étude des applications est liée à celle des configurations. De même, pour déterminer si des vecteurs sont colinéaires ou coplanaires, on attend souvent des élèves qu'ils utilisent une configuration géométrique particulière.

Par ailleurs, les types de tâches de DEUG que nous avons mentionnés parce qu'ils présentaient des liens avec des types de tâches rencontrés au lycée correspondent à des exercices élémentaires au niveau de l'université. Il est rare que de tels exercices fassent l'objet d'une étude approfondie en travaux dirigés, les contraintes de temps conduisant à passer rapidement à des tâches plus complexes.

2.3 Possibilités d'élaboration d'un modèle

Nous examinons ici la possibilité d'élaboration d'un modèle pour l'introduction de l'algèbre linéaire générale. Nous ne nous limitons pas à un modèle géométrique, car nous avons choisi ici d'appeler " géométrie " une théorie dont l'objet central est la modélisation de l'espace physique. En particulier, l'algèbre linéaire, même limitée à la dimension 3, ne peut pas être considérée comme une géométrie selon cette convention. Nous allons nous poser la question des apports possibles d'un enseignement d'algèbre linéaire et bilinéaire, limité à la dimension trois, les notions et propriétés introduites dans un cours de géométrie devant préparer à l'algèbre linéaire faisant partie d'un tel cours.

Un tel enseignement permettrait sans doute de renforcer le lien entre ce qui est fait au lycée et ce qui est vu en DEUG sur certains points. Il permettrait d'autre part d'introduire des notions d'algèbre linéaire sans présenter d'emblée l'ensemble de la théorie. On pourrait, dans un tel

enseignement, introduire notamment les notions de sous-espace vectoriel, famille libre, génératrice, application linéaire (en soulignant éventuellement projections, symétries), matrice d'une telle application, voire réduction d'endomorphismes, ainsi que l'étude des espaces euclidiens limités à la dimension 3, avec en particulier ce qui concerne les isométries. Mais la faiblesse des dimensions en jeu, et l'importance des propriétés spatiales lorsque la dimension est ainsi limitée, même dans un enseignement d'algèbre linéaire, ne permettent sans doute pas de combler tous les écarts rappelés ci-dessus.

Parmi les propriétés et notions qui pourraient être présentées dans un tel cours, certaines permettraient d'établir des liens avec la géométrie vue au lycée ; par ailleurs, des notions d'algèbre linéaire pourraient être introduites en dimension ≤ 3 , de manière plus concrète que dans la théorie générale. Cependant il reste des propriétés pour lesquelles la limitation à la dimension peut apparaître comme trop restrictive, en particulier à cause du modèle figuratif associé, dans lequel certaines propriétés deviennent des évidences spatiales. Donnons des exemples pour illustrer ces différents cas de figure :

- La propriété de linéarité des projections peut être présentée en lien avec le théorème de Thalès rencontré dans le secondaire ;
- Les notions de valeurs propres, sous-espaces propres peuvent être présentés en dimension 3 (notamment pour le cas d'une projection, ou d'une symétrie) ; ces notions restent pertinentes, malgré la dimension limitée ;
- En revanche, la propriété d'idempotence des projections : $pop=p$ peut apparaître comme une évidence spatiale en dimension ≤ 3 . C'est aussi le cas des propriétés d'existence : existence de bases, de bases orthogonales, qui semblent intuitivement évidentes.

En ce qui concerne les tâches, la limitation du nombre de dimensions semble moins restrictive que pour les notions et propriétés. En effet, de nombreuses tâches pourraient être travaillées dans un enseignement d'algèbre linéaire limité à la dimension trois. Déterminer si une famille est libre, déterminer une base, ou un système d'équations d'un sous-espace, calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace, identifier une isométrie à sa matrice sont des tâches qui peuvent donner lieu à des exercices dans un tel enseignement. De plus des tâches nouvelles pourraient être abordées, comme la détermination de la matrice dans une base donnée, du noyau ou de l'image d'un endomorphisme, ou même la réduction d'un tel endomorphisme.

Un tel travail permettrait de préparer aux tâches plus complexes qui sont proposées en algèbre linéaire générale.

3. Interventions effectives de modèles géométriques

Notre étude des interventions effectives de modèles géométriques en algèbre linéaire comporte deux parties : la première concerne les enseignants, et la seconde les étudiants.

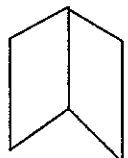
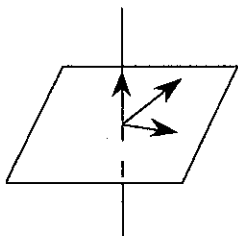
3.1 Questionnaire aux enseignants

Nous avons proposé un questionnaire à des enseignants de l'université (nous avons recueilli les réponses de 31 enseignants); ce questionnaire comportait trois parties distinctes, l'une consacrée aux exercices, l'autre au cours, et la dernière à l'emploi de dessins. Nous retenons ici trois résultats issus des réponses au questionnaire :

- Les enseignants ont peu recours au dessin en algèbre linéaire. Plus précisément, il ne semble pas qu'un emploi du dessin spécifique à l'algèbre linéaire soit développé ; nous détaillons ce point ci-dessous.
- Peu de liens sont faits, dans les enseignements d'algèbre linéaire, avec la géométrie vue au lycée. La moitié des enseignants que nous avons interrogés émet de sérieuses réserves sur ces possibilités d'emploi. Les raisons qu'ils invoquent sont de différentes natures : un tiers déclare explicitement ne pas connaître suffisamment les programmes du secondaire pour pouvoir les exploiter. Certains (moins nombreux) disent que ce qui est vu au lycée est trop différent, ou encore mal maîtrisé par les étudiants.
- On observe dans les choix des enseignants une influence encore forte de la réforme des mathématiques modernes. Nous aborderons ce point en conclusion de la partie 3.

Emploi de dessins par les enseignants

Nous avons tout d'abord proposé trois dessins, en demandant aux enseignants s'ils utilisaient ceux-ci, et pour illustrer quelle notion ou propriété d'algèbre. Voici le tableau correspondant :

Figure	Utilisée	Cette figure illustre
	☐ oui ☐ non	
	☐ oui ☐ non	
	☐ oui ☐ non	

Puis, dans un tableau comportant 5 lignes, nous leur avons demandé de donner d'autres dessins qu'ils utilisaient dans leur cours d'algèbre linéaire, en précisant ce que ceux-ci illustraient.

Sans entrer dans le détail des réponses, nous allons rapporter ici les éléments marquants qui ressortent de l'analyse.

Tout d'abord, il semble que les enseignants utilisent peu de dessins⁶. Les trois dessins proposés, et les cinq cases vides du tableau suivant, invitaient les enseignants à s'exprimer sur 8 dessins intervenant dans leur cours d'algèbre linéaire ; or le nombre moyen de dessins mentionnés est seulement de 3,2 par enseignant. Parmi les 28 enseignants qui ont répondu à cette question, 12 (soit 43%) ne proposent aucun dessin dans le tableau prévu à cet effet.

Par ailleurs, les dessins sont majoritairement employés pour illustrer des situations en dimension inférieure ou égale à trois. Seize enseignants (57%) associent aux dessins qu'ils déclarent employer plus d'interprétations en dimension ≤ 3 que dans un cadre général (par exemple, pour le deuxième dessin que nous avons proposé, 8 enseignants parlent d'intersection de plans, et 5 d'intersection de sous-espaces).

De plus, les dessins proposés par les enseignants dans la seconde partie de la question sont pour la plupart employés pour illustrer des notions ou des situations qui peuvent relever d'une géométrie, et ne sont en tout cas pas spécifiques de l'algèbre linéaire. Symétries, projections, rotations, coniques sont fréquemment citées, alors que la seule notion relevant spécifiquement de l'algèbre linéaire et citée par au moins deux enseignants est celle de somme de sous-espaces, sous-espaces supplémentaires. Voici quelques exemples de dessins, et d'interprétations associées :

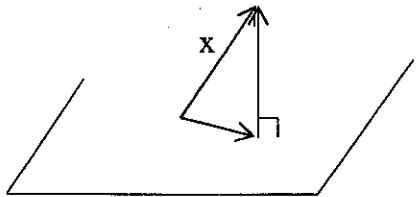
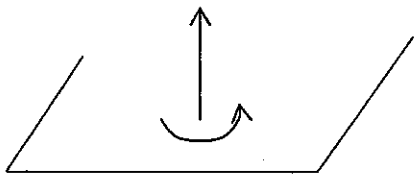
Figure	Cette figure illustre
	Projection orthogonale sur un plan

Figure	Cette figure illustre
	Rotation dans l'espace

Il semble en fait que les enseignants n'ont pas développé une réelle pratique spécifique du dessin en algèbre linéaire. Les dessins employés, qui sont peu variés car ils représentent pratiquement toujours des droites, des plans et des vecteurs (avec parfois certains traits en pointillés) sont plutôt utilisés pour illustrer des exemples dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$; les notions en jeu dans ces exemples étaient pour la plupart déjà connues au lycée. Certains enseignants font systématiquement figurer une origine O sur leurs dessins, d'autres ne mentionnent pas un tel

⁶ Ce fait est confirmé par les étudiants.

point. Les dessins dans le plan comportent souvent un repère ; ce n'est pratiquement jamais le cas des dessins illustrant une situation dans l'espace. Il n'y a pas de convention de dessin explicite commune aux enseignants interrogés. On peut supposer qu'il sera alors difficile aux étudiants de s'aider de dessins dans leur pratique de l'algèbre linéaire.

3.2 Questionnaire aux étudiants

Nous avons choisi d'interroger des étudiants de CAPES ou de maîtrise, c'est à dire en particulier des étudiants qui disposent tous d'une licence de mathématiques. En effet ces étudiants ont suivi l'ensemble de l'évolution de notions que nous avons évoquée dans la partie 2 ; ils ont par ailleurs rencontré différents enseignants, donc sans doute plusieurs types de recours au géométrique. Nous avons par ailleurs décidé d'interroger les étudiants en deux temps, en leur soumettant d'abord un questionnaire écrit, puis en les rencontrant pour un entretien afin d'éclaircir éventuellement leur réponses au questionnaire, et d'observer directement leurs pratiques en termes de dessins. L'examen de leurs réponses nous notamment conduite aux conclusions suivantes :

- Certains étudiants ont recours, en algèbre linéaire à la géométrie vue au lycée ; ceci peut entraîner des difficultés.
- Parmi les étudiants qui utilisent des dessins, certains ont recours à un modèle figuratif affine ; ce recours est associé à des difficultés en algèbre linéaire.
- Certains étudiants, qui ne semblent pas avoir de difficultés en algèbre linéaire, n'ont recours à aucun modèle figuratif.

Nous allons développer un extrait du questionnaire, qui contient des éléments relevant de ces trois aspects.

Extrait du questionnaire

Exercice 2

Donner une matrice 4×4 qui représente une symétrie.

Analyse a priori

La forme de la question permet une grande variété de réponses : aucune contrainte n'est imposée sur les caractéristiques de la symétrie, ni sur celles de la matrice en dehors du fait qu'elle doit effectivement représenter une symétrie, et aucune demande explicite de justification n'est formulée.

Différentes démarches peuvent être adoptées pour fournir une matrice qui réponde à la question.

Celles-ci dépendent notamment de la caractérisation employée pour la notion de symétrie. Il peut s'agir d'une caractérisation de type formel : une symétrie est un endomorphisme vérifiant $s \circ s = \text{Id}$, donc il suffit de donner une matrice dont le carré est égal à la matrice identité ; ou $s(x) = x_F - x_G$, si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , ce qui donne soit les images des vecteurs d'une base de l'espace formée de vecteurs de F et de G , soit l'expression analytique de s , et permet donc de remplir la matrice.

Mais la caractérisation employée peut également être de nature beaucoup plus intuitive : les images des vecteurs de base, ou l'expression analytique d'une symétrie peuvent être ainsi utilisées directement, sans reposer sur une caractérisation formelle ; il faudra alors, lors de l'entretien, tenter de déterminer l'origine de ces propriétés. Elles peuvent notamment avoir

été déduites de propriétés lues sur un dessin représentant l'effet d'une symétrie en dimension 2 ou 3.

Il est également possible de partir de la forme, connue, d'une matrice de symétrie dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et d'étendre celle-ci à la dimension 4, en rajoutant un coefficient égal à 1 ou -1 à la diagonale, et en complétant la matrice par des coefficients nuls, sans utiliser de caractérisation non matricielle pour les symétries de $\mathbb{R}^4$.

Nous avons donc cherché lors de l'entretien, au cas où ces informations ne figuraient pas sur le questionnaire, à déterminer quelle caractérisation (plus ou moins intuitive) de la symétrie a été employée pour remplir la matrice. Nous avons tenté d'observer si des connaissances sur les symétries en dimension 2 ou 3 ont été utilisées et prolongées à la dimension 4 et en particulier si un dessin, ou une image mentale ont servi à rappeler ou à traduire ces connaissances.

47 étudiants ont participé au questionnaire et à l'entretien qui a suivi. La plupart (87 %) ont donné une matrice qui convenait. Nous avons distingué pour l'analyse trois couples de critères. Tout d'abord deux critères portant sur la nature de la symétrie observée : certains étudiants parlent de symétrie centrale, or cette notion provient nécessairement de connaissances de lycée. D'autres évoquent au contraire une symétrie par rapport à un sous-espace, selon un autre, terminologie qui n'a pu être rencontrée qu'en algèbre linéaire. Nous observons ensuite si l'étudiant a fait un dessin (nous demandions systématiquement, lors de l'entretien, s'il était possible d'associer un dessin à l'application évoquée) ; parmi les dessins, nous distinguons dessins affines et dessins vectoriels (c'est à dire des dessins représentant des symétries agissant sur des points ou sur des vecteurs). Par ailleurs, nous avons noté deux manières différentes de compléter la matrice : en considérant les images des vecteurs de base, ou en utilisant des coordonnées, et l'expression analytique de l'application.

L'analyse des réponses, faite en employant ces critères, nous a conduite à distinguer deux groupes, rassemblant 28 des 47 étudiants interrogés. Dans un premier groupe (12 étudiants), les étudiants utilisent les vecteurs de base pour remplir la matrice ; ils emploient à propos de la symétrie un vocabulaire rencontré en algèbre linéaire, et ceux qui dessinent (8 étudiants) font un dessin vectoriel. Dans le second groupe (16 étudiants), les réponses évoquent une symétrie centrale ; la matrice est complétée à l'aide des coordonnées. Dans le cas où un dessin est fait, il s'agit d'un dessin affine. Parmi les autres étudiants, on peut signaler 5 échec, et 4 étudiants faisant appel à une caractérisation purement formelle de la symétrie.

3.3 Bilan des recours effectifs

En ce qui concerne les enseignants, nous avons observé l'opposition entre deux principaux types d'attitudes, où l'on retrouve l'influence des prises de position datant de la réforme des mathématiques modernes. Pourtant d'autres attitudes sont envisageables. Ainsi certaines tentatives sont faites dans des manuels ; mais le recours au géométrique n'y dépasse guère la dimension 3. Il nous semble que ces tentatives pourraient être prolongées, au-delà de cette dimension notamment.

Pour les étudiants, nous avons observé que l'emploi d'un modèle figuratif de type affine était associé à des difficultés en algèbre linéaire. Or les deux positions majoritaires chez les enseignants risquent d'entraîner l'emploi d'un tel modèle. En effet, la position de type structuraliste, implique une défiance à l'égard des dessins qui conduit les enseignants à en utiliser peu. Ainsi le modèle figuratif affine attaché à la géométrie du lycée ne sera pas remplacé, et les étudiants éprouvant le besoin d'employer un modèle figuratif risquent d'y

faire appel. La position opposée regroupe des enseignants qui sont notamment favorables à un cours de géométrie affine précédant l'algèbre linéaire. Dans un tel cours, un modèle figuratif affine sera présenté aux étudiants, qui risquent alors d'y avoir recours y compris en algèbre linéaire. Il serait donc intéressant de tenter un enseignement d'algèbre linéaire utilisant un modèle figuratif vectoriel, sans qu'un modèle affine ait été introduit auparavant. Rappelons toutefois que nous avons observé que certains étudiants, utilisant un modèle figuratif vectoriel adapté, ont cependant des difficultés en algèbre linéaire tandis que d'autres qui réussissent mieux ne semblent pas avoir recours à un quelconque support de nature géométrique. Examiner de plus près les pratiques de ce dernier type d'étudiants pourrait faire l'objet d'une recherche spécifique, qui permettrait de déterminer si le dessin leur est utile à certains stades de leur apprentissage, et est ensuite intériorisé, ou s'il est simplement absent de leurs pratiques.

Par ailleurs, en ce qui concerne l'usage de dessins, plusieurs éléments nous montrent que la plupart des enseignants en utilisent peu, ou n'ont du moins pas développé de pratique spécifique quant à l'emploi de dessins en algèbre linéaire. En effet les réponses des enseignants au questionnaire montrent que le nombre de dessins que ceux-ci déclarent utiliser est faible, et que les notions illustrées sont soit déjà connues en géométrie au lycée, soit transférables en géométrie affine. Il semble donc que l'introduction de notions nouvelles d'algèbre linéaire ne soit pas ou soit peu accompagnée de dessins par les enseignants. Ceci est confirmé par les réponses des étudiants, qui d'une part déclarent majoritairement ne pas se souvenir d'emploi de dessins par les enseignants et d'autre part se réfèrent à des notions déjà connues dans le secondaire lorsqu'on leur demande de dessiner : base, symétrie centrale par exemple. Préciser ce qu'est l'usage effectif de dessins par les enseignants dans un cours d'algèbre linéaire est l'une des directions de recherche qu'il serait intéressant de poursuivre, en réalisant des observations en classe qui sont indispensables dans ce cas.

Par ailleurs, le questionnaire aux enseignants a montré que ceux-ci manifestent une nette défiance à l'égard de l'éventuel emploi, en algèbre linéaire, de connaissances issues de l'enseignement secondaire. Or nous avons vu dans le paragraphe précédent que certains liens pourraient être exploités. Cette possibilité n'est pas encore mise à profit ; elle pourrait également donner lieu à des expérimentations ultérieures.

Conclusion

Nous présentons en conclusion des pistes pour des recherches ultérieures, articulées autour de la mise en place d'un enseignement expérimental en DEUG.

Un tel enseignement pourrait porter, en première année, sur l'étude de l'algèbre linéaire et bilinéaire en dimensions 2 et 3.

Une étude portant simultanément sur l'algèbre linéaire et les espaces euclidiens nous semble nécessaire pour mettre à profit l'intuition géométrique. Etant donnée l'expérience de la géométrie dont disposent les néobacheliers, il ne peut pas être naturel d'exclure, même dans un premier temps, les notions de norme d'un vecteur ou d'orthogonalité.

Ceci permettrait d'aborder des concepts nouveaux sans exposer d'emblée l'ensemble de la théorie. Un certain nombre de propriétés peuvent être présentées dans le cadre de la dimension 2 ou 3, en soulignant les liens avec la géométrie vue au lycée, au sujet des bases, des projections, des isométries... De même la limitation de dimension permet de travailler des tâches non élémentaires, mais cependant moins abstraites que ce qui est pratiqué usuellement ; celles-ci ne donnent lieu habituellement qu'à peu d'exercices, comme nous l'avons constaté dans notre étude de manuels. Ainsi les tâches qui comportent des parentés avec des tâches de lycée pourraient être présentées comme un élargissement de ce qui est vu dans le secondaire et approfondies. Il ne s'agit pas ici de tenter d'empêcher toute rupture entre

le secondaire et le supérieur, en faisant apparaître l'algèbre linéaire comme une généralisation de la géométrie vue dans le secondaire. Un tel choix ne correspondrait aucunement à la réalité ; par ailleurs, la rupture est non seulement inévitable mais sans doute également souhaitable, dans une certaine mesure. En termes de niveaux de conceptualisation, nous pouvons dire que le passage d'un niveau à l'autre ne peut s'apparenter à une progression sans discontinuités. Cependant souligner explicitement les continuités comme les ruptures attachées à ce changement de niveaux ne peut qu'être profitable aux étudiants.

Au delà de la référence à l'enseignement secondaire, la limitation de dimension permet de mettre à profit des modèles géométriques et figuratifs. Il ne s'agit pas uniquement de faire le lien avec la géométrie vue au lycée, mais également d'employer autant que possible des dessins. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, il nous semble important de proposer aux étudiants un modèle figuratif vectoriel, pour éviter qu'ils aient recours au modèle affine de l'enseignement secondaire. Ce modèle vectoriel doit selon nous être utilisé également pour illustrer des situations se déroulant dans des espaces de polynômes ou de fonctions. En effet, la limitation à la dimension 2 ou 3 ne signifie pas, pour nous, une simple présentation de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens. Une limitation à ce cadre ne peut pas, selon nous, suffire à motiver un enseignement d'algèbre linéaire. Par ailleurs, il nous semble important de proposer aux étudiants un véritable modèle intuitif (associé à un modèle figuratif), adapté à l'algèbre linéaire et dépassant la simple géométrie du lycée à laquelle on aurait appliqué le vocabulaire de l'algèbre linéaire. Ainsi la notion de projection, la distance d'un vecteur à un sous-espace, l'exemple d'une rotation du plan comme endomorphisme n'admettant pas de vecteur propre... peuvent faire partie d'un tel modèle. Celui-ci peut ensuite servir comme modèle intuitif dans la présentation de l'algèbre linéaire et bilinéaire générale en deuxième année. L'emploi de ce modèle pourrait permettre d'éviter la rupture que l'on observe dans certains manuels lors du passage à une dimension quelconque. En particulier, le recours au modèle figuratif peut être effectué quelle que soit la dimension finie considérée. Au delà même de sa partie figurative, l'algèbre linéaire et bilinéaire en dimension 2 ou 3 peut être employée dans un tel enseignement comme modèle paradigmatique pour la théorie générale.

Par ailleurs, si le découpage que nous proposons ici ne permet pas, pour des questions de temps, d'exposer l'intégralité de l'algèbre linéaire et bilinéaire dans les deux premières années de l'université, il pourrait être envisageable de reporter au-delà une partie de cet enseignement ; un tel choix est d'ailleurs effectif dans les maquettes élaborées par certaines universités en vue de la prochaine réforme.

Références

- ARTIGUE, M., CHARTIER, G. et DORIER, J.-L. (2000) : Presentation of other research works, in Dorier (ed.) : *On the teaching of linear algebra*, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 247-264.
- BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999) : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.19.1, 77-124.
- CHEVALLARD, Y. (1985) : *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Editions la Pensée sauvage, Grenoble.
- CHOQUET, G. (1964) : *L'enseignement de la géométrie*, Paris : Hermann.
- C.R.E.M. (Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques) (2000) : Rapport d'étape sur l'enseignement de la géométrie, *Bulletin Apmep* n°430, 571-599.
- DIEUDONNE, J. (1964) : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Paris : Hermann 1964.
- DORIER, J.-L. (1996) : Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'histoire des mathématiques* 2, 149-191.

- DORIER, J.L. et al. (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La Pensée sauvage éditions.
- DORIER, J.L. et al. (2000) : *On the teaching of linear algebra*, Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.
- FISCHBEIN, E. (1987) : *Intuition in science and Mathematics, An Educational Approach*, Dordrecht : D.Reidel Publishing Company.
- FISCHBEIN, E. (1993) : The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.24, n.2, 139-162..
- FLAMENT, D. (1994) : *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, la lineale Ausdehnunglehre*, Paris : Blanchard. Traduction préfacée de (Grassmann 1844).
- FRECHET, M. (1928) : *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Paris : Gauthier-Villars ; rééd, 1951.
- GRASSMANN, H. (1844) : *Die lineale Ausdehnunglehre*, Leipzig : Otto Wigand.
- GUEUDET-CHARTIER G. (2000) : *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1994) : Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14.1.2, 165-210.
- PEANO, G. (1888) : *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnunglehre di H.Grassmann e preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino : Fratelli Bocca Editori.
- PEANO, G. (1958) : *Opere Scelte*, vol I, II, III, Roma : Edizioni Cremonese.
- RIESZ, F. (1907) : Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables, *C.R. Acad. Sc.* 144, 1409-1411.
- RIESZ, F. (1960) : *Œuvres complètes*, 2 vols., Paris : Gauthier-Villars.
- ROBERT, A. (1997) : Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire, in Dorier et al.: *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La Pensée sauvage éditions.
- SCHMIDT E. (1907) : Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 1, *Math. Ann.* 63 , 433-467.
- SCHMIDT E. (1907) : Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 2, *Math. Ann.* 64 , 161-174.
- SCHMIDT, E. (1908) : Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Palermo* 20, 53-77.

Questions sur la modalité outil des transformations géométriques dans l'enseignement.

Le cas des problèmes de construction.

*Neri Both Carvalho**
Université Fédérale de Santa Catarina, BRÉSIL
&
*Madeleine Éberhard***
Laboratoire Leibniz, Grenoble

Présentation par Madeleine Éberhard de la thèse de Neri Both, soutenue le 23 Octobre 2001, intitulée "Le sort des problèmes de construction dans le contexte français de l'enseignement des transformations géométriques, au lycée dans les années 1990. Une étude didactique en classe de Seconde avec une approche des aspects fonctionnels utilisant Cabri-géomètre II".

Problématique et cadre d'étude

Pour qui les compare aux programmes du Brésil, les programmes français pour l'enseignement de la géométrie mis en place à partir des années 1985 comportent deux singularités :

- Les transformations géométriques sont enseignées à tous les niveaux du secondaire ; il s'agit des isométries et des similitudes.
- Une place importante est donnée aux transformations pour l'étude de problèmes de géométrie, la mise en avant de l'aspect "outil" allant de pair avec le rôle central que les programmes entendent donner à la résolution de problèmes.

Le propos de Neri Both est d'étudier cette modalité "outil" au travers de l'étude de la place et du rôle, possibles ou réels, que tiennent les problèmes de construction dans l'enseignement des transformations.

Pourquoi ce choix des problèmes de construction ?

En effet, si les transformations géométriques et les problèmes de construction sont deux objets emblématiques de la géométrie et de l'évolution de son enseignement au cours du 20ème siècle en France, ces objets vivent deux destinées bien différentes. Actuellement dans le Secondaire, la présence des transformations à tous les niveaux constitue un *élément de stabilité de l'enseignement de la géométrie*. Les problèmes de construction apparaissent, eux, avec une présence discrète au niveau du lycée.

* Université Fédérale de Santa Catarina, BRÉSIL

** Laboratoire Leibniz, Grenoble

Un travail mené par Neri Both en 1997 dans le cadre d'un mémoire de DEA lui a fait rencontrer ces deux objets. Elle a observé des élèves de fin de Collège confrontés à des problèmes de construction susceptibles d'un traitement où symétries centrale et axiale avaient leur place. Leurs difficultés l'ont amenée à s'interroger sur l'enseignement du fonctionnement outil des transformations pour la résolution de problèmes.

Ayant pris la classe de Seconde comme poste d'observation pour étudier cette modalité outil, Neri Both choisit donc d'observer au travers du prisme des problèmes de construction. Ce choix introduit, bien sûr, les particularités de ce type de problèmes ; c'est l'effet *dévi*ation. Mais un effet *décomposition* peut permettre de capter certains aspects du fonctionnement des transformations.

Quelles sont les conditions qu'offre une étude en classe de Seconde ?

Dans les années 1990, l'aspect outil des transformations pour la résolution de problèmes est pris en compte par les programmes de Seconde. Une place est donnée aux problèmes de construction de manière explicite en Seconde. Les niveaux d'appréhension des transformations géométriques (Laborde et Grenier, 1987) rendent compte du contexte:

“ Une transformation géométrique peut être considérée :

au niveau 1 - comme une relation entre deux figures géométriques ou une relation entre deux parties d'une même figure ;

au niveau 2 - comme une application de l'ensemble des points du plan dans lui-même ;

au niveau 3 - comme un outil fonctionnel à des fins de mise en évidence d'invariants. ”

La classe de Seconde des années 1990 est celle du *passage* du niveau 1, celui de l'enseigne^men au Collège, au niveau 2. C'est le lieu de *la première rencontre avec la notion de transformation ponctuelle*.

Déjà présente au Collège, la modalité outil des transformations pour l'étude de configurations devient *objet d'étude explicite* en Seconde. Ce statut apparaît avec deux nouvelles conditions, à savoir :

- un *élargissement du corpus des problèmes* présentés avec une organisation en différents *types de problèmes*,

- la *coexistence de différents outils de résolution*. Les outils configurations de base et transformations se mettent en place, ainsi que le calcul vectoriel.

Les caractéristiques du fonctionnement des transformations vont pouvoir être présentées, étudiées, voire distinguées ou rapprochées de celles de l'outil configuration. Plus généralement, le programme offre les conditions d'une concurrence entre problèmes étudiés ou entre outils mis en œuvre. Mais il présente aussi des *limitations à l'étude* de problèmes de construction. Les précisions, “ pas d'étude systématique ”, “ aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible ”, peuvent notamment indiquer que l'étude des problèmes de construction n'est pas une fin en soi.

Ces considérations sous-tendent l'hypothèse principale du travail engagé :

(H) *La présentation des transformations comme outil d'étude des figures constitue une condition favorable pour la vie des problèmes de construction.*

En retour, les problèmes de construction sont des conditions pour l'étude des propriétés des transformations.

Les principales questions avancées

D'abord : Quel est le savoir qui vit en Seconde sur le fonctionnement outil des transformations pour la résolution des problèmes de construction ? D'où vient-il ? Comment s'est-il constitué ? A quels objets est-il associé ? Par quels corpus de problèmes ce fonctionnement peut-il être représenté ?

Puis, compte tenu du passage du niveau 1 au niveau 2, prévu en Seconde : *Peut-on rendre compte d'un corpus de problèmes de construction susceptibles de faire intervenir un jeu entre les aspects " relation entre figures " et " application ponctuelle " dans leur résolution par des transformations ?* Cette question s'inscrit en relation avec l'étude développée dans son travail de thèse par Ana-Paula Jahn (1998) à propos de problèmes de lieux.

Les objectifs du programme insistent sur l'importance de la résolution de problèmes. Il est question des méthodes et de leur portée. Pour les exercices, il faut que leur résolution ait valeur de méthode. Dans son étude de thèse sur les problèmes de construction, Hamid Chaachoua (1997) s'est intéressé à la " démarche de résolution ". Il n'a pas pris en compte l'outil transformation, ce que questionne Neri Both : *Comment la mise en œuvre des transformations s'insère-t-elle dans une démarche générale de résolution des problèmes de construction ?*

Le cadre théorique

A ce point, les questions formulées concernent la nature et la vie d'un objet de savoir complexe, dont l'existence est posée et qui sera nommé " Liens entre Transformations et Problèmes de Construction ". Pour les étudier, Neri Both se place dans le cadre de la *théorie de la transposition didactique* de Chevallard, élargie par la *théorie anthropologique*. Avec une large part faite au *questionnement écologique*, ce cadre lui fournit les moyens de l'étude de la vie de l'objet de savoir que nous venons de désigner, ou encore, des pratiques institutionnelles qui le concernent.

Avec la notion d'organisation praxéologique, Neri Both dispose d'instruments d'analyse en termes de Tâche, de Technique, de Technologie et de Théorie. Si l'on reconsidère rapidement les objets Problèmes de Construction (PC) et Transformations Géométriques (TG) vis-à-vis de ces instruments d'analyse, l'objet PC a justement comme caractéristique d'être du côté des tâches, la dimension outil plaçant TG du côté des techniques.

Dans ce qui précède, la dénomination problème de construction renvoie grossièrement à des énoncés de l'une des deux classes de la partition classique des problèmes de géométrie en problèmes de construction et problèmes de démonstration. Ces énoncés sont formulés en termes de tâches, il s'agit de " Construire... ". A propos, justement, de ces classes d'énoncés, Chevallard parle de genre de tâches, précisant que " concrètement un genre de tâches n'existe [dans l'enseignement] que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu mathématique est plus étroitement spécifié ". (Chevallard, 1999). Il souligne que ces types de

tâches ne sont pas des “donnés” et que leur construction se fait à partir de tâches particulières solidaires d’une même technique.

Pour l’objet TG, il a été question ci-dessus de méthodes ; il aurait pu être aussi question d’intervention des transformations, comme il est dit parfois dans l’institution Lycée Les notions de technique et de technologie permettent de reconsidérer ces différentes composantes de l’aspect outil.

Globalement donc, l’utilisation de la notion d’organisation praxéologique invite à cerner les conditions de la genèse dialectique de l’aspect outil avec des types de tâches (à caractériser). Ce sera une ligne directrice des différentes études menées dans la thèse.

I. Des traités pour une référence

Cette partie fait une place centrale aux savoirs sur le rapport des transformations aux problèmes de construction. Elle consiste en l’analyse de traités de la fin du 19ème siècle Cette exploration de différents lieux, où les objets PC et TG sont présents, vise à dégager les conditions de leur “co-présence” et de caractériser les liens qu’ils entretiennent.

1. Des choix initiaux

Petersen (1880) *Méthodes et Théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de 400 problèmes.*

F.G-M. (Frère Gabriel-Marie) (1882) *Cours de mathématiques élémentaires. Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 200 questions résolues.*

Hadamard (1898) *Leçons de géométrie (Note complémentaire sur les méthodes)*

Ces traités ayant été retenus⁷ pour leurs positions respectives dans leur réponse à des besoins d’enseignement, leur légitimité épistémologique et l’influence qu’ils ont pu avoir sur l’enseignement de la géométrie en France, Neri Both les analyse comme “institutions de transposition et de formation” (Neyret, 1995).

2. Le traité de Petersen comme organisation d’éléments de savoir

De l’analyse de cet opuscule ressort une organisation mathématique de référence dans le cadre d’une problématique géométrique de construction à la règle et au compas.

Cette organisation comprend deux types de tâches relatives à un même corpus de problèmes :

- Présenter la solution, avec les tâches “Effectuer”, “Démontrer”, “Discuter”
- Résoudre le problème, avec la tâche “Attaquer le problème”.

Elle comporte un ensemble structuré de *techniques d’attaque* dont la problématique des lieux, qui s’appuie sur la notion de condition, constitue l’élément technologique central.

La notion de *condition* est présente comme une notion *première* représentée au moyen des énoncés de lieux. Quant à la *problématique des lieux*, il est possible de la définir, chez Petersen, comme le fait de poser explicitement le problème de la détermination d’un point en

⁷ Il est à noter qu’ils sont tous les trois réédités chez Jacques Gabay à Paris.

terme d'intersection de lieux et de chercher à augmenter le stock de lieux en vue de résoudre des tels problèmes de détermination de points. En termes écologiques (Artaud, 1999), on a une *relation trophique* entre les objets lieux et PC, précisément un besoin en lieux pour les problèmes de construction.

Donnons une caractérisation et une dénomination brèves des techniques d'attaque des problèmes afin de pouvoir y faire référence commodément par la suite. Chaque technique est justifiée et expliquée comme extension par l'étude de la portée de la technique précédente, d'où la structuration en chaîne qui en découle :

- T0 : Séparer deux conditions
- TI : Désimbriquer des conditions pour se ramener à la détermination d'un point.
- TIL : Déterminer un point par intersection de lieux
- TAC : Abandonner une condition
- TFA : Construire une figure auxiliaire.

Les différents fonctionnements des transformations permettent d'outiller ces techniques. Chez Petersen⁸, on peut distinguer, par type de fonctionnement :

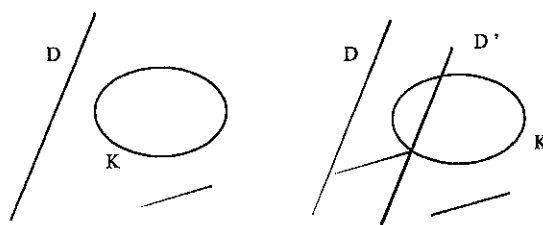
- les transformations qui engendrent des lieux par multiplication des courbes : la similitude étend le stock des lieux pour TIL ;
- les transformations qui engendrent des systèmes de figures " semblables et semblablement placées " en lien avec l'abandon d'une condition de taille ou de position pour l'association d'une similitude à TAC ;
- les transformations qui modifient les figures, avec des sous-figures obtenues par déplacement, translation ou rotation, ou retournement, pour TFA.

On a là des transformations *au service* des problèmes de construction.

3. Des problèmes qui représentent un fonctionnement outil des transformations

A partir des problèmes généraux de Petersen, Neri Both définit ce qu'elle appelle le corpus des *problèmes fondamentaux*. Voici, par exemple, le problème général de la translation parallèle donné par Petersen (et une solution) :

" Entre deux courbes données mener une ligne qui soit égale et parallèle à une ligne donnée.
" [ligne désigne ici ce qui serait maintenant nommé segment].



Résolution PCF-Translation

⁸ Pour réduire l'effet d'anachronisme, il est à préciser que le premier fonctionnement apparaît dans un contexte favorable à l'émergence de la notion d'application ponctuelle (niveau 2) ; dans les deux autres cas, les transformations fonctionnent comme relation entre figures (niveau 1).

Ce problème général représente la translation dans un fonctionnement outil. Par un jeu de variables, il engendre un corpus de problèmes que Neri Both a désigné par la suite “problèmes fondamentaux pour la translation” et noté PCf-Translations.

Par exemple, l'énoncé 271 de Petersen “*Mener une ligne égale et parallèle à une ligne donnée et qui ait ses extrémités sur deux circonférences données*” est engendré par la spécification des courbes. L'énoncé 272 “*Dans un triangle, mener une transversale de longueur donnée, parallèlement à un côté*” est lui aussi engendré par la spécification des courbes, le lexique des triangles intervenant pour exprimer la condition. On retrouve en ce double jeu sur les courbes et la condition dans l'énoncé 273 “*Dans un cercle, mener une corde qui soit égale et parallèle à une ligne donnée*”.

Il en ressort une typologie de problèmes de constructions fondamentaux, désignés par la notation PCf-Transformations, dont les types se distinguent par la nature⁹ de la transformation représentée. A priori, pour tout problème PCf-Transformation, il est possible de montrer que le fonctionnement outil de la transformation est indifféremment associable à l'une des techniques TIL, TAC et TFA. De plus, la suite des sous-tâches de la résolution peut faire intervenir un jeu ponctuel/global de la transformation. Les invariants de ce jeu sont l'appréhension globale d'une courbe comme image (dans notre exemple, D' comme image de D) et la détermination d'un point comme antécédent de l'un des points d'intersection de D avec K.

Ce corpus¹⁰ des problèmes fondamentaux répond à l'une des questions initiales.

4. Une complexification de l'organisation mathématique

Avec l'analyse du traité de F.G-M., l'organisation mathématique précédente s'enrichit de la macro-technique Analyse-Synthèse (Gascon, 1994) qui fonctionne pour les deux tâches, “Résoudre le problème” et “Présenter la solution” (les techniques précédentes étant, elles, qualifiées de particulières par F.G-M.).

Dans sa note sur les méthodes, Hadamard fait sienne la problématique de Petersen, tout en privilégiant la macro technique Analyse-Synthèse à la manière de F.G-M. On y trouve des exigences de rigueur dans le raisonnement que l'on peut rapporter à la tâche “Présenter la solution”. Ainsi, l'organisation mathématique de référence peut s'enrichir encore avec la technique de *traitement des propositions par équivalence*.

Cette analyse des traités fournit une référence et un point de départ pour étudier la transposition didactique du savoir Liens entre PC et TG. Elle met aussi en évidence (ce que nous ne développerons pas ici) que ces savoirs y sont pris dans des organisations mathématiques et didactiques qui satisfont les contraintes qui les rendent candidates à être transposées dans l'enseignement des transformations.

⁹ Symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie, si l'on reprend le lexique du Collège à partir des années 1980.

¹⁰ Nous ne ferons qu'évoquer ici un élargissement du corpus par des problèmes représentant, eux, le fonctionnement de la similitude (désignés en partie II par PCf-Similitude).

Au début du 20ème siècle, époque de débats pour des réformes qui portent, en particulier, sur la place et le rôle des transformations, ces traités ont pu jouer, parmi d'autres, leur *rôle d'institutions de transposition et de formation*. Il est fait l'hypothèse que les auteurs de manuels s'y sont assujettis par la suite, directement ou via des ouvrages intermédiaires, et que les professeurs s'y sont rapportés, via des manuels.

II. Un processus de transposition didactique

L'enjeu maintenant est de rendre compte du processus transpositif allant de la constitution d'une tradition, au début du 20ème siècle, à un héritage didactique pour le lycée des années 1980.

A la question : *Comment les savoirs sur les Liens entre Problèmes de Construction et Transformations géométriques sont-ils arrivés dans l'institution classe de Seconde des années 1980 (avant la période contemporaine) ?*, Neri Both répond par une analyse de programmes de Seconde et de manuels : " L'étude de manuels nous permet d'accéder à une représentation des systèmes didactiques qui réalisent effectivement les textes du savoir présentés dans ces manuels ". (Menssouri, 1994).

Différentes périodes sont caractérisées. Elles sont balisées par des changements de programme qui affectent à chaque fois les transformations en classe de Seconde.

I. L'installation dans l'édifice classique (1905 - 1959)

I. 1 : une place incertaine pour les transformations (1905 - 1946)

I. 2 : des transformations bien installées (1947 - 1959)

II. Les mathématiques modernes : transition et réforme (1960 - 1979)

II. 1 : les signes avant-coureurs du changement (1960 - 1969)

II. 2 : le temps de la rupture, la Réforme (1970 - 1979)

III. La Contre-Réforme (1980 - 1989)

IV. La Période contemporaine (1989 - 1999)

Trois pôles sont utilisés pour caractériser les moments successifs : la description du contexte des transformations, la place des techniques de résolution des problèmes (PC) et la fonction des problèmes fondamentaux (PCf).

1. Une place incertaine pour les transformations (1905-1946)

Dans cette période, la symétrie est vue comme propriété d'une figure. Les transformations translation et rotation sont associées au mouvement. Les techniques T0, T1 et TIL sont enseignées avec une problématique des lieux explicite (tandis qu'on trouve seulement des traces de TFA ...)

Les PCf sont rares. Leur association systématique à des problèmes de lieux forme, pour chaque transformation concernée, une petite organisation qui met en évidence les propriétés intrinsèques de cette transformation comme relation entre figures. Les PCf sont des problèmes de base pour ces transformations.

Un exemple (Chenevier, 1927)

Exercice 112 : *On donne une droite et un point A. On joint A à un point variable B de la droite, et on construit sur AB les deux triangles équilatéraux ABC et ABD. Lieux des points C et D quand B décrit la droite, A restant fixe ?*

Exercice 113 : la droite est remplacée par un cercle.

L'exercice 114 fait associer un angle de rotation au triangle équilatéral

Exercice 115 : *Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois droites parallèles données*

Exercice 116 : les droites parallèles de l'énoncé 115 sont remplacées par des cercles concentrique

2. Des transformations bien installées (1947-1959)

Dans cette période, la symétrie est vue comme action sur les figures, la translation reste associée au mouvement et l'homothétie apparaît avec son aspect ponctuel. La période est florissante pour les problèmes de construction qui sont objets officiels d'enseignement, tout comme les méthodes. Les chapitres "Méthodes" des manuels présentent des discours qui sont la marque d'un assujettissement à des traités de la fin du 19ème, tel celui de Petersen. Les techniques T0, T1 et TIL sont présentes avec une problématique de lieux explicite. L'Analyse-Synthèse est objet d'enseignement et fait intervenir des raisonnements par équivalence

Les PCf sont en relative abondance. Ils permettent de travailler les propriétés intrinsèques des transformations et de s'exercer à associer des propriétés à une transformation donnée.

3. Les signes avant coureurs du changement (1960 -1969)

La translation et l'homothétie, toutes deux présentes sous l'aspect ponctuel, se décrivent à l'aide de vecteurs. La symétrie concerne maintenant la géométrie dans l'espace...

Les méthodes sont toujours en bonne place. Les techniques T0, T1 et TIL sont enseignées, avec la notion de problèmes équivalents pour T1, mais le terme *lieu* s'efface au profit des *ensembles de points*. Analyse-Synthèse, conditions nécessaire-suffisante sont objets d'enseignement.

Les PCf sont toujours bien présents parmi les problèmes dits *spéculatifs*, avec les rôles précédents. Ils trouvent même une vie officielle au sein de la partie cours de certains manuels. Soit alors, leur rôle est d'illustrer un type de problèmes spéculatifs définis par un type de condition ; on a ainsi une rubrique "Constructions de points intersections de deux ensembles dont l'un au moins est obtenu par translation" dans Girard et Louquet (1963). Soit, ils rendent compte de manière générique, sinon unifiée, du fonctionnement de chaque transformation ; ce qu'on trouve avec la rubrique "lieu et construction" qui va se répétant dans les chapitres distincts de Durrande (1965) consacrés aux différentes transformations. Avec l'Analyse/Synthèse, la tâche "Présenter la solution" est privilégiée, avec des normes imposées de rédaction en deux parties.

4. Le temps de la Réforme (1970-1979)

Translation et homothétie, qualifiées de transformations ponctuelles, sont présentées dans un même habitat où prédomine l'aspect application du plan sur lui-même.

Les PCf sont la seule espèce de problèmes de construction qui résiste à la Réforme, contribuant à montrer que l'algébrisation de la géométrie n'empêche pas de traiter de questions de géométrie. En effet, ils peuvent justifier les transformations ponctuelles dont ils illustrent de manière unifiée les propriétés fonctionnelles. Cette illustration s'appuie par une représentation des problèmes par un même formalisme. Par exemple (Cluzel et Vissio, 1971) : "Il s'agit de construire deux points C et D tels que C ait pour image D dans une application f , et que C et D doivent appartenir respectivement à des ensembles c et d ".

Les techniques de résolution sont absentes. La macro-technique Analyse, identifiable dans le découpage des quelques indications de solution proposées par des manuels, est cachée dans le raisonnement par implication. C'est un indice de ce que le langage de la logique occupe la place de ces techniques. Les PCf sont systématiquement couplés à des problèmes de lieux. La problématique des lieux continue ainsi de vivre, mais de manière cachée.

5. Les années de la Contre-Réforme (1980-1989)

En Seconde, symétries, translation sont revisitées, en continuité avec le collège, mais en tant que transformations ponctuelles du plan dans le plan. L'homothétie et la rotation (pour un temps seulement) font leur entrée, comme transformations ponctuelles.

Les options épistémologiques et didactiques qui président à la mise en place des programmes de 1980 mettent au premier plan les problèmes, et les types de problèmes. Dans le fonctionnement des concepts, "leur mode d'intervention dans la résolution de problèmes est à considérer tout autant que leur organisation propre" (APMEP ; n°323). Ce lien est souligné dans les programmes par la nouvelle expression *outil de résolution*. En Seconde, les *thèmes* sont emblèmes de l'importance donnée aux problèmes et de la place voulue pour l'activité de l'élève. Le thème "Construction" participe à la reprise de la transposition de l'enseignement de la géométrie :

"Les constructions de configurations satisfaisant à des conditions données font partie des grands problèmes (...) [qui doivent avoir une place dans l'enseignement] pour

- les approfondissements ultérieurs et l'élaboration de concepts et d'outils nouveaux
- la formation scientifique (la capacité à analyser des configurations ; la capacité à investir des connaissances "théoriques" dans les résolutions de problèmes)
- la pratique de "l'analyse-synthèse".

et sont listés comme types de problèmes : constructions à la règle et au compas, constructions d'images et problèmes de construction où les transformations sont outils de résolution. (Marion, 1983)

Les points de vue didactique et méthodologique sont couplés dans une perspective de formation scientifique par la référence à l'analyse-synthèse. Pour la classe de Seconde, les propositions s'en tiennent toutefois à un objectif plus vague d'acquisition de méthodes.

Le thème construction offre a priori une *possibilité de liberté écologique* : son effet immédiat a été une ouverture de l'éventail des organisations possibles autour de problèmes de

construction. Mais l'ouverture se réalise globalement très inégalement sur l'ensemble des manuels, ce que nous allons préciser et discuter.

Si l'on retient les caractères communs aux organisations repérées dans les manuels étudiés, on note d'abord qu'il existe des manuels dans lesquels seuls les chapitres transformations présentent des problèmes de construction.

Appariés à l'étude d'un lieu-image de courbe, les PCf ont pour rôle d'illustrer les propriétés intrinsèques des transformations. Le point de vue ponctuel sur les transformations donne implicitement à leur fonctionnement son caractère générique. Quant aux techniques, seule Analyse-Synthèse est présente dans tous les manuels, conformément aux discours noosphériens. Mais la forme de présence est très variable, d'une présence implicite, dans une indication ou dans une rédaction de solution (Hachette, 1981, 1987), à une présentation explicite (Durrande¹¹, 1981, 1985). Elle se manifeste par deux parties dans la présentation de solutions.

La problématique des lieux est très amenuisée, au profit des images de courbes. Le terme lieu tend à ne servir que pour désigner le type des problèmes dans lesquels on caractérise une image d'objet géométrique. Avec ce statut des lieux et la désignation ensembliste, tout se passe comme s'il n'était plus question d'indiquer la relation entre les lieux, l'association d'une propriété caractéristique à une courbe et la détermination d'un point. La relation trophique exprimée dans les traités, le *besoin en lieux*, s'efface ainsi au profit d'une relation directe entre les objets-images et les problèmes PCf.

Cette étude du destin des problèmes PCf montre qu'ils se sont installés avec les transformations dans l'enseignement, que leur importance et leur rôle dépendent de l'appréhension des transformations, mais aussi des relations à d'autres problèmes, de la place accordée au raisonnement, aux justifications. Ils sont au service, tantôt des propriétés intrinsèques de chaque transformation, tantôt de leur caractère fonctionnel général.

III. Place et rôle effectifs des problèmes de construction

Neri Both considère que *ce qui est effectivement fait* dépend d'abord des choix du professeur confronté à la tâche d'organiser l'étude des transformations. Elle privilégie la position de professeur avec la question : Dans son enseignement des transformations, que fait "actuellement" le professeur de Lycée, plus précisément le professeur de Seconde, des problèmes de construction ?.

Pour rendre compte de ces choix, deux volets sont développés :

¹¹ Le manuel Durrande (1981) édité chez Vuibert est très probablement directement assujéti au traité de Petersen et aux traités de Polya (1967). Parmi les manuels examinés, il est le manuel le plus représentatif de la reprise de la transposition et de cette ouverture.

- Une étude d'un ensemble de cinq manuels de Seconde des années 1994 : cet ensemble est vu comme représentatif des choix possibles pour le professeur pour accomplir "actuellement" sa tâche.
- Un questionnaire auprès de professeurs.

1. Les choix possibles selon les manuels

L'étude réalisée atteste la présence de PC dans les chapitres dédiés aux transformations et via des problèmes PCf, dans tous les manuels, mais dans un seul manuel hors de ce contexte. Le professeur qui prépare son cours peut donc trouver des énoncés de PC où les transformations sont outils de résolution.

Ces énoncés de problèmes PCf ont pour caractéristique de ne pas se ramener à une *question directe* du type "Construire" et de comporter des *sous-questions*. De ce fait, la tâche "Ramener le problème à la détermination d'un point" n'est pratiquement jamais à la charge des élèves. Cela va de pair avec l'absence de discours sur la détermination des points par intersection de courbes (une évidence qui n'est pas mentionnée). La *problématique des lieux* est maintenant mise à l'écart, supplantée par les recherches d'images d'objets et la notion d'intersection d'ensemble de points.

Ces énoncés guident généralement vers l'étude d'une *sur-figure* qui met en évidence la détermination d'un premier point à construire par intersection de droites ou de cercles, l'un des objets images étant déjà là.

Plus généralement, les manuels de Seconde retirent tout statut de *question problématique* à PC. Cette condition écologique réduit les besoins en techniques de résolution. La technique TIL n'est plus explicitée.

Deux techniques d'attaque sont plus visibles, bien que non nommées : TAC-Abandon d'une condition et la macro-technique Analyse. Les problèmes PCf sont l'occasion de décrire la technique TAC via sa mise en œuvre, dans les deux seuls manuels où elle figure (discrètement. Cette technique est résolument couplée à la mise en œuvre d'une transformation., elle permet d'esquisser une *expérience graphique* pour introduire une transformation et une figure-image. Avec elle, l'occasion de prendre en charge la tâche "Résoudre" est présente tandis que l'étude directe de la figure à réaliser est évitée.

On rencontre la technique Analyse-Synthèse pour les problèmes PCf-Similitudes¹² par l'introduction d'une figure d'étude, le plus souvent munie d'un élément auxiliaire. La présence de sous-questions de démonstration prend en charge l'analyse. Il revient à l'élève de fournir l'algorithme, la synthèse. Plus rarement, on rencontre l'Analyse-Synthèse au travers du format d'un début de discours qui renvoie à la période des problèmes spéculatifs.

Dans les années 1990, l'objet PC est presque uniquement représenté par les PCf. Ces derniers sont les occasions de mise en œuvre implicite des techniques TIL et TFA, par introduction d'éléments auxiliaires ou de TAC (lorsqu'elle est présente dans un manuel !). Les résolutions rédigées s'expriment généralement dans le format "s'il existe...". Certains

¹² Voir la remarque faite au §4 en I. à propos de ce type de problèmes.

énoncés peuvent demander des distinctions de cas de non-existence ou de solutions multiples. En bref, l'objet PCf (au sens large suggéré en fin de I.1) *représente* à lui tout seul dans les manuels les organisations de problèmes de construction explorées par la tradition.

2. Le questionnaire

Le questionnaire comporte huit questions structurées autour de trois axes :

- l'estimation de la place faite aux objets PC et TG,
- les types d'énoncés et de résolution proposés par les professeurs,
- les connaissances des professeurs à propos des connaissances des élèves.

Il vise une expression assez complète des choix d'enseignement. Les questions évoquent des tâches réalisées ou à réaliser, des situations passées ou actuelles vécues par les professeurs. A priori, elles placent le professeur dans les différentes positions du modèle de la situation du professeur (Margolinas, 1995).

Des réponses aux 27 questionnaires rendus (18 étant complètement remplis) esquissons quelques résultats.

Un système de contraintes antagonistes pèse sur les professeurs :

Certaines expliquent la place réduite qu'ils donnent à l'objet PC en Seconde : l'objet n'est pas nommé dans les programmes ; les problèmes de construction sont difficiles et concurrencés par d'autres problèmes ; l'hétérogénéité des classes rend impossible de leur donner une place. Mais PC représente des valeurs fortes qui justifient de lui donner une place. Cette opinion est soutenue par des arguments empruntés aux discours de la noosphère des années 1980 et 1990.

Dans le champ de perception didactique et au dehors

Il apparaît que si l'aspect outil des transformations pour la résolution de problèmes de construction est bien dans le champ de perception didactique des professeurs, en revanche, les techniques de résolution de problèmes de construction sont quasi hors champ.

Seule l'analyse-synthèse est perçue, et bien faiblement, comme une technique de résolution. Les professeurs interrogés semblent ne pas percevoir comme objets d'enseignement les techniques particulières (au sens de F.G-M.). Ce fait peut être expliqué par l'absence d'un discours sur ces techniques dans les manuels de la période contemporaine : la problématique des lieux est évanouie, les techniques d'abandon de condition sont insérées dans les questions d'exercices de quelques manuels. Peut-il être, aussi, expliqué par l'importance donnée par les professeurs à la *fonction Problème de recherche* des problèmes de construction ? En effet, les problèmes de recherche ne sont-ils pas conçus comme des problèmes où l'important est *l'attitude de recherche* ?

Le traitement d'un problème de type PCf-Translation

L'une des questions portait sur un problème :

On donne un cercle C et deux points A et B qui n'appartiennent pas au cercle C. Construire un parallélogramme ABCD tel que les points C et D appartiennent au cercle.

Proposeriez-vous cet énoncé aux élèves ? Si non, pourquoi ?

Si oui, dans quelle classe et pourquoi ? A quel moment et pourquoi ?

Proposeriez-vous un changement de l'énoncé ? Pourquoi ? Si oui, donnez votre nouvel énoncé et la rédaction de la solution. Si non, donnez la résolution du problème conforme à l'énoncé que nous avons proposé

Dans les réponses des 18 professeurs, 5 donnent directement la solution sous forme d'algorithme. Les différents formats de discours associables à l'analyse-synthèse présents dans les manuels des années 1970-1989 se retrouvent dans les 13 autres résolutions. Il est remarquable que l'analyse s'arrête sitôt la translation trouvée et que la synthèse fait jouer pleinement le caractère ponctuel de la translation.

12 solutions sont du type *résolution canonique*, avec le tout translation à la manière inaugurée par Petersen puis formalisée dans la période de la Réforme, celle des manuels de Première S. Dans les résolutions non canoniques apparaissent trois sortes de réponses :

- des réponses qui manifestent une *concurrence* entre les *registres configuration et transformation* pour la détermination de l'antécédent (le deuxième sommet)
- des réponses (4) qui mobilisent une translation *non canonique* (que l'on peut rapprocher de la technique TFA)
- des réponses (2) qui ne mobilisent que des *configurations* pour rendre compte de l'ensemble de la résolution.

Ces 6 dernières réponses sont données par des professeurs qui n'enseignent pas en Première S. Elles révèlent l'ouverture des réponses possibles pour le problème traité et l'éventuelle utilisation *contractuelle* de la résolution canonique d'un problème PCf –Translation lorsque ce dernier est donné dans le chapitre " Translation ".

Les modifications d'énoncé envisagées par les professeurs montrent qu'ils sont obnubilés par la *question de l'existence* (8 fois sur 10), en même temps qu'est perçue la nécessité qu'ils la prennent en charge. Les 10 professeurs qui ont une classe de Seconde et qui proposeraient de donner l'énoncé en Seconde se regroupent autour de deux rôles pour le problème proposé : celui d'exercer à utiliser les propriétés de la translation (en donnant la translation dans l'énoncé) et celui de problème de recherche, aucune indication de solution n'étant fournie par l'énoncé. Ce deuxième rôle est en rupture avec les formes d'énoncés dominantes en Seconde et proposées dans les manuels. Cette rupture manifeste-t-elle qu'avec les PCf ces professeurs se réservent une marge de manœuvre en vue de satisfaire des conditions favorables à l'activité de l'élève voulue dans la période contemporaine ?

IV. Etude expérimentale utilisant cabri-géomètre

Les problèmes PCf sont susceptibles de faire intervenir un jeu entre les *aspects relation entre figures et application ponctuelle* dans le fonctionnement des transformations pour leur résolution. En mettant en place une micro-séquence d'enseignement dans deux classes de Seconde, Néri Both a pour objectif de spécifier des conditions sous lesquelles ce jeu peut contribuer à l'entrée dans l'étude des aspects fonctionnels des transformations.

Les problèmes y sont abordés dans l'environnement informatique Cabri-Géomètre II. Les conditions étudiées sont attachées à l'enseignement de la technique d'abandon de condition (TAC).

1. La séquence d'enseignement

Séance 1- Construction et reprise des outils de Cabri

Situation 1: " le parallélogramme et ses sommets sur un cercle donné "

Situation 2: " les points M et N et le point milieu "

Séance 2 - Introduction de la technique " Abandon d'une condition "

Situation 2 -TAC " les points M et N et le point milieu "

Séance 3 - Mise à l'essai de la technique " Abandon d'une condition ".

Situation 3: " le parallélogramme et ses sommets sur un cercle donné ".

Organisée en trois séances, la séquence met d'abord en scène un problème de construction (situation 1) puis deux problèmes PCf (situations 2 et 3). Ces deux derniers demandent la construction d'un Cabri-dessin comportant au moins deux points : les points M et N dans la situation 2 " les points M et N et le point milieu ", les points R et S dans la situation 3 " le parallélogramme PQRS et ses sommets R et S sur un cercle donné ". Ces points sont associés par une propriété géométrique qui les rattache à une configuration. Ils peuvent être aussi vus comme liés par une transformation (symétrie centrale en situation 2, translation en situation 3) ou par une relation de dépendance.

Le choix est d'enseigner explicitement la technique d'abandon de condition (TAC) en séance 2, suite au bilan sur l'exploration de la situation 2 entreprise en séance 1.

2. L'option Cabri-géomètre II et les questions posées

Avec la manipulation directe du dessin, Cabri-Géomètre offre avant tout une dimension expérimentale avec les possibilités d'une *expérimentation graphique*. Une autre caractéristique intéressante pour la résolution de problèmes de construction est l'ensemble des constructions de base disponible, avec des *primitives de dessin pur* et des *primitives géométriques*.

Retenons bien sûr les possibilités de déplacement des objet. Le *déplacement*, source de rétroaction, joue un rôle important dans la validation et la discussion de la solution. Un autre point que nous retenons ici est celui des différents statuts qui peuvent être attribués aux objets construits jusqu'à l'obtention d'un *Cabri-dessin*.

De manière très spécifique à l'étude, l'impossibilité du logiciel d'effectuer l'intersection d'un " *Objet* " Cabri avec un " *Lieu* " Cabri est une caractéristique majeure pour l'étude menée : elle constitue un *obstacle* positif pour provoquer la recherche de la transformation outil.

Précisons les questions qui ont guidé l'analyse :

Comment " Lieu " contribue-t-il à l'identification par les élèves d'une transformation pour trouver la solution ? Comment cette transformation intervient-elle dans les différentes étapes de la solution proposée par les élèves ?

De quelle manière le jeu ponctuel-global se place-t-il dans la concurrence avec l'outil configuration ?

Comment les rétroactions du milieu font-elle ou non évoluer la résolution du problème ?

3. Fragments d'éléments issus de la Situation 3

La Situation 3 comprend le problème et les consignes suivantes :

Problème : On donne un cercle C et deux points P et Q qui n'appartiennent pas au cercle C .

Construire un parallélogramme PQRS tel que les points R et S appartiennent au cercle C .



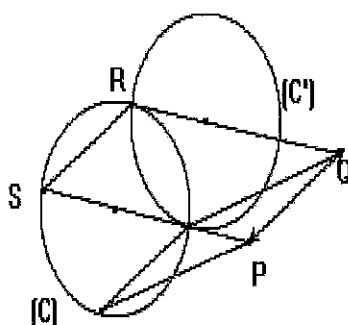
Consignes :

1. Construire le parallélogramme PQRS
2. Valider la construction
3. Justifier votre construction
4. Dire en quoi consiste selon vous la méthode " Abandon d'une condition "

Cette situation est présentée après la Situation 2 -TAC. Il est considéré *a priori* que la symétrie centrale et la translation sont maîtrisées pour les élèves de Seconde, conformément aux résultats d'évaluations de l'APMEP dans les années 1990.

Voici d'abord l'illustration d'une résolution possible pour la tâche " Construire le parallélogramme PQRS " avec l'utilisation de la technique *canonique*

On ramène le problème à celui de la détermination d'un point, par exemple R , et l'on envisage la construction de ce point par intersection de lieux géométriques : on obtient R comme intersection de (C) et de (C') (l'image de (C) par la translation de vecteur PQ). La translation est déterminée par les points d'entrée P et Q . Le point S est obtenu à partir de R par la translation de vecteur QP .



A priori plusieurs stratégies sont possibles avec Cabri pour enclancher la technique TAC, introduite pour la situation 2 à partir de R sur (C) après la construction du point S , quatrième sommet d'un parallélogramme déterminé par P , Q et S sur (C) puis de son lieu, par configuration ou avec **Translation**. Ce lieu de S étant produit graphiquement par **Trace** ou par **Lieu** ou par une construction utilisant soit une configuration et ses outils associés, soit **Translation**, la détermination d'un point S solution est à réaliser par construction

(**Intersection**) pour construire S. Le retour au point de solution associé R peut se faire par configuration, (**Droites parallèles**, **Point milieu** de la diagonale et **Symétrie centrale** ou **Cercle**.) ou par **Translation**.

Donnons brièvement des éléments issus de *l'analyse a posteriori*. L'analyse des résolutions des élèves à partir d'enregistrement Cabri avec le support des protocoles a permis de rendre compte de la suite des décisions des élèves et de l'effet de leurs actions. Des unités d'action caractérisant les essais de résolution et les reprises systématiques réalisées ont été alors dégagées.

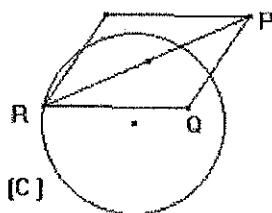
Nous nous contenterons donc d'illustrer la structure des démarches de résolution possibles par trois unités d'action.

Construction par configuration (unité d'action 1)

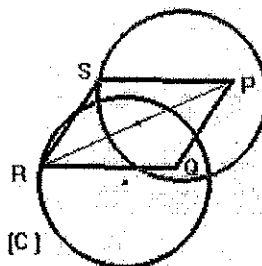
Constructions Cabri (Binôme Jo)

R sur (C) et droite (QR) ; construction directe de S par configuration en utilisant plusieurs fois **Droites parallèles** ; rétroaction graphique : S est bien sur C mais P n'est pas sur l'une des droites comme "souhaité".

Reprise : parallélogramme alors construit par **Polygone** ; la construction est invalidée car le quatrième sommet S n'appartient pas à (C) !



Reprise : nouvelle construction de S par un bon choix de **droites parallèles** ; déplacement de S avec **Trace** ; remplacement du tracé de cercle obtenu par un tracé donné par **Lieu** !



L'obstacle positif intervient : il est impossible de réaliser une intersection Cabri de l'objet Lieu avec l'objet (C). : "Non, mais il faut qu'on le construise. Puisque là on ne peut pas mettre un point à cette intersection. Ça marche pas comme ça". -

La nécessité de construire autrement le cercle (C') amène alors à la recherche de la transformation outil.

Mises en oeuvre d'une symétrie centrale (Unité d'action 2)

R sur (C). Différentes “ propriétés ” sont mises en jeu par différents binômes pour associer S au point R avec **Symétrie Centrale** :

- “ le centre du parallélogramme est le centre de la symétrie ”, (ce centre O est d’abord pris quelconque puis au centre du cercle)
- “ le centre de symétrie est le point milieu des diagonales du parallélogramme ”,
- “ les côtés du parallélogramme sont symétriques ”,

La mise en œuvre de la translation (Unité d'action 3)

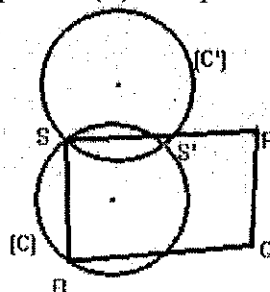
Construction Cabri (**Binôme I**)

R sur (C) ; S par Translation (vecteur PQ) appliquée à R; **Lieu** de S ;

(C') par **Translation** (vecteur PQ) appliquée à (C). **S Intersection** de (C') et (C) ;

Nouveau problème : Comment déterminer R, le sommet du parallélogramme solution ? En construisant un nouveau parallélogramme SPQR ?

Un obstacle : les points variables pris sur (C) au départ avec la dénomination “ R ”



Revenons sur l'exemple du binôme I qui pose implicitement “ la question de l'antécédent ” et essaie de la résoudre par configuration. Le binôme ne dispose pas encore de la possibilité d'établir cette relation entre les objets dont nous disons qu'elle prend en compte l'aspect ponctuel global de la transformation : “ passer de $t(C) = C'$ à (C) de telle sorte que pour S sur C' on envisage S comme $S=t(R)$ et $R = t^{-1}(S)$ ”.

Même de façon particulière et locale, l'enjeu de la résolution de ce problème par les transformations est l'aspect fonctionnel de la translation.

Conclusion

Dans l'enseignement, le plus souvent, les problèmes de construction ne sont pas étudiés pour eux-mêmes. L'hypothèse de Neri Both est valide : la présence de l'objet PC est une condition pour l'étude des transformations. Cette condition est façonnée par les formes de présence des problèmes fondamentaux : leur variabilité a pu être observée, avec les changements de conditions de vie des transformations, des questions de lieux, des méthodes de résolution, induits par les changements de programmes.

L'étude avec Cabri-géomètre a voulu explorer une condition particulière à savoir : la résolution de problèmes PCf à l'aide d'une transformation rend possible un jeu entre l'aspect global et l'aspect local de la transformation. Avec l'emploi de la technique TAC, un élément

de ce jeu réside dans l'appréhension globale d'une courbe comme image et la détermination d'un point comme antécédent.

L'expérimentation a permis une première appréciation du rôle que les problèmes PC_f peuvent jouer pour favoriser le passage du niveau 1 au niveau 2 dans l'enseignement des transformations. Cette possibilité est soumise à la nécessité de contrôler *la concurrence des configurations*. Ceci invite à reconsidérer les mises en scène choisies et les conditions didactiques d'un travail de la technique d'abandon de condition avec intervention d'une transformation.

Dans la situation 3, la translation à associer au parallélogramme a été très difficilement mobilisée pour rendre compte du passage d'un cercle au cercle associé. Un travail sur les situations devrait viser à *rendre disponible l'association des configurations et des transformations*. Le couplage d'un problème de lieu au problème de construction n'aurait-il pas pu permettre de travailler l'association d'une transformation, en comparaison avec une résolution par configuration ? En effet, cette association appelle la prise en compte préalable de problèmes de lieux avec une problématique des lieux, faute de quoi les élèves ne peuvent y accéder de leur propre mouvement. Une telle disponibilité serait un appui en classe de Première S pour l'étude du fonctionnement des transformations comme outil de résolution de problèmes de démonstration.

Examinons les conditions apportées par Cabri-Géomètre. Les limitations de Lieu dans Cabri ont joué le rôle déstabilisateur attendu. Elles ont conduit à rechercher un traitement de la figure auxiliaire fournie par la technique TAC. Mais, malgré le contexte d'enseignement des transformations (dans les classes de l'expérimentation), Cabri a favorisé la mobilisation de configurations pour les constructions à réaliser.

Ainsi l'utilisation de Cabri a *révélé une condition* : si un problème PC_f peut représenter les propriétés intrinsèques d'une transformation, il peut aussi être résolu par configurations, justement par configurations associées à la transformation. De plus, il est apparu que le seul couplage d'un problème de lieu et d'un problème de construction ne réduisait pas cette possibilité pour les élèves. Cette possibilité est en général annihilée par effet de contexte d'enseignement. Nous avons vu, dans le questionnaire, cette possibilité réapparaître pour les professeurs quand ils abordaient le problème proposé comme un problème à chercher (ou à résoudre de nouveau...), hors de l'appui sur des pratiques routinières.

Dans les conditions de la situation 3, la possibilité d'un jeu entre l'aspect global et l'aspect ponctuel était soumise à la réduction de la concurrence possible entre outils configuration et transformation. Or la disponibilité de l'association d'une transformation à une configuration n'opère pas de facto cette réduction. Dans cette séance, la reprise d'une mise en concurrence de la construction par configuration et par transformation pour la construction du dernier point n'aurait-elle pas été alors plus favorable au travail de l'aspect ponctuel ? Comment envisager cette reprise ? En Seconde, l'organisation didactique d'une *comparaison effective des possibilités* de résolution par transformation et par configuration ne peut-elle pas favoriser une meilleure maîtrise des appréhensions globales et ponctuelles des transformations ?

Une synthèse de l'apport des travaux de Jahn, de Lavandier (2000) et de cette thèse serait bienvenue pour avancer à la fois sur l'association des configurations et des transformations et sur l'approche fonctionnelle.

Références

- A.P.M.E.P. (1980), Dossier second cycle, *Bulletin A.P.M.E.P.* (Association des professeurs de mathématiques de l'Enseignement public), n°323, Avril 1980, pp. 261-367.
- A.P.M.E.P. (1991), *Evaluation du programme de mathématiques, fin de Seconde. Une étude de l'A.P.M.E.P.* Publication n°88.
- ARTAUD M. (1998), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques in Bailleul (coord.) *Actes de la neuvième Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, A.R.D.M. et I.U.F.M. de Caen, pp. 101-139.
- BOSCH M., CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19(1), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 77-124.
- BOTH N., LABORDE C. (1999), Transformations géométriques et configurations en 4° et 3°. Une première classification des tâches proposées aux élèves et leur répartition dans deux manuels, *Petit x*, IREM de Grenoble, n° 52, pp 43-71.
- CHAACHOUA A. (1997), *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12(1), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 73-111.
- GASCON J. (1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisée, *Petit x*, n° 37, IREM de Grenoble, pp. 43-63.
- JAHN A.P. (1998), *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- LABORDE C., CAPPONI B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14 (1-2), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 43-66.
- LABORDE C., GRENIER D. (1987), Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale, in *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques Actes du Colloque de Sèvres*, éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 65-86.
- LAVANDIER M. (1999), *Aspects fonctionnels dans les problèmes de construction géométrique en Seconde*, Mémoire de DEA, Laboratoire Leibniz, Grenoble.
- MARGOLINAS C. (1997), Projet pour l'étude du rôle du professeur en situation, in *Didactique et technologies cognitives en mathématiques. Séminaire DidaTech, Laboratoire Leibniz- IMAG*, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- MARION J. et al. (1988), Géométrie I, Publication du G.R.E.M., IREM d'Aix-Marseille (première édition 1983).

MENSSOURI D. (1994), *Essai de délimitation en termes de problématiques des effets du contrat et de transposition : Le cas de relations entre droites et équations dans les classes de Seconde et de Première*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

NEYRET R (1995), *Contraintes et déterminations de processus de formation des enseignantes : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*, Thèse de didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

POLYA G. (1967), *La découverte des Mathématiques, Tome I : Les modèles*, Dunod, Paris.

ANNEXE

Exemple de justification de l'étude des transformations ponctuelles

(Cluzel et Visio, classe de Seconde, 1969)

Introduction au chapitre 18 – Quelques transformations ponctuelles du plan affine

Extraits

→ Approfondir la connaissance du plan, par la découverte de **nouvelles propriétés** du plan.

→ L'étude de **lieux géométriques**, la détermination d'un ensemble E de points M (sous-ensemble du plan) satisfaisant à certaines propriétés " s'effectuera aisément si l'on définit une fonction f de P vers P telle que $M = f(m)$ et que l'on connaisse l'ensemble A des points m. Alors $E = f(A)$ ".

→ Pour résoudre **des problèmes de construction**, " les transformations permettent de déterminer un sous-ensemble du plan qui satisfait certaines propriétés. (Les transformations bijectives du plan dans le plan introduisent des simplifications dans la résolution de problèmes de construction, car trouver A, point du plan tel que $f(A) = A'$, équivaut alors à $A = f^{-1}(A')$ ".

Questions didactiques liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire.

*Sophie Gobert-Sanou,
IUFM d'Aix-Marseille & DIDIREM, université Paris VII*

Introduction

Le travail de thèse présenté ici s'intitule “ **Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire** ”¹³.

A l'origine de cette recherche, une question : qu'est-ce que faire de la géométrie à l'école élémentaire ? Et plusieurs constats : au niveau du collège et du lycée, les apprentissages en géométrie requièrent des compétences et un certain bagage de connaissances, pouvant être prises en charge dès l'école élémentaire ; elles relèvent de l'articulation de deux espaces, l'espace sensible et l'espace géométrique ; l'école élémentaire est le lieu et le moment privilégié dans les apprentissages des élèves pour l'expérimentation dans l'espace sensible.

Ceci nous a amenée à vouloir analyser ce qui est en jeu dans les activités dites géométriques proposées à ce niveau de la scolarité, essentiellement du point de vue des interactions des élèves avec les situations. Pour poser des questions de recherche, et tenter quelques éléments de réponse, nous avons utilisé des outils définis dans le cadre de la théorie des situations : les notions de milieu, de situation fondamentale, des concepts de didactique comme la dévolution ou l'institutionnalisation, et des outils développés par M-H. Salin et R. Berthelot¹⁴, principalement les différentes problématiques qu'ils définissent pour l'étude des rapports des élèves à l'espace et à la géométrie : les problématiques pratique, de modélisation et géométrique.

Notre travail s'articule autour de trois axes de réflexion :

Le premier axe concerne l'usage des images en géométrie, du plan ou de l'espace, où il s'agit d'étudier comment l'enseignement prend en compte la problématique épistémologique et phénoménologique inhérente à cet usage. Cette étude permet de clarifier deux fonctions de l'environnement graphique, que l'on peut développer à l'école élémentaire : l'environnement graphique comme lieu d'observation, d'expérimentation de phénomènes géométriques, pour apprendre des propriétés géométriques ; et l'environnement graphique comme intermédiaire dans la modélisation géométrique de problèmes spatiaux.

¹³ Thèse réalisée sous la direction de Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Laboratoire DIDIREM, Université Paris 7 – Denis Diderot, soutenue le 18 décembre 2001.

¹⁴ BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Université Bordeaux I.

Le second axe de notre travail est orienté sur l'étude de l'ostension, pour tenter d'en définir des fondements objectifs et des moyens pour maîtriser son usage, dans le cadre didactique. La symétrie axiale et les patrons de solides servent de support pour aborder cette étude.

Le troisième axe a porté sur une expérimentation à l'école élémentaire d'une situation de modélisation, modalité d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace.

Pour l'exposé d'aujourd'hui, nous développerons dans une première partie les éléments relatifs à l'ostension, pour voir en quoi elle peut être un procédé didactique maîtrisé. La seconde partie portera sur une présentation de la situation de modélisation expérimentée à l'école élémentaire, et les éléments de régularité dégagés dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu.

1^{ère} Partie : Ostension

Définition et insuffisances mentionnées dans des recherches antérieures

Nous reprenons une définition de U. Eco¹⁵ en l'adaptant au cadre didactique, pour définir l'ostension de la manière suivante :

L'ostension a lieu quand le maître choisit un objet ou un événement, dans le milieu de l'élève, qu'il utilise comme signe pour déterminer et exprimer à l'élève une certaine classe d'objets à laquelle le maître sait que cet objet appartient.

C'est un procédé répandu, qui s'utilise quotidiennement, à l'intérieur et hors du cadre didactique, efficace lorsqu'il fonctionne, puisqu'alors il permet une compréhension rapide d'une définition générale. Le problème à l'école, est qu'il ne fonctionne pas toujours, voire induit des dérives pouvant gêner les apprentissages des élèves et même y faire obstacle.

La théorie des situations a permis à un certain nombre de chercheurs¹⁶ de mettre en évidence des effets négatifs de l'ostension :

l'illusion d'une continuité entre ce qui est montré et les savoirs formulés ;

l'illusion d'une évidence, pour la compréhension de l'élève, du passage entre l'objet sélectionné par le maître à la classe d'objets qu'il va désigner ;

et surtout, l'absence de sens, construit autour des savoirs, dans la mesure où ils n'apparaissent pas pour les élèves comme des outils pour résoudre un problème posé.

Dans leur étude sur l'ostension¹⁷, M-H Salin et R. Berthelot repèrent une forme d'ostension classique, où le maître montre aux élèves ce qui est à savoir, désignée comme " assumée " car elle l'était dans les discours institutionnels d'une certaine époque.

¹⁵ ECO U. (1992) *La production des signes*, Livre de poche. " L'ostension a lieu quand un objet ou un événement, produit de la nature ou de l'action humaine (intentionnellement ou inintentionnellement), fait parmi les faits, est "sélectionné" par un individu et désigné pour exprimer la classe des objets dont il est membre. " p79.

¹⁶ Principalement : RATSIMBA-RAJOHN H. (1977) *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, DEA, Université Bordeaux 1 ; BERTHELOT R. et SALIN M-H. (1992) op. cit. ; FREGONA D. (1995) *Les figures planes dans l'enseignement de la géométrie*, Thèse, Université Bordeaux I, IREM d'Aquitaine.

¹⁷ Op. cit. Chapitre C-2 : Etude diachronique de l'utilisation de l'ostension dans l'enseignement primaire, p163-176.

Ils repèrent également une forme d'ostension " déguisée ", consistant à faire croire aux élèves qu'ils découvrent eux-mêmes ce qu'il y a à voir et à savoir dans le matériel ou les images soumis à leurs observations et manipulations.

Nous pouvons signaler une autre forme d'ostension déguisée, dans la gestion que fait le maître de situations à caractère adidactique pour lesquelles l'activité effective des élèves ne fait pas apparaître les connaissances visées ; leur formulation par le maître au moment de la synthèse se fait alors de manière ostensive.

Ces différentes formes d'ostension sont courantes dans les pratiques à l'école élémentaire, où les élèves travaillent beaucoup à partir de situations d'action, basées sur des manipulations de matériel, ou sur l'observation d'images.

Nous nous sommes intéressée à certaines de ces situations, pour examiner la possibilité d'un contrôle du procédé d'ostension, afin d'en faire un procédé didactique maîtrisé, et ainsi faciliter le travail des enseignants et par suite les apprentissages des élèves.

Evidemment, si cela est possible, ce procédé s'articule avec d'autres formes de situations d'apprentissage ; entre autres des situations à caractère adidactique, pour lesquelles les savoirs introduits par ostension peuvent être transformés en connaissances pour les élèves, pour agir sur ces nouvelles situations.

2. Nouvelle approche

Nous avons dégagé trois modes différents d'introduction ostensive des savoirs, avec une ostension contrôlée par le maître, notamment par le choix de certaines variables didactiques, et en liaison avec un milieu pour une situation adidactique ultérieure ou conjointe :

les savoirs introduits par les démonstrations¹⁸ visuelles,
les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche,
les savoirs introduits comme constats d'observations dans l'environnement spatial ou graphique.

a) Les démonstrations visuelles, une forme d'ostension classique assumée

Une démonstration visuelle est une mise en scène où le maître montre des objets ou des actions sur ces objets, à partir de manipulations de matériel, pour définir des objets ou notions géométriques, et faire fonctionner ces définitions de façon opératoire.

Par exemple la manipulation d'un certain matériel permet de montrer des réalisations effectives d'une définition par pliage de la symétrie axiale, " deux dessins sont symétriques par rapport à un axe lorsqu'ils se superposent après pliage suivant cet axe ". Pour le matériel cité en annexe 1, le papier calque est nécessaire pour visualiser la superposition des deux dessins après pliage, élément au cœur de la définition ; le papier opaque est choisi pour visualiser l'image formée par l'ensemble des deux dessins et la ligne de pli. L'objectif d'un maître de cycle 3, réalisant cette démonstration visuelle, est de réactiver chez les élèves les images de symétrie qu'ils ont pu rencontrer, et de réintroduire les définitions dans un contexte le plus général possible, générant le moins de confusion possible sur ce que recouvre la notion.

Evidemment il y a des variables à prendre en compte dans le choix du matériel accompagnant la déclaration des savoirs. Pour cet exemple, l'usage du calque et du papier opaque, le fait d'avoir arrondi les bords du support papier, le choix d'une figure hexagonale sans côté

¹⁸ Le mot démonstration n'est pas utilisé dans son sens mathématique mais le sens courant de " action de montrer ".

parallèle ni perpendiculaire à l'axe, la multiplicité des exemples et la présence de contre exemples (non cités en annexe), constituent les principaux choix relatifs à cette démonstration visuelle.

Citons un autre exemple, pour introduire (ou réintroduire) la définition des patrons de solides : le maître peut disposer de solides. Il annonce aux élèves qu'ils vont apprendre une façon particulière de construire ces objets, consistant à " dessiner à plat, toutes les faces du solide, juxtaposées les unes aux autres, de façon à obtenir le solide, après découpage du contour du dessin et pliage suivant ses segments ". Le maître montre ensuite de tels dessins, et effectue les manipulations de montée en volume pour visualiser l'obtention du solide. Il montre et manipule également un contre exemple, où l'organisation des faces est pourtant proche d'un patron présenté précédemment.

Pour l'exemple de matériel proposé en annexe 2, les variables pour l'ostension sont le choix du solide, sa nature, son format, sa couleur, les patrons choisis, et la présence d'un contre exemple. Les choix faits sont déterminés par des organisations de la position des faces assez régulières, sans toutefois être prototypiques, cela pour ne pas focaliser l'attention des élèves sur les images utilisées, mais sur les actions effectuées à partir de ces images. Ainsi pour la définition que le maître donne de la notion de patron, les aspects principaux sont mis en évidence : " un patron, c'est un dessin où toutes les faces du solide sont représentées, juxtaposées les unes aux autres, pas n'importe où, mais de telle sorte qu'après découpage du contour et pliage suivant les segments, on obtienne le solide ".

Il est nécessaire, après ce premier moment d'ostension, que les élèves s'approprient la définition donnée pour apprendre à fabriquer ou reconnaître des patrons de solides. Pour cela le maître doit proposer aux élèves des situations d'action et de formulation associées à la démonstration visuelle, situations pour lesquelles le milieu objectif contiendra alors les savoirs permettant aux élèves de réguler leurs actions et de valider leur travail.

De façon plus générale, caractérisons ce type de présentation ostensive des savoirs :

Une démonstration visuelle consiste à mettre en scène un matériel et des manipulations de ce matériel, en jouant sur des variables, didactiques et non didactiques, de sorte que le maître dit clairement aux élèves ce qu'il veut que les élèves voient dans ce qu'il leur montre.

Dans une démonstration visuelle, les connaissances visées sont formulées déjà comme des savoirs.

Les élèves sont dans un rapport passif au milieu, puis dans un rapport effectif lors de situations d'action et de formulation associées à la démonstration visuelle.

Savoirs introduits comme contraintes pour une tâche

Nous pouvons envisager un second mode d'ostension dérivé du précédent qui consiste à placer les élèves directement dans ces situations d'action et de formulation, où le milieu objectif contient les connaissances visées dans la mesure où elles sont formulées comme contraintes pour la tâche ; elles seront ensuite reformulées à la fin de la situation comme éléments d'institutionnalisation.

Par exemple, considérons une autre façon d'introduire la définition des patrons de solides : le maître propose aux élèves une tâche de mise à plat de solides, construits avec du matériel d'assemblages de pièces polygonales¹⁹, mise à plat devant respecter certaines contraintes : " les faces doivent être assemblées les unes aux autres, en un seul morceau, de façon à pouvoir reconstituer le solide ". A la fin de la situation, après l'activité des élèves, le maître

¹⁹ du type Clix-géométrie, Ed. CELDA.

peut introduire le vocabulaire et institutionnaliser la définition des patrons comme des mises à plat de solides respectant ces contraintes.

Prenons un autre exemple concernant à nouveau la symétrie axiale, une situation pour définir ce qu'est "une figure avec un axe de symétrie". Considérons l'activité suivante : dans une première étape, les élèves ont à produire des dessins réalisés avec un certain gabarit, en repassant le contour du gabarit une première fois, puis à nouveau en juxtaposant le gabarit au premier contour suivant un côté de même longueur, avec la possibilité de retourner ou non le gabarit. Le choix du gabarit est évidemment déterminant pour la pertinence de la situation par rapport à l'objectif visé. Pour les configurations présentées en annexe 3 nous avons choisi un gabarit polygonal à cinq côtés dont trois ont la même longueur.

Le maître indique suite à la mise en commun des productions, que certains dessins ont une propriété particulière, "quand on les plie suivant le côté commun aux deux contours, les deux parties du dessin se superposent exactement". Pour visualiser ce phénomène il utilise du calque ou la semi-transparence du papier blanc à la lumière ; il peut alors dans une deuxième étape engager les élèves à produire de tels dessins. Suite à la mise en commun des productions pour cette nouvelle tâche (les images avec axe de symétrie), le maître peut institutionnaliser la notion et introduire le vocabulaire, en reformulant une partie de la consigne : "Quand on plie un dessin et que les deux parties de chaque côté du pli se superposent exactement, on dit que le dessin a un axe de symétrie. C'est la ligne de pliage."²⁰

Les savoirs introduits comme constats d'observations dans l'environnement spatial ou graphique.

Dans les deux modes d'ostension précédents, les démonstrations visuelles, ou les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche, les connaissances visées pour l'apprentissage sont présentées d'entrée dans la situation didactique. Ce n'est pas le cas pour le troisième mode d'introduction ostensive des savoirs, abordé maintenant.

Il s'agit de situations d'observation et de manipulation de matériel ou d'images dans lesquelles les connaissances visées découlent de constats réalisés dans l'environnement spatial ou graphique, constats reformulés comme propriétés géométriques des dessins ou des objets représentant les objets mathématiques.

Un exemple de ce mode d'ostension dans le cadre spatial, peut être extrait du dispositif de M-P. Rommevaux sur le discernement des plans dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle²¹. Les élèves travaillent à partir d'une maquette d'un cube transparent, ils doivent représenter une section du cube : successivement sur cette maquette, sur une représentation en perspective du cube, et en vraie grandeur. La section du cube est définie par un plan passant par trois points situés sur trois arêtes distinctes du cube. Les positions des points varient au cours des reprises de cette tâche, rendant de plus en plus complexe l'activité cognitive et mathématique des élèves. Une propriété géométrique facilite la réalisation de la tâche : la propriété de parallélisme des intersections par un même plan de deux faces parallèles²². Cette connaissance, utile à la résolution, apparaît pour les élèves dans leurs

²⁰ Certains aspects liés à la contextualisation/décontextualisation dépassent le cadre de cette situation, et sont donc à prendre en charge au cours d'une progression.

²¹ ROMMEVAUX M-P. (1997) *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*, Thèse, Université L. Pasteur, Strasbourg I, Ed. IRMA.

²² "Lorsqu'un plan coupe deux faces parallèles, les droites intersections de ce plan et de ces faces sont également parallèles."

observations à partir des manipulations du cube et des premiers tracés qu'ils font sur la maquette. Le milieu est un milieu allié qui suggère les connaissances que l'on veut institutionnaliser comme des savoirs. En effet ce constat est alors confirmé par l'enseignant, et devient un élément d'institutionnalisation, servant ensuite dans les reprises de cette tâche comme moyen de résolution ou argument de validation.

Prenons un autre exemple dans l'environnement graphique cette fois-ci, concernant à nouveau la symétrie axiale. Certaines des configurations données en annexe 4 suggèrent les propriétés de la symétrie axiale nécessaires pour que les figures soient symétriques par rapport aux axes marqués ; par exemple à partir de la D, la propriété que "deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être retournées l'une par rapport à l'autre de chaque côté de la droite", ou à partir de la G que "deux figures symétriques par rapport à une droite doivent être situées à la même distance de cette droite".

Ce support permet de construire une situation d'argumentation, basée sur l'observation d'images, où le milieu suggère les propriétés des images qui traduisent l'absence de propriétés géométriques. Cela permet ainsi de formuler ces propriétés de la symétrie axiale, et de les institutionnaliser. Elles peuvent ensuite servir de moyens de résolution ou d'arguments de validation, pour d'autres situations de reconnaissance ou de constructions de figures symétriques.

Remarquons que d'autres configurations ne permettent pas si clairement d'établir une propriété déterminée de la symétrie axiale, c'est le cas de la C ou de la E. Elles constituent des contre exemples à l'efficacité de ce type d'ostension.

Conclusion

Nous venons de voir trois modes différents d'introduction ostensive des savoirs : les savoirs introduits par les démonstrations visuelles, les savoirs introduits comme contraintes pour une tâche, les savoirs introduits comme constats d'observations dans l'environnement spatial ou graphique²³.

Pour ces trois modes, l'efficacité de l'ostension pour la compréhension des élèves va dépendre de la façon dont le maître fixe les variables, à la fois didactiques et celles liées à la mise en scène des concepts en jeu. Ce qui guide le choix du maître doit être la recherche du moins d'ambiguïté possible sur ce que le maître veut montrer, et doit répondre à quelques conditions nécessaires que nous rappelons malgré leur caractère d'évidence : le matériel ou les images utilisés doivent

montrer ce que le maître veut dire, et ne pas montrer ce qu'il ne veut pas dire, éviter le décalage entre ce qui est perçu par les élèves et ce qui est à savoir, et être tel que ce qui est à voir et à savoir soit bien visible.

Pour conclure, résumons les conditions préalables pour que le mode ostensif soit adapté à une présentation constructive des savoirs, et permette la dévolution du milieu objectif de situations d'apprentissage, ou d'un milieu pour la validation par des savoirs de géométrie :

Les situations doivent porter sur des savoirs admettant des réalisations spatiales ou graphiques effectives.

Le maître doit créer un milieu dans lequel les connaissances visées sont suggérées ou réalisées.

²³ Il y aura lieu de s'interroger, dans les recherches ultérieures, sur ce qui caractérise ces savoirs introduits selon ces modes, et de cerner " quel mode pour quel savoir ".

Il fixe les variables de sorte que les savoirs soient clairement identifiables, avec le moins d'ambiguïté perceptive possible.

Les élèves doivent être dans un rapport effectif à ce milieu.

2^{ème} partie : étude d'une situation de modélisation

Passons maintenant à la seconde partie, concernant l'étude expérimentale d'une situation de modélisation.

Questions de recherche

Rappelons que l'on peut envisager deux aspects différents de la géométrie dans les rapports qu'elle entretient avec l'espace sensible : la géométrie comme discours consistant sur l'espace ; et la géométrie comme modèle de l'espace, donc moyen de résoudre des problèmes spatiaux. C'est ce second aspect qui a retenu notre attention dans ce travail de recherche, pour tenter de le cerner du point de vue des situations didactiques.

Pour étudier les situations de modélisation, c'est à dire les situations pour lesquelles un problème se pose dans l'espace sensible, et que la géométrie permet de représenter et de résoudre, nous avons dégagé trois questions principales :

Quel milieu construire pour permettre aux élèves d'apprendre que les connaissances de géométrie sont utiles pour résoudre des problèmes spatiaux, et leur permettre d'en maîtriser cet usage ?

Quelles sont les composantes du milieu objectif avec lesquelles les élèves interagissent ? Et quelles sont les variables pertinentes qui modifient les interactions des élèves avec le milieu ?

Comme s'articulent, et comment articule-t-on les connaissances spatiales spontanément développées par les élèves dans un rapport pratique à la résolution d'un problème, et les connaissances géométriques sous-jacentes à cette résolution ?

Parmi les problèmes spatiaux que la géométrie permet de modéliser, notre choix a porté sur celui d'une mesure inaccessible, du type de la situation des drapeaux²⁴, modalité d'une situation fondamentale de la géométrie comme modèle de l'espace.

Rappelons qu'une situation fondamentale est "un paradigme de recherche [...] une métaphore qui permet en jouant sur les variables d'engendrer plusieurs situations"²⁵, "elle est caractéristique d'une connaissance et calculée d'après elle"²⁶. Les concepts ou connaissances dont il est question dans cette citation peuvent être spécifiquement des concepts géométriques, ou bien des connaissances spatiales non formalisées en géométrie mais utiles pour l'apprentissage de la géométrie, ou bien encore des connaissances liées à un certain rapport à l'espace et à la géométrie.

C'est selon cette dernière optique que nous avons travaillé, autour d'une situation appelée "Terrain et tige" pour laquelle nous avons mené une expérimentation à l'école élémentaire, dans une classe de CM2.

²⁴ situation décrite dans BROUSSEAU G. et N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux ; et dans SALIN M-H. et BERTHELOT R. (1992) chapitre B-7, p130-133.

²⁵ PERRIN-GLORIAN M-J. (1994) "Théories des situations didactiques : naissance, développement, perspectives" dans *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

²⁶ BROUSSEAU G. Intervention au séminaire DIDIREM, janvier 1999.

La situation " Terrain et tige "

La situation " Terrain et tige " peut se décrire en tant que situation objective de la manière suivante : " Une tige rectiligne est située à l'intérieur d'un terrain polygonal, ses deux extrémités sont situées sur deux côtés consécutifs du terrain. Il s'agit de déterminer une mesure de la longueur de la tige, sans entrer dans le terrain, et sans passer quoi que ce soit au-dessus du terrain. "

La situation de référence proposée aux élèves consiste à travailler lors d'une première séance dans la cour de récréation de l'école, avec des terrains d'environ huit à douze mètres carrés, représentés à la craie au sol, et des baguettes en bois pour matérialiser les tiges. Dans la consigne il est demandé d'imaginer des murs transparents pour signifier l'impossibilité d'entrer sur le terrain. Ces choix sont justifiés par l'hypothèse que la crédibilité spatiale du problème participe à la dévolution de la situation.

Les éléments qui font de " Terrain et tige " une situation d'apprentissage articulée sur la situation de référence précédente, sont la variation de la forme du terrain, et l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon²⁷. Précisons les maintenant.

o La forme du terrain est une variable qui a priori agit essentiellement sur la dévolution du problème, et sur les connaissances mises en jeu par les élèves. Nous avons choisi de travailler initialement avec des terrains de forme rectangulaire (sur les deux premières séances) pour une première appréhension du problème par les élèves dans un contexte assez proche des configurations habituelles rencontrées, leur permettant ainsi de se connecter avec des procédures géométriques connues, comme par exemple la symétrie axiale, ou la reproduction d'un triangle rectangle.

Le changement de forme du terrain en quadrilatère quelconque (sur les trois autres séances) favorise la mise en évidence de propriétés géométriques existantes mais non apparentes dans le cas du terrain rectangulaire ; par exemple pour la symétrie, la perpendicularité à l'axe ; ou pour la reproduction du triangle, la prise en compte de l'angle. Cette déstabilisation des procédures efficaces semble nécessaire pour les questionner afin de mettre en évidence les propriétés géométriques sous-jacentes.

o Concernant l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon, nous avons fait l'hypothèse que cette variable agit essentiellement au niveau des rapports des élèves à l'espace et à la géométrie, de façon favorable pour leur entrée dans une problématique de modélisation. Plus précisément, le recours aux dessins sur papier peut rendre nécessaire l'explicitation des connaissances utilisées dans le cadre spatial, d'un point de vue géométrique, et permettre ainsi la dévolution aux élèves de l'environnement papier crayon comme représentation de l'espace géométrique.

Sans entrer dans les détails de l'analyse des travaux des élèves, analyse développée dans deux chapitres de la thèse, nous présentons ici les points dégagés dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu, points appelés " éléments de régularité " dans la mesure où nous faisons l'hypothèse qu'ils se retrouveraient dans l'analyse pour d'autres situations de modélisation.

Éléments de régularité dans l'étude des interactions des élèves avec le milieu

Ces éléments sont rassemblés suivant trois axes :

²⁷ Présentation en annexe 5 des choix pour chacune des séances de l'expérimentation.

Les éléments de régularité liés à l'articulation des environnements cour de récréation et papier crayon

Les éléments de régularité concernant l'articulation de la problématique de modélisation avec la problématique géométrique.

Les éléments de régularité concernant le caractère adidactique de la situation et les interventions du maître.

Eléments de régularité liés à l'articulation des environnements

Premièrement, les procédures de type géométrique apparaissent plus rapidement dans l'environnement papier crayon que dans l'environnement cour de récréation.

Deuxièmement, il existe dans l'environnement cour de récréation un autre rapport aux figures de géométrie, dans la mesure où les références spatiales deviennent celles de la position du sujet et non plus celles du support papier. Les phénomènes inhérents à l'environnement papier crayon, comme la prégnance des directions horizontale et verticale, n'apparaissent pas dans l'environnement cour de récréation.

Troisièmement, le contrôle par les élèves de leurs actions de résolution, des propriétés spatiales ou géométriques mises en jeu, des formulations des propriétés, ou même encore de l'usage des instruments, ce contrôle s'effectue en général par la vue, de la même façon dans les deux environnements papier crayon et cour de récréation. Pour reprendre des termes de la problématique pratique, les élèves contrôlent leurs actions "de manière empirique et contingente", que ce soit dans l'un ou l'autre des environnements, et ce rapport au cours du dispositif évolue peu, quel que soit l'environnement de travail.

Eléments de régularité concernant l'articulation de la problématique de modélisation avec la problématique géométrique.

Dans les situations de modélisation, l'explicitation des connaissances géométriques est relative à deux types d'argumentation : celle liée à l'usage d'une connaissance, c'est une validation interne, et celle liée à l'adaptation de cette connaissance pour la résolution du problème, c'est une validation externe.

Par exemple considérons une procédure de construction de parallélogramme pour trouver une mesure de la longueur de la tige (annexe 6) :

- la validation interne consiste en une justification que le quadrilatère construit est bien un parallélogramme. On utilise pour cela des propriétés caractéristiques du parallélogramme.
- la validation externe correspond par contre à la validation de cette construction comme permettant effectivement d'obtenir une mesure de la longueur de la tige. On utilise une propriété du parallélogramme, "les côtés opposés sont de même longueur".

Il semble que le rapport pratique des élèves aux figures entraîne une difficulté à donner du sens à la validation interne, parce que la reconnaissance du parallélogramme fonctionne sur le mode de l'évidence perceptive. Par contre la validation externe prend son sens par rapport au problème posé. Et pour cette validation les arguments géométriques sont accessibles directement aux élèves, ce sont des propriétés des figures qui ne nécessitent pas le détour par d'autres propriétés géométriques.

C'est au travers de ces questions de validation que la problématique géométrique croise, à un niveau élémentaire, la problématique de modélisation.

Eléments de régularité : adidacticité et interventions du maître

Dans l'étude menée, un constat s'impose : bien que les élèves soient dans une problématique pratique, ils font intervenir des arguments de nature géométrique, mais souvent partiellement ou de façon instable. Ils oublient ou il leur manque les connaissances géométriques qui leur permettraient de contrôler leur rapport au milieu (par exemple les

propriétés sur les quadrilatères, ou sur la symétrie axiale, ou sur les angles). En fait, le milieu adidactique ne suffit pas pour renvoyer à l'élève les rétroactions nécessaires pour qu'il modifie, adapte, ou formule les connaissances en jeu dans la situation. Par conséquent l'intervention du maître est indispensable pour faire évoluer le milieu objectif de la situation en y introduisant les savoirs de géométrie qui permettent ces rétroactions.

Il est donc à envisager que ces savoirs fassent déjà partie du milieu objectif de la situation, en étant déjà institutionnalisés dans des situations d'apprentissage antérieures, et le maître peut alors les rappeler ; ou bien que le maître les introduise dans le dispositif au moment où il faut, qui n'est pas le même pour tous les élèves. Pour ceux proches de ces connaissances dans leurs procédures c'est lors de la phase de recherche ; pour d'autres c'est au moment de l'exposition de ces connaissances lors de la mise en commun ; et pour d'autres encore, c'est lors de la synthèse, de l'institutionnalisation " officielle " de ces connaissances.

Nous concluons donc à l'importance des reprises des situations pour que tous les élèves soient à un moment donné en interaction avec ces savoirs dans le milieu, lors d'une phase adidactique, pour leur permettre de transformer ces savoirs en connaissances dans d'autres situations plus générales, didactiques ou non didactiques.

Conclusion

En conclusion de cette seconde partie, il apparaît raisonnable d'affirmer que pour une situation de modélisation donnée, la reprise et l'articulation des situations basées sur le jeu entre l'environnement spatial et l'environnement graphique, paraît être un élément fondamental, pour la compréhension, l'appropriation et la maîtrise de l'usage des connaissances et des savoirs de géométrie utiles à la résolution de problèmes spatiaux.

Conclusion générale de l'exposé

L'ensemble de ce travail nous amène à considérer une approche de la géométrie à partir des situations, plutôt qu'à partir d'une organisation axiomatique, déductive, ou par corpus de connaissances, ceci à cause de la prégnance de la problématique pratique à ce niveau de la scolarité.

Nous distinguons les situations suivant la place qu'y occupe la géométrie pour les tâches considérées :

des situations de familiarisation avec un environnement géométrique (comme on en trouve souvent en maternelle par exemple)

des situations pour définir des notions ou établir des propriétés géométriques (par exemple les situations d'ostension maîtrisée que nous avons proposées)

des situations pour argumenter par l'usage de propriétés géométriques (pour une entrée dans la problématique géométrique)

des situations pour utiliser des connaissances de géométrie pour la résolution de problèmes spatiaux (" Terrain et tige " en est un exemple)

et des situations non étudiées ici mais à prendre en compte, celles pour apprendre des aspects techniques liés à l'apprentissage de la géométrie (l'utilisation d'instruments, ou la connaissance d'algorithmes de constructions, par exemple).

Cela permet de cerner où se trouve la géométrie dans les activités considérées, et de percevoir également la multiplicité des procédés didactiques pour atteindre ces objectifs.

Bien du travail reste à faire pour répertorier et analyser ces diverses situations, et se poser les questions pertinentes pour leur dévolution dans le cadre de la formation des maîtres.

L'ensemble de ces situations participe à l'élaboration d'un milieu pour l'apprentissage de la géométrie à l'école élémentaire, élaboration qui reste encore à approfondir.

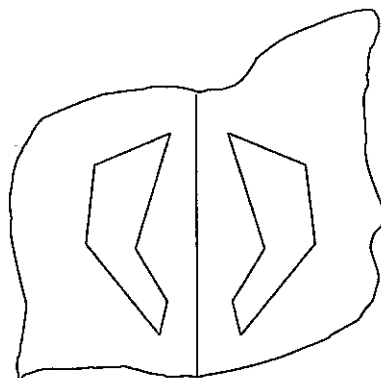
ANNEXE 1

Sur un format A3

Un exemplaire sur papier calque

Un exemplaire sur papier opaque

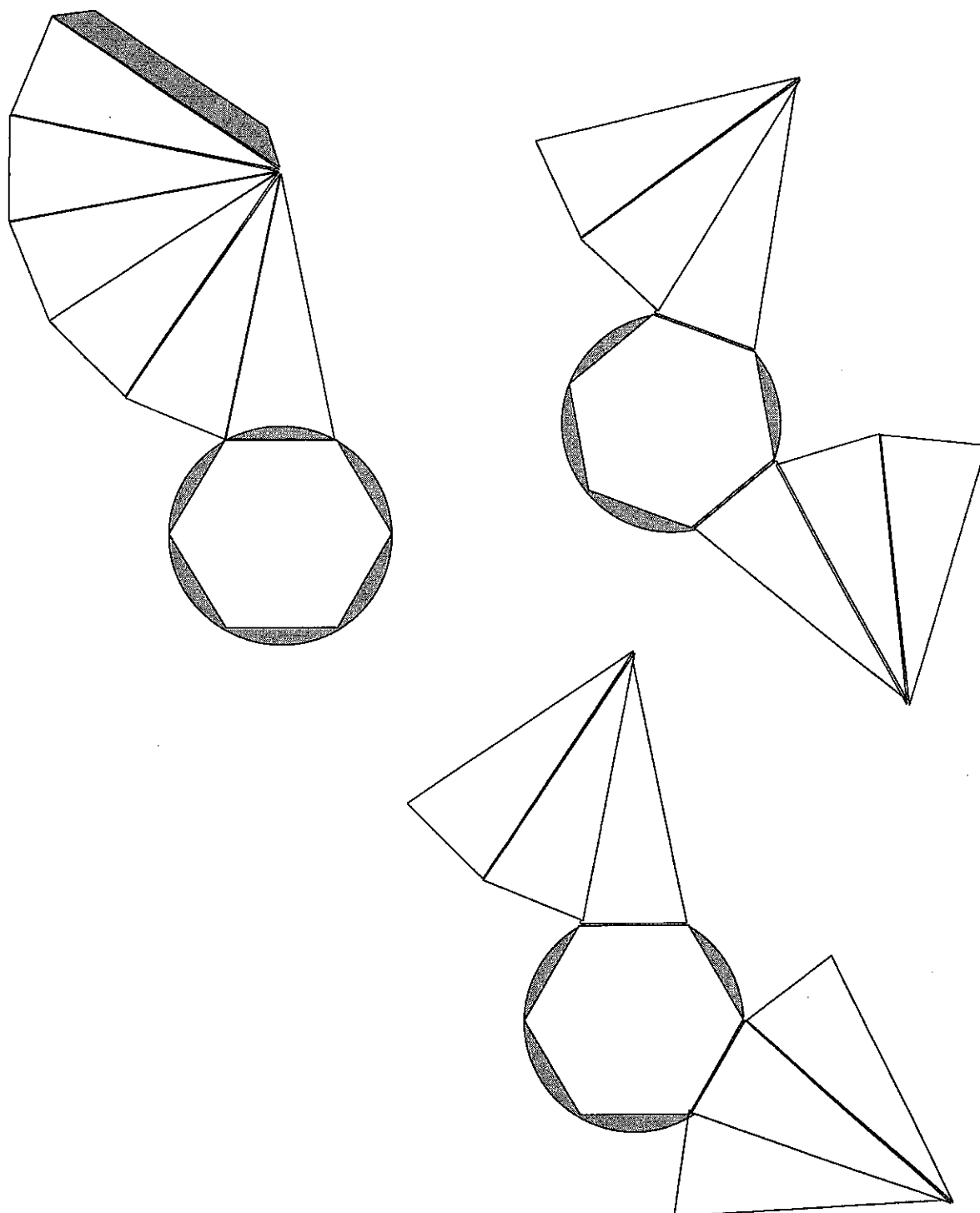
Le trait représente la ligne de pli marquée
et repassée en trait de couleur sur le papier



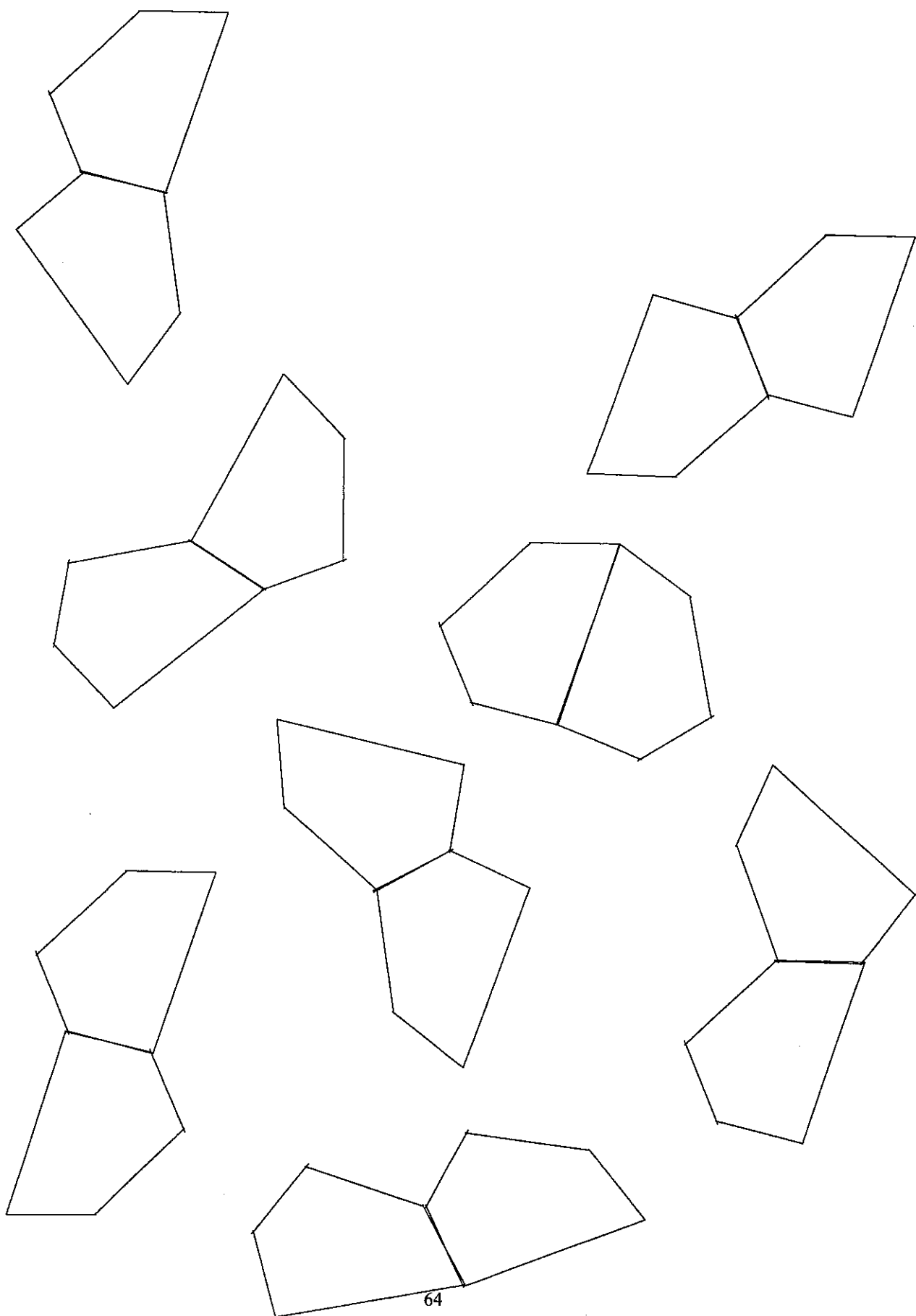
ANNEXE 2

Matériel utilisé pour “ la démonstration visuelle ” de définition d’un patron de solide.

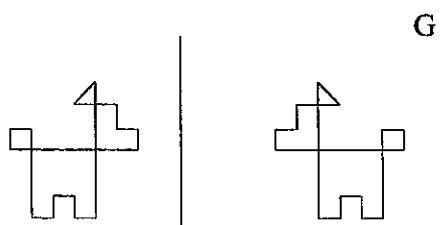
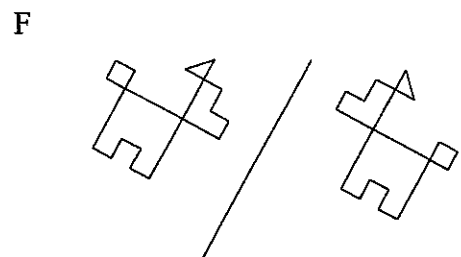
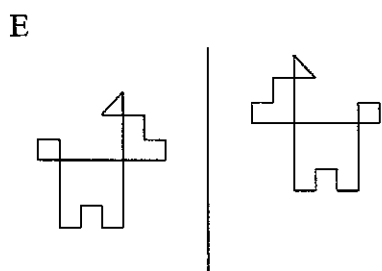
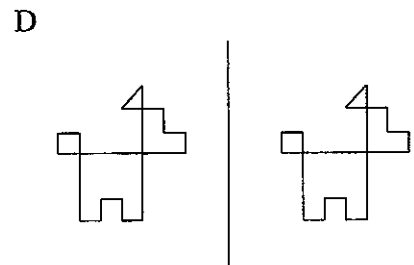
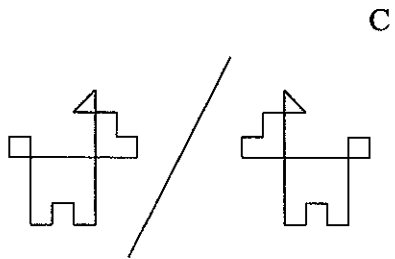
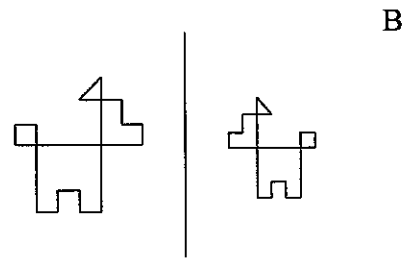
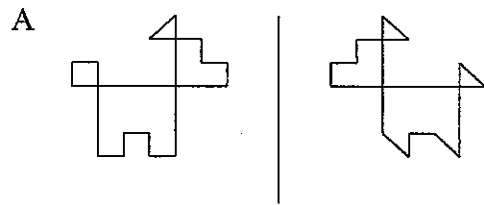
Un solide (papier canson épais, plastifié, avec les arêtes repassées au stylo épais pour une bonne visibilité) : pyramide à base un hexagone régulier, de mêmes dimensions que celles utilisées pour la constructions des patrons. Diamètre du cercle pour l’hexagone 15 cm, et longueur des autres côtés des triangles 17 cm. En grisé ce sont des éléments visibles sur le matériel, éléments techniques conservés permettant de maintenir les faces pour faciliter les manipulations.



ANNEXE 3



ANNEXE 4



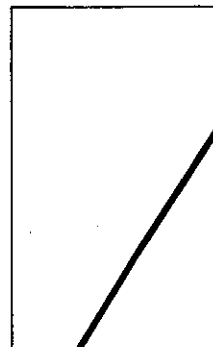
ANNEXE 5

1.1.1 Première séance

DANS LA COUR DE RÉCRÉATION
DES QUADRILATÈRES RECTANGLES

1.1.2 Deuxième séance

DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES RECTANGLES



1.1.3 Troisième séance

DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

Forme fixée du quadrilatère
sur papier (dans la cour,
formes variées)

1.1.3.1 Quatrième séance

1^{ère} Partie

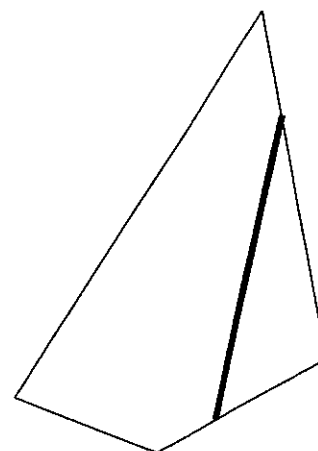
DANS LA COUR
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

2^{ème} Partie

DANS LA CLASSE, SUR FEUILLE
DES QUADRILATÈRES QUELCONQUES

Cinquième séance

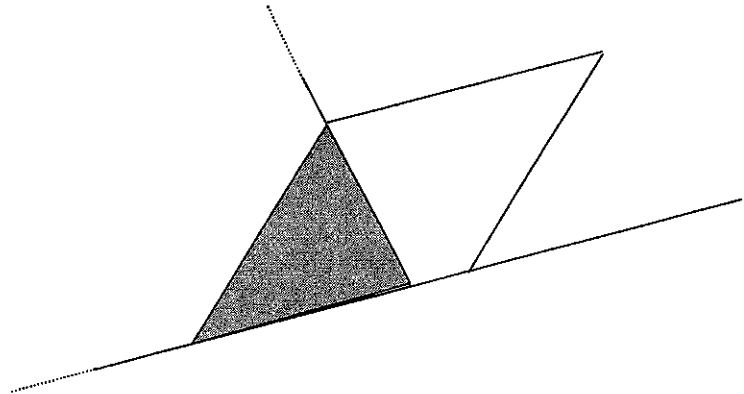
EN CLASSE, AU TABLEAU
éléments de reprise et synthèse



ANNEXE 6

Articulation de la problématique de modélisation avec la problématique géométrique

Le triangle grisé est délimité par la tige et les parties des deux côtés du terrain

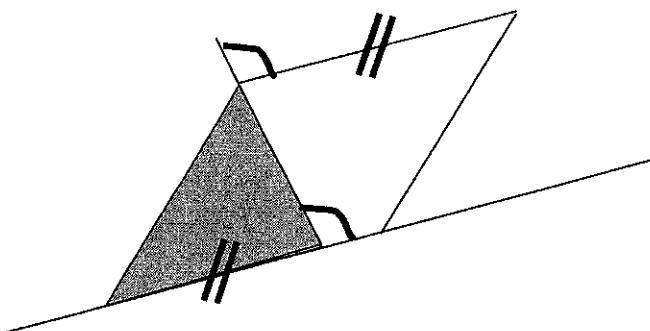


1.1.3.2

1.1.3.3

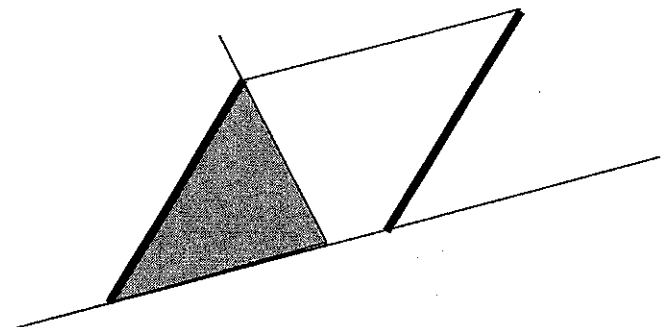
1.1.3.4 Validation interne

1.1.4 On a construit un parallélogramme



1.1.1.1.1 Validation externe

1.1.1.1.2 On a une mesure de la longueur de la tige



Des paradigmes géométriques aux petites provocations didactiques

Catherine HOUEMENT

DIDIREM Université Denis Diderot, Paris 7

IUFM de Haute-Normandie

&

Alain KUZNIAK

DIDIREM Université Denis Diderot, Paris 7

IUFM d'Alsace

Nos travaux de recherches sont basés sur une explicitation épistémologique des différentes approches de la géométrie élémentaire enseignée, que nous appelons des paradigmes géométriques. Nous envisageons la gestion de ces paradigmes en formation des enseignants dans une optique qui privilégie des stratégies de formation entre homologie et transposition. Pour cela, nous introduisons des situations de formation qui, sur un temps court, tentent de sensibiliser les étudiants à l'importance des paradigmes géométriques : les petites provocation didactiques.

I Le point de départ : recherches sur la formation des enseignants du premier degré en mathématiques. Vers une classification des stratégies de formation²⁸

Dans ce premier travail, nous avons défini un certain nombre de stratégies de formation en mathématiques, à partir d'une analyse des pratiques de formation réellement existantes dans les anciennes écoles normales et dans les IUFM avant 1993.

Nous rappelons ici la classification que nous avons pu dégager.

✧ **Les stratégies culturelles.** Il s'agit des stratégies qui privilégient l'accroissement des connaissances des formés dans un domaine précis, sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes par les étudiants.

✧ **Les stratégies basées sur la monstration.** Ces stratégies privilégient la transmission d'un modèle ou d'une façon de faire par l'observation de sa mise en œuvre dans les classes élémentaires. Il s'agit de transmettre une pratique en la montrant aux étudiants et en la faisant imiter.

✧ **Les stratégies basées sur l'homologie.** Ces stratégies utilisent aussi l'imitation, mais une imitation complexe et transposée par le formé. Ce dernier devra mettre en place une façon d'enseigner inspirée de celle qu'il a pu vivre en tant qu'étudiant dans le centre de formation. Les formateurs enseignent (ou essaient d'enseigner) conformément à l'idée qu'ils se font de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire.

✧ **Les stratégies basées sur la transposition.** Elles s'opposent aux précédentes par l'insistance mise sur la distanciation théorique. Elles visent à transmettre des savoirs de référence, mais portant sur la pratique de classe, ce qui les distingue des stratégies culturelles. Elles supposent naturellement l'existence effective d'un savoir didactique et pédagogique.

²⁸ HOUEMENT et KUZNIAK (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol 16/3. Pages 289-322 Grenoble :La Pensée Sauvage.

L'étude détaillée de ces stratégies avait montré le rôle privilégié tenu par les stratégies d'homologie. Ces dernières apparaissent particulièrement bien adaptées au public des centres de formations du premier degré, dans lesquels les étudiants, en général de formation non scientifique doivent cependant être préparés à enseigner les mathématiques, et ce dans un contexte de pluridisciplinarité. Les stratégies d'homologie tentent, dans un temps relativement bref, de transmettre à la fois des compléments mathématiques et une conception de l'enseignement dynamique basé sur une mise en action des élèves. D'autre part, nous avons pu constater que les formateurs utilisaient assez systématiquement ce type de stratégie pour l'enseignement de la Géométrie : ceci était dû en grande partie à l'ignorance de ce domaine par les étudiants qui avaient, au moment de notre étude, suivi plutôt un enseignement de la Géométrie sans figure. Mais une autre raison provenait également de la faible étendue des études didactiques dans ce domaine, ce qui ne facilitait pas la communication d'un savoir théorique sur l'enseignement de la Géométrie en formation. Ces constatations nous ont conduit à affiner l'étude de la Géométrie avec, comme perspective, de dépasser la simple homologie : pour cela il nous a paru nécessaire de définir un cadre théorique suffisamment riche pour envisager une stratégie de transposition.

II. Recherches sur la géométrie : les paradigmes géométriques²⁹.

1. Un exemple problématique : la cloche de ROUEN 1998

Cet exemple est étudié en détail dans *petit x* n°51. L'étude de cet extrait de sujet de concours d'entrée au professorat des écoles pointe les malentendus possibles entre étudiants et professeurs de mathématiques corrigeant des copies de concours. Ce qui nous a conduit à définir des "paradigmes géométriques", affinant en quelque sorte la notion de cadre géométrique de R.DOUADY (1994).

2. Paradigmes géométriques.

Notre cadre théorique s'appuie sur une approche épistémologique, fondée sur l'étude de textes philosophiques, mathématiques et didactiques et sur certains écrits de mathématiciens sur la géométrie. La démarche dans laquelle nous nous inscrivons vise à comprendre l'évolution des rapports entre géométrie et réalité, la géométrie étant vue comme modèle de l'espace. D'après GONSETH³⁰, il existe trois modes de connaissance de l'espace que nous avons intégrés et revisités : intuition, expérience, déduction.

1.1.5 a. L'intuition

L'intuition fournit une sorte de théorie immédiate basée sur un lot d'évidences, qui peuvent être perceptives aussi bien que virtuelles. Elle est structurée en un tout complet qui gomme les incertitudes. Bien sûr elle peut être aussi une source d'erreurs car elle peut installer une cohérence artificielle entre les données pratiques et une théorie inadaptée. Mais elle est aussi une formidable source de découverte. Elle n'est pas statique et évolue avec le sujet. Il faut signaler ici l'importance des travaux de FISCHBEIN³¹ : ce chercheur s'est particulièrement attelé à une explicitation de l'intuition en mathématiques tout en se fondant presque exclusivement sur des exemples géométriques.

²⁹ HOUEMENT et KUZNIAC (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 40 page 283-312. Kluwer

³⁰ Ferdinand GONSETH³⁰ (1890-1974), mathématicien, contemporain de PIAGET (1896-1980), surtout connu pour ses écrits en philosophie des sciences.

³¹ FISCHBEIN (1987) dans *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Reidel.Kluwer

1.1.6 b. L'expérience

L'expérience n'est pas immédiate, elle nécessite action physique et mentale. Par exemple, on pourrait dire que la propriété " par deux points il passe une seule droite " est plutôt intuitive, alors que celle " la somme de trois angles d'un triangle est plat " ne peut résulter que d'une expérience préalable. A l'école, les résultats obtenus par pliages et découpages relèvent de ce champ, de même que l'utilisation de logiciels dynamiques tels que Cabri. L'expérience nourrit l'intuition, l'intuition structure l'expérience : elles sont parfois difficilement séparables, il existe un double mouvement de l'une vers l'autre.

1.1.7 c. La déduction

La déduction consiste à tirer des informations comme conséquences d'autres, sans nouvelle expérience³². Elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. La déduction, au sens où nous l'entendons, est plus proche du raisonnement dans son ensemble. En aucun cas, elle ne se limite à la démonstration fondée sur une axiomatique de base

1.1.8 d. Les paradigmes géométriques.

Autour de ces trois modes de connaissances, il est possible d'organiser une synthèse qui réorganise la relation avec l'espace et donne naissance à trois types de Géométrie. Nous proposons simplement le tableau récapitulatif de ces géométries, renvoyant à nos articles pour plus de précisions

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Liée à un schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur un système complet d'axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et "figural concept" ³³	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et liens entre les objets.

Dans notre conception, l'idée de paradigme mise en jeu s'inspire de celle que KUHN a développée dans son ouvrage sur la structure des révolutions scientifiques. Deux aspects principaux sont soulignés par KUHN³⁴ qui, en fait, constituent deux facettes de l'approche de la théorie.

- Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de

³² OLERON (1977) *Le raisonnement*. Paris : PUF

³³ FISCHBEIN (1993) The Theory of Figural Concepts dans *Educational Studies in Mathematics* N°24 (2) pages 139-162.

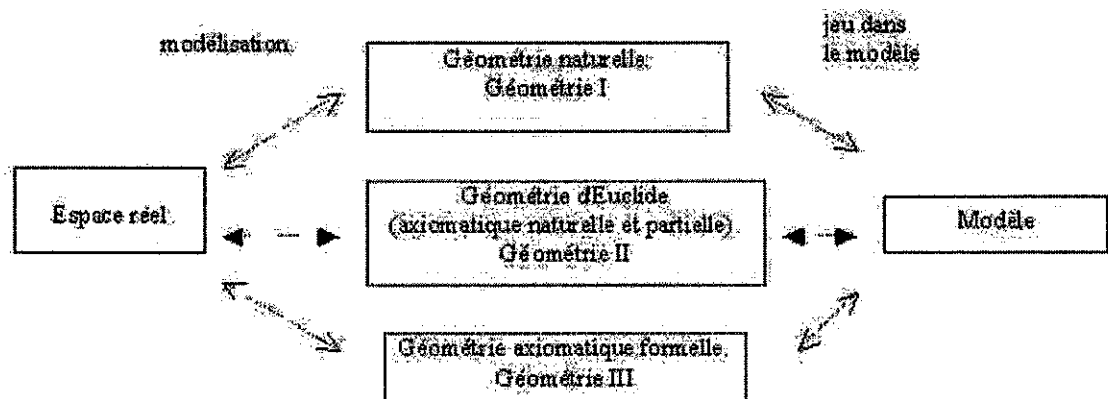
³⁴ Notamment l'article " En repensant aux paradigmes " in *La tension essentielle* Odile Jacob 1977.

poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens KUHN parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet.

- Dans un deuxième sens, intéressant dans une perspective d'enseignement, il caractérise les exemples significatifs (*exemplar*) qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique du champ disciplinaire.

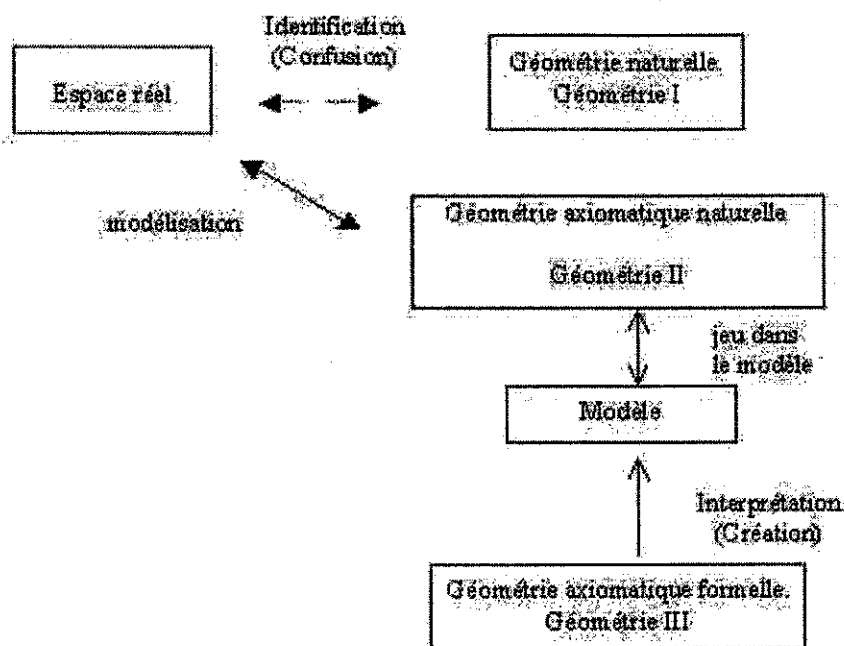
Le passage d'un paradigme à l'autre s'opère par une véritable rupture, une révolution.

Une autre façon de considérer ces paradigmes est de les envisager dans une problématique de la géométrie comme modélisation de l'espace suivant le schéma suivant :



Mais en fait, chaque paradigme met en place des rapports différents de la géométrie avec l'espace d'une part, le modèle et le processus de modélisation d'autre part. On peut représenter ces diverses relations sous la forme suivante :

Articulation entre les géométries, espace réel et modèle.



III. Au carrefour des deux recherches : les Petites Provocations Didactiques

1. Ce que sont les PPD

Nous appellerons PPD des situations de formation relativement brèves, qui s'appuient sur un contenu mathématique et doivent surprendre suffisamment les étudiants pour les conduire à interroger leurs conceptions sur certains domaines des mathématiques. Ces situations s'insèrent dans les stratégies de transposition qui visent à expliciter un savoir didactique, elles peuvent s'appuyer sur une phase d'homologie.

Dans les deux exemples de PPD qui suivent, le savoir en jeu pour les étudiants porte sur l'explicitation des différents paradigmes géométriques.

2. Construction d'un trapèze

Texte donné aux étudiants PE1

*Construire un trapèze convexe dont les côtés mesurent 8 cm, 7 cm, 5 cm, et 2 cm
Combien y a-t-il de solutions ? Justifiez*

1.1.9 a. Analyse mathématique

Ce problème de construction, a priori non immédiat, nécessite une analyse de la figure à obtenir. Si les instruments utilisés sont la règle et le compas (les quatre longueurs de départ étant données), le problème se transforme en une question sur la constructibilité du trapèze. Il est alors commode de faire apparaître des triangles dont les longueurs puissent se déduire des longueurs données. Ce qui amène à deux transformations possibles pour une meilleure

étude³⁵ : la construction d'une sur-figure (le triangle obtenu en prolongeant les deux côtés non parallèles du trapèze) ou d'une sous-figure (un parallélogramme intérieur au trapèze) dont les mesures sont déductibles des mesures initiales (soit grâce au théorème de Thalès, soit grâce aux propriétés du parallélogramme).

Il y a **3 solutions** à une isométrie près : les trapèzes dont les couples de mesures de longueurs des côtés parallèles sont (8,2) ; (7,2) et (5,2).

1.1.10 b. Déroulement

Le choix des mesures des longueurs amène un certain nombre de PE1 à ne réussir la construction d'aucun trapèze, quels que soient les instruments utilisés. Quelques-uns sont sûrs que certains trapèzes n'existent pas. Par exemple pour le trapèze (8,7), ils tracent un premier segment, de longueur 8 cm, puis deux cercles dont les centres sont les extrémités de ce segment et les rayons deux autres longueurs fixées (par exemple 5 cm et 2 cm) ; ils utilisent ensuite un gabarit du dernier segment (ici 7 cm) qu'ils font glisser parallèlement au premier segment et constatent qu'il ne "touche" jamais exactement les deux cercles. D'autres découvrent ainsi "par hasard" comme ils le disent eux-mêmes, un trapèze solution.

Le professeur relance alors, si c'est nécessaire, le questionnement : pourquoi tel trapèze peut-il être construit et tel autre non ? Pourrait-on prévoir la faisabilité du trapèze pressenti ?

Le regard des étudiants sur l'objet à construire change alors : l'objet doit être mieux anticipé. Or, pour anticiper, il est utile d'analyser l'objet fini, ce que permet le "dessin à main levée", et de faire appel à des connaissances sur la constructibilité des figures, mais le problème est de savoir lesquelles. Les PE1 tentent d'introduire dans la figure dessinée à main levée des rectangles, mais cette approche n'aboutit pas car les nouvelles longueurs ne sont pas simplement déductibles des longueurs connues. Se construit alors la nécessité de faire apparaître des figures (dont on connaît des conditions de constructibilité) avec des longueurs déduites des longueurs données. Les deux procédures signalées plus haut apparaissent avec tout d'abord une prédominance du triangle comme sur-figure et une certaine difficulté à utiliser à bon escient le théorème de Thalès, puis par une sorte de repli, la procédure de découpage en parallélogramme et triangle. La recherche de la constructibilité du trapèze se poursuit, soit dans un cadre géométrique, en testant effectivement la construction des triangles obtenus, soit dans un cadre numérique, en utilisant l'inégalité triangulaire.

1.1.11 c. Lien avec les différents paradigmes.

L'analyse des différentes postures des étudiants pendant la résolution de cet exercice permet au professeur de donner sens aux paradigmes géométriques I et II.

Le problème est posé apparemment en Géométrie I dans sa première partie, puisqu'il faut produire réellement des trapèzes en respectant des contraintes. Mais rester en Géométrie I, bien souvent, ne suffit pas à résoudre le problème, en particulier quand les instruments de tracé sont imposés. Il est nécessaire de changer de paradigme pour conclure à l'existence pratique de l'objet : sont en jeu le paradigme de la Géométrie I, où l'existence de l'objet est validée par le contingent et les instruments, et le paradigme de la Géométrie II, où l'existence de l'objet est validée par la référence à des propriétés arrêtées et textuelles dans un cadre axiomatique.

Cet exercice permet de préciser le contrat implicite du concours et d'attirer l'attention des étudiants sur l'importance du rôle du contrat didactique dans les changements de paradigmes. Le candidat PE au concours est plutôt évalué en géométrie II, bien que son rôle de professeur des écoles soit de faire travailler les élèves en Géométrie I. Les attentes concernant les élèves

³⁵ On reconnaît là ce que DUVAL a appelé une approche opératoire de type méréologique de la figure.

du primaire sont situées en Géométrie I ; la Géométrie II est plutôt du ressort du Second Degré.

Il est à noter que, dans cet exercice, le changement de paradigme nécessaire à la recherche de l'existence de solutions nourrit aussi une technique de construction, donc fournit la solution en Géométrie I. Ce n'est pas toujours le cas, comme nous le verrons dans l'exemple qui suit. Il n'y a donc pas lieu de hiérarchiser les paradigmes géométriques.

3. Construction d'un cercle dont un arc de cercle est donné .

Dans un premier temps, quatre arcs de cercle (280° , 180° , 125° et 55°) de diamètres différents sont donnés sur une feuille de papier. Les étudiants doivent construire le cercle entier.

1.1.12 a. Analyse mathématique.

Le problème se situe dans l'espace des objets et la tâche est pratique. Le cercle, connu en partie, apparaît comme un dessin. Pour résoudre ce problème, les étudiants peuvent utiliser des connaissances issues des différents paradigmes géométriques.

En Géométrie I, il peut s'agir de savoir-faire pratiques parfois non mathématiques, comme le pliage ou le report d'arcs de cercle décalqués, puis reportés plusieurs fois.

En Géométrie II, il est possible de construire les médiatrices de cordes tracées sur les arcs ou d'utiliser la propriété des angles droits inscrits dans un demi-cercle.

Dans ce cas, la Géométrie II joue le rôle d'une technologie pour des techniques utilisées en Géométrie I.

1.1.13 b. Déroulement et PPD.

Le problème n'est pas difficile et apparaît comme un problème de révision. Cependant, la grande hétérogénéité des étudiants, futurs professeurs d'école, permet de mettre en œuvre un petit conflit socio-cognitif entre les étudiants se référant soit à la Géométrie I soit à la Géométrie II.

Ainsi, on voit des étudiants utiliser leur équerre pour tenter d'inscrire l'angle droit dans le cercle, et cela fonctionne bien pour les arcs supérieurs à 180° . Ces étudiants sont souvent incapables de justifier cette technique ; ils travaillent en Géométrie I. A ce stade, les étudiants raisonnant en Géométrie II et utilisant la construction avec les médiatrices sont sûrs de leur position et simplement étonnés des procédures utilisées par leurs collègues.

Une fois, la procédure experte usuelle comprise par tout le monde, nous proposons une PPD avec une nouvelle consigne : indiquer le rayon du cercle construit sur l'arc 55° . Il existe une grande variété de mesure pour ce rayon, avec une amplitude relative importante. Les étudiants essaient de trouver des justifications à ces différences et ils arrivent à la conclusion d'une sorte d'inadaptation de la théorie à la pratique mise en jeu ici.

La construction avec les médiatrices se montre alors comme une construction théorique sur les objets idéaux que sont les figures de la Géométrie II.

Le but de cette situation et d'autres semblables est de mettre en évidence les différents rapports aux objets créés par les différentes Géométries. Elle vise aussi à bien montrer que chaque Géométrie a sa spécificité et son champ d'application, il n'y a en pas une supérieure à l'autre intrinsèquement : elles ne sont pas définies pour résoudre les mêmes types de problèmes.

IV Des pistes de travail.

Une fois dégagé un cadre théorique qui met bien en évidence la diversité des approches de la géométrie élémentaire enseignée, la recherche doit préciser l'usage de ce cadre au niveau didactique. Les PPD sont une voie explorée pour lever certaines ambiguïtés propres à la formation des enseignants.

Actuellement nous explorons deux pistes suggérées par les premiers exemples que nous avons présentés : le travail sur l'approximation et la maîtrise des effets de transposition. Dans le premier cas, nous cherchons des situations de transition entre paradigmes et l'étude des situations d'approximation en géométrie, traditionnellement négligée, semble prometteuse. Nous renvoyons le lecteur à notre contribution à l'école d'été et aux articles qui détaillent cette intervention³⁶. Dans le deuxième cas, pour définir la nature de la dénaturation éventuelle produite par les étudiants à la suite de nos PPD, il apparaît nécessaire de mettre en place des études plus fines sur ces effets de transposition : cette étude (qui repose également sur la pratique des écrits réflexifs) est engagée en collaboration avec J.C RAUSCHER.

D'autre part, notre recherche nous a permis de dégager des leviers pour l'apprentissage qui semblent également pertinents au niveau des élèves à l'école primaire et au Collège : le rôle des constructions et de la gestion de l'approximation dans ce type d'activités. Il s'agit cette fois de gérer au niveau des élèves la transition des paradigmes en assumant de développer de manière approfondie des exercices relevant de la Géométrie I.

³⁶ HOUEMENT et KUZNIAC (2002) Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. 349-356 *Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, Corps (août 2001) ; t "Approximations géométriques". *L'Ouvert n°105*. Strasbourg et . (à paraître 2003) Quand deux droites sont "à peu près" parallèles ou le versant géométrique du "presque" égal. *petit x*. Grenoble : IREM de Grenoble.

Quelle géométrie pour la formation des maîtres ?

Contribution au débat,

après l'exposé de C. Houdement et A. Kuzniak

Marie-Hélène Salin

&

René Berthelot

IUFM d'Aquitaine et DAEST Université Bordeaux 2 Victor Segalen

L'exposé de Catherine Houdement et Alain Kuzniak pose deux séries de questions :

- l'une portant sur la meilleure façon de répondre à une préoccupation qui nous est commune : comment assurer une meilleure formation à nos stagiaires Professeurs des Ecoles (PE) et professeurs de lycée et collège (PLC) pour les préparer à l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire ?

- l'autre portant sur leur proposition de définir trois types de géométrie et sur la façon dont ils les caractérisent, dans une démarche d'ordre épistémologique.

Notre réaction à leur exposé se situe essentiellement du premier point de vue, même si nous avons comme d'autres auditeurs certainement, des remarques et questions relatives au deuxième.

I. Des points d'accord

Une préoccupation nous est commune, sensibiliser les futurs enseignants à l'un des points d'achoppement de l'enseignement de la géométrie : l'articulation entre la maîtrise de l'espace sensible, qui est un objectif de l'école élémentaire et l'entrée dans la démarche de maîtrise de l'espace géométrique, objectif du collège. Le contenu, composite, des épreuves de géométrie au concours PE le nécessite, mais c'est pour les PLC que ce travail est encore plus nécessaire.

Nous partageons l'idée

- qu'il faut clairement faire apparaître, en formation (PE et PLC) la polysémie du terme "géométrie" qui renvoie à plusieurs acceptions.

- qu'il est nécessaire de construire, pour la formation, des activités spécifiques au cours desquelles la confrontation des types de solution proposées par les stagiaires vont permettre d'explicitier et de caractériser leurs divers modes de rapport à cette nébuleuse désignée par le terme de "géométrie". Nous sommes depuis longtemps, sans le savoir, des adeptes des "petites provocations didactiques".

- qu'il n'y a pas de hiérarchie entre la géométrie pratiquée à l'école primaire et celle du collège, contrairement à ce que peuvent laisser penser les discours tenus aux élèves dans les

manuels de collège pour les convaincre qu'il faut abandonner les pratiques construites à l'école élémentaire, comme le mesurage ou l'emploi des instruments pour caractériser les propriétés d'une figure.

Toutefois, nous n'avons pas la même façon de traiter la question du contenu de la formation des professeurs et nous n'avons pas la même hiérarchie de priorités que nos deux collègues.

II. Des objectifs différents

Ces objectifs peuvent être définis selon deux axes :

1) La formation à donner aux futurs professeurs PE et PLC est à mettre en relation avec les objectifs de l'enseignement dans la scolarité obligatoire : il faut situer l'enseignement de la géométrie par rapport à ces objectifs.

La géométrie n'est pas seulement un domaine prototypique des mathématiques, elle constitue aussi un outil pour répondre à des problèmes de l'espace physique posés dans le cadre de pratiques professionnelles, sociales et culturelles. Si aux différents niveaux scolaires, cet aspect n'est pas pris en charge par l'enseignement des mathématiques, quelle discipline s'en chargera ? On connaît par exemple les problèmes de l'enseignement du dessin technique, dans l'enseignement professionnel ; c'est pourquoi, sensibiliser les stagiaires à ce que nous avons appelé " la problématique de modélisation ", en travaillant sur des problèmes se développant dans des espaces et portant sur des objets qui n'appartiennent pas à " l'espace normal " de la géométrie nous apparaît nécessaire. Nous ne nous retrouvons pas dans l'affirmation de nos collègues dans leur article paru dans Petit x : " Pour nous, faire de la géométrie, c'est travailler dans le modèle, (dont la feuille de papier fournit un support) ".

Pour un développement sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur à la partie I de l'article paru dans Petit x n° 56 (Berthelot R.- Salin MH 2001)

2) La formation à donner aux futurs professeurs PE et PLC doit leur permettre de discerner les capacités de leurs élèves et de comprendre leurs difficultés, en s'appuyant sur des observables.

Un élément à prendre en compte, c'est que les élèves " ont une histoire ", depuis leur naissance, avec les objets spatiaux supports de l'enseignement de la géométrie et que le professeur doit pouvoir les aider, **par les situations qu'ils leur propose**, à la fois à s'appuyer sur les connaissances " pratiques " qui leur viennent de cette histoire, à reconnaître les contextes dans lesquelles elles sont pertinentes et à les transformer, les diversifier et en acquérir de nouvelles.

Comment cela peut-il se traduire pour les deux catégories de professeurs ?

Pour les professeurs des écoles

Selon les programmes du primaire, les concepts géométriques sont présentés comme des outils pour contrôler des situations spatiales, avec la trilogie : " reproduction, construction, description ". Nous avons introduit le terme : " spatio-géométrie " pour désigner les connaissances issues du savoir géométrique et mises en jeu dans la résolution de certains de

ces problèmes. C'est le cas par exemple de celles concernant les formes des objets et leurs propriétés. Mais, avant même que l'école les leur propose, les élèves ont résolu des problèmes nécessitant la communication d'informations sur la forme des objets, ils ont donné du sens à des mots de la culture commune comme "droit", "rectangle", etc. Le professeur doit pouvoir repérer ces connaissances, sous des formulations approximatives et trouver les situations à même de les faire évoluer. Le terme "droit", par exemple, est particulièrement ambigu et source de beaucoup d'incompréhensions et d'erreurs.

Pour les professeurs de collège

Une des caractéristiques de l'enseignement de la géométrie au collège est qu'elle ne peut échapper à l'établissement de rapports avec des dessins. Leur signification est liée au type de problèmes dans lesquels ils sont insérés : problèmes spatiaux, en prolongement de ceux de l'école primaire, au début du collège, problèmes de géométrie à partir d'un certain moment. Les programmes insistent sur la continuité du passage d'un type de rapport à l'autre, mais les faits résistent : bien que par un certain nombre d'artifices, certains professeurs essaient de préparer ce passage dès la 6^{ème}, en 4^{ème}, beaucoup d'élèves en restent au type de rapports aux figures-dessins qui a été construit peu à peu à l'école primaire et au début du collège. C'est par "l'expérience instrumentée" que l'on découvre une figure-dessin. Il y a là un véritable obstacle.

Selon nous, un changement de rapport ne peut se réaliser sans rupture et sans travail en profondeur sur la signification de cette rupture (C'est l'objet de la situation des médiatrices, qui est de faire entrer les élèves dans une problématique géométrique).

Aussi, nous sommes en désaccord avec C. Houdement et A. Kuzniak quand ils affirment : "Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons, à la suite de Gonseth, une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Ce point de vue nous paraît fondamental dans une perspective de formation des maîtres." Sans voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, il nous semble qu'en formation tout particulièrement, si nous voulons que les professeurs de collège comprennent quels obstacles rencontrent leurs élèves et puissent aider ces derniers à les surmonter, ce sont les différences entre les différentes problématiques qu'il faut mettre en évidence, et ce sont les situations dans lesquelles les élèves sont placés qu'il faut analyser. Pour un développement sur ce sujet, nous renvoyons lecteur à la partie II de l'article cité ci-dessus.

En conclusion, si pour nous faire comprendre des professeurs, nous reprenons quelquefois les formulations "géométrie du constat" et "géométrie déductive", pour caractériser la différence entre l'enseignement actuel de la géométrie à l'école élémentaire et au collège, nous ne la "naturalisons" pas en deux géométries différentes, mais nous considérons la géométrie comme un ensemble diversifié de connaissances et de pratiques, dans lesquelles chacun peut puiser en fonction de la problématique qui est la sienne en situation.

Références

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse Université Bordeaux 1.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1995) Un enseignement des angles au cycle 3, *Grand N* n°56 (p. 69-116) IREM de Grenoble.

BERTHELOT R. & SALIN M.H. (1999). L'enseignement de l'espace à l'école primaire *Grand N* n° 65

BERTHELOT R. & SALIN M.H.(2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* n° 56 IREM de Grenoble

BERTHELOT R. & SALIN M.H.(A paraître) Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie *Actes du Colloque " Autour de la Théorie des Situations "* ; Bordeaux 2000

Enseigner les mathématiques

L'enseignement de la multiplication des décimaux

Étude de pratiques ordinaires

*Eric Roditi ,
IUFM de Paris et équipe DIDIREM Paris 7*

Dans cette communication, je vais présenter la recherche qui a abouti à la thèse que j'ai soutenue à la fin de l'année 2002

J'aborderai cinq points de longueurs inégales. D'abord je m'expliquerai sur les interrogations générales qui m'ont conduit à cette recherche sur les pratiques. Le paragraphe I, sur la problématique, me permettra de passer de ces interrogations à des questions accessibles à la recherche. Dans le paragraphe II, j'indiquerai les sources théoriques qui fondent les questions posées dans la problématique et qui légitiment la méthodologie adoptée pour y répondre. Méthodologie dont j'indiquerai les outils essentiels dans le paragraphe III. Enfin, ce sera l'objet du IVe paragraphe, je vais présenter quelques résultats.

Pourquoi cette recherche sur les pratiques ?

D'une façon générale, l'intérêt porté aux pratiques enseignantes vient de l'idée que les apprentissages mathématiques des élèves dépendent beaucoup de l'enseignement qui a été dispensé en classe.

Plus précisément, des interrogations de formateurs sont à l'origine de cette recherche. La multiplication des nombres décimaux pose des problèmes d'enseignement à cause d'erreurs persistantes des élèves. Des erreurs dans la reconnaissance de l'opération, pour résoudre un problème. Des erreurs aussi dans le calcul du produit. Les nombres décimaux et la multiplication sont des notions qui ont déjà été travaillées en didactique, on dispose même d'ingénieries mais, comme l'a montré la thèse de Jeanne Bolon, elles ne sont pas utilisées dans l'enseignement ordinaire. Et cela malgré une certaine reprise dans des stages de formation (initiale ou continue) ainsi que dans des brochures à l'intention des enseignants. D'une certaine manière, c'est aussi cette « indifférence » des professeurs aux résultats de la recherche en didactique, que j'ai cherché à interroger en abordant les questions suivantes : Que font les professeurs dans leurs classes ? Quelles sont leurs contraintes et quelles sont leurs marges de manœuvre ? Question que nous aborderons en déterminant les régularités et la variabilité des pratiques des enseignants.

Ma démarche a été de partir du quotidien de séances observées dans des classes ordinaires. En recherchant les régularités des pratiques je vais montrer que les professeurs répondent à des contraintes de l'institution scolaire mais aussi à des exigences liées à l'exercice même du métier d'enseignant. La question de la diversité des pratiques est posée pour identifier les marges de manœuvre investies par les professeurs, par delà les contraintes.

J'ai pris en compte le fait que le professeur cherche à concilier des objectifs d'apprentissage et des impératifs professionnels qui s'expriment par rapport à lui, et pas seulement par rapport à ses élèves. J'ai choisi pour cela d'utiliser des outils développés en didactique des mathématiques et en psychologie ergonomique. Les pratiques de quatre professeurs exerçant dans des conditions similaires ont été analysées, des observables du scénario prévu et de son animation en classe ont été définis pour permettre à la fois des comparaisons entre les professeurs, et entre la préparation et le déroulement des cours.

Deux types de résultats seront proposés. Diverses contraintes seront élucidées qui montrent que tous les scénarios envisageables *a priori* ne sont pas réalisables dans l'enseignement ordinaire. En outre, l'investissement personnel des professeurs engendre une cohérence des pratiques qui font que pour un enseignant donné, tous les choix possibles ne peuvent pas être adoptés.

Avec l'équipe qui travaille autour d'Aline Robert, nous partons de l'hypothèse que l'analyse des pratiques enseignantes gagnerait à tenir compte, bien sûr de l'apprentissage des élèves, mais aussi des contraintes du métier d'enseignant. La recherche, a été menée avec cette double approche des pratiques : une approche dite « didactique » qui concerne l'apprentissage, et une approche dite « ergonomique » qui concerne l'exercice du métier.

I. La problématique

L'étude des pratiques ordinaires, m'a conduit à l'observation de classes. Les professeurs y sont considérés comme des sujets, c'est-à-dire à la fois pour leurs caractéristiques individuelles et pour leur inscription dans une activité professionnelle, sociale.

La question centrale qui traverse ma recherche est donc celle de la régularité et de la variabilité des pratiques ordinaires, dans le cas précis de l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux en classe de sixième. Les constats de régularité permettront d'évaluer les contraintes et les constats de variabilité seront interprétés comme l'investissement d'une marge de manœuvre qui existe par delà ces contraintes.

Cette question globale, « régularité / variabilité » est décomposée en trois groupes de questions accessibles à la recherche :

1) Le premier groupe de questions se résume ainsi : comment se situent les enseignements observés par rapport aux enseignements possibles ? Il y a des questions sur le savoir à enseigner et des questions sur la transposition didactique.

2) Le deuxième groupe de questions concerne les contraintes et les marges de manœuvre. Je distingue plusieurs sources de contraintes qui peuvent s'exercer sur les choix des professeurs, pour concevoir comme pour animer leur projet d'enseignement :

- Les contraintes de l'institution scolaire. D'abord le contenu, qui est défini par le programme. Ensuite la progression annuelle des apprentissages (ce qui s'apprend en CM2, en sixième, en cinquième, etc). Et enfin la durée dont les professeurs disposent pour dispenser leur enseignement.

- Les contraintes sociales : elles sont liées aux attentes diverses des autres professionnels de l'établissement scolaire (l'administration, les collègues, etc), aux attentes des parents, et même parfois des élèves. Dans cette recherche, je n'ai, en fait, retenu qu'une question sur ces contraintes sociales : celle de l'influence du manuel scolaire utilisé. Je rappelle que, dans un collège, le manuel est choisi par l'équipe des professeurs de la discipline.

- Les contraintes liées aux connaissances antérieures réelles des élèves, connaissances dont les professeurs tiennent compte pour enseigner.

- Les contraintes liées à l'exercice du métier : le fait qu'il faille, quand on est professeur, mener l'ensemble de la classe malgré son hétérogénéité, gérer les interactions avec les élèves, et aussi tenir compte du temps qui passe...

On peut rattacher ces contraintes respectivement aux dimensions institutionnelles, sociales, cognitives et médiatives qu'Aline Robert et Janine Rogalski distinguent pour décrire les pratiques enseignantes.

3) Le troisième groupe de questions concerne la cohérence de chaque pratique enseignante. Du point de vue théorique, pour chaque professeur, la cohérence de ses pratiques est admise. J'en cherche des « traces », des indices, en croisant les choix effectués par chaque professeur depuis la préparation des cours jusqu'au déroulement en classe. Je précise que

cette cohérence intervient à différents niveaux. Par exemple au niveau psychologique. Au niveau des ses conceptions des mathématiques, de leur enseignement et de leur apprentissage. Ou encore au niveau de sa conception de la profession, notamment de son statut de fonctionnaire de l'État pour les professeurs de l'enseignement public.

J'envisage que cette recherche de traces de la cohérence des pratiques puisse révéler aussi des contradictions. Lorsque j'analyse les activités d'un professeur, je le fais à un certain niveau et la cohérence de ses choix se comprend peut-être à un tout autre niveau. C'est pourquoi je considère que les contradictions ne sont qu'apparentes et je les interprète comme des « compensations ».

II. Les sources théoriques

Dans la lignée des travaux d'Aline Robert et de Janine Rogalski, la recherche a été menée avec une double approche des pratiques enseignantes : une approche didactique qui concerne l'apprentissage, et une approche ergonomique qui concerne l'exercice du métier. Pour la première approche, c'est l'activité du professeur « tournée vers ses élèves » qui est prise en compte alors que pour la seconde, c'est l'activité « tournée vers soi » qui est étudiée. Des outils théoriques empruntés à deux disciplines m'ont permis de mener ce travail : la didactique des mathématiques et la psychologie ergonomique.

Bien que la didactique prenne en compte le travail de l'enseignant (et pas seulement l'apprentissage des élèves) et que la psychologie ergonomique développe des outils d'analyse du travail en fonction de la tâche prescrite (ici l'apprentissage des élèves), j'ai choisi de ne pas croiser les cadres théoriques pour l'analyse d'un même objet. Ainsi le cadre de la didactique a été utilisé pour l'étude des pratiques du professeur « tournées vers ses élèves » et celui de la psychologie ergonomique a permis l'analyse de l'activité « tournée vers soi » de l'enseignant.

1) Approche des pratiques « tournées vers les élèves »

La première approche des pratiques des professeurs observés concerne donc les effets potentiels sur l'apprentissage des élèves.

Le sens des notions mathématiques doit se comprendre ici en référence à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud G. 1990). Les *enjeux mathématiques* des enseignements de la multiplication des nombres décimaux ont été étudiés en s'appuyant notamment sur les travaux de Guy Brousseau (1987, 1998), de Régine Douady et de Marie-Jeanne Perrin (1986) pour les nombres décimaux, et sur les travaux de Gérard Vergnaud (1979, 1981, 1983), de Janine Rogalski (1985) et de Denis Butlen (1985) pour la multiplication. Leurs *enjeux didactiques* ont été évalués par l'étude des dynamiques ancien / nouveau ; des dialectiques contextualisations / décontextualisation ; des dialectiques outil / objet ; des représentations symboliques utilisées ; des tâches prescrites aux élèves.

2) Approche des pratiques « tournées vers soi »

Pour la deuxième approche des pratiques enseignantes, je retiens des hypothèses admises à partir de travaux de psychologie ergonomique.

D'abord j'admets l'existence de différences entre les prescriptions de l'institution scolaire et les activités des professeurs. Ces différences s'interprètent par l'implication personnelle des enseignants dans leur activité professionnelle.

Puis, en reprenant la modélisation de Janine Rogalski, je considère le travail en classe du professeur comme la gestion d'un environnement dynamique ouvert. L'adjectif « dynamique » est utilisé parce que l'apprentissage des élèves évolue même sans intervention du professeur, par exemple lorsqu'ils résolvent un exercice. On parle alors d'évolution spontanée. L'environnement est dit « ouvert » parce que, quand le professeur intervient en classe, il ne peut pas prévoir, à coup sûr, l'effet de son intervention sur l'apprentissage de ses élèves. Cela faute de théorie qui le permette. Pour la même raison, il ne peut pas non plus prévoir l'évolution spontanée.

Enfin, comme je l'ai déjà dit, pour chaque professeur, la cohérence du système de ses pratiques d'enseignement est admise.

III. La méthodologie élaborée

D'abord j'ai fait le choix d'une étude de type clinique en procédant par comparaison. J'ai comparé les séquences pour répondre à la problématique « régularité / variabilité » et j'ai procédé à une étude clinique car je ne disposais pas, quand j'ai commencé ma recherche, de critères définis *a priori* pour analyser des pratiques enseignantes avec la double approche « apprentissage / métier ». Afin d'analyser les projets des professeurs, il sera fait référence à ce qu'il était possible d'envisager et qui a été déterminé par une analyse des sources publiées tant sur l'enseignement de cette notion que sur les performances des élèves, toujours sur cette notion, recueillies à partir de différentes évaluations. L'analyse des séquences d'enseignement s'appuiera sur des observations effectuées dans les classes des professeurs de sixième. Les sources des données recueillies sont donc publiées et expérimentales.

1) Des sources publiées et des sources expérimentales

Les sources publiées sont les programmes, les manuels, les évaluations (DEP et APMEP), j'ai aussi consulté les publications à l'intention des enseignants ainsi que les travaux de recherche en didactique des mathématiques. Le travail effectué sur ces sources a consisté à déterminer les possibles et à situer les séquences observées par rapport à ces possibles.

Les sources expérimentales sont des enregistrements audio dans des classes de 6e.

Compte tenu de la question centrale sur la régularité et la variabilité des pratiques, que je voulais pouvoir interpréter en termes de contraintes et de marges de manœuvre, il m'a fallu fixer toutes les variables qui concernent l'enseignement sauf celles qui sont liées au professeur, en tant qu'individu. C'est pourquoi la notion enseignée est commune, les classes de sixième sont globalement de même niveau et de même effectif, le manuel scolaire utilisé est le même et enfin les professeurs sont tous des professeurs expérimentés. Afin de neutraliser aussi le facteur temps j'ai observé chaque professeur durant toutes les séances consacrées à la multiplication des décimaux. C'est l'ensemble de ces séances que j'appelle une séquence.

J'ai finalement observé les séquences de quatre professeurs que, dans ma thèse, j'appelle par des noms de mathématiciens pour préserver leur anonymat.

2) Constitution d'un corpus de données

Je vais expliquer maintenant comment, à partir des enregistrements, j'ai constitué un corpus de données analysables.

Parce que je voulais percevoir à la fois des régularités et des différences entre les pratiques, j'ai dû adopter un point de vue médian sur les séquences observées. J'ai transcrit les bandes magnétiques avec une méthode qui permet d'accéder à des observables ni trop fin (pour ne pas masquer les régularités) ni trop grossier (pour ne pas écraser les différences).

J'ai défini trois observables des projets des professeurs et trois observables des déroulements. Je vais donner leur définition précise, mais je voudrais d'abord conclure le tableau général de la méthodologie en rappelant que l'analyse des séquences est fondée sur une double approche : une analyse des pratiques en fonction de leurs effets sur l'apprentissage, et une analyse des pratiques envisagées comme l'exercice d'un métier.

21. Trois observables des projets d'enseignement

a) Le champ mathématique

Le champ mathématique est l'ensemble des contenus abordés durant la séquence : les notions, les situations, les représentations symboliques et leurs transformations éventuelles, les propriétés et les théorèmes. Le choix de cet observable découle de l'approche didactique puisque, l'enseignement (en didactique des mathématiques) est étudié en ce qu'il a de spécifique par rapport au savoir en jeu.

b) La stratégie d'enseignement

La stratégie d'enseignement est l'organisation des contenus mathématiques de la séquence selon un itinéraire. Cet itinéraire est déterminé par des motifs cognitifs ou mathématiques qui varient en fonction des professeurs. La stratégie d'enseignement permet de prendre en compte, par exemple, le fait qu'un enseignant commence ou non par exposer le savoir avant de le faire utiliser par les élèves. Conformément aux hypothèses retenues en didactique, un tel choix n'est pas neutre sur l'apprentissage des élèves.

c) Les tâches prescrites aux élèves

Les tâches prescrites aux élèves : je m'intéresse ici à ce qui est demandé aux élèves par leur professeur. Une tâche est généralement définie par le but à atteindre. Je me suis limité dans cette recherche aux tâches dont le but est lié à l'apprentissage de mathématiques. Ainsi, j'ai considéré comme tâche : l'énoncé d'un exercice ; devoir écouter ou recopier (un fragment du cours ou la solution d'un exercice) ; devoir formuler un résultat, une définition ou une propriété... En ce qui concerne le cours, j'ai distingué trois modes d'intégration des phases d'institutionnalisation. Avec le mode *bilan*, le professeur institutionnalise les savoirs qui ont été construits en classe par les élèves à partir de questions posées en classe. Le mode *apport* concerne l'énoncé de savoirs qui répondent à un problème posé en classe mais qui n'a pas été résolu par les élèves. Le mode *déclaration* correspond à la présentation de savoirs mathématiques sans qu'ils n'aient jamais fait l'objet d'un questionnement préalable en classe.

22. Trois observables des déroulements

a) Les activités effectives des élèves

Je repère les activités effectives des élèves. La définition de ce terme « activité effective » nécessite deux définitions préliminaires. L'activité potentielle : c'est ce que doit faire l'élève pour réaliser la tâche prescrite. L'activité réelle : c'est ce que l'élève a fait pour accomplir la tâche. Cette activité s'effectue essentiellement en pensée, elle conduit parfois à une production. On aura bien compris que l'activité réelle n'est pas toujours accessible au chercheur, ni même au professeur. C'est pourquoi je considère finalement l'activité effective qui est la reconstitution de ce qu'aurait pu être l'activité réelle, en fonction de l'activité potentielle et des productions recueillies, notamment ce qui est dit par les élèves.

b) Les adaptations des professeurs

Le deuxième observable des déroulements est constitué par les adaptations des professeurs qui sont des accompagnements de l'activité des élèves. Comme précédemment, pour définir ce terme, j'ai besoin de définitions préliminaires. J'appelle *incident* toute manifestation

publique d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport à ce qui est attendu – en référence à la tâche prescrite. Voyons-en quelques exemples.

Voici la Tâche prescrite :

Place la virgule manquante : $1,35 \times 42 = 5,67$

- Considérons l'intervention de Raphaël : « Madame, a-t-on le droit de dire qu'il ne manque pas de virgule ? » Manifestement, Raphaël compte les décimales. Sa question montre un décalage négatif par rapport à l'activité attendue. Cette question est donc un incident.

- Considérons maintenant l'intervention de Maud : « Moi, pour placer la virgule, j'ai rajouté un zéro. J'ai écrit : $1,35 \times 0,42 = 5,67$ » L'erreur de Maud est certainement héritée de l'addition des décimaux.

Deux exemples d'incidents ont été présentés, les questions et les erreurs. Un autre incident est très fréquent dans les séquences observées, c'est la « réponse incomplète ». Par exemple si Maud avait dit seulement « Moi pour placer la virgule j'ai rajouté un zéro ». On aurait pu se demander alors si elle pensait à 0,42, à 4,02, à 4,20 ou à 42,0 car ces différentes réponses correspondent toutes à des démarches possibles.

Ces trois incidents sont les plus nombreux dans les séquences observées.

Après avoir relevé un incident, j'ai repéré sa place par rapport au scénario, et cela pour des raisons ergonomiques. Prenons un exemple : un professeur qui voudrait répondre « on verra plus tard » à un élève risque fort de soulever des protestations si l'incident concerne directement la stratégie d'enseignement. En revanche, cette même réponse sera plus facilement acceptée par l'élève si l'incident ne concerne pas un contenu mathématique de la séquence.

Enfin j'ai appelé « *gestion d'un incident* » l'intervention du professeur consécutive à un incident. Dans les séquences observées, j'ai relevé huit modes de gestion des incidents. Je les ai classés en fonction de la possibilité de travail qui reste à l'élève après l'intervention du professeur. Par exemple, suite à la phrase incomplète de Maud :

- un professeur pourra se comporter comme s'il n'avait rien entendu ;
- il pourra lui dire qu'elle a tort d'ajouter un zéro et donner la bonne réponse ;
- il pourra détourner la réponse et l'enrichir pour donner la réponse exacte ;
- il pourra aussi relancer l'activité de la classe, j'ai repéré pour cela 5 techniques que les professeurs observés utilisent et que je décris dans la thèse.

Finalement, une adaptation est le triplet composé d'un incident, de sa place par rapport au scénario et de sa gestion par le professeur.

c) La chronologie de la séquence

J'ai aussi repéré la chronologie de chaque séquence, je ne les ai pas chronométrées, mais j'ai décomposé chaque séance en épisode. Un épisode est une fraction d'une séance caractérisée par le but spécifique que l'enseignant veut atteindre. Un épisode correspond souvent à la réalisation d'une tâche, éventuellement de plusieurs tâches lorsque celles-ci répondent au même but pour l'enseignant.

Cet observable a aussi un intérêt pour l'analyse ergonomique, on peut se demander par exemple si le mode de gestion des incidents évolue au cours de la séquence, autrement dit si le temps qui passe a une influence sur les interactions entre le professeur et les élèves.

IV. Présentation de quelques résultats

L'ensemble des résultats obtenus ne peut être présentée dans cette communication, néanmoins, je voudrais, dans ce dernier paragraphe qui sera le plus long, présenter les apports essentiels de mes travaux. Je commencerai par indiquer quelques résultats des analyses des sources publiées sur la multiplication des nombres décimaux notamment sur les enseignements possibles, les connaissances et les difficultés des élèves et les contraintes de l'institution scolaire. Je proposerai ensuite des résultats des analyses comparées des séquences. J'apporterai ainsi quelques réponses aux questions de régularité et de variabilité, posées dans la problématique. Je proposerai enfin des résultats des analyses par séquence, où j'aborderai les questions sur la cohérence des pratiques enseignantes.

1. Résultats des analyses des sources publiées

11. Les enseignements possibles

a) Trois types de scénarios se distinguent par les choix didactiques globaux.

Dans le premier type de scénario, la technique opératoire est d'abord exposée par le professeur puis elle est appliquée par les élèves, éventuellement pour résoudre des problèmes. Dans le deuxième type de scénario, le professeur propose d'abord un problème en introduction. La technique opératoire est élaborée, au moins partiellement par les élèves, mais sans lien avec le problème précédent. Puis la technique est appliquée, éventuellement pour résoudre des problèmes. Dans le troisième type de scénario, des problèmes issus de situations multiplicatives sont proposés aux élèves, ces problèmes leur permettent d'élaborer la technique opératoire qui sera institutionnalisée et réinvestie dans de nouveaux problèmes.

b) Les scénarios se différencient par le choix concernant les nombres décimaux

Les choix concernant les nombres décimaux clivent en deux groupes les scénarios proposés dans les diverses publications. Le premier groupe de scénario traitent les nombres décimaux comme des rationnels particuliers, les nombres rationnels sont connus des élèves lors de l'enseignement de la multiplication des décimaux. Le second groupe de scénarios traitent les décimaux indépendamment des fractions, le lien entre la technique opératoire et l'écriture fractionnaire des décimaux n'est jamais mentionné.

12. Les connaissances et les difficultés des élèves

Les évaluations permettent de distinguer la connaissance des décimaux (écriture, comparaison...), les techniques liées à la multiplication de décimaux et la résolution de problèmes multiplicatifs portant sur des décimaux. Pour cette dernière catégorie de compétences, les sources sont assez peu nombreuses ce qui invite à la prudence quant aux conclusions.

Les décimaux sont encore en cours d'acquisition en 6e. On constate par exemple qu'une conception héritée des entiers explique environ la moitié des erreurs aux questions de comparaison de deux nombres décimaux.

Les multiplications par 10 et 0,1... sont réussies par seulement 50 à 70% des élèves à l'entrée en 6e. Environ 20% des erreurs commises au calcul du produit de deux décimaux surviennent au moment de placer la virgule.

Dans les problèmes multiplicatifs, l'opération est reconnue par environ 75% des élèves à l'entrée en 6e lorsqu'il s'agit d'isomorphisme de grandeurs. Elle ne l'est que par 30 à 40% d'entre eux dans le cas du calcul de l'aire d'un rectangle.

13. Les contraintes institutionnelles

La progression des apprentissages : la multiplication des rationnels positifs s'étudie en 5e.

Un contenu mathématique précis est imposé par le programme : calcul écrit, calcul mental, calcul approché, calcul instrumenté (à la calculatrice) ainsi que de nombreuses situations multiplicatives.

La contrainte de la durée est forte : en envisageant l'ensemble du programme, j'ai estimé que 4 à 6 heures devaient être consacrées à la séquence portant spécifiquement sur la multiplication (y compris la résolution de problèmes issus de situations multiplicatives).

2. Résultats sur les séquences des professeurs observés

Je vais commencer par l'étude des projets des professeurs, d'abord en les comparant aux projets possibles puis en les comparant entre eux ; je proposerai ensuite une analyse des déroulements en classe de ces projets.

21. Analyse des projets d'enseignement

Par comparaison aux enseignements proposés dans les publications, on constate une grande convergence des choix des professeurs puisque, d'une part les scénarios sont tous du 1er ou du 2ème type et, d'autre part les nombres décimaux sont toujours traités indépendamment des fractions. Ce choix doit être rapproché de la contrainte des programmes puisque la multiplication des fractions ne s'étudie qu'en 5ème.

a) Le champ mathématique est globalement identique

J'ai distingué trois types de contenus mathématiques, ceux qui ont trait à la multiplication des nombres décimaux (en tant qu'opération), ceux qui concernent les écritures des nombres décimaux, et les situations multiplicatives.

Contenus mathématiques	Mme Germain	M. Bombelli	Mme Agnesi	Mme Theano
Multiplication des décimaux				
Technique opératoire (T.O.)	✓	✓	✓	✓
Démonstration ou justification de la T.O.	✓	✓	✓	✓
Estimation du produit	✓		✓	✓
Propriétés algébriques de la multiplication	✓	✓	✓	
Effet de la multiplication sur l'ordre	✓		✓	
Multiplication par un facteur inférieur à un	✓	✓	✓	✓
Multiplication par zéro ou par un				
Écritures des nombres				
Signification de l'écriture décimale	✓	✓	✓	✓
Changement d'unités du système décimal			✓	
Multiplication d'un décimal par 0,10,01 ; 0,001...	✓		✓	
Autres notations que l'écriture décimale	✓			
Situations multiplicatives				
Domaine numérique : isomorphisme (prix)	✓	✓	✓	✓
Géométrie : produit de mesure (aire de rectangle)				
Géométrie : opérateur (agrandissement)				
Géométrie : composition d'opérateurs				
Gestion de données : opérateur (pourcentage)				
Gestion de données : opérateur (diagrammes)				

Technique opératoire

Tous les professeurs ont traité la technique opératoire et tous l'ont « démontrée » ou au moins partiellement justifiée. De même, tous les professeurs ont traité le cas de la multiplication par un facteur inférieur à un. Ce cas particulier est important car il remet en cause le fait bien connu que la multiplication agrandisse, cette propriété est héritée du travail sur les entiers, elle est une source de nombreuses difficultés non moins connues.

Unanimité aussi des professeurs pour ne pas traiter la multiplication par 0 ou 1.

Trois professeurs sur quatre ont proposé à leurs élèves d'estimer le produit en utilisant les ordres de grandeur. La même proportion des professeurs a traité les propriétés algébriques de la multiplication. La moitié des professeurs a étudié l'effet de la multiplication sur l'ordre.

Écriture décimale

Tous les professeurs ont proposé des révisions concernant la signification de l'écriture décimale. Madame Germain est le seul professeur qui utilise une autre écriture des décimaux. Madame Agnesi est la seule à proposer des changements d'unité dans le système décimal. Ces deux professeurs ont traité spécifiquement le cas de la multiplication par 0,1, 0,01 etc qui, je vous l'ai indiqué tout à l'heure, pose des difficultés à environ la moitié des élèves à l'entrée en sixième.

Situations multiplicatives

En ce qui concerne les situations multiplicatives, on constate une unanimité complète des professeurs. Les seules situations étudiées sont, dans le domaine numérique, les situations d'isomorphisme de grandeurs et en fait seulement les problèmes de prix. Les autres situations que j'ai indiquées dans le tableau sont les situations au programme de la classe de sixième. Les professeurs ont donc préféré les aborder plus tard dans l'année.

b) La stratégie est plus personnelle mais les choix didactiques globaux convergent

Les stratégies d'enseignement diffèrent par leur chronologie. Monsieur Bombelli commence par exposer la technique opératoire qu'il justifie à l'aide d'opérateurs multiplicatifs, puis il propose des exercices d'application. Madame Theano introduit le calcul du produit de deux décimaux en utilisant les ordres de grandeurs, la méthode permet d'induire la technique opératoire. Suivent des exercices d'application et de calcul mental. Madame Agnesi commence par des problèmes de prix de marchandises, les produits de facteurs décimaux peuvent se calculer en effectuant des conversions. Les exemples ainsi fournis permettent d'induire la technique opératoire. Le reste de la séquence est consacré à des exercices d'application et à l'examen systématique des propriétés de la multiplication. Madame Germain pose d'entrée de jeu la question à ses élèves : « Comment calculer le produit de deux décimaux ? » Elle les laisse produire des règles efficaces sur certains cas particuliers. À la fin de la séquence, ces règles conduiront les élèves à l'élaboration de la technique usuelle. Dans cette diversité de stratégies, une certaine unité se dégage quant à l'introduction du nouveau savoir : pas de situation adidactique, pas de changement de cadre, pas de dialectique outil/objet. Ainsi, le constat déjà formulé par Jeanne Bolon se confirme : pas de reprise des ingénieries didactiques dans l'enseignement ordinaire. Pourtant, le scénario de Madame Germain contredit l'hypothèse selon laquelle le manque de reprise s'expliquerait par la volonté d'institutionnaliser au plus vite les savoirs visés par le programme.

c) Les tâches proposées aux élèves sont analogues sauf durant l'institutionnalisation

J'ai distingué trois types de tâches en fonction de leur objectif d'apprentissage : l'introduction du nouveau savoir, les exercices sur la multiplication de deux décimaux (c'est pourquoi sur le transparent j'ai indiqué « niveau collègue ») et l'institutionnalisation des savoirs.

Tâches prescrites	Mme Germain	M. Bombelli	Mme Agnesi	Mme Theano
Introduction du nouveau savoir				
Proposition de situation adidactique				
Cadres mobilisés	Numérique	Numérique	Numérique	Numérique
La multiplication est un objet de savoir	✓	✓	✓	✓
La multiplication est un outil de résolution de problème				
Problèmes contextualisés			✓	
Exercices proposés (niveau collège)				
Détermination d'un produit	75%	71%	50%	64%
- Par application de la technique opératoire	17%	14%	17%	09%
- Par un calcul mental ou raisonné	33%	43%	17%	00%
- Par un calcul approché ou par un encadrement	25%	14%	16%	55%
Questions théoriques	25%	29%	33%	18%
Problèmes issus de situations multiplicatives	00%	00%	17%	18%
Les phases d'institutionnalisation				
Mode d'intégration dans la séance	Bilan	Déclaration	B + D	B + Apport
Justification de la technique opératoire	✓	✓		
La présentation des propriétés comporte :				
- Un titre explicatif			✓	
- Une règle d'action contextualisée	✓	✓	✓	
- Un exemple numérique	✓	✓	✓	✓

Introduction de la multiplication des nombres décimaux

On remarque une unanimité presque parfaite des professeurs concernant l'introduction du nouveau savoir : pas de situation adidactique, pas de changement de cadre, pas de dialectique outil / objet. Seule Madame Agnesi propose des problèmes reposant sur une situation multiplicative. Mais la technique n'est pas construite en référence à cette situation.

Exercices de multiplication de deux décimaux

On note une homogénéité assez grande concernant les exercices proposés aux élèves. 50 à 75% sont des exercices de calcul du produit de deux décimaux. Cependant, les exercices ne sont pas majoritairement des applications techniques. Ces applications concernent un exercice sur cinq au maximum. Les autres sont des calculs raisonnés, des calculs approchés, des questions théoriques ou des résolutions de problèmes issus de situations multiplicatives.

Institutionnalisation des savoirs

Les phases d'institutionnalisation sont nettement contrastées. Madame Germain est le seul des professeurs à n'utiliser que le mode bilan pour présenter les nouveaux savoirs. Au contraire Monsieur Bombelli n'utilise que le mode déclaration. Entre ces deux pôles, Mesdames Agnesi et Theano institutionnalisent avec le mode bilan les savoirs directement liés à leurs stratégies d'enseignement et changent de mode pour les autres savoirs. Les quatre autres lignes du tableau confirment la variabilité des pratiques d'institutionnalisation. Elles montrent aussi que le mode d'intégration de ces phases est indépendant des choix concernant le contenu et la forme du cours.

Finalement, les résultats obtenus sur les projets des professeurs confirment les conclusions de la thèse de Jeanne Bolon : pas de reprise des ingénieries didactiques dans l'enseignement ordinaire. Les projets des professeurs observés sont convergents, sauf pour les phases d'institutionnalisation qui, paradoxalement, laissent supposer des activités différentes des élèves, notamment en ce qui concerne la construction des connaissances. Ce bilan contrasté soulève deux questions : les activités effectives des élèves sont-elles analogues dans les quatre séquences ? et l'hypothèse d'une divergence concernant la construction des connaissances se vérifie-t-elle ?

22. Analyse des déroulements, en classe, des scénarios prévus

D'abord je voudrais préciser que les séquences observées ont duré de 2h30 à 5h00 alors qu'aucun des professeurs n'a proposé de problèmes variés issus de situations multiplicatives. La durée estimée à partir des programmes est donc respectée.

21. Les activités sont plus variées que l'analyse des tâches ne le laissait prévoir

a) Analyse des activités classées par type

Le graphique suivant résume les résultats obtenus quant à la répartition des activités effectives classées par type. Sur l'axe horizontal figurent les sept types d'activités repérés par leurs initiales : REE, ETO, PC, MAC, CMCR, QT et SM.

Le graphique montre des ressemblances et des différences entre les séquences. Les différences s'expliquent par la stratégie d'enseignement.

- Les activités de révisions de l'école élémentaire sont plus nombreuses dans la séquence de Monsieur Bombelli, comme le sont aussi les activités PC. La stratégie de ce professeur est de présenter la technique opératoire et de la faire appliquer. De nombreuses questions, comme celle que j'ai présentée avec les interventions des élèves Maud et Raphaël sont rabattues à la technique opératoire.

- Les activités d'élaboration de la technique opératoire sont moins nombreuses dans la séquence de Madame Germain que dans celles de ses collègues. La stratégie de ce professeur est de laisser les élèves élaborer des petites règles pour faciliter le calcul de certains produits, ces petites règles devant les conduire à la technique opératoire. Ainsi, les activités des élèves étaient peu de type ETO et PC, jamais du type MAC ou SM mais beaucoup de calcul raisonné et de questions théoriques.

- Les graphiques de Mesdames Agnesi et Theano sont très proches. Ils se distinguent par les activités de type MAC et SM. La stratégie de Madame Agnesi est d'introduire la technique opératoire par des problèmes de prix de marchandises alors que Madame Theano fait placer la virgule en déterminant l'ordre de grandeur du produit, puis elle fait contrôler la position de la virgule avec la calculatrice.

Pour conclure l'analyse de ce graphique, on remarquera que la répartition des activités effectives des élèves donne une bien plus grande variabilité des pratiques des professeurs que celle qui était constatée en analysant les tâches prescrites. Cela montre que l'accompagnement en classe est déterminant sur l'activité des élèves. Et cela s'explique par le fait que les professeurs, pendant le déroulement, modifient sensiblement les exercices choisis dans le manuel (par exemple en posant des questions complémentaires). Généralement ces questions tendent à renforcer leur stratégie d'enseignement.

b) Analyse des activités entre construction et application des connaissances

Une question reste posée quant aux activités de construction des connaissances. Nous avons remarqué une variabilité importante des modes d'intégration des phases d'institutionnalisation qui laissait supposer des différences, entre les séquences concernant ces activités.

J'ai donc regroupé, d'une part les activités pour lesquelles les élèves doivent appliquer une technique apprise et, d'autre part, celles qui les conduisent à enrichir leurs connaissances (soit parce qu'ils découvrent de nouvelles propriétés de la multiplication, soit parce qu'ils sont confrontés à un problème pour lequel ils ne disposent pas de méthode de résolution déjà établie).

Le tableau ci-dessous confirme l'hypothèse.

	Mme Germain	M. Bombelli	Mme Agnes	Mme Theano
Construction de connaissances	80%	20%	53%	44%
Application de connaissances	20%	80%	47%	56%

80% d'activités de construction des connaissances dans la séquence de Madame Germain contre 20% dans celle de Monsieur Bombelli. Environ 50% dans les séquences de Madame Agnesi et Madame Theano. Les séquences de Madame Germain et de Monsieur Bombelli constituent deux pôles opposés d'un axe où la classe est soit un lieu de « construction du savoir », soit un lieu « d'exposition et d'application du savoir ». Les séquences de Mesdames Agnesi et Theano occupent des positions médianes sur cet axe.

Après les activités effectives des élèves, je vais aborder maintenant les adaptations des professeurs en classe.

22. Étude des adaptations des professeurs

Les adaptations sont composées d'un incident, de sa place par rapport au scénario prévu et de sa gestion par le professeur. Commençons par examiner les incidents qui surviennent en classe.

a) Analyse des incidents

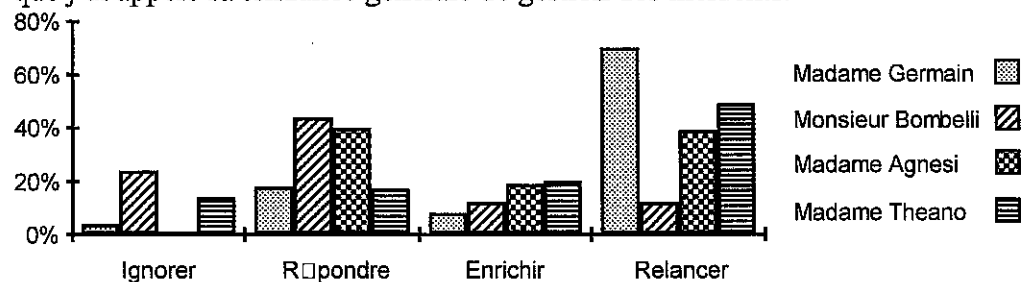
Le tableau indique la répartition des incidents suivant les séquences. Pour cette présentation, je n'ai retenu que les trois incidents que j'ai illustrés précédemment parce qu'ils sont les plus nombreux. Cela explique pourquoi le total de chaque colonne n'est pas égal à 100%. La dernière colonne indique les résultats pour l'ensemble des professeurs.

	Mme Germain	M. Bombelli	Mme Agnesi	Mme Theano	Ensemble
Erreur	27%	28%	21%	26%	25%
Question	16%	32%	15%	20%	18%
Incomplet	36%	16%	49%	36%	38%

On constate que la fréquence des erreurs est la même dans toutes les classes mais que ce n'est pas le cas des autres incidents. Ainsi les questions sont plus nombreuses dans la classe de Monsieur Bombelli et les réponses incomplètes sont plus rares. En revanche, elles sont plus nombreuses dans la classe de Madame Agnesi. Cette différence montre une divergence pédagogique : les élèves de Monsieur Bombelli doivent formuler des réponses plus abouties que ceux de Madame Agnesi. Quand ils ne savent pas, au lieu de répondre de façon incomplète, les élèves de Monsieur Bombelli questionnent leur professeur. On retiendra finalement, pour deux professeurs, une influence personnelle sur les incidents qui émergent durant leur séquence.

b) Analyse de la gestion des incidents

Le graphique ci-dessous montre la répartition des différents modes de gestion des incidents en fonction des professeurs observés. Pour chaque professeur, cette répartition correspond à ce que j'ai appelé sa tendance générale de gestion des incidents.



L'observation globale montre que les professeurs gèrent tous de manière différente, les incidents qui surviennent dans leur classe. La gestion de Madame Germain est la plus ouverte : elle relance l'activité des élèves dans plus de 70% des cas. A l'opposé, la gestion de

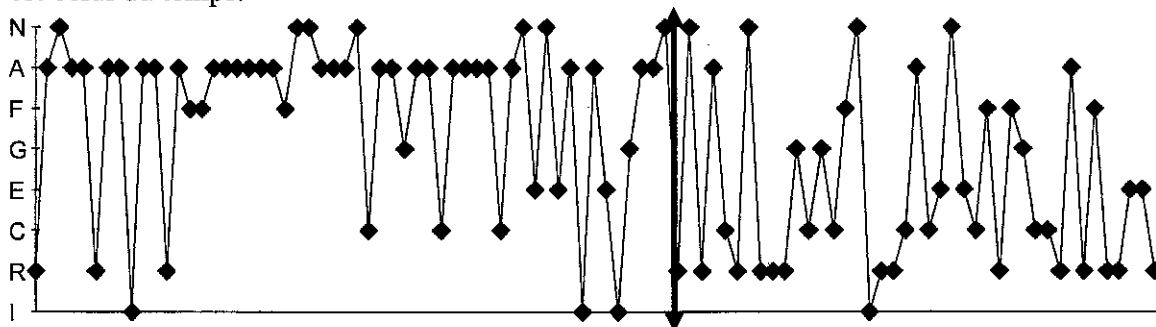
Monsieur Bombelli est très fermé puisque dans 70% des cas, il ignore l'incident ou il fournit la réponse attendue. Entre les deux, se situent les tendances générales de gestion des incidents de Mesdames Agnesi et Theano.

Je me suis demandé si les professeurs modifient leur tendance générale de gestion des incidents en fonction de la nature des incidents, en fonction des activités des élèves ou en fonction du temps passé depuis le début de la séquence. Les résultats sont très variables suivant les professeurs.

Quelle que soit leur nature, M. Bombelli suit parfaitement sa tendance générale de gestion des incidents. Mme Agnesi et Mme Theano l'adaptent mais elles effectuent des choix opposés : Mme Agnesi relance davantage lors des réponses incomplètes alors que Mme Theano relance davantage lors des erreurs. Cette différence de gestion ne semble pas neutre sur l'apprentissage en référence à la notion de « zone proximale de développement » définie par Vygotski. Mme Germain, quant à elle, relance davantage, à la fois lors des réponses incomplètes et des erreurs.

Mme Agnesi ni Mme Theano ne modifient leur gestion des incidents suivant les activités des élèves. En revanche, M. Bombelli et Mme Germain radicalisent leur gestion durant les activités qui concernent directement leur stratégie.

Enfin, alors que le temps qui passe ne semble pas modifier la gestion des incidents par Mme Theano ou M. Bombelli, on remarque chez Mmes Agnesi et Germain une nette fermeture de la gestion dès le début de la séance qui suit la mi-temps de la séquence. C'est ce que montre le graphique ci-dessous correspondant à la classe de Mme Germain où les modes de gestions apparaissent par ordre d'ouverture croissante sur l'axe des ordonnées et où l'axe des abscisses est celui du temps.



En conclusion, les adaptations sont très variées, cette pratique apparaît donc comme étant peu contrainte. Les professeurs investissent cette marge de manœuvre en fonction de leur conception sur l'apprentissage et de la stratégie d'enseignement prévue.

Finalement, la diversité des pratiques enseignantes concerne à la fois les activités induites chez les élèves, et les adaptations des professeurs. Ces résultats sont tout de même surprenants quand on se rappelle la convergence des projets. C'est ce problème que j'ai choisi d'aborder afin d'illustrer ce qu'apporte la dimension ergonomique de la double approche des pratiques.

23. Des apports de la double approche

Pour chaque choix convergent des professeurs, je me suis demandé à quelle nécessité professionnelle ce choix répondait. J'ai abouti à quelques hypothèses, que j'ai appelées « principes » dans la thèse, car tout se passe comme si ces principes étaient respectés par les professeurs. Puis j'ai montré ce qu'apporte l'hypothèse de cohérence des pratiques.

a) Des principes d'élaboration du scénario de la séquence

La régularité des scénarios montre d'abord un principe de conformité au programme officiel. Les professeurs respectent le contenu du programme, ils en respectent aussi le rythme. Je pense que cette conformité assure une légitimité professionnelle aux enseignants.

Puis deux principes permettent de mieux comprendre les choix convergents des professeurs pour délimiter le champ mathématique. J'ai montré comment les principes d'efficacité pédagogique et de clôture du champ mathématique conduisent à écarter, autant que possible, les contenus qui risquent de provoquer des questions que le professeur ne souhaite pas aborder. Le professeur garantit ainsi une ligne directrice forte. Elle lui permettra de rester dans ce que Janine Rogalski appelle l'enveloppe des trajectoires acceptables du déroulement.

Enfin deux autres principes pour élaborer une stratégie d'enseignement.

J'ai montré que la nécessité de succès d'étape et le respect de l'attente des élèves sont deux principes qui permettent au professeur de donner en classe un sentiment de réussite et de progrès dans l'apprentissage. Ce sentiment assure au professeur un climat suffisamment serein pour permettre à la classe de fonctionner.

Les projets élaborés par les enseignants doivent donc tenir compte des indications des programmes (concernant le contenu et le rythme) mais aussi de nécessités liées à la gestion d'une classe. Ces deux éléments de l'exercice du métier semblent expliquer la convergence des projets des professeurs observés malgré les différences importantes constatées dans les déroulements.

b) L'hypothèse de cohérence des pratiques conduit à distinguer deux pôles

Ce constat simultané de régularité et de variabilité des pratiques enseignantes pose la question de leur cohérence pour chaque professeur. Cette question m'a conduit à mener des analyses de chaque séquence en croisant les différents résultats recueillis. Ces croisements m'ont permis de repérer des dimensions qui donnent une cohérence aux pratiques.

La conception de la classe est une source de cohérence

On a remarqué souvent l'opposition entre la séquence de Monsieur Bombelli et celle de Madame Germain. Ce qui oppose ces professeurs semble tenir à leur conception de la classe : un lieu d'exposition et d'application du savoir pour Monsieur Bombelli ou bien, pour Madame Germain, un lieu de construction du savoir par les élèves. Ainsi, cette dimension donne une cohérence aux pratiques.

- Dans la première classe l'exposition des savoirs a lieu très tôt, les activités effectives sont surtout des applications, les incidents sont plutôt des questions ou des erreurs et leur gestion relance rarement l'activité des élèves.

- Dans la seconde, le savoir est institutionnalisé assez tard comme un bilan, les activités de recherche dominant, la gestion des incidents relance l'activité des élèves.

La référence à la stratégie d'enseignement est une autre source de cohérence

On a remarqué en effet que les activités effectives des élèves sont plus ou moins valorisées, qualitativement et quantitativement, conformément à la stratégie d'enseignement. En outre, deux professeurs modifient leur mode de gestion des incidents lorsque la stratégie est concernée.

Les contraintes obligent les professeurs à des compromis

La recherche de cohérence a aussi fait apparaître quelques contradictions que j'interprète en terme de compensation. En voici trois exemples.

- Madame Agnesi laisse émerger plus d'incidents que ses collègues mais son mode de gestion est plus fermé que ceux de Mmes Germain et Theano.

- Mmes Theano et Germain, plus que leur collègue, utilisent le mode bilan pour les institutionnalisations ; cependant leur gestion est plus fermée lors de ces phases.

- Mmes Agnesi et Germain ont les séquences les plus longues ; pourtant leur gestion se ferme passé la première moitié de la durée prévue.

Ces trois exemples de compensations relèvent de compromis liés à des situations de régulation. Ils n'infirmant donc pas l'hypothèse selon laquelle les pratiques enseignantes de chaque professeur forment un système cohérent.

Conclusion

Je voudrais maintenant conclure cette présentation de ma thèse en soulignant les apports qui me semblent essentiels.

Avant de commencer ce bilan de mon travail, je tiens à signaler que j'ai bien conscience des limites de cette recherche. D'abord elle ne prend pas du tout en compte certains niveaux d'analyse des pratiques (notamment le niveau psychologique). Ensuite, et c'est ce qui m'invite à la prudence pour annoncer mes résultats, malgré tout le soin que j'ai apporté à l'analyse des pratiques des professeurs que j'ai observés, mon travail possède les limites d'une analyse clinique. Ces résultats portent sur les pratiques de seulement quatre enseignants. Il faudrait bien sûr évaluer, avec d'autres moyens, leur pertinence sur une population plus importante.

Néanmoins, cette recherche a permis d'apporter quelques résultats importants. Les régularités constatées montrent que les professeurs observés partagent certaines pratiques. Ce que les professeurs ont de commun se rattache plutôt à un aspect social du métier. Les contraintes de l'institution scolaire et celles qu'impose la gestion d'une classe influent directement sur les pratiques enseignantes. Cependant, j'ai montré une diversité de ces pratiques. Les professeurs investissent les marges de manœuvre qui existent par delà les contraintes. Cette diversité concerne tant les activités induites en classe chez les élèves que les adaptations des professeurs. La diversité des pratiques se rattache donc à quelque chose de personnel, plutôt en rapport avec les conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement.

Avant de terminer, je voudrais indiquer quelques perspectives à l'issue de ce travail. D'abord revenir sur « l'indifférence » des enseignants aux travaux menés en didactique des mathématiques et faire le lien avec la recherche et la formation. Sans doute les professeurs tirent difficilement parti des résultats de la recherche parce que les ingénieries bousculent les pratiques ordinaires, dans leur aspect partagé, social. Il reste aux chercheurs à explorer davantage ce ciment des pratiques qui constitue le métier d'enseignant. Les ouvertures en formation tiendraient, d'une part à l'accompagnement de l'évolution de la profession lorsque des décisions viennent à en changer les contraintes (on peut penser à l'ATPE, l'AI ou aux TPE), et d'autre part à l'élaboration de stratégies visant à modifier localement un système de pratiques dans le but d'optimiser l'apprentissage des élèves. Et cela sachant que la cohérence de ce système lui assure une certaine stabilité.

Finalement, le travail que j'ai mené sur les pratiques, participe à la recherche entreprise par notre communauté, sur le pôle enseignant du système didactique. Par sa problématique et les méthodes utilisées, ma thèse rejoint l'ensemble des travaux de l'équipe d'Aline Robert. Elle enrichit, me semble-t-il, les résultats déjà obtenus, par des exemples tirés d'analyses fines des activités des professeurs, je pense notamment à l'élaboration des principes de préparation des cours ou à l'étude des incidents et de leur gestion. D'une part, ma thèse illustre la cohérence du système des pratiques de chaque enseignant. D'autre part, elle permet de dégager plus précisément ce qui est variable, et qui tient aux personnes, de ce qui est partagé par tous, qui tient aux contraintes mais peut-être aussi, plus largement, au métier.

Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions

Butlen Denis

IUFM de Créteil, Equipe DIDIREM, université de Paris 7

Ngono Bernadette

IUFM de Rouen, Equipe DIDIREM, université de Paris 7

Peltier Marie-Lise

IUFM de Rouen, Equipe DIDIREM, université de Paris 7,

Pezard Monique

IUFM de Créteil, Equipe DIDIREM, université de Paris 7

Il est devenu impossible, à nos yeux, dans le cadre du développement des recherches sur l'enseignement des mathématiques, d'ignorer les problèmes spécifiques posés par l'enseignement en REP. Citons à titre d'exemples deux indices particulièrement révélateurs. D'une part, les évaluations nationales mettent en évidence en REP des résultats, en terme d'apprentissage des élèves, plus faibles qu'ailleurs. D'autre part, le peu de demandes d'affectation sur des postes en REP, et l'instabilité chronique de nombreuses équipes pédagogiques témoignent des difficultés rencontrées par les professeurs pour enseigner dans ces milieux difficiles.

Dans cet exposé, nous contribuons à montrer comment et pourquoi l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP nous amène à nous inscrire dans un cadre théorique plus large que celui de la didactique des mathématiques et à mettre en œuvre une méthodologie adaptée tout en évoquant également quels pourraient être les apports de ces recherches à la réflexion générale sur l'enseignement des mathématiques.

1. Problématique et cadre théorique

Nos recherches s'inscrivent dans la problématique très générale des liens entre enseignement et apprentissage. Nous souhaitons contribuer à élucider ces liens dans le cas particulier de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire dans des zones dites sensibles (REP/ZEP) par des professeurs polyvalents.

1.1 Cadre théorique, problématique et méthodologie générale

Ces recherches ont pour but de contribuer à définir les contraintes qui s'exercent sur les professeurs d'école enseignant dans les milieux difficiles, à mettre en évidence d'éventuelles régularités dans les pratiques observées relatives à l'enseignement des mathématiques, tout en pointant des singularités, symptômes des éventuelles marges de manœuvres restantes. Il s'agit de recherches de type clinique dans le sens où nous étudions un nombre limité de cas en détail et sur un temps long. Nous nous intéressons aux logiques qui sous-tendent les choix des professeurs et les pratiques qu'ils mettent en œuvre. Les résultats obtenus n'ont donc pas de prétention statistique.

Ces recherches pourraient contribuer à moyen terme à construire pour les maîtres des outils spécifiques susceptibles d'être proposés en formation afin d'améliorer les apprentissages des élèves ainsi que les conditions d'exercice du métier d'enseignant.

Nos diverses analyses mettent en évidence des différences entre "les mathématiques à enseigner" définies par les textes officiels, "les mathématiques proposées aux élèves" par les enseignants et celles "potentiellement ou effectivement fréquentées" par ceux-ci. Plusieurs facteurs interviennent pour expliquer ces différences. Certains sont liés à la nature des savoirs, aux transpositions effectuées et relèvent donc d'études épistémologiques et anthropologiques ; d'autres relèvent des élèves. D'autres enfin concernent les enseignants, autrefois considérés dans les analyses didactiques comme maillons quasi-transparents entre les savoirs et les élèves.

Pour cerner les différences entre mathématiques proposées et mathématiques effectivement fréquentées par les élèves, nous utilisons les travaux de Leplat, développés par J. Rogalski (2000) qui soulignent et étudient les différences entre tâche prescrite, tâche attendue, tâche effective et entre tâche et activité, tant du côté de l'élève que de celui du maître. Elles nous permettent notamment de mettre en évidence une grande diversité dans les mathématiques fréquentées effectivement par chaque élève en particulier. Nous distinguons ce qui relève du "particulier" ou de l'individu de ce qui relève du "générique" ; nous désignons par l'expression "mathématiques potentiellement fréquentées par les élèves" les éléments qui relèvent du générique.

Les effets éventuels des pratiques sur les apprentissages potentiels des élèves sont étudiés dans le cadre de la didactique des mathématiques et prennent en compte les résultats de recherche sur les élèves en difficulté, notamment ceux de M.J. Perrin-Glorian (1992), D. Butlen et M. Pézard (1992 et 1999) développés dans ce cadre.

Les analyses didactiques sur l'enseignant se sont largement développées depuis plusieurs années et c'est dans ce courant que nous inscrivons notre travail en contribuant à décrire les pratiques effectives des enseignants considérés comme des professionnels exerçant un métier. Nous sommes donc amenés à utiliser des résultats de recherches en ergonomie cognitive et en didactique professionnelle. En nous appuyant notamment sur les travaux de P. Pastré (1996), nous faisons l'hypothèse que les pratiques mettent en jeu deux systèmes de pensée, un issu de l'action, l'autre issu de connaissances, qui interagissent, se complètent mais peuvent aussi entrer en compétition, voire en contradiction.

Nous retenons également des recherches en ergonomie et de certains travaux de didactique (de différentes disciplines) ou de sciences de l'éducation, notamment ceux de A. Robert (2001), R. Goigoux (2000), et de façon plus implicite ceux de C. Blanchard Laville et S. Nadot (2001), deux caractéristiques essentielles des pratiques enseignantes : leur grande complexité et leur cohérence.

De nombreux facteurs interviennent dans les pratiques effectives des enseignants et rendent difficiles leur étude mais nous pensons toutefois pouvoir mettre en évidence des régularités à la fois intrapersonnelles et interpersonnelles et les modes de singularisation de ces dernières, qui sont pour nous la manifestation d'une cohérence en construction chez les débutants ou stabilisée après quelques années d'exercice.

Pour à la fois accéder à la complexité et être sensibles à la cohérence des pratiques, nous utilisons, en l'adaptant à notre public et à notre problématique, une méthodologie d'analyse des pratiques des professeurs proche de celle proposée par A. Robert (2001). Cette méthodologie consiste à lire les pratiques de l'enseignant à partir d'observations de classes, de transcriptions, complétées éventuellement par d'autres éléments, selon cinq "composantes" : une composante cognitive, une composante médiative, une composante personnelle, une composante sociale et une composante institutionnelle.

La composante cognitive concerne l'organisation des savoirs, à court, moyen ou long terme, prévue par l'enseignant, les scénarios associés, les itinéraires cognitifs prévus pour les élèves. Elle concerne également les mathématiques potentiellement ou effectivement pratiquées pendant la classe. Il est nécessaire pour l'étudier de recueillir des informations à la fois sur le

projet de l'enseignant (fiches de préparation, ressources pédagogiques, etc.) et sur sa mise en œuvre (observations transcriptions, productions d'élèves).

Dans la composante médiative nous regroupons plusieurs éléments :

- le discours du professeur et les modes d'interactions en classe des différents acteurs à propos à la fois de contenus mathématiques et de comportements en précisant comment l'enseignant organise dans sa classe les médiations entre les élèves, lui et le savoir (dévolution des tâches, discours d'accompagnement, modalités d'aides, prise en compte des élèves).
- les actes du professeur, notamment les gestes professionnels, voire ce que certains qualifient¹ de « routines » qui accompagne les interventions du maître.

La composante personnelle comporte les éléments concernant les conceptions des professeurs sur les mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage. Nous y incluons l'histoire personnelle du professeur en tant qu'élève, stagiaire, professeur titulaire, du moins celle que nous pouvons reconstituer sans faire appel aux outils de la psychanalyse. Elle regroupe également des éléments relatifs aux conceptions du professeur sur le public auquel il s'adresse (niveau de compétence supposé, connaissances et comportements attendus, apprentissages envisagés, etc.)

La composante sociale contient des éléments de réponses à des questions posées par l'environnement social de l'école. Divers travaux (Bourdieu & Passeron 1970, Charlot 1992, B. Lahire 1993) ont montré que l'origine socio-économique et culturelle des élèves de quartiers défavorisés avait une incidence directe ou indirecte sur leur rapport à l'école et leur rapport au savoir et intervenait dans les processus d'apprentissage. L'influence de ces facteurs culturels et sociaux est relativement difficile à cerner. De plus, la multiplicité des cultures d'origine des élèves accroît les risques d'interprétations erronées. Il est indéniable que le milieu social dans lequel se situe l'école assujettit les professeurs à de nombreuses contraintes qui peuvent peser fortement sur leurs pratiques.

Dans la composante institutionnelle, nous répertorions ce qui semble être des effets sur les pratiques des diverses contraintes institutionnelles. Les pratiques des maîtres sont marquées par les institutions des différents niveaux de la hiérarchie du système éducatif : le ministère de l'éducation nationale (programmes, horaires, projets divers, etc.), l'Académie (politique rectorale des REP), la circonscription (moyens, encadrement, valorisation éventuelle de certaines écoles), le REP (projet spécifique, équipe éducative, formation), l'école et son équipe pédagogique (poids de la direction, choix des manuels scolaires, présence de structures d'aide spécialisée, stabilité et ouverture de l'équipe pédagogique), la classe (nombre d'élèves, qualité des locaux, matériel disponible).

Ces deux dernières composantes nous permettent d'approcher la manière dont les enseignants assument et négocient leur assujettissement aux contraintes sociales et institutionnelles. Par cette négociation implicite, chaque professeur se détermine ainsi une certaine marge de manœuvre. L'investissement de cette marge se définit à l'aide d'éléments relevant des trois premières composantes. Nous analysons ainsi comment, sous ces contraintes, les professeurs élaborent des itinéraires cognitifs pour leurs élèves ainsi que la manière dont ils interagissent avec eux tant au niveau du savoir que des comportements. Nous éclairons certains de ces choix en nous référant à des éléments de leurs conceptions sur leur rôle, le public auquel ils s'adressent, les mathématiques, etc.

Ce cadre méthodologique nous aide ainsi à restituer en partie la cohérence et la complexité des pratiques effectives, lues comme réponses à un certain nombre de contradictions auxquelles les professeurs se trouvent confrontés.

1.2 Méthodologie de recueil des données

¹ La 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques (2001, Corps, France) a consacré une partie de son travail à une étude prospective des « routines et régularités » dans la pratique enseignante.

Il est difficile d'entrer dans les classes des zones sensibles pour y conduire des observations. Les chercheurs se trouvent dans la nécessité de recueillir des informations sur un temps long afin de pouvoir appréhender la complexité du travail des professeurs enseignant dans ces classes.

Nous avons de ce fait mis au point une méthodologie de recueil et de traitement des données en deux temps afin d'éviter d'"écraser" cette complexité, tout en nous donnant les moyens par la suite d'affiner les premières analyses.

La première phase a consisté en une immersion la plus importante possible dans le milieu d'observation. Il s'agissait de repérer les contraintes et les conditions de l'exercice du métier d'enseignant en ZEP et de pointer un certain nombre de phénomènes qui apparaissent régulièrement sur un temps relativement long chez le même enseignant ou chez plusieurs. Nous avons pris appui sur la méthodologie couramment désignée par l'expression « observation directe à découvert et participante » pratiquée en sociologie² pour analyser les pratiques. Ce mode d'investigation s'oppose aux analyses statistiques, il privilégie l'induction. Les constats sont au départ très fortement contextualisés, il faut donc se garder de généralisations immédiates. Il s'agit de restituer les logiques des acteurs, de rechercher la cohérence des comportements, notamment en prenant en compte le contexte et les contraintes auxquelles ceux-ci sont soumis.

Pour nous il s'agit d'une part "d'aller voir sur place" ce qui se passe au quotidien dans les classes, d'être physiquement présents pour regarder se dérouler les séances en temps réel dans le but de prendre en compte le maximum d'informations et de les analyser. Pour être particulièrement attentifs à ne pas mobiliser inconsciemment nos propres catégories de pensée pour conduire l'observation et l'analyse, nous avons mené de nombreuses séances de confrontation entre chercheurs.

Cette observation s'est par ailleurs accompagnée d'une certaine participation de notre part. Ainsi à Rouen, nous avons accepté de participer, sur la demande des enseignantes³ de l'école, à la mise en place d'un projet d'ateliers de "jeux mathématiques", projet qu'elles avaient envisagé pour répondre aux difficultés récurrentes des élèves. Il s'agissait d'un détour puisque, a priori, nous souhaitions principalement étudier ce qui se passe pendant les heures ordinaires. Nous nous sommes en fait trouvés confrontés à un phénomène assez caractéristique de l'enseignement dans des classes difficiles : de nombreux maîtres ont la conviction qu'en proposant aux élèves des situations un peu "extraordinaires", ils arriveront à les motiver davantage. Ce phénomène est en lui-même particulièrement intéressant à étudier. Cette aide à l'élaboration et au suivi du projet des enseignantes s'est concrétisée sous forme de séances de travail en commun au cours desquelles nous avons apporté un certain nombre d'informations mathématiques et didactiques ainsi que des propositions d'activités dans le but d'articuler les séances consacrées aux jeux et les séances ordinaires.

A Créteil, tout en observant des séances « ordinaires », nous avons analysé les conditions de reproductibilité et d'appropriation par des professeurs d'école débutants de certaines situations issues d'ingénieries testées lors de recherches antérieures sur les élèves en difficultés en mathématiques.

Cette première phase d'investigation nous a permis de pointer chez les enseignants que nous avons observés un certain nombre de phénomènes récurrents que nous pouvons résumer ainsi :

² Cette méthode, issue de l'école de Chicago, est apparue en France après la guerre sous l'impulsion de G. Friedmann. D'après les sociologues, l'observation directe paraît particulièrement adaptée à l'observation de situations mettant en scène un ensemble fini et convergent d'interactions, de groupes de personnes ayant une activité particulière, des pratiques communes ou faisant partie d'une même institution². De ce fait cette méthode semblait pouvoir être retenue pour notre étude des pratiques de professeurs d'école enseignant en ZEP.

³ Enseignantes titulaires ayant une ancienneté de 4 à 7 ans.

- la nécessaire gestion d'une violence effective ou d'une inhibition patente des élèves qui pèse sur pratiquement tous les choix des maîtres sur le plan didactique et pédagogique conduisant à un évitement de tout ce qui pourrait engendrer des conflits, en particulier le traitement de questions mathématiques un peu consistantes,
- des glissements dans les consignes qui modifient, simplifient ou dénaturent la tâche initialement prescrite aux élèves,
- une individualisation du travail pour éviter les phases collectives jugées très difficiles à gérer, individualisation conduisant à une absence quasi systématique de phases d'institutionnalisation.

A partir de ces premiers résultats, nous avons mis au point la deuxième phase de notre travail en étudiant avec la méthodologie générale que nous avons présentée ci-dessus le corpus recueilli constitué de transcriptions de séances effectives, de productions d'élèves associées, de jeux mathématiques réalisés, de questionnaires écrits adressés aux enseignants, de transcriptions d'entretiens et de séances de travail.

1.3 Le public observé

Les classes observées sont des classes de REP des académies de Créteil et de Rouen : 5CP, 1CE2, 1CM1, 1CM1 /CM2, 2CM2. Parmi les dix enseignants qui ont accepté de nous recevoir dans leur classe, trois sont débutants, les autres ont entre 5 et 10 ans d'ancienneté.

Ces classes regroupent des élèves issus de milieux particulièrement défavorisés. De nombreux enfants, mêmes très jeunes peuvent être violents ou au contraire très inhibés. Des règles de vie et de comportement « de la rue » font souvent irruption dans le champ scolaire. Les conditions de vie des élèves, très défavorables, se révèlent souvent contradictoires avec le « métier d'élève ».

2. Résultats

2.1 Des contradictions

Quel que soit le degré de cohérence, les pratiques observées sont le résultat de compromis entre les contraintes sociales, institutionnelles et cognitives qui pèsent sur chaque professeur et les conceptions personnelles de chacun.

Ces compromis engendrent des contradictions auxquelles sont confrontés les professeurs des écoles de REP. Nous en avons relevé cinq qui traversent les pratiques de tous les professeurs observés.

2.1.1 Contradiction entre logique de socialisation des élèves et logique des apprentissages

Les enseignants de REP, sans doute plus que d'autres, pensent qu'ils doivent assurer une double fonction d'éducateur et d'enseignant. En effet, le public d'élèves auxquels ils s'adressent comporte un nombre important d'enfants souvent violents ou au contraire très "inhibés" qui n'adhèrent pas facilement à la culture de l'école. Les professeurs se sentent donc contraints, sans doute à juste titre, de faire un travail de socialisation, de développement de l'autonomie et du respect des autres qu'ils considèrent comme fondamental et préalable à toute forme d'enseignement. Cet effort d'éducation et le temps qui lui est consacré entrent en concurrence avec le nécessaire enseignement de contenus. Cette concurrence se situe à deux niveaux, l'un relatif à l'antériorité ou à la simultanéité des versants enseignement et éducation que comporte le métier de professeur, l'autre relatif à la gestion du temps dans la classe. En effet, pour certains professeurs d'école le travail de socialisation est un préalable à toute

forme d'enseignement. Ces enseignants ne croient pas qu'il soit possible de socialiser les élèves par des activités d'apprentissage disciplinaires bien choisies et bien menées, ils pensent qu'il est indispensable de travailler préalablement sur les règles de vie et les comportements attendus à l'école. D'autre part la résistance quotidienne que manifestent beaucoup d'enfants à entrer dans le jeu de l'école se concrétise souvent par une prise de pouvoir des élèves notamment sur la gestion du temps. Nous avons très souvent constaté que les maîtres sont amenés à interrompre très rapidement une activité mathématique pour gérer les conflits et ne peuvent pas toujours la reprendre. Ceci peut aller jusqu'à conduire certains élèves à provoquer des conflits essentiellement dans le but de contraindre le maître à stopper les activités d'apprentissage. Mais, dans tous les cas, le travail interrompu semble n'avoir laissé aucune trace et est donc à reprendre intégralement plus tard.

2.1.2 Contradiction entre logique de la réussite immédiate et logique de l'apprentissage

Les enseignants observés ont le souci constant d'encourager les élèves, de les « rassurer », de créer ainsi un climat de confiance « cognitif » et « comportemental » sans lequel, d'après eux, les élèves ne peuvent entrer dans une dynamique d'apprentissage. Cela se traduit notamment pour la majorité d'entre eux par un aplanissement des difficultés, une simplification des tâches, une prédominance d'activités algorithmiques, un étayage très important, et l'attribution presque systématique d'évaluations positives (bonnes notes ou encouragements parfois même excessifs). Les maîtres et les élèves se trouvent ainsi dans une sorte de cercle vicieux : les maîtres simplifient les tâches qu'ils donnent aux élèves pour qu'ils réussissent, les élèves exécutent la tâche sans l'investir réellement dans un but d'apprentissage et ne construisent pas nécessairement les connaissances visées. Or si ces connaissances sont nécessaires à l'exécution de tâches ultérieures⁴, les enfants échouent et les maîtres simplifient à nouveau les nouvelles tâches ou même redonnent des tâches initiales. Plus le temps passe, moins les enfants investissent les activités proposées auxquelles ils ont de plus en plus de mal à donner un sens. Les maîtres comme les élèves donnent et se donnent peut-être ainsi l'impression de réussir les uns à enseigner, les autres à apprendre. Les partenaires de la relation didactique s'installent dans une logique de réussite à court terme plutôt que d'apprentissage à moyen et long terme et diffèrent ainsi en partie, sans doute inconsciemment, la question de l'échec.

2.1.3 Contradiction entre individuel, public et collectif

Les enseignants observés oscillent souvent entre une gestion individuelle, publique ou collective des activités qu'ils proposent. Deux types de pratiques dominantes se distinguent parmi les professeurs observés. Certains individualisent totalement les apprentissages. Ceci se traduit dans les scénarios par une disparition quasi systématique des phases collectives de synthèse et d'institutionnalisation. Les enseignants concernés les remplacent soit par des corrections individuelles soit par des corrections que nous qualifions de publiques mais qui ne concernent que quelques élèves, choix argumenté par le fait qu'aucun élève n'en est au même point. De même pour la gestion des comportements difficiles, ils ne font pas référence à des règles de vie collective, mais rappellent publiquement à l'ordre les élèves concernés et n'hésitent pas à interrompre, voire abandonner, l'activité pour tous. Ce type de pratiques nous semble compromettre la construction d'un ensemble de savoirs de référence communs et d'une histoire collective de la classe. D'autres professeurs proposent une mise au travail collective soit par ostension d'un objet, d'une notion, soit par manipulation de divers matériels, soit par une forme de maïeutique. Cette phase est souvent considérée par les enseignants comme le

⁴ concernant la même notion ou des notions du même champ conceptuel.

moment clef où les élèves vont s'approprier le "savoir nouveau" par imitation, par perception, par analogie, ou du moins où ils vont comprendre ce qu'ils auront à faire juste après. Nous utilisons ici le terme d'activité collective, car au cours de cette phase, le maître interroge généralement l'ensemble de la classe qui est censée être à l'écoute et glane les réponses attendues auprès de différents élèves. Cette phase collective est généralement suivie d'un travail individuel qui a pour but d'entraîner les élèves à exécuter une tâche analogue et éventuellement d'évaluer leur degré de d'assimilation du "savoir nouveau". La phase de correction différencie ici les maîtres, certains proposant une correction publique, d'autres individuelle, d'autres une simple évaluation individuelle, parfois différée. Seul un professeur parmi tous ceux observés adopte une stratégie différente qui consiste d'une part à développer les apprentissages individuels dans le cadre d'apprentissages collectifs et d'autre part à gérer plutôt collectivement les comportements difficiles en rappelant les règles de vie de la classe. Cette gestion se fait difficilement mais les séances de mathématiques bien que fréquemment interrompues, sont conduites à leur terme dans un temps acceptable.

La contradiction entre individuel et collectif se retrouve aussi au niveau du fonctionnement de l'équipe pédagogique. L'instabilité chronique des équipes, une trop faible prise en compte collective des problèmes généraux de comportements au niveau de l'école, une relative absence de choix pédagogiques collectifs conduisent souvent les maîtres à faire face individuellement et non collectivement aux difficultés qu'ils rencontrent. Ceci a pour effet de les fragiliser et de conduire les élèves à accentuer leurs différences de comportements en fonction des caractéristiques personnelles des enseignants (sexe, âge, présentation, etc.).

2.1.4 Contradiction entre une logique de projet et une logique d'apprentissage

Suivant en cela les orientations ministérielles, les professeurs observés cherchent à mettre en place des « projets innovants » avec l'objectif prioritaire de socialiser et de « motiver » leurs élèves. Des heures spécifiques sont réservées au « projet » dans l'emploi du temps, mais peu de liens sont envisagés entre ces projets et l'"ordinaire" de la classe et peu d'évaluations en terme d'apprentissage pour les élèves sont conduites relativement au projet.

Nous constatons par ailleurs une obsolescence rapide des projets mis en place et la recherche constante de nouveaux projets que nous pourrions caractériser comme une sorte de « course à l'innovation ».

2.1.5 Contradictions entre le temps de la classe et le temps d'apprentissage

Les enseignants observés sont conduits à privilégier un traitement instantané des apprentissages comme des comportements au détriment d'un traitement dans la durée. Ceci nous semble lié à la logique de la "réussite" dans laquelle ils s'installent. Ils évitent de travailler plusieurs jours de suite sur un même objet de savoir par crainte de lasser leurs élèves. Le savoir est ainsi découpé en micro tâches qui sont proposées à plusieurs jours d'intervalle sans que des liens soient clairement identifiables et identifiés entre les différentes séances. Souvent la gestion quotidienne effective du temps est en contradiction avec les déclarations des professeurs : ceux-ci disent manquer de temps, mais dans la classe, ils réduisent les temps d'apprentissage pour éviter les conflits ou les gérer. En fait dans de nombreux cas, comme nous l'avons déjà mentionné, ce sont les élèves qui sont maîtres du temps ou qui essaient de le devenir.

Par ailleurs, le temps d'apprentissage semble se réduire au temps de classe : les enseignants observés font peu confiance à ce qui pourrait être travaillé hors de l'école et n'ont donc pas d'exigence à ce sujet.

La première de ces contradictions peut déboucher sur la quasi-disparition des apprentissages scolaires ou sur le départ de l'enseignant vers d'autres postes. Le dépassement de cette contradiction nous paraît être un des enjeux essentiels de l'enseignement en REP. Le

dépassement des autres nous semble moins crucial car même s'il se traduit par une baisse des exigences, il peut s'accompagner tout de même d'un certain apprentissage.

Ces contradictions et tensions existent aussi dans d'autres classes mais elles sont, à notre avis, particulièrement exacerbées en REP. Il nous semble que les REP jouent, dans une certaine mesure, le rôle de "loupe" pour l'analyse des pratiques enseignantes ordinaires.

2.2 Des systèmes cohérents de réponses à ces contradictions dans chaque pratique professionnelle

Notre hypothèse de départ concernant les pratiques est confirmée : ces dernières sont à la fois complexes, cohérentes, cohésives et stables. Elles semblent en effet s'élaborer et s'organiser pour permettre aux enseignants d'exercer au quotidien leur métier. Les professeurs installent un mode de fonctionnement qui leur permet de gérer les temps d'apprentissage, les conflits, et de nombreux types de perturbations sans avoir à inventer chaque jour de nouvelles solutions. Ils trouvent ainsi un équilibre, qui demeure fragile, entre la gestion des difficultés, la gestion des apprentissages et la recherche d'une certaine économie et d'un certain confort. Il s'agit d'après nous d'un compromis entre leur projet initial d'enseignement et d'éducation et les conditions effectives d'exercice du métier.

Nous reprenons en les adaptant à notre objet d'étude, les termes de « genre » et de « style » que nous avons emprunté aux travaux de Clot Y.

Les systèmes de réponses apportées par les professeurs d'école aux contradictions que nous venons de décrire relèvent de deux dimensions. Elles sont liées aux deux missions essentielles de l'école élémentaire que sont l'instruction et l'éducation. L'instruction concerne l'enseignement de contenus disciplinaires ou pluridisciplinaires. L'éducation est celle de l'enfant en tant que futur citoyen. La première dimension, plutôt liée au côté enseignant du métier de professeur d'école, nous a amené à définir trois genres dominants. La seconde, plutôt liée au côté éducateur du métier, nous a conduit à caractériser ces mêmes pratiques à l'aide de quatre types d'environnements mathématiques et de modes vie dans la classe que nous avons appelés styles de classe de mathématiques.

Nous caractérisons les genres dominants à l'aide d'indicateurs relatifs à l'enseignement des mathématiques : le recours plus ou moins fréquent à des problèmes, le type de tâches proposées, l'existence de phases de synthèse et d'institutionnalisation. Ils prennent également en compte les poids respectifs de l'individuel et du collectif dans la gestion de la classe, le mode d'étayage, la nature des interactions. Ils concernent enfin l'équilibre entre le temps consacré à des apprentissages de savoirs scolaires et le temps consacré à la socialisation, à l'acquisition de comportements et donc à la gestion des perturbations et des conflits.

Les genres ainsi définis peuvent se décliner de manière à définir des styles de classe de mathématiques de statuts très différents.

Ces styles de classe nous semblent être la trace à la fois de la représentation que se fait le professeur de sa mission éducative et de sa conception personnelle des mathématiques. Ils permettent une nouvelle caractérisation de la cohérence des pratiques effectives d'un enseignant. Ces styles traduisent les parts respectives accordées par le professeur d'école aux apprentissages disciplinaires et à l'éducation. Il ne s'agit plus d'analyser l'enseignement de contenus mathématiques par le professeur mais de cerner la place qu'il attribue à cette discipline dans la formation du futur citoyen.

Cette double classification s'accompagne de choix méthodologiques. Nous avons choisi d'inscrire dans un genre et un style donné chaque professeur ; nous sommes toutefois conscients que les pratiques professionnelles constituent un continuum organisé en genres et styles

2.2.1 Une première catégorisation des pratiques professionnelles observées en trois genres

Nous allons définir chacun de ces genres en faisant appel à des indicateurs relevant essentiellement des composantes cognitive, médiative et institutionnelle.

Eléments caractéristiques du genre 1

Deux professeurs confirmés respectivement enseignantes de CM2 et CP s'inscrivent dans ce premier genre dominant.

Des indicateurs relevant plutôt de la composante cognitive : les professeurs proposent des scénarios faisant une grande part à la résolution individuelle d'exercices d'application non précédés d'un travail sur la notion en jeu. Les séances sont organisées la plupart du temps selon un schéma du type : présentation⁵ collective ou non de l'exercice, résolution individuelle (éventuellement tutorée), correction publique. On observe une quasi-absence de phases de synthèse ainsi qu'une absence de phases d'institutionnalisation. Les professeurs concernés anticipent⁶ sur les difficultés des élèves. Cela se traduit le plus souvent par un abaissement des exigences.

Des indicateurs relevant plutôt de la composante médiative : les professeurs pratiquent un étayage consistant, relayé éventuellement par un tutorat organisé entre élèves. Le traitement des comportements est plutôt individualisé. Les enfants de ces classes travaillent en silence, et sont rappelés à l'ordre au moindre manquement. Il semble que ce mode de gestion très individualisé, très strict et très sévère, très proche d'une séance d'aide aux devoirs des anciens répétiteurs soit une réponse à des comportements d'élèves très difficiles.

Des indicateurs relevant plutôt de la composante institutionnelle : les professeurs maîtrisent la gestion du temps. Ils mettent en œuvre selon des modalités diverses une forme de pédagogie différenciée : groupes de niveaux, tâches individualisées grâce à des fiches, activités complémentaires.

Les élèves remplissent des fiches tout au long de la journée. Ces professeurs valorisent les élèves en leur attribuant fréquemment des « bonnes notes ».

Eléments caractéristiques du genre 2

Sept professeurs sur les dix observés s'inscrivent dans ce genre, très majoritaire dans notre échantillon. Il s'agit des deux professeurs des écoles débutantes enseignant en CP et de 5 professeurs des écoles plus anciennes dans le métier : une enseigne en CP, une en CE2, une dans un double niveau CE2/CM1, une en CM1 et une en CM2.

Des indicateurs relevant plutôt de la composante cognitive : les professeurs relevant de ce genre proposent des scénarios faisant une part importante à la présentation collective de l'activité proposée. Au cours de cette phase, les élèves sont questionnés collectivement ou nominativement, le professeur montre, explique, dit comment faire. Cette phase peut même dans certains cas jouer le rôle de phase "d'institutionnalisation à priori", ou encore de "leçon modèle". Mais d'en d'autres cas, il s'agit juste de l'ostension simple d'un exemple qui sera à reproduire ensuite. Cette phase plus ou moins longue est suivie d'un temps de résolution individuelle d'exercices d'application. Cette résolution peut être autonome ou tutorée, elle peut être suivie d'une correction individuelle, d'une correction publique, ou peut ne donner

⁵ Il peut arriver que cette présentation se limite à l'énoncé du numéro de l'exercice ou de la fiche concernés.

⁶ Cette anticipation semble résulter d'une conception a priori du niveau de compétence des enfants. Très souvent les maîtres estiment que les élèves sont incapables de résoudre le problème envisagé et le simplifient immédiatement dans la plupart des cas.

lieu à aucun temps de correction immédiate. On observe une quasi-absence de phases de synthèse (2 maîtres se distinguent un peu en faisant des synthèses ponctuelles) ainsi qu'une absence de phases d'institutionnalisation. Les professeurs anticipent ⁷ sur les difficultés des élèves. Cela se traduit le plus souvent par un abaissement des exigences, parfois même l'exercice proposé est complètement résolu collectivement avant que les élèves aient à le résoudre individuellement.

Des indicateurs relevant plutôt de la composante médiative : les professeurs pratiquent un étayage consistant, relayé éventuellement (pour les classes de cycle 3) par un tutorat organisé ou spontané entre élèves. Le traitement des comportements est plutôt individualisé (5 professeurs sur 7). Les maîtres recherchent et entretiennent la motivation des élèves par le recours soit à des jeux (3 professeurs sur 7), soit à des projets périscolaires (6 sur 7).

Des indicateurs relevant plutôt de la composante institutionnelle : la gestion du temps échappe partiellement, voire totalement, aux maîtres et peut s'éloigner des normes institutionnelles (5 professeurs sur 7). Les professeurs mettent en œuvre selon des modalités diverses une pédagogie différenciée : groupes de niveaux (4 maîtres), tâches individualisées grâce à des fiches (7 maîtres), activités complémentaires (7 maîtres). Les élèves sont très fréquemment valorisés grâce à des encouragements, des bons points et bien sûr, quand existe une notation, par des bonnes notes.

Eléments caractéristiques du genre 3

Un professeur débutant enseignant en CE2 se distingue nettement des autres professeurs. Sa pratique professionnelle peut se caractériser par :

des indicateurs relevant plutôt de la composante cognitive : le professeur propose des scénarios d'enseignement et d'apprentissage proches d'une organisation exposée en formation : présentation de situations-problèmes parfois complexes, temps significatif laissé à la recherche des élèves sans trop de négociation à la baisse, formulation et bilan des stratégies, institutionnalisation, réinvestissement contextualisé puis décontextualisé. Il organise des phases collectives de mise en commun des productions, de synthèse et d'institutionnalisation.

Des indicateurs relevant plutôt de la composante médiative : ce professeur utilise des manuels récents⁸, reprenant plus ou moins en compte les résultats des recherches en didactique des mathématiques. Il utilise un cahier de mathématiques et des photocopies fréquentes. Il apporte une aide légère aux élèves en grande difficulté sans grande négociation à la baisse ainsi qu'un étayage important lors des phases de formulation. Il traite les comportements sur un mode plutôt collectif par des références fréquentes au groupe classe.

Des indicateurs relevant plutôt de la composante institutionnelle : il valorise individuellement les travaux des élèves notamment dans le cadre d'un affichage public de leurs productions. Il entretient leur motivation en les faisant participer à des projets périscolaires. Il manifeste le souci de respecter le temps institutionnel.

2.2.2 Une seconde caractérisation des pratiques enseignantes observées : des styles de classe de mathématiques

Nous pouvons distinguer quatre styles de classe différents. Le premier genre dominant correspond à un style de classe de mathématiques, le second à trois styles et le dernier à un

⁷ Cette anticipation semble résulter d'une conception a priori du niveau de compétence des enfants. Très souvent les maîtres estiment que les élèves sont incapables de résoudre le problème envisagé et le simplifient immédiatement dans la plupart des cas.

⁸ "Le nouvel objectif calcul", "Apprentissages mathématiques (ERMEL), "Spirale".

style. Un des styles définis permet de caractériser des pratiques enseignantes s'inscrivant dans deux genres dominants différents (un et deux).

Pour les enseignants relevant du genre 1, la classe apparaît principalement comme un lieu d'exécution de tâches scolaires. Pour ces professeurs, l'école est un lieu où il faut que les élèves fassent leur métier d'élèves, les mathématiques sont une discipline ardue, rigoureuse, voire rigide, dans laquelle on ne peut réussir qu'à force d'entraînement, en apprenant essentiellement à appliquer des règles par imitation.

Pour les sept professeurs relevant du genre 2, nous distinguons trois styles de classe de mathématiques différents.

L'environnement mathématique créé par quatre de ces professeurs est plutôt, comme dans le genre 1, un lieu d'exécution de tâches scolaires. Il s'agit de deux professeurs confirmés qui ont plutôt une conception utilitaire des mathématiques. Il faut enseigner les mathématiques car c'est utile, par exemple, de savoir compter. Leur enseignement répond également à une injonction institutionnelle (programmes de l'école élémentaire). Les deux professeurs débutants développent aussi un tel style de classe bien que leurs conceptions des mathématiques soient peut-être plus nuancées. Les mathématiques peuvent servir à la formation de l'esprit mais les élèves, trop faibles, ne peuvent pas résoudre des tâches complexes. Ils proposent donc essentiellement des exercices d'application.

Pour deux professeurs confirmés, la classe est plutôt considérée comme un lieu de vie et d'échanges autour de sujets variés, éventuellement mathématiques. Les élèves doivent aimer aller à l'école, ils doivent s'y sentir bien. C'est souvent le caractère utilitaire des mathématiques qui est mis en avant. Les mathématiques sont utiles pour la vie quotidienne. Les mathématiques peuvent être des outils de modélisation du réel mais la faiblesse des élèves interdit de traiter vraiment cet aspect de la discipline. Le traitement des exercices mathématiques va parfois se faire dans le registre de la vie pratique au détriment des notions dont l'apprentissage est visé.

Enfin pour un autre professeur confirmé, la classe est aussi plutôt un lieu d'acquisition de comportements cognitifs et d'une certaine forme d'autonomie. Ce professeur attribue à l'école le rôle d'apprendre à apprendre. Il essaie de développer au maximum l'autonomie de ses élèves, leur esprit d'initiative, leur aptitude à raisonner. Les mathématiques contribuent à former l'esprit, puisqu'il s'agit d'une discipline logique et rigoureuse. L'accent est davantage mis sur les démarches que sur les résultats ; peu de savoirs sont institutionnalisés.

Enfin pour l'enseignant du genre 3, une des missions essentielles de l'école semble être de permettre aux élèves de construire des savoirs. Les mathématiques font partie de ces savoirs. Considérant que la résolution de problèmes, qu'ils soient internes aux mathématiques ou issus d'autres disciplines, est une caractéristique essentielle des mathématiques, le rôle de l'enseignant est donc de proposer aux élèves des problèmes leur permettant de construire ou de s'approprier des savoirs mathématiques. Les mathématiques servent aussi à former l'esprit. La classe est alors un lieu de construction et d'exposition des savoirs. Notons que ce professeur débutant est titulaire d'une licence de mathématiques.

2.3 Une construction rapide des pratiques

Les équilibres établis par les différents enseignants observés le sont très rapidement et ne semblent pas étroitement liés à leur degré d'ancienneté. Les premières observations des maîtres débutants ont eu lieu au second trimestre de leur première année d'affectation ; les équilibres étaient déjà en place, les genres étaient déjà affirmés. Les observations au cours de l'année suivante, tout en faisant apparaître une plus grande assurance chez ces maîtres, mettent en évidence une permanence des caractéristiques précédemment observées.

Il semble donc y avoir une construction très rapide de pratiques qui rejoignent celles de collègues plus anciens.

Cette absence de différences importantes entre les pratiques des débutants et des autres est a priori étonnante. Elle est sans doute due à divers facteurs. Les contraintes qui pèsent sur les maîtres de REP sont sans doute si fortes qu'elles uniformisent massivement les pratiques en réduisant considérablement les possibilités de réponses individuelles. Les pratiques majoritaires semblent se diffuser très rapidement dans le milieu REP par différents circuits y compris institutionnels (rencontres spontanées entre pairs, mais aussi animations en circonscriptions, stages, et rencontres dans le cadre du réseau REP). Il y a sans doute ici la manifestation d'un habitus spécifique aux REP :

*dans nos classes, ce n'est pas la peine d'essayer de mettre en place
ceci, mais tu peux faire cela, ça marche bien.*

L'expérience professionnelle liée à l'ancienneté ne semble pas entraîner de modifications dans les pratiques car les équilibres trouvés par ces maîtres correspondent peut-être à une réponse optimale en terme de coût et entrent sans doute en résonance avec leurs conceptions initiales du métier.

3. Exemples

Nous allons illustrer notre catégorisation à l'aide d'exemples de pratiques relevant des genres dominants 2 et 3.

3.1 Un exemple de dérives successives dans la correction publique d'un problème (genre 2)

L'énoncé suivant a été proposé à des élèves d'une classe de CM1 de ZEP :
Énoncé :

*Les 387 élèves de l'école partent en voyage en fin d'année. Il y aura
18 accompagnateurs. Combien faudra-t-il louer de cars s'il y a 55
places dans chacun d'eux ? (texte souligné par l'enseignante)*

Il s'agit d'un problème de division euclidienne avec reste, dont le contexte et la question posée conduisent à prendre en compte le quotient par excès.

De façon générale, les situations de division peuvent être modélisées par une écriture de type :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r < b \text{ ou } b \times q \leq a < b \times (q + 1),$$

où a , b , q et r sont respectivement le dividende, le diviseur, le quotient et le reste de la division.

Les principales variables didactiques généralement prises en compte concernent le type de problème (quotition ou partition), la taille des nombres, la présence d'un reste. La gestion de ce reste peut être source d'échec dans la résolution de certains problèmes selon le contexte, la formulation de l'énoncé, la question posée.

Dans les problèmes de division euclidienne, l'accent est généralement mis sur la variété de procédures dont peut disposer l'élève. Les phases de synthèse doivent favoriser l'évolution de ces procédures, en mettant l'accent sur l'efficacité de certaines. Les écritures précédemment citées permettent en particulier la validation de ces procédures.

Une analyse succincte de la tâche de l'élève nous amène à dire que, pour réussir la résolution de ce problème, l'élève doit :

se poser une question intermédiaire sur le nombre de passagers : $387 + 18 = 405$

résoudre le problème de division. En début de CM1, l'écriture canonique associée est alors : $405 = (55 \times 7) + 20$.

Interpréter le reste en fonction du contexte, et donner le quotient par excès 8.

Après un court temps de recherche individuelle, l'enseignante a invité deux élèves à formuler leur réponse au tableau. Ces deux élèves y produisent les écrits suivants :

Joseph	Aïsha
55 55 55 55 55 55 55 Il en faudra 7	$ \begin{array}{r} 55 \\ \times 7 \\ \hline 385 \end{array} $

A priori, on ne sait pas si le dividende approché est 405 ou 387. On s'attend donc à ce que la validation porte sur une explicitation claire de ce dividende.

Les deux procédures affichées sont bien distinctes. Celle de Joseph prend appui sur le dessin où les carrés symbolisent les cars, avec un comptage de 55 en 55, avec contrôle sur le dividende, suivi d'un comptage du nombre d'itérations de 55. Celle de Aïsha correspond à une approche du dividende par des multiples du diviseur. Elle est traditionnellement visée du fait de son efficacité et de sa proximité avec la technique usuelle de la division. Les connaissances mises en œuvre dans ces deux procédures correspondent à un degré de maîtrise différent de la multiplication et pourraient faire l'objet d'une discussion dans la classe.

Notons aussi que Joseph exprime clairement sa réponse, ce qui n'est pas le cas de Aïsha qui la formule oralement après interpellation de l'enseignante.

Notre analyse concerne la partie du protocole relative à la correction qui suit cette phase de formulation.

La maîtresse choisit de ne pas faire comparer les procédures, mais d'amener les élèves à remettre en cause le nombre de 7 cars proposé. Par une série de questionnements, elle accepte des propositions de dividendes différents de 405, valeur normalement attendue à partir du problème initial, afin de justifier la nécessité d'un huitième car. Ceci se traduit finalement implicitement par la résolution de différents énoncés.

Premier énoncé résolu par les élèves : 387 élèves dans des cars de 55 places, avec une gestion du reste de deux plus proche de leur vécu.

Deuxième énoncé : 385 (7×55) élèves et leurs 18 accompagnateurs dans des cars de 55 places. Ici deux élèves de l'énoncé sont oubliés.

Troisième énoncé : 403 ($387 + 18$) personnes dans des cars de 55 places. Le total de 403 est une réponse fournie par un élève pour l'addition de 387 et 18, réponse inexacte mais validée par la maîtresse.

Nous allons préciser comment s'effectue le passage d'un énoncé à l'autre.

Les élèves ayant trouvé 7 cars à partir du premier énoncé justifient ce résultat par des arguments sociaux. Les deux élèves restants peuvent soit être répartis dans les autres cars, soit être transportés par des enseignants dans leur voiture personnelle. Ces solutions sont rejetées par le professeur à l'aide d'autres arguments sociaux comme le montre l'extrait ci-dessous :

M Vous savez qu'il y a un règlement ; on n'a pas le droit et là vraiment le règlement est strict, on n'a pas le droit de mettre plus d'élèves dans un car si le car n'en accepte que 55.

Aïsha Ben alors, on n'a qu'à prendre une voiture.

M Les élèves ne peuvent pas être transportés dans des voitures privées.

E Pourquoi ?

M Il y a un problème d'assurance

E Un taxi ?

M Ça coûterait peut-être trop cher

Le deuxième énoncé émerge de cette résistance des élèves à accepter la nécessité d'un huitième car pour transporter deux élèves.

M Ils courent après le car. Bien, dites les CM1, est-ce que les élèves ils partent seuls en voyage ?

E Non, avec les maîtresses

Aïsha Avec, avec 18 accompagnateurs
M Et vous avez tenu compte des accompagnateurs dans vos calculs ?
M Alors combien de personnes partent en tout ?
Fatima On fait 385 plus 18
Aïsha Moi, maîtresse, je peux venir la faire
M Alors, Aïsha, si tu veux
(Au tableau, Aïsha pose l'addition $385 + 18 = 403$)
M Donc 403 personnes partent.

On assiste donc à un nouveau changement d'énoncé :

385 enfants avec 18 accompagnateurs dans des cars de 55 places

Le huitième car transporte les accompagnateurs.

Le troisième énoncé intervient à la suite d'une tentative de la maîtresse de justifier la solution de huit cars à l'aide d'une écriture mathématique.

M Mais comment être sûr qu'il vous faut bien 8 cars, Aïsha, qu'est-ce que tu fais ?
Aïsha On fait 55 fois 8
E Maîtresse, ça fait 440
E 540
E 440, je l'ai fait là, tiens
Aïsha Non, c'est les cars, là ça fait 440 et là 403

La proposition d'Aïsha : "on fait 55×8 " est validée par la maîtresse qui la reproduit au tableau : " $55 \times 8 = 440$ ". Ceci provoque une nouvelle crise. Quel sens donner à cette écriture ? Pour Aïsha, il semble que tout multiple de 55 soit un nombre de personnes transportées, et non un nombre de places disponibles. C'est sur la base de cette ambiguïté que se déroule le débat :

non, c'est les cars, là ça fait 440 et là 403

Donc 8×55 ne convient pas car on ne peut transporter plus de personnes qu'il n'y en a. Pour régler cette crise, la maîtresse va tenter de reconstruire le problème initial, et d'accorder un statut à certains des nombres.

M (elle écrit au tableau $55 \times 8 = 440$.)
Alors mettez vous d'accord. Il faut 7 cars ou 8 cars ?
Aïsha 7
M Dans 7 cars combien de personnes peut-on mettre ?
E 55
M Non, mais dans 7 cars
E 55
Aïsha Non, dans 7 cars on peut mettre 385
M Et combien de personnes partent ?
Aïsha Euh,
E 385
M Non, combien de personnes partent en tout ?
Aïsha Maîtresse, 440 ?
M Non
Fatima Maîtresse, 305
E 310
E 440, attendez
Aïsha 403
M Ah
E 385
M Combien de personnes partent faire ce voyage ?
Aïsha (et autres élèves) 385
M Elèves, plus 18 accompagnateurs

On assiste à une confusion chez les élèves : A quoi correspondent 385, 403 et 440 ? Ces nombres n'ont pas de signification précise, aucune écriture au tableau ne permet d'identifier leur statut. Le questionnement accorde un statut aux nombres 385 et 403, mais pas à 440 et les réponses hasardeuses des élèves dénotent plutôt une perte de sens.

L'enseignante tente de revenir au problème initial en recherchant la valeur du dividende :

- M Ce n'est pas 385 élèves qu'il y a dans l'école. Relisez bien votre .. vos données
 Babacar 387
 M Il y a 387 élèves. Combien d'accompagnateurs ?
 E 18
 M Alors combien de personnes partent ?
 E Silence
 M Combien de personnes partent en tout en voyage ?
 Aïsha 403
 M 403, c'est ce que tu as calculé Aïsha

Le silence affiché par les élèves montre un certain désarroi. Rappelons qu'au tableau, les seules écritures sont :

les résultats initiaux des élèves où apparaissent 55, 7 et 385.

$$385 + 18 = 403$$

$$\text{L'écriture } 55 \times 8 = 440$$

Le nombre 387 n'a plus de statut puisqu'il est acquis que seuls partent 385 élèves dans 7 cars et leurs 18 accompagnateurs dans un 8^{ème} car. Le silence se comprend aussi par le fait que la somme de 387 et 18 n'a pas été calculée. Aïsha propose 403, réponse inexacte mais que l'enseignante valide. 403 n'est plus repéré comme $385 + 18$ mais comme $387 + 18$

La phase suivante consiste en une tentative de synthèse :

- E Il y a 8 cars
 Aïsha Ouais, mais t'es bête aussi s'il y aurait 8 cars c'est pour 440 euh personnes
 M Alors ce qui veut dire que s'il y a 8 cars, est-ce que le 8^{ème} car sera complet ?
 E Non, non
 M Non, mais s'il y a 7 cars, est-ce que tout le monde peut partir en voyage
 E Non
 M Non, donc il faut louer 8 cars, tant pis même si un car n'est pas complet, il faut louer 8 cars

Aïsha n'est pas convaincue par la nécessité de 8 cars. Le statut de 440 n'est pas explicité, et on comprend qu'Aïsha continue à s'interroger sur celui de 8 dans l'écriture $8 \times 55 = 440$.

La conclusion est amenée par la maîtresse : " donc il faut louer 8 cars, tant pis même si le huitième car n'est pas complet ", sous-entendu s'il ne contient que 18 personnes, d'après le dernier énoncé qui est, il faut le rappeler, 7 cars de 55 élèves, un 8^{ème} car pour leurs 18 accompagnateurs.

L'analyse de cette phase de correction nous amène aux résultats suivants qui illustrent une pratique relevant du second genre :

3.1.1 Une absence de phase de synthèse

Les hypothèses sur lesquelles reposent la validation et l'argumentation ne sont pas stables, de nombreux malentendus ne sont pas levés : le problème est résolu non par une approche notionnelle, mais par une approche reposant sur des connaissances sociales.

Le but de la maîtresse semble être d'obtenir le quotient par excès, réponse au problème, d'une manière ou d'une autre. De ce fait, ses interventions modifient profondément les conditions de

fonctionnement du savoir mathématique, ici la division euclidienne⁹ et le traitement du reste dans une situation dont le contexte nécessite de prendre en compte le quotient par excès.

Le basculement initié par l'enseignante permet aux élèves d'envisager des solutions proches du vécu. Ces changements, loin de favoriser l'émergence d'écritures mathématiques telles que l'écriture canonique de la division euclidienne, provoquent une dilution du savoir visé qui ne permet pas aux élèves en fin de séance d'identifier ni une stratégie efficace de résolution, ni des écritures généralisantes.

3.1.2 Une correction publique

Les échanges oraux montrent les tentatives de certains élèves de suivre cette résolution collective mais en fait, seuls quelques-uns y participent. On peut même affirmer qu'il s'agit d'une prise en compte d'une élève dans ce déroulement. Dans cet extrait, Aïsha qui est la meilleure élève d'après l'enseignante est interpellée de nombreuses fois et on note que sur 44 interventions de la maîtresse, cette élève intervient 22 fois.

Aïsha est en général la référence de l'enseignante dans le rythme des séances. On a vu la confiance qu'elle lui accorde pour déterminer le résultat de $387 + 18$.

403, c'est ce que tu as calculé, Aïsha

Ces dérives successives observées au cours du déroulement ne permettent pas de lever les incertitudes des élèves, de leur fournir un appui pour mener seuls la résolution ultérieure de problèmes isomorphes. Cette autonomie pourrait pourtant être favorisée par la mise en évidence d'écritures mathématiques communes à partir de procédures diverses, en cohérence avec le problème résolu et la notion sous-jacente.

3.2 Un exemple de pratique prenant en compte les apports d'une formation initiale en didactique des mathématiques (genre 3)

Il s'agit de comprendre le fonctionnement du professeur en analysant comment des activités élémentaires, qualifiées par Denis Butlen de « gestes professionnels » (1996), participent d'une même stratégie cohérente. Ces activités élémentaires concourent à la réalisation de grands moments de l'activité du professeur comme par exemple les processus de dévolution, de régulation ou d'institutionnalisation. L'exemple étudié décrit des gestes professionnels relevant plutôt du processus d'institutionnalisation.

Rappelons la stratégie du professeur du genre 3

Le professeur présente le problème, s'assure de la compréhension de la consigne sans induire un type de réponse. Il s'assure ensuite que les élèves s'engagent dans une recherche de solution, en les sollicitant beaucoup. Cela permet à une part importante d'entre eux de mettre en œuvre des modèles implicites d'action susceptibles de déboucher au moins sur une ébauche de solution.

⁹ Les changements d'énoncés s'accompagnent d'un changement de statut des concepts.

Le dividende : la valeur de ce dividende, 405, n'intervient pas dans la séance, alors que c'est la condition essentielle d'un partage de la signification du bon problème. D'autres dividendes sont pris en compte, 385, 387 et 403, sans que l'ambiguïté sémantique soit levée (élèves, personnes ou places de cars ?)

le quotient euclidien : la valeur 7 n'acquiert aucune signification tout au long de la négociation. Il est constamment rejeté par la maîtresse.

Le reste euclidien : il n'existe qu'à partir du problème initialement reconnu par les élèves, est énoncé oralement (il reste deux élèves) sans être clairement identifié dans une écriture et prend un statut de concept quotidien qui est à traiter en relation avec les contraintes sociales. Notons que plusieurs valeurs sont acceptées par la maîtresse : 2, puis 18. Elles servent son but : trouver un quotient par excès. Le dividende étant incorrect, le reste de 20 n'apparaît pas.

Le quotient par excès, solution recherchée par la maîtresse, est considéré comme devant intervenir en conclusion dans une écriture mathématique. Cependant la maîtresse ne propose pas l'encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur.

Si nécessaire, il apporte à cette étape une aide individualisée qui porte essentiellement sur des aspects techniques (utilisation d'instruments de géométrie, par exemple) ou sur la dévolution du décor de la situation et des conditions de réalisation de la tâche. Nous rejoignons ici ce que M.J. Perrin appelle l'organisation des milieux matériels et cognitifs dans des situations ordinaires de classe. Il laisse donc la construction du sens à la charge de l'élève.

Il organise ensuite des phases collectives de synthèse et d'institutionnalisation que nous allons analyser dans la suite.

Enfin, il favorise le maintien ou le retour des élèves dans une posture d'écoute, d'attention et d'engagement en gérant finement les résistances des élèves aux changements d'activités ou de statut des connaissances en jeu.

La gestion des phases de synthèse, de bilan et d'institutionnalisation

Nous allons montrer comment, lors d'une séance ordinaire de mathématiques, le professeur de CE2 construit la phase de synthèse.

Voici le problème proposé :

Les Daltons ont enlevé le chien de Lucky Luke qui doit payer une rançon en pièces de 10F. Combien de pièces de 10 francs, chacun des Daltons aura-t-il ?
Averell veut 260F
Jack veut 860F
William veut 1500F
Joe veut 2000F.

Le problème posé est un problème de numération mais dans un contexte très particulier qui peut cacher la notion mathématique visée. En effet, nous pouvons penser que le maître attend des élèves l'activité mathématique suivante : traduire la question

combien de pièces de 10 francs, chacun des Daltons aura-t-il ?

en la question plus décontextualisée :

combien de dizaines y-a-t-il respectivement dans 260, 860, 1500 et 2000 ?

répondre à la nouvelle question ; et enfin recontextualiser les réponses obtenues pour les inscrire dans le problème de départ. L'activité visée nécessite donc une première décontextualisation suivie d'une recontextualisation ; une seconde décontextualisation s'effectue ensuite lors de l'institutionnalisation. Notons toutefois que le contexte, permet à certains élèves d'apporter une réponse exacte à la première question posée sans pour autant avoir mobilisé les connaissances de numération attendues.

Nous étudions comment le professeur gère les différents niveaux de réponses des élèves.

Après une phase de recherche de plusieurs minutes, il organise une synthèse. Nous avons observé 11 productions d'élèves (par binôme) correspondant à 6 procédures différentes (dont deux erronées, cf. tableau ci-dessous.)

Les formulations écrites par les élèves sur des affiches témoignent toutes des difficultés rencontrées pour rédiger séparément les deux étapes précisées ci-dessus (décontextualisation puis recontextualisation).

Il semble que 8 élèves sur 22 seulement mobilisent plus ou moins explicitement des connaissances liées à la numération.

Leurs réponses restent dans le contexte du problème, celui de la monnaie.

Tableau n°1 : Procédures mises en œuvres et reprises lors de la phase de synthèse

Types de procédures	exemples	Nombres d'élèves	Reprise lors de la synthèse
---------------------	----------	------------------	-----------------------------

		concernés	
Procédures erronées			
Calculs difficiles à interpréter (multiplications et additions)	$\begin{array}{r} 26 \quad 20 \\ \times 100 \quad \times 60 \\ \hline 260 \quad 80 \end{array}$	2	Non
Multiplication des données (posées ou en ligne)	Il faut 2600 pièces de 10F $\begin{array}{r} 260 \\ \times 10 \\ \hline 000 \\ 2600 \\ \hline 2600 \end{array}$	8	Oui (première interrogation)
Procédures pouvant mener à la réussite			
Décomposition multiplicative justifiée par des additions répétées	$\begin{array}{r} 10 \quad 20 \times 10 + 60 = \\ 260 \\ + 10 \\ + \\ \dots \\ + 10 \\ \hline 200 \end{array}$	4	Oui (deuxième interrogation)
Confusion dans la rédaction entre nombre de pièces, valeurs de celles-ci ou somme correspondante. Erreur significative d'une difficulté à décomposer un nombre donné en nombre de dizaines et à s'abstraire du contexte de la monnaie	Averell je veux 260 ? $10 + 10 + 6 = 260^F$ JACK veut 860^F. $80 + 6 = 860^F$ William veut 1500^F 100^F pièces de 10^F et 50 pièces de 10^F : 1500^F. Joe veut 20000^F. 20000 pièces de 10^F $= 20000$	2	Non
Décomposition de chaque somme faisant apparaître le nombre de pièces de 10 F (numération de position implicite).	$\begin{array}{l} 260^F = 26 \text{ pièces de } 10^F \\ 860^F = 86 \text{ pièces de } 10^F \\ 1500^F = 150 \text{ pièces de } 10^F \end{array}$	4	Oui (troisième int.)
Explication de l'utilisation de la règle des zéros	Averell a 26 pièces de 10 francs. Jack a 86 pièces de 10F... Calculer : On a enlevé un zéro à chaque personne.	2	Oui (Quatrième int.)

Les différentes observations et l'entretien effectué avec le professeur montrent que celui-ci organise systématiquement les phases de synthèse et d'institutionnalisation selon un schéma comportant trois étapes. La première consiste en une observation précise des productions des élèves finalisée par le choix des élèves à interroger. Vient ensuite l'exposition des procédures des élèves choisies par le professeur. Cette explication est organisée selon trois principes :

une non prise en compte des productions trop difficilement interprétables, une exposition des procédures allant d'une non-compréhension du problème jusqu'à la procédure la plus experte produite, en passant par des procédures plus ou moins économiques, enfin un étayage très consistant des formulations des élèves. Cette synthèse débouche alors sur l'institutionnalisation de la procédure experte prévue par le maître.

Nous avons ici une gestion que pouvons qualifier de routine dans la mesure où le professeur déclare lors de l'entretien la mettre en œuvre de façon quasi systématique. De plus, elle semble être, en partie du moins, implicite et automatisée.

Ce fonctionnement peut s'expliquer à la fois par des contraintes liées au public concerné et par les représentations personnelles de l'enseignant.

Les formulations des élèves sont pauvres d'un point de vue syntaxique et correspondent à des niveaux de décontextualisation intermédiaires entre le contexte du problème et le savoir mathématique en jeu (comme nous pouvons le voir dans le tableau n°1 ci-dessus).

D'autre part, les interventions des élèves sont très courtes (en moyenne de 3 à 4 mots) et correspondent rarement à une phrase complète comme nous pouvons le voir dans le tableau n°2 ci-dessous.

Tableau n°2 : Interventions des élèves lors de la synthèse¹⁰

Episodes	Nombre d'élèves différents interrogés	Nombre d'interventions élèves	Nombre maximum de mots prononcés	Nombre minimal de mots prononcés	Nombre moyen de mots prononcés
4.2 Etude d'une production	7 au plus	11	13	1	5,9
4.3 Etude d'une production	2	9	7	0	2,8
4.4 Etude d'une production	6 au plus	16	13	0	2,8
4.5 Exposé d'une méthode	1	5	4	0	1,8
4.6 Exposé d'une méthode	1	13	16	0	6,6
5 Institutionnalisation	2	3	3	0	2
total	18 élèves au plus	57	16	0	3,6

Le professeur doit reformuler les dires des élèves comme le montre l'exemple ci-dessous.

Vas-y . Tu dis tout fort ce que tu as fait.

J'ai fait, 20 fois 10

Non t'as pas fait 20 fois 10...

¹⁰ les interventions inaudibles ou ne comportant que le seul mot « euh... » sont considérées comme ayant une longueur nulle

Comment t'as fait ?

Les calculs...

Alors comment t'as fait comme calcul ? T'as fait quoi ? Jessica !

J'ai fait 20 fois...

Non, t'as fait quoi là ?

...

Voilà, donc t'as mis pleins de 10, et les 10 ils correspondent à quoi ? ça correspond à quoi le 10, chut.

...(inaudible)

Non, le 10 que tu as écrit, pourquoi t'as mis 10, 10, 10, 10, 10 ça correspond à quoi le 10 ?

Pourquoi, il a mis plein de 10 comme cela, le 10 il représente quoi ? Cécilia ?

C'est pour ...pour connaître le résultat.

Quand on trouve le nombre... quand on trouve le nombre de 10, on va obtenir quoi ? Eric ?

...le nombre de pièces de 10 F...

Oui, très bien, donc chaque 10 représente une pièce de 10 F. C'est très bien. Donc tous les 10 représentent une pièce de 10 F.

Donc Wesley (?), t'as calculer... toutes les pièces de 10 F, et après tu t'es aperçu de quoi ?

...(inaudible)

...pièces de 10 F. Ça fait 20 pièces de 10 F. Et...tu as dit que ça faisait que 200 F. Il te reste encore 60 F à fournir en pièces de 10 F.

Comment tu fais. Il te reste 60 F en pièces de 10 F...En tout on a combien ?

...260

Donc on va voir, là...une petite recherche qui, qui... on va voir un autre calcul. Tiens. Tu viens Eric. Qu'est ce que tu fais debout? ...C'est ça...je ne t'ai pas demandé de te lever pour l'instant. Donc Wesley a le début de la recherche ... il a trouvé que...le nombre de pièces de 10 F, on va voir s'il n'y a pas une autre méthode, une méthode un peu plus...rapide, plus élaborée. Alors... je vais vous expliquer ce que vous allez faire, on va voir, les autres... J'attends le silence, Charlotte, tu te retournes parce que je ne suis pas content de toi.

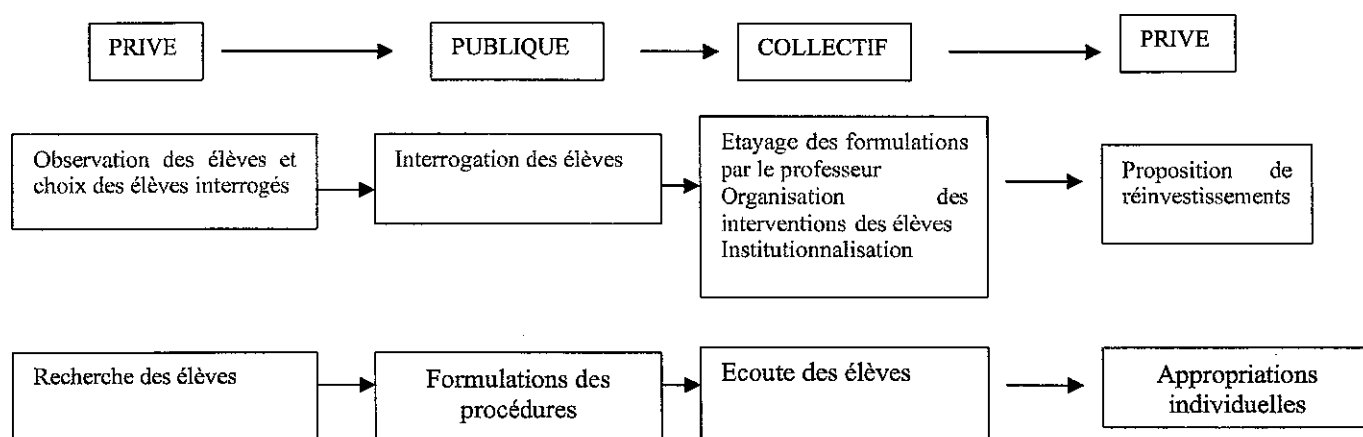
La reformulation des procédures des élèves est donc très importante. L'entretien montre que le professeur, sans doute à juste titre, semble ne pas avoir une grande confiance dans les compétences des élèves :

Pendant les mises en commun, je parle trop mais c'est difficile pour les élèves. On affiche, il y a un rapporteur mais c'est souvent pauvre... Quand c'est riche, j'ai l'impression que ça ne profite qu'aux bons élèves.

Le professeur semble ainsi reconstruire une histoire des productions des élèves en mettant en œuvre une phase collective conduite à l'aide d'une maïeutique et de nouvelles formulations des actions et des propositions des enfants. Ces nouvelles formulations restent proches de celles des élèves, mais elles lui permettent de conclure par une institutionnalisation s'adressant à toute la classe. Le maître peut ainsi transformer les itinéraires particuliers des élèves en un itinéraire générique acceptable par tous. Cela lui permet d'intervenir dans la zone proximale de développement de chaque élève.

Nous mettons ainsi en évidence une routine constituée d'un ensemble de gestes professionnels (observation des élèves, étayage des formulations, organisation des interventions) qui semble s'appuyer sur une dialectique entre privé, public et collectif.

Le schéma ci-dessous explicite les différentes étapes de ce processus. Le professeur observe et choisit les productions privées de certains élèves, il rend ces démarches publiques en permettant à leurs auteurs de les formuler oralement ou par écrit (sous forme d'affiches). Il leur donne un statut collectif en assurant, par un étayage important, la compréhension de l'ensemble de la classe et en les réorganisant selon le degré d'expertise. Cette synthèse débouche alors sur une institutionnalisation des procédures expertes pouvant d'ailleurs mobiliser différents systèmes de représentation. Nous pouvons penser que chaque élève peut ainsi s'approprier individuellement le savoir institutionnalisé. En effet, celui-ci est alors inscrit dans une histoire didactique fictive construite à partir des connaissances mobilisées par chacun



Les performances enregistrées lors des activités de réinvestissement semblent montrer que ce type d'enseignement est assez efficace au moins à court terme.

Cette routine n'est sans doute pas spécifique des pratiques des enseignants de REP mais elle permet de gérer les difficultés cognitives spécifiques de ce public élèves.

4. Conclusion

Les résultats que nous venons de résumer soulèvent des questions plus générales relatives aux pratiques des professeurs d'école enseignant les mathématiques.

Une première question est liée aux contraintes spécifiques des REP et part d'un constat. En effet, nous avons pu observer, à maintes reprises, que les contraintes institutionnelles relatives à l'apprentissage de contenus de savoirs disciplinaires pèsent en REP plutôt moins qu'ailleurs, en raison d'une certaine forme d'autonomie et de liberté concédée au réseau. L'accent est mis sur l'innovation, sur la construction et la réalisation de projets éducatifs.

En revanche, les contraintes liées à l'environnement social, économique et culturel pèsent très fortement sur les pratiques mises en œuvre par les professeurs. En REP, les contraintes sociales semblent donc l'emporter très largement sur les contraintes institutionnelles.

Cette inversion des contraintes peut en particulier amener certains enseignants à développer des projets "innovants" pouvant les conduire à mettre au second plan certains apprentissages cognitifs.

Les choix des professeurs des genres 1 et 2 peuvent alors être interprétés comme des dérives initialisées par des éléments du discours officiel général sur l'éducation. Ainsi en va-t-il de la différenciation et de l'individualisation. Par exemple, une prise en compte trop individualisée, trop caricaturée des cheminements cognitifs des élèves peut se traduire par une disparition des apprentissages collectifs, notamment disciplinaires lors des interactions entre pairs. Elle se traduit aussi dans les faits par une disparition des phases d'institutionnalisation. Les connaissances individuelles mobilisées ou construites risquent de ne plus renvoyer à des savoirs de référence partagés par l'ensemble de la classe.

Si l'individualisation des parcours est une réponse institutionnelle à l'hétérogénéité des élèves, il serait sans doute nécessaire d'analyser en fonction des spécificités de l'enseignement en REP les dérives qui peuvent en découler.

Une seconde question concerne le rôle spécifique des mathématiques dans l'élaboration des pratiques enseignantes : en quoi les genres et les styles décrits ici dépendent-ils des mathématiques ? Observerait-on la même chose dans d'autres disciplines ?

Une troisième série de questions, qui sont plutôt des pistes de recherche, concerne le degré de généralité des résultats obtenus en REP. En effet, les pratiques observées peuvent apparaître comme des adaptations aux systèmes de contraintes spécifiques des REP, de pratiques plus générales partagées par des professeurs enseignant dans d'autres milieux.

Dans une certaine mesure, nous pensons que les REP jouent un rôle de « loupe » pour l'analyse des pratiques enseignantes. Par exemple, les contradictions et les tensions qu'on y observe existent aussi dans d'autres classes, mais elles sont particulièrement exacerbées en REP. En élargissant le cadre de l'étude faite en REP, plusieurs questions se posent :

L'appartenance à un genre dominant (ou à un style) est-elle liée à un enseignement en REP ou en est-elle indépendante ? Cette appartenance est-elle stable lorsque le professeur change de classe, en particulier lorsqu'il n'enseigne plus en milieu difficile ?

Les genres observés dans les pratiques des enseignants en REP à l'école élémentaire subsistent-ils au collège ? En particulier, l'abandon de la polyvalence au collège a-t-il une incidence sur les pratiques des enseignants de mathématiques ?

Références

- ARBORIO A-M. FOURNIER. P. (1999) *L'enquête et ses méthodes : l'observation directe*, Paris, Nathan université
- BARBIER J.M. (1987) Analyse des pratiques éducatives ordinaires et formation des formateurs, *Sciences de l'Education* n°4
- BAUTIER E. (1995) Pratiques langagières, pratiques sociales. De la sociolinguistique à la sociologie du langage, Paris, L'Harmattan
- BAUTIER E. (2001) Pratiques langagières et scolarisation. RFP n° 137, 117-162, Paris
- BLANCHARD-LAVILLE C. (1996) *L'analyse des pratiques professionnelles*. Paris, L'Harmattan.
- BLANCHARD-LAVILLE C., NADOT S. (2000) *Malaise dans la formation des enseignants* Paris, L'Harmattan
- BOURDIEU P., PASSERON J.C. (1970) *La reproduction, Eléments pour une théorie du système d'enseignement*. Paris, Ed. Minuit
- BOURDONCLE R. (1991) La professionnalisation des enseignants 1. La fascination des professions, *Revue Française de Pédagogie*, n°94, pp.73-92
- BOURDONCLE R. (1993), La professionnalisation des enseignants 2. Les limites d'un mythe, *Revue Française de Pédagogie*, n°105, pp.83-120
- BROUSSEAU G. (1995) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques In NOIRFALISE R., PERRIN-GLORIAN M.J., *Actes de la 8ème école d'été de la didactique des mathématiques*, Clermont Ferrand, IREM de Clermont-Ferrand, pp.3-46
- BUTLEN D., PEZARD M. (1992) Elèves en difficulté, situations d'aide et gestion de classe associée, *Grand N*, n°50, pp 29-58
- BUTLEN D., PEZARD M. Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *Repères-IREM* n°41, Metz, Topiques Editions, pp.5-24
- CHARLOT B., BAUTIER E., ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin
- CHEVALLARD Y. (1992) L'observation didactique, In Inter-IUFM Sud-Est, *Actes de l'université d'automne de Fréjus des formateurs IUFM sud-est*, Marseille, IUFM de Marseille
- CICCONI A. (1998) *L'observation clinique* Paris, Dunod
- CLOT Y., 1999, *La fonction psychologique du travail*, Paris, PUF
- CRAHAY (1989) Contraintes de situations et interactions maître-élève : changer sa façon d'enseigner, est-ce possible ? *Revue Française de Pédagogie*, n°88, pp.67-94
- DAVISSE A., ROCHEX J.C. (1995) *Pourvu qu'ils m'écoutent*, Créteil, IUFM de Créteil & CRDP de Créteil
- GOIGOUX R., (1997) La psychologie cognitive ergonomique : un cadre pour l'étude des compétences professionnelles des enseignants de français. *La lettre de la DFM*, 21, (2) pp.56-61
- HOC, J.M.. (1993) Some dimensions of a cognitive typology of process control situations, *Ergonomics*, 36 (11), , pp.1445-1455
- LAHIRE B. (1993) *Culture écrite et inégalités scolaires*, Lyon, Presses Universitaires de Lyon
- LEPLAT J., & Hoc J.M., (1983) Tâche et activité dans l'analyse psychologique des situations, *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 3 (1), , pp.49-63
- LEPLAT J., (1997) *Regards sur l'activité en situation de travail*. Paris, PUF
- MASSELOT P. (2000) : *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une*

- étude de cas*), Doctorat de didactique des mathématiques, Paris, IREM Paris 7, université Denis Diderot - Paris 7
- MASSELOT P. PELTIER M.L. (1999): Pratiques professionnelles de professeurs. Méthodologies utilisées, difficultés rencontrées In ARDM, *Actes de la 10^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, pp 182-200, Houlgate, IREM de Caen
- MOUVET B.(1989) Rationalité des pratiques et conditions de leur transformation, *European journal of Teacher Education* Vol 12 n°2, pp
- PAQUAY L.(1993) Vers un référentiel des compétences professionnelles, *Recherche et formation* n°15
- PASTRE P., SAMURCAY R. et BOUTHIER D. (1995) Le développement des compétences, analyse du travail et didactique professionnelle, *Education permanente*, n°123
- PASTRE P. (1996) Variations sur le développement des adultes et leurs représentations, *Education permanente* n°119, pp. 33-63
- PELTIER M-L., (1995) *La formation initiale en mathématiques des professeurs d'école : entre conjoncture et éternité*, Thèse de Doctorat, Paris, IREM Paris 7-Université Paris VII.
- PERRENOUD P. (1994) *La formation des enseignants entre théorie et pratique*, Paris, L'Harmattan
- PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* Thèse de Doctorat d'État, Paris, Université de Paris VII
- ROBERT A., (1995) Un bilan, des questions sur la formation professionnelle initiale des enseignants de mathématiques à la lumière d'une réflexion sur les pratiques. Vers une didactique professionnelle, In IREM de Bourgogne, *Actes de l'Université d'été de l'IREM de Bourgogne*, Dijon, IREM de Bourgogne
- ROBERT A., (1996) Une approche de la formation professionnelle initiale des futurs enseignants de lycée et collège en mathématiques, un essai de didactique professionnelle, *cahier de DIDIREM* n°26, IREM de Paris VII, Université de Paris VII
- ROBERT A. (2001), Recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 21.1.2. pp.57-80
- ROBERT A., ROGALSKI J. (soumis à la revue canadienne sur l'enseignement) *Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : double approche*
- ROBERT A. VANDEBROUCK F. (2001), Recherches sur l'utilisation du tableau par des enseignants de mathématiques en seconde pendant des séances d'exercice, *Cahier de DIDIREM* n°36, Paris, IREM Paris 7, Université de Paris 7,
- ROCHEIX J-Y. (1995) *Le sens de l'expérience scolaire*, Paris, PUF
- ROGALSKI J., (2000) Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. In COPIRELEM *Actes du XXVIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, Limoges, IREM de Limoges, pp. 45-66
- TROUSSON A. (1992) *De l'artisan à l'expert*, Paris, Hachette
- TOCHON F.V. (1993) *L'enseignant expert*, Paris, Nathan
- TOCHON F.V. (1993) Les savoirs de recherche sont-ils pratiques ? *Recherche et formation* n°13.
- TOCHON F.V. (1993) Peut-on former les enseignants novices à la réflexion des experts *Recherche et formation*, n° 13
- VERGNES D. (2001) Effets d'un stage de formation en géométrie sur les pratiques d'enseignements d'école primaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 21/1.2 Grenoble, La pensée sauvage, pp.99-122

Concepts didactiques pour analyser et réorganiser une formation à la conduite de problèmes de recherches à l'école élémentaire

Annie Peix,

Pôle de Recherche sur l'Enseignement des Sciences, IUFM de Lyon,

Claude Tisseron,

Université de Lyon I, LIRDHIST EA 1658

1. Le cadre de la recherche

Cette étude s'inscrit dans un ensemble de travaux visant à transformer des savoirs issus de la recherche en savoirs professionnels communicables et opérationnels sur le terrain afin que la pratique enseignante soit outillée par des travaux validés par des recherches. Ceci suppose une transformation appropriée de résultats de recherche pour leur intégration à des pratiques afin que, comme le dit Sensevy, l'enseignant puisse "maîtriser des techniques, des gestes, à la fois théoriquement produits et pratiquement viables, qui seuls peuvent rendre les dispositifs efficaces" (Sensevy 1996, cité par Margolinas 1999 p. 26).

L'origine de ce projet se situe dans le travail commun d'une équipe d'enseignants et de formateurs¹¹ sur la formation à la conduite de problèmes de recherche à l'école élémentaire, plus spécifiquement de problèmes ouverts (Arsac et al. 1988). L'équipe réunit des enseignants de cycles différents et d'expériences variées en ce qui concerne la mise en œuvre de problèmes ouverts, ce qui est important pour le problème de transposition que nous cherchons à résoudre.

1.1. Le projet de formation, le *problème ouvert* comme problème de recherche

La finalité du projet de formation est de mettre à la disposition des professeurs d'école des organisations raisonnées de situations permettant que "l'élève soit confronté à de véritables problèmes de recherche", comme il est mentionné depuis de nombreuses années dans les I.O. Il s'agit de donner aux professeurs d'école les moyens de conduire de façon appropriée des problèmes de recherche en classe : fournir un ancrage théorique (faire comprendre pourquoi ça marche) ; donner des outils didactiques et pédagogiques (faire comprendre et montrer comment le faire) ; constituer un rapport au savoir approprié.

Les situations proposées en formation font référence à la pratique d'innovation du *problème ouvert* mise en place par l'IREM de Lyon depuis une quinzaine d'années, et qui a montré son efficacité pour modifier le rapport aux mathématiques tant pour les élèves de collège (Arsac et al., 1988) que pour les futurs professeurs d'école en formation initiale (Peix, mémoire de DEA, 1997, et Peix, Tisseron, 1998). Des difficultés de diffusion de cette innovation ont été montrées dans (Arsac et al., 1992).

Si le problème ouvert a fait l'objet de nombreuses expérimentations et recherches, en particulier sur le scénario et le rôle du maître, au niveau du collège, le problème de sa transposition à l'école élémentaire - comme exemple typique de problème de recherche - n'est pas résolu, en particulier au cycle 2. Le rôle du maître, et de nombreux aspects pratiques de la

¹¹ L'équipe permanente est constituée de Annie Peix et Jean-Paul Duplay, formateurs à l'IUFM de Lyon, de Paul Planchette et Jean-François Zucchetto, professeurs du secondaire, formateurs à Lyon 2 et à l'IREM de Lyon, et Claude Tisseron, enseignant-chercheur à l'Université de Lyon 1, avec la collaboration de Viviane Durand-Guerrier, enseignant-chercheur à l'IUFM de Lyon et Marie Paule Dussuc, formatrice à l'IUFM de Lyon.

mise en œuvre, restent à spécifier. Par exemple : comment recueillir les procédures d'élèves de cycle 2, de quels supports disposer pour la mise en commun ? Comment maintenir l'enjeu, l'implication des élèves pendant la recherche comme pendant la mise en commun ? Faut-il donner un habillage concret au problème ? Comment rendre fructueux le travail de groupe avec de jeunes enfants ? Plus largement, les formations étudiées au début de cette recherche confirment la difficulté dans laquelle se trouvent les enseignants pour réaliser à leur satisfaction la conduite de problèmes de recherche. Cette difficulté est due à l'absence "d'au moins une technique, à portée non vide, relativement fiable et assez facilement maîtrisable, pour accomplir ce type de tâches" pour reprendre l'expression que (Chevallard 1996) utilise à propos de tâches à réaliser au lycée.

1.2. Le problème de la formation

Si la description des dispositifs et de leurs modalités de gestion fournit des techniques enrichissant l'outillage pédagogique de l'enseignant, le problème de la formation est de permettre l'intégration d'attitudes et compétences nouvelles qu'implique une complexification des rôles à tenir par les enseignants au sein de ces nouvelles tâches. Cette évolution ne va pas de soi : beaucoup d'enseignants de mathématiques ont encore du mal à intégrer des problèmes de recherche dans leur pratique usuelle d'enseignement. Cette difficile intégration n'est pas seulement due au fait que les contenus d'enseignement eux-mêmes et l'évaluation de leurs apprentissages n'en nécessitent pas directement l'usage. Elle vient aussi des résistances des enseignants aux coûts cognitif et organisationnel de changements complexes, dans un milieu par ailleurs bien régulé au sein de contraintes extrêmement fortes (Crahay 1989).

1.3. Une hypothèse

Nous faisons l'hypothèse que la conduite réfléchie de problèmes de recherche est un instrument de développement de compétences professionnelles en ce qu'elle permet à l'enseignant d'expérimenter de nouveaux rôles, par exemple en donnant aux élèves davantage de responsabilités.

Cette responsabilisation des élèves s'accompagne naturellement du développement de leur autonomie et de leurs capacités d'écoute mutuelle et d'argumentation lors de tâches coopératives. Pour cela cette responsabilisation nous paraît l'élément clé (*ou fondateur*) d'un contrat pédagogique spécifique. En effet, le type de contrat d'un problème de recherche en autonomie implique une complexification des fonctions de l'enseignant, car celui-ci doit intégrer dans une pratique coutumière requise par les exigences du programme, l'inconnu d'une situation nouvelle en grande partie dévolue aux élèves, au sein de laquelle il doit assumer divers rôles. Ces différents rôles impliquent la construction par l'enseignant de leur signification par rapport à une conduite de classe plus "directive" qui reste largement dominante par ailleurs.

De plus, pour nous, l'importance de la formation à tenir ces différents rôles tient au fait que ceux-ci peuvent être utilisés au quotidien en dehors des situations spécifiques de recherche, et qu'ils correspondent à une attitude dans laquelle le travail de l'élève est reconnu pour ce qu'il est et l'erreur est constitutive de l'apprentissage. La capacité à adopter une telle attitude ne va pas de soi et son adoption constitue pour Favre (1995) une rupture par rapport à l'attitude courante dans laquelle l'erreur doit être évitée.

Par ailleurs, la conduite de ces situations peut être pour l'enseignant un lieu d'expérimentation, de mise en œuvre et d'approfondissement de compétences qui lui seront utiles dans l'ensemble de son activité professionnelle. Nous suivons en cela les travaux de Bloch (1999) qui théorise ce point de vue. Ainsi, nous cherchons à construire un dispositif de formation à la conduite de problèmes de recherche qui soit un lieu d'acquisition de compétences professionnelles utilisables dans l'ensemble de la pratique.

Cette recherche est donc intimement associée à l'étude et l'explicitation de besoins professionnels et à la "transposition de savoirs issus de la recherche en savoirs professionnels communicables et opérationnels sur le terrain"¹². Mais par rapport à cette citation, notre recherche se focalise sur le processus de transposition à travers l'élaboration d'un dispositif orienté vers la construction, par les stagiaires eux-mêmes, des savoirs professionnels visés plutôt que par leur communication directe. La recherche porte ainsi sur les divers aspects auxquels former l'enseignant pour lui permettre de conduire de façon appropriée des problèmes de recherche en classe. Il s'agit tout à la fois de fournir un ancrage théorique consistant, et de permettre l'acquisition de gestes (construction de nouveaux et intégration aux anciens) susceptibles de permettre l'anticipation de l'action en classe puis son pilotage en cohérence avec cet ancrage théorique.

2. Les formations observées en 99-00

L'objet de la recherche en 99/2000 consistait à identifier ce qui est pris ou non en charge par des formations existantes sur le problème de recherche dans l'Académie de Lyon, et comment est assurée cette prise en charge. Nous avons procédé à cette identification à partir des besoins exprimés par les stagiaires.

Pour ce faire nous avons cherché à repérer les positions exprimées par les stagiaires sur le problème de recherche, les questions et les difficultés des stagiaires, les réponses apportées par le dispositif de formation, l'adéquation entre les questions posées et les réponses apportées.

2.1. Expérimentation en novembre/décembre 99 en formation continue

Le contexte

Des membres du groupe ont réalisé, en novembre et décembre 1999, 3 fois 3 heures de formation à la mise en œuvre de problèmes ouverts au cycle 2, dans le cadre d'un stage de 4 semaines de formation continue, intitulé "Apprentissages de base au cycle 2", au centre local de Bourg en Bresse.

Partant des formations antérieures existantes, l'équipe a revu la préparation de la formation en vue d'en améliorer l'efficacité, en précisant les objectifs de formation. Une évaluation a été réalisée par un questionnaire posé en début et en fin de stage (Annexe 1). Le fil conducteur est d'inciter les stagiaires à faire confiance à la situation, en accordant une attention particulière au rôle du maître. La mise en œuvre a été assurée par deux membres de l'équipe. La formation a consisté en une journée de mise en situation et de préparation effective d'un problème ouvert à expérimenter en classe, puis en un retour après expérimentation.

Les données recueillies

Ce sont d'abord les questionnaires de début et de fin de formation (annexe 1), élaboré en équipe, destiné à montrer s'il y a évolution des points de vue des stagiaires sur divers points : activité de l'élève en problème ouvert, effets sur les élèves et intérêt du problème ouvert pour le maître, rôle du maître. Ils sont complétés par les bilans personnels des stagiaires après expérimentation en classe : mise par écrit des points qui ont marqué; points positifs, difficultés ou mises en garde, questions. Enfin nous avons les protocoles des enregistrements

¹² Projet de l'ITUFM de l'Académie de Lyon, 2003-2006, p.22

audio de la formation, en particulier des échanges entre stagiaires après expérimentation, et synthèse du formateur.

2.2. Observation en janvier/avril 2000, en formation initiale PE2

Le contexte

Nous avons observé par ailleurs trois modules sur le même thème en seconde année de formation initiale de professeurs des écoles (PE2) au centre local de Lyon (4 séances de 3 heures) dans deux contextes, avec recueil du même type de données que ci-dessus. Deux de ces modules s'inscrivent dans des parcours différenciés de septembre octobre intitulés respectivement "Conduites créatives" et "Chercher, concevoir, créer". Parmi les objectifs des deux modules, on lit "Chercher en mathématiques" et pour les contenus : "Chercher et faire chercher en mathématiques. Réfléchir au rôle du problème de recherche à l'école primaire, et à sa mise en œuvre en classe". Cette formation inclut une expérimentation en classe entre la 3^e et la 4^e séance. Pour le troisième module l'intitulé du parcours est aussi "Conduites créatives". On retrouve les mêmes objectifs et contenus. Cependant, le parcours ne prévoit pas cette fois d'expérimentation en classe. Par ailleurs, le formateur s'appuie sur une recherche conduite quelques années auparavant avec deux collègues concernant "Le raisonnement et les interactions entre élèves en situation de problème de recherche au cycle 3" (Archer et Roy, 1993). Le scénario de formation est donc différent de celui des deux autres modules.

Les données recueillies sont les questionnaires de début et de fin de formation (annexe 1) et les protocoles des échanges entre stagiaires et des synthèses du formateur.

2.3. Méthode de dépouillement

Dépouillement des questionnaires

Pour le stage de formation continue comme pour les modules, des tableaux récapitulent l'évolution des points de vues des stagiaires : état initial et état final, pourcentage d'évolutions, dans le sens visé comme dans l'autre.

Dépouillement des autres données : notes, protocoles

Nous listons les éléments suivants :

- les questions, problèmes, soulevés par les stagiaires en précisant s'ils sont pris en charge par le formateur ou non ;
- les positions exprimées par les stagiaires ;
- les savoirs exprimés par les stagiaires ;
- les savoirs apportés par les formateurs ;
- les relances du formateur.

Ces savoirs apportés par les formateurs peuvent relever de 3 catégories, qui sont distinguées :

- organisation du travail de l'élève ;
- responsabilité de l'enseignant (consignes, validation, synthèse) ;
- effets sur le rapport aux mathématiques des élèves.

Par ailleurs, ces divers éléments sont regroupés par thèmes pour chaque formation : objectifs et intérêt du problème ouvert, organisation et gestion de la recherche, organisation et gestion de la mise en commun, conclusion, types de problèmes et nature de l'activité de l'élève.

Méthode d'analyse

Il s'agit de mettre en relation les résultats des divers dépouillements (questionnaires et observations), et d'analyser comment telle évolution chez les stagiaires, conforme ou non à l'évolution visée, peut-être expliquée en regard des différents aspects de la formation.

Vu la forme du questionnaire conçu comme un QCM, la synthèse est relativement facile. Par contre l'analyse des protocoles a nécessité le choix d'éléments significatifs. Nous avons

travaillé sur les déclarations (des stagiaires ou du formateur) qui pouvaient être interprétées comme des savoirs relativement à la situation problème ouvert, soit du point de vue de son organisation, soit du point de vue de sa conduite. Nous avons aussi relevé toutes les questions posées par les stagiaires en étudiant les réponses apportées par le formateur. Ce qui nous a permis de mettre en évidence les difficultés et besoins des stagiaires et ce que les formations observées prenaient en charge réellement et comment. Nous avons regroupé ces éléments sous cinq rubriques : les objectifs et les enjeux du problème ouvert ; les rôles du dispositif ; les rôles du maître pendant la phase de recherche et pendant la gestion de la mise en commun ; la validation des résultats de la recherche menée par les élèves ; la phase de conclusion de la situation. Ce sont ces items qui constituent la colonne de gauche du tableau présenté dans le bilan présenté ci-dessous.

2.4. Bilan après analyse des questionnaires et protocoles en juin 2000

Synthèse des réponses au questionnaire de début et fin de formation en 1999/2000

Quatre séries de questionnaires ont été proposés, trois en formation initiale (76 stagiaires), un en formation continue (12 stagiaires). Au total, 88 stagiaires ont été concernés. Le questionnaire a été proposé dans chaque cas en début et fin de formation. Il s'agissait de repérer les évolutions des points de vue ou des représentations des stagiaires dans plusieurs domaines : "problème de recherche et activité de l'élève" (questions 5, 7, 8, 14, 15), "rapport aux mathématiques du professeur" (questions 1, 2, 3), "rôle du maître pendant la résolution du problème" (questions 4, 6, 9, 10, 11, 12), "intérêt du problème de recherche" (question 13). La présentation des résultats est organisée selon ces domaines (Annexe 2).

Rappelons que pour chaque question, les stagiaires avaient le choix entre quatre réponses : "tout à fait contre", "contre", "pour", "tout à fait pour" (Cf. Annexe 1).

Pour synthétiser les réponses nous les avons regroupées sous la forme de tableaux organisés comme ci-dessous pour le domaine "rapport aux mathématiques du professeur" :

Rapport aux mathématiques du professeur, représentation de l'activité mathématique

Question n°1

Chercher un problème, c'est trouver la solution

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
27	15	31	53	17	9	31%	17%

Question n°2

Chercher un problème c'est élaborer des démarches

Evolution attendue : vers **pour**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
15	2	85	86	1	0	17%	2%

Question n°3

Faire des mathématiques c'est d'abord appliquer des règles

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
34	5	55	72	14	2	39%	6%

Comme ce tableau le montre, le dépouillement des réponses à chaque question fait apparaître des évolutions, dans le sens souhaité comme dans l'autre : elles sont quantifiées en première colonne. Cependant, dans un certain nombre de cas, les stagiaires avaient d'emblée un point de vue conforme à celui souhaité, et d'autres fois ils en étaient au départ en majorité éloignés : l'interprétation de l'ampleur de l'évolution est alors très différente selon les cas. D'où l'utilité

de la colonne 2, qui fait état du nombre de stagiaires qui ont un point de vue "conforme au souhaité" à la fois en début et fin de formation. On en déduit facilement le nombre de stagiaires ayant un point de vue opposé, en début comme en fin. Par ailleurs, certaines évolutions, favorables ou non, se font par exemple de "pour" vers "tout à fait pour", ou de "contre" vers "tout à fait contre", sans qu'il y ait changement marqué de point de vue. Nous proposons donc en colonne 3 le nombre de "basculements" (du camp des "pour" vers celui des "contre", ou l'inverse), pour avoir accès à ces changements de point de vue plus marqués. La dernière colonne traduit en pourcentage le nombre des évolutions dans le sens souhaité ou non, c'est-à-dire les résultats de la colonne 1.

Dans l'exemple ci-dessus on constate en fin de stage un changement souhaité sur les questions 1 et 3. Nous l'interprétons comme le fait que la capacité de l'élève à élaborer des démarches et des stratégies qui était présente dès le début pour les enseignants est devenue pour eux bien plus importante à la fin.

Nous laissons le lecteur prendre connaissance du tableau de l'annexe deux pour plus de détails. Globalement il apparaît que les effets du stage mis en évidence par le questionnaire correspondent à ses objectifs. Mais ce résultat "à chaud" doit être tempéré par les observations des échanges pendant les stages que nous commentons maintenant.

Résultats de l'observation des stages

L'observation des stages (les modules PE2 observés et le stage de FC élaboré par l'équipe de recherche) puis l'analyse des protocoles de leurs enregistrements nous ont montré des domaines pour lesquels les stagiaires expriment des difficultés que le questionnaire ci-dessus ne montre pas ; ces difficultés sont plus ou moins prises en compte par le dispositif et le formateur. Nous synthétisons ces observations dans le tableau ci-dessous.

	modules PE2 observés	stage FC élaboré
objectifs et enjeux du problème ouvert	incomplets ou non formulés (l'accent est mis sur la recherche)	explicités de façon complète avant expérimentations
rôles du dispositif	- évoqués en termes d'effets globaux - non analysés en tant qu'articulation cohérente de situations	- évoqué en termes d'effets globaux - analysés surtout par le formateur
rôles du maître -pendant la phase de recherche	des précisions techniques sont données	divers types d'interventions du maître sont décrit plus complètement
-pendant la gestion de la mise en commun	la nécessité d'un support pour les échanges n'est pas toujours explicitée les rôles du maître sont évoqués très brièvement	la nécessité et l'utilité d'un support sont mises en évidence les rôles du maître sont travaillés
phase de validation	l'aspect communication est développé l'aspect validation n'est pas abordé	l'aspect communication est développé l'aspect validation est traité par le formateur
phase de conclusion	pas de réponse claire aux questions des stagiaires	sa gestion est traitée par le formateur

Ces résultats d'observation sont en accord avec nos hypothèses de départ. Dans les modules PE2 observés, nous constatons une permanence des questions des stagiaires sur divers points, et ceci même après les expérimentations en classe. Il s'agit d'abord de l'intérêt du problème de recherche pour l'élève et pour le maître et de sa place dans l'ensemble des activités en termes

de cohérence et d'économie. Il y a aussi des questions récurrentes sur la gestion du travail de groupe, le type de production exigible en termes d'exactitude et de reflet des recherches du groupe, la gestion de l'expression écrite et orale, les modalités de validation du problème et plus généralement la question de la conclusion de la situation. Plusieurs de ces questions sont très présentes en particulier au cycle 2.

Pour les formations observées on constate ainsi une appropriation très variable du dispositif par les stagiaires. De plus, l'analyse des échanges montre une prise en charge insuffisante de certaines difficultés des stagiaires par le dispositif de formation, en particulier pour les questions citées. C'est à dire que l'analyse de l'ingénierie de problème ouvert proposée est souvent alimentée par les remarques des stagiaires observateurs, mais de fait prise en charge par le formateur.

De plus, les réponses apportées par le formateur sont souvent formulées en termes de conviction personnelle, de croyance dans les effets du problème ouvert observés de façon répétée. Sans exclure ce registre d'expression de croyances et convictions, il semblait nécessaire d'aller au-delà dans notre visée de construction de savoirs professionnels.

On peut interpréter d'une part les problèmes et questions soulevés par les stagiaires à propos de la pertinence et des modalités de la mise en œuvre de problèmes ouverts et d'autre part leur faible prise en charge par le dispositif de formation comme des indicateurs de problèmes de "transposition".

En juin 2000, suite à ces analyses de protocoles, nous formulons l'hypothèse que pour améliorer la formation, il nous fallait donner non seulement des techniques, mais aussi des outils didactiques (des références théoriques) qui permettent à l'enseignant de penser et d'adapter ces techniques, c'est-à-dire d'organiser et de conduire les problèmes de recherche, en fonction du cycle concerné. Nous explicitons ces outils théoriques comme relevant des notions de contrat/milieu, dévolution/institutionnalisation et validation avec le rapport aux mathématiques et à l'erreur.

On était ainsi dans une perspective de transposition des notions didactiques. Mais la contrainte de courte durée de la formation et le désir d'y maintenir une expérimentation rendent difficiles des apports théoriques didactiques conséquents.

Il semblait aussi que, pour répondre aux besoins de cohérence et d'économie exprimés par les stagiaires, il fallait montrer comment intégrer ces problèmes de recherche à l'ensemble des activités mathématiques, de façon à ce que leur mise en œuvre soit clairement finalisée, participe d'une dynamique globale, et que l'enseignant puisse faire vivre et utiliser le contrat créé lors de ces situations. Il nous fallait donc repenser le dispositif de formation en nous appuyant sur ces conclusions.

3. Retour sur le dispositif de formation et les savoirs en jeu

En septembre 2000, au vu de la complexité de la gestion des situations de recherche, qui nous est apparue par les questions des stagiaires dans les études précédentes, nous revenons sur la formation au problème de recherche par le biais des "savoirs professionnels" spécifiques permettant d'en conduire.

En utilisant le langage de la théorie des situations, les formations observées nous sont apparues en septembre 2000 comme de grosses situations dans lesquelles les phases d'action étaient prédominantes relativement aux savoirs relatifs à l'objet problème de recherche (le quoi). Mais, relativement aux gestes (le comment) et aux savoirs professionnels (le quand et le pourquoi) qui en permettent une réalisation appropriée, la formation fonctionne suivant un contrat comparable au contrat d'ostension défini par (Brousseau 1995, p. 46) pour l'apprentissage des mathématiques. En paraphrasant Brousseau, le formateur "montre" un objet, ou une propriété de la situation, le stagiaire accepte de le "voir" comme le représentant

d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La connaissance relative aux gestes et savoirs professionnels en jeu n'est pas *construite* par les stagiaires ni explicitée sous forme d'un savoir.

Le formateur utilise un répertoire de reconnaissance à la portée des stagiaires qui doivent voir la même chose que lui dans les objets présentés. Le formateur fait l'économie des situations de "formulation" des savoirs professionnels en jeu et de l'organisation du savoir correspondant.

Suite à ce constat, il nous apparaît que pour améliorer la formation, il est nécessaire de pouvoir expliciter les savoirs professionnels en jeu, puis de repenser la formation à ces savoirs. Pour repenser la formation, c'est-à-dire le dispositif de formation, nous utilisons la théorie des situations comme cadre de pensée pour faire en sorte que les savoirs (professionnels) visés *émergent des situations de formation avec une construction par les stagiaires eux-mêmes*, c'est à dire avec le minimum de "monstration" par le formateur.

3.1. Les savoirs en jeu

Nous prenons pour l'instant le terme de savoir en un sens large qui recouvre les savoirs pragmatiques et les savoirs savants tels que (Connes 1992) les explicite : les premiers comprennent les savoir-faire et les savoirs réfléchis. Les savoir-faire sont des savoirs en situation qui ont pour objet un certain résultat de l'action. Leur mise en œuvre appropriée témoigne de la compétence du sujet dans les situations concernées. Les savoirs réfléchis sont des savoirs explicitables qui permettent de justifier l'action (la réussite de l'action) dans un certain système explicatif du sujet ; ce sont des savoirs sur l'action. Les savoirs savants sont des savoirs *sur les situations*.

Cette réflexion amène à considérer que ce qui va constituer la théorie du dispositif problème ouvert doit être construit collectivement par les stagiaires eux-mêmes et avec leur langage pour servir de *référence partagée* à l'analyse de leurs actions. Cette référence est alors une connaissance identifiée par le sujet, qui est utile pour penser l'action en l'anticipant, et utile pour prendre des décisions dans l'action. Elle sert donc à contrôler la situation problème ouvert. Le fait que cette théorie soit construite par les stagiaires avec leur langage permet de limiter le problème de la construction du "domaine de réalité" qui donne du sens aux savoirs d'une institution.

La question pour les formateurs est alors de construire des situations de formation permettant, favorisant, induisant l'émergence de connaissances qui s'installeront comme savoir de la formation pour contrôler ensuite les actions conduites en classe, *a priori* pour les préparer, puis *a posteriori* pour les analyser. Ce savoir issu de la formation sera pour les stagiaires leur théorie du problème ouvert.

3.2. Argumentation et apprentissage de pratique

On envisage donc la construction par les stagiaires d'éléments de la théorie du problème ouvert sans donner nécessairement de vocabulaire didactique spécifique, et donc sans faire de l'acquisition d'un tel vocabulaire un objectif de la formation.

Le retour sur les actions réalisées en classe avec un contrôle prenant appui sur cette théorie de référence est envisagé par le biais d'un dispositif destiné à provoquer des argumentations autour des interprétations des actions réalisées en classe, des problèmes rencontrés et des décisions prises.

Ces interprétations confronteront les points de vue issus de la théorie construite collectivement avec les attitudes et comportements provenant de croyances, opinions personnelles, *habitus* réellement mis en œuvre en classe.

L'argumentation sur les interprétations provoque ainsi l'articulation des savoirs spécifiques de l'objet "conduite de problèmes de recherche en classe" avec les rapports personnels des stagiaires à cet objet dont elle convoque l'expression.

L'argumentation met ainsi en rapport la cognition et les savoirs. Or, si le cognitif se situe classiquement du côté des activités du sujet lorsqu'il construit (sur le plan de la représentation symbolique) de la connaissance sur son environnement, la cognition élargit aujourd'hui la conception selon laquelle la pensée représentative serait suffisante pour s'approprier des savoirs de type conceptuel à articuler avec des savoirs d'action. Quelles formes de réflexivité sur l'objet de connaissance sont exigées par les situations d'apprentissage aux moments cruciaux de celle-ci ?

Des travaux aujourd'hui classiques ont montré que la mobilisation de ces formes de réflexivité dans toute situation d'apprentissage nécessite la prise en compte de deux dimensions : la dimension constructiviste explicitée par Piaget, complétée par la dimension épistémologique. Il n'y a connaissance (et donc entrée dans le savoir) que si la pensée bute sur un objet qui existe, mais fait problème. Par ailleurs, la théorie des situations de G. Brousseau prend appui sur ces deux dimensions en proposant entre autres des situations dans lesquelles l'apprenant construit son rapport à l'objet de savoir ou modifie ce rapport comme réponse aux exigences de la situation. Une telle situation prend en compte les registres caractéristiques de toute activité d'apprentissage : le registre sémantique du sens des connaissances produites par les modifications qu'elles permettent d'effectuer sur les objets présents dans la situation, le registre pragmatique lié aux exigences de la situation, le registre syntaxique correspondant à l'usage et à la constitution de règles et de répertoires. La dimension épistémologique est présente par le caractère de nécessité des connaissances qui sont mobilisées par rapport à des obligations qui ne sont ni arbitraires, ni didactiques, mais de l'ordre du savoir. Elle est travaillée ensuite par l'étude de la validité de l'objet et de sa généralisation.

C'est à partir de ces idées générales que nous envisageons de réorganiser le dispositif de formation. Nous allons montrer comment nous avons modifié la formation en présentant de façon détaillée le nouveau dispositif repensé. Cette présentation permettra au lecteur d'en avoir une idée globale. Chemin faisant nous montrerons aussi notre interprétation de quelques effets de cette formation en analysant quelques interventions des stagiaires. Puis nous proposerons une analyse a priori de divers aspects du dispositif en utilisant les cadres interprétatifs qui ont guidé son élaboration.

4. La formation en 2000/2001, modifications et analyse

4.1. Le contexte des formations

Les deux actions concernées par cette nouvelle étude sont deux stages : en novembre/décembre 2000, le même stage de formation continue avec le même cadre qu'en 1999-00. En janvier/mars 2001, élaboration d'un module de 9h destiné aux professeurs d'école stagiaires (PE2). Ce module est inséré dans un parcours de 30h, au centre local de l'IUFM de Bourg ayant pour thème « rapport au savoir, conduite de classe ». Ce module comporte 6h en janvier puis une expérimentation en classe avec un retour en avril de 3h.

Les observables pour les actions I et II

Ils sont composés des éléments suivants : les transparents produits par les observateurs lors de la recherche du problème, les affiches produites par les stagiaires pour l'analyse de la situation vécue, les échanges des stagiaires lors de cette analyse et synthèse du formateur : protocole, les affiches produites pour l'analyse de l'expérimentation en classe, les échanges des stagiaires lors de cette analyse et la synthèse du formateur : protocole.

Les modalités de mise en œuvre

La situation de formation modifiée vise l'appropriation par les stagiaires du sens du *dispositif problème ouvert*, c'est-à-dire les liens entre les objectifs, les caractéristiques du dispositif, et ses effets. L'ensemble constituant la théorie du problème ouvert. Le moyen consiste à

négocier un contrat et constituer divers milieux permettant aux praticiens d'avoir un outillage suffisant pour exercer une attitude critique par rapport aux situations de classe qu'ils ont construites et à leur conduite effective.

Il s'agit donc de construire une situation de formation permettant de faire formuler par les stagiaires eux-mêmes les relations entre les éléments de la situation et les effets attendus, observés.

Ces relations seront de plus reprises à plusieurs moments. Le premier moment est l'analyse d'une situation vécue de recherche d'un problème mathématique. Le second moment est la préparation et l'analyse *a priori* des expérimentations envisagées. Le troisième moment est l'analyse des réalisations en classe confrontées aux anticipations avec comme référence la théorie du dispositif, construite collectivement.

4.2. Description de la formation : les nouveaux outils de la formation¹³

Les diverses étapes

Elles sont dans leurs intitulés les mêmes que dans les dispositifs antérieurs. Mais elles diffèrent dans leurs objectifs et les formes de travail proposées qui découlent des consignes modifiées. Pour la compréhension du lecteur, nous énumérons d'abord ces étapes, puis nous précisons ensuite les modalités de réalisation.

L'étape 1 est une recherche de problème en groupe. Il s'agit comme dans les stages précédents de faire vivre complètement une recherche de problème ouvert : recherche de problème en groupe et production d'une affiche avec débat collectif de validation, puis expression orale du vécu sur cette expérience.

L'étape 2 consiste en une analyse en petits groupes de la situation vécue. Nous allons présenter ci-dessous la consigne modifiée.

L'étape 3 consiste en échanges entre les stagiaires et une synthèse en grand groupe. Nous allons présenter ci-dessous la consigne modifiée.

L'étape 4 est la préparation de l'expérimentation en classe. Nous allons présenter la grille de préparation modifiée et la consigne de retour modifiée.

L'étape 5 est le retour sur l'expérimentation. Nous allons présenter le nouveau dispositif d'analyse et la synthèse enrichie.

Comme il n'y a rien de modifié dans l'étape 1, nous n'y revenons pas et nous commençons l'explicitation des modifications avec l'étape 2.

Etude de l'étape 2 : Analyse de la situation problème ouvert vécue à l'étape 1

Les groupes sont identiques aux groupes de l'étape 1. Chaque groupe doit produire une affiche pour décrire le dispositif qu'il vient de vivre à l'étape 1. L'ancienne consigne de 1999 était la suivante :

¹³ Les préparations des formations de 99-00 puis de celles de 00-01 sont entièrement rédigées et disponibles.

Vous venez de mettre en évidence certains effets produits lors de cette recherche de problème (essais, conjectures, richesse de la recherche, implication pour chercher et pour prouver, diversité des démarches, plaisir de faire des mathématiques,...).

Qu'est-ce qui a pu, selon vous, produire de tels effets ?

Poser des questions sur les divers éléments de la situation, en évoquant des faits précis qui ont eu lieu. Pour chaque point, faire ressortir les éléments de la synthèse.

Cette consigne visait à permettre aux stagiaires de reconnaître ce qui dans le dispositif pouvait produire les effets qu'ils avaient rencontrés et invitait directement à un débat oral sur ce point. La consigne de 2000 vise davantage à faire travailler les *relations* du dispositif problème ouvert et sous une forme différente. La voici :

Cette situation de recherche de problème, telle qu'elle a été conduite, a produit certains effets que vous avez mis en évidence.

Nous vous proposons de travailler maintenant sur la situation vécue, son dispositif, pour mieux en comprendre le fonctionnement, et pouvoir disposer de points d'appui pour à votre tour conduire de telles situations en classe, et obtenir les effets attendus.

Vous utiliserez à votre guise l'espace de l'affiche pour mettre en évidence les relations entre les éléments de la situation et les effets qu'ils produisent.

L'avantage d'une représentation graphique pour les stagiaires est de limiter l'usage de la langue aux éléments repérés, pour que les exigences de formulation ne fassent pas obstacle à la production de liens significatifs. Par ailleurs, du point de vue de l'analyse du dispositif, elle constitue un élément de symbolisation de l'expérience vécue dans le dispositif problème ouvert sur un registre graphique qui complète les registres sensori-moteur et langagier mis en œuvre dans l'expérience. Un exemple d'affiche est proposé en annexe 3.

Ces affiches montrent bien un souci de mise en évidence d'une organisation de la situation, une recherche de liens entre différents moments de la situation (affiche 2). On y voit aussi une mise en évidence du rôle de chaque moment : par exemple l'affiche 3 montre un travail sur le rôle du maître; sur l'affiche 4, sont explicités le rôle du travail de groupe, le rôle de l'affiche, le rôle du maître.

Ce travail sur l'affiche, avec la consigne telle qu'elle a été donnée, a bien permis en un temps raisonnable (une petite heure) la formulation par les stagiaires des fonctions spécifiques des différents moments et de leurs articulations, ainsi qu'une explicitation et un début d'analyse du rôle du maître.

Etape 3 : échanges entre stagiaires, synthèse en grand groupe

Il y eut modification de l'orientation des échanges et de la synthèse en mettant l'accent dès le début sur les objectifs de la situation problème ouvert.

Les effets de la production des représentations graphiques -dont on remarque la richesse- apparaissent bien dans les échanges entre stagiaires autour de leurs affiches. Voici deux exemples d'échanges entre stagiaires sur les affiches

Ensuite l'élève à la fin du travail de groupe, il expliquait son travail et il argumentait ce qu'il avait fait, ça permet aussi aux élèves de découvrir d'autres pistes de travail, d'autres façons d'avoir traité le problème et l'énoncé. On a dit aussi que ça permettait, enfin dans le groupe, un partage du travail et une certaine spécialisation parce qu'on n'a pas non plus travaillé de la même façon. Moi j'ai dessiné beaucoup, et par contre j'ai été bloquée après

...

Outre l'explicitation de fonctions spécifiques du dispositif, ces citations nous montrent une appropriation de la situation par des va et vient entre une projection dans la position de l'élève puis un retour au vécu du groupe.

Dans l'exemple ci-dessous, il y a pointage d'éléments du rapport au savoir de l'élève en problème ouvert :

Et puis ce travail de groupe permettait aussi aux élèves d'émettre des hypothèses et de tenter de vérifier ce qui n'empêchait pas, pendant un certain temps, de rester sur des erreurs. Par exemple, dans le groupe, il y a une loi qui ...

Au fur et à mesure des échanges, le formateur reformule les remarques des stagiaires pour accentuer le caractère de généralité qui est déjà souvent présent. L'accent est mis sur l'organisation de la situation et l'analyse a priori avec les liens entre : objectifs - type d'énoncé - dispositif - rôle du maître et la conduite à travers les rôles du maître.

Etape 4 : Préparation de l'expérimentation

L'ancienne consigne consistait en une demande de préparation collective en petit groupe d'un problème ouvert en classe, incluant le choix et l'adaptation d'un énoncé et un début d'analyse a priori. Dans la nouvelle grille de préparation écrite, les stagiaires doivent, en plus de l'anticipation de l'expérimentation, ***indiquer un objectif personnel de formation par rapport à la conduite de problème ouvert.***

De plus, en vue de l'analyse de l'expérimentation, la consigne précise de : ***"Notez, pour le retour vos remarques par rapport à vos objectifs personnels de formation"***.

L'objectif personnel de formation sert de fil conducteur pour le stagiaire, et incite à une attitude réflexive. Nous faisons aussi l'hypothèse que se fixer cet objectif joue sur l'anticipation de la situation que le stagiaire construit pour son expérimentation.

Etape 5 : Retour sur l'expérimentation

Ce retour utilise un nouveau dispositif d'analyse de l'expérimentation faite en classe. Nous ne revenons pas sur le premier dispositif de 99-00. Nous présentons directement l'organisation du travail dans cette étape avec les consignes proposées. Cette étape comporte trois moments :

1. Un bilan individuel à partir d'une grille qui donne des pistes pour ce bilan ;
2. Un bilan par groupe ayant préparé collectivement l'expérimentation par niveau de classe et problème, ce bilan est élaboré sous forme d'une affiche qui est commentée lors des échanges ;
3. Des échanges sur les affiches.

1. Bilan individuel avec une grille

La nouvelle consigne orale est la suivante : ***"Vous listez : ce qui a été conforme aux prévisions, ce qui n'a pas été conforme"***. Elle est accompagnée d'une grille d'aide à l'analyse distribuée par écrit et qui est reproduite ci-dessous.

DES PISTES POUR FAIRE UN BILAN DE VOS OBSERVATIONS

1. Bilan du point de vue des élèves

- ***Types de procédures apparues.***
- ***Comportement des élèves pendant la recherche.***
- ***Evolution éventuelle par rapport au comportement habituel en mathématiques.***
- ***Nature des échanges, pendant la recherche et pendant le débat.***
- ***Comment s'est fait l'accord sur la validité des solutions?***

2. Bilan du point de vue de la mise en œuvre

- ***La consigne : a-t-il fallu la donner plusieurs fois? la compléter? la reformuler?***
- ***Avez-vous eu besoin de relancer la recherche et comment cela s'est-il passé?***
- ***Sous quelle forme ont été recueillies les procédures? Dans le cas d'une affiche, y a-t-il eu des résistances pour la rédiger?***
- ***Organisation et gestion du débat.***

Faites part des autres points que vous souhaitez voir aborder.

2. Bilan par groupe/niveau de classe/problème

Les groupes sont les mêmes que pour les préparations d'expérimentations. La nouvelle consigne distribuée par écrit et reprise à l'oral est la suivante :

Réalisez une affiche en 2 colonnes : ce qui a été conforme aux prévisions, ce qui n'a pas été conforme

Dans chaque colonne (conforme, non conforme), vous faites en groupe le choix d'un ou deux éléments sur lesquels il vous semble important de travailler : un élément de réussite, un élément de difficulté.

Pour ces éléments choisis, vous vous mettez d'accord sur une explication : vous explicitez les éléments de la situation qui permettent d'expliquer la conformité ou l'écart avec vos prévisions. Pour cela, vous pouvez vous aider des éléments mis en évidence lors de la séance précédente : document « Le problème ouvert à l'école », l'affiche de votre groupe sur l'analyse de la situation vécue.

Un rapporteur par groupe

Cette consigne vise à forcer l'analyse sur les éléments conformes explicables par le dispositif, et ceux non conformes. Cette non conformité peut être imputée soit à la complexité de sa réalisation effective, soit à des contraintes spécifiques aux classes, soit aux conceptions des enseignants, et ceci de façon évidemment non exclusive.

Les analyses et interprétations du moment suivant visent à départager ce qui relève des contraintes externes et ce qui relève des conceptions.

3. Echanges sur les affiches, exemples de citations de stagiaires

L'objectif de ces échanges est de provoquer le repérage par les enseignants des liens entre la situation problème ouvert et ses effets sur les modalités de travail des élèves, ainsi que sur les rôles et attitudes que cela suppose, qui peuvent être en conflit avec leurs propres conceptions. Par ailleurs ils permettent aussi d'affiner les interprétations des consignes par la reconnaissance des variantes possibles et de leurs effets.

Si en 99/2000, on restait sur du vécu, du type compte-rendu libre d'expérimentation, il nous apparaît qu'en 2000/2001 on obtient en plus des éléments d'analyse qui s'expriment par les liens que les stagiaires établissent entre ce que font les élèves et les aspects spécifiques du dispositif problème ouvert. Les items sont ceux qui sont choisis par les stagiaires pour approfondir ce qui a été constaté-- Nous proposons ci-dessous en exemple quelques citations extraites des échanges en FC.

Fonctionnement du contrat de recherche

une acceptation du contrat lié à la situation

tous les enfants ont accepté de se laisser conduire dans une situation de recherche et se sont impliqués, aucun n'a été incapable de présenter sa démarche, tout le monde a fourni un document dessin ou autre chose qui montrait sa façon de résoudre

les élèves sont conscients de la rupture de ce contrat

même s'ils mettent quelque chose ils sont persuadés qu'ils se sont trompés car ce n'est pas comme d'habitude. Ils vont oser quelque chose qu'ils n'oseront pas habituellement, même si ça n'aboutit pas moi je trouve intéressant qu'ils aient osé même si c'est faux

les effets sur les initiatives des élèves

le problème se prête bien à ce genre de chose, c'est-à-dire qu'on va oser faire, même si moi j'ai une réponse fausse mais malgré tout la démarche est intéressante

L'articulation affiche / travail de groupe / débat

Les inconvénients évoqués sont relatifs à la souffrance, la frustration dues à la complexité de rédaction d'une affiche. Produire une affiche est jugé trop ambitieux au CE1. Il est aussi noté

un appauvrissement de l'affiche par rapport au travail de groupe. Les avantages sont du côté de l'intérêt du débat dans les groupes comme compte-rendu pour la synthèse et la communication. Les échanges montrent aussi le rôle de l'affiche pour inciter les groupes à se mettre d'accord sur un contenu et faire des choix, et donc permettre et produire des confrontations, régulations, validations, soit internes au groupe en phase de production, soit inter groupes en phase de débat. Du point de vue de la formation, ces échanges permettent une structuration du dispositif "problème ouvert" par un retour sur les fonctions des diverses phases et leurs relations comme le montre le tableau ci-dessous qui donne des exemples d'échanges.

questions des stagiaires	réponses d'autres stagiaires
<u>Sur le rôle et le sens de l'affiche</u> -à quoi sert l'affiche? -est-ce que ça a du sens à ce moment-là?	-trouver toutes les solutions à présenter -il fallait qu'ils regroupent leurs solutions pour les présenter aux autres
<u>Sur la difficulté à produire l'affiche</u> -au CE1, c'est déjà rude, c'est douloureux ne faire qu'une seule chose pour trois (sur une seule affiche), c'est peut-être pas possible à la limite -on s'est demandé si on ne leur demandait pas quelque chose de trop difficile à ce moment-là, on leur demande la production de l'affiche -est-ce que au CE1 c'est pas un moment où justement c'est trop dur de trouver, puis d'abandonner quelque chose, voilà	-ça permet un certain nombre de régulations ou de confrontations ou d'invalidations par eux-mêmes -ils ont validé, ils ont rayé, ça c'est un travail au moment de la rédaction de l'affiche -c'est déjà une validation à l'intérieur du groupe
<u>Sur le rôle de la mise en commun</u> -la mise en commun a-t-elle un sens au CE1, est-ce qu'on fait une vraie synthèse, est-ce que l'affiche n'est pas quelque chose de très artificiel	-justement s'il n'émerge pas une solution sur laquelle on peut être d'accord, tout en ayant conscience qu'il y en a encore plein derrière hein, mais celle-là on va pouvoir débattre et l'exposer aux copains, si ça ne sert pas à ça, pourquoi en faire une ? -ils se sont corrigés entre eux c'est-à-dire qu'ils ont vu les erreurs des autres et d'eux-mêmes, avec leur crayon ils sont allés soit barrer s'il y avait en trop soit lui dire non continue tu n'as pas fini, ils ont même résolu le problème

En lien avec la production d'une affiche, il y a eu un débat sur les avantages et les inconvénients d'avoir à adopter une solution commune ou pas, certains stagiaires s'étant d'ailleurs refusés à contraindre les élèves à se restreindre à une seule solution. D'où un échange sur les effets des diverses consignes de production d'affiche : présenter les solutions du groupe ou présenter une solution commune pour le groupe et le repérage de la contrainte de rédaction qui limite ce qui est communiqué.

- ah non ta consigne elle est différente si tu dis vous vous mettez d'accord sur une réponse
- ah oui ou bien, mettez vos différentes solutions, le gamin il a pas la même chose dans la tête
- il y en a certains qui avaient compris qu'on pouvait mettre plusieurs solutions, mais c'était tellement compliqué que dans l'ensemble ils ont fait plus pauvre que ce qu'ils avaient fait

Ouverture sur la pratique professionnelle : prise de distance, position réflexive

Les stagiaires vont plus loin dans l'analyse et manifestent ainsi cette position réflexive que nous cherchons à provoquer. L'enseignant se détache de la description d'un fait précis, et

poursuit l'analyse en procédant à des déclarations sur sa pratique voire sur la pratique enseignante relative au problème de recherche en général. Il prend conscience de ce que ce travail peut permettre (validation, correction des erreurs). Il se donne des prescriptions à lui-même en termes de méthodes. Il se détache de la description d'un cas particulier et repère que la manipulation est un outil pour gérer l'hétérogénéité. Plus précisément suivant les stages, les points les plus saillants ont été les suivants :

- en formation continue comme en formation PE2 on note particulièrement la découverte d'un autre regard sur les capacités des élèves :

Je ne m'attendais pas à ce qu'ils se valident entre eux, et qu'ils discutent entre eux de leurs erreurs et qu'ils se les corrigent

- la possibilité pour l'enseignant de valoriser des démarches élémentaires :

Elle a manipulé elle a mis sa solution puis après elle a dit j'aurais pu enlever une grande puis mettre une petite...ça l'a un petit peu mise en valeur parce qu'elle a essayé de trouver à partir de sa manipulation d'autres solutions. - En fait on est revenu au matériel au moment de la validation pour la validation de la synthèse on est revenu à un regard sur l'action d'un élève par la manipulation matérielle

- la découverte d'une autre forme de pratique pédagogique et de son intérêt :

on a vu aussi des enfants qui avaient la réponse et qui auraient pu nous dire mais qui n'osaient pas, ils avaient peur de se tromper voilà, eh ben on pense qu'en fait c'est à nous de faire ce genre d'activité le plus souvent possible de leur faire travailler l'expression orale et puis de les aider aussi peut-être en posant des questions pour les aider à retrouver leur cheminement

- en formation initiale PE2, on note particulièrement la découverte de l'importance du temps de travail individuel des élèves ; l'influence de l'analyse *a priori* de la situation par le maître pour la qualité de la mise en commun qu'il anime ; également le rôle du problème ouvert comme outil pour permettre à l'enseignant de prendre de l'information sur les connaissances de ses élèves.

De prévoir les procédures, ça a été très bénéfique [...] ça a permis de beaucoup mieux organiser la séance [...] on sait comment on va amener la mise en commun par la suite, on sait dans quel ordre vont être montrées les productions, et ça permet de bien mieux gérer la leçon de maths. -On a essayé aussi d'expliquer pourquoi ils avaient fait une erreur à laquelle on n'avait pas pensé, dans l'ignorance de la commutativité de l'addition

- on peut noter aussi le manque de distance par rapport à ce qui est dit en formation

...normalement, dans un problème ouvert, on ne doit pas apprendre de nouvelles connaissances

5. Analyse du dispositif

5.1. Une visée de formation professionnelle

D'un constat à un choix d'objets de formation

Dans les premières formations que nous avons observées -et qui correspondaient aux dires des formateurs eux-mêmes, à des formations habituelles- la formulation de la théorie du problème ouvert était organisée sous la responsabilité dominante du formateur. Notre interprétation est qu'il y a dans ce cas espoir pour le formateur de "reproduction culturelle mimétique" (Chevallard) par la possibilité de parler correctement de l'objet "problème ouvert" et de ses difficultés, mais une telle reproduction se fait sans moyen pour l'enseignant d'en contrôler la réalisation effective du point de vue de ses potentialités pour les apprentissages des élèves. *Plus généralement, des apprentissages culturels peuvent permettre l'usage sémantique de certains concepts alors que les instruments et les moyens de contrôle en permettant un usage idoine ont fait l'objet d'une construction insuffisante dans l'expérience.*

Il y a ainsi risque de dégradation par rabattement sur la réalisation d'un scénario repéré par des indicateurs de surface sans moyen de contrôle approprié.

L'enjeu et l'originalité du nouveau dispositif est de proposer une situation permettant de faire formuler par les stagiaires eux-mêmes les relations entre les éléments du dispositif "problème ouvert" et les effets qu'il permet de produire sur les élèves.

L'élaboration de ces relations constitue le véritable travail conceptuel des stagiaires. Le résultat de ces élaborations constitue pour les stagiaires leur théorie du dispositif "problème ouvert" comme représentant générique du problème de recherche.

Précisons cette idée de théorie. Le dispositif "problème ouvert" se présente comme une succession d'étapes dont la description se fait en langage courant (recherche en groupe, production d'affiches, conduite de débat etc...). Chacune de ces étapes a ainsi en soi une signification claire en elle-même. Mais le dispositif global prend sa signification et permet les effets attendus par la succession des étapes, les relations qu'elles entretiennent sur divers registres et les subtilités de la mise en scène et de la gestion de l'ensemble par l'enseignant.

Ce sont ces relations qui donnent leur sens et leur importance à chaque étape et constituent la théorie du problème ouvert.

Dans la formation, plusieurs analyses du fonctionnement du dispositif permettent la compréhension de ces relations. Cette compréhension approfondit et modifie le sens des divers moments et caractéristiques du dispositif et permet la construction d'une théorie du dispositif comme *structure cohérente finalisée*.

On peut dire de façon plus savante que l'analyse des dimensions pragmatiques du dispositif modifie les interprétations des énoncés qui permettent d'en parler. De façon générale d'ailleurs, ceci est vrai pour n'importe quel dispositif et peut constituer une clé pour la construction de situations de formation destinées à articuler savoirs pratiques et savoirs plus théorisés.

Dans le nouveau dispositif que nous avons élaboré et qui est présenté ci-dessous, cette élaboration de la théorie du dispositif se produit à plusieurs moments sous diverses formes.

Le premier moment est l'analyse par les stagiaires d'une situation de recherche d'un problème mathématique qu'ils ont vécue au début de la formation.

Le second moment est la préparation et l'analyse *a priori* des expérimentations envisagées dans lesquelles les stagiaires élaborent collectivement par groupe de niveau de classe les situations de recherche qu'ils vont expérimenter avec leurs élèves.

Le troisième moment est l'analyse des réalisations en classe. Celle-ci passe par la confrontation aux anticipations avec comme référence la théorie du dispositif, construite collectivement auparavant. Ce troisième moment constitue la mise à l'épreuve par l'expérience de la théorie construite auparavant et constitue ainsi une phase de critique sous les contraintes de l'action effective en classe; puis si possible de validation de cette théorie.

Professionalité

La professionnalité peut se définir comme la "somme des connaissances, capacités et expériences professionnelles ainsi que la capacité à s'investir et à les mobiliser dans l'action" (Bourdoncle R. & Hédoux J., 1996). Mais certains problèmes professionnels ne sont pas visibles spontanément. En particulier, ceux relevant de la construction et/ou de la conduite de dispositifs d'apprentissage spécifiques, de la construction et de la gestion du rapport à l'erreur etc. De plus, la possibilité de transformer une difficulté en problème passe par une problématisation par rapport à une référence reconnue, d'où la nécessité d'une référence qui doit faire sens par rapport aux problèmes professionnels et à l'identité. On comprend alors l'importance que peut avoir la construction collective de cette référence et la raison de l'insistance sur l'élaboration collective d'une théorie du problème ouvert. Par ailleurs, Ardoïno

théorise le passage d'une pratique (habitude, quasi automatique) à une praxis (pratique construite, intelligible) par une prise de conscience et une vigilance critique passant par l'objectivation permise par la mise en texte (Ardoino J. & Berger G., 1989). S'il existe d'autres modélisations de la mise en œuvre d'une pratique réflexive, cette interprétation nous incite à envisager des formes de mise en texte permettant l'objectivation, ce que nous avons fait avec le travail sur les affiches.

Formation au problème ouvert comme ingénierie générique

Le problème ouvert pour lui-même

La formation au problème ouvert pour lui-même vise à donner un modèle de mise en œuvre du problème de recherche à l'école élémentaire. Elle peut être utilisée comme ingénierie permettant d'introduire deux types de situations de classe : situation-problème et problème de recherche. A ce niveau, le problème ouvert est pris pour lui-même, il s'agit de permettre au stagiaire de s'approprier en les reconstruisant pour lui-même des schèmes sociaux d'utilisation déjà décrits extérieurement à lui. Cette construction inclut une compréhension de la signification du problème ouvert comme théorie, ce qui correspond à une situation de formation spécifique. Son appropriation pour l'action réussie en classe relève d'une expérimentation anticipée et d'un retour réflexif sur l'action. Ce retour réflexif nécessite aussi une situation de formation appropriée.

Le problème ouvert comme moyen

Dans cette perspective, l'expérimentation de problèmes ouverts est l'occasion de poser des *questions génératrices* de la pratique professionnelle (Chevallard) à travers son utilisation comme lieu de travail (observation, mise en œuvre et /ou construction) de gestes et savoirs professionnels génériques et occasion de retour réflexif sur la pratique.

Dans cette perspective, il est facile de dresser une liste de gestes et/ou connaissances professionnels travaillés dans la situation problème ouvert et décontextualisables :

Sur la notion de situation

- importance fondamentale de l'analyse *a priori* pour structurer avant, piloter pendant, analyser après.

- passer de l'observation de l'élève à l'observation des effets d'un dispositif spécifié sur les comportements et connaissances ;

- notion de situation comme organisation théorique structurée, cohérente et finalisée ;

- mise en cohérence entre objectifs, types de tâches, dispositif, rôles et attitudes du maître, effets produits.

- rôle du milieu, dévolution, implication et travail autonome ;

Sur le rapport au savoir

- travail sur des variables du rapport au savoir de l'élève, sur ses capacités suivant la situation ;

- travail sur les rapports aux mathématiques et à l'erreur (de l'élève et aussi du professeur) ;

Sur les modalités d'intervention et les dimensions en jeu

- aides versus médiation, respect de positions ;

- rôle du débat, argumentation, rapport à l'erreur versus attitudes et valeurs sociales ;

Sur des aspects techniques des modalités de conclusion

- modalités de la validation ;

- gestion de phases de conclusion.

La reconnaissance du caractère générique des gestes professionnels que le problème ouvert permet d'expérimenter doit aussi passer par une situation de formation appropriée. Il s'agit de

permettre la construction de schèmes dont la signification est donnée par les transformations qu'ils permettent sur les formes d'activités et d'interactions enseignant-élève.

5.2. Repenser le dispositif de formation

Des hypothèses

-L'appropriation de l'ingénierie et de son caractère générique nécessite une construction de sa signification et sa mise à l'épreuve par les stagiaires eux-mêmes collectivement et en coopération.

-Il est pertinent de réutiliser la notion de *situation* de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) construite pour les apprentissages des élèves, car en général, les connaissances se construisent en situation de résolution de problème (pannes, crises), mais ces connaissances sont d'abord des connaissances de l'action. Dans ce cadre, il faut donc prendre en compte l'importance du rôle de situation de *formulation* comme intermédiaire permettant de passer de l'action à la validation, des connaissances au savoir.

-Cette formulation se fera plus facilement dans le langage déjà disponible dont la signification sera retravaillée à cette occasion, les notions nécessaires ayant été construites collectivement auparavant dans une situation d'action.

Une méthode

Permettre une *formulation par les stagiaires eux-mêmes* de la "théorie du problème ouvert" en deux étapes : d'abord comme instrument pour anticiper l'action ; ensuite comme instrument pour analyser sa réalisation, c'est-à-dire repenser le dispositif décrit par la théorie et les gestes professionnels pour le conduire, leur cohérence et leurs effets. De plus, permettre à chaque fois la *validation* par un débat collectif et coopératif appuyé sur une référence construite auparavant.

D'où une formation en deux temps en pensant les situations de formation avec les outils de la théorie des situations didactiques de Brousseau (TSD) et de la théorie de l'anthropologie didactique (TAD) de Chevallard. Du point de vue de la TSD, suivant les types de savoirs visés le dispositif didactique de formation prend comme milieu : soit une situation vécue en formation (recherche complète d'un problème ouvert (PBO)), soit une situation de classe destinée à expérimenter la validité de modèles d'action (systèmes organisés de connaissances permettant la construction ou le choix d'une stratégie).

Du point de vue de la TAD, le type de tâche visé est la conduite d'un problème ouvert. La technique et la logique de la technique sont constituées du dispositif problème ouvert avec ses phases et leurs techniques de gestion organisées en théorie cohérente.

5.3. De la pratique à la "pratique instruite"

Le tableau ci-dessous résume de façon synthétique les diverses situations proposées en formation. Nous verrons ensuite un autre tableau qui en propose diverses interprétations.

Situations proposées	Modalités de travail connaissances mises en œuvre et savoirs en jeu
I- Vivre une situation faire des maths, rechercher un problème	recherche en groupes d'un problème mathématique, production d'affiches, débat de validation
II- Du vécu au texte élaborer une affiche sur le dispositif de I	étudier le le PBO comme modèle par la mise en mots et en liens des objets du dispositif sur un registre énonciatif , discursif et graphique
III-Présentation, échanges, confrontation Synthèse	explicitation collective de la théorie du dispositif : les objets et leur sens via la signification des liens entre les objets le PBO comme modèle premières mises en lien avec d'autres modèles (apprentissage, mathématiques, rôles)
IV-Du texte à l'action programmée préparation d'une expérimentation élaboration de stratégies Repérage d'items professionnels	- mise en œuvre de techniques et méthodes vues en II et III - anticipation d'objets à travailler à partir de modèles d'action
Expérimentation en classe	en plus de ce qui est anticipé, il y a usage nécessaire de savoirs <u>personnels</u> pour réaliser les gestes prévus
V- Retour sur l'action programmée, réalisée compte rendus analyse	sur le registre "conforme ou non" élaboration de l'analyse sur des objets choisis par les sujets mises en lien avec d'autres modèles (apprentissage, mathématiques, rôles)
VI- Présentations, échanges	communication, confrontation régulation, validation

tableau I

Nous proposons maintenant un tableau montrant une analyse du dispositif en explicitant les concepts de la TSD et de la TAD qui en ont guidé l'élaboration. La principale idée a été au départ de constituer des situations de "formulation" des savoirs professionnels susceptibles d'être l'enjeu de la formation. Cela nous a obligés à expliciter ce que pourraient être des savoirs professionnels d'une situation de recherche en complétant et précisant ceux décrits dans (Arsac et al. 1984 et 1988) et surtout en mettant en évidence leur dimension générique.

Fonctions de la situation cognitives et praxéologiques		Eléments d'un modèle du point de vue du dispositif global
Constituer une <i>référence vécue</i>	I- Vivre une situation	<i>situation d'action en mathématiques</i> première rencontre avec le PBO comme activité mathématique
<u>1er moment réflexif</u> construire l'intelligibilité (la théorie) de la situation <i>Identification, conceptualisation</i>	II- Du vécu au texte	<i>"formulation"</i> première rencontre avec le <u>dispositif</u> PBO comme organisation théorisée élaboration de la technologie
Constituer une <i>référence théorique</i> Structurer le modèle d'action par la mise en évidence des éléments clés et de leurs interactions <i>décontextualisation de I</i>	III- Echanges	<i>validation et institutionnalisation</i> <i>homogénéisation du groupe,</i> <i>dépersonnalisation des interprétations,</i> <i>institutionnalisation locale</i>
- <u>contextualisation</u> de la technique mise en œuvre d'une vigilance préparatoire à une attitude réflexive par le repérage d'items à observer et la formulation d'objectifs personnels de formation	IV- Du texte à l'action programmée	première rencontre avec le PBO comme activité à organiser dans sa classe exploration du type de tâche : organiser un PBO élaboration d'une technique
constituer une <i>référence professionnelle</i> pour l'explicitation et l'analyse de problèmes et gestes professionnels	Expérimentation en classe	première rencontre avec le PBO comme réalisation dans sa classe mise à l'essai de la technique <i>la classe comme milieu de l'action du prof,</i> <i>situation d'action</i>
<u>2nd moment réflexif</u> émergence de problèmes mise en relation théorie/pratique <i>contextualisation</i>	V- Retour sur l'action	<i>formulation</i> <i>retour sur l'action</i> évaluation de la technique réalisée
retour sur la cohérence, la raison d'être, la portée et la pertinence du dispositif. repérage de variables par l'analyse des variations. <i>décontextualisation % PBO</i>	VI- Echanges	<i>formulation de problèmes de réalisation</i> <i>décontextualisation et ancrage des savoirs nouveaux dans les savoirs anciens avec</i> <i>institutionnalisation des diverses relations</i> <i>validation et institutionnalisation</i>
"montrer" la généricité des gestes professionnels travaillés <i>décontextualisation</i>	VII	changement de registre : construction de l'identité professionnelle

tableau II

6. Quelques effets de la formation

Un questionnaire a été adressé aux 19 stagiaires de la formation continue de 2000/2001. Parmi les 19 stagiaires, 9 ont répondu. A propos des questions qui portent sur la réalisation de problèmes ouverts, 8 stagiaires déclarent avoir intégré des problèmes ouverts dans leur progression sur 2001/2002. Le 9^{ième} est un titulaire remplaçant qui n'a pas eu de classe assez

longtemps pour mettre en œuvre des problèmes ouverts. Les raisons invoquées sont du côté des avantages pour les élèves : intérêt et bénéfice de la recherche, de la mise en commun. Il s'agit aussi pour l'enseignant de développer une attitude, de négocier un contrat (*"faire prendre conscience aux enfants qu'ils sont tous capables de chercher, d'inventer, de trouver"*; *"le groupe classe mûrit dans sa socialisation et sa vigueur intellectuelle"*).

Une question concernait les modifications éventuelles de l'attitude de l'enseignant vis-à-vis des élèves : nous leur demandions quelles sont celles qu'ils attribuent à la formation à la conduite de problème ouvert. Les réponses font part de l'usage du dispositif "problème ouvert" et de son extension à d'autres disciplines. Les enseignants disent avoir modifié leur pratique sur les points suivants : découverte des connaissances et compétences des élèves et appui sur celles-ci, modification dans le traitement de l'erreur, modification du rôle de l'enseignant dans le sens d'un souci de dévolution, appui sur le contrat créé, transfert des compétences à d'autres situations, en particulier meilleure maîtrise des mises en commun, confiance dans la capacité à les conduire.

Au vu de ces réponses, il semble bien qu'il y ait construction et identification de compétences professionnelles (gestes, attitudes) utilisables dans l'ensemble de la pratique. Par ailleurs, et bien que cela ne corresponde pas à ce qui est demandé, les stagiaires ne peuvent s'empêcher de mentionner divers effets de la pratique du problème ouvert, observés chez leurs élèves, et divers bénéfices pour le contrat en classe (prise en compte de divers niveaux de solutions, sans en dévaloriser certaines, possibilité offerte à chacun de résoudre avec ses propres moyens, plaisir de la recherche, développement de la confiance en soi, d'une forme d'assurance, par le fait de rapporter son travail aux autres, responsabilisation des élèves vis à vis de leur travail).

7. Conclusion : questions et perspectives pour l'exploitation du dispositif

7.1. Effets du nouveau dispositif de formation

Le nouveau dispositif de formation a permis principalement trois choses : d'abord, les questions des stagiaires qui étaient restées sans réponse dans les formations de 99/2000 émergent plus tôt, et sont traitées ; par ailleurs, des éléments d'analyse sont produits par les stagiaires eux-mêmes et leur permettent d'aller plus loin dans leurs explicitations de gestes professionnels finalisés ; enfin des compétences professionnelles génériques sont construites et identifiées par certains stagiaires.

Se pose alors la question de l'institutionnalisation : il faudrait pointer avec les stagiaires ces acquis professionnels et faire prendre conscience à un plus grand nombre de leur caractère générique.

7.2. Quels moments et objets pour une institutionnalisation ?

Les échanges entre stagiaires permettent de cerner deux types d'objets sur lesquels pourrait porter l'institutionnalisation.

Sur la conduite d'un problème de recherche

Par exemple, le problème de recherche permet à l'enseignant de prendre de l'information sur les connaissances et compétences des élèves. Souvent, en tant qu'enseignant, on sous-estime les compétences et on surestime les connaissances.

En s'appuyant sur la réflexion concernant la phase de conclusion en problème ouvert, on peut mettre en évidence avec les stagiaires le fait qu'il est possible de pointer des connaissances

produites et des méthodes utilisées par les élèves sans pour autant les hiérarchiser, et qu'on ne s'interdit pas de les réutiliser de diverses manières ! tout tient à la façon de conclure.

Différents enjeux sont à tenir dans la classe, concernant en particulier le rapport à l'erreur, et le rapport au savoir : connaissances (liens entre procédures, limites). Une même situation peut permettre de gérer différents types d'enjeux.

Sur l'explicitation des gestes professionnels

Il faudrait intégrer au dispositif une situation de formulation des compétences professionnelles travaillées. (Elle prendrait place en position VII sur le tableau II du paragraphe 5). Des exemples de gestes et/ou connaissances professionnels travaillés dans la situation problème ouvert et décontextualisables ont été cités en fin de 5.1. Cette dernière situation permettrait la mise en évidence de leur caractère "générique" par les stagiaires, ce qui en constituerait une décontextualisation. Cette dernière situation devrait permettre de renforcer les acquisitions que montrent les réponses post stages ci-dessus. Dans la formation expérimentée, cette explicitation a été faite par le formateur lui-même par manque de temps. Une situation de formation plus élaborée nous paraît nécessaire pour faire travailler la décontextualisation. A cet effet, les notions de situation de rappel de type I et II de Perrin-Glorian (1994, p. 140) peuvent être utilisés avec pertinence pour penser la situation de formation correspondante.

7.3. Mise en cohérence avec le reste de la formation

Il faudrait aussi pouvoir travailler sur les savoirs professionnels qui émergent dans ce travail et faire en sorte qu'ils puissent être réinvestis dans d'autres types de situations. Un dispositif serait à construire pour intégrer nos concepts de formation dans un contexte approprié à l'ITUFM. La mise en œuvre en formation continue est moins complexe.

Références

- Altet M. (1996) Les Compétences de l'enseignant-professionnel : entre savoirs, schèmes d'action et adaptation, le savoir analyser. In Paquay L., Altet M., Charlier E. et Perrenoud P., Former des enseignants professionnels. De Boeck Université.
- Arsac G., Germain G., Mante M., Pichod D., (1984), La pratique du problème ouvert, IREM de Lyon.
- Arsac G. Balacheff N., Mante M., (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations. Educational Studies in Mathematics, 23, 5-29.
- Arsac G., Germain G., Mante M., 1988 : Problème ouvert et situation problème. IREM de Lyon, n°64, 1988, 117 pages.
- Blanchard Laville C. (sous la direction de) (1997). Variations sur une leçon de mathématiques. Paris : L'Harmattan.
- Bloch I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Recherches en didactique des mathématiques, 19/2, 135-19.
- Bourdoncle R. & Hédoux J., Professionnalité des sciences de l'éducation et professionnalisation des cursus. Tentatives de clarification; Bulletin de l'AECSE, 1996, n°19, pp. 8-15.
- Brousseau, G., (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, 7/2,, 33-115.
- Brousseau, G. (1990) Le contrat didactique, le milieu, Recherches en Didactique des Mathématiques 9/3, 309-336.
- Brousseau, G., Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique, Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques, IREM de Clermont Ferrand, pp. 16-31.
- Brousseau G. et Centeno, J. (1991) Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant , Recherches en didactique des mathématiques, 11/2-3, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard Y (1991), La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné. 2^e éd, postface, La Pensée Sauvage.
- Chevallard Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, in La transposition didactique à l'épreuve, La Pensée Sauvage.

- Chevallard Y., (1995), La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique, Actes de la VIIIème Ecole d'été de didactique, IREM de Clermont-Ferrand.
- Connes, A. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12/2.3, 221-270.
- Crahay M. (1989) Contraintes de situation et interactions maître-élève : changer sa façon d'enseigner est-ce possible? *Revue Française de pédagogie*. 88 67-94)
- Coppé S. Balmes R. S. (1999). Les activités d'aide à la résolution de problèmes en cycle 3. Grand N 63. IREM de Grenoble.
- Favre D. (1995) Conception de l'erreur et rupture épistémologique, *Revue Française de pédagogie*, n°111, avril-mai-juin 1995, 85-94
- Gauthier C.(Ed.) (1997). Pour une Théorie de la pédagogie. Recherches contemporaines sur le savoir des enseignants. Montréal : De Boeck Université.
- Gardes D. (1998), Effets à long terme d'une formation à la résolution de problèmes en mathématiques, mémoire de DEA, LIRDHIST, Université de Lyon 1.
- (Gomez F., Le mémoire professionnel, revue de travaux, les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle, 1999, vol.32, n° 4-5,
- Granger G.G.(1976), Syntaxe, sémantique et pragmatique, in « *Revue internationale de philosophie* », 1976, No 117/118
- Granger G.G (1994), Formes, opérations , objets, Paris, Vrin
- Greeno J., Leinhard G. (1986). The Cognitive Skill of Teaching, *Journal of Educational Psychology*. 78/2, 79-95.
- Joshua S. (1996). Le concept de transposition didactique n'est-il propre qu'aux mathématiques ? In C. Raïsky, M. Caillot (Eds.). Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour des concepts fédérateurs. De Boeck Université.
- Julo J. (1995). Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. P.U.R.
- Lerouge A. (1999). Logique didactique et logique d'acteur dans l'analyse d'une séance de mathématiques, in Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques, IUFM de Caen, pp 142-146.
- Nimier, J. (1989), Entretiens avec des mathématiciens, IREM de LYON
- Peix A, (1997) Utilisation des problèmes ouverts en formation de professeurs d'école à l'IUFM de Lyon. Mémoire de DEA, LIRDHIST, Université de Lyon I.
- Peix A, Tisseron C., (1998) Les problèmes ouverts, un outil de formation pour les professeurs d'école ? *Petit x*, 48, 5-20.
- Perrin, M. J. (1994), théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives, in Artigue, M. et al. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble, La Pensée Sauvage. pp. 97-147.
- Perrin, M. J. (1997). Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères* 29, 43-66.
- Plantin C., (1996) l'argumentation. Paris, Editions du Seuil
- Portuguais J. (1995). Didactique des mathématiques et formation des enseignants. Peter Lang.
- Robert A. (2001) Pourquoi une étude d'épistémologie en classe ? Comment la mener ? Que peut-on attendre des choix faits ? Quels manques ?, in Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 99-2000, IREM Paris 7, pp 87-116
- Rogalski J.(2000). Etude des pratiques de l'enseignant : concepts et méthodes de psychologie ergonomique. Actes du colloque de la COPIRELEM. Limoges 1999.
- Rogalski J., Samurçay R. (1994). Modélisation d'un "savoir de référence" et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. in *La transposition didactique à l'épreuve*, ouvrage coordonné par G. Arsac, Y. Chevallard J., L. Martinand et A. Tiberghien. La Pensée Sauvage Editions. Grenoble.

Annexe 1 Questionnaire posé en 99-00 en début et fin de formation

Merci de bien vouloir remplir ce document pour nous aider à améliorer notre formation.

Ce questionnaire vous est proposé en début et en fin de module.

Indiquer s'il s'agit d'un questionnaire de DEBUT ☐ ou de FIN ☐

Pour le dépouillement, indiquez un code personnel :/..../..../..../

	Affirmations	Tout à fait contre	Plutôt contre	Plutôt pour	Tout à fait pour
1	Chercher un problème c'est trouver la solution				
2	Chercher un problème c'est élaborer des démarches				
3	Faire des mathématiques c'est d'abord appliquer des règles				
4	En problème de recherche, toutes les productions sont à prendre en compte				
5	Chercher en mathématiques est à la portée de tous les élèves				
6	Pour que tous les élèves cherchent un problème le maître doit guider certains				
7	Un problème de recherche est un moyen pour remotiver les élèves en difficulté				
8	Dans un problème de recherche, ce sont souvent les bons qui ont les meilleures idées				
9	Je ne peux proposer un problème que si les élèves ont les outils appropriés pour le chercher				
10	En recherche de problème, je dois répondre aux attentes des élèves				
11	Je pense que le maître ne peut pas avoir accès à tous les apprentissages qui se font en recherche de problème				
12	Je ne dois pas laisser les enfants s'engager dans une mauvaise direction en recherche de problème				
13	Je ne propose des problèmes de recherche en classe que si j'ai le temps				
14	Je pense qu'on ne peut pas travailler efficacement à la résolution d'un problème dans le bruit				
15	Les élèves aiment chercher des problèmes				

Annexe 2 : Synthèse des réponses au questionnaire en 99-00

Problème de recherche et activité de l'élève

Question n°5

Chercher en mathématiques est à la portée de tous les élèves

Evolution souhaitée : vers **pour**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
14	9	77	84	4	2	16%	10%

Question n°7

Un problème de recherche est un moyen pour remotiver les élèves en difficulté

Evolution souhaitée : vers **pour**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
30	7	64	77	15	6	34%	8%

Question n°8

Dans un problème de recherche, ce sont souvent les bons qui ont les meilleures idées.

Evolution souhaitée : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
19	10	40	64	11	7	22%	11%

Question n°14

Je pense qu'on ne peut pas travailler efficacement à la résolution d'un problème dans le bruit

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
20	10	52	61	13	6	23%	11%

Question n°15

Les élèves aiment chercher des problèmes

Evolution attendue : vers **pour**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
16	6	77	81	4	1	18%	7%

Rapport aux mathématiques du professeur, représentation de l'activité mathématique

Question n°1

Chercher un problème, c'est trouver la solution

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
27	15	31	53	17	9	31%	17%

Question n°2

Chercher un problème c'est élaborer des démarches

Evolution attendue : vers **pour**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
15	2	85	86	1	0	17%	2%

Question n°3

Faire des mathématiques c'est d'abord appliquer des règles

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
34	5	55	72	14	2	39%	6%

Rôle du maître, confiance dans l'élève et dans la situation

Question n°4

En problème de recherche, toutes les productions sont à prendre en compte

Evolution attendue : vers **pour**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
19	17	82	85	5	4	22%	19%

Question n°6

Pour que tous les élèves cherchent un problème le maître doit guider certains

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
22	11	31	37	9	3	25%	12%

Question n°9

Je ne peux proposer un problème que si les élèves ont les outils appropriés pour le chercher.

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
30	10	56	65	12	6	34%	11%

Question n°10

Pendant la recherche d'un problème, je dois répondre aux questions des élèves à propos de leurs solutions.

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
36	8	62	76	18	4	41%	9%

Question n°11

Je pense que le maître ne peut pas avoir accès à tous les apprentissages qui se font en recherche de problème.

Evolution attendue : vers **pour**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
22	12	53	63	12	7	25%	14%

Question n°12

Je ne dois pas laisser les enfants s'engager dans une mauvaise direction en recherche de problème

Evolution attendue : vers **contre**

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
11	19	82	78	1	5	12%	22%

Intérêt du problème de recherche

Question n°13

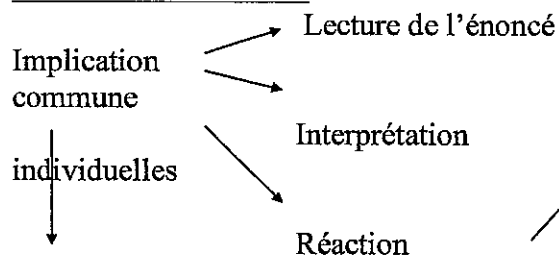
Je ne propose des problèmes de recherche en classe que si j'ai le temps

Evolution attendue : vers

évolution dans le sens		conforme au souhaité		basculement dans le sens		bilan	
souhaité	non souhaité	en début	à la fin	souhaité	non souhaité	+	-
15	16	72	73	6	5	17%	18%

Annexe 3 : un exemple d'affiche
(14/11/2000)

Recherche Individuelle

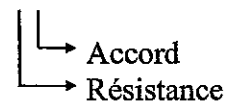


Tâtonnement
Calcul
Dessin

Contrat

Mise en commun

- S'écouter
- Relecture pour une entente
- Apport des solutions



Apport du Maître

Recherche de groupe

RESOLUTION DE PROBLEME

- Recherche d'une élaboration de règle
- Répertoire

com
mun

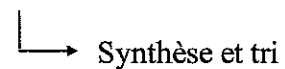
Synthèse collective

- Voir toutes les démarches utilisées
- Conclusion

— possibilité de prolongement

Rédaction de l'affiche

- Avec accord commun



- Constat des limites
- Si désaccord ?

Argumentation et raisonnement

Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques

Bettina Pedemonte ¹

Istituto delle Tecnologie Didattiche, CNR de Gênes

Résumé. Ce travail présente une analyse cognitive sur les rapports entre argumentation et démonstration. L'objectif de la recherche est de proposer un modèle comme outil méthodologique pour leur comparaison : le modèle de Toulmin. Le modèle permet de comparer l'argumentation et la démonstration selon deux points de vue : la structure, et le système de référence. D'une part, une analyse structurelle de l'argumentation et de la démonstration permet de rendre compte de certaines continuités ou écarts nécessaires pour passer d'une argumentation à une démonstration (d'une argumentation abductive à une démonstration déductive, d'une argumentation inductive à une démonstration par récurrence, etc.). D'autre part, il est possible, au moyen de ce modèle, de prendre en compte les énoncés mobilisés par les élèves pendant l'argumentation pour les comparer avec les théorèmes utilisés pendant la démonstration. La continuité ou l'écart du système de référence, conception ou théorie, s'appuie sur cette comparaison.

Introduction

L'apprentissage de la démonstration demande un changement de vision des mathématiques, progressant au-delà de la vérification expérimentale et de l'intuition pour adopter une démarche conforme à une théorie mathématique. Il ne s'agit pas d'apprendre des techniques mais de savoir les situer dans la théorie. L'objectif de la démonstration est d'établir la validité d'un résultat à l'intérieur d'un système théorique. Cet objectif est difficile à comprendre, et il est encore plus difficile de le faire comprendre. Mais on ne peut pas enseigner les mathématiques sans introduire la démonstration (Mariotti, 2001). Ceci explique les nombreuses recherches en didactique des mathématiques concernant la démonstration.

En tant que chercheurs, notre hypothèse est que la problématique de la démonstration doit s'inscrire dans une problématique plus vaste. En effet, la démonstration d'un énoncé répond à un problème de validité, mais une question sur la validité est posée avant la démonstration : souvent on démontre un énoncé dont on suppose la vérité. Et cette question ne peut pas se situer simplement au niveau de la démonstration. La démonstration est liée à une théorie mathématique, mais il y a souvent un processus précédant la démonstration, qui, au moyen des connaissances, non nécessairement théoriques, permet de construire les éléments de base pour la mise en place d'une démonstration.

C'est pourquoi la démonstration, comme objet d'étude de la didactique en mathématique, doit élargir sa problématique à un univers qui échappe aux « règles rigides » auxquelles elle est au contraire soumise. Balacheff, dans la Lettre de la preuve de Mai/Juin 1999, a proposé une problématique de l'argumentation.

Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et donc c'est renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une

¹ bettyped@tin.it, pedemonte@itd.cnr.it

argumentation. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration (Balacheff, 1999).

L'argumentation, en tant que processus moins contraint que la démonstration, permet d'avoir accès à des connaissances des élèves qui dans la démonstration ne sont pas nécessairement explicitées. Le problème de la vérité d'un énoncé se trouve finalement séparé du problème de sa validité. L'accès authentique à une problématique de la vérité et de la preuve se situe dans l'argumentation. C'est donc dans une problématique de l'argumentation que peut s'expliquer une problématique de la démonstration.

C'est ici que notre travail trouve son point de départ.

Objet d'étude et problématique

Les recherches didactiques qui s'intéressent aux rapports entre argumentation et démonstration sont nombreuses, et diffèrent radicalement les unes avec les autres. Le désaccord entre les recherches existantes s'appuie en particulier sur le rapport entre les suggestions didactiques pour l'apprentissage de la démonstration et l'analyse des aspects cognitifs qui interviennent pendant sa construction. Les deux points de vue auxquels nous faisons référence dans ce manuscrit sont les recherches sur l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) et celles sur les rapports de l'argumentation et la démonstration (Duval, 1995).

La liaison entre argumentation et démonstration a été mise en évidence dans le cas de problèmes demandant la construction d'un théorème, et donc la construction d'une conjecture et de sa démonstration. Certaines recherches prennent appui sur la présence d'une *unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996) entre l'argumentation qui conduit à l'explicitation d'une conjecture, et sa démonstration. L'hypothèse de l'unité cognitive énonce que pendant la construction d'une conjecture l'élève peut produire une activité argumentative dans laquelle il justifie la plausibilité des choix qu'il fait. Pendant la phase ultérieure de preuve, cet élève peut s'appuyer sur ce processus de façon cohérente en organisant les arguments déjà produits suivant une chaîne déductive.

Le sujet qui construit une démonstration à partir d'une argumentation fait intervenir ses propres connaissances. En conséquence, nous pensons qu'une analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration peut révéler des aspects significatifs pour l'apprentissage de la démonstration.

Plusieurs recherches expérimentales (Boero, Garuti, Mariotti, 1996 ; Garuti, Boero, Lemut, 1998; Mariotti, 2001) ont montré que l'accès à la démonstration à partir d'un processus de construction d'une conjecture est plus accessible à l'élève que dans un enseignement fondé sur l'apprentissage de démonstrations étrangères au sujet.

Une conséquence de cette étude, qui a une profonde signification didactique, est que l'unité cognitive peut être utilisée comme outil pour prédire et analyser certaines difficultés rencontrées par les élèves lors de leurs premières démonstrations. Une seconde conséquence est qu'une bonne façon d'initier les élèves à la démonstration est de leur proposer des problèmes ouverts (Arsac & al., 1991) qui demandent la construction d'une conjecture. En fait, dans le modèle de l'unité cognitive proposé par l'école italienne, l'argumentation devrait favoriser la construction d'une démonstration.

L'analyse de l'interaction sociale avait, au contraire, suggéré une hétérogénéité entre argumentation et démonstration d'ordre épistémologique (Balacheff, 1988), c'est-à-dire liée à un rapport à la connaissance, au passage du pragmatique au théorique dont les valeurs épistémiques et opératoires sont la signature cognitive. L'étude de ces rapports dans une

problématique cognitive et linguistique (Duval, 1995), a encore conforté l'idée d'une distinction forte entre argumentation et démonstration.

A partir d'une analyse fonctionnelle et d'une analyse structurelle de l'argumentation et de la démonstration Duval décrit leurs processus cognitifs sous-jacents. La double distinction entre valeur épistémique² et valeur de vérité d'une proposition d'une part, et entre contenu et statut d'une proposition d'autre part, constitue la clé d'une analyse fonctionnelle. Dans la démonstration, la valeur épistémique d'une proposition dépend du statut théorique, alors que dans l'argumentation elle serait complètement liée au contenu des propositions.

L'analyse structurelle prend en compte les structures d'argumentation et de démonstration. La démonstration peut être décrite par une structure ternaire : données, conclusion et énoncés. Ses pas sont connectés selon un processus de recyclage : la conclusion du premier pas devient le début du pas suivant. Au contraire, dans l'argumentation les inférences sont reliées par connexion intrinsèque, c'est-à-dire qu'elles sont connectées en prenant en considération le seul contenu. En conséquence, Duval soutient qu'il y a une distance cognitive entre argumentation et démonstration, qui n'est pas seulement logique mais elle est aussi cognitive.

... Il est important de voir que cette hétérogénéité (dans le cas d'un pas de déduction et dans le cas d'un pas d'argumentation) n'est pas seulement « logique » mais qu'elle est aussi cognitive, c'est-à-dire relative à des modes d'appréhension par un sujet (Duval, 1992-1993).

Les conséquences didactiques sont opposées par rapport à celles tirées à partir d'une hypothèse de l'unité cognitive. Duval soutient que les règles de construction d'un pas déductif doivent être enseignées et centrées sur le statut des propositions et pas sur le contenu. C'est pourquoi il propose un enseignement de la démonstration centré sur les graphes propositionnels.

Avec l'objectif de déterminer des solutions didactiques pour l'apprentissage de la démonstration, nous nous sommes proposée de répondre à une question clé :

y a-t-il continuité ou distance cognitive entre argumentation et démonstration ?

La difficulté que nous avons rencontrée pour donner une réponse à cette question nous a poussée à aller plus loin. Nous nous sommes posée une autre question :

Quel est le rapport d'une argumentation avec une démonstration ?

Les « outils » fournis par les recherches didactiques existantes n'étaient pas suffisants pour fournir une réponse à cette question. En particulier, nous avons besoin d'un outil méthodologique pour l'analyse de l'argumentation et de la démonstration, tel que la comparaison entre les deux processus puisse être non seulement possible, mais également bien fondée. L'objectif principal de ce manuscrit est de proposer cet outil méthodologique : le modèle de Toulmin.

Le champ mathématique que nous considérons pour accomplir cette étude est celui de la géométrie. Le niveau scolaire est restreint à celui du lycée.

Le modèle de Toulmin

Un argument dans le modèle de Toulmin est composé par un schéma ternaire :

E (claim) l'énoncé ou conclusion qu'apporte l'interlocuteur,

D (data) un certain nombre de données justifiant l'énoncé E,

P (warrant) le permis d'inférer qui fournit une règle, un principe général capable de servir de fondement à cette inférence, de jeter un pont entre D et E.

² La valeur épistémique est le degré de certitude ou de conviction attachée à une proposition (Duval, 1991)

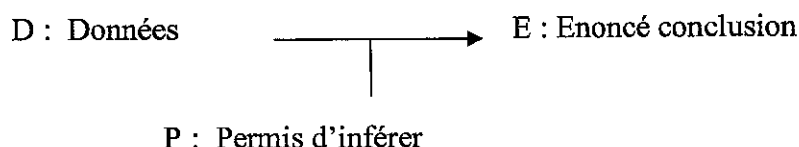
Le premier pas dans l'argument est l'expression d'un point de vue, c'est la conclusion, le but de l'argument. Cette affirmation doit être soutenue par l'argumentation. Nous appelons énoncé E ("claim", Toulmin 1958, p. 97) la conclusion de chaque argument.

Cette conclusion se base sur un certain nombre de données D ("data", Toulmin 1958, p. 97) qui sont produites pour soutenir l'énoncé. Les données sont significatives parce qu'elles sont le point de départ de chaque argument. Les données peuvent être constituées par des évidences, des faits, des informations, des exemples. C'est sur les données que l'énoncé conclusion s'appuie.

Pour passer des données à l'énoncé conclusion une "autorisation" qui légitime ce passage est nécessaire. Une règle, un principe général, un permis d'inférer P ("warrant", Toulmin 1958, p. 98) permet de jeter un pont entre données et énoncé conclusion.

Ce permis d'inférer est la partie de l'argument qui établit la connexion logique entre les données et l'énoncé conclusion. C'est la « raison » de l'acceptation ou de la réfutation de l'argument. C'est le point qui peut être réfuté par l'auditoire. Si l'argument n'est pas accepté, c'est justement le permis d'inférer qui est sous la critique (Toulmin, 1958, p. 100).

Le schéma ternaire peut être schématisé ainsi :



Ce schéma élémentaire n'est pas complet. L'articulation générale du discours peut être plus complexe et nécessiter trois étapes auxiliaires :

F (qualifier) l'indicateur de force de l'argument ;

R (rebuttal) la réfutation potentielle de l'énoncé conclusion ;

B (backing) le support du permis d'inférer.

En général, les règles et les données ne permettent pas d'inférer avec un degré absolu de certitude. C'est pourquoi, on utilise un indicateur de force F ("qualifier", Toulmin 1958, p. 102) qui précise avec quelle force le couplage des données à la loi permet d'atteindre l'énoncé. L'indicateur de force de l'argument peut ne pas être explicite, mais l'argument est toujours qualifié comme "vrai", "probablement vrai", "probable", etc.

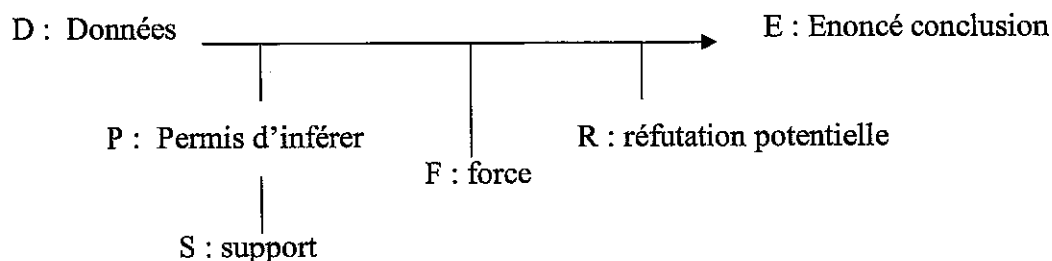
Il se peut que certaines circonstances particulières suspendent l'application du permis d'inférer au domaine des données. Le schéma argumentatif prévoit une place pour la restriction R de son énoncé. S'il y a des exceptions à l'énoncé la force du permis d'inférer est affaiblie. Les conditions des exceptions ou réfutations potentielles R ("rebuttal", Toulmin 1958, p. 102) sont alors prises en considération. Ces réfutations potentielles, ou restrictions, apportent un commentaire sur le rapport entre le permis d'inférer et la légitimité du passage des données à la conclusion ; elles signalent les circonstances dans lesquelles il faudra annuler l'autorité du permis d'inférer.

En conséquence, le permis d'inférer peut être mis en question. Il faut donc l'épauler, l'étayer d'un certain nombre de justificatifs, le support S ("backing", Toulmin 1958, p. 103).

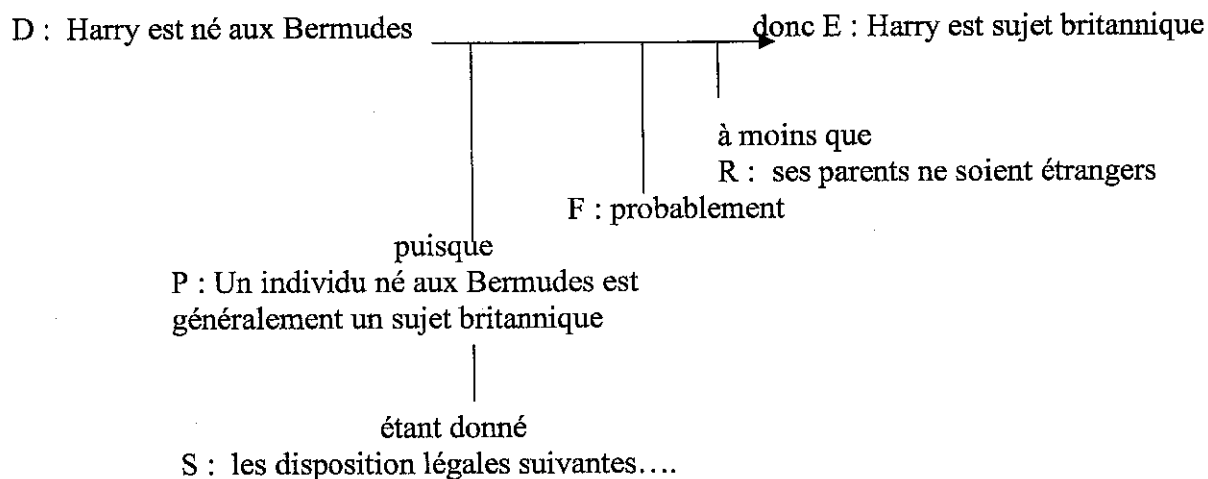
L'existence d'un permis d'inférer entre donnée et conclusion est justifiée par la légitimité de la question « Dans quelles conditions y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion ? ». Cependant, une autre question peut se poser : « Pourquoi y a-t-il une relation entre données et énoncé conclusion ? ».

C'est pourquoi un support peut être nécessaire dans la schématisation de l'argument. Si l'autorité du permis d'inférer n'est pas acceptée, un support au permis peut être demandé. Le support peut aider l'auditoire à comprendre le permis d'inférer ; sans le support il se peut que le permis ne soit pas accepté.

Le schéma complet est le suivant :



Toulmin donne l'exemple suivant :



Un tel modèle de l'argumentation nous permet de modéliser l'argumentation et la démonstration des élèves afin d'identifier une structure dans l'argumentation comparable avec celle de la démonstration. En particulier, l'argumentation peut être modélisée comme une chaîne de pas argumentatifs, chacun pouvant être comparé avec les pas correspondants de la démonstration. Et ce n'est pas seulement la structure de l'argumentation et de la démonstration qui peuvent être comparées. La comparaison entre la nature du permis d'inférer dans l'argumentation et dans la démonstration montre clairement que le permis d'inférer d'une démonstration est un théorème, alors que dans l'argumentation il ne l'est pas nécessairement. L'analyse de la nature du permis d'inférer nous permettra de faire la liaison avec les aspects fonctionnels de l'argumentation et de la démonstration, ce que nous appelons le *système de référence*.

Conjecture et théorème

L'argumentation et la démonstration sont en relation, comme le sont la conjecture et sa validation, le théorème.

D'après Balacheff « *l'argumentation est à la conjecture ce que la démonstration est au théorème* » (Balacheff, lettre de la Preuve 99 mai/juin). Ainsi, la distinction entre

argumentation et démonstration dans les productions des élèves peut être faite à partir de l'identification du théorème et de la conjecture.

Mariotti & al (1997) a défini le « théorème mathématique » comme un ensemble composé par un énoncé, une démonstration et une théorie mathématique. Le théorème existe parce qu'il y a une théorie mathématique de référence, c'est-à-dire un système de règles de déduction et de principes communément admis, nécessaires pour construire une démonstration.

The existence of a reference theory as a system of shared principles and deduction rules is needed if we are to speak of proof in a mathematical sense. Principles and deduction rules are intimately interrelated so that what characterises a mathematical theorem is the system of statement, proof and theory (Mariotti & al., 1997, p. 182).

Le théorème est institutionnalisé par la communauté des mathématiciens.

Néanmoins, il y a des énoncés mathématiques qui ne figurent pas dans le manuel scolaire et qui ne sont pas donnés par l'enseignant. Ces énoncés sont les théorèmes construits directement par les élèves à l'occasion d'activités de résolution de problèmes. Nous sommes intéressée par ces théorèmes construits dans la classe.

A partir de la définition de théorème (Mariotti & al., 1997), nous pouvons définir la *conjecture* comme l'ensemble d'un énoncé, d'une argumentation et d'un ensemble des conceptions. Nous faisons ici référence à la définition de conception donnée par le modèle cK ϕ ³ (Balacheff, 1995). La conjecture est potentiellement vraie parce que les conceptions du sujet ont permis la construction d'une argumentation qui la « justifie ».

Théorème	Conjecture
Énoncé Démonstration Théorie mathématique	Enoncé Argumentation Conceptions (modèle cK ϕ)

Il est utile de localiser la conjecture et le théorème parce que c'est surtout à partir de ces énoncés que l'argumentation et la démonstration (ou preuve) sont repérables. L'argumentation est liée à la conjecture et la démonstration au théorème. En outre, le début de la démonstration est souvent annoncé par l'élève lui-même.

Un premier découpage du processus de résolution de l'élève en argumentation et démonstration (ou preuve) est fondamentale pour leur analyse comparative.

Une fois que l'argumentation est modélisée, il est possible d'analyser sa structure et son système de référence. Dans la suite nous analyserons la façon d'accomplir cette analyse.

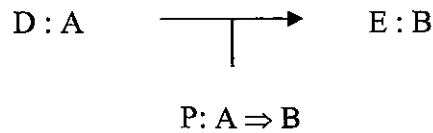
... pour analyser les structures entre argumentation et démonstration

La comparaison entre structure de l'argumentation et de la démonstration peut se faire directement à partir du modèle. Le modèle doit nous permettre d'identifier les structures de

³ La caractérisation d'une conception est rendue possible par la prise en compte d'une quadruplet : une sphère de pratique ou un ensemble (P) de problèmes; un ensemble (R) d'opérateurs qui permettent le traitement des problèmes; un système de représentation (L) qui permet la représentation des problèmes et des opérateurs; une structure de contrôle (Σ) qui donne et organise les fonctions de décision, de choix, de jugement de validité et d'adéquation de l'action (Balacheff, 1995, p. 223).

l'argumentation : déduction, abduction et induction⁴. Contrairement à la structure de la déduction, qui apparaît entrer naturellement dans le modèle, l'abduction et l'induction, nécessitent quelques précisions.

La représentation d'un pas déductif dans le modèle de Toulmin est la suivante :



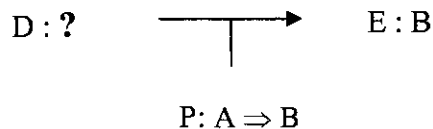
$A \Rightarrow B$ est la règle (ou le théorème) ;

A est une proposition d'entrée ou donnée ;

B est la conclusion

L'énoncé conclusion est déduit à partir des données et du permis d'inférer qui sont déterminés à l'avance. La règle d'inférence du « modus ponens » est cohérente avec le modèle.

L'abduction, au contraire, est un raisonnement qui part des conclusions et monte aux prémisses. L'énoncé conclusion et le permis d'inférer sont donnés, en revanche les données sont à chercher ; nous proposons la représentation d'un pas abductif dans le modèle de Toulmin de la façon suivante :

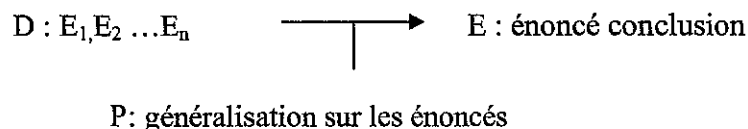


Le point d'interrogation, au lieu des données, signifie que le sujet est en train de chercher les données afin de les relier à l'énoncé conclusion par le permis d'inférer ; énoncé conclusion et permis d'inférer sont disponibles. La flèche de l'argument est toujours dirigée vers l'énoncé conclusion parce que le sujet est conscient que la détermination des données permettra l'application du permis d'inférer aux données afin de justifier la conclusion.

Au pas suivant le schéma sera peut-être complété, c'est-à-dire que le point d'interrogation sera remplacé par l'explicitation des données finalement déterminées⁵.

Le déroulement de l'induction est différent par rapport à celui de la déduction et de l'abduction. L'induction se construit par généralisation des énoncés ou arguments précédents déjà observés ou étudiés. Cette particularité doit être visible dans l'argument.

Nous proposons le schéma suivant pour une argumentation inductive par généralisation sur les énoncés (*result pattern generalisation*, Harel, 2001, p.191) :

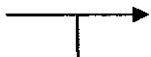


⁴ Nous avons restreint l'analyse à ces argumentations parce que l'étude de l'argumentation en termes déductifs, abductifs et inductifs est tout à fait classique (Aristote ; Peirce, 1960 ; Polya, 1958, 1962)

⁵ Dans le cas de la déduction, le point d'interrogation peut se situer au lieu des conclusions. Nous ne l'avons pas explicité pour question de simplicité. En fait, la cohérence entre le modèle et la déduction ne rendait pas nécessaire cette spécification.

$E_1, E_2 \dots E_n$ sont les conclusions des pas précédents ou sont les cas observés. Ils deviennent les données du dernier pas, celui qui amène au cas général. Le permis d'inférer est une généralisation sur les énoncés.

En revanche, une argumentation inductive par généralisation sur le processus (*process pattern generalisation*, Harel, 2001, p.191) peut être ainsi schématisée :

$D : E_1, E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \dots$  $E : \text{énoncé conclusion}$

P: généralisation sur le processus

Les données $E_1, E_1 \rightarrow E_2, E_2 \rightarrow E_3, \dots$ représentent les arguments précédents qui relient les énoncés. Ils deviennent les données du dernier pas, celui qui amène au cas général. Le permis d'inférer est une généralisation sur le processus.

L'induction, mais aussi l'abduction, peuvent être représentés par le modèle, si on considère une concaténation des pas de l'argumentation et non un pas isolé. Un argument élémentaire peut perdre toute signification s'il n'est pas vu dans la structure globale du raisonnement dans lequel il prend place. Ainsi, le dernier pas de l'induction doit être relié à ceux qui le précèdent. Le pas abductif exprimé avec le point d'interrogation anticipe les pas suivants au terme desquels le point d'interrogation peut être finalement substitué par les données ou le permis d'inférer.

Pour chaque structure nous considérons les structures possibles de la démonstration afin d'en déterminer les continuités ou les écarts.

Si l'argumentation est déductive la démonstration est facilement une déduction. Dans ce cas une continuité structurelle entre argumentation et démonstration est attendue. De plus, si l'argumentation est déductive, il est possible qu'elle soit déjà une démonstration.

Si l'argumentation est abductive, un écart structurel permet la construction d'une démonstration. La démonstration ne peut pas être abductive. L'écart doit être comblé pour construire une démonstration. En revanche, une continuité structurelle amène à la construction d'une preuve encore abductive.

Si l'argumentation est une induction par généralisation sur les énoncés, seulement un écart structurel peut amener à la construction d'une récurrence. Une continuité structurelle peut amener à la construction d'une preuve inductive, c'est-à-dire d'une preuve basée sur une généralisation sur les énoncés.

Au contraire, une généralisation sur le processus pourrait permettre la construction d'une démonstration par récurrence. Dans ce cas il s'agit d'une continuité structurelle entre argumentation et démonstration car c'est à partir d'une généralisation sur le processus qu'une démonstration par récurrence peut être construite. La liaison entre deux pas successifs permet de passer du cas n au cas $n+1$. On suppose devoir calculer la somme des n premiers nombres impairs. On peut par exemple déterminer la loi à partir d'un certain nombre d'exemples numériques. Dans ce cas la généralisation accomplie pour la détermination de la loi est une généralisation sur les énoncés. Si au contraire, on considère la liaison entre un pas n et le successeur $n+1$, par exemple en considérant un carré de côté n auquel on ajoute une « équerre » de $2n+1$ petits carrés pour le transformer en un carré de côté $n+1$, la généralisation est une généralisation sur le processus. Le passage à la construction d'une démonstration par récurrence à partir d'une argumentation inductive par généralisation sur le processus a alors un caractère de continuité car la loi que la récurrence permet de démontrer est celle qui relie

un pas n au pas suivant $n+1$. La généralisation sur les énoncés ne permet pas de visualiser la liaison entre un pas et le suivant.

En conséquence, pour construire une démonstration correcte il est souvent nécessaire de combler un écart structurel. Les argumentations abductives et certaines argumentations inductives ne peuvent pas rester telles quelles dans la démonstration.

...pour analyser le système de référence entre argumentation et démonstration

Le **système de référence** prend en compte les systèmes de représentations expressives (en particulier le langage, les heuristiques sur le dessin, etc.) et les systèmes des connaissances (*cadre*, *concepts-en-acte*, etc.) qui sont en jeu pendant la construction d'une conjecture et la mise en place de sa démonstration.⁶ Les continuités ou écarts du système de référence entre argumentation et démonstration que nous analysons sont les suivantes (Pedemonte 1998) :

Continuité du langage. On observe comment les expressions verbales, les expressions algébriques, les dessins géométriques se maintiennent ou évoluent en passant d'un processus à l'autre. Cette continuité est observable à partir des mots, des expressions, des phrases utilisés pendant l'argumentation et pendant la construction de la démonstration.

Continuité conceptuelle. On peut regarder si par exemple des *concepts-en-acte* (Vergnaud, 1990) apparaissant pendant l'argumentation peuvent venir à être explicités pendant la construction de la démonstration. Cette continuité est observable à partir du discours. Par exemple, pendant l'argumentation le sujet peut utiliser des mots référents à un théorème, sans pour autant l'expliciter. Si en phase de démonstration ce théorème est utilisé, on peut conclure à une continuité conceptuelle entre les deux phases.

Continuité de « cadre » (Douady, 1986). On peut regarder si la conjecture et la démonstration sont construites dans le même « cadre ». Cette continuité est observable à partir du référent théorique que le sujet utilise dans les deux phases. Si par exemple il produit la conjecture par moyen de la géométrie synthétique et il produit la démonstration en utilisant la géométrie analytique, il n'y a pas continuité de cadre entre les deux processus.

Continuité heuristique. On peut observer si les éléments désignés comme variables (que l'on fait varier) et ceux qui sont maintenus fixes sont les mêmes dans les deux phases. Cette continuité est observable à partir du discours du sujet et de sa manipulation du dessin (en particulier dans Cabri-géomètre). En fait, les éléments qui jouent un rôle de variables pendant un processus de résolution peuvent être liés au seul discours, ou au contraire déterminés à partir de la manipulation du dessin. Par exemple pendant la manipulation de la figure d'un triangle on peut décider de maintenir un côté fixe et faire varier les deux autres. On peut observer une continuité heuristique si pendant l'argumentation et pendant la démonstration cette manipulation est décrite par le sujet.

Pour analyser le système de référence, nous utilisons le modèle cK ϕ (Balacheff, 1995). Une *conception*, au sens du modèle cK ϕ (Balacheff, 1995), est « une structure mentale attribuée à un sujet, par un observateur de son comportement, dont on exige qu'elle apparaisse cohérente et efficace dans une sphère de pratique » (Balacheff, 2001)

⁶ C'est à partir de l'analyse des copies des élèves que nous avons ressenti la nécessité de définir le système de référence. La démonstration fait référence à une théorie mathématique. Le système de référence représente une tentative d'organiser certains éléments qui interviennent pendant l'argumentation pour pouvoir les rapprocher et les comparer avec la théorie mathématique qui intervient pendant la démonstration.

Par *sphère de pratique* on entend un ensemble de tâches ou de situations où la conception est opératoire. (Balacheff, 2001, il s'agit de la reprise d'un concept introduit par Pierre Bourdieu) Balacheff (1995) propose une caractérisation formelle d'une conception sous la forme d'un quadruplet constitué de:

Un ensemble (P) de problèmes (sphère de pratique de la conception);

Un ensemble (R) d'opérateurs (qui permettent le traitement des problèmes);

Un système de représentations (L) (qui permet la représentation des problèmes et des opérateurs);

Une structure de contrôle (Σ) (qui donne et organise les fonctions de décision, de choix, de jugement de validité et d'adéquation de l'action)

Ce quadruplet permet de décrire les conceptions des élèves qui interviennent dans la résolution d'un problème (voir par exemple Vadcarr 2000, Sangaré 2000, Balacheff et Gaudin 2002 ; Miyakawa 2002).

Nous croyons que pendant la construction d'une argumentation les conceptions ont un rôle fondamental : elles interviennent dans sa mise en place, en particulier elles déterminent les choix des élèves quand ils doivent résoudre une tâche. Notre intérêt à les repérer avec le modèle de Toulmin est justifié par au moins trois raisons.

- Les conceptions semblent être à la base de la construction d'une argumentation.
- La détermination des conceptions dans le modèle de Toulmin, permet une analyse comparative entre conceptions utilisées en phase d'argumentation et théorèmes utilisés en phase de démonstration.
- L'analyse de la continuité ou écart en termes de système de référence s'appuie sur cette étude : le modèle permet une analyse locale de l'argumentation et de la démonstration.

Considérons l'exemple suivant tiré de notre étude.

Exemple

L'élève doit résoudre la tâche suivante : comparer les aires de trois triangles d'une figure. Deux des trois triangles sont égaux et le troisième est d'une forme différente mais a la même aire que les autres.

Voici une partie de l'argumentation d'un élève.¹

« Il y a deux triangles égaux. Leurs aires sont égales parce que les triangles sont égaux. Au contraire le troisième triangle est différent par rapport aux autres et donc son aire est différente des deux autres aires »

Il y a deux énoncés conclusion que nous appelons E_1 , E_2 :

E_1 : les aires de deux triangles égaux sont égales,

E_2 : l'aire du troisième triangle est différente des autres aires.

Le permis d'inférer P_1 est implicite. Néanmoins, l'élève nous donne une indication : il dit que les aires sont égales parce que les triangles sont égaux. Nous pouvons expliciter le permis d'inférer avec une bonne approximation : « Si deux objets sont égaux, leurs aires sont égales ». Nous appelons ce principe « héritage de l'égalité ». La donnée D_1 est l'égalité des deux triangles.

Le permis d'inférer P_2 semble être au contraire fourni par le principe suivant : « Si deux objets sont différents, leurs aires sont différentes ». Nous appelons ce principe « héritage de l'inégalité ».

L'argumentation peut être représentée dans le modèle de Toulmin de la façon suivante:

¹ L'argumentation supposée est un prototype des argumentations présentées par les élèves pendant la résolution d'un des problèmes utilisés pour la phase expérimentale de cette recherche.

D_1 : deux triangles égaux $\xrightarrow{\quad}$ E_1 : leurs aires sont égales

P_1 : héritage de l'égalité

D_2 : deux triangles différents $\xrightarrow{\quad}$ E_2 : leurs aires sont différentes

P_2 : héritage de l'inégalité

Nous pouvons peut-être identifier la présence d'une conception, dont deux opérateurs sont les permis d'inférer P_1 , P_2 . Déterminer l'égalité ou l'inégalité entre aires de triangles, ou d'autres objets géométriques, est l'un des problèmes appartenant à la sphère de pratique ; le système de représentation est composé du langage verbal, du dessin etc. Le contrôle est complètement implicite. Il pourrait être perceptif, lié donc à ce que les élèves voient sur la figure. Il pourrait être lié à la formule de l'aire : « si les deux triangles sont égaux leurs bases et hauteurs sont égales et donc ils ont la même aire », « s'ils sont différents, les bases et les hauteurs sont différents et donc ils ont des aires différentes ». Nous n'avons pas les moyens de déterminer le contrôle.

L'élève doit construire une démonstration à partir de l'exemple d'argumentation présenté ci-dessus. Il peut démontrer le premier pas d'argumentation mais pas le deuxième.

Par exemple, il peut construire la démonstration suivante pour le premier pas.

« Deux triangles égaux ont la même aire parce que les hauteurs et les bases sont égales et, en conséquence, les aires aussi ». La formule de l'aire peut lui permettre de substituer le permis d'inférer de l'argumentation avec un permis d'inférer « théorique ».

Le premier pas de l'argumentation est transformée en pas de démonstration :

D_1 : bases et hauteurs des triangles égales $\xrightarrow{\quad}$ E_1 : leurs aires sont égales

P_1 : formule de l'aire

En revanche, l'élève ne peut pas réussir à substituer le deuxième permis d'inférer (à moins qu'il ne construise une déduction erronée appuyant sur une conception, la même ou une autre).

L'identification de la conception, ou au moins de certains de ses éléments, est important pour l'analyse de l'argumentation parce qu'elle permet de déterminer (et peut-être d'anticiper) des difficultés possibles pour le passage à la démonstration. Si, par exemple, le permis d'inférer (qui correspond à un opérateur de la conception mobilisée) n'est pas un théorème de la classe de mathématiques, on peut penser que l'élève arrivera difficilement à construire une démonstration acceptable à partir de celle-ci. D'autre part, le permis d'inférer faux ne peut pas être substitué par un théorème.

En revanche, si le permis d'inférer (un opérateur de la conception mobilisée) est correct, il existe un théorème qui peut se substituer au permis d'inférer de l'argumentation. Cela est fondamental pour le passage à la démonstration. Il est aussi nécessaire que l'élève le connaisse, et qu'il s'en souvienne.

En conséquence, la continuité du système de référence entre argumentation et démonstration est possible seulement si l'opérateur de la conception utilisé pendant l'argumentation peut être remplacé par un théorème dans la démonstration. En revanche, si le théorème n'est pas disponible il y a écart du système de référence entre argumentation et démonstration, qui pourra éventuellement être géré.

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental nous a permis de montrer comment analyser les productions des élèves (argumentations et preuves) avec l'outil méthodologique du modèle de Toulmin.

Nous voulons exposer les résultats des expérimentations afin de répondre aux questions que nous avons soulevées à propos de la continuité ou écart du système de référence et structurelle entre une argumentation et une démonstration.

Le dispositif expérimental a été conçu avec des situations problèmes qui demandent, implicitement ou explicitement, la construction d'une conjecture, et en conséquence, la mise en place d'une argumentation et d'une démonstration éventuelle. Nous avons décidé de faire travailler les élèves en binôme pour favoriser l'apparition d'une activité argumentative ; le manque d'argumentation nous empêcherait une analyse comparative avec la preuve.

Pendant l'activité, l'enseignant et un ou plusieurs observateurs sont présents, mais n'interviennent pas.

L'échange discursif entre les binômes est observé et enregistré avec un magnétophone. Nous disposons donc des enregistrements du travail complet des binômes, de la rédaction écrite de la démonstration, et quelque fois de la rédaction écrite d'une partie de l'argumentation.

Nous avons proposé aux élèves des problèmes ouverts (Arsac & al., 1991), afin d'accentuer les difficultés des élèves pour construire une conjecture afin d'assurer une forte interaction entre eux.

Les deux problèmes que nous avons choisis sont les suivants :

Problème 1. ABC est un triangle quelconque. A l'extérieur du triangle, trois carrés ont été construits sur chacun des trois côtés. On construit trois nouveaux triangles en reliant les sommets libres des carrés. Comparer l'aire de chacun des trois triangles avec l'aire du triangle ABC.

Problème 2. Soit un segment AB et C son milieu. On construit le cercle de centre C et de diamètre AB. On recommence cette construction avec le segment AC et son milieu, le segment CB et son milieu. On obtient deux cercles ayant pour diamètres respectivement AC et CB. On continue à découper les segments résultants en deux moitiés, et on construit sur ces parties les cercles ayant pour diamètres ces segments. Comment évolue la longueur totale des périmètres d'une subdivision à l'autre? Comment évolue l'aire totale des cercles d'une subdivision à l'autre?

En total, nous avons analysé 47 binômes du lycée.

Dans la suite nous présentons deux exemples de copies des élèves : la première relative au problème 1, la deuxième sur le problème 2.

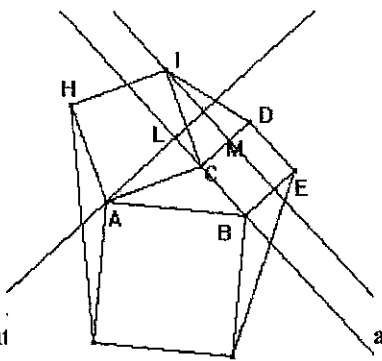
La première copie est un exemple de continuité du système de référence et d'écart structurel. La deuxième copie est un exemple d'écart du système de référence et de continuité structurelle.

Continuité du système de référence. Ecart structurel : Argumentation abductive et preuve déductive.

Binôme : Giulia (G), Luisa (L), classe de 2^e année du lycée (15/16 ans, Seconde en France).

L'argumentation et la démonstration sont traduites de l'italien au français.

Nous débutons l'analyse à partir de l'argument E_6 où les élèves décident de comparer les bases et les hauteurs des triangles pour en comparer les aires. À ce moment, les élèves comparent les aires du triangle ABC et d'un des triangles extérieurs : le triangle IDC (dans la figure ci-dessous). Elles construiront les hauteurs des deux triangles afin de comparer leurs aires. En fait, elles remarquent que les bases BC et CD sont égales. Et en conséquence pour comparer les aires des deux triangles elles doivent comparer leurs hauteurs.

Argumentation des élèves	Analyse
<i>L bouge la figure sur Cabri: le triangle sur l'écran est un triangle quelconque.</i> 21. G: mais si on considère les bases des triangles les deux côtés qui sont égaux... 22. L: les deux côtés du carré? 23. G: oui et si on construit les hauteurs, on peut comparer les seules hauteurs afin de comparer les aires 24. L: oui, je comprends, tu veux dire de comparer les hauteurs pour comparer les aires parce que les bases sont égales. Les élèves construisent les hauteurs des triangles $\triangle ABC$ et $\triangle IDC$ 31. L : Je suis en train de prolonger la droite, oui, la droite sur ce segment... qu'est-ce que je dois faire ? 32. G : la droite par les points B et C 33. L : ah c'est vrai ! 34. G : puis il faut faire la perpendiculaire à celle-là 35. L : ah voilà, mais tu sais qu'elles semblent être presque... 36. G : presque pareilles ! 37. L : non, plus qu'égales : elles semblent être perpendiculaires, je l'avais déjà observé tout à l'heure. 50. Élèves ensemble : eh ces deux triangles sont égaux ! 51. L : c'est vrai, ALC et ICM alors ces deux triangles qu'est-ce qu'ils ont ? 52. G : Nous considérons... alors AC est égal à IC parce qu'ils sont côtés du même carré 53. L : attends ! 54. G : AC est égal à IC parce qu'ils sont côtés du carré, puis 55. L : LC... 56. G : il est égal à CM, pourquoi ? 57. L : Alors ... Pourquoi il est égal à CM ? ... Selon moi c'est mieux de prouver... non attends cet angle est droit et cet angle aussi est droit 58. G : Pourquoi ? 59. L : Parce que ce sont les hauteurs n'est-ce pas ?	Les élèves observent que les bases CB et CD des deux triangles sont égales. Donc, pour la formule de l'aire, la comparaison entre aires peut être déterminée à partir de la comparaison entre hauteurs. On modélise le discours des élèves avec le modèle de Toulmin. La structure de l'argument est une abduction (les élèves semblent supposer l'égalité des aires comme cela apparaît dans l'int. 37). $D_6 = ?$  E_6 : comparaison entre aires P: formule de l'aire Afin de construire la donnée D_6 les élèves construisent les hauteurs. L'explicitation de la donnée D_6 permettra de donner une réponse à la question des aires.  E_7: les haut E_8: les h perpendiculaires Les énoncés E_7, E_8 décrivent les "faits" dont la valeur épistémique est liée à la perception de la figure dans Cabri. Le « drag » de Cabri permet aux élèves de voir les deux petits triangles ($\triangle ALC$ et $\triangle ICM$) égaux. Les élèves s'aperçoivent que les hauteurs font partie des deux triangles égaux. L'énoncé explicite encore un "fait". E_9 : les triangles ($\triangle ALC$ et $\triangle ICM$) sont égaux La nécessité de justifier l'égalité entre triangles, amène les élèves à chercher des côtés et des angles égaux pour appliquer le théorème d'égalité. La structure argumentative est encore une abduction: $D_9 = ?$  E_9 P: théorème d'égalité

60. G : donc elles sont perpendiculaires et puis il faut un côté ou un angle, il faut trouver un autre angle ou on est obligé de trouver un autre côté 61. L : par le deuxième théorème d'égalité n'est-ce pas ? 62. G : eh oui 63. L : mais alors on peut trouver un autre angle 64. G : alors l'angle... 65. L : celle-ci et celle-là ou bien celle-ci et celle-là 66. G : ces deux angles ne sont pas complémentaires ou supplémentaires à cet angle ? 67. L : non 68. G : si, si, cet angle est droit, ACI est droit, il est l'angle droit du carré, alors l'angle ACL + LCI est 90° et MCI + ICL est 90° donc ils sont complémentaires 69. L : oui, oui, ils sont complémentaires 70. G : alors ça va, ils sont égaux	<i>Les élèves considèrent un côté, l'angle droit et un deuxième angle.</i> $D_9 : AC = IC$ $\angle ALC = \angle IMC$ $? \angle ACL = \angle ICM$ $\longrightarrow$ $E_9 : \text{les triangles } \triangle ALC \text{ et } \triangle ICM \text{ sont égaux}$ P: théorème d'égalité <i>Les élèves doivent prouver que les angles sont égaux. Ils n'ont pas à disposition ni les données ni le permis d'inférer. Il s'agit d'un autre pas abductif :</i> $D_{9'} = ?$ $\longrightarrow$ $E_{9'} : \angle ACL = \angle ICM$ P: ? <i>Les deux angles sont complémentaires du même angle. Le permis d'inférer et les données sont finalement trouvées.</i> $D_{9''} :$ $\angle ACL + \angle LCI = 90^\circ$ $\angle MCI + \angle ICL = 90^\circ$ $\longrightarrow$ $E_{9''} : \angle ACL = \angle ICM$ P: angles complémentaires sont égaux
---	--

La structure de l'argumentation est une abduction, en particulier trois abductions sont construites. Les élèves observent que les bases des deux triangles ABC et IDC sont égales. Donc pour comparer les aires il faut comparer les hauteurs (argument 6). La comparaison entre hauteurs renvoie implicitement à une comparaison des petits triangles ALC et ICM ; ils sont égaux. Les élèves cherchent les données pour conclure ce fait (argument 9). La troisième abduction est la recherche de la troisième donnée pour appliquer le théorème d'égalité qui permet de conclure que les triangles ALC et ICM sont égaux (argument 9').

La preuve construite par les élèves est une déduction ; tous les pas abductifs sont transformés en pas déductifs.

Preuve des élèves	Analyse
Je considère le triangle ABC et le triangle ICD. D'abord je considère les triangles ALC et ICM et je démontre qu'ils sont égaux par le deuxième théorème d'égalité parce qu'ils ont: - $AC = IC$ parce que côtés du même carré - $\angle ALC = \angle IMC$ parce que droits (angles formés par l'intersection entre le côté et la hauteur) - $\angle ACL = \angle ICM$ parce que complémentaires d'un même angle (LCI) En particulier $IM = AL$. Donc les triangles ABC et ICD ont la même base (parce que côtés du même carré) et même hauteurs, donc ils ont la même aire.	<i>La structure de la preuve est une déduction :</i> $D_9 : AC = IC$ $\angle ALC = \angle IMC$ $\angle ACL = \angle ICM$ $\longrightarrow$ $E_9 : \text{les triangles } \triangle ALC \text{ et } \triangle ICM \text{ sont égaux}$ P: théorème d'égalité <i>Si les triangles sont égaux on peut conclure que les hauteurs sont égales et donc les aires, car les bases sont égales.</i> $D_{10} : E_9$ $\longrightarrow$ $E_{10} : \text{les hauteurs sont égales}$ P: héritage d'égalité $D_{11} : E_{10} \text{ et égalité des bases}$ $\longrightarrow$ $E_{11} : \text{les aires des triangles } \triangle ABC \text{ et } \triangle ICD \text{ sont égales}$

P: formule de l'aire

La preuve des élèves est une preuve déductive. Un écart structurel a été nécessaire pour passer de l'argumentation abductive à la preuve déductive. Cependant, les élèves ne semblent pas avoir rencontré de difficulté pour accomplir ce passage.

En revanche, la copie des élèves est un exemple de continuité du système de référence entre argumentation et démonstration. En fait, les permis d'inférer utilisés pendant l'argumentation sont des théorèmes. C'est pourquoi la preuve construite par les élèves utilise les mêmes permis d'inférer que l'argumentation.

Ecart du système de référence. Continuité structurelle : Argumentation et preuve inductives.

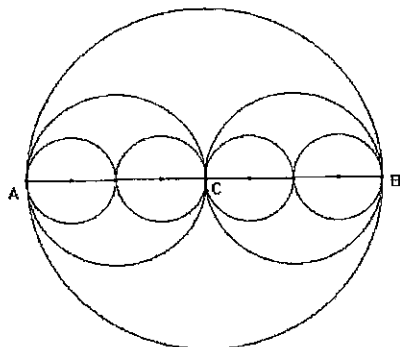
Binôme : Vincent (V), Ludovic (L), classe Première en France.

L'argumentation et la démonstration sont en français. Les élèves construisent la conjecture à partir d'un calcul tout de suite algébrique. Les élèves ne prennent pas en compte des exemples numériques. La généralisation au cas de la courbe n est probablement faite à partir du processus mais cette généralisation reste encore implicite. Les élèves semblent considérer deux courbes successives.

Pour ce qui concerne le système de référence, c'est intéressant l'analyse sur le cas limite. Les élèves considèrent l'aire et le périmètre au cas limite. Ils se trouvent en désaccord pour la limite du périmètre. La conception de Ludovic est mobilisée dans le cadre numérique : le périmètre au cas limite est constant car quand n tend vers l'infini, la formule $(2\pi r)$ reste invariant. La conception de Vincent est mobilisée dans le cadre géométrico-perceptif : le périmètre au cas limite est le diamètre de la première courbe.

Considérons la copie et le discours des élèves.

Argumentation des élèves	Analyse
9. V : le périmètre c'est $2\pi r$ et l'aire c'est πr au carré 10. L : oui 11. V : mais comment évolue le rayon déjà ? r est divisé par deux ? 12. L : oui, le premier périmètre est $2\pi r$ et le deuxième est $2\pi r$ sur deux plus $2\pi r$ sur deux et donc ... ça va être le même 13. V : et oui... 14. L : et ça va à être toujours le même parce que... regarde... on va appeler r au premier, r est le rayon du premier, le premier cercle a le périmètre.... 15. V : $2\pi r$ 16. L : $2\pi r$ et la somme des deuxièmes est $2\pi r$ sur deux 17. V : plus $2\pi r$ sur deux donc $2\pi r$... et cetera. l'autre est $2\pi r$ sur 4 mais pour 4 fois 18. L : donc la somme est toujours $2\pi r$ 19. V : c'est toujours le même périmètre....	<i>D'abord les élèves considèrent la première courbe et ils calculent l'aire et le périmètre à partir d'un rayon générique r.</i> D_1: cercle  E_1: le périmètre est $2\pi r$ et l'aire est πr^2 P: formule de la circonférence et de l'aire du cercle <i>Les élèves se posent la question de l'« évolution » du rayon d'une subdivision à l'autre.</i> <i>Ils disent que le rayon est divisé par deux mais ils ne disent pas s'ils considèrent ça pour toutes les subdivisions. Nous pouvons le supposer car le mot « évolue » (int. 11) semble donner un sens de continuité.</i> E_2 : le rayon est divisé par deux (dans chaque subdivision) <i>L'énoncé explicite un fait : il est emprunté à Cabri-Géomètre.</i> <i>La généralisation est faite à partir des résultats des calculs. Cependant il semble que les élèves considèrent deux cas attachés l'un à l'autre. L'énoncé E_2 permet de comprendre le changement du rayon d'une subdivision à l'autre. D'une certaine façon le rayon est finalement lié à la courbe. En outre le mot « mais » est une locution qui indique une affirmation qui a été déjà faite, et au même temps une affirmation attendue.</i>



20. L : oui, par contre l'aire... l'aire c'est πr au carré
 21. V : là on va avoir ...
 22. L : hem... Ça va être divisé par deux à chaque fois
 23. V : Oui, πr sur deux au carré plus πr sur deux au carré est égal à
 24. L : est égal à ... πr carré sur deux
 25. V : oui c'est comme ça en divisant par deux
 26. L : oui, et donc c'est toujours la moitié de la précédente

31. V : l'aire est à chaque fois divisée par deux....et à la limite? A la limite c'est une droite, confondue avec le segment de départ ...
 32. L : mais l'aire est divisée par deux à chaque fois
 33. V : oui, mais à la limite arrive à zéro
 34. L : oui c'est vrai que si on continue...
 35. V : elle tend vers zéro
 36. L : oui elle tend vers zéro l'aire

L'argument semble être le suivante :

D_3 : le périmètre de la deuxième courbe est $2\pi r$ $\rightarrow$ E_3 : le périmètre de la troisième courbe est $2\pi r/4$ pour 4 fois

P : le rayon est la moitié du précédent et le nombre des courbes est double

D_4 : argument 3

E_4 : le périmètre est toujours le même

P : généralisation sur le processus

Pour l'aire les élèves utilisent la même stratégie : ils font les calculs sur les deux premiers cas et ensuite ils généralisent.

D_5 : l'aire de la première courbe est πr^2 $\rightarrow$ E_5 : l'aire de la deuxième courbe est $\pi(r/2)^2$ pour 2 fois

P : le rayon est la moitié du précédent et le nombre des courbes est double

D_6 : argument 5

E_6 : l'aire c'est toujours la moitié de la précédente

P : généralisation sur le processus

Ensuite les élèves considèrent le cas limite.
 Vincent voit le cas limite sur la figure. L'énoncé est un fait construit à partir de la perception de la figure sur Cabri-géomètre.

E_{5v} : l'aire à la limite est une droite confondue avec le segment de départ

De ce fait, il conclut qu'à la limite l'aire est zéro.

$D_{6v} : E_5$ $\rightarrow$ E_{6v} : à la limite l'aire est zéro

P_v : l'aire d'un segment est zéro

En revanche, pour Ludovic, le cas limite est construit à partir de la formule.

$D_{6L} : E_4$: l'aire est toujours la moitié de la précédente $\rightarrow$ E_{6L} : à la limite l'aire est zéro

P_L : conception numérique de « limite »

37. V : oui mais alors le périmètre ? 38. L : non, le périmètre est toujours le même 39. V : au pire le périmètre il tombe jusqu'à deux fois le segment 40. L : comment ? 41. V : ça tombe sur le segment... si les cercles sont tellement petits 42. L : hem... mais ce sera toujours $2\pi r$ 43. V : oui mais quand l'aire tend à zéro ça sera presque égal... 44. L : non, je pense non 45. V : si on fait tendre à zéro l'aire on fait tendre le périmètre aussi... je ne sais pas... 46. L : Je finis la première démonstration <i>Silence... Ludovic continue à écrire la première démonstration</i> 47. V : mais si on fait tendre l'aire vers zéro on pourrait faire tendre le périmètre vers deux fois le.... Au diamètre du premier 48. L : c'est différent, le périmètre est constant 49. V : ah d'accord...	<i>Puisque la conclusion des deux raisonnements est la même, les élèves ne se rendent pas trop compte de la divergence de leurs raisonnements.</i> <i>Par contre, pour ce qui concerne le périmètre, les élèves se trouvent en désaccord. Vincent est encore lié à la perception de la figure sur Cabri-géomètre, alors que Ludovic pense en termes numériques.</i> <i>Pour Ludovic :</i> $\begin{array}{ccc} D_{\pi_L} : E_3 : \text{le} & \xrightarrow{\quad} & E_{\pi_L} : \text{à la limite le} \\ \text{périmètre est toujours} & & \text{périmètre est} \\ \text{le même} & & \text{toujours le} \\ & & \text{même} \end{array}$ P_L : résultat de calcul <i>Pour Vincent :</i> E_{TV} : à la limite le périmètre est le diamètre <i>L'énoncé explicite un fait qui s'appuie sur la figure de Cabri-géomètre</i>
--	---

Les élèves construisent la preuve en suivant les pas de l'argumentation. Ils considèrent les courbes jusqu'à la courbe n. Ils écrivent tous les passages des calculs. C'est le processus qui est généralisé et non les énoncés.

Preuve des élèves	Analyse
Notons R le premier rayon ($R=AB$) 1) Soit $P_1, P_2, P_4, \dots$ les périmètres respectifs du premier cercle, des deux seconds des quatre troisièmes,... $P_1=2\pi R$ $P_2=2\pi R/2 + 2\pi R/2=2\pi R$ $P_4=2\pi R/4 + 2\pi R/4 + 2\pi R/4 + 2\pi R/4=2\pi R \dots$ $P_n=2\pi R/n + 2\pi R/n + 2\pi R/n + \dots + 2\pi R/n=2\pi R$ n fois, donc le périmètre est constant	<i>Les élèves calculent le périmètre pour la première courbe</i> $\begin{array}{ccc} D_1 : \text{cercle} & \xrightarrow{\quad} & E_1 : P_1=2\pi R \end{array}$ P : formule du périmètre du cercle <i>Les élèves calculent le périmètre pour la deuxième et la troisième courbe, enfin ils généralisent pour la courbe n..</i> $\begin{array}{ccc} D_4 : P_1, & & \\ P_1 \rightarrow P_2 & \xrightarrow{\quad} & E_4 : \text{le périmètre est} \\ P_2 \rightarrow P_{3\dots} & & \text{constant} \end{array}$ P : généralisation sur le processus <i>Les élèves écrivent « pour n fois » quand ils font les calculs pour la courbe n ; n représente le nombre des cercles dans la courbe et en même temps la subdivision du rayon d'un cercle de la courbe n.</i> <i>Pour l'aire, la structure est la même : d'abord ils calculent l'aire pour le premier cercle. Ensuite ils</i>

2) Soit $A_1, A_2, A_4, \dots$ les aires respectives du premier cercle, des deux seconds des quatre troisièmes,... $A_1 = \pi R^2$ $A_2 = \pi R^2/4 + \pi R^2/4 = \pi R^2/2 = A_1/2$ $A_4 = \pi R^2/16 + \pi R^2/16 + \pi R^2/16 + \pi R^2/16 = \pi R^2/4$ $\dots = A_1/4 \dots$ $A_n = \pi R^2/n^2 + \pi R^2/n^2 + \dots + \pi R^2/n^2 = \pi R^2/n^2 * n$ $= \pi R^2/n = A_1/n$ donc l'aire tend vers zéro quand n augmente	<i>généralisent à la courbe n.</i> $D_1: \text{cercle} \quad \longrightarrow \quad E_1: \text{l'aire est } \pi R^2$ P: formule de l'aire du cercle $D_3: A_1, \quad \longrightarrow \quad E_3: A_2 = A_1/2$ $A_1 \rightarrow A_2 \quad \quad \quad \dots A_n = A_1/n$ $A_2 \rightarrow A_4, \dots$ P: généralisation sur le processus
---	--

Cette analyse révèle une continuité structurelle entre argumentation et preuve. La structure inductive de l'argumentation se maintient dans la preuve construite par l'élève.

La liaison entre le rayon et la courbe nous permet d'appuyer l'hypothèse que la généralisation a été faite sur le processus et non sur les résultats de calcul. C'est la relation entre le nombre des cercles dans une courbe et le rayon de chacun d'eux qui permet de voir la généralité sur le processus.

Du point de vue du système de référence, c'est évident qu'ici il y a deux conceptions différentes. La conception de Ludovic s'appuie sur un contrôle numérique, alors que celle de Vincent s'appuie sur un contrôle géométrico-perceptif. Les deux cadres différents permettent de rendre compte des différences de conceptions. Nous avons observé une continuité du système de référence (concernant la limite) entre argumentation et preuve pour Ludovic et un écart pour Vincent.

Conclusions

A partir du modèle de Toulmin sur l'argumentation, nous avons développé un cadre théorique qui a permis de construire les questionnements et les réponses éventuelles à propos des rapports entre argumentation et démonstration.

Dans ce cadre théorique, le modèle de Toulmin a été un outil qui a permis à la fois d'établir la relation entre argumentation et démonstration et de réaliser une analyse comparative en termes de continuité/écart de structure et continuité/écart du système de référence entre argumentation et démonstration.

L'analyse du système de référence s'appuie, en partie, sur le repérage des conceptions utilisées pour la mise en place d'une argumentation, et de les comparer avec les théorèmes utilisés pour la démonstration. Le permis d'inférer d'une argumentation, en tant qu'opérateur d'une conception, peut être comparé avec le théorème utilisé dans la démonstration. La conception, en tant que support de l'argumentation, peut être comparée avec la théorie mathématique utilisée dans la démonstration.

En conséquence, la transformation d'une conception en théorie mathématique et en particulier le passage d'un opérateur de la conception (permis d'inférer de l'argumentation) à un théorème (permis d'inférer de la démonstration) permet d'observer une continuité du système de référence. En revanche, c'est dans le manque d'évolution de l'opérateur de la conception en théorème que nous pouvons reconnaître un écart du système de référence.

L'analyse structurelle s'appuie sur la comparaison entre la structure de l'argumentation et celle de la démonstration. Nous avons montré comment la structure des arguments (déductive, abductive, inductive) peut être représentée avec le modèle de Toulmin.

Le modèle de Toulmin a permis de reconnaître des structures similaires et comparables dans l'argumentation et dans la démonstration, de façon à reconnaître une continuité structurelle si les structures sont les mêmes dans les deux cas. En revanche, nous observons un écart structurel si l'argumentation et la démonstration ont des structures différentes.

Du point de vue de l'analyse cognitive, notre position s'éloigne sensiblement de la position de Duval. Il n'y a pas toujours une distance cognitive entre argumentation et démonstration. Au contraire, nous avons souvent trouvé une unité cognitive non seulement du point de vue du système de référence mais aussi du point de vue de la structure.

Cela a été observé même quand cette continuité peut empêcher la construction d'une démonstration. Par exemple, les analyses des expérimentations ont montré qu'à partir d'une argumentation abductive, les élèves construisent fréquemment des preuves contenant encore des traces d'abduction. Cette thèse est ultérieurement étayée par le fait que certaines expérimentations déroulées en Italie ont été conduites dans des classes expérimentales d'un projet centré sur l'introduction des élèves à la démonstration. Ce projet prend en compte l'apprentissage de la démonstration d'une façon rigoureuse. Bien que ces élèves aient participé à des activités spécifiques sur la démonstration, les continuités structurelles et du système de référence entre argumentation et preuve ont également été observées.

Néanmoins, l'hypothèse de l'*unité cognitive* (Boero, Garuti, Mariotti, 1996), comme elle a été avancée, ne prenait pas en compte le cas où les continuités structurelles ou du système de référence amènent à des preuves fausses. Dans ce cas une rupture cognitive est nécessaire pour la construction d'une démonstration. Et les élèves peuvent ne pas arriver à construire la démonstration justement à cause de la continuité « naturelle » entre argumentation et fausse démonstration.

En conséquence, si d'un côté penser en termes d'*unité cognitive* permet de comprendre les difficultés pour la construction d'une démonstration et localiser la source du problème éventuel, d'un autre côté, la considération que l'*unité cognitive* peut amener à la construction de preuves erronées doit être prise en compte.

Références

Une partie des références bibliographiques citées ici est extraite du site Internet de la Lettre de la Preuve (<http://www-didactique.imag.fr/preuve>)

Anscombe J. C. & Ducrot O. (1983) : *L'argumentation dans la langue*, Bruxelles : Mardaga.

Arsac G. & al. (1991) : Problème ouvert et situation-problème. Irem de Lyon.

Aristote : *Rhetorique*. Traduction française par Dufour M. et Wartelle A. Les belles lettres, 1991 pour le livre I et le livre II. Les belles lettres, 1980 pour le livre III.

Aristote : *Organon*. Traduction française par Tricot J. 1962. Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

Aristote : *Les topiques : livres I-VIII*. Traduction française par Tricot J. 1974. Paris : Librairie philosophique J. Vrin..

Arzarello F., Bartolini Bussi M. (à paraître) : Methodological problems in innovative research paradigms: notes on the time variable, in English L., Bartolini Bussi M., Jones G., Lesh R., Tirosh D. editors, *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Balacheff N. (1987) : Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, 147-176, Ed : D. Reidel Publishing Company.

Balacheff N. (1988) : Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de Collège, Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Grenoble

Balacheff N. (1995) : Conception, connaissance et concept. In Grenier D. : Séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques, Grenoble IMAG, pp. 219-244.

Balacheff N. (1999) : L'argumentation est-elle un obstacle ? Lettre de la preuve Mai/Juin 1999 ; URL : <http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506.html>

Balacheff N., Gaudin N. (2002) : Modeling students conceptions (the case of functions). *Mathematical Thinking and Learning*. (to appear).

- Boero, P., Garuti, R., Mariotti M. A. (1996) : « Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures » *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, vol. 2, (pp. 121 – 128), Valencia.
- Douady, R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.7, n°2, pp. 5-31 ; Ed : La pensée sauvage, Grenoble.
- Douady R. (1984) : *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*, Thèse d'Etat, Université Paris-VII.
- Ducrot O. et al. : (1979) : *Les mots du discours*, Ed. de Minuit, Paris.
- Ducrot O. (1980) : Analyses pragmatiques, *Communications* n° 32, Ed : Le Seuil, Paris.
- Duval, R. (1992–1993) : Argumenter démontrer expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit X* n°31, 37–61, IREM (ed.), Grenoble.
- Duval, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine* Edition: Peter Lang, Suisse.
- Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998) : Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XXII*, Stellenbosch, vol. 2, pp. 345-352.
- Garuti, R.; Boero, P.; Lemut, E. & Mariotti, M. A. (1996) : Challenging the traditional school approach to theorems:... *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-XX*, Valencia, vol. 2, pp. 113-120.
- Harel G., Sowder L. , (1998) : Students' proof schemes: Results from exploratory studies, In : Schoenfeld A. H., Kaput J., & Dubinsky E. (ed.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, Vol. 3, American Mathematical Society, 234-283.
- Harel, G. (2001). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.). *Learning and Teaching Number Theory*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation.
- Lakatos I. (1979) : *Proofs and refutations. The logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge 1976; Traduction italienne de Benelli D. *Dimostrazioni e confutazioni La logica della scoperta matematica* Feltrinelli, Milano.
- Magnani, L. (2001) : *Abduction, Reason and Science. Processes of Discovery and Explanation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Mariotti M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero P., Ferri F., Garuti M. R. (1997) Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceeding of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME 21*, Lahti, Finland. pp. 180-195.
- Mariotti M. A. (2001) : La preuve en mathématique. *La Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 437-458.
- Mariotti M.A. (2001) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* 44, Issues 1 & 2, Dordrecht: Kluwer, pp. 25-53.
- Mariotti M. A. & Fischbein E. (1997) : Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34. 219-248.
- Martin W. G., Harel G. (1989) : Proof frames of preservice elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51,
- Miyakawa T. (2002) : Relation between proof and conception : the case of proof for the sum of two even numbers. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-26*, Norwich, 21-26 July 2002.
- Pedemonte B. (1998) : *Modélisation, preuve et manipulation des variables de situation dans Cabri-géomètre* mémoire de DEA Grenoble; Université Joseph Fourier.
- Pedemonte B. (2001): Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics *Proc. of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-25*, Editors: van den Heuvel-Panhuizen M., Utrecht (Olanda); vol. 4, 33-40.
- Pedemonte B. (2002): *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Peirce C. S. (1960) *Collected papers* Cambridge, M A: Harvard University Press.
- Perelman C., Olbrechts-Tyteca L. (1988) : *Traité de l'argumentation-La nouvelle rhétorique* Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles 1992 (5^{ème} édition).
- Plantin C. (1990) : *Essais sur l'argumentation*, Kimé (ed.), Paris.
- Polya G. (1954) : *Mathematics and plausible reasoning* Princeton University Press, London. Traduction française de Vallée R., *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*, Gauthier – Villars (ed.), Paris, 1958.
- Polya G. (1962) : *How to solve it ?* Princeton University Press, New York, Traduction française de Mesnage C. *Comment poser et résoudre un problème* Dunod (ed.), (deuxième édition), Paris, 1962.
- Sangaré M. (2002) : *La rotation : approche cognitive et didactique. Une étude de cas au Mali*. Thèse de l'Université de Mali.

- Toulmin S. E. (1993) : *The use of arguments*. Cambridge: University Press, 1958; Traduction française par De Brabanter P. *Les usages de l'argumentation*, Presse Universitaire de France.
- Van Eemeren, F. H. & al. (1996) : *Fundamental of argumentation theory*. Mahwan N. J; Lawrence E., pp. 129–160, 1996.
- Vadcard L. (2000) : *Etude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Vergnaud, G. (1991) : La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n°2.3, pp. 133-170.

Introduire les élèves à une théorie :

La médiation du logiciel Cabri

M. Alessandra Mariotti

Dipartimento di Matematica - Università di Pisa

Introduction

L'étude dont j'aimerais parler s'inscrit dans un plan de recherche expérimentale qu'on appelle d'habitude "Recherche Innovation". Il s'agit d'un type de recherche très commun en Italie caractérisée par la présence d'un groupe de travail continu qui comprend des enseignants de l'école et des chercheurs en didactique des mathématiques. La collaboration est étroite et continue ; chaque projet a une longue durée et a pour objectif à la fois de réaliser des innovations dans la pratique de classe et de tirer des résultats sur le plan de la recherche.

Selon les mots de Bartolini Bussi, nous avons développé un projet du type "research for innovation", « in which action in the classroom is both a means and a result of the evolution of research analysis » (Bartolini Bussi, 1996 p.1).

L'expérimentation a concerné des classes des deux premières années de l'école secondaire supérieure (Lycée Scientifique, Lycée Classique et Institut Professionnel). Toutes les activités proposées s'inscrivent dans les activités scolaires normales. Le projet, qui était conçu pour durer deux ans, est encore en cours, bien que les objectifs de recherche aient évolué, suivant en fonction des nouvelles questions émergentes.

En particulier, la construction du cadre théorique a été en transformation continue et l'expérimentation dans les classes a été reconstruite elle-même en permanence.

Les éléments clé du cadre de référence

Le projet élaboré avait pour objectif d'affronter le problème éducatif crucial : initier les étudiants à l'idée de démonstration et a introduit deux innovations fondamentales dans la pratique scolaire : le contexte d'un environnement logiciel (Cabri-géomètre) et la culture de la "Discussion Mathématique" (Bartolini Bussi, 1991, 1998).

Ces innovations se réfèrent, en général, à une perspective vygotskienne et ont à la base les éléments fondamentaux suivants, qui constituent le cœur de notre cadre de référence théorique :

Les activités de classe sont organisées dans un Champ d'Expérience¹, centré sur l'utilisation des outils fournis par l'environnement logiciel Cabri.

L'évolution du Champ d'Expérience est réalisée dans les activités sociales de la classe, qui sont finalisées par la construction sociale de connaissances relatives au Savoir Mathématique.

La Discussion Mathématique est au cœur des activités de classe, dans lesquelles l'évolution des signifiés personnels des élèves vers le signifié mathématique, constitue l'objectif fondamental.

¹ La notion de Champ d'Expérience est utilisée selon la définition suivante:

"The system of three evolutive components (external context; student internal context; teacher internal context), referred to a sector of human culture which the teacher and students can recognise and consider as unitary and homogeneous" (Boero et al. 1995)

La médiation sémiotique

L'hypothèse éducative sous-jacente est centrée sur l'idée que le savoir est le un produit culturel et que la construction des connaissances est un processus ~~au même temps~~ à la fois individuel et social.

À la base il y a le processus d'internalisation, tel qu'il est défini par Vygotskij comme la transformation d'un processus interpersonnel dans un processus intra- personnel: "... the internal reconstruction of an external operation ..." (Vygotskij, 1978).

Une approche historico-culturelle met en évidence le fait que les fonctions psychiques supérieures de l'être humain se développent dans l'histoire culturelle et sociale, et que ce processus s'accomplit par le moyen des formes "qui structurent et médiatisent nos rapports aux situations et aux savoir et ont ainsi une influence qui peut être considérable" (Rabardel, 1999, p. 204). Ce processus accompli par la médiation des outils et des signes est référé en général par Vygotskij comme le processus de **médiation sémiotique**.

"The internalization of cultural forms of behaviour involves **the reconstruction of psychological activity on the basis of signs operations**". (Vygotskij, 1978)

En particulier, Vygotskij décrit le lien entre outils et signes, pas seulement en termes d'analogie de fonctionnement, mais aussi par rapport aux activité intellectuelles et d'une manière générale à l'évolution des fonctions supérieures de la pensée.

Les outils ou les systèmes des signes ont en commun des caractéristiques fondamentales

Ils sont le produit raffiné d'une activité humaine

Ils incorporent des éléments importants du savoir

Ils n'agissent pas seulement à l'extérieur, mais ils ont des effets sur les moyens de penser.

Mais on peut observer également un lien plus étroit qui dérive du fait que certains signes ont leur origine dans des outils et dans leur usage. L'exemple discuté par Vygotskij concerne le cas historique du boulier et l'écriture positionnelle des nombres, mais, dans une certaine mesure, il peut être généralisé. Souvent, on peut reconnaître dans l'évolution du savoir mathématique un processus dialectique entre pratique et théorie, dans laquelle les artefacts² jouent en rôle clef. L'exemple de la Géométrie est, peut être, le plus connu (Bartolini Bussi & Mariotti, 1999).

Dans ce passage (de l'outil aux signes qui en dérivent) des aspects de l'outil sont maintenus mais, en même temps, les signes acquièrent l'autonomie nécessaire pour être utilisés dans des activités différentes de celles où se trouve leur origine. En bref, ils peuvent devenir de véritables "moyens de penser" et contribuer à la construction de signifiés relatifs au savoir mathématique (Bartolini Bussi et al. 1999).

La notion de médiation sémiotique, telle qu'elle est décrite par Vygotsky, semble fournir un moyen très convenable et très puissant pour interpréter le processus cognitif relatif au lien entre l'usage des outils et la construction de signifiés.

Le point de vue didactique

Depuis une vingtaine d'années, on a vu le développement des logiciels, de plus en plus complexes et élaborés; dont la cible est l'enseignement des mathématiques. En particulier, on a construit des logiciels qui sont caractérisés

"...par l'imbrication forte dans leur constitution et fonctionnement des connaissances mathématiques. Ce sont des logiciels qui embarquent et gèrent des connaissances mathématiques ..." (Laborde, 1999, p. 236)

² Artefacts conceived to be used according to specific schemes in order to accomplish a specific work are usually referred to as technical artefact; they refer to a theoretical knowledge which assures the correct functioning of the artefact. Technology is the discipline concerning the productive relation between theory and practice.

La présence de ces outils nouveaux a soulevé un problème didactique important: comment les outils influencent le processus d'enseignement et d'apprentissage. Ce problème ne peut pas être limité au cas des nouvelles technologies ; il semble donc raisonnable de repenser dans une perspective plus générale le rôle des outils quelconques (Bartolini Bussi et al, 1999; Bartolini Bussi et al. (à paraître).

Les outils, en tant que tels, sont construits pour accomplir des tâches, mais ils peuvent aussi être conçus avec une intention didactique relative au lien entre l'outil et le savoir embarqué. Du point de vue didactique, quand on considère l'introduction d'un outil (quel qu'il soit) dans la pratique de la classe, le problème consiste à dépasser l'usage de l'outil limité à accomplir une tâche, pour accéder au savoir (mathématique) auquel l'outil renvoie.

Le passage (rapport) des signifiés relatifs à la pratique aux signifiés relatifs aux mathématiques qui constituent l'objectif didactique n'est pas simple ni garanti : comme il a été souvent souligné, les outils ne sont pas transparents et le savoir qu'ils évoquent n'est pas immédiatement accessible aux élèves.

Le problème alors devient un problème didactique qui peut être décrit de la manière suivante : comment articuler les deux aspects – pratique et didactique - de l'utilisation des outils? Comment **planifier** et **gérer** une activité avec des outils, qui soit efficace pour rendre accessible aux élèves le savoir évoqué par ces outils et leur usage ?

Une réponse se trouve dans une analyse précise du point de vue épistémologique, cognitif et didactique des pratiques culturelles et des interactions sociales produites ou productibles dans la classe et intégrées par l'usage des outils.

Certainement, une analyse épistémologique préalable de l'outil est nécessaire pour identifier les connaissances auxquelles cet outil renvoie. Cette analyse peut devenir de plus en plus raffinée et profonde, au fur et à mesure que les informations concernant l'usage effectif d'un certain outil deviennent disponibles par l'observation d'activités de classe.

En particulier, en suivant le travail de Rabardel (Rabardel, 1995, 1999, p. 203) on peut développer une "approche instrumentale" et accomplir une analyse cognitive de l'utilisation de l'**artefact**, centrées sur les processus d'**instrumentalisation** et d'**instrumentation** prévues, en relation avec les situations problèmes qui peuvent être proposées aux élèves et leur solution. Cette analyse peut fournir une description, de plus en plus complexe et raffinée, des processus de genèses instrumentales, dans lesquelles les sujets élaborent leur "instruments". La distinction entre artefact et instrument est très efficace pour rendre compte de la pluralité des résultats possibles, comme Rabardel nous le dit :

"Les instruments issus des genèses instrumentales ne sont jamais les seuls qui auraient pu être développés par le sujet. " (Rabardel, 1999)

Ces deux types d'analyse (épistémologique et cognitive) ne sont pas indépendantes et l'une va diriger l'autre dans un processus dialectique qui détermine l'évolution d'un cadre générale de références entre un artefact, ses éléments constitutifs, et son usage d'une part et un système des connaissances d'autre part.

Bien que la discussion précédente soit centrée sur le sujet, on ne peut pas oublier la composante sociale et donc l'importance d'une analyse des interactions sociales, centrés sur l'utilisation d'un artefact particulier.

L'introduction de la dimension sociale ouvre à différentes questions, particulièrement importantes dans une perspective éducative.

Non seulement les genèses instrumentales doivent être considérées dans leur dimension soit privée soit sociale (ibid. p. 209), mais elles doivent aussi être considérées en rapport avec le savoir mathématique qui représente l'objectif d'enseignement. Comme nous l'avons déjà souligné, certains outils / artefact et en particulier des "logiciels didactiques" sont en rapport avec un savoir (mathématique, dans le cas que nous intéresse), on peut donc les considérer

comme se référant à ce savoir, et par ce fait on peut les considérer comme des signes potentiels, qui s'offrent aux enseignants pour accomplir leurs objectifs éducatifs.

En conclusion, en prenant une perspective vigotskienne on peut avancer l'hypothèse didactique suivante : on peut penser les outils/artefacts comme des signes qui évoquent des signifiés, et comme tels ils peuvent devenir des "éléments de médiation sémiotique"³ : l'enseignant peut les utiliser dans les activités de classe avec le but d'introduire les élèves à des signifiés, consistants avec ses objectifs éducatifs.

À travers l'action de l'enseignant, le savoir peut émerger et franchir l'opacité de la représentation donnée par l'artefact. En particulier, l'émergence arrive par un processus d'explicitation, qui passe par l'usage de signes dérivés de l'outil/artefact, signes comme les mots du langage naturel, les gestes ou des formes différentes de représentation⁴. C'est par l'usage de ces signes que le savoir peut être internalisé par l'élève.

Cette description très rapide donne, je l'espère, une idée générale du point de départ de notre projet, et met en évidence la complexité du processus de médiation sémiotique⁵. C'est pour cela que l'un des objectifs principaux de notre projet a été immédiatement de développer le cadre théorique, nécessaire pour décrire le processus de médiation sémiotique, tel que nous l'avons envisagé dans les activités scolaires. Dans ce qui suit, à partir du problème didactique abordé, je vais décrire des exemples pour clarifier le cadre théorique qui a été simultanément inspirateur et produit de l'expérimentation didactique.

Le projet

Le problème didactique: comment initier les étudiants à l'idée de Théorème

Lorsque les étudiants achèvent le collège et qu'ils passent au lycée, ils ont acquis un certain bagage de connaissances en géométrie. Ils connaissent les noms des figures géométriques principales et certaines propriétés qui les caractérisent. On a essayé de leur faire acquérir des connaissances géométriques de base au niveau des règles opératoires qu'ils ont découvertes, selon une approche "intuitive", comme résultats avec un degré élevé d'évidence et qui, une fois acquises, prennent un caractère de vérité absolue. On exige seulement que ces faits soient rappelés le cas échéant.

Les connaissances géométriques, en tant que faits intuitifs, ramènent à une idée très vague d'une justification possible et, de toute façon, cette idée reste liée à l'objectif de convaincre quelqu'un de leur évidence.

L'idée de la géométrie comme un système de relations entre propriétés géométriques des figures (c'est-à-dire une mise en place théorique de la géométrie selon une approche déductive se basant sur des axiomes et sur des théorèmes en dérivant) est donc assez éloignée.

Un problème didactique fondamental se présente au début du lycée:

comment traiter la relation délicate entre la base des connaissances géométriques intuitives des élèves et une nouvelle approche des connaissances selon une perspective théorique.

Lorsque l'on souhaite traiter un système déductif, il y a deux aspects liés entre eux: d'un côté, l'idée de **démonstration** et de l'autre, l'idée de **théorie** (en entendant par ce terme un caractère global ou local d'un système théorique quelconque). La démonstration prend du sens à partir de la théorie vice-versa. Donc une approche déductive présente deux types de

³ Dans la littérature anglophone, on utilise le terme "tool of semiotic mediation" ; Ceci nous pose des problèmes dans la traduction à cause de l'évidente ambiguïté du terme "tool" dans ce contexte.

⁴ Dans la même perspective Radford, 2003.

⁵ D'autre part la lecture même des ouvrages de Vygotskij n'est pas du tout facile et claire, bien que elle fournisse des suggestions très fascinantes.

problèmes de sens liés entre eux : le sens de la démonstration et le sens de la théorie (Mariotti et al., 1997, Mariotti, 2001).

Le Champ d'Expérience des constructions géométriques dans Cabri

Le Champ d'Expérience choisi est centré sur la problématique des constructions géométriques, en tant que dessins réalisés dans l'environnement Cabri-géomètre.

Le problème de la construction, tel qu'il est posé et résolu en environnement Cabri prend une signification nouvelle par rapport à ce qui apparaît spontanément (Mariotti, 1996, 1999). En particulier, l'idée de figure acceptable comme solution s'enrichit de la propriété d'invariabilité par déplacement (dragging) et est reliée au procédé qui la détermine; donc la solution doit être considérée comme correcte si la séquence des outils de Cabri décrit les relations géométriques qui lient les éléments de la figure.

En accord et en parallèle avec l'émergence de ce signifié de construction valide à l'intérieur de l'environnement Cabri on va construire la signification de Théorème de géométrie, valide dans l'environnement de la Géométrie.

Evolution du Champ d'Expérience.

Comme nous l'avons déjà souligné plusieurs fois (Mariotti et al, 1997 ; Mariotti, 2001a) il y a deux aspects cruciaux qui entrent en jeu pour comprendre ce que veut dire démontrer: la nécessité de fournir une preuve pour un certain énoncé et le fait que cette preuve doit être construite à l'intérieur d'un système théorique particulier. L'évolution doit donc partir d'une nécessité générale de donner une preuve, pour arriver à l'intention de donner une validation à l'intérieur d'un système théorique.

Les observations et l'analyse lors de notre expérimentation ont mis en évidence le développement de cette signification qui s'articule selon les phases suivantes:

a) Description de la solution

Dès le début, les élèves sont invités à verbaliser le raisonnement suivi pour donner la solution. Le premier objectif qui pousse les élèves dans ce sens est donc celui de communiquer à l'enseignant et aux camarades leur raisonnement et, conformément à cet objectif, les devoirs devront être compréhensibles.

b) Preuve comme Justification de la solution

Les solutions fournies dans les copies seront ensuite discutées d'une façon collective. Après les premières discussions, un nouvel objectif apparaît: celui de rendre acceptable sa propre construction. Cela signifie qu'il ne suffira plus de fournir une description compréhensible (claire, complète et précise) mais la solution donnée devra être soutenue lors de la discussion collective.

Au moment où les élèves acceptent le critère de validation par déplacement, ils acceptent aussi le fait qu'il faut donner une justification au procédé suivi.

c) Justification sur la base de règles établies

Le problème central dans la discussion collective devient celui de défendre sa propre construction, laquelle, pour être acceptée doit montrer qu'elle respecte les règles établies. Il est alors nécessaire d'établir les règles, en d'autres termes, on doit parvenir à un accord quant aux opérations acceptées par la classe entière. Cela constituera le point de référence pour évaluer la solution fournie par chaque élève .

La construction parallèle du Micromonde et de la Théorie

Il est facilement compréhensible que le fait d'établir les règles est aussi important que le fait de les suivre. Voyons comment on a procédé pour définir les règles de validation.

Il y a deux niveaux de difficulté à aborder, chacun desquels étant caractérisé par des problèmes différents mais étroitement liés. D'un côté, une nouvelle idée de la validation qui ne se base plus sur l'acceptation immédiate et intuitive d'un fait mais qui tient compte d'un système de règles, de l'autre le fait que ce système de règles doit être établi, accepté et partagé par la communauté de la classe.

L'idée générale a été d'utiliser différents éléments de l'environnement Cabri et d'introduire graduellement les étudiants à une géométrie déductive en construisant une correspondance entre la logique du logiciel et la théorie géométrique,

Cette correspondance est fondée génériquement sur le fait que le logiciel Cabri et son fonctionnement embarquent des connaissances géométriques; une analyse plus fine de cette correspondance montre la possibilité de relier chaque outil de Cabri à une propriété acceptable dans la théorie, mais aussi la possibilité de relier les outils de Cabri à l'idée même de Théorème d'une théorie.

À partir d'un menu vide on discute du choix des outils à introduire et des assertions spécifiques choisies comme faits de base dont on doit partir dans la théorie. Ça constitue la base de laquelle l'évolution parallèle des deux mondes va démarrer: d'une part le monde de Cabri, défini par les différents outils disponibles pour accomplir des constructions, de l'autre le monde de la géométrie, défini par les axiomes établis et dans lequel on peut démontrer des théorèmes. Au fur et à mesure que de nouvelles constructions ont été réalisées et acceptées en correspondance avec de nouveaux théorèmes démontrés, l'introduction des outils correspondants a été discutée et négociée avec les élèves. De cette façon, les élèves construisent un lien de signification entre les éléments de deux mondes, du fait que chaque outil de Cabri a sa référence dans la théorie et à l'inverse chaque élément de la théorie trouve son interprétation dans l'environnement Cabri. En particulier, le fonctionnement de l'outil déplacement trouve sa référence dans la dépendance logique entre propriétés d'une figure.

L'ordre avec lequel les éléments de la théorie sont introduits trouve un élément correspondant dans les transformations successives du menu qui acquière des primitives nouvelles avec une capacité de construction majeure qui corresponde à l'élargissement de la puissance de la théorie.

En conclusion, une relation sémiotique entre l'environnement Cabri et le système de la géométrie est construite, en se basant sur les aspects suivants:

- le parallélisme entre les éléments de la théorie (axiomes, théorèmes et définitions) et les outils de Cabri ("primitives" ou "macro");
- la relation entre la fonction d'entraînement et la validation théorique d'une construction.

Evolution de la signification de justification. Exemples.

L'analyse des copies des étudiants montre un processus d'évolution de la signification de "construction" et en parallèle l'évolution du signifié de "Théorème", en terme de démonstration et de théorie de référence. Les descriptions des procédés changent, la clarté à travers une maîtrise croissante des termes s'améliore et, dans le même temps, les argumentations se rapprochent de plus en plus du statut des théorèmes c'est-à-dire que les justifications fournies par les élèves. prennent la forme d'un énoncé et de démonstration relative. Une analyse attentive montre également que ce procédé est très lent et pénible.

Voici un exemple, portant sur une séquence de tâches. Cathy âgée de 15 ans appartient à une classe de première année d'école secondaire supérieure (Liceo Scientifico).

1° Tâche : construction de la bissectrice

La première tâche concerne la construction de la bissectrice d'un angle. À ce point on est au début de la théorie et on a seulement les trois axiomes correspondant aux trois critères de congruence des triangles. Cathy décrit deux tentatives de solutions possibles.

Pour ce que concerne la première tentative, la description de la construction n'est pas très assurée: Cathy se réfère à la construction de deux cercles, mais ne les caractérise pas, après elle écrit :

"(les deux cercles) se rencontrent en un point, leur point commun; à partir de ce point nous traçons la droite qui passe par le sommet et donc par α (elle a marqué l'angle avec α)."

La justification, qui suivie, est plutôt une affirmation:

"Il est logique que, en conséquence de cette procédure, l'angle α soit divisé en deux parties égales".

Dans la deuxième tentative, Cathy montre qu'elle reconnaît la nécessité d'accomplir la construction à partir des outils disponibles et de justifier la validité de la procédure.

"On considère un angle (si deux segments sont donnés), en utilisant le transport d'angle je construis un angle β égal à α ".

Le transport d'angle a été fait en construisant deux triangles égaux, ayant un côté en commun. Une fois obtenue cette figure, Cathy répète la démonstration qui prouve l'égalité des deux triangles construits. Cathy ne se rend pas compte que le processus suivi ne résout pas le problème posé, puisqu'elle a simplement doublé l'angle donné. Cependant, à ce point elle essaye de construire une démonstration, et le fait à partir de la figure construite. Voilà ce qu'elle écrit.

"Maintenant par le 3° critère de congruence entre triangles je peux prouver que le triangle ABC est égal au triangle ADB ... AB représente la BISSECTRICE puisqu'elle découpe un angle, que j'appelle γ en deux angles égaux ($\alpha = \beta$)."

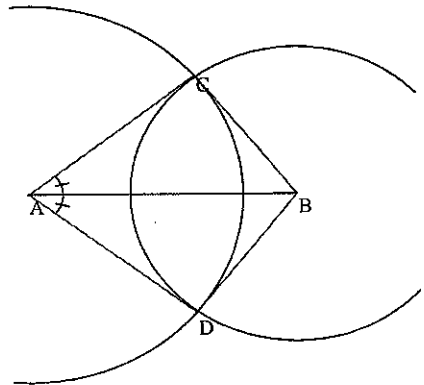


Figure 1 Le 2° dessin de Cathy

2° tâche . Construction de la perpendiculaire

La production de l'élève montre meilleure précision par rapport au cas de la construction de la bissectrice, du point de vue tant de la description de la procédure que de sa justification.

- A) $P \in r$. La première tentative est faite 'à l'œil'.

"Je trace une droite par deux points (je sélectionne la commande de Cabri)

je dessine un point (je sélectionne le commande de Cabri)

Par ce point, je fais passer une autre droite par deux points qui me semble perpendiculaire.

RESULTAT: le point ne reste pas immobile. ECHEC

Je gomme tout [...] ECRAN BLANC."

La deuxième tentative présente une construction correcte. La justification fait référence à la construction et à la définition de perpendiculaire.

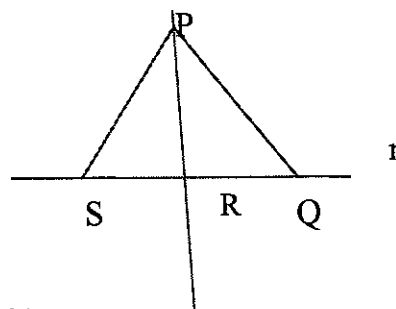
"Je trace une droite par deux points; Je trace un point tel qu'il reste toujours sur la droite (je sélectionne la commande "Point sur un objet")

Maintenant je trace la BISSECTRICE passant par P

TENTATIVE REUSSIE : j'enregistre la figure.

Démonstration: j'ai considéré la définition de PERPENDICULAIRE à une droite."

- B) Cathy décrit l'exploration qui l'amène à la détermination de la construction. Elle décrit comment elle a trouvé la configuration qui a permis de construire la perpendiculaire. Une fois construits une droite et le point P, pris deux points S et Q sur la droite, Cathy construit la bissectrice de l'angle



SPQ, déplace la figure jusqu'à ce que le triangle SPQ devienne isocèle, de façon que la bissectrice devienne perpendiculaire à la droite r.

"A l'angle P je trace la bissectrice. Avec la petite main je déforme le triangle SPQ de façon qu'il puisse devenir isocèle ou équilatéral de façon que ma bissectrice devienne $\perp$ à r.

Je crois avoir réussi. Je détermine le point R en le point où la bissectrice coupe r. Je contrôle si PRQ et PRS sont droits."

Après l'exploration - construction, Cathy ne donne pas une nouvelle construction, mais elle explicite les hypothèses relatives à une construction correcte (construction d'un triangle isocèle SPQ et de la bissectrice de l'angle P).

Hp. $SP = PQ$

PR bissectrice

Ts. $PR \perp r$

Elle écrit la démonstration:

Je considère les triangles PRS et PRQ:

Ils ont

PR en commun

CH bissectrice par Hp.

$SP = PQ$ par Hp.

$\angle RPS = \angle RPQ$ par Hp.

SRP et PRQ sont égaux par le 1^{er} théorème d'égalité entre triangles puisque PR bissectrice de l'angle plat

$\rightarrow PR \perp r$."

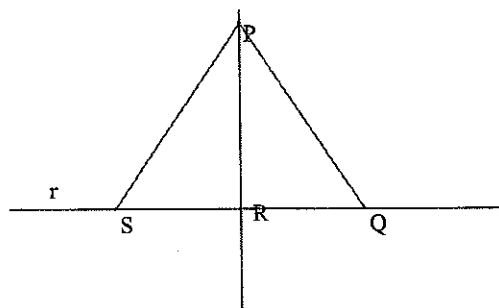


Figure 3 La 2^e construction de Cathy

Il est intéressant d'observer le rôle que l'exploration dynamique semble avoir joué pendant le processus de résolution. L'élément clé est constitué par la bissectrice de l'angle en P, qui dans le cas d'un triangle isocèle est perpendiculaire au côté opposé. À ce moment, la bissectrice est le seul outil de construction et le seul élément théorique disponible. En tout cas, la démonstration construite est correcte.

3^e Tâche. Le problème du rectangle

On considère la solution proposée par Cathy au problème ouvert suivant.

'Un parallélogramme est donné, rendre un angle droit: faire les propres observations.'

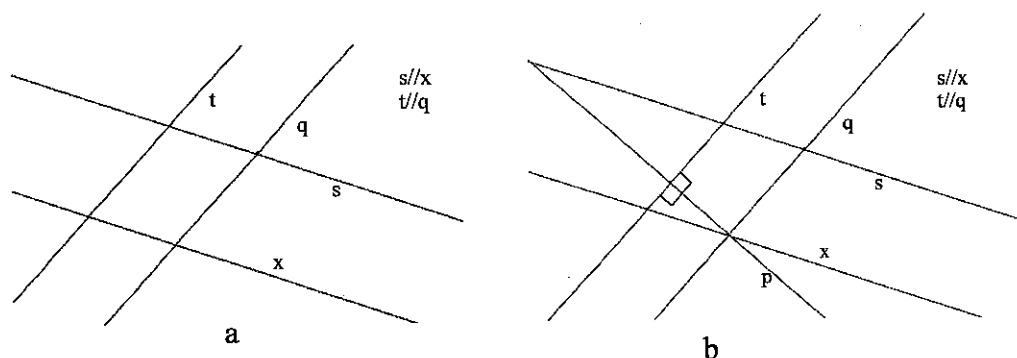


Figure 4a - 4b Les dessins qui accompagnent la description de l'exploration

Cathy construit le parallélogramme (et en décrit la construction), en traçant deux couples des droites parallèles et en localisant les sommets (avec "intersection des objets"). Dans le rapport écrit, Cathy annote (fig. 4a) à côté du dessin la construction effectuée avec Cabri (s//x e t//q). Ensuite elle trace la perpendiculaire (p) à une droite (t); même dans ce cas

Cathy écrit à côté du dessin la propriété de la droite construite (fig. 4b).

Dans sa copie Cathy écrit:

“Au moyen de la petite main, je bouge jusqu’à ce que la perpendiculaire soit superposée à la droite x ; j’obtiens comme ça un angle droit”.

Il ne s’agit pas d’un problème de construction, mais Cathy utilise les outils de construction pour représenter sur l’écran les propriétés qui correspondent à les hypothèses; c’est un moyen de les fixer pour guider l’exploration vers la production d’un énoncé.

L’exploration accomplie, Cathy dessine une nouvelle figure qui correspond aux hypothèses

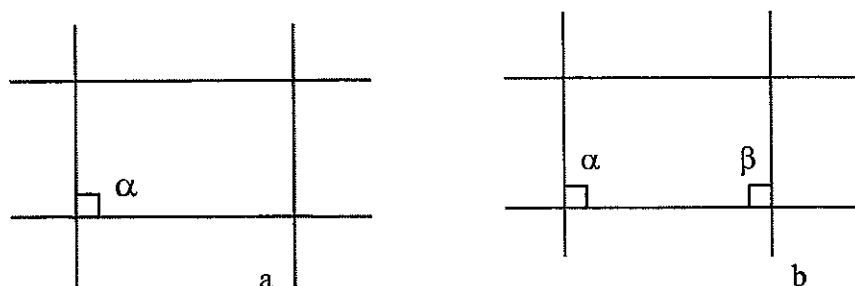


Figure 5 Les dessins qui accompagnent la démonstration

de l’énoncé. Elle continue:

« Puisque l’angle α est supplémentaire de β , parce qu’ils sont conjugués extérieurs, je découvre que tous les angles sont droits.

Je sais que α est droit parce que $p \perp t$. Puisque α et β sont conjugués intérieurs, c’est-à-dire $180 - 90 = 90$, alors β est droit. Par la propriété des parallélogrammes qui dit que les angles adjacents sont supplémentaires, les angles sont tout droits. »

Encore une fois, la dynamique de la figure a amené Cathy à la solution, c’est à dire à formuler une conjecture et trouver les éléments nécessaires pour la démontrer. Il est intéressant (Mariotti, 2001) de noter l’usage de la construction auxiliaire de la droite p . Cette droite n’a d’autre fonction que de fournir un élément fixe, qui représente l’hypothèse du problème (un seul angle droit), pour contrôler l’exploration.

Dans cet exemple l’évolution est évidente et l’analyse des copies des élèves montrent un progrès semblable, au cours de l’année scolaire. La façon dont les élèves traitent les constructions témoigne qu’ils ont acquis la maîtrise de la signification théorique qui se cache derrière une construction. Dans le même temps, il est possible de voir une évolution également dans les capacités d’expression : utilisation des termes appropriés, utilisation correcte des lettres et, en général, des symboles pour indiquer des objets géométriques et exprimer leurs relations. Certes, souvent les justifications données présentent encore des côtés obscurs, certains éléments ne sont pas parfaitement justifiés. Il fallait bien s’y attendre du fait que l’évolution d’une justification à une démonstration n’est pas un fait naturel.

En effet, la médiation offerte par l’environnement Cabri est très utile, mais elle n’est pas suffisante. Une intervention spécifique de l’enseignant apparaît alors nécessaire lorsqu’on veut guider l’évolution de la signification vers l’idée de la démonstration.

Le rôle guide de l’enseignante dans les activités de discussion

Selon notre hypothèse, au cœur des activités sociales de la classe nous avons prévu la Discussion Mathématique. Ce type d'activité représente un moment clé pour l'évolution du signifié mathématique. Selon notre hypothèse, les signifiés des certaines expressions (gestes, mots, écritures, dessins...), émergeant de l'activité de solution des tâches dans l'environnement Cabri et au cours des activités de discussion collectives, doivent arriver à évoluer sous la guide de l'enseignant. L'exemple qui suit concerne une discussion collective qui a pour thème la révision des cahiers rédigés par les élèves. Cette discussion a deux objectifs principaux.

Mettre au point la séquence des axiomes théorèmes et définitions introduits jusqu'à ce moment

Réfléchir sur le statut théorique de chacun des éléments de la séquence

Les élèves savent qu'il y a d'autres commandes dans l'environnement Cabri et savent aussi qu'il serait possible de les utiliser, mais la conscience des choix faits et la nécessité de les observer, donnent un sens à la conventionalité du système en cours de construction et conduisent les étudiants vers la distinction difficile entre ce qui est vrai et ce qui est théoriquement valide. Comme on l'a souligné plusieurs fois, cette distinction constitue un des obstacles principaux dans la compréhension de la signification d'une démonstration.

L'accentuation sur la nécessité d'établir des règles et de les respecter est remarquée par une certaine ostentation avec laquelle une commande nouvelle vient d'être ajoutée au menu et, en même temps, avec laquelle un nouveau théorème est introduit dans la théorie. En ce qui concerne un nouveau théorème, l'énoncé et sa "démonstration" sont décidés d'un commun accord par la classe et transcrits par chacun dans son propre "Cahier de Géométrie".

Le système géométrique est construit graduellement, de façon à ce que la complexité augmente petit à petit: l'objectif est de fournir des niveaux successifs de difficulté qui peuvent être affrontés par les élèves. Si tout le système est présent dès le départ, on court le risque que les élèves ne soient pas en mesure de contrôler toutes les relations en jeu, plus particulièrement les relations entre ce *qui est donné* et ce *qu'on doit démontrer*.

Extrait de discussion

Après une première partie, concernant les axiomes et les premières définitions, on arrive à commenter la construction du **transport d'angle** dans Cabri et respectivement dans la théorie le Théorème qui donne la validité.

137.ENS [...] Mais nous sommes encore en train de travailler avec les axiomes... nous avons vu un élément primitif, nous avons vu une définition, nous avons vu un axiome... qu'est-ce qu'il manque encore entre les représentants de la géométrie?

138.PIER un théorème.

139.MOR maintenant il y a le transport d'angle...

140.ENS on essaye de découvrir qu'est ce que c'est le transport d'angle... Un élément primitif, une définition, un axiome, un théorème?

141.MOR un théorème parce qu'on peut le démontrer...

142.MOR: maintenant il y a le transport d'angle...

143.ENS on essaye de découvrir qu'est ce que c'est le transport d'angle... Un élément primitif, une définition, un axiome, un théorème?

[...]

144.ENS: à votre avis c'est un théorème parce qu'on peut le démontrer... alors voyons s'il est vrai ... quelle est la démonstration, qu'est ce que nous avons utilisé comme démonstration, si nous avons utilisé des choses dont nous avons déjà parlé... Si ce que nous sommes en train de faire c'est correct,... Qui va au tableau et nous décrit comment faire le transport d'angle... vas-y Bazz...

145.GIU: mais c'est dans les définitions?

146.ENS: c'est ce que nous sommes en train de comprendre...; il y a quelqu'un qui dit qu'il s'agit d'un théorème, toi, tu demandes s'il se trouve dans les définitions... voyons...

147.BAZZ EST EN TRAIN DE FAIRE LA CONSTRUCTION AU TABLEAU

148.ENS Comme dans toutes les constructions nous avons les données dont on part et les conclusions auxquelles on arrive... alors quelles sont les données de départ du transport de l'angle?

149. QUELQU'UN: l'angle... où je veux l'amener...
150. ENS: donc un angle et une droite avec un point qui est le nouveau sommet ...
151. BAZZ RACONTE CE QU'IL EST EN TRAIN DE FAIRE
152. GIUS: il se forme deux...
153. ENS :... alors je dois aussi décider de quel côté de la droite je veux le transporter...
154. ENS cela est la construction... alors sur votre petit cahier vous devriez avoir la description de cette construction ... Etant donné un angle de départ... étant donné la droite r sur laquelle je veux reporter l'angle... et un point P pour le sommet du deuxième angle... je trace un cercle....etc... après la description vous devriez avoir une autre partie avec le titre Dans le cahier de Bazz il y a cette partie, il a donné démonstration comme titre...
155. VOCE: alors il s'agit d'un théorème...
156. ENS démonstration de quoi?
157. BERN il faut démontrer que l'angle que nous avons reporté est égal au premier...
158. ENS c'est-à-dire que cela est une construction correcte du transport d'angle... qui construit un angle égal à l'angle de départ... ok... comment nous faisons pour voir si cette construction marche?... pour cette partie quelqu'un entre vous aura écrit une justification de la construction sur le petit cahier... en fait je suis en train de justifier pourquoi la construction marche... peut-être les plus grands ont écrit un peu après... démonstration... alors si il y a une démonstration on peut supposer que celui ci est un...
159. CORO un théorème...
160. ENS alors on va faire les plus grands... si c'est un théorème il doit avoir une hypothèse et une thèse. Quelle est à votre avis notre hypothèse?
161. STEF le triangle...
162. BERN l'angle de départ
163. ENS alors ...
164. VOIX la droite....
165. ENS les objets initiaux... ceux dont je suis parti... sont mon hypothèse ... puis je sais que quoi d'autre est vrai ... allez-y, allez-y
166. QUEL-QUES-UNS la construction.
167. ENS tout ce que j'ai construit ... et donc si j'ai construit des cercles égaux, je peux dire ... ce que donc ?
168. BAZZ qui ont les mêmes rayons...
169. ENS qui ont les mêmes rayons...que tout ce que j'ai fait dans le processus de construction est ce que je connais...
170. BERN je peux prendre comme hypothèse...
171. ENS alors que dans ma thèse...
172. BAZZ alors mon hypothèse est que $C1=C1'$ ou bien que $O1=O'1'$...
173. ENS nous pouvons déjà considérer comme déduction le fait que deux cercles égaux ont des rayons égaux ... en fait tu as construit deux cercles égaux ...
174. MAS REPETE LA DEFINITION DE CERCLE ET IL DIT alors tous les rayons égaux sont des segments égaux ...
175. ENS oui alors celle-ci est la déduction faite de la définition de cercle ... où je mets les déductions? J'ai l'hypothèse, j'ai la thèse... où je mets les déductions? Ce que je déduis à partir de l'hypothèse où je le mets?
176. BERN dans la démonstration...
177. ENS alors comme hypothèse on a $C1=C1'$ et $C2=C2'$... thèse...
178. GIUS les angles égaux....
179. ENS ma thèse, comme nous avons dit est de voir que la construction marche et donc que les deux angles sont égaux... vous voyez, il prend la forme d'un théorème... dans le théorème nous avons compris qu'il y a un énoncé, une hypothèse, une thèse, une démonstration ... alors on commence à faire la démonstration...
180. BAZZ REPETE LA DEMONSTRATION...
181. CECC alors cette construction marche aussi pour faire le double d'un angle (construction qui a été donnée à faire à la maison et dont il faut encore discuter)

MOR (139) introduit un nouvel élément de discussion et il utilise l'expression **transport d'angle**, qui correspond à l'outil de Cabri « transport d'angle ». Cette expression se réfère aussi, en accord avec le but de la discussion, à un élément de la théorie sur le statut duquel il faut se mettre d'accord : est ce que c'est un théorème ou pas ? Pareillement, l'enseignant utilise la même expression **transport d'angle**, en se référant à l'élément de la théorie.

Des opinions différentes émergent, l'enseignant relance le problème, en soulignant que pour que ce soit un Théorème il faut que certaines règles soient respectées, et propose de se déplacer dans l'environnement Cabri pour chercher la réponse. Le logiciel n'est pas présent, mais il est évoqué par la construction reproduite au tableau par BAZZ.

Comme on peut le noter la polysémie de l'expression **transport d'angle** a amorcé /déclenché une référence croisée à l'expérience dans l'environnement Cabri et à la théorie géométrique. La référence à Cabri a l'effet de rappeler les éléments clés d'une construction : les **objets initiaux** et les **objets finaux** qui vont se transformer dans les éléments clé du théorème, l'**hypothèse** et la **thèse**

Dans ce sens, on peut reconnaître la réalisation d'un processus de 'médiation sémiotique'. L'expression **transport d'angle** se réfère aux signifiés relatifs à la construction Cabri, mais aussi aux signifiés relatifs à la théorie. Comme le rappelle l'enseignant (154 en se referant au Cahier de BAZZ), c'est dans la rédaction du Cahier de géométrie que la transformation de procédure – réellement accomplie dans Cabri - à Théorème se réalise. Ensuite la discussion montre l'enseignant qui guide les élèves dans un aller et retour, du monde de Cabri au monde de la théorie. Le résultat de cette référence croisée entre ces deux mondes porte sur l'évolution du signifié de Théorème à partir de l'idée de construction et de la justification de sa validité. La référence au monde des adultes « alors on va faire les plus grands » (160), souligne la nécessité de dépasser la référence au monde du logiciel et de chercher une formulation dans le monde de la Géométrie. C'est intéressant de noter comment l'enseignant va évoquer les expériences vécues par les élèves : le signifié de Théorème s'articule dans les signifiés d'hypothèse, thèse et démonstration. Chacun de ces signifiés est contextualisé par rapport au cas du « transport d'angle », mais il est aussi généralisé à travers les signifiés de « objets initiaux », « objets finaux » et « pas de la construction ».

L'extrait montre la dynamique entre le monde de Cabri et le monde des mathématiques, en particulier, à mon avis, il montre comment ce que l'on a vécu dans l'environnement Cabri soit est réinterprété en termes mathématiques et vice versa.

Le travail de révision collective a révélé son efficacité. Selon les buts poursuivis par l'enseignant, d'une part on arrive à systématiser les éléments de la théorie géométrique dans un ordre logique, de l'autre la discussion donne l'opportunité de réfléchir, à plusieurs reprises et en se référant au monde de Cabri, sur les différents statuts théoriques pertinents à pour chacun de ces éléments. Le savoir auquel l'outil/artefact et son usage se réfère, par l'action de l'enseignant, peut émerger, être explicité par le langage et être internalisé par l'élève.

Dans différentes occasions, axiomes, définitions et théorèmes sont mis en relation et trouvent leur correspondants avec les commandes de Cabri et leur fonctionnement.

Pour conclure nous donnons la parole à Stef qui, après la discussion de révision des cahiers, évoque dans son rapport ce qui s'est passé dans la classe et écrit le commentaire suivant. On peut considérer ses mots comme exemplaires de ce que nous voulions et pouvons obtenir comme production des élèves.

Stef.

... Nous avons examiné la figure de la bissectrice, un camarade à nous, a dit que la bissectrice pouvait être démontrée même avec le triangle isocèle mais pour faire ça nous aurions dû avoir le dernier théorème sur la perpendiculaire. Dire que même si nous avons le théorème nous ne pouvions pas l'utiliser ne signifie pas que nous sommes fous, mais simplement que quand nous avons commencé nous ne l'avions pas et nos moyens pour la démonstration n'étaient pas beaucoup.

Références

- Bartolini Bussi M. (1991), Social interaction and mathematical knowledge, *Proceedings of 15th PME Conference*, Assisi, Italy,
- Bartolini Bussi M. G. (1998), Verbal interaction in mathematics classroom: a Vygotskian analysis, Sierpinska, A. et al. (eds.) *Language and communication in mathematics classroom*, NCTM, 65-84
- Bartolini Bussi M. G. (1996), Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 31 (1-2), 11-41.
- Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (1999), Instruments for Perspective Drawing: Historic, Epistemological and Didactic Issues, in Goldschmidt G., Porter W. & Ozkar M. (eds.), *Proc. Of the 4th International Design Thinking Research Symposium on Design Representation*, III 175-185, Massachusetts Institute of Technology & Technion – Israel Institute of Technology.
- Bartolini Bussi M. G., Boni, M., Ferri, F. & Garuti, R.: 1999a, Early Approach To Theoretical Thinking: Gears in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1-3), 67-87.
- Bartolini Bussi M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F. (à paraître) Semiotic mediation in the Primary School: Durer's glass, Hoffmann H. et al.(eds) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education* (Festschrift for Michael Otte), Dordrecht
- Boero, P., Dapueto, C. Ferrari, P. Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., Scali, E. (1995), Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School, in *Proc. 19th PME* (Recife), 1, 151-166
- Laborde, C. (1999) L'activité instrumentée par des logiciels de géométrie dynamique, *Actes de X^e École d'été Houlgate*, JUFM Académie de Caen, Tome I, pp.235-244.
- Mariotti, M.A. (1996). Costruzioni in geometria, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 19B, (3), 261 - 88.
- Mariotti, M.A. (1998). Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate*, 21B, (3), 209-52.
- Mariotti M.A. (2001) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* 44, (1&2), 25 - 53.
- Mariotti, M.A. : (2001a) La preuve en mathématique, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, Volume 1, n° 4 pp. 437 - 458.
- Mariotti M. A. (2002), The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning, in English L. D. et al. (eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 695-724, Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero P., Ferri F., & Garuti R. :1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the 21th PME Conference*, Lathi, I- 180-95.
- Mariotti, M.A., & Bartolini Bussi M.G. (1998). From drawing to construction: teachers mediation within the Cabri environment. In *Proceedings of the 22nd PME Conference* (pp. I- 180-95). Stellenbosh, South Africa.
- Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris
- Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, *Actes de X^e École d'été Houlgate*, JUFM Académie de Caen, Tome I, pp.203-13.
- Radford, 2003 Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical thinking and learning*, 22 (2), 14-23.
- Vygotskij, L. S. (1974), *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*, Giunti.
- Vygotskij, L. S.(1978), *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press.

Situations de recherche en « classe »

Essai de caractérisation et proposition de modélisation

Denise Grenier

Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble

Charles Payan,

Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble

- À ton avis, ceci est-il un problème de math ?

- Non !

- Et pourquoi ?

- Parce qu'il faut réfléchir !

(Réponse à un questionnaire proposé en CM2¹)

Introduction

Alors que le point de vue constructiviste sur l'apprentissage semble assez partagé², paradoxalement, la plupart des acteurs du système éducatif - élèves, enseignants, inspecteurs, conseillers pédagogiques, mais aussi chercheurs en éducation ou en didactique - ne sont qu'exceptionnellement, pour ne pas dire jamais, en position de construction de savoir. Nous parlons ici du savoir disciplinaire qu'ils sont censés apprendre, transmettre ou dont ils étudient les conditions de l'apprentissage.

Le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche, en particulier par la résolution de questions. Ceci nous a conduit à étudier les possibilités d'existence et de fonctionnement d'**organisations didactiques** autour de situations de recherche. Mais la question des organisations didactiques est liée à celle des organisations mathématiques, ou tout au moins, celle des savoirs à transmettre, au sens large : quelles mathématiques est-il pertinent et possible d'enseigner dans des « situations de recherche en classe » ?

Une autre question vient alors, celle des **savoirs « durables »**, c'est-à-dire qui perdurent au delà de la scolarité chez les non professionnels des sciences. Pour anecdote, lors d'une conférence destinée à un public varié intéressé par une réflexion sur l'enseignement, nous avons présenté les termes suivants (extraits d'index de manuels de Première et Terminale) :

Asymptote, Binôme de Newton, Conjugué d'un nombre complexe, Cosinus hyperbolique, Écart type, Équation différentielle, Fonction affine, Fonction exponentielle, Homothétie, Hyperbole, Interpolation linéaire, Irrationnel, Logarithme népérien, Polynôme, Sinus, Variance

¹ Expérimentation menée par Karine Godot dans le cadre de son travail de thèse, sous notre direction, laboratoire Leibniz.

² Même si actuellement, les réticences et les mises en garde deviennent de plus en plus nombreuses.

Les réactions de l'assistance, prévisibles, confirment qu'il ne reste que très peu de connaissances sur ces notions enseignées au lycée. Ce constat n'est pas surprenant, puisque les notions citées ne sont utilisées que par un très faible pourcentage de la population.

Or, l'enseignement de ces notions est parfois justifié par l'apprentissage *dans le même temps* de savoirs que nous appelons « transversaux », c'est-à-dire ceux intervenant dans de nombreux domaines mathématiques et concernant des termes tels que expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, définition, preuve, implication, structuration, décomposition/recomposition, induction... Mais nous serons sûrement d'accord sur le fait que ces savoirs « transversaux » ne sont guère plus disponibles que les savoirs notionnels, même au niveau de l'université.

Des préoccupations analogues se retrouvent dans les discours plus généraux concernant la **politique éducative** : on entend parler de manière récurrente de la « désaffection scientifique croissante » et, plus récemment, de « l'ennui à l'école ». Ceci rejoint des motivations plus profondes liées à des préoccupations sociales ou politiques. En effet, l'intérêt que nous portons à l'enseignement et à son devenir ne se réduit pas pour la plupart d'entre nous à un simple jeu intellectuel. Il induit évidemment une position non neutre par rapport aux programmes scolaires³ et à la formation des enseignants.

Or, nous avons constaté que, d'une part, l'apprentissage de ces savoirs transversaux, en particulier l'argumentation et la preuve, sont des objectifs constants déclarés « essentiels » depuis plusieurs réformes de programmes dans l'enseignement secondaire et que, d'autre part, les propositions des manuels et les pratiques enseignantes usuelles sont très en retrait par rapport à ces objectifs (quelques éléments sont joints en annexe). Si l'on essaie de dépasser les seuls arguments de contraintes institutionnelles (le temps, surtout), on peut faire l'hypothèse qu'il y a une difficulté intrinsèque à réaliser ces objectifs en classe.

Le type de situations que nous analysons ici fonctionne depuis vingt ans dans les ateliers MATH en JEANS (Audin et Duchet, 1992) et sont étudiées d'un point de vue théorique depuis deux ans dans le groupe SIRC constitué de chercheurs de différents laboratoires et d'enseignants du secondaire.⁴

1. Hypothèses et questions de la recherche

En situation de recherche, le chercheur peut, et doit, pour faire évoluer sa question, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à modifier la question posée. Il peut momentanément s'attaquer à une autre question si cela lui semble nécessaire. C'est à ce type de pratique (praxis pour la résolution d'une question) que nous souhaitons confronter l'élève. Il nous semble que cette pratique non seulement n'est pas usuelle en classe, mais plutôt interdite à l'élève la plupart du temps. Pour cela, nous avons été tenté de donner pour titre à ce séminaire : *Situations de Recherche et apprentissage de la désobéissance*⁵.

³ Position étonnamment assez peu partagée.

⁴ Michel Bridenne, Denis Gardes (professeurs lycée à Dijon), Viviane Durand-Guerrier, Gilles Germain et Claude Tisseron (Université Claude Bernard, Lyon), Pierre Duchet (université Paris VI), Denise Grenier et Charles Payan (Université Joseph Fourier)

⁵ Dans des situations historiques critiques, on a vu que seul le refus d'obéissance pouvait permettre d'échapper à la barbarie. Plus près de nous, on interprète souvent les actes d'incivilité par le non respect des règles sociales et l'on

Aucune activité mathématique n'est possible sans expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, preuve. Même lorsqu'il s'agit de construire (en géométrie, par exemple) ou de calculer, il n'y a activité scientifique que si ces constructions ou ces calculs sont validés du point de vue scientifique. Or cette activité scientifique est pour nous constitutive de la construction des connaissances mathématiques.

Dans quelles mesures les organisations didactiques actuelles (programmes et manuels scolaires) et les propositions de la recherche en didactique existantes (problème ouvert, situation de débat scientifique, problème long) – sous-tendues par les théories didactiques – permettent-elles cette activité scientifique ? Notre étude de manuels nous amène à conclure que les situations didactiques classiques, quelles qu'elles soient, ne remplissent pas les conditions pour les apprentissages transversaux. En revanche, certaines propositions didactiques sont proches de nos « situations de recherche en classe⁶ » (SRC), mais n'en présentent pas toutes les caractéristiques (§3).

Se pose alors la question des *conditions pour faire fonctionner, dans les institutions didactiques, une activité mathématique de type « situation de recherche en classe*», susceptible de permettre l'apprentissage de ces savoirs transversaux. Nous étudierons si les modèles *de situation adidactique, contrat et milieu* sont pertinents ou non pour décrire ce type de situation.

Cette recherche est en cours, nous ne proposons ici que des réponses partielles à ces questions.

2. Un modèle SRC

Nous allons donner ici quelques critères spécifiques du modèle SRC, que nous illustrerons sur un exemple, avant de préciser un peu plus le modèle : connaissances et apprentissages en jeu, milieu nécessaire pour une telle situation, positions des acteurs (élève et enseignant). Nous situerons brièvement la SRC par rapport à quelques dispositifs issus de travaux didactiques tels le « problème ouvert » (Arsac et al., 1988), le « problème long » étudié par D. Gardes dans sa thèse (en cours), et la « situation de débat scientifique » (Legrand, 1993).

2.1. Critères de caractérisation d'une SRC

1. *Une SRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle.* Elle doit être proche de questions non résolues. Nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues – non seulement pour les élèves, pour l'ensemble de la classe, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs – va être déterminante pour le rapport que vont avoir les élèves avec la situation.

2. *La question initiale est facile d'accès :* la question est « facile » à comprendre. Pour que la question soit facilement identifiable par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées et c'est la situation elle-même qui doit « amener » l'élève à l'intérieur des mathématiques.

oublie que ces actes sont aussi rendu possibles par le manque de courage qui serait nécessaire pour ne pas se plier aux lois du clan, de la bande, ...

⁶ le terme « classe » désigne en fait tout groupe d'élève partageant à un moment donné la même activité.

3. *Des stratégies initiales* existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques. De préférence, les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et les plus réduites possibles.

4. *Plusieurs stratégies d'avancée* dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.

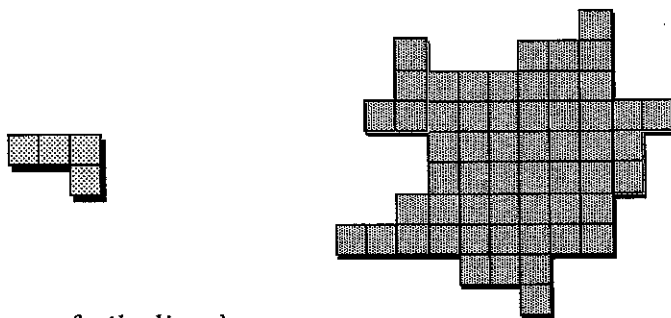
5. *Une question résolue renvoie très souvent une nouvelle question.* La situation n'a pas de « fin ». Il n'y a que des critères de fin locaux.

2.2. Illustration de ce modèle sur une situation particulière

Cette situation, décrite brièvement dans Grenier & Payan (1998) a été expérimentée depuis plusieurs années, du CM1 à l'Université (DEA). Elle est maintenant intégrée comme situation classique dans un module optionnel de DEUG 1^{ère} année à l'université. Nous la reprenons ici pour l'analyser du point de vue du processus de recherche qu'elle induit de manière fiable. D'autres situations sont décrites, en particulier sous le point de vue des savoirs en jeu, dans Grenier (1995) et Grenier & Payan (1998).

1. *Inscription dans une problématique de recherche professionnelle.*

Le pavage (recouvrement sans « chevauchement » ni « débordement », d'un certain ensemble de cases) représente une classe très vaste de problèmes. Le problème de savoir si un polymino donné est pavable par des copies d'un même polymino plus petit est une question ouverte⁷ qui, posée de manière aussi générale, n'a aucune chance de pouvoir être résolue. On doit donc se restreindre par exemple à des « pavés » de petite taille ou de forme très particulière comme des rectangles ou même simplement des barres $1 \times n$. Par exemple, la caractérisation⁸ des polyminos pavables par des dominos reste un problème non résolu. Les chercheurs s'intéressent à des questions particulières, comme le pavage de structures très régulières telles que les grilles planes ou les morceaux de grilles, à maille carrée, triangulaire ou hexagonale. On cherche par exemple à paver des sous-ensembles de la grille carrée par des polyminos plus petits.



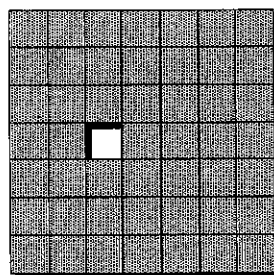
2. *La question est facile d'accès.*

Elle n'est pas a priori - pour l'élève et souvent pour l'enseignant - un problème mathématique (il n'y a pas de nombres, pas de calcul, pas de géométrie familière). On se met alors d'accord sur un point de départ de la recherche : *quels sont les pavés les plus « simples » ?* — le carré formé d'une seule case, mais alors le problème devient évident, puis ensuite, les dominos. On doit

⁷ au sens du problème ouvert pour le chercheur : c'est-à-dire non résolu.

⁸ il conviendrait bien sûr de préciser ce que l'on entend par caractérisation.

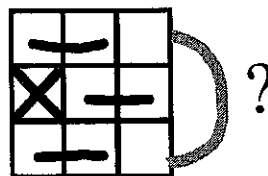
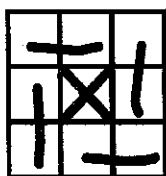
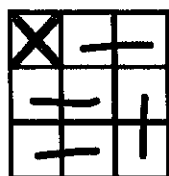
encore, au moins pour commencer, simplifier le domaine à paver : carré, rectangle ; le problème est alors assez rapidement résolu. Pour complexifier un peu, on peut enlever une case au carré. On peut démarrer ainsi la recherche par la question : peut-on paver, à l'aide de dominos, un carré privé d'une case (la case pouvant être choisie n'importe où) ? Le problème est présenté sur un exemple.



3. Des stratégies initiales existent.

Il suffit d'avoir une perception de l'espace qui permette d'identifier un ensemble de cases et de comprendre ce qu'est un pavage, compétences développées à la maternelle. Les notions d'aire et de parité, en tant qu'invariants, interviennent fortement, mais elles ne sont pas des pré-requis indispensables, la situation est aussi un moyen de les faire émerger ou de les approfondir.

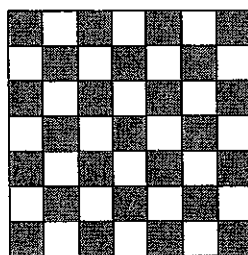
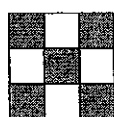
La dévolution du problème est immédiate : des essais de pavage sur l'exemple de départ (ici le carré 7x7). Suivant la stratégie adoptée et la case enlevée, on arrive ou non à paver. Ensuite si l'on veut avancer dans le problème, il est nécessaire de changer la consigne : on va travailler sur d'autres carrés plus petits (carrés 3x3 ou 5x5). Lorsqu'on ne parvient pas à paver, on peut remarquer que pour recouvrir certaines cases on n'a pas le choix ; on obtient ainsi des preuves d'impossibilité, par « forçage ».



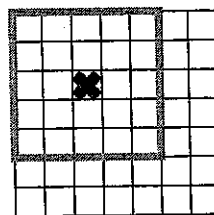
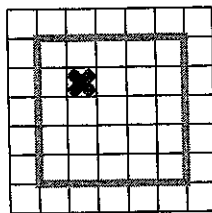
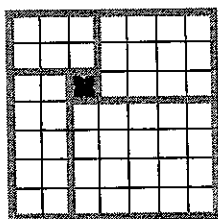
On a constaté que pour représenter de manière simple un domino sur le carré, les élèves vont créer leurs propres ostensifs. Les modes de représentation choisis permettent de visualiser la relation d'adjacence entre cases, qui va jouer un rôle important dans la situation.

4. Il existe diverses stratégies d'avancée dans la recherche.

Le repérage, sur le carré 3x3 et éventuellement 5x5, des cases dont la suppression de l'une quelconque d'entre elles permet de paver (représentées en gris sur la figure), induit une conjecture plus générale.



Des preuves sur la possibilité de paver sont données par divers découpages, dont des découpages inductifs. Par exemple :

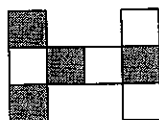


La généralisation aux rectangles est induite dans le cas de la stratégie S1 ci-dessus (on change à nouveau la règle). Les preuves deviennent plus simples dans les cas ci-dessus. D'autres types de preuves sont quelquefois envisagées (preuves par cheminement liées au jeu de Taquin).

Les **preuves d'impossibilité** sont obtenues par structuration de l'objet, en jouant sur la forme colorée par les «bonnes» cases : puisqu'un domino couvre une case «noire» et une case «blanche», un polymino pavable est nécessairement «équilibré» (il contient autant de cases noires que de cases blanches dans une bi-coloration «en damier»).

5. La situation n'est pas «finie».

Ainsi, la phase de résolution du problème de départ (pavage de carrés privés d'une case) a soulevé «naturellement» d'autres questions. Par exemple, on a établi au passage qu'un polymino pavable par des dominos est nécessairement équilibré, et que cette condition est suffisante dans le cas de pavage de carrés avec ou sans «trou». L'est-elle toujours ? Sinon, dans quels cas ? On peut ainsi repartir à la recherche de preuves ou de contre-exemples. Par exemple, ce contre-exemple apparaît très souvent.

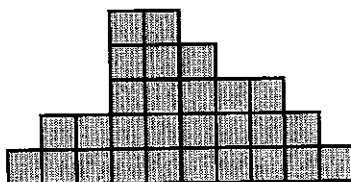


et induit une question qui passionne facilement : est-ce le plus petit contre-exemple ? En voici un peu plus petit ; mais peut-on prouver que c'est le plus petit ?



Dans ces contre-exemples, l'impossibilité de paver est due à des *contraintes locales*. Existe-t-il des contre-exemples sans de telles contraintes ?

A partir de cette question, d'autres formes à paver peuvent être envisagées, par exemple, les polyminos «en trapèze».



Notons, que ce problème qui a aussi été proposé par des étudiants de DEUG a fait l'objet d'un article de recherche (L. Bougé, M. Cosnard, 1992)⁹. D'autres problèmes de pavage, par d'autres pavés de base (deux cases en papillon, triminos longs, triminos en L...etc) surgissent comme prolongements de cette situation.

2.3. Les connaissances en jeu et le milieu pour une SRC

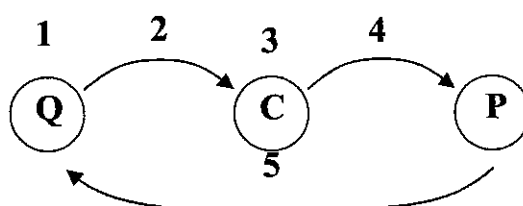
Reprenons l'étude du modèle SRC, en particulier sous les points de vue des connaissances en jeu et de la position des acteurs.

L'objectif premier d'une SRC est de produire des réponses à des questions. Les concepts mathématiques qui sont en jeu pour résoudre la question ne sont pas désignés à l'avance et ne sont pas restreints a priori, ils sont au service du problème et de sa résolution

De fait, notre recherche expérimentale le confirme, il y a des apprentissages en jeu, et ce sont ceux qui sont constitutifs de toute activité de recherche mathématique : l'argumentation, l'activité de conjecturer, celle de structurer (un objet), la preuve, la modélisation, tous plus ou moins présents selon le type de SRC choisi. C'est ce qui donne une légitimité institutionnelle à ces situations : il y a bien des apprentissages et ils font partie de ceux prévus par les programmes. Il y a aussi des savoirs notionnels qui sont en jeu : nos analyses didactiques (analyses a priori de SRC que nous pratiquons depuis plusieurs années) montrent qu'on peut rattacher chacune d'elles à un ensemble de notions mathématiques. Elles vont constituer des « points d'ancrage notionnels » pour l'enseignant.

Cependant, le modèle adidactique semble difficile d'utilisation relativement à ces concepts ou notions mathématiques, car ceux-ci sont issus de la progression dans la résolution du problème. En effet, pour que la situation soit une situation de recherche, aucune stratégie, aucune connaissance ne doit être a priori exclue.

En revanche, si l'on considère, par exemple, comme un savoir, le triplet (*question, conjecture, preuve*), on peut se poser la question de l'existence d'une situation fondamentale (Brousseau, TSD, p. 59) pour ce savoir et donc, l'existence de situations adidactiques associées¹⁰. Les éléments du triplet (Question, Conjecture, Preuve) sont les *invariants* de la SRC.



Invariants et caractéristiques (de 1 à 5 : § 2.1) d'une SRC

Les *variables didactiques* associées sont des **variables « de recherche »**, au sens où elles déterminent la compréhension et l'intérêt de la question, son ouverture à de nouvelles questions, l'élargissement des stratégies de recherche, les possibilités de transformation du problème (modélisation). On ne va pas jouer sur des valeurs de variables didactiques pour bloquer ou

⁹ une généralisation en dimension quelconque est actuellement l'objet d'un article soumis à publication.

¹⁰ La recherche de situations adidactiques pour les apprentissages transversaux est en cours, en relation avec notre travail sur les SRC.

induire une stratégie particulière ou (dé)favoriser l'utilisation d'une connaissance donnée. Par ailleurs, « l'ouverture » n'est pas une qualité en soi, elle doit être contrôlée par rapport à la dévolution et à la progression de la recherche.

Le critère de réussite pour l'élève n'est pas, comme dans les exercices usuels, la résolution de la question (que la solution soit juste ou fausse). Dans les SRC, la résolution du problème est souvent partielle (résolution de cas particuliers, conjectures, preuves partielles), et la question résolue renvoie (éventuellement) à une autre question de recherche. Il peut y avoir alors élaboration d'une nouvelle stratégie si celle adoptée dans le cas particulier n'est pas généralisable (voir l'exemple du pavage de polymino traité ici). Le problème n'est pas « fini » et on peut le prolonger de façon naturelle, il reste des conjectures à faire ou d'autres cas à étudier et de nouvelles questions. Un critère de réussite « provisoire » peut être que l'on a émis une conjecture forte, ou qu'on a simplement résolu un cas particulier.

Le critère de réussite pour l'enseignant est la reconnaissance d'apprentissages liés au savoir (question, conjecture, preuve).

2.4. Position des acteurs dans la situation didactique comportant une SRC

Dans une SRC, les acteurs (élèves et enseignants) sont dans des positions différentes de celles qu'ils ont l'habitude d'occuper dans une situation didactique classique.

•• *L'élève est en position de chercheur* car il est dans une tâche de production de quelque chose de « nouveau » qui n'est pas seulement nouveau pour lui. Les résultats de son activité de recherche sont des conjectures, résolution de cas particuliers, des contre-exemples, des questions nouvelles, etc... Nos données expérimentales montrent que, pour l'élève, le fait de savoir qu'il cherche à résoudre un problème non résolu ou partiellement résolu, modifie le rapport qu'il a avec son activité. Elles montrent aussi qu'on peut obtenir des productions presque publiables. On a déjà cité l'exemple du pavage de pyramides avec des dominos, issu du problème de pavage décrit ci-dessus, et pour lequel des étudiants de DEUG ont trouvé une solution « constructive » originale. On peut encore citer l'exemple d'une solution, construite tout au long de l'année 2001 par des élèves du CLEPT¹¹, au problème de caractérisation des rectangles pleins et rectangles avec un trou pavables par des triminos en L. Signalons que le problème général (caractériser les polyminos qui sont pavables avec des triminos) est un problème « ouvert » de la recherche.

•• *L'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation.*

Pour le pôle recherche, sa position est plus proche de celle de l'élève que dans une situation classique, car il n'est pas nécessairement détenteur des solutions du problème. *Mais il est (censé être) détenteur des savoirs transversaux* et avoir des critères d'évaluation sur leur validité. C'est une position qui se révèle difficile, parce qu'il n'est pas d'usage pour un enseignant d'avoir une activité de recherche.

Dans la gestion des SRC, le contrôle par l'enseignant de l'activité de l'élève se fait d'abord en fonction de l'avancée dans la résolution du problème et aussi par rapport *aux objectifs d'apprentissage, les savoirs transversaux*. Les notions mathématiques susceptibles d'apparaître comme des outils de résolution peuvent être fournies par l'enseignant.

¹¹ Collège Elitaire Pour Tous de Grenoble, destiné à des élèves qui ont quitté le système scolaire.

Le « jeu d'obligations » entre l'élève et l'enseignant porte bien sur ces savoirs transversaux. Les règles de base associées sont celles habituelles du débat scientifique (Legrand, 1993) : une affirmation doit être argumentée, un contre-exemple est suffisant pour annuler une conjecture, des exemples ne suffisent pas à prouver, etc... Des règles moins « classiques » sont aussi en jeu, telles que celle-ci « Si une conjecture s'avère fausse, peut-on la modifier pour en faire une autre conjecture ? ». Ces règles et propriétés du débat scientifique forment des connaissances de base pour l'activité mathématique et des éléments de rétroaction. Elles sont constitutives d'un milieu pour une situation SRC.

Nous ne développerons pas ici la nécessité d'une organisation didactique adéquate autour des SRC, comprenant, en plus des éléments ci-dessus, des dispositifs de travail précis pour l'élève (travail individuel et de groupe, rapport de recherche à la fin de la séance ou quand une question est considérée comme résolue par le groupe d'élèves) et un dispositif d'institutionnalisation.

2.5. Les problèmes classiques ne sont pas des SRC

Alors que les programmes les évoquent clairement, trois aspects fondamentaux des SRC sont absents dans les manuels et les pratiques de classe.¹²

- *L'« enjeu de vérité »*. En classe, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai (« démontrer que »), il n'y a plus d'enjeu de vérité, sauf si l'énoncé a un caractère très paradoxal (ce qui est très rare !). Lorsque la question de la vérité d'une affirmation est posée, cette vérité n'est un enjeu que pour l'élève (le professeur sait), ce qui enlève une part d'intérêt à la découverte. L'enjeu est alors pour lui d'apprendre, non de produire une connaissance.

- *L'aspect « social » de l'activité*. Dans une SRC, il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique, même s'il est local (groupe + professeur + chercheur). Ceci est absent dans une situation didactique usuelle : seul l'élève est en situation de recherche, ce n'est pas l'ensemble du groupe qui ne sait pas et, du coup, le seul intérêt pour lui est de montrer qu'il est « capable » de retrouver la solution

- *L'aspect « recherche »*. Dans les manuels et les pratiques enseignantes, il est explicitement déclaré que, pour résoudre un problème et aussi pour prouver, « on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée ». Cette consigne, qui induit une épistémologie particulière – contestable – de la preuve, est contradictoire avec l'activité du chercheur et avec la démarche scientifique : le chercheur utilise des résultats locaux (trouvés en cours de la recherche) ou même des propriétés encore à l'état de conjectures (qui devront être prouvées ou infirmées ensuite), parce qu'elles permettent d'avancer.

2.6. Choix d'une SRC et savoirs du curriculum

La question ici est celle de l'adéquation des SRC avec les savoirs scolaires : lors du choix d'une SRC pour une classe, dans quelle mesure les notions au programme sont-elles un critère ?

- Une première réponse possible (extrême) est la suivante : les SRC proposées dans une classe donnée ne sont pas choisies en relation avec le programme et les connaissances de ce niveau, les seuls apprentissages visés explicitement sont les savoirs transversaux. La dévolution est assurée par la question : l'énoncé est compréhensible, on peut avancer dans le problème avec les connaissances des niveaux précédents (concepts au sens strict, ou proto-mathématiques ou transversaux). Ceci impose la négociation d'un contrat très particulier : aucune connaissance

¹² voir en annexe quelques éléments sur la place des savoirs transversaux dans des programmes et dans des manuels.

n'est a priori interdite, ni obligatoire ; une stratégie qui s'avère être une impasse doit être gérée sans autorité précoce.

- Une deuxième réponse possible est de choisir la SRC en relation avec les savoirs du curriculum. Elle donne du sens à ces savoirs et permet d'en construire les bases. On est plus proche alors du « problème long » (D. Gardes, thèse en cours), qui expérimente depuis quelques années une situation de longue durée en classe de terminale scientifique).

- Une troisième réponse possible est de considérer les savoirs du curriculum comme outils de résolution de la SRC, mais la question qui se pose alors est celle du maintien du caractère « recherche » d'une telle situation : ce choix va à l'encontre de notre définition d'une SRC.

3. Les SRC et les autres modèles didactiques

3.1. Le « problème ouvert »

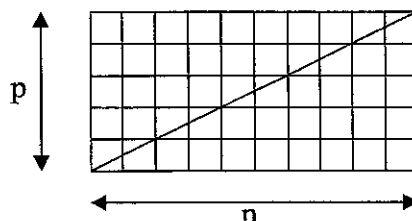
G. Arsac (RDM 9.3), à propos de la démonstration et des phénomènes de validation, fait une remarque générale dans sa conclusion reprenant deux idées fondamentales de Lakatos (1976) : les preuves évoluent en fonction des réfutations qu'elles rencontrent et il y a un lien fondamental entre le remaniement des preuves et l'élaboration de concepts (« proof generated concept », traduit par « concept éprouvette »). C'est en accord avec cela qu'il définit le « problème ouvert » comme un problème qui possède les caractéristiques suivantes : l'énoncé est court ; l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que ») ; la solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours ; le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. L'objectif est que les élèves puissent facilement s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

G. Arsac distingue les problèmes ouverts des problèmes de découverte et des problèmes de modélisation, parce que, pour lui, qu'aucun de ces types de problèmes « ne permet véritablement aux élèves de mettre en route ce que nous appelons une démarche scientifique, c'est-à-dire : faire des essais, conjecturer, tester, prouver ». Déjà, en 1988, comme le signale l'auteur, le problème ouvert s'inscrivait parfaitement dans les programmes scolaires, en particulier de la classe de seconde. Pendant la phase de recherche du problème ouvert, l'enseignant doit « aller au rebours de son comportement habituel et aussi de ce qu'attendent les élèves ». Arsac reconnaît comme difficiles les tâches de gestion telles que : ne pas fermer le problème, maintenir l'activité de recherche, valoriser les tâtonnements et les résultats partiels et enfin, ne pas faire preuve d'autorité pour valider ou invalider un résultat.

Nous reprenons à notre compte toutes ces hypothèses et ces objectifs comme des éléments de la SRC. Cependant, il nous semble que certains critères – fondamentaux pour les SRC – ne sont vérifiés par le « problème ouvert ». Pour préciser, étudions rapidement les six premiers exemples de problèmes ouverts donnés dans Arsac et al. (1988).¹³

¹³ Ces six problèmes occupent dans l'ouvrage une place particulière que nous interprétons comme significative de leur exemplarité.

1. Toto part de A, prend de l'eau et va en B. Peux-tu lui tracer le chemin le plus court ?
2. Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que $1 = 1/a + 1/b$?
Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a , b et c tels que $1 = 1/a + 1/b + 1/c$?
Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a , b , c et d tels que $1 = 1/a + 1/b + 1/c + 1/d$? Continue.
3. Etudier la chaîne : $n \rightarrow n/2$ si n est pair,
 $3n+1$ si n est impair n entier naturel
4. Comment tracer la droite passant par A et par l'intersection de d et d' ?
Malheureusement, le point d'intersection de ces deux droites se situe à l'extérieur de la feuille.
5. Peux-tu déterminer en fonction de n et p , le nombre de carrés que traverse la diagonale ? Combien de carrés traversés pour $n = 78$ et $p = 75$?



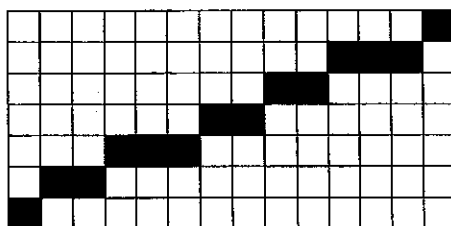
6. Etant donnés trois nombres positifs est-il toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour mesure ces trois nombres ? Si ce n'est pas toujours possible, quelle(s) condition(s) doivent vérifier ces nombres pour que ce soit possible ?

Reprenons nos critères de caractérisation de la SRC (§2). Les problèmes 1 et 6 sont les seuls qui contiennent une question explicite (de type oui - non). Tous ces problèmes sauf le problème 3 sont résolus pour la recherche mathématique, certains depuis longtemps, ils ont une solution bien identifiée et les notions en jeu pour les résoudre (sauf le problème 5) sont des savoirs institutionnellement installés.

Dans le problème 1, si l'on remplace Toto par « un oiseau », la situation, placée dans l'espace, est plus ouverte.

Dans le problème 5, les concepts en jeu ne sont pas désignés de manière immédiate pour un enseignant de mathématique (et c'est justement ce problème dont une analyse expérimentale est développée par les auteurs). Ce problème nous semble en effet remplir certaines conditions pour la mise en place d'une activité de recherche. En effet, si le problème est résolu, il peut cependant être plongé dans une problématique de recherche située dans un autre cadre, par exemple sous l'énoncé suivant :

« On s'intéresse aux petits carrés qui sont traversés par une droite : cela peut être une définition possible pour une droite discrète, mais il peut y en avoir d'autres : quand est-ce qu'on dira qu'un ensemble de petits carrés est une droite ? ».



Le nombre de carrés traversés peut « mesurer » l'épaisseur de la droite qu'ils forment. La question des variations de l'épaisseur des droites selon leur inclinaison semble plus motivante que celle de « trouver un nombre ». Elle peut induire la question du calcul du nombre de carrés traversés ou aboutir à la conjecture que l'épaisseur varie peu relativement aux inclinaisons.

Signalons que cette question n'est pas résolue pour le cercle.¹⁴

Revenons sur le problème 3 : Etudier la chaîne :
$$n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad n \text{ entier naturel}$$

Les suites obtenues dépendent des valeurs initiales choisies. La conjecture intéressante est que « quel que soit la valeur initiale, la chaîne se termine par 1 ». C'est un problème de la recherche actuelle (c'est en fait la « conjecture de Collatz »), qui se situe clairement en mathématique, avec des stratégies expérimentales accessibles et pouvant faire « deviner » cette conjecture. Cependant, les sous-problèmes sont forcément très mathématiques (étudier les contre-exemples minimaux, ...) et il y a très peu de résultats intermédiaires. Enfin, il n'y a pas de « fin », mais l'activité ne renvoie pas à de nouvelles questions sans outils puissants pour continuer.

3.2. La « situation de débat scientifique »

Elle consiste à instaurer dans un cours (magistral) une pratique de débat scientifique, c'est-à-dire à « faire en sorte que pour l'étudiant, les savoirs fondamentaux soient d'abord problématisés avant d'être énoncés par le professeur » (Legrand, 1993). Les apprentissages transversaux sont nécessairement concernés, puisqu'ils fondent la situation : ce que nous retrouvons dans la SRC. Cependant, la situation de débat scientifique et la SRC n'ont pas tout à fait les mêmes objectifs et correspondent à des organisations didactiques différentes. En effet, le fonctionnement de la situation de débat scientifique est plus de l'ordre du didactique : il s'agit d'un débat en groupes et le professeur est « dans » la situation (ce qui n'exclut pas des phases adidactiques). Par exemple, dans l'activité « Circuit », l'objet principal du débat est de constater les désaccords, puis de se mettre d'accord sur des axiomes, un des objectifs étant de questionner le Vrai et le Faux et de montrer que tout Vrai est relatif (à une communauté).

La SRC est construite pour être adidactique et peut être proposée à un seul élève (même si ce n'est pas le plus approprié) ; elle a pour objectif premier de répondre à une question mathématique plus ou moins « ouverte » ; en revanche, le débat scientifique est nécessaire dans l'organisation didactique autour de la SRC.

3.3. Le « problème long »

Le travail sur le « problème long » qui s'effectue depuis plusieurs années à Lyon est la suite du « problème ouvert ». D. Gardes étudie la possibilité de faire vivre une situation sur un très grand nombre de séances dans une classe de terminale S. Contrairement aux SRC, le problème long est soumis à une contrainte institutionnelle forte : travailler, tout au long des séances, sur les notions au programme dans cette classe. Les notions mathématiques sont donc désignées à l'avance ainsi que leur progression et, plus encore, elles doivent être au centre de la construction des sous-problèmes qui constituent le « problème long ».

¹⁴ De situations concernant la définition d'objets géométriques discrets (ceux construits par des pixels sur des écrans) est en cours d'étude dans le cadre de la thèse de Cécile Ouvrier-Buffet, sous notre direction, laboratoire Leibniz.

Ces trois exemples (non exhaustifs) montrent les analogies et différences entre la situation SRC et des dispositifs étudiés depuis de nombreuses années en didactique. Ils montrent aussi que l'apprentissage des savoirs que nous avons appelés « transversaux » est une préoccupation constante dans notre communauté.

Conclusions et questions

Notre recherche nous amène aux constats suivants.

- Les SRC modifient le rapport des élèves et des étudiants à l'activité mathématique et à la démarche scientifique ; elles sont sources d'apprentissages repérables concernant les savoirs transversaux. Nous analysons actuellement plus finement ces apprentissages.

- Les SRC nécessitent que la personne qui gère la situation ait une pratique de recherche et qu'elle soit formée à la gestion de ce type de situation. Il serait souhaitable qu'un dispositif permettant cette formation existe pour les enseignants.¹⁵

Une difficulté méthodologique que nous avons rencontrée est la suivante : les savoirs transversaux ont leurs fondements en dehors de l'institution scolaire (ils ne sont pas enseignés à l'école), comment étudier de plus près leur « vie » en classe ; d'autre part, une approche anthropologique des SRC est difficile, parce qu'elle devrait se fonder sur une analyse de pratiques dans des institutions auxquelles nous n'avons pas accès.

D'autres questions se posent dans le cadre de cette recherche. Par exemple, est-il possible de construire une situation sur le modèle adidactique pour le triplet (question, conjecture, preuve) ? Il nous semble que la question de la rétroaction et de la validation dans une « situation adidactique pour la preuve » n'est pas réglée : comment un élève qui produit un discours qui pour lui est une preuve (mais n'en n'est pas une), peut-il avoir un retour de la situation sur sa production ? Les nombreux travaux en didactique sur la preuve ne répondent pas, nous semble-t-il, à cette question.

Références

Arsac G., Germain G., Mante M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*. Ed. IREM de Lyon.

Arsac G. (1990) Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9/3 pp.247-280, ed La Pensée Sauvage, Grenoble.

Audin P., Duchet P. (1992) La recherche à l'école : Math.en.Jeans, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. n°121, pp. 107-131, Grenoble 1.

Bougé L., Cosnard M. (1992) Recouvrement d'une pièce trapézoïdale par des dominos, *note au C.R.A.S.* Paris, t. 315, Série I, p. 221-226.

¹⁵ Nous avons nous-même commencé ce type de formation à l'occasion de stages de formation continue du rectorat de Grenoble.

Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18.2, pp. 59 -100, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Grenier D. (1995). Savoirs en jeu dans des problèmes de combinatoire in *Différents types de savoirs et leur articulation.*, pp.235-251, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Lakatos I. (1976). *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann Ed., 1985.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM n°10*, pp.123-159. Topics editions

Annexe. Les savoirs « transversaux » dans des programmes et des manuels.

Il est clair, depuis longtemps dans les programmes, que l'argumentation, l'activité de conjectures, la preuve, la modélisation sont des objectifs d'apprentissage essentiels. Nous avons décrits le statut et le rôle de la preuve et de la modélisation dans Grenier-Payan (1998). Nous donnons ici quelques éléments concernant plus spécifiquement l'activité de « recherche ».

• dans les commentaires des programmes de Seconde (BO n°20 de mai 90), §5 formation scientifique

« Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : *formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples*, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. »

• dans le programme 2000 pour le même niveau

Les activités de calcul, de géométrie, les problèmes sur les fonctions sont TOUS présentés comme étant des « occasions » pour raisonner, argumenter, prouver ; de plus, le développement de l'argumentation fait partie des « exigences » de ce programme.

Si on interprète cela à la lettre, les titres de chapitres des manuels ne devraient être seulement des notions de géométrie ou d'algèbre, mais des thèmes comme argumentation, conjecture et preuve - la géométrie, le calcul et l'algèbre étant des occasions pour cela.

• On retrouve ces mêmes objectifs dans les programmes de 1^e ES enseignement obligatoire

Dans les généralités sur la formation scientifique en 1^{ère} et en terminale S

« Le noyau central du schéma résume, en quatre composantes essentielles, la spécificité de toute pratique mathématique : observation, abstraction, expérimentation, démonstration. Ces quatre composantes entretiennent entre elles des rapports dialectiques, l'une appelant l'autre ou s'appuyant sur elle, au gré du travail mathématique réalisé. »

et dans les manuels ? Dans notre article (Grenier, Payan, 1998) nous concluons ainsi sur une analyse de manuels du secondaire des années 90 (du collège et lycée). La preuve semble vivre essentiellement dans le domaine de la géométrie et sous deux formes, le raisonnement déductif simple (à un petit nombre de pas), basé sur l'utilisation des propriétés ou théorèmes du cours et la rédaction de démonstration, où l'attention est portée sur le langage et la syntaxe plus que sur la logique et la sémantique. Il s'agit pour l'élève d'apprendre à passer d'hypothèses qui sont données et reconnues comme vraies à une conclusion qui est donnée, ou donnée à voir comme évidente. Il semble que la place de l'argumentation et de la preuve est aussi inexistante dans les manuels de lycée. Il n'y a pas de place officielle pour l'enjeu de vérité, ni pour les conjectures (*il est explicitement dit que l'on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée*).

D'autre part, alors que les programmes mentionnent son importance, l'activité de modélisation est relativement absente des manuels et, dans les pratiques, les seules modélisations abordées peuvent être caractérisées ainsi : à une situation donnée correspond en général un modèle unique, désigné. La situation est vue comme un exercice d'application, le but est de faire fonctionner correctement le modèle auquel elle est associée. Le plus souvent d'ailleurs, on se place d'emblée dans le modèle, ou alors le problème a été « habillé » sous forme de situation concrète.

De plus, l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux, traite de connaissances et de savoirs mathématiques qui sont clos dans les institutions savantes et pour l'enseignant lui-même (il faut attendre le DEA). Le découpage de l'activité se fait selon les notions mathématiques au sens strict (les titres des chapitres des manuels et programmes parlent d'eux-mêmes).

Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe.

G. Brousseau

Laboratoire DAEST, Université Bordeaux 2

P. Gibel

Laboratoire DAEST, Université Bordeaux 2

I . Présentation de notre cadre de travail

1. On étudie le raisonnement tel qu'il apparaît dans une classe ordinaire sous toutes les formes que fait apparaître l'analyse des situations et notamment comme moyen pour l'élève d'interroger la situation, de produire des arguments, d'organiser une solution, de justifier une organisation, et comme moyen pour l'enseignant de justifier un apprentissage, comme moyen didactique rhétorique, comme justification explicite valide et comme objet d'enseignement.

Le domaine où le raisonnement global est le mieux pris en compte, à la fois implicitement et explicitement, c'est dans l'arithmétique scolaire élémentaire. C'est pour cette raison que nous avons choisi ce domaine des mathématiques.

2. Nous allons nous intéresser au fonctionnement des raisonnements dans le cadre de l'activité de résolution de problèmes : quels sont les différents raisonnements qui apparaissent aussi bien chez les élèves que chez l'enseignant lors de la conduite de l'activité, quelles utilisations en font les uns et les autres ?

Parmi toutes les fonctions du raisonnement, nous allons étudier les raisonnements comme moyens de détransposition des savoirs enseignés, c'est-à-dire outils à la remathématisation des discours mathématiques tenus en classe.

3. Dans l'étude des phases scolaires de la résolution de problème, l'analyse des situations fait apparaître deux cas différents suivant que le problème est ou non dédidactifiable.

Une situation d'apprentissage est dédidactifiable si et seulement si elle vérifie les 2 conditions suivantes

- Elle possède un modèle non didactique i.e. un modèle dans lequel l'intervention du professeur n'est pas évoquée.
- Ce modèle non didactique est raisonnablement productif i.e. il a de bonnes propriétés d'apprentissages dans le sens où
 1. L'élève dispose du répertoire nécessaire pour concevoir les stratégies de base
 2. Les connaissances nécessaires pour élaborer les stratégies de résolution ne sont pas trop éloignées du répertoire des élèves.
 3. L'élève peut obtenir en réponse à son action les informations nécessaires à la résolution du problème.
 4. L'élève peut déterminer par lui-même si le résultat obtenu est correct ou non.
 5. L'élève peut faire plusieurs tentatives.

Pourquoi est-ce différent pour le professeur dans la conduite de l'activité, plus précisément dans la gestion et le traitement des raisonnements produits ?

1. Dans le cas où la situation est dédidactifiable le professeur peut se référer à la situation objective, il n'est pas contraint d'avoir recours à des moyens didactique rhétorique.

2. Dans le cas d'une situation non dédidactifiable l'enseignant est tenu d'apporter des informations sur la base d'un projet qui n'est pas visible par l'ensemble des élèves, et c'est là que la rhétorique du professeur va jouer un rôle important. Les arguments développés par l'enseignant et les élèves ne pourront se référer à la situation objective.

La théorie des situations permet de prévoir que l'argumentation de l'enseignant sera tout à fait différente selon que la situation est ou non dédidactifiable.

4. Nous avons étudiée à la X^e école d'été une situation dédidactifiable, « Le nombre le plus grand » dont l'idée avait été proposé par Georges Glaeser. La situation mise en place et analysée est une situation a didactique de preuve. Nous avons poursuivi cette étude dans le cadre de notre recherche, elle devrait donner lieu à une publication.

Nous avons choisi aujourd'hui de regarder une situation qui n'est pas dédidactifiable, c'est l'analyse a priori qui le montre, en effet elle n'a pas de modèle non didactique qui permette aux élèves d'apprendre.

Nous avons préféré une telle situation dans un cas où elle était produite par le maître formateur lui même ce qui nous assurait qu'il avait la conviction de pouvoir la conduire. En effet proposer une situation non dédidactifiable à un professeur repose sur la confiance qu'on lui accorde et qu'il s'accorde de pouvoir la conduire.

C'est une situation dont l'avancement va reposer essentiellement sur le professeur : sur ses choix, sur ses décisions didactiques, sur ses interventions et c'est en fait ce que nous allons prendre comme objet d'étude.

Le rôle de l'enseignant est primordial car il doit reconnaître, traiter, utiliser les raisonnements produits par les élèves et également les siens et ce en temps réel. Lorsque la situation d'apprentissage proposée aux élèves est dédidactifiable, les élèves peuvent développer des stratégies personnelles et leurs propres raisonnements en fonction des situations rencontrées.

Dans la mesure où le professeur choisit de proposer à ses élèves une situation non dédidactifiable, on tombe sur les contradictions du contrat didactique c'est-à-dire le fait que l'enseignant ait recours à une rhétorique didactique pour provoquer, établir, enseigner des arguments logiques ou mathématiques.

II Présentation et éléments d'analyse a priori de la situation de recherche

II.1 Enoncé du problème :

Une journée de ski à Gourette est organisée samedi pour les élèves du canton d'Oloron. Le Conseil Général décide pour cet événement exceptionnel de leur offrir les forfaits pour la journée.

La station de Gourette propose les tarifs suivants :

216 forfaits :	1275F
36 forfaits :	325F
6 forfaits :	85F

979 enfants sont inscrits, mais au moment du départ, il y a 12 absents, malades bien sûr...

Le comptable du Conseil Général se dit « Dommage pour ces petits, mais ce n'est pas grave ; et puis la dépense sera moins élevée. »

Qu'en penses-tu ?

II.2 Présentation des différentes phases de la séquence :

Phase 1 : Présentation de l'activité de recherche.

Phase 2 : Lecture de l'énoncé.

Phase 3 : Informations complémentaires. Explication des termes de l'énoncé.

Phase 4 : Phase de recherche individuelle.(10 min)

Phase 5 : Constitution de groupes

Phase 6 : Phase de recherche en groupes et d'élaboration d'une production écrite.(30 min)

Phase 7 : Phase de mise en commun des productions. Chaque groupe vient tour à tour présenter sa production.(30 min)

II.3 Eléments d'analyse a priori de la situation

1. Nature de la situation didactique et des connaissances en jeu

Nature de la situation proposée aux élèves

C'est l'enseignant qui a élaboré cette situation dans le but de mettre les élèves en situation de recherche.

Le texte proposé n'est pas un « énoncé » de problème, au sens habituel du terme, puisqu'il ne comporte pas de question explicite. Ce procédé est parfois utilisé pour inciter les élèves à formuler eux-mêmes des questions et des conjectures, et ne pas se contenter de répondre à des questions déjà posées et parfois déjà enseignées, ou à résoudre de façon standard des problèmes rituels. Mais ne pas poser de questions après l'exposé d'une certaine situation n'est légitime que

-si plusieurs questions *intéressantes* sont raisonnablement compatibles avec la collection de déclarations qui fixent la situation objective.

-si le professeur accepte d'intervenir au cours de la résolution, qui de ce fait ne peut plus être a didactique. Alors que l'objectif affiché de cette méthode est d'ouvrir l'élève à des questions nouvelles et personnelles, il devient en fait

rapidement plus dépendant de l'activité et des interventions du professeur qu'il ne l'aurait été dans un problème donné sous forme d'un énoncé classique.

Les connaissances en jeu : L'enseignant reconnaît dans ce problème l'occasion pour les élèves d'utiliser certaines connaissances : la division euclidienne dans son rapport à la numération, l'interprétation du quotient et du reste de la division euclidienne.

2. Le problème mathématique : Le problème proposé est en fait un problème appartenant au domaine de l'optimisation. C'est un problème de programmation linéaire, il s'agit de minimiser une fonctionnelle linéaire, correspondant au coût de la dépense pour un nombre d'enfants N fixé.

La fonctionnelle est notée $J(n_1, n_2, n_3)$ où n_1 désigne le nombre de groupements de 216 forfaits achetés, n_2 désigne le nombre de groupements de 36 forfaits achetés et n_3 désigne le nombre de groupements de 6 forfaits achetés. Cette fonctionnelle traduit le coût de la dépense correspondante est

$$J(n_1, n_2, n_3) = 1275 \times n_1 + 325 \times n_2 + 85 \times n_3$$

la contrainte est une contrainte inégalité

$$n_1 \times 216 + n_2 \times 36 + n_3 \times 6 \geq N$$

où N désigne le nombre d'enfants.

On est donc conduit à résoudre le problème d'optimisation linéaire avec contrainte

$$\begin{cases} \text{Min} J(n_1, n_2, n_3) = \text{Min}_{n_1, n_2, n_3} (1275 \times n_1 + 325 \times n_2 + 85 \times n_3) \\ N - n_1 \times 216 - n_2 \times 36 - n_3 \times 6 \leq 0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème d'optimisation n'a de sens que pour n_1, n_2, n_3 entiers naturels.

3. L'analyse didactique : Le fait d'identifier le problème comme relevant de l'optimisation nous permet de repérer les connaissances qui vont implicitement ou explicitement être mises en œuvre par les élèves dans la résolution.

Ce qui va permettre aux élèves d'élaborer leur procédure, de faire leurs calculs, c'est justement ce que nous appellerons raisonnement et que nous souhaitons précisément étudier et c'est en fait ce qui apparaît sous forme d'algorithme dans un ouvrage traitant de l'optimisation.

Nous allons voir apparaître dans les productions des élèves, des morceaux de raisonnements, des éléments de démonstrations, et ce qui va nous permettre de les identifier et de les interpréter, c'est le modèle mathématique.

Cette situation ne pouvant pas fonctionner sous forme a didactique, nous allons pouvoir observer ce que l'enseignant fait avec les raisonnements des élèves, comment il les traite et les raisonnements qu'il fait lui-même. En effet ce dernier va être contraint d'intervenir avec des raisonnements, il va être obligé de répondre aux raisonnements des élèves par conséquent c'est un champ particulièrement intéressant pour observer et analyser le fonctionnement des raisonnements en situation didactique.

Les rétroactions : La situation proposée n'offre pas à l'élève de rétroactions : l'élève ne peut obtenir, en réponse à son action, les informations nécessaires à la résolution du problème, de plus il ne peut déterminer par lui-même si son résultat est ou non valide.

Présentation de la solution standard

5.1. Le vocabulaire

Vocabulaire de l'énoncé :

- Le forfait : ticket permettant l'accès aux remontées mécaniques.
- Les différents tarifs correspondant aux catégories de vente : le tarif de grand groupe (216 forfaits pour 1275F), le tarif de moyen groupe (36 forfaits pour 325F) et le tarif de petit groupe (6 forfaits pour 85F).
- Le nombre total d'élèves dans le canton d'Oloron : 979
- Le nombre d'élèves malades le jour du départ : 12

Vocabulaire de la solution :

- Nombre d'enfants présents
- Prix moyen d'un forfait pour chacune des catégories de vente : pour chacune d'elles il est obtenu en divisant le prix à payer par le nombre de forfaits correspondant.
- Tarif faible, tarif moyen, tarif fort : le rangement des prix moyens pour chacune des catégories de vente nous amène à ordonner les trois tarifs proposés ce qui facilite leur désignation.
- Prix unitaire d'un forfait : prix d'un forfait vendu à l'unité. Le prix unitaire d'un forfait n'est pas donné dans l'énoncé.

5.2 Eléments de la solution standard

A. Les stratégies de calcul du meilleur prix pour un nombre d'enfants déterminé

a) distinguer trois nombres d'enfants total, malades, présents

b) en première approche : le principe

- Envisager les groupements de tarifs possibles pour couvrir par excès le nombre d'enfants présents.
- Calculer le prix correspondant de ces groupements.
- Prendre le moins cher.

c) l'amélioration de l'approche : Pour ne pas trop calculer, chercher les groupements les plus plausibles : exemple prendre le plus possible de forfaits *au meilleur prix par enfant*, le nombre étant calculé par défaut puis

- Reprendre sur les enfants *restant* la même méthode de calcul
 - Comparer ce prix à celui d'un groupement de plus au meilleur prix
 - Choisir la solution la moins onéreuse si c'est possible
- d) Sinon, réitérer le calcul avec le tarif immédiatement supérieur

B. La comparaison du meilleur prix pour les 979 et pour les 967 enfants

III Instruments pour analyser les raisonnements des élèves

III.1. Les différents niveaux de raisonnements dans les productions d'élèves

Nous allons définir, pour étudier les raisonnements, différents niveaux d'analyse :

Niveau 1 : Ce sont les calculs qui apparaissent dans les productions. C'est ce que l'élève reconnaît comme l'élément de base. Pour les calculs il y a un raisonnement mais ce dernier a fait l'objet d'un enseignement en classe.

Niveau 2 : Ce sont les raisonnements explicites qu'ils soient écrits ou oraux, ce sont les raisons que formule l'élève et ces dernières sont locales. Le répertoire des raisonnements explicites peut être obtenu l'analyse. Ce sont en fait les raisons d'organiser la production, par exemple l'ordre dans lequel sont effectués les différents calculs.

Niveau 3 : Ce sont les raisonnements implicites, c'est ce qui correspond aux conceptions des élèves. Ce sont les raisonnements heuristiques ou logico-mathématiques que l'élève n'explicitent pas, ce sont des modèles implicites d'action.

Ce sont les connaissances qui permettent à l'élève de prendre des décisions qu'il ne peut pas formuler, qu'il n'est pas capable d'expliciter mais qu'il saisit, qui vont lui permettre d'appréhender le problème. Le problème posé à l'élève est, par nature, un problème d'optimisation pour lequel il ne dispose pas de méthode, cependant les modèles implicites d'action qu'il va élaborer vont lui permettre d'appréhender ce type de problème, de concevoir les questions d'optimisation qui commandent ses décisions, ses arguments, ses rhétoriques. Pour optimiser l'élève va être obligé de chercher les éléments du modèle mathématique.

Pour analyser les modèles implicites d'action il est nécessaire de se référer aux modèles mathématiques, à une analyse mathématique.

Niveau 4 : Il est défini par les limites pour l'observateur. Il ne faut pas projeter sur l'élève ou sur le professeur le modèle que l'on utilise pour l'observation, il ne faut pas confondre les différentes pratiques. L'objet de l'enseignement c'est pas l'optimisation cependant le modèle mathématique de l'économie des connaissances dans la résolution du problème c'est tout de même ce que l'analyse didactique veut faire ressortir.

L'observateur doit avoir un moyen théorique de distinguer ce qu'il prête à chaque niveau et ce moyen c'est la théorie des situations.

III.2 Découpage de la solution standard en différents modules

Ce découpage de la solution standard en différents modules qui correspondent à des sous-programmes nous permet d'analyser les raisonnements qui sous-tendent les différentes procédures

Module 1	Module 2	Module 3
Calcul du nombre d'élèves présents le jour du départ noté N_p à partir du nombre total d'élèves noté N_t .	PROCEDURE 2-1	PROCEDURE 3-1
Module 2		
Comparaison des trois tarifs proposés en vue de les ordonner tarif faible, tarif moyen, tarif fort.		
Module 3	PROCEDURE 2-2	
Recherche d'une organisation* (manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N > N_p$, en combinant les différents tarifs) permettant de minimiser la dépense.		
Module 4		PROCEDURE 3-2
Recherche d'une organisation* (manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N > N_t$, en combinant les différents tarifs) permettant de minimiser la dépense.		
Module 5		PROCEDURE 3-3
Calcul de la différence entre la dépense minimale pour l'ensemble des élèves inscrits et la dépense minimale pour l'ensemble des élèves présents.		
	1. Calcul du prix moyen d'un forfait pour chacun des tarifs proposés. 2. Comparaison des prix moyens correspondant à chacun des tarifs. 3. Rangement des trois tarifs proposés du plus avantageux au moins avantageux tarif faible, tarif moyen, tarif fort.	• Calcul du nombre par défaut, de forfaits nécessaires achetés au tarif le plus faible noté N_1; N_1 est le multiple de 216 immédiatement inférieur (ou égal) à N_p. • Calcul du nombre d'enfants restant après la première distribution. • Calcul, du nombre par défaut, de forfaits au tarif moyen pour les enfants restant, noté N_2. • Calcul du nombre d'enfants restant après la deuxième distribution. • Calcul, par excès, du nombre de forfaits au tarif fort pour ces enfants restant, noté N_3. • Accessoirement calcul du nombre de forfaits inutiles • Calcul du coût total, noté $J_1 = N_1 \times 1275 + N_2 \times 325 + N_3 \times 85$
	• Comparaison des tarifs proposés par la comparaison des prix correspondants pour l'achat d'un nombre de forfaits fixé (le choix de N multiple de 36 facilite les calculs) 1. Calculer le prix de N forfaits achetés au tarif 1 (6 forfaits pour 85F), le prix de N forfaits au tarif 2 (36 forfaits pour 325F), le prix de N forfaits achetés au tarif 3 (216 forfaits pour 1275F). 2. Ranger les prix par ordre croissant • Ordonner les trois tarifs proposés du plus avantageux au moins avantageux.	• Calcul du nombre, par excès, de forfaits nécessaires achetés au prix le plus bas, noté N'_1; N'_1 est le multiple de 216 immédiatement supérieur (ou égal) à N_p. • Calcul du coût de cet achat, noté $J_2 = N'_1 \times 1275$
		• Calcul du nombre, par défaut, de forfaits nécessaires achetés au tarif le plus bas, noté N_1; N_1 est le multiple de 216 immédiatement inférieur (ou égal) à N_p. • Calcul du nombre d'enfants restant après la première distribution. • Calcul du nombre, par excès, de forfaits achetés au tarif moyen pour les enfants restant noté N'_2. • Calcul du coût, noté $J_3 = N_1 \times 1275 + (N_p - N_1) \times 325$.

	Groupe 1 Yannick, Sylvain, Xabier	Groupe 2 Marine, Déborah	Groupe 3 Alexandre	Groupe 4 Julien
Sous programme 1 Calcul du nombre d'élèves présents le jour du départ noté N_p à partir du nombre total d'élèves noté N_t .	Calcul non effectué	Mis en œuvre	Mis en œuvre	Mis en œuvre
Sous programme 2 Comparaison des trois tarifs proposés en vue de les ordonner tarif faible, tarif moyen, tarif fort.	Uniquement calcul du prix moyen d'un forfait au tarif fort.	Uniquement calcul du prix moyen d'un forfait au tarif fort.		Calculs des coûts moyens d'un forfait au tarif fort, au tarif moyen, au tarif faible.
Procédure 2-1				
Procédure 2-2				
Procédure 2-3				
Sous programme 3 Recherche de différentes organisations* (organisation : manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N > N_p$, en utilisant les différents tarifs) et du coût correspondant en vue de <i>minimiser la dépense</i> .		Calcul du nombre, par excès, de forfaits nécessaires achetés au tarif moyen. Calcul du coût correspondant à cet achat.		
Procédure 3-1				
Procédure 3-2				
Procédure 3-3			Réalisée	

Sous programme 4 Recherche de différentes organisations (organisation : manière de concevoir l'achat de N forfaits, $N > N_c$, en utilisant les différents tarifs) et du coût correspondant en vue de <i>minimiser la dépense</i>.				
Procédure 3-1 Procédure 3-2 Procédure 3-3				
Sous programme 5 Calcul de la différence entre la dépense minimale pour l'ensemble des élèves inscrits et la dépense minimale pour l'ensemble des élèves présents.	Calcul du coût des 12 forfaits supplémentaires. Ils l'ont obtenu en multipliant par 2 le prix proposé pour les 6 forfaits.	Calcul du coût des 12 forfaits supplémentaires. Elles l'ont obtenu en multipliant par 2 le prix proposé pour les 6 forfaits.	Résultat déduit du module précédent. La différence est nulle, le coût est identique.	
Les modèles implicites d'actions correspondants	Ils ont fait l'hypothèse que le prix individuel d'un forfait (prix unitaire) est obtenu en divisant le prix des 6 forfaits par 6, autrement dit qu'il est égal au prix moyen d'un forfait vendu au tarif fort. Pour calculer le coût total ils ont multiplié le nombre de forfaits nécessaires par le prix unitaire.			Il a considéré les prix moyens obtenus pour chacun des tarifs comme s'il s'agissait de prix unitaires. Il a calculé le coût total, pour chacun des tarifs, en multipliant le nombre de forfaits nécessaires par le prix unitaire.

Analyse des différents types de raisonnements produits par des groupes (phase 6)

III.3 Analyse du script relatif à la phase de présentation des productions (phase 7)

Extrait du script relatif à la phase de présentation des productions, en gras les interventions du maître (M).

4.1 12'35	Julien : Bon j'ai commencé par faire... j'ai fait 85 divisé par 6 ça m'a donné 14,166 ; j'ai pris le 14 et puis j'ai vu... j'ai fait pareil avec 325, enfin j'ai fait pareil, j'ai fait pareil avec les trois opérations	<i>Un élève Julien vient présenter sa production. Julien décrit son calcul, sans définition, sans annonce de la variable calculée.</i>
4.2	M : les trois propositions, les groupements de forfaits.	<i>L'enseignant reformule une partie de la déclaration pour mettre en place le vocabulaire.</i>
4.3	Julien : 325 divisé par 36 et 1275 divisé par 216 puis alors, après j'ai fait...	<i>Julien continue à dénoter ses calculs.</i>
4.4	M : Premières conclusions après ces trois calculs ? Le maître s'adressant à la classe : Vous avez entendu les opérations qu'il a faites ? Dans les trois conditions proposées quel est le prix d'un forfait c'est bien ça ?	<i>L'enseignant interroge Julien pour savoir ce qu'il retire des calculs effectués. L'enseignant intervient pour apporter des explications visant à interpréter les calculs. Il indique la nature des résultats obtenus, « prix d'un forfait dans les trois conditions ».</i>
4.5	Julien : Ouais!	
4.6	M : Bon première(s) conclusion(s) après ça ?	<i>L'enseignant interroge Julien sur ce qu'il retire des calculs effectués.</i>
4.7	Julien : Après j'ai fait..	<i>Pas de réponse, Julien semble vouloir poursuivre sur le mode de la dénotation des calculs.</i>
4.8	M : Non, ta première conclusion après ça ? quand tu as fait ces calculs tu t'es dis quoi ?	<i>L'E réitère sa question.</i>
4.9	Un élève : Lequel était le moins cher.	<i>Un élève formule explicitement la question de l'enseignant posée précédemment de façon implicite.</i>
4.10	Julien : Ouais, lequel était le moins cher... enfin non je ne pouvais pas voir...	
4.11	Un élève : Mais si tu peux voir !	<i>Un élève indique à Julien qu'il dispose de toutes les informations pour répondre.</i>
4.12	Julien : Oui c'était 1275, parce qu'il valait 5F le forfait à peu près et puis alors après j'ai essayé, enfin j'ai fait 979 moins 12, ça m'a fait 967 et puis après j'ai multiplié 967 par tous les, par tous les résultats des divisions	<i>Julien donne la réponse attendue et poursuit la dénotation de ses calculs.</i>
4.13	M : Pour trouver ?	<i>Le maître interroge Julien sur la finalité de ses calculs.</i>
4.14	Julien : Pour trouver le prix de combien ça allait valoir.	<i>Julien indique la finalité de ces calculs : calcule la dépense totale (pour les élèves présents).</i>

4.15	M : Oui le prix...pour trouver lequel valait le moins cher.	
4.16	Julien : Oui.	
4.17	M : Es-tu as fait les trois calculs ?	L'enseignant souhaite faire prendre conscience à Julien que les calculs n'étaient pas nécessaires, un raisonnement aurait pu éviter de faire les calculs.
4.18	Julien : Oui.	
4.19	M : C'était nécessaire ?	
4.20	Julien : Ben...ouais...	
4.21	Un autre élève : Pour voir quel était le moins cher.	
4.22	M : Tu le savais pas avant ?	L'enseignant formule sa question afin que Julien revienne sur les raisons d'effectuer les calculs.
4.23	Julien : Oui je le savais...mais...	
4.24	M : Bon et alors, résultat ?	L'enseignant demande à Julien de formuler sa conclusion.
4.25	Julien : Alors j'ai vu lequel était le moins cher et puis...	
4.26	M : Ca donne combien ?	
4.27	Julien : A mon avis c'est 967 fois 5 égal 4335.	
4.28	M : Hum ! Pourquoi 4300 ? 5 fois 900 ?	L'enseignant interroge Julien sur l'ordre de grandeur du résultat de la multiplication.
4.29	Julien : 36 000...euh! 3600.	
4.30	Un élève : 5000...4500.	
4.31	Julien : Oui 4500.	
4.32	M : Et 5 fois 967, 4300...Il y a comme un petit défaut !	L'enseignant contredit le résultat annoncé par Julien. Il a relevé l'erreur sans cependant la corriger.
4.33	Julien : Oui 4500.	
4.34	M : En tous cas, le moins cher serait le prix d'un forfait vendu par 216 multiplié par le nombre d'élèves, le nombre d'enfants, 967, qu'est-ce que vous en dites ?	Le maître reformule la procédure de Julien en la synthétisant. Il souhaite mettre en débat la procédure de Julien, il souhaite l'éprouver. Il essaie de « replacer » le problème, il utilise un conditionnel.
4.35	Les élèves : inaudible	
4.36	M : C'est sans doute vrai, mais quoi ?	
4.37	Mélanie : A condition...	
4.38	M : Oui Mélanie...	
4.39	Mélanie : Tu as calculé les autres pour savoir si c'était...Pourquoi tu as de suite pris celui-là ? Tu as essayé les autres ?	Il s'agit là d'une objection formaliste, la division n'est pas comprise.

4.40	Julien : J'ai fait 85 parce que c'était le premier.	
4.41	M : Oui...	
4.42	Julien : Je ne sais pas moi...	
4.43	M : Tu comprends que c'était le moins cher mais tu n'as pas essayé les autres.	<i>Intervention injustifiée.</i>
4.44	Julien : Si j'ai tout essayé, si j'ai essayé 85 divisé par 6 et les autres, et sur les trois j'ai vu que c'était 1275 divisé par 216 qui marchait.	
4.45	M : 1275 divisé par 216 puis ensuite multiplié par 979, bon... et Alexandre qu'est-ce que tu en dis par rapport à ta proposition ?	<i>L'enseignant reformule la procédure et interroge Alexandre (qui a correctement interprété les données de l'énoncé) afin qu'il réagisse au modèle implicite développé par Julien.</i>
4.46	Alexandre : J'en dis que c'est vrai...	
4.47	M : Donc on achète, on va à la caisse de la station et on demande, on demande 967 forfaits au prix de 1275 divisé par 216, bon c'est bien ça ?	<i>Troisième formulation de l'enseignant, tentative de mise en débat.</i>
4.48	Les élèves : Oui.	
4.49	M : Bon... et bien voilà.	<i>Renoncement provisoire de l'enseignant, Julien retourne à sa place.</i>

III.4 Conclusions relatives à l'analyse des raisonnements produits (phase 6) et à l'analyse de la phase de mise en commun (phase 7)

L'un des premiers éléments qui nous paraît essentiel c'est l'absence de dévolution de la situation, en effet ceci est lié à son caractère non dédidactifiable :

Les élèves ne disposent pas du répertoire de base pour concevoir les stratégies de base.

Les élèves ne peuvent pas obtenir, en réponse à leurs actions, les informations nécessaires à la résolution du problème.

Les élèves ne disposent pas des moyens en temps leur permettant de produire une solution compte tenu de la complexité de la solution standard.

Les élèves ne peuvent déterminer par eux-mêmes si le résultat obtenu est ou non correct.

De plus

L'énoncé ne fixe pas convenablement la situation objective et conduit un grand nombre d'élèves à élaborer des modèles implicites erronés.

L'analyse des productions des élèves établit que l'enjeu réel de la situation problème, à savoir minimiser le coût de la dépense, n'a pas été perçu par une majorité d'élèves. Dans cette séquence, la dévolution de la situation n'a pas fonctionné, les élèves n'ont pas été en mesure de prendre à leur charge la situation proposée.

Ils ont produit des éléments de raisonnement, mais n'ont pas perçu la finalité de la situation. Il n'apparaît pas, pour la majorité des productions, de raisonnements d'organisation qui permettent de lier les différents éléments. Leur traitement, lors de la mise en commun, va donc reposer sur la base d'un projet qui n'est pas visible par les élèves, comme le laissait prévoir la théorie des situations.

De plus lors de la phase de mise en commun, les éléments de raisonnements ne sont pas repris par l'enseignant. Ce dernier attend des élèves qu'ils réagissent aux déclarations du groupe venu présenter sa production. Cependant les élèves ne sont pas en mesure de reconnaître la validité, l'intérêt, le caractère idoine des raisonnements qui sous-tendent les procédures, ni d'établir un lien entre leur production et celle présentée par le groupe. Il n'y a donc pas de véritables échanges entre les élèves lors de la mise en commun malgré les nombreuses interventions de l'enseignant qui tentent de les favoriser. Cette absence de communication n'est donc pas seulement liée aux problèmes de vocabulaire.

On constate à l'issue de la mise en commun que les élèves n'ont pas eu de retour sur les raisonnements qu'ils ont produits, ils n'ont pas non plus pris conscience du projet d'apprentissage ni même de la solution attendue. Par conséquent cette situation problème n'a pas permis aux élèves de progresser dans leur pratique du raisonnement.

Sur le plan des contenus, il apparaît que le travail sur la division euclidienne et sur les restes n'est pas réutilisable par les élèves puisqu'il n'a pas été extrait de la situation.

Or certains observateurs de la séquence peuvent avoir l'impression que cette situation a à peu près fonctionné, ou du moins qu'elle n'a pas fait apparaître de réels dysfonctionnements. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'enseignant a offert aux élèves un espace d'expression. Il a su les intéresser et interagir avec eux. Cependant les élèves n'ont pas progressé dans leur pratique du raisonnement et on est en droit de s'interroger, à l'issue de cette séquence, sur leur capacité à valider leur propre production, alors que la solution attendue n'a pas fait l'objet d'une institutionnalisation.

Références

- BALACHEFF N., « Preuve et démonstrations en Mathématique », RDM 3(3), 261-304
- BALACHEFF N., « Processus de preuve en situation de validation », Educational Studies in Mathematics 18(2), 147-176.
- BROUSSEAU, Guy (1989) : Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 9/ 3, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU, Guy (1986a) : Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Volume 7/ 2, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU, Guy (1986b) : La relation didactique : le milieu, Actes de la IV^{ème} Ecole d'été de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.
- BROUSSEAU, P. GIBEL (1999), Analyse didactique d'une séquence de classe destinée à développer certaines pratiques du raisonnement des élèves, Actes de la X^o Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, tome 2, p. 64 à 71.
- GRIZE J.B., et coll., « Recherches sur le discours et l'argumentation », Droz 1974.
- GRIZE J.B., « De la logique à l'argumentation », Droz, 1982.
- GRIZE J.B., PIERAUT-LE-BONNIEC G., « La contradiction. Essai sur les opérations de la pensée », Paris, PUF.
- LEGRAND M. , « Le débat scientifique en cours de Mathématique ».
- MARGOLINAS C., « De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques », La pensée sauvage, Grenoble, 1993.
- MARGOLINAS C., « Double analyse d'un épisode : cercle épistémologique et structuration du milieu », vingt ans de Didactique des Mathématiques en France, 250-257, La pensée sauvage, Grenoble.
- MOPONDI B., « Les explications en classe de Mathématiques », Recherches en Didactique des Mathématiques, Volume 15/3, 7-52, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.
- OLERON P., L'Argumentation, Presses Universitaires de France.
- PERELMAN C., « Le champ de l'argumentation », Presses Universitaires de France, 1970
- PERELMAN C., OLBRECHTS-TYTECA L , « Traité de l'argumentation », Institut de Sociologie, 3^o éd., 1976.
- ROBRIEUX J.J., Eléments de Rhétorique et d'Argumentation, Dunod

Une méthode possible de recherche de contre-exemples

André Antibé

Laboratoire d'Etudes des Méthodes Modernes d'Enseignement
Université Paul Sabatier Toulouse

Introduction

De nombreux travaux ont été réalisés sur le contre-exemple en mathématique.

Dans sa thèse, E. LOCIA ([13]) donne les résultats d'enquêtes sur ce thème. Les points suivants apparaissent clairement :

- *dans les livres et les sujets d'examens ou de concours, très peu de questions sont consacrées à la recherche de contre-exemples.*
- *pour une très forte majorité d'enseignants et d'étudiants, la recherche de contre-exemples est difficile et aucune méthode explicite n'existe vraiment.*

L'objet de cet article est d'en proposer une. Il ne s'agit pas, bien sûr, d'une méthode algorithmique permettant de conclure dans tous les cas ! Il s'agit d'une méthode de recherche de contre-exemples qui est parfois utilisée inconsciemment par ceux qui ont la chance d'en trouver.

On peut espérer que l'explicitation de cette méthode pourra permettre au plus grand nombre d'élèves d'avoir une activité mathématique fructueuse, et de mieux comprendre comment la plupart des contre-exemples peuvent être trouvés.

A. Une méthode de recherche

Cette méthode est basée sur deux points forts :

- le rétrécissement d'ensemble
- l'utilisation de « célébrités »

Présentons-la sur un exemple classique (niveau Deug) :

On sait que, dans $\mathbb{R}$, toute série absolument convergente est convergente. On se propose d'étudier la réciproque de cette propriété :

Est-ce que toute série convergente est absolument convergente ?

Montrons que cette réciproque est fausse en exhibant un contre-exemple.

1. Bien repérer le référentiel

Il s'agit de trouver une suite (u_n) de réels telle que

$$\sum u_n \text{ converge et } \sum |u_n| \text{ diverge (1)}$$

On dit alors que le référentiel est l'ensemble des suites de réels. Notons-le S .

2. Rétrécissement d'ensemble

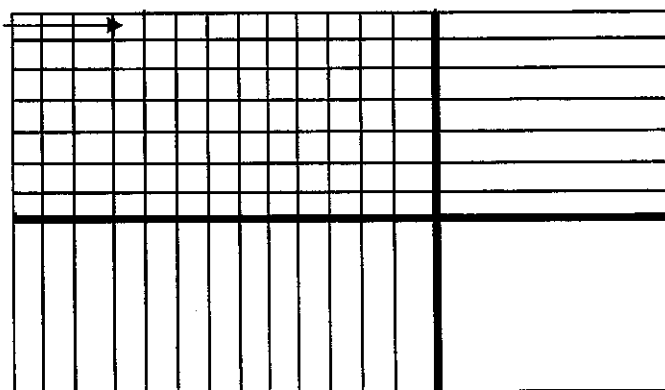
La propriété (1) permet de « rétrécir » l'ensemble S dans lequel on cherche un contre-exemple.

Plus précisément :

- la condition « $\sum u_n$ converge » implique que (u_n) tend vers 0. Notons S_0 l'ensemble des suites tendant vers 0.
- puisque $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ sont de nature différente, on est sûr que la suite (u_n) n'est pas de signe constant. D'autre part, on sait que la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes. On est donc sûr que :
on ne peut trouver aucun rang n_0 à partir duquel la suite (u_n) soit de signe constant (P).

Notons S_1 l'ensemble des suites vérifiant la propriété (P).

Ensemble $S_0 \cap S_1$



l'ensemble S_0 est hachuré horizontalement, l'ensemble S_1 verticalement

On doit donc chercher un contre-exemple dans l'ensemble des suites tendant vers 0 et vérifiant la propriété (P). Cet ensemble $S_0 \cap S_1$ est représenté en haut à gauche sur le schéma ci-dessus.

On a donc « rétréci » le référentiel initial de recherche S .

3. Utilisation de « célébrités »

En général, l'ensemble « rétréci » n'est pas égal à l'ensemble de tous les contre-exemples possibles. La recherche d'un contre-exemple peut alors se faire par tâtonnements. Mais ces tâtonnements peuvent être organisés et ne pas être le seul fruit du hasard ou d'une intuition qui peut paraître extraordinaire. Plus précisément, il est naturel de considérer, dans l'ensemble S_0 , des suites remarquables, des « célébrités » : les suites de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Les suites $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ se rencontrent d'ailleurs au lycée dès la classe de 1^{ère}.

De même, l'ensemble S_I doit faire penser à des suites alternées, et donc à des suites dont l'expression fait intervenir $(-1)^n$.

En définitive, des éléments remarquables de l'ensemble $S_0 \cap S_I$ sont des suites de la forme

$$\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right), \text{ avec } \alpha > 0.$$

4. Conclusion

On essaie donc de trouver une suite de la forme $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$, avec $\alpha > 0$ pouvant servir de contre-exemple. A ce stade de notre recherche, la réponse est simple : il suffit de choisir, par exemple, $\alpha = 1$, (et même, plus généralement, tout réel α de l'intervalle $]0;1[$). En effet, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, car il s'agit de la série harmonique alternée ; et $\sum u_n$ diverge, car il s'agit d'une série de Riemann divergente.

Commentaires

1. La méthode présentée ci-dessus suppose connues certaines propriétés concernant les séries, et, d'autre part, elle suppose une certaine culture mathématique : il faut penser aux « célébrités » $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$. Cependant, grâce à une telle méthode, la recherche d'un contre-exemple ne relève plus alors de la prestidigitation : on dispose d'une piste de recherche qui ne permet sans doute pas d'aller à coup sûr jusqu'au bout, mais grâce à laquelle l'activité de recherche d'un contre-exemple peut devenir enrichissante et fructueuse.
2. La méthode du rétrécissement d'ensemble et la recherche de célébrités dépendent bien sûr du niveau de l'élève. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, certains élèves familiarisés avec les séries, peuvent immédiatement penser à la célébrité $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ sans passer par la phase de rétrécissement.

B. Application de cette méthode à d'autres exemples

Nous allons à présent donner d'autres exemples d'application de cette méthode.

Exemple 1

On sait que,

$$\text{si } \sum u_n \text{ converge alors } u_n \text{ tend vers } 0.$$

On se propose d'étudier la réciproque de cette implication :

$$\text{Est-ce que, si } u_n \text{ tend vers } 0, \sum u_n \text{ converge ?}$$

Montrons que cette réciproque est fautive en exhibant un contre-exemple. On cherche donc une suite (u_n) telle que

$$\lim u_n = 0 \text{ et } \sum u_n \text{ diverge.}$$

Comme dans l'exemple précédent, le référentiel est l'ensemble S des suites.

1^{er} cas : les séries de type particulier sont connues lorsque ce problème est posé (série de Riemann, série géométrique).

Il est alors naturel de chercher un contre-exemple parmi ces célébrités. Aucune série géométrique ne permet de conclure. En effet $\sum z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$ et d'autre par, $z^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |z| < 1$.

D'où : $\sum z^n$ converge $\Leftrightarrow |z| < 1$.

On peut alors essayer de trouver un contre-exemple parmi les séries de Riemann : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Plus généralement, toute suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, avec $0 < \alpha \leq 1$, peut être utilisée comme contre-exemple.

2^{ème} cas : seule la définition de la convergence d'une série est connue lorsque ce problème est posé.

Dans ce cas, il est normal d'utiliser la définition puisque c'est le seul « outil » dont on dispose. En notant S_n la somme partielle de rang n , on est ramené au problème suivant (en remarquant que $u_n = S_n - S_{n-1}$) :

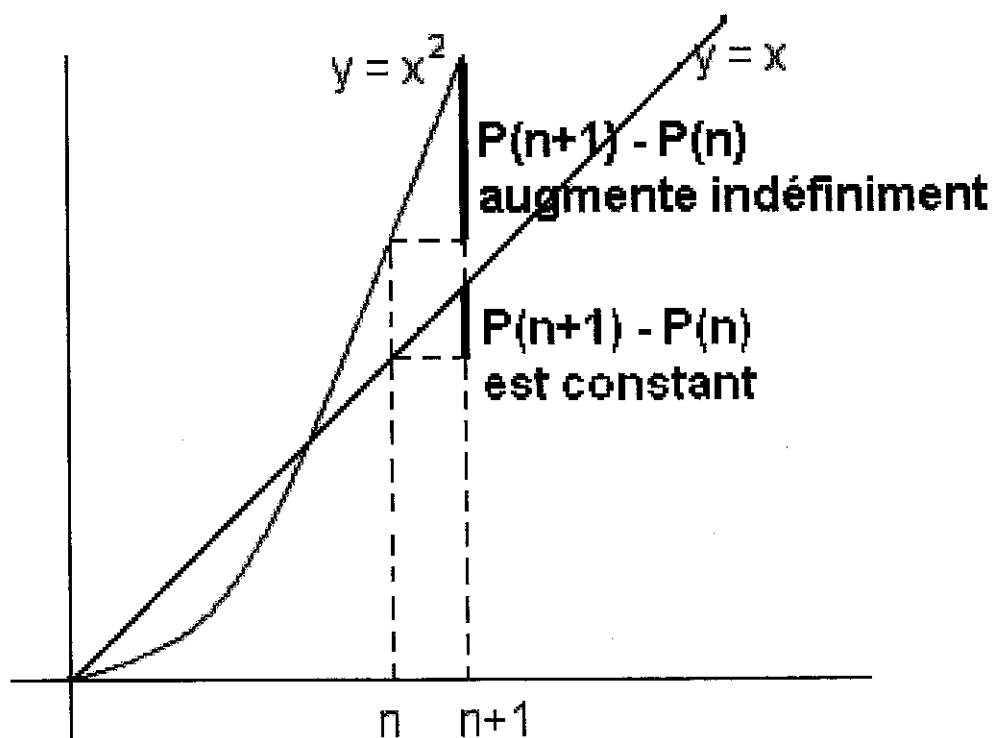
Trouver une suite (S_n) telle que :

$(S_n) \text{ diverge et } (S_n - S_{n-1}) \text{ tend vers } 0.$

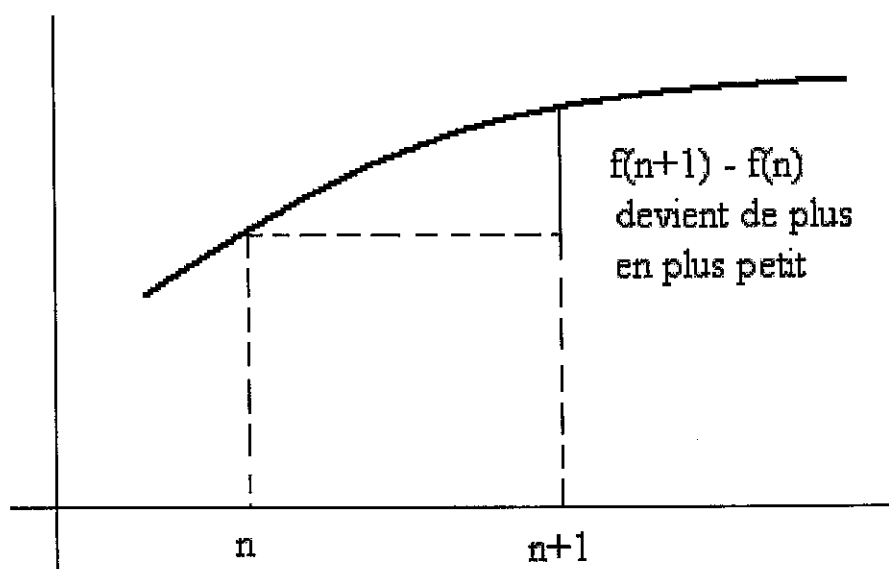
Dans l'ensemble des suites réelles divergentes, connaît-on des célébrités ? Il semble normal d'envisager des suites de limite infinie ou bien la suite $((-1)^n)$ (ou bien des suites alternées divergentes). Cette dernière ne convient pas car la condition « $S_n - S_{n-1}$ tend vers 0 » n'est pas satisfaite. Essayons donc de trouver un contre-exemple dans l'ensemble des suites de limite infinie, par exemple de limite égale à $+\infty$. Dans cet ensemble, les suites S_n telles que $S_n = P(n)$ où P est un polynôme de degré ≥ 1 peuvent être considérées comme des célébrités car les polynômes sont des fonctions faciles à manipuler.

On peut se rendre compte **graphiquement** qu'aucune suite de terme général $P(n)$ ne convient : en effet, si P est de degré 1, la différence $P(n+1) - P(n)$ est une constante non nulle, donc ne tend pas vers 0.

Si P est de degré ≥ 2 , cette différence semble tendre vers l'infini.



On peut alors penser à chercher S_n de la forme $S_n = f(n)$ où f est une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$, mais dont la courbe a l'allure suivante au voisinage de $+\infty$.



Cette allure du graphe doit faire penser à des fonctions telles que $x \rightarrow \sqrt{x}$, ou $x \rightarrow \ln x$. On peut alors vérifier aisément que chacune de ces deux fonctions convient.

En effet,

- si $S_n = \ln n$, on a bien :

$\lim S_n = +\infty$ et $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$

en effet $S_n - S_{n-1} = \ln n - \ln (n-1) = \ln \frac{n}{n-1}$

- si $S_n = \sqrt{n}$, on a bien :

$\lim S_n = +\infty$ et $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$

en effet $S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ (en multipliant par la quantité conjuguée)

Commentaires

- Dans la solution proposée ci-dessus, on n'a pas besoin de « rétrécir » au sens strict le référentiel. L'utilisation de « célébrités » a suffi. Soulignons cependant que, dans la première étape, on a remplacé le problème par un problème équivalent, à savoir la recherche de (S_n) . On peut considérer qu'il s'agit là d'un rétrécissement au sens large.

- Dans les livres et les cours usuels, il est regrettable que, le plus souvent, on se contente d'exhiber un contre-exemple sans préciser comment il a été trouvé.

Exemple 2

Enoncé : L'image d'un ouvert par une fonction continue, est-elle un ouvert ?

Recherche d'un contre-exemple

Référentiel :

Dans ce cas, notre recherche concerne deux objets :

- Un ensemble E ouvert tel que $f(E)$ ne soit pas ouvert.
- Une fonction continue f .

Le référentiel est alors l'ensemble de couples (E, f) où E est un ensemble ouvert et f est une fonction continue définie sur E .

Utilisation de Célébrités

- Pour E

Les ensembles ouverts les plus usuels sont les intervalles ouverts.

- Pour f

Il est naturel de penser aux fonctions polynomiales.

Dans cet ensemble on peut commencer par une phase (systématique) de tâtonnements (par ordre de simplicité, par exemple) : polynômes de degré 0, de degré 1, etc.

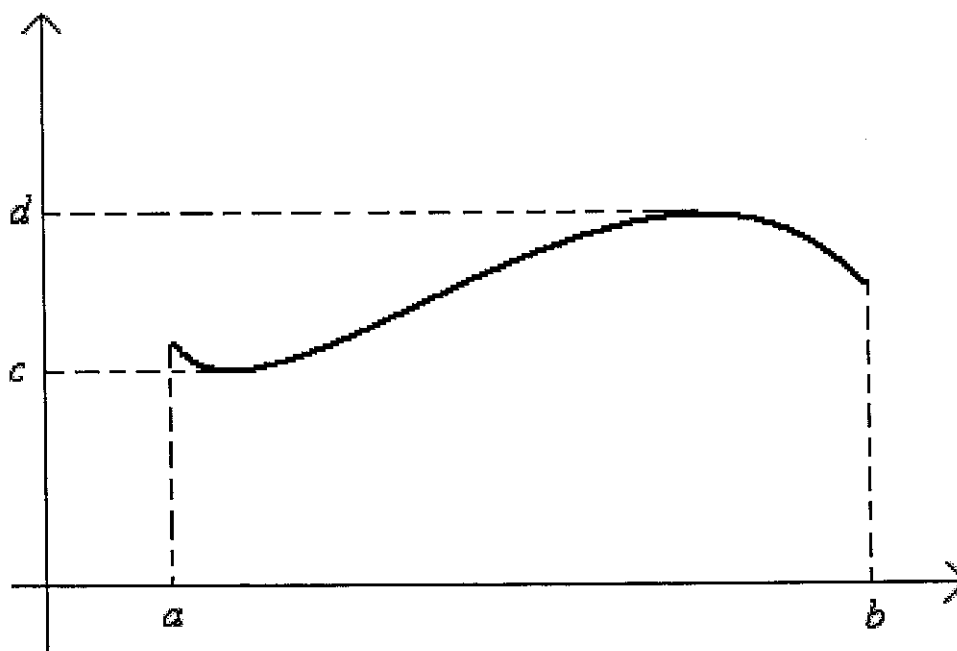
Rétrécissement : On sait que l'image continue d'un intervalle ouvert par une fonction strictement monotone est un intervalle ouvert. Donc si E est un intervalle ouvert, f ne doit pas être strictement monotone.

Un contre-exemple possible : Il suffit de prendre un polynôme de degré 0 (fonction constante) et n'importe quel intervalle ouvert.

En effet, l'image d'un intervalle par une fonction constante est un singleton, donc un ensemble fermé.

Commentaires

1. Pour trouver ce contre-exemple, le rétrécissement n'a pas vraiment été utile.
2. Il n'y a pas d'unicité dans la façon d'appliquer la méthode au même problème. Par exemple, au lieu de chercher, pour l'ensemble de départ E , un intervalle ouvert, on aurait pu considérer l'ensemble d'arrivée $f(E)$, en cherchant un ensemble non ouvert ; il semble alors naturel de penser aux ensembles fermés qui ne soient pas à la fois ouverts (on exclut de cette façon l'ensemble vide et $\mathbb{J}$ tout entier). Les plus simples de ce type sont les singletons. On pourrait alors prendre $f(E) = \{x_0\}$ et déterminer ensuite f et l'ensemble E . On peut arriver ainsi au même type de contre-exemple.
3. Par ce processus de recherche on ne trouve pas qu'un contre-exemple, mais une infinité.
4. **L'approche graphique.** Un outil très puissant dans beaucoup de cas, est l'approche graphique. Il faut, bien sûr, que l'interprétation graphique des notions qui interviennent dans la situation soient bien assimilées.
Il n'est pas difficile, par ce moyen, de penser à des fonctions ayant l'allure suivante :



où $f([a, b]) = [c, d]$

Il est alors aisé de trouver un contre-exemple explicite.

Dans le livre *Analyse Infinitésimale* de R. Lavendhome, le contre-exemple proposé est de ce type :

$$E =]-\pi, \pi[, \quad f(x) = \sin x \quad \text{alors} \quad f(E) = [-1, 1].$$

Ce contre-exemple est proposé sans expliquer comment il a pu être trouvé.

Exemple 3

Enoncé : Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $E \subset \mathbb{R}$. L'implication suivante est-elle vraie ? :

$$f \text{ et } g \text{ uniformément continues sur } E \Rightarrow fg \text{ uniformément continu sur } E ?$$

Recherche d'un contre-exemple

Au départ, le référentiel est l'ensemble de triplets $(E ; f ; g)$ où E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f et g des fonctions continues sur E .

Rétrécissement : Comme toujours, pour rétrécir, il faut connaître des résultats concernant les notions qui interviennent dans l'énoncé. Supposons connus les résultats classiques suivants :

$$f \text{ uniformément continue} \Rightarrow f \text{ continue} \quad (a)$$

$$f \text{ et } g \text{ continue} \Rightarrow fg \text{ continu} \quad (b)$$

$$f \text{ continue sur } K \text{ compact} \Rightarrow f \text{ uniformément continue sur } K \quad (c)$$

On remarque que si E est un ensemble compact et f et g uniformément continues sur E , alors le produit est uniformément continu.

En effet, d'après (a) f et g sont continues. D'après (b) fg est continu. D'après (c) fg est uniformément continu sur E (compact).

On exclut donc du champ de recherche, les sous-ensembles E compacts, c'est-à-dire fermés bornés.

Utilisation de célébrités :

- Pour E : Quels sont les sous-ensembles non compacts de $\mathbb{R}$ les plus célèbres ?
 $\mathbb{R}$ lui-même (car non borné) ; les intervalles bornés non fermés.
- Pour f et g (fonctions uniformément continues) :
Comme c'est souvent le cas lorsqu'il s'agit de fonctions, on pourrait prendre comme célébrités les fonctions polynomiales et faire dans cet ensemble la recherche. On la fait de façon systématique à partir des polynômes de degré 0, degré 1, etc.

Si on commence par les polynômes de degré 0, on s'aperçoit tout de suite qu'il est impossible de trouver ici un contre-exemple car le produit de deux fonctions constantes est aussi une fonction constante et donc uniformément continue.

Dans cet ordre d'idées on prend alors les polynômes de degré 1. Il n'est pas difficile de démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 1 est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, le produit d'une fonction de degré 1 par une fonction de degré 0 est uniformément continu.

Considérons alors deux fonctions de degré 1.

On peut prendre par exemple $f(x) = x$ (« sous-célébrité ») et $g(x) = f(x)$.

$$\text{Alors } (fg)(x) = x^2.$$

Cette fonction, est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Deux cas sont alors envisageables :

- La non continuité uniforme de la fonction $x \rightarrow x^2$ est une propriété connue (peu probable au niveau Deug).
Il suffit alors de s'appuyer sur cette propriété pour affirmer qu'un contre-exemple a été trouvé.
- Cette propriété n'est pas supposée connue. Il convient alors d'en donner une démonstration.

Commentaires :

1. Cette façon de chercher un contre-exemple peut s'avérer très riche. Elle peut donner lieu à d'autres recherches intéressantes. Par exemple, on a pris $\mathbb{R}$ comme « célébrité » d'ensemble non compact. On peut, par exemple, se poser la question suivante : Existe-t-il un contre-exemple dans le cas où f et g sont définies sur un intervalle borné, non fermé ?
2. Le rétrécissement d'ensemble peut se faire de façons différentes selon les résultats supposés connus.

Si on ne connaît pas de résultats permettant directement un rétrécissement, on peut fabriquer des « théorèmes » en cours de route permettant de rétrécir. Souvent cette recherche est très riche mais elle est plus délicate et n'est pas toujours facile.

Ainsi, on aurait pu rétrécir de la manière suivante :

On peut remarquer que dans le cas où les deux fonctions f et g sont bornées et uniformément continues sur le domaine commun E , leur produit est aussi uniformément continu.

En effet, si $|f(x)| < M_1$ et $|g(x)| < M_2$, $\forall x \in E$, soit $M = \sup(M_1, M_2)$.

Alors

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|)$$

On exclut alors de notre champ de recherche, les couples de fonctions bornées.

3. Le contre-exemple proposé dans le livre de R. GELBAUM et J. OLMSTED ([9]) est le suivant

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ et } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x, \text{ et } g(x) = \sin x.$$

Présenté de cette façon, on ne sait pas d'où sort ce contre-exemple. On se demande, par exemple, pourquoi l'auteur a choisi l'ensemble $\mathbb{R}$ comme domaine. En plus, le contre-exemple proposé semble peut-être répondre à une problématique différente de celle de l'énoncé d'origine, car, dans ce cas, l'une des fonctions est bornée.

Il est clair que l'absence de tout commentaire heuristique appauvrit considérablement cette situation de recherche.

Exemple 4

Énoncé :

La somme de deux fonctions monotones sur $\mathbb{R}$, est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?

Recherche d'un contre-exemple

Référentiel :

Pour démontrer la fausseté de l'énoncé, il suffit de trouver deux fonctions monotones dont la somme n'est pas monotone.

Donc l'ensemble de recherche (le référentiel) est l'ensemble des couples de fonctions monotones.

Rétrécissement d'ensemble : Il n'est pas difficile de se rendre compte que si deux fonctions f et g sont toutes les deux croissantes (respectivement décroissantes) leur somme est croissante (respectivement décroissante).

Donc nécessairement l'une des fonctions que l'on recherche doit être croissante et l'autre doit être décroissante.

D'autre part, il est clair qu'aucune des deux fonctions ne peut être constante.

Célébrités : Comme c'est souvent le cas lorsqu'il s'agit de fonctions, on peut considérer les fonctions polynomiales.

- On exclut les polynômes de degré 0 (fonctions constantes), d'après ce qui a été dit ci-dessus.
- On considère alors les polynômes du premier degré. On prend, par exemple, pour f , $f(x) = x$. Alors f est croissante.
Comme on l'a dit ci-dessus, g doit nécessairement être choisie décroissante et non constante. g doit donc être de la forme $g(x) = -ax$ où $a > 0$.

On remarque que si $a \neq 1$, $(f + g)(x) = (1 - a)x$ est monotone (croissante si $a < 1$ et décroissante si $a > 1$). Si $a = 1$, $f + g$ est constante.

On ne peut donc pas trouver un contre-exemple ainsi.

- On cherche alors g dans l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 2. On remarque tout de suite qu'aucune des fonctions qui appartiennent à cet ensemble n'est monotone sur $\mathbb{R}$. Donc, on exclut tous les polynômes de degré 2 de l'ensemble de recherche.
- On cherche alors g dans l'ensemble des fonctions polynomiales de degré 3. On prend, par exemple, $g(x) = -x^3$. Dans ce cas g est une fonction décroissante et

$$(f + g)(x) = x - x^3$$

Il est immédiat de vérifier que $f + g$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$. On a donc trouvé un contre-exemple.

Commentaire :

Voici une autre façon de procéder pour chercher un contre-exemple : on considère les dérivées des fonctions f et g (en supposant qu'elles existent). Dans ce cas, si les fonctions f et g sont monotones, leurs dérivées sont de signe constant (éventuellement 0 en certains points d'inflexion). On ramène donc la recherche, à la recherche de deux fonctions, l'une non négative et l'autre non positive, dont la somme n'est pas de signe constant.

Une approche graphique peut permettre aisément de trouver deux telles fonctions. Il suffit alors de considérer une primitive de chacune de ces fonctions.

Exemple 5

On sait que, dans $\mathbb{R}$,

Toute suite convergente a une seule valeur d'adhérence.

Enoncé : Dans $\mathbb{R}$, toute suite qui a une seule valeur d'adhérence, est-elle convergente ?

Recherche d'un contre-exemple

Référentiel : C'est l'ensemble des suites de réels.

Rétrécissement d'ensemble : L'ensemble où il faut chercher un contre-exemple est celui de toutes les suites qui ont une seule valeur d'adhérence. Supposons connu le résultat suivant :

Si une suite est bornée et a une seule valeur d'adhérence, alors elle est convergente.

Donc la suite que l'on cherche ne doit pas être bornée. On cherche alors une suite non bornée avec une seule valeur d'adhérence.

Célébrités :

- Comme sous-suite, on peut considérer la sous-suite définie par $\varphi(n) = 2n$ (ou $\varphi(n) = 2n + 1$).
- Comme suite convergente, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Comme suite non bornée, une suite dont une sous-suite tend vers $+\infty$.
Il suffit alors de prendre comme contre-exemple la suite (x_n) définie ainsi :

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est pair ; } x_n = n \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Références

- [1] A. Antibì. Mathématiques et prestidigitation. *Bulletin national APMEP*, (39), 1983.
- [2] A. Antibì. *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions*. Université Paul Sabatier, 1988. Thèse d'Etat.
- [3] A. Antibì, G. Brousseau. La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(1), 2000.
- [4] A. Antibì, G. Brousseau. Vers l'ingénierie de la dé-transposition. *Les dossiers des sciences de l'éducation*, Presses Universitaires du Mirail (8), 2002.
- [5] G. Arsac. Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3) : 247-280, 1988.
- [6] J. Bair et al. *Formation mathématique pour la résolution de problèmes*. Pratiques pédagogiques, De Boeck Université, 2000.
- [7] N. Balacheff. *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élèves de collège*. Université Joseph Fourier, Grenoble, 1988. Thèse d'Etat.

- [8] V. Durand-Guerrier. Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul de prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. In *Séminaires 1996*, Didactech, pp. 119-148, Grenoble, 1996. Institut IMAG, Université Joseph Fourier.
- [9] R. Gelbaum and J. Olmsted. *Counterexamples in analysis*. HOLDEN DAV, INC, San Francisco, 1964.
- [10] B. Hauchecorne. *Les contre-exemples en mathématiques*. Ellipses, Paris, 1993.
- [11] I. Lakatos. *Preuves et Réfutations : essais sur la logique de la découverte mathématique*. Herman, Paris, 1976.
- [12] M. Legrand. Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, (10) : 123-159, Janvier 1993.
- [13] E. Locia Espinoza. *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques*. Université Paul Sabatier, 2000. Thèse d'Etat.
- [14] G. Polya. *Comment poser et résoudre un problème*. DUNOD, Paris, 1965.

TITRE

ACTES DU SEMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. ANNEE 2002

AUTEUR(S)

Viviane DURAND-GUERRIER et Claude TISSERON

RESUME

Ces actes recouvrent la plupart des textes correspondant aux communications données dans les trois séances du séminaire national de didactique des mathématiques qui ont eu lieu à Paris au cours de l'année 2002. Ils sont regroupés selon les trois pôles suivants :

- Le domaine géométrique,
- Enseigner les mathématiques,
- Argumentation et raisonnement.

MOTS CLES

Didactique des mathématiques

Domaine géométrique

Argumentation et raisonnement

Situations didactiques

Médiation cognitive

Étude des pratiques du professeur

Formation des maîtres

Editeur : IREM et ARDM
Université PARIS 7-DENIS Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 2003
ISBN : 2-86612-243-7