CONTE DU LUNDI II

Rudolf BKOUCHE

Riemann au carrefour de la physique, de la géométrie et de la philosophie

Contrairement à l'idée couramment répandue selon laquelle les mathématiques sont un outil pour la physique, on pourrait dire qu'avec la révolution galiléenne la physique est devenue une partie des mathématiques, et ce d'au moins trois façons :

- la physique prend une forme hypothético-déductive analogue à celle des *Eléments* d'Euclide.
- au temps-devenir des Grecs est substitué un temps géométrisé que l'on peut représenter pas une droite[1], *un temps statique* pourrait-on dire.
- sous la double impulsion des constructions perspectivistes et de l'étude du mouvement, les philosophes de la nature inventent le concept d'un espace vide, infini, triplement étendu indépendant des corps qu'il contient et des phénomènes qui s'y déroulent, espace qui satisfait les propriétés de la géométrie euclidienne[2].

Cet espace euclidien, invention des mathématiciens-physiciens du XVIIème siècle sera remis en question au début du XIXème siècle avec la découverte (l'invention !) des géométries non-euclidiennes.

Le postulat des parallèles a posé problème aux géomètres à la fois par son manque d'évidence et par sa nécessité, puisque c'est lui qui permet l'usage de la méthode des aires et de la théorie des proportions géométriques, ce qui explique les nombreuses tentatives de le démontrer[3]. Au XVIIIème siècle nous citerons les travaux de Saccheri et de Lambert.

Saccheri[4] considère un quadrilatère *ABCD* dont les côtés *AD* et *BC* sont égaux et perpendiculaires au côté *AB* (quadrilatère déjà étudié par Umar Al-Khayyam[5]) on montre aisément que les angles en *C* et *D* sont égaux. Trois cas sont alors possibles, ces angles sont droits, aigus ou obtus, le cas des angles droits correspondant à la géométrie euclidienne. On élimine l'hypothèse de l'angle obtus contradictoire au fait que l'on peut toujours prolonger une droite, reste alors à éliminer l'hypothèse de l'angle aigu ce que Saccheri ne peut faire. Il termine son ouvrage en affirmant que les conséquences de cette hypothèse sont incompatibles avec l'idée de ligne droite.

Quant à Lambert[6], il considère un quadrilatère ayant trois angles droits, posant la question du quatrième angle (cette situation avait déjà été étudiée par Ibn Al-Haytham[7]). Ici encore trois cas sont possibles, l'angle droit correspond à la géométrie euclidienne, le cas de l'angle obtus étant incompatible avec le fait que l'on peut toujours prolonger une droite. Lambert étudie alors les conséquences de l'hypothèse de l'angle aigu, en particulier les relations trigonométriques dans un triangle. Comparant ces relations avec celles que satisfait un triangle sphérique il montre que l'hypothèse de l'angle obtus correspond à la géométrie sphérique et que l'hypothèse de l'angle aigu correspond à la géométrie d'une sphère de rayon imaginaire. Lambert a ainsi mis en place les propriétés de ce qui sera la géométrie non-euclidienne mais cette sphère de rayon imaginaire ne saurait représenter le plan de notre perception (le plan physique si l'on veut).

---

[1]Isaac Newton, *The Principles of Natural Philosophy* (1686) Motte's translation revised by Cajori, University of California Press, Berkeley 1962, p. 6

[2]*ibid.* p. 6

[3]Pour une histoire de la théorie des parallèles, nous renvoyons à l'ouvrage classique de Roberto Bonola, *La Geometria non-Euclidea* (1912), english translation by H. S. Carslaw, *Non-euclidean geometry*, Dover Publications, New York 1955. Signalons l'anthologie de Jean-Claude Pont, *L'Aventure des Parallèles*, Peter Lang, Berne 1986 ; si cet ouvrage nous semble contestable sur le plan épistémologique, il offre un vaste panorama des tentatives de démonstration du postulat des parallèles depuis les Grecs jusqu'à l'époque moderne, lesquelles nous éclairent sur la signification autant géométrique qu'épistémologique du postulat et du "besoin" de le démontrer. Enfin pour les travaux des mathématiciens arabes sur ce sujet nous renvoyons, outre les ouvrages cités, à l'ouvrage de K. Jaouiche, *La théorie des Parallèles en Pays d'Islam*, Vrin, Paris 1986.

[4]H. Saccheri, *Euclides ab omni nævo vindicatus*, Milano 1733

[5]Umar Al-Khayyam in K. Jaouiche, o.c. p. 185-199

[6]J.H. Lambert, *Theorie der Parallellienen*, Leipzig 1786

[7]Ibn Al-Haytham in Jaouiche, o.c. p. 161-184

La géométrie non-euclidienne naîtra lorsque des géomètres considèreront que l'hypothèse non-euclidienne peut s'appliquer au plan physique, autrement dit si la physique peut être non-euclidienne ; ce sera l'objet des travaux de Gauss, Bolyai et Lobatchevski[8]. L'apparition des géométries non-euclidiennes conduira à l'idée d'une multiplicité de géométries, ce qui posera un double problème : problème physique d'une part : quelle est la géométrie de l'espace ? problème logique d'autre part : s'il y a une multiplicité de géométries, comment assurer la rigueur du raisonnement si l'on sait la part d'intution qui sous-tend le raisonnement géométrique. Le problème logique sera réglé lorsque l'on construira des modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes (Klein, Poincaré) lesquels montreront que toute contradiction de la géométrie non-euclidienne implique une contradiction dans la géométrie euclidienne. Quant au problème physique il donnera lieu à de nombreux travaux dont le texte de Riemann est un point essentiel. Notons que la possibilité d'une géométrie non-euclidienne donnera longtemps lieu à controverse comme le montrent les réticences de Cayley[9] et de Frege[10].

La mise en évidence d'une multiplicité de géométries va conduire à penser une multiplicité d'espaces possibles, ce qui permettra de reformuler le problème physique sous la forme suivante : parmi les espaces possibles, lequel est l'espace physique ? Cette question exige de définir ce que peut être un concept général d'espace et c'est ce que propose Riemann dans le texte d'habilitaion de 1854 : *Sur les Hypothèses qui servent de Fondement à la Géométrie*[11]. Ce texte, l'un des plus beaux et des plus difficiles de l'histoire des mathématiques, se situe au carrefour de la géométrie, de la physique et de la philosophie.

Ce texte est le discours d'habilitation prononcé par Riemann devant les professeurs de l'Université de Göttingen, ce qui explique en partie le caractère non technique de ce texte, caractère non technique qui n'en rend pas la lecture plus aisée.

Si le concept d'espace est à redéfinir, Riemann se propose, dans une démarche que l'on peut considérer proche de celle de Leibniz, de chercher à définir le concept général d'espace avant d'étudier l'espace physique en tant que tel. Cela l'amène à distinguer parmi les propriétés de l'espace les propriétés métriques de celles qui concernent la notion générale de grandeur étendue ; c'est seulement après avoir défini ces deux types de propriétés que Riemann aborde la question de l'espace physique, renvoyant à l'expérience pour décider parmi les diverses propriétés possibles celles qui correpondent à l'espace physique. Aboutissement des recherches liées à la découverte des géométries non euclidiennes, Riemann passe ainsi de la notion d'espace à la notion d'espace*s*.

Si, à l'époque où il écrivait sa dissertation, Riemann s'intéressait à des problèmes de physique, ceux-ci n'apparaissent pas en tant que tels dans son texte, même si la physique est présente dans tout le texte, et pas seulement dans la dernière partie consacrée à ce que l'on appelle l'espace physique ; ce que Riemann nous propose, c'est une promenade à travers ces nouveaux espaces qu'il présente, promenade au sens que cette présentation propose un élargissement de l'intuition spatiale usuelle comme le montre sa description des espaces multidimensionnels. Mais cet élargissement de l'intuition est lui-même préparé par un texte antérieur de Gauss publié en 1827 : *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*[12] ; la notion de surface y apparaît autant dans son aspect intuitif que dans la représentation qu'en propose Gauss mettant en place les coordonnées curvilignes et les calculs correspondants. C'est *via* ces calculs que Gauss va faire la découverte qui conduit à l'*egregium theorema*, lequel va permettre de penser la notion de surface abstraite.

Gauss se propose de calculer la courbure d'une surface et pour cela s'appuie sur une construction relative aux courbes planes. On considère un arc de courbe AB et, un point O étant donné dans le plan, on associe à tout point M de l'arc AB le point T_M tel que le segment OT_M soit parallèle à la tangente au point M, orienté dans le sens AB et unitaire (en langage moderne on dira que le $\boldsymbol{OT_M}$ est égal au vecteur unitaire tangent en M à l'arc de courbe AB orienté de A vers B), lorsque M parcourt l'arc AB, le point T_M parcourt un arc de cercle ; si l'on note s la longueur de l'arc AM et σ la longueur de l'arc de cercle T_AT_M, la courbure au point A n'est autre que la limite de σ/s lorsque le point M tend vers le point A. Notons qu'au lieu de prendre la tangente on aurait tout aussi bien pu prendre la normale, une fois les questions d'orientation précisées. Gauss propose une construction analogue pour les surfaces.

Notons d'abord qu'une surface Σ étant donnée rapportée à des coordonnées curvilignes (p,q), on détermine l'élément linéaire dont le carré est défini par la forme quadratique

[8]Pour ces travaux nous renvoyons à l'ouvrage cité de Bonola.

[9]A. Cayley, "Presidential Adress to the British Association, September 1883" Report of the British association of Science" 1883, p. 3-37 ; n°784 in *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. XI, p. 429-459

[10]G. Frege, "Sur la géométrie euclidienne" in *Ecrits posthumes*, traduits de l'allemand sous la direction de Philippe de Rouilhan et Claudine Tiercelin, Editions Jacqueline Chambon, Nîmes 1994, p. 199-201

[11]Bernhart Riemann, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie", traduction Jules Houël, in *Oeuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968, réédition Gabay, Paris 1990

[12]Signalons une traduction française par Roger, *Remarques générales sur les surfaces courbes*, ré-édition Blanchard, Paris 1967, et une traduction anglaise par P. Dombrowski in *150 Years after Gauss*, Astérisque 62, Société Mathématique de France, Paris 1979.

$$ds^2 = \mathrm{E}dp^2 + \mathrm{F}dpdq + \mathrm{G}dq^2$$

qui donne la distance entre les deux points de coordonnées (p,q) et $(p+dp,q+dq)$. On peut alors calculer la longueur d'une ligne tracée sur la surface et l'angle de deux lignes au point où elles se coupent. On peut aussi, utilisant le calcul des variations, déterminer la ligne de plus courte distance (géodésique) qui joint deux points.

Pour étudier la forme de la surface Gauss introduit l'application suivante (aujourd'hui connue comme l'application de Gauss). Soit O un point donné de l'espace, on associe à tout point M de cette surface le point N_M tel que le segment ON_M soit parallèle à la normale au point M, le sens de la normale étant défini par un côté de la surface fixé une fois pour toutes, et unitaire. Lorsque le point M parcourt un morceau de la surface Σ le point N_M parcourt un morceau de la sphère unitaire de centre O. On associe ainsi à tout morceau de la surface un morceau de sphère et Gauss appelle *courbure intégrale* d'un morceau de surface le quotient de l'aire du morceau de sphère correspondant sur l'aire du morceau de surface donné. Un point A de la surface étant donné, si l'on note S l'aire d'un morceau de surface entourant le point A et σ l'aire du morceau de sphère correspondant, Gauss appelle *mesure de la courbure* au point A la limite du rapport σ/S lorsque le morceau entourant A devient infiniment petit, on retrouve ainsi la courbure précédemment définie par Euler. Par analogie avec les courbes on peut considérer que la mesure de la courbure représente la forme de la surface dans l'espace, or Gauss a montré que la mesure de la courbure ne dépend que de la première forme fondamentale de la surface, celle qui permet de calculer les longueurs et les angles des courbes tracées sur la surface ; ainsi si l'on déforme isométriquement une surface la mesure de la courbure ne change pas même si la forme change[13], par exemple un plan et un cône ont même mesure de la courbure, soit 0. La mesure de la courbure définit donc une grandeur intrinsèque indépendante de la forme de la surface dans l'espace, ce que l'on appellera une *grandeur géodésique*. Le théorème de Gauss, que celui-ci appelle *egregium*, c'est-à-dire remarquable[14], conduit à penser une géométrie intrinsèque des surfaces définies par la première forme fondamentale et les grandeurs géodésiques. On ne peut douter que, bien qu'il n'ait jamais rien publié sur les géométries non-euclidiennes[15], Gauss a compris le lien entre sa théorie des surfaces et les questions de géométrie non euclidienne comme le montre le calcul de la somme des angles d'un triangle géodésique où la courbure intervient, ce qui permettra ultérieurement de redéfinir la géométrie non-euclidienne comme celle s'une surface à courbure constante[16]. Cette redéfinition de la géométrie des surfaces et le développement de la géométrie non-euclidienne conduiront Gauss à poser le problème de l'espace sous une forme nouvelle et on comprend pourquoi Gauss ait tenu à ce que Riemann aborde ce sujet[17].

Comme nous l'avons déjà dit Riemann, pour aborder le problème de l'espace, va poser la question de la construction du concept d'espace, c'est seulement le concept une fois défini que l'on peut en expliciter les développements théoriques et voir ensuite comment ce concept peut intervenir en physique. On peut comparer la démarche de Riemann à celle de Leibniz se proposant de définir les grandeurs géométriques à partir du seul raisonnement et de construire *a priori* les êtres de raison qui lui permettront d'étudier le monde[18].

Riemann divise son exposé en trois parties, la première est consacrée à la notion générale de grandeur multidimensionnelle (*mannigfaltigkeit*)[19], la seconde s'intéresse aux propriétés métriques et c'est dans la troisième partie que Riemann pose le problème de l'espace.

Dans la première partie Riemann définit le concept de grandeur n-fois étendue. Il remarque alors que ce concept est indépendant de tout rapport métrique, renvoyant sans autre explication à des travaux antérieurs[20]. Il

---

[13]plus généralement si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre les mesures de courbure en deux points correspondants sont égales.

[14]littéralement : qui sort du troupeau

[15]par peur des cris des Béotiens comme il l'écrit à Bessel en1829.

[16]On peut citer ici les travaux de Minding (*Journal de Crelle*, vol XIX. 1839, p. 370-387 et vol. XX, 1840, p. 323-327) et de Beltrami ("Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea", *Giornale di Matematica* 6, 1868, p. 284-312, traduction française, "Essai d'interprétation géométrique de la géométrie non-euclidienne", *Annales de l'ENS*, tome V, 1868, p. 251-288). Pour une étude systématique des relations entre géométrie différentielle nous renvoyons à l'ouvrage de L. Boi, *Le problème mathématique de l'espace*, avec une préface de René Thom, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1995.

[17]Alors que Riemann avait le choix entre trois sujets Gauss lui a imposé ce sujet.

[18]Pour Leibniz l'espace, *ordre des coexistences*, est un être de raison, une construction intellectuelle. C'est cette construction intellectuelle qui permet d'étudier les problèmes du monde, (*Correspondance Leibniz-Clarke*, présentée par André Robinet, PUF, Paris 1957, p. 53). En un sens, la notion d'espace comme *ordre des coexistences* est proche de l'invention de l'espace par les perspectivistes de la Renaissance comme mode de coordination des divers lieux qui interviennent dans les problèmes de représentation.

[19]les variétés différentiables de la géométrie différentielle

[20]Parmi ces travaux il cite, sans plus de détails, ceux de Lagrange, Abel, Pfaff et Jacobi.

explique alors que dans cette branche générale de la théorie des grandeurs *"on ne suppose rien de plus que ce qui est déjà renfermé dans le concept de ces grandeurs"*. Pour préciser cette affirmation il explicite les deux points qu'il va développer dans cette première partie, le premier portant sur *"la génération du concept de variété à n dimensions"*, le second sur *"le moyen de ramener les déterminations de lieu dans une variété donnée à des déterminations de quantités"* et il ajoute : *"c'est ce dernier point qui doit faire clairement ressortir le caractère essentiel d'une étude à n dimensions"*.

Pour définir la dimension Riemann rappelle que le mouvement d'un point engendre une ligne, que le mouvement d'une ligne engendre une variété à deux dimensions et que le mouvement d'une telle variété engendre une variété à trois dimensions. Il ajoute alors, et c'est l'un des points essentiels de sa conférence : *"... il est aisé de voir comment on peut poursuivre cette construction"*, ce qui lui permet d'écrire :

"Si, au lieu de considérer le concept comme déterminable, on considère son objet comme variable, on pourra désigner cette construction comme la composition d'une variabilité de n+1 dimensions, au moyen d'une variabilité de n dimensions et d'une variabilité d'une seule dimension."

On peut noter ici le pas effectué par Riemann dans une construction qui relève plus d'un élargissement de l'intuition que d'une définition analytique. Elargissement de l'intuition spatiale qui permet de concevoir le mouvement comme une opération générale qui permet d'augmenter la dimension *ad libitum*. Dans ses écrits sur la caractéristique géométrique, Leibniz faisant une remarque analogue sur le mouvement d'un point, d'une ligne ou d'une surface n'osait pas imaginer qu'un volume puisse sortir de l'espace pour engendrer un objet d'une dimension plus grande ; c'est ainsi qu'après avoir défini une trajectoire comme *"un lieu continu successif"* et remarqué que la trajectoire d'un point est une ligne, il écrit :

*"La trajectoire d'une ligne, dont les points ne prennent pas constamment la place les uns des autres, est une **Surface**. Celle d'une surface dont les points ne prennent pas toujours la place les uns des autres, est un **Corps**. Un corps quant à lui ne peut être mû sans que tous ses points prennent la place les uns des autres (il faudra démontrer pourquoi le moment voulu) et ce mouvement ne produit aucune nouvelle dimension"*[21]

Dans un texte ultérieur, Leibniz explique que si un point peut être l'extrémité d'une ligne, un ligne peut être l'extrémité d'une surface et une surface l'extrémité d'un solide, *"un solide ne peut plus être l'extrémité de quelque chose d'autre"*[22]

Ainsi le rationaliste Leibniz reste enfermé dans la connaissance sensible[23] alors que Riemann, plus proche de l'empirisme, propose moins une définition rationnelle de ces nouveaux espaces qu'un élargissement de l'intuition sensible, ouvrant ainsi un nouveau champ d'étude. Cela remet en question la classique, et facile, opposition entre empirisme et rationalisme si l'on considère que l'activité scientifique se situe au carrefour de l'empirisme et du rationalisme, permettant à la fois un élargissement de l'intuition sensible et la construction d'un discours rationnel qui assure à son tour une meilleure prise sur le sensible.

Une fois définie la notion de grandeur multidimensionnelle, Riemann explique comment définir des systèmes de coordonnées : une fonction continue[24] sur une multiplicité de dimension n permet d'y distinguer des multiplicités de dimensions n-1, une telle multiplicité étant le lieu des points où cette fonction prend une valeur constante ; un mouvement inverse du mouvement d'engendrement permet ainsi d'établir la possibilité de repérer les éléments d'une multiplicité abstraite à n dimensions par n fonctions numériques jouant le rôle de coordonnées. Notons que Riemann ne s'embarrasse pas des difficultés liées à ce que nous appellerions aujourd'hui la transversalité, se contentant d'annoncer : *"Les cas d'exception, dont l'étude est importante, peuvent être ici laissés de côté"*.

Ici encore tout se joue sur le qualitatif, y compris la construction du quantitatif. La façon dont s'élabore un concept est ici plus importante que les constructions analytiques ou formelles qui en seront données plus tard, constructions certes nécessaires mais c'est la définition qualitative qui donne sa force au concept[25].

---

[21]G.W. Leibniz, *la caractéristique universelle*, texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit, annoté et postfacé par Marc Parmentier, "Mathesis", Vrin, Paris 1995, p. 155

[22]*ibid.* p. 285

[23]On peut considérer le travail de Leibniz sur la caractéristique géométrique comme une tentative de construire une méthode rationnelle permettant de se dégager du sensible pour mieux l'étudier, mais ce travail demande de rester proche du sensible.

[24]il faut prendre ici la notion de continuité dans son sens intuitif.

[25]Dans un article ultérieur Riemann s'appuiera sur des constructions analytiques mais nous n'en parlerons pas ici. cf. Bernhardt Riemann, "Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quæstioni ab III^{ma} Academia Parisiensi propositiæ" (1864) in *Riemann's Gesamm. Math. Werke* XXII, 2, Aufl. (1892), p. 391-423

La notion de grandeur multidimensionnelle une fois mise en place, Riemann peut aborder dans une deuxième partie la question des rapports métriques.

Après être revenu sur *"l'indépendance entre les grandeurs et le lieu"*, Riemann va déterminer les rapports métriques dans l'infiniment petit ce qui le conduit à définir l'*élément linéaire* (distance de deux points infiniment voisins) *ds* comme une grandeur homogène du premier degré des accroissement[26] *dx* des coordonnées *x* ; l'élément linéaire étant une grandeur positive, *ds* peut être défini comme la racine nième d'une forme homogène de degré pair n en les accroissements *dx*. Rieman s'intéresse ici au seul cas où l'élement linéaire *ds* est la racine carrée d'une forme quadratique[27], soit $ds=\sqrt{\sum g_{ij}dx_i dx_j}$. On peut imaginer des cas plus généraux qui *"n'exigeraient pas des principes essentiellement différents"* mais compliqueraient les calculs.

Le cas classique est évidemment celui des variétés planes pour lequel l'élément linéaire peut s'écrire dans un système de coordonnées convenables

$$ds=\sqrt{\sum dx_i^{\,2}}$$

mais on sait que tout élément linéaire ne peut en général se ramener à cette forme.

On voit ici se poser d'abord le problème de la caractérisation des variétés planes, ensuite le problème de l'équivalence de deux éléments linéaires.

Un élément linéaire étant donné, on peut alors déterminer les éléments métriques : longueur d'un arc de courbe, angle de deux courbes se rencontrant en un point. En particulier on peut définir les géodésiques (courbes de plus courte distance entre deux points) et le calcul des variations montre qu'entre deux points suffisamment voisins, il existe une géodésique et une seule les joignant.

Pour caractériser les variétés qu'il vient de définir, Riemann, s'appuyant sur l'article cité de Gauss, se propose de définir la *mesure de courbure*. Pour cela il introduit, à la façon de Gauss, les coordonnées géodésiques : un point étant donné (point-origine), on considère les lignes géodésiques (lignes de plus courte distance) issues de ce point, *"la position d'un point indéterminé pourra être fixée alors au moyen de la direction initiale de la ligne de plus courte distance sur laquelle il se trouve et de sa distance comptée sur cette ligne à partir de l'origine et par conséquent elle pourra s'exprimer au moyen des rapports* dx^0 *des quantités dx sur cette ligne de plus courte distance et au moyen de la longueur s de cette ligne"*. On peut alors construire un système de coordonnées tel que les lignes coordonnées passant par le point-origine soient orthogonales et que le développement du carré de l'élément linéaire au voisinage du point *O* soit tel que le terme du second ordre s'écrive Σdx_i^2 et le terme du quatrième ordre s'écrive $\Sigma\rho_{ij}(x_i dx_j - x_j dx_i)^2$, les termes ρ_{ij} représentant la *mesure de la courbure* de la surface définie par le triangle géodésique infiniment petit dont les sommets sont le point origine, le point de coordonnées $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et le point infiniment voisin $(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n)$[28]. Ce terme est évidemment nul lorsque la variété est plane.

A côté des variétés planes, Riemann s'intéresse aux variétés dont la mesure de la courbure est constante, il remarque que sur de telles variétés *"les figures peuvent s'y mouvoir sans subir d'extensions"*, propriété qu'il ne démontre pas se contentant de montrer qu'elle n'est pas satisfaite pour une variété dont la mesure de la courbure n'est pas constante. Il montre de plus que sur une variété à courbure constante la métrique est déterminée par la mesure de la courbure. Il termine cette seconde partie en étudiant le cas des surfaces[29].

Enfin dans la troisième partie, Riemann aborde la question de l'espace.

Riemann explique que les propriétés de l'espace se définissent essentiellement dans l'infiniment petit et pose alors une série d'alternatives .

Soit l'espace est discret, auquel cas l'étude de l'espace est une question de dénombrement, soit l'espace est continu et dans ce cas son étude relève de la théorie générale qu'il a exposée.

Dans ce dernier cas il remarque que si *"les corps existent indépendamment du lieu, la mesure de courbure est constante"*, autrement dit la géométrie ne dépend pas de la distribution des corps dans l'espace. Il

---

[26]en termes modernes on pourrait parler de différentielles !

[27]ce qui correspond au théorème de Pythagore.

[28]Riemann signale que pour retrouver la courbure de Gauss il faut mulitplier les coefficients ρ_{ij} par $-3/4$.

[29]Une étude générale des variétés à courbure constante sera publiée par Beltrami ("Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante", *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2ème série, tome II, 1868-1869, p. 232-255, traduction française, "Théorie fondamentale des espaces à courbure constante", *Annales de l'ENS*, tome VI, 1868-69, p. 347-375). Ce travail fait suite à son essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne (cité note 10), lequel s'appuie sur les travaux de Gauss sur les surfaces et se propose d'interpréter en termes de géométriie différentielle les travaux de Lobatchevski. Beltrami avait écrit ce texte avant de connaître le texte de Riemann, après avoir lu celui-ci il généralisait son essai aux variétés de dimension quelconque.

explique alors, sans autre précision, que les mesures astronomiques impliquent que la mesure de courbure est nulle, autrement dit que l'espace est une variété plane.

Si par contre *"l'indépendance entre les corps et le lieu n'existe pas"*, c'est-à-dire si la présence de corps influe sur la géométrie de l'espace, alors la mesure de courbure est variable.

Il résume ainsi l'alternative :

"Il faut donc, où que la réalité sur laquelle est fondée l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui"

Arrivé à ce point, Riemann renvoie à l'expérience. Si la recherche de concepts généraux est nécessaire pour que le travail sur la géométrie de l'espace ne soit pas entravé par des vues trop étroites et les préjugés traditionnels comme il l'explique à la fin de sa conférence, la détermination de cette géométrie relève d'un autre domaine, celui de la Physique. On voit que subsiste ici l'idée que parmi toutes les géométries possibles que propose le travail de Riemann il en existe une qui correspond à la réalité. Il faudra attendre la critique de Poincaré pour qu'apparaisse l'idée que le problème est moins de trouver la vraie géométrie que de chercher comment une géométrie peut nous parler du monde[30].

Le texte de Riemann aura une double postérité, mathématique d'une part avec la théorie des variétés différentiables, physique d'autre part, laquelle se manifestera par les relations étroites entre la géométrie différentielle et la physique mathématique. Cette postérité physique peut elle-même se diviser en deux parties, la première concernant la structure géométrique de l'espace puis de l'espace-temps après la naissance des théories relativistes, la seconde conduisant à la *géométrisation* de certains chapitres de la mécanique et de la physique. Ces diverses postérités s'entremêleront pour fonder une théorie générale des espaces.

Sur un plan strictement mathématique nous pourrons citer les problèmes que l'on appelle aujourd'hui *problèmes d'équivalence*. Dans le cas des variétés riemanniennes un tel problème se présente ainsi :

Soient deux variétés rapportées respectivement aux coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ et les éléments linéaires correspondants

$$ds^2 = \Sigma g_{ij} dx_i dx_j \qquad dt^2 = \Sigma h_{lm} dy_l dy_m$$

Nous dirons qu'elles sont équivalentes s'il existe une transformation de coordonnées

$$y_l = f_l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qui envoie la seconde forme différentielle quadratique sur la première.

La détermination des conditions d'équivalence de deux structures riemanniennes conduira à la définition d'un invariant tensoriel, aujourd'hui appelé le tenseur de courbure ou le tenseur de Riemann-Christoffel introduit par Riemann dans l'article cité de 1864. On montre alors que deux structures riemanniennes équivalentes définissent le même tenseur de courbure. En particulier un espace est localement euclidien si et seulement si son tenseur de courbure est nul. Le problème d'équivalence sera étudié systématiquement par Christoffel[31] qui introduira les symboles qui portent son nom. Ces symboles joueront un rôle essentiel dans la construction de la notion de dérivation covariante par Ricci[32].

En ce qui concerne le problème physique de l'espace, nous nous contenterons de citer Clifford qui pose la question de ce que peut signifier la courbure de l'espace. Ceci l'amène à écrire les remarques suivantes :

"That small portions of space ***are*** *in fact of a nature analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.*

That this property of being curved or distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.

That this variation of the curvature of space is what really happens in that phenomenon which we call the ***motion of matter****, whether ponderable or etherial.*

That in the physical world nothing else takes place but this variatio

[30]H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), préface de Jules Vuillemin, Flammarion, Paris 1968, deuxième partie : l'espace.

[31]Christoffel, *Journal de Crelle*, 70, 1869, p. 6-70 et 241-245

[32]G. Ricci, "Delle derivazione covarianti e contravarianti" *Studi éditi dell' Univcersità di Padova ecc*, Padova 1888 et "Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique", *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2ème série, tome XVI, 1892 p. 167-189

n subject (possibly) to the law of continuity."[33]

Cette notion de courbure de l'espace définie par l'influence des corps sur la géométrie de l'espace fera son chemin pour aboutir à la théorie de la Relativité Générale d'Einstein en 1916.

Mais de façon plus générale d'étroites relations se construisent entre la géométrie différentielle issue des travaux de Riemann et la physique mathématique comme le montre l'article de Ricci et Levi-Civita sur le calcul différentiel absolu[34]. A côté du problème de la structure de l'espace se met en place ce que nous avons appelé ci-dessus une géométrisation de la mécanique dont l'un des premiers exemples est donné par la reformulation géométrique de la mécanique analytique lagrangienne par Levi-Civita[35].

L'étude des équations de Lagrange avait conduit à étudier les conditions pour que deux systèmes mécaniques soient équivalents au sens où l'intégration des équations de Lagrange du premier système permet l'intégration des équations de Lagrange du second système, problème posé dans un cadre purement analytique[36]. Levi-Civita montrera l'aspect géométrique de ce problème et sa relation avec l'équivalence des variétés riemanniennes.

Un système mécanique à n degrés de liberté peut être représenté par un point d'une variété de dimension n. On note $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ un système de coordonnées, alors la cinétique du système est définie par son énergie cinétique T qui est une expression quadratique en les vitesses $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ du système où pour tout indice i

$$v_i=\frac{dx_i}{dt}$$

L'énergie cinétique T est alors définie par la relation

$$2T = \Sigma a_{ij}v_iv_j$$

Le problème de la transformation des équations de la dynamique peut alors être posé sous la forme suivante : étant donnés deux systèmes dynamiques respectivement définis par les systèmes $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ et les énergies cinétiques

$$2T = \Sigma a_{ij}v_iv_j \qquad\qquad 2U = \Sigma b_{lm}w_lw_m$$

peut-on trouver un changement de variables

$$y_l = f_l(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

qui transforme U en T ?

Levi-Civita remarque l'analogie avec le problème de l'équivalence de deux structures riemanniennes. Pour préciser cette analogie il introduit l'espace de configuration du système comme la variété définie par les paramètres de définition du système qu'il munit de la métrique définie par la forme quadratique

$$ds^2 = \Sigma a_{ij}v_iv_j$$

Il remarque ensuite que le terme cinétique des équations de Lagrange n'est autre que la dérivée covariante de la vitesse dans l'espace de configuration ce qui conduit à une reformulation géométrique de ces équations. En particulier pour un système libre (non soumis à des forces extérieures) la dérivée covariante de la vitesse est nulle ce qui implique que le point représentant le système dans l'espace de configuration décrit une géodésique d'un mouvement uniforme. On peut considérer ce résultat comme une généralisation du principe d'inertie.

Ainsi la mécanique analytique de Lagrange redevenait une théorie géométrique, à condition de considérer l'espace de configuration du système ; on peut ainsi parler de *géométrisation* de la mécanique, ce qui

---

[33]W. K. Clifford, "On the Space Theory of Matter" (1876), in James R. Newman, *The World of Mathematics*, Tempus 1988, volume one, p. 559-560

[34]G. Ricci, T. Lévi-Civita, "Methodes de calcul différentiel absolus et leurs applications", *Mathematische Annalen*, Band 54, 1901, p. 125-201

[35]T. Levi-Civita, "Sulla tranformazione delle equazioni dinamiche", *Annali di matemetica pura ed applicata*, Serie II, Tomo XXIV, 1896, p. 255- 300

[36]C'est le problème de la transformation des équations de la dynamique étudié tout au long du XIXème siècle.

permet de considérer celle-ci comme un chapitre de la géométrie différentielle, point de vue qui est à la source de nombreux travaux toujours actuels[37].

Ainsi se met en place une profonde symbiose entre la géométrie différentielle et la physique qui a marqué l'évolution conjointe de ces deux domaines tout au long du XXème siècle[38]. Nous pouvons ici citer parmi les ouvrages classiques mettant en valeur cette symbiose, d'abord le classique *Raum, Zeit, Materie* (traduction anglaise *Space, Time, Matter*[39]) de Hermann Weyl, ensuite dans la seconde partie du XXème siècle l'ouvrage de André Lichnérowicz, *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme*[40] ainsi que celui de Vladimir Arnold déjà cité.

Nous terminerons cet exposé en citant Reichenbach qui écrivait en 1927 :

"Mathematics reveals the possible espaces; physics decides which among them corresponds to physical space"[41]

Notons la double interprétation du terme *"decides"* ; soit l'espace physique a une structure géométrique déterminée et le physicien doit découvrir cette structure parmi les possibles, soit la structure est déterminée par le physicien pour rendre compte des phénomènes ; la préface de Carnap laisse entendre que c'est la seconde interprétation qu'il faut lire:

"In physical geometry, there are two possible procedures for establishing a theory of physical space. First, the physicist may freely choose the rules for measuring length. After this choice is made, the question of the geometrical structure of physical space becomes empirical ; it is to be answered on the basis of the results of experiments. Alternatively, the physicist may freely choose the structure of physical space ; but he must adjust the rules of measurement in view of the observational facts."[42]

Ainsi la géométrie différentielle issue des conceptions de Riemann sur l'espace devient l'un des lieux où s'élabore la physique, ce qui nous permet encore une fois d'insister sur le caractère mixte des mathématiques, à la fois dans le monde et hors du monde. Mais c'est bien parce qu'elles savent se placer hors du monde que les mathématiques peuvent nous parler du monde et le texte de Riemann est une parfaite illustration de ce que Wigner a appelé *"la déraisonnable efficacité des mathématiques"*[43].

---

[37]V. Arnold, *Méthodes mathématiques de la Mécanique Classique* (1974), traduit du russe par Djilali Embarek, Editions Mir, Moscou 1976

[38]Pour une histoire des liens entre géométrie et physique nous renvoyons à l'article de Christian Houzel, "Géométrie et Physique" in *Universalia* 1991, supplément annuel à *Encyclopædia Universalis*

[39]Hermann Weyl, *Space, Time, Matter* (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover Publications, Inc., New York 1952

[40]André Lichnérowicz, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme*, "Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'Usage des Physiciens", Masson, Paris 1955

[41]Hans Reichenbach, *The Philosophy of Space and Time* (1927) (translated by Maria Reichenbach and John Freund, with introductory remarks by Rudolf Carnap), Dover, New York 1957, p. 6

[42]*ibid.* p. vi

[43]E.P. Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", *Comm. Pure and Applied Math.* 13, 1960, p. 1-14