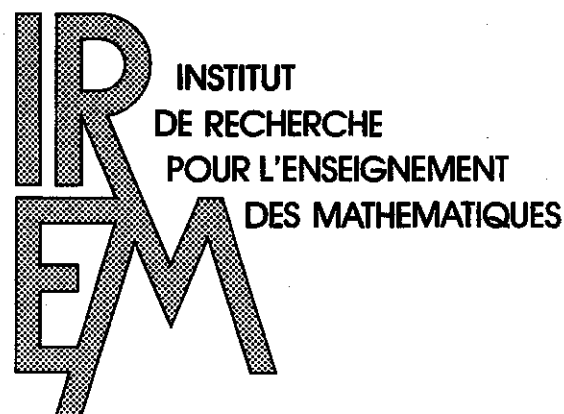




ASSOCIATION
POUR LA
RECHERCHE
EN
DIDACTIQUE
DES
MATHÉMATIQUES



Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2001

Édités par Teresa Assude et Brigitte Grugeon,

Équipe DIDIREM, Université Paris 7

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

Année 2001

*Edités par Teresa Assude et Brigitte Grugeon,
Équipe DIDIREM, Université Paris 7*

SOMMAIRE

<i>Présentation</i>	5
<i>Etude du champ numérique</i>	9
Guy BROUSSEAU, La mesure des grandeurs : le numérique et l'analogique	11
Eugène COMIN, Les difficultés de l'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège	47
Annick FLÜCKIGER, Vers une articulation théorie des situations/théorie des champs conceptuels	71
Robert ADJIAGE, Trois registres d'expression, dans un environnement informatique, pour l'enseignement des rationnels à la fin de l'école et au début du collège	97
Alain BRONNER, Les nombres réels dans la transition collège-lycée : rapports institutionnels et milieux pour l'apprentissage	115
Rémi BRISSIAUD, Un nouveau concept pour penser le progrès en arithmétique élémentaire : celui de concordance/discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique	135
<i>Etude des mathématiques, dispositifs d'étude et travail personnel de l'élève</i>	151
Florence GENESTOUX, Médiations entre la classe et le travail à la maison : le rôle des assortiments	153
Yves CHEVALLARD, Les TPE comme problème didactique	177
Corine CASTELA, Reconnaître institutionnellement certaines connaissances sur le fonctionnement mathématique comme des enjeux d'apprentissage pour les élèves ?	189
Groupe CESAME, Ordres de connaissances et institutionnalisation	209
Yves MATHERON, Proposition d'un modèle pour l'étude didactique de la mémoire	227

<i>Interactions professeur-élèves</i>	259
Lalina COULANGE, Activité coordonnée et complémentaire d'un professeur et de ses élèves lors de l'introduction des systèmes d'équations en troisième...	261
Magali HERSANT, Interactions didactiques et pratiques d'enseignement : Le cas de la proportionnalité au collège	295
Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, Présentation du rapport de synthèse : Etude des stratégies de l'enseignant en situation d'interaction	321

PRESENTATION

Nous sommes encore une fois au rendez-vous annuel que constitue maintenant la publication des actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Ce rendez-vous est l'occasion de faire le point sur les thèses récemment soutenues, sur les débats qui traversent notre communauté, sur les questions vives de la recherche et les apports des uns et des autres qui permettent d'avancer à la fois dans la compréhension et dans l'action de ce réel constituant notre objet d'étude essentiel, à savoir celui de la « diffusion signifiante des connaissances et des savoirs mathématiques ».

L'année 2001 a été consacrée à trois thèmes de travail même si le dernier n'a pas eu le nombre de contributions nécessaires pour l'approfondir. Ces thèmes peuvent être décrits très rapidement de la manière suivante :

- le premier thème est celui de l'étude du champ numérique : des nombres à différents niveaux d'enseignement, des relations nombre – mesure - grandeur, des problèmes numériques, des algorithmes ;
- le deuxième thème est celui de l'étude des mathématiques, des dispositifs d'étude et du travail personnel de l'élève ;
- le troisième thème est celui des interactions professeur-élèves.

Le premier thème contient six articles qui abordent des questions clefs concernant l'étude du champ numérique. Guy Brousseau pose la question de l'étude du numérique à travers celle des relations établies entre grandeur, mesure et nombre. Pour ceci, il interroge les différents univers des grandeurs et de la mesure puis analyse les évolutions entre l'enseignement classique et « actuel » des grandeurs. Il étudie les conséquences de la disparition de l'étude des grandeurs et émet des suggestions sur des conditions nouvelles d'enseignement des nombres reposant sur une évolution des rapports entre numérique et arithmétique, numérique et algébrique, nombre et grandeur, mesure et analogique. Eugène Comin interroge l'étude du numérique à travers celle de la proportionnalité. Dans la continuité de Guy Brousseau, il pose les questions de la « rupture conceptuelle » de l'objet proportionnalité causée par l'abandon de l'étude des grandeurs, des rapports et des proportions et des raisons pour lesquelles le système scolaire est resté aveugle aux conséquences de ce choix épistémologique. Il montre la nécessité d'un développement théorique pour articuler des connaissances de micro et de macro didactique.

Annick Fluckiger présente la genèse expérimentale d'une notion mathématique, ici la division, comme modèle des connaissances numériques. A partir de l'ingénierie mise en place qui permet la construction d'une macro situation adidactique au cours de laquelle les élèves d'une classe vont travailler le concept de division autour de problèmes exclusivement numériques, elle pose les questions de la construction du sens et de la pertinence de l'utilisation du concept de schème dans l'étude du sous-système élève. C'est l'occasion de réinterroger la modélisation faite dans la théorie des situations des concepts de contrat de recherche et de mémoire didactique.

Robert Adjage aborde la question de l'enseignement des rationnels à la fin de l'école élémentaire et du collège. Il propose une approche des rationnels préalable à l'introduction des fractions à partir d'un système géométrique à dimension 1 mettant en jeu le registre des droites graduées. En s'appuyant sur la théorie des registres de Raymond Duval, Robert Adjage pose la question du choix du système qui permet l'expression des nombres rationnels la plus adaptée au développement de l'ensemble des compétences nécessaires à leur maîtrise ainsi que le traitement des problèmes rationnels et le contrôle des traitements dans les deux autres registres usuels des écritures fractionnaires et décimales. Il aborde la question du coût didactique et analyse en quoi l'usage du logiciel ORATIO permet effectivement de rendre acceptable le coût didactique élevé des actions des élèves et des rétroactions du milieu et d'ouvrir un véritable champ expérimental dans lequel les conceptions des rationnels s'affinent par preuves et réfutations. Alain Bronner se situe dans une approche anthropologique pour étudier la place que doit occuper le concept de nombre réel dans la transition collège - lycée. Il pose les questions de savoir quel concept de nombre réel il est nécessaire, souhaitable ou possible d'introduire au niveau d'enseignement envisagé et quels milieux permettent de construire un tel concept. Il aborde ces questions à partir de l'étude des organisations mathématiques et didactiques relatives au domaine du Numérique dans les institutions d'enseignement de 1854 à nos jours.

Rémi Brissiaud interroge le concept de congruence vs non congruence entre l'organisation rédactionnelle d'un énoncé et les traitements arithmétiques requis de Raymond Duval pour étudier les difficultés des élèves à résoudre des problèmes appartenant à la même catégorie au sein du champ conceptuel d'un concept. Pour ceci, il introduit le concept de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Il étudie en quoi ce concept permet de mieux comprendre les enjeux de l'apprentissage de l'arithmétique à l'école et aide dans l'élaboration de situations didactiques qui favorisent cet apprentissage.

Plusieurs contributions sont présentes en ce qui concerne le deuxième thème. Comment penser et organiser l'étude personnelle de l'élève ? Florence Genestoux aborde cette question à partir de l'étude des interactions qui accompagnent la réalisation des devoirs du savoir : relations

entre l'école et la famille ou entre l'école et autres « accompagnateurs d'étude ». Un modèle des différentes fonctions et des contrats d'accompagnement est proposé, modèle dans lequel les assortiments didactiques apparaissent comme médiation entre la classe et les devoirs à la maison. Une perspective plus institutionnelle est celle de Yves Chevallard qui pose le problème de penser le surgissement (imposé par l'institution) et les effets d'un dispositif d'étude – les Travaux Personnels Encadrés (TPE) – dans la culture didactique scolaire. Une proposition est faite pour étudier l'économie didactique des TPE à partir des différents niveaux de détermination où plusieurs étapes peuvent être abordées dans l'étude d'une question et où le temps de l'étude est structuré à partir de plusieurs dialectiques. Et ceci dans une perspective de réelle coopération disciplinaire soit dans une perspective codisciplinaire.

De quelles connaissances s'agit-il lorsqu'on étudie les mathématiques ? Corinne Castela pose le problème de la reconnaissance (ou non-reconnaissance) institutionnelle de certaines connaissances sur le fonctionnement mathématique comme des enjeux didactiques pour les élèves. Une problématique de recherche est présentée pour définir le domaine de ces connaissances, pour identifier sous quelles formes ce domaine vit (ou peut vivre) dans l'enseignement et pour expérimenter des dispositifs faisant apparaître ces connaissances comme des enjeux didactiques. Le groupe CESAME aborde aussi cette question mais à partir d'autres types de connaissances qui apparaissent indispensables à l'activité mathématique, notamment les connaissances d'ordre 2 soit les règles du jeu mathématique. Le dispositif mis en œuvre utilise notamment le couple (copie virtuelle, partiel réflexif) pour faire émerger la connaissance d'ordre 2 « une définition définit comme elle est censée définir et c'est utile pour faire des mathématiques », connaissance qui peut être institutionnalisée par le professeur. Le passage du partiel au partiel réflexif est fait à partir des récits et des souvenirs des étudiants. Le problème de la mémoire est traité par Yves Matheron qui considère la mémoire comme l'expression d'un rapport, dans une temporalité, à une pratique dans une institution : une mémoire collective, externe, visible, outillé par des instruments, une mémoire personnelle lorsqu'elle est assujettie à une institution soit une classe ordinaire de mathématiques. Un modèle de la mémoire est proposé : mémoire du savoir, mémoire pratique et mémoire ostensive, modèle qui va lui permettre de prendre en compte, dans un dispositif, les phénomènes mémoriels dans l'étude des mathématiques par les élèves.

Le troisième thème est abordé dans trois articles. L'article de Lalina Coulangue présente l'activité coordonnée du couple enseignant-enseigné lors de l'introduction des systèmes d'équations en classe de troisième en prenant la théorie des situations et l'approche anthropologique comme cadres théoriques. La confrontation de l'analyse descendante permettant

de dégager les contraintes institutionnelles (actuelles et passées) qui pèsent sur les choix de l'enseignant avec l'analyse ascendante de la situation projetée par l'enseignant permet de prévoir des tensions internes au sein des interactions enseignant-enseigné. Des régulations peuvent s'avérer nécessaires en ces points de tensions pour maintenir la relation didactique. L'étude des interactions est aussi l'objet d'étude de Magali Hersant qui s'intéresse à l'enseignement de la proportionnalité au collège. L'analyse est faite à l'aide d'une grille autour de deux types de variables : le premier type est celui de l'interaction comme communication entre des personnes et le second type est celui de l'interaction (dans sa fonction didactique et dans son mode) dans le déroulement du projet du professeur. Différents contrats sont mis en évidence et une caractérisation du « cours dialogué » est proposée. L'apport de Marie-Jeanne Perrin est de toute autre nature car elle nous présente un plan détaillé du chapitre consacré à la didactique des mathématiques du rapport de synthèse sur « Etude des stratégies de l'enseignant en situation d'interaction » du programme Cognitique dans le cadre de l'action « Ecole et sciences cognitives » du Ministère de la Recherche.

Nous espérons que vous trouverez de quoi nourrir vos réflexions et vos travaux dans la lecture de ces actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2001.

Etude du champ numérique

LA MESURE DES GRANDEURS : LE NUMERIQUE ET L'ANALOGIQUE

Guy Brousseau

DAEST, Université de Bordeaux II

I. INTRODUCTION

La mesure des grandeurs est passée depuis l'origine pour le but et la matière principale des mathématiques. L'évolution de la science a déplacé leur étude vers les autres disciplines et aujourd'hui l'enseignement est écartelé entre le désir de s'ajuster sur les connaissances du monde savant et celui de s'adapter aux attentes culturelles et aux nécessités génétiques du développement de l'homme.

Cette évolution rapide est accompagnée d'un très grand nombre de bouleversements technologiques et sociaux qui rendent très difficiles les analyses et encore plus complexe les recherches de solutions et d'ingénierie.

La disparition feutrée de nombreuses pratiques scolaires laisse souvent les enseignants désarmés devant des lacunes inexplicables et irrattrapables de leurs élèves.

Déjà pourtant une réaction s'est amorcée contre ce que certains attribuent au mouvement des mathématiques modernes. Les tentatives de réintroduire des secteurs mathématiquement isolés ou négligés sont faites avec un certain succès (et quelques excès) comme pour la géométrie. Mais l'évolution n'est ni arbitraire ni réversible, et la mécanique rationnelle est bel et bien sortie des préoccupations des mathématiciens...

Plutôt que de restaurer pieusement les vestiges de temples anciens qui ont cessé d'être fréquentés, il vaut mieux s'attaquer courageusement aux problèmes actuels. Si les mathématiciens veulent continuer à jouer convenablement le rôle qui leur est échu dans la formation fondamentale des citoyens, il leur faut assumer les obligations que cela comporte et faire en sorte que la connaissance des grandeurs reste un objectif gérable de l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire. Cela implique une présence dans la formation des professeurs aussi bien du secondaire que du primaire, et donc un ancrage dans la science elle-même à l'université.

Mais l'évolution des techniques n'obéît plus aux besoins de la science et de son enseignement. Et il est très difficile de restaurer artificiellement des conditions favorables à un apprentissage. Par exemple la généralisation de la numérisation des appareils de mesure et l'usage des ordinateurs ou des calculettes tend à faire disparaître chez les élèves toute une expérience des représentations topologiques et d'ordre que nous étions accoutumés à utiliser avec eux.

Pour la commodité du propos nous reprendrons l'opposition désormais classique entre les deux « cultures » habituellement complémentaires en mathématiques mais déjà clairement distinguables : celle du numérique (et de l'algébrique) par opposition à celle du topologique (et des structures ordonnées). Nous qualifierons même cette dernière « d'analogique » pour marquer l'importance du rôle que nous voulons donner aux grandeurs dans cette étude. Pendant un certain temps il a existé deux types concurrents de calculateurs (électroniques ou autres) : des *calculateurs « numériques »* qui traitaient des nombres et des lettres, des *calculateurs « analogiques »* qui opéraient directement sur des grandeurs physiques. La puissance et la souplesse des calculateurs « numériques » l'a rapidement emporté.

De nombreux pédagogues, sensibles à ces difficultés réintroduisent dans les manuels l'étude des grandeurs, d'autres étudient les « représentations » graphiques, iconiques etc. et cherchent à en développer l'usage comme instruments de pensée autonome.

Mais l'arithmétisation et l'algébrisation généralisée des connaissances mathématiques découlent à la fois de l'usage des machines, de la structuration des mathématiques, de la formation des professeurs, des modèles pédagogiques et didactiques dominants et tout cela conduit ces modèles à ne plus être vraiment utilisés. Il est impossible de renverser ces tendances. Alors la réintroduction isolée de quelques notions risque de ne trouver aucun usage, sinon dans le reste des programmes, mais dans les usages fréquents et habituels, et par conséquent elle risque de charger inutilement l'enseignement sans réel profit pour la formation des élèves.

« L'évolution est irréversible » ne veut pas dire qu'il est impossible de pallier à certains de ses effets, mais il faut le faire avec des moyens adaptés à cette évolution sans chercher à maintenir artificiellement les parties obsolètes ou mortes. C'est pourquoi nous voudrions attirer l'attention des didacticiens sur une possibilité : il était d'usage de prendre la connaissance des grandeurs comme une source primitive de connaissances et de problèmes pour apprendre ensuite les nombres (en particulier les nombres denses) et l'algèbre. Ne pourrait-on pas développer l'étude des grandeurs comme une modélisation « analogique » des relations et du calcul « numérique », comme un moyen d'utiliser le calcul numérique préalablement appris ?

II. LES DIFFERENTS UNIVERS DES GRANDEURS ET DE LA MESURE : SITUATIONS FONDAMENTALES¹

Pour comprendre le rôle d'une leçon comme «le poids d'un récipient» il est utile de la replacer dans son contexte pédagogique² et scientifique. Comment passer du projet d'enseigner une notion mathématique aussi complexe que «la mesure» à un projet d'ensemble, un processus, puis à une situation plus ou moins générique et enfin à une leçon ?

La théorie des situations didactiques semble relativement adaptée à la conception ou à la description d'un dispositif d'apprentissage et d'enseignement d'une connaissance assez bien délimitée, pouvant fonctionner pendant un court moment à un niveau scolaire assez précis. Elle fournit des éléments pour analyser des successions de leçons et les dépendances qu'elles peuvent présenter, mais elle ne paraît pas donner d'instruments pour «découper» des grands objets d'enseignement et pour réaliser effectivement des restructurations et des processus d'ensemble.

Il n'existe pas, dans ce domaine, d'algorithme produisant un résultat unique, mais seulement une série de critères pour comparer entre elles des propositions envisagées et pour éventuellement les améliorer. La réduction d'un gros objet comme la mesure en une suite de situations aura nécessairement un caractère dialectique : l'adéquation des situations au processus et celle du processus aux situations disponibles ne peut être, du moins pour l'instant, jugée qu'après coup. Mais cette réduction n'est pas non plus un tâtonnement erratique. Le chercheur l'entreprend armé d'un répertoire de connaissances mathématiques, didactiques, épistémologiques, historiques, psychologiques, pédagogiques etc. dont il fera usage au moment opportun.

Nous allons indiquer très superficiellement le cheminement qui a été suivi dans l'exemple choisi. Il commence par l'étude mathématique de la notion visée, se poursuit par le regroupement des questions et des conditions qu'il convient de prendre en considération pour constituer des «univers»³ présentant une cohésion problématique raisonnable. Ces «univers» permettent ensuite d'identifier un petit nombre de situations suffisamment fondamentales qui peuvent s'articuler en processus d'ensemble. Les études locales peuvent alors commencer sous les

¹ Ce paragraphe reprend sous une forme nouvelle des idées déjà exprimées différemment dans l'article « Le poids d'un récipient. Etude des problèmes de mesurage en CM » Guy et Nadine BROUSSEAU dans Grand N N° 50 1991-1992

² Voir «la mesure au CM1 » de Nadine BROUSSEAU, IREM de Bordeaux 1987

³ Le terme d'« univers » doit être compris comme une simple métaphore précédant une modélisation plus précise en terme de milieux. Les tentatives de définitions du concept de milieu interdisent pour l'instant son usage naïf. Il en est de même pour la concept de « cadre », qui de plus évoque des isomorphismes plus forts.

conditions du maintien des divers équilibres - par exemple entre la quantité de concepts nouveaux intelligibles construits et la fréquence et la variété de leur utilisation dans le champ des exercices et des leçons ménagés dans le cursus - de façon à rendre les notions visées « apprenables » par les élèves. Il est utile de préciser qu'il faut distinguer pour une même notion mathématique son usage en tant que moyen, sa reconnaissance et son expression et enfin son étude et celle de la place qu'elle tient en tant que savoir. Les situations qui permettent ces distinctions sont différentes et le plus souvent ne se présentent pas en même temps dans une même activité et ne sont pas l'œuvre des mêmes institutions. Nous considérerons toutefois qu'elles appartiennent au même univers si la situation d'action (le milieu « objectif ») de ces différentes situations est le même, donc si elles se réfèrent à la même situation d'action.

1. Définition mathématique, les trois « univers »

Partons d'une définition assez répandue de la notion de mesure, un peu simple, mais qui dérive assez convenablement de la théorie moderne de la mesure.

Une mesure (il en existe plusieurs sortes) est une application d'un ensemble muni d'une structure adéquate (espace mesurable) dans l'ensemble des réels positifs, cette application ayant des propriétés particulières.

i) Un ensemble est mesurable s'il est composé de parties qui sont elles-mêmes des ensembles, (y compris l'ensemble vide) et s'il est tel qu'on peut trouver toujours en lui les intersections et les réunions d'un nombre quelconque de ses parties

ii) Une application mesure, attribuée à chaque partie de cet ensemble mesurable un (unique) nombre réel positif.

iii) Cette application est une mesure si, et seulement si, elle est de plus additive : le nombre associé à la réunion de deux parties disjointes quelconques est la somme des nombres associés à chacune des parties (et si la mesure de l'ensemble vide est zéro).

La question de savoir ce qui se passe lorsqu'on considère la réunion ou l'intersection d'une infinité de parties est aujourd'hui tout à fait fondamentale, mais il n'est pas nécessaire de l'envisager pour notre propos : la mesure dans la scolarité obligatoire. Ce choix est toutefois une hypothèse didactique (presque évidente) qui pourrait se discuter.

Retenons que pour concevoir une mesure il faut au moins trois notions : l'une pour décrire la structure de la chose à mesurer, une pour décrire la structure numérique qui mesure la chose, une qui décrit le moyen de faire correspondre un objet à mesurer et le nombre qui la mesure.

Les trois notions de base ne sont pas indépendantes : elles sont les composantes nécessaires aux situations d'action spécifiques de la mesure. Par contre leurs études constituent des secteurs de savoir différents et relèvent de problématiques distinctes. L'histoire montre comment il a fallu séparer progressivement et perfectionner alternativement ou conjointement l'une ou l'autre de ces notions.

Chacune de ces notions a son *univers* propre, c'est à dire ses structures, son champ de problèmes théoriques ou d'application.

▪ **L'univers des objets mathématiques mesurables (1)**

La définition des propriétés des *espaces mesurables* est apparue tardivement et aujourd'hui encore la langue vernaculaire ne distingue pas toujours clairement un objet et sa mesure (exemple : la longueur et la largeur d'un rectangle sont des segments, la mesure de la longueur s'appelle aussi longueur). Mais elle est indispensable pour passer de l'univers des exemples de mesure à une définition catégorique de cette notion. C'est un autre postulat de la théorie des situations : les éléments fondamentaux d'une notion sont présents, au moins implicitement dans les situations qui la caractérisent, même si les acteurs de la situation n'en prennent pas conscience (ou plutôt connaissance).

▪ **L'univers des procédés de définition de l'application-mesure (2)**

Les moyens effectifs par lesquels les fonctions mesures peuvent attribuer une valeur numérique à un objet sont par exemple les méthodes d'intégration. La théorie de l'intégration et celle de la mesure sont deux exposés d'une même théorie mathématique.

▪ **L'univers de la structure numérique d'arrivée (3)**

Du côté des ensembles des nombres, la construction des fractions a répondu au besoin de disposer d'un ensemble plus dense que les naturels pour «mesurer» des grandeurs non discrètes, et la construction des réels, au besoin de disposer de nombres pour «mesurer» les longueurs ou les aires obtenues par les méthodes d'intégration.

Nous allons prendre cette «définition» mathématique comme modèle de ce qu'est une mesure. Elle est définie par un triplet : une «chose à mesurer», un «moyen de mise en correspondance», et une «structure numérique positive» exprimant la mesure. Il s'agit de trouver les fonctions de cette pratique ou de cette connaissance et de les représenter par des «jeux formels» qui nous permettront d'identifier ou de concevoir les apprentissages qui nous intéressent. Par contre, nous n'allons pas nous limiter à ce que les mathématiciens assignent

actuellement comme champ à cette notion et nous allons explorer des domaines plus larges, qui permettraient de discuter ce point de vue mathématique et peut être de l'expliquer.

2. Un exemple : la mesure des ensembles finis

Le choix de l'ensemble numérique d'arrivée est crucial pour la détermination de ce que l'on pourra mesurer ou non. Ainsi l'utilisation des fractions ne permet pas d'exprimer en même temps la longueur du côté d'un carré et celle de sa diagonale.

La mesure la plus simple est celle d'un ensemble fini. A chacune de ses parties, cette mesure (ou dénombrement) fait correspondre, un **nombre naturel**, celui de ses éléments. Le procédé effectif de correspondance est celui du comptage ou de la correspondance terme à terme avec un ensemble de cardinal connu. Le procédé de comptage ne dépend pas en théorie des objets comptés ou de leur nombre, mais la réalisation effective si, et il existe de ce fait un très grand nombre de techniques de comptage. La situation «fondamentale» de l'apprentissage du dénombrement est bien connue.⁴

La situation fondamentale du dénombrement.

Considérons la situation suivante qui peut être traduite en instructions adaptées aux enfants de 5 à 6 ans :

"Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher des pinceaux dans la pièce voisine. Quand tu reviendras tu devras en mettre un seul dans chaque pot. Et il faudra qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Tu devras porter tous les pinceaux en un seul coup, si tu te trompes, tu devras reprendre tous les pinceaux, tu les ramèneras là-bas et reviendras pour essayer à nouveau.

Tu sauras compter quand tu pourras faire ça, même quand il y a beaucoup de pots".

L'enfant saura aussi « nombrer » autrement dit, dire le nom des nombres, lorsqu'il pourra jouer les deux rôles suivants : *demander* (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement *fournir* à la demande la quantité voulue.

Il saura compter quand il sera capable de détecter et d'argumenter sur une erreur commise à son insu. Il connaîtra « le nombre naturel » beaucoup plus tard.

⁴ « les mathématiques à l'école » G. BROUSSEAU Bulletin de l'APMEP n° 400)

L'univers de l'ensemble des objets mathématiques mesurables par les naturels, celui des ensembles finis, est lui aussi bien connu. Sa structure est celle d'une algèbre de Boole. Mais il faut bien distinguer l'identification, la désignation, et l'énumération des ensembles, du comptage et de la récitation de la suite des nombres. L'énumération est l'instrument de l'exploration des collections, ce qui permet le dénombrement lui-même. Ce concepts n'avait pas d'existence culturelle jusqu'à ce que la théorie des situations ne la révèle, comme le montre l'atelier de M. BRIAND⁵

Cette situation possède des propriétés qui lui donnent un caractère fondamental.

i) Elle permet de définir cette mesure comme connaissance, c'est à dire comme moyen de solution de cette situation.

ii) Les concepts de nombre ou de comptage n'apparaissent pas dans l'énoncé de cette situation qui peut être comprise par un élève ne sachant pas compter

iii) Elle permet de développer progressivement la connaissance des nombres comme réponse «spontanée» et évolutive à une suite de situations engendrées par la première, par des variantes reconnues (entre autres, augmentation du nombre d'objets, communication, écriture de nombres plus grands, perfectionnement des méthodes d'énumération)

iv) Les variantes et les variables «didactiques» peuvent être facilement envisagées «dialectiquement» par les élèves eux-mêmes.

v) Toutes les situations de dénombrement se déduisent de son schéma par simple modification des éléments terminaux et par des variables cognitives.

Il se présente alors une conjecture intéressante qui va nous guider dans notre quête : puisque le comptage est une forme de mesurage, la situation fondamentale du comptage ne pourrait-elle pas être un cas particulier d'une (hypothétique) situation fondamentale définissant une mesure en général ?

3. L'univers des objets et des usages (4)

Un oiseau n'est pas mesurable, mais on peut le suspendre à un peson ou étaler ses ailes pour les placer devant une règle graduée – la technique pour ne pas estropier l'animal ne permet pas n'importe quel résultat. Nous observons ici toute une chaîne de concepts - de l'oiseau, à son

⁵ « L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement de la transposition didactique » Joël Briand (thèse, Université Bordeaux 1)

poids ou à son envergure, puis à l'élongation du peson ou au segment déterminé par l'envergure sur la règle - qui s'interposent entre l'oiseau et les nombres finalement retenus, 20 centimètres ou quinze grammes. Chaque concept relève d'un *univers* différent. Tous les objets matériels sont susceptibles de donner lieu à mesure suivant les usages dans lesquels ils entrent. Ces usages sont essentiels pour déterminer la finalité la nature et les modalités des mesures.

Considérons des situations où les comparaisons permettent seulement des échanges (dans une même classe) mais n'aboutissent même pas à un ordre. Tous les objets qui peuvent se substituer dans un usage déterminé deviennent *équivalents* d'un certain point de vue. Par exemple, je suis le propriétaire de l'oiseau et je cherche à l'échanger, mais pas contre de l'argent. Tous les objets avec lesquels je peux l'échanger constituent une classe d'équivalence déterminée par la pratique sociale du troc. Le « prix » de cet oiseau est une classe d'objets. La modélisation de ces usages en termes de situations permet de préciser les classes d'équivalences qu'elles déterminent. La classe des objets remplaçables les uns par les autres dans une situation donnée deviendra celle des objets qui se voient attribuer la même valeur dans la mesure correspondante. S'il n'existait pas de situation qui permette de substituer une classe à une autre, notre triplet comprendrait l'ensemble des objets équivalents et leur application sur une même classe, ou sur son nom. Il s'agirait d'une **situation de tri** (suivant une classification donnée) ou de **classification** (s'il s'agit de créer la classification).

Considérons maintenant une classification telle que deux classes différentes d'objets peuvent être distinguées et *ordonnées*. Il est nécessaire pour cela qu'il existe au moins une **situation de comparaison** effective où ces classes d'objets entrent ensemble. Supposons de plus qu'il n'est pas possible de déterminer l'objet qui correspond à la somme de deux valeurs de mesure par une opération sur les objets eux-mêmes (comme par exemple pour les températures). La connaissance associée à ce type de situation est alors celle d'une « **grandeur** », au sens vulgaire de chose susceptible de devenir plus grande ou plus petite, mais cette « grandeur » bien qu'exprimée par des nombres (des rangs) n'est pas mesurable.

Dans un troc chaque partie a une préférence pour un des objets échangés. L'équivalence est une hypothèse sociale qui explique après coup pourquoi l'échange a eu lieu. Tout le commerce vit sur ce jeu entre la fiction d'une équivalence globale et la réalité d'une préférence locale.

Pour qu'une grandeur soit mesurable, il est nécessaire en plus qu'une certaine opération sur les objets (ou classes d'objets) qu'elle mesure corresponde à l'addition des mesures : mettre

les segments bout à bout et alignés pour obtenir un segment somme, par exemple. C'est à cette dernière situation que nous réserverons le nom de **situation de mesure**.

Dès lors que je constitue la classe des objets que je peux échanger contre cet oiseau par leur prix commun, j'entre dans une situation de mesure.

En conclusion, l'univers des objets matériels peut ainsi être structuré en classes par des situations. Ces classes elles-mêmes peuvent être regroupées par d'autres situations en variables : nominales (simplement distinctes), ordinales, d'échelles (les différences de rang peuvent être additionnées) ou en mesures (à tout couple de classes on peut assigner une classe somme, l'association présentant les propriétés de l'addition).

Remarquons que nous conservons néanmoins notre triplet de départ : structuration de l'ensemble de départ, procédé d'attribution (à une classe à un rang) et structure d'arrivée (ensemble amorphe, ensemble ordonné). Aujourd'hui, l'ensemble des objets matériels ou théoriques susceptibles d'être mesurés ne cesse de s'agrandir ainsi que les méthodes et que les formes de mesure.

4. L'univers des grandeurs et des mesures analogiques (5)

Ne pourrait-on pas faire l'économie de cette structure numérique d'arrivée ainsi que celle de l'application ? Quelle serait « la » situation fondamentale de ce type d'étude ?

L'envergure ou le poids d'un oiseau ne sont plus des objets matériels. Quelles situations peuvent définir ces concepts ?

Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Appliquons la méthode utilisée ci-dessus : les choses qui peuvent se remplacer dans une même situation sont d'un certain point de vue équivalentes. Par exemple ce qui peut se comparer à l'aide des mêmes instruments. Les deux actions (mettre sur le peson et plaquer contre une règle), aboutissent à un même univers, celui des segments de droites. Mais si on examine l'effet des instruments, les classes d'objets obtenus seront différentes : la taille et le poids ne rangent pas les objets de la même façon. Les « grandeurs » sont donc aussi a priori différentes. Remarquons qu'ici encore pour déterminer une mesure, une situation doit associer la somme à la comparaison. A chaque grandeur sont associées des méthodes spécifiques pour effectuer la somme. La somme de deux vitesses ne se reconnaît pas facilement, celle des probabilités de deux événements non plus.

Il est possible de différencier ainsi les types de grandeurs par les situations (physiques, sociales commerciales etc. où elles s'utilisent). L'usage d'une balance au lieu d'un peson peut paraître définir la même grandeur dans certaines circonstances, mais il en existe qui différencient le poids de la masse.

Remarquons qu'il est nécessaire d'avoir bien en tête le concept d'envergure et probablement celui de segment pour savoir quoi faire avec l'oiseau, mais cela ne permet pas de conclure qu'il faut « apprendre » l'un avant l'autre. Les situations de comparaison permettront peut être de provoquer de façon dialectique l'émergence conjointe des situations et des connaissances nécessaires. Par exemple, une des situations de base de la mesure du hasard a sans doute été la notion d'équiprobabilité.

La définition des grandeurs par des classes d'équivalences d'objets donne l'idée qu'il devrait exister une mesure intrinsèque de ces objets, c'est à dire indépendante de la façon dont elle s'exprime numériquement. Un segment aurait ainsi une longueur quelle que soit l'unité utilisée pour exprimer sa mesure. Cette conception conduit à des raisonnements intuitifs, assez souvent économiques et féconds mais elle s'est heurtée à des difficultés qui ont conduit à l'abandonner presque partout dans la formalisation scientifique. En mathématique, au contraire, on ne s'est intéressé bientôt qu'aux procédés indépendants de l'expression numérique des mesure, et donc on a fait disparaître l'usage des unités.

L'idée de représenter une grandeur par une autre vient en partie de cette conception des grandeurs intrinsèques et de la possibilité très commune de mesurer une grandeur par l'intermédiaire d'une autre. Cette possibilité s'enracine dans les dispositifs matériels eux-mêmes comme dans le peson. Un tel système constitue alors une mesure analogique. Le triplet fondamental n'a pas disparu : l'un des espaces mesurables sert d'ensemble de mesure à l'autre et le procédé de mise en correspondance assure le rôle de fonction mesure. Cette possibilité a été utilisée pour essayer de tourner la nécessité d'expressions numériques des mesures.

L'exploration des propriétés des espaces mesurables est indispensable. Celle des transformations définies sur les objets d'études qui laissent invariantes certaines mesures (par exemple l'étude des isométries en géométrie) est possible sans que jamais ces mesures soient exprimées numériquement. Cette approche a ouvert de très riches champs d'études mais elle a montré très vite ses limites. Notamment avec les problèmes de quadrature puis d'intégration. Depuis l'époque de LEBESGUE, l'étude directe des grandeurs est sortie du domaine des mathématiques.

Concrètement, diverses situations fondamentales de divers mesurages, calquées sur celle donnée plus haut pour les nombres naturels ont été expérimentées avec un certain succès (pour les mesures de longueur, d'aire ou d'angle par exemple)⁶. La genèse de la notion de fréquence et de probabilité a fait l'objet d'études plus originales⁷.

5. L'univers des unités et des changements d'unités (6)

La nécessité de recourir à une mesure numérique viendra donc des avantages matériels qu'elle procure ou du rejet de la possibilité d'utiliser une mesure analogique. Le partage d'un segment en sept segments égaux est possible (par exemple avec un bon réseau de parallèles équidistantes), mais le partage géométrique d'un cône (un tas de grains) en sept cônes égaux présente quelques difficultés !

Formellement, dans cet univers, **la mesure dite parfois concrète d'un objet lui fait correspondre un couple formé d'un nombre et d'une unité**. Les problèmes qui vont se poser dans cet univers seront des problèmes de choix et de changement d'unités ou des problèmes de correspondance entre des mesures de différentes variables ou grandeurs (équations aux dimensions). En ce sens tout système de numération est déjà un système de mesure d'un cardinal à l'aide d'une unité auxiliaire (ou de plusieurs).

Nous trouverons ici aussi tous les problèmes liés aux systèmes de mesure et en particulier au système métrique, avec à l'opposé les fractions et leur système complet d'unités intermédiaires.

Nous y trouverons aussi l'étude des divers procédés de construction des mesures, les mesures produits (qui correspondent à des intégrales multiples) comme l'aire, le volume... ou les mesures dérivées (vitesse, densité, débit, etc.).

Nous y trouverons, bien qu'un peu à part, les « **grandeurs scalaires** » ou à condition d'échelle : pourcentage, fréquence, probabilité, qui apparemment n'ont pas d'unité mais ou

⁶ Articles de A. BESSOT, M. ARTIGUE, M.J. PERRIN, M.H. SALIN et René BERTHELOT

⁷ Statistiques et probabilités au CM. C.R. de la *** rencontre de la CIEAEM à Bordeaux. (1974)

justement l'unité est « le tout ». Les grandeurs « physiques » et les « grandeurs scalaires » s'opposent au moins autant par les conceptions heuristiques qu'elles activent que par leur nature.

Dans cet univers encore, nous trouverons des problèmes liés à des conceptions heuristiques de la mesure : les unes correspondent à l'idée de mesurer quelque chose de grand avec quelque chose de petit, avec toutes les méthodes pour se ramener à ce schéma. les autres à l'idée de mesurer quelque chose avec une autre chose à peu près aussi grande par commensuration (exemples de situations : la mesure de l'épaisseur des feuilles de papier dans N.& G. BROUSSEAU ⁸).

Les situations fondamentales pour cet univers sont représentées par celle qui est utilisée par Nadine BROUSSEAU ⁹ au début du processus. Les élèves doivent communiquer des renseignements pour faire équilibrer exactement divers objets par des quantités de sable convenables en les plaçant sur les plateaux d'une balance ROBERVAL. Cette leçon due à François COLMEZ conduit les élèves à utiliser divers objets unités « identiques » disponibles en grand nombre (des clous, des plaquettes...) mais qui ne sont pas des multiples simples les unes des autres.

6. L'univers du mesurage, métrologie, erreurs et approximations (7)

A un objet réel, la réalisation effective d'une mesure ne fait correspondre en fait un nombre déterminé que si les conventions sociales le déclarent. Dans des situations où cette convention n'existe **pas l'image d'un objet est en fait un intervalle** (erreur, tolérance, intervalle de confiance), **ou plus précisément une distribution** (de probabilité par exemple). Nous avons donc un triplet fondamental différent.

Ce modèle mathématique est plus complexe mais plus « réaliste » que les autres. L'univers qui lui est associé est celui de l'art du mesurage et de toutes les méthodes « pratiques » inventées pour mesurer commodément, et son étude est la métrologie, et celle des arts et des métiers. L'adaptation de la taille des unités aux caractéristiques de l'homme et de ses tâches, conduit à l'étude des propriétés ergonomiques des uns et des autres. Sous quelle forme se présentent les unités effectives ? les étalons ?

La situation du verre d'eau a montré aux élèves que pour gagner en « vérité », pour dire des choses plus indiscutables, il faut souvent qu'elles soient moins précises.

⁸ Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, N.& G. BROUSSEAU, IREM de BORDEAUX (1986)

⁹ « La mesure au CM1 » ouvrage cité

7. L'univers de la taille des mesures, de leur rareté et des ordres de grandeurs (8)

Mesurer un objet dans un des sens introduits ci-dessus, (un nombre, un nombre et une unité, un nombre et un intervalle de confiance ou une tolérance, ou une « erreur type » etc.) épuise-t-il complètement la question de savoir s'il est grand ou petit ? peut être que oui, si le destinataire possède une culture et des informations suffisante, mais en général non.

Par exemple

- Mon éléphant mesure deux mètres au garrot
- c'est un petit éléphant !
- mais il n'a qu'un ans
- alors c'est un jeune géant car 95% des éléphants de cet âge sont plus petits.

La question peut être cruciale lorsqu'il s'agit d'interpréter des mesures qui sont des indices importants (« votre vitesse de sédimentation est de 75 », est-ce que ça signifie que je suis malade ? ma culture dans ce domaine est nulle ! quelle vitesse de sédimentation pour les gens bien portants ? la moyenne risque de ne pas suffire quelle mesure pour l'écart ? seulement tant pour cent ont une vitesse supérieure à tant. Votre vitesse est trop élevée, il est plus vraisemblable que vous avez une inflammation par exemple peut être un rhumatisme articulaire). Il ne s'agit pas de donner l'intervalle de confiance d'une mesure, mais de comparer une valeur à une distribution qui indique avec quelles fréquence on trouve des valeurs supérieures. Ce système permet de comparer la taille d'une souris de 12 cm au garrot (énorme) avec celle de mon éléphant (moins « grand » parce que moins extraordinaire).

Mesurer un objet en mesurant son expression, sa mesure : nombre de chiffres pour les naturels (avec les décimaux le nombre de chiffres significatifs doit mesurer la qualité de la mesure) l'échelle des ordres de grandeur...Linéariser pour mesurer : les puissances sonores...

8. En conclusion

Il est clair que chaque univers est caractérisé par des préoccupations et des problèmes différents. Pour les identifier, il a fallu évoquer des situations différentes bien qu'elles dérivent toutes de même schéma général de la mesure. Il a fallu dire en quoi le jeu de l'homme à l'éléphant est différent de celui des enfants avec leurs clous, ou de ceux avec leur double décimètre pour mesurer l'épaisseur d'une feuille de papier ?

Ce n'est pas la théorie des situations qui le dit, ce sont les mathématiques. La théorie est essentiellement un instrument de conversion des connaissances en situations sur lesquelles peuvent s'appuyer des raisonnements économiques et écologiques.

Il s'agit maintenant de les organiser en un processus didactique qui permette les apprentissages successifs. Cette question est évoquée dans le paragraphe suivant.

III. L'ENSEIGNEMENT « CLASSIQUE » DES GRANDEURS ET DES MESURES

1. Importance du système métrique

A la fin du XIX siècle l'enseignement de « l'arithmétique élémentaire » atteint en France une sorte de classicisme, une forme qui va être conservée presque immuable pendant plus d'un siècle. Les premières connaissances visées sont évidemment celle des nombres, naturels puis décimaux, et celles de leurs opérations (+, -, $\times$, / , la racine carrée fera une entrée furtive et une sortie rapide). Mais toute l'étude est axée sur la connaissance du système métrique, qui permet de préparer, d'appuyer, et d'illustrer merveilleusement l'étude de la numération décimale.

Dans les pays qui conservent les anciens systèmes non décimaux, l'étude des changements d'unités pour les grandeurs physiques ou économiques doit être repoussée après l'étude des opérations dans les naturels, et doit faire l'objet d'études répétées et spécifiques de chaque grandeur. Il est possible d'étudier les grandeurs non discrètes en même temps que les cardinaux mais avec seulement une seule unité, ce qui limite fortement l'éventail des mesures et des nombres que l'on peut considérer. Pour trouver un équivalent dans l'enseignement français, il faut considérer l'étude des mesures du temps. Le retard par rapport aux autres mesures est considérable.

Dans les pays qui ont adopté le système métrique au contraire, l'étude de la numération décimale peut s'accompagner de celle des différentes unités multiples de l'unité légale. Il y a des raisons politiques et historiques d'ailleurs pour que l'enseignement mette en évidence les avantages que lui procure l'usage du système métrique. De plus les conceptions psychologiques et didactiques de l'époque renforcent cette tendance. D'abord l'analogie est un (et même « le ») générateur indispensable des variétés de leçons et d'exercices relatifs à une même notion. Les enseignants utilisent systématiquement les analogies pour activer les mêmes explications, répéter les « mêmes » exercices, pour « renforcer » la signification des opérations et des termes. Ces dispositions s'appuient naturellement sur les formes vulgarisées des théories gestaltistes de la connaissance et sur les théories empiristes de l'apprentissage en cours à cette époque.

De plus la plupart des élèves étaient familiarisés avec toutes sortes de mesurages de différentes sortes de grandeurs familières à l'aide d'appareils de mesure « montrant » les propriétés fondamentales de la mesure. Il semblait même que la comparaison de deux valeurs de grandeurs « continues » comme les longueurs de deux baguettes ou la capacité de deux récipients, étaient plus « évidentes » et donc plus précocement apprises que les comparaisons de quantités discrètes...

Il n'est donc pas étonnant de trouver très tôt dans la scolarité l'étude concomitante de différentes mesures de grandeurs : prix, longueurs, masses, capacités en parallèle parfait avec l'étude des cardinaux, des rangs et des mesures discrètes. Par exemple, au cours préparatoire l'enseignant illustrera l'étude du nombre trois avec trois jetons, le dessin de trois oiseaux, en faisant frapper trois fois dans les mains, en faisant réaliser trois francs, en repérant le troisième, en mesurant trois centimètres etc. L'étude de la dizaine ne sera jamais très loin de l'usage du décimètre.

Cette disposition générale conduit à donner une grande importance au « système métrique » qui occupe environ 1/5 des leçons dans toute la scolarité primaire.

2. Stabilité des notions et des pratiques

A notre avis, l'étude systématique de « tous » les manuels de 1850 à 1970 pour les différents niveaux scolaire renforcerait les conjectures suivantes :

Les notions sont toutes introduites à partir des mêmes définitions mathématiques, empruntées à un « même » ouvrage « supérieur ». Ces ouvrages de référence se succèdent à intervalles très éloignés. Ils sont peu nombreux et très peu différents sur les questions d'étude du nombre et du mesurage, de sorte que l'organisation des notions n'évolue pratiquement pas pendant toute la période évoquée. L'ordre d'introduction et les regroupements de notions en leçons seront donc tout à fait similaires.

D'autre part l'organisation générale de l'étude des nombres et des grandeurs reste presque identique d'un niveau à un autre (et naturellement entre livres du maître et manuels des élèves). Ainsi le ratio de 1/5 n'évolue pas au cours de la scolarité « primaire » et il reste à peu près le même aussi dans les ouvrages destinés à ce qui correspondait à notre collège actuel. Il est vrai qu'alors, ces ouvrages déterminaient ce qui était considéré comme « la norme » de l'enseignement obligatoire des connaissances communes. Le tableau ci-après indique la répartition des pages entre les trois secteurs des mathématiques dans 9 manuels du XX^e siècle. Il illustre notre propos.

Année	Destination	Nbre Pages Nbre exerc.	Arithmétique	Système métrique	Géométrie	Observations Autres
1889	Livre du maître ¹⁰ Primaire et sup Chaumeil	154p 1000 pb	66,5 %	17,5 %	16 %	Compléments, racines, problèmes, Regles, déf. quest. Devoirs
	Alix Bazenant CM et Sup	184 p , 416 p avec sup	72,2 %	13,6 %	14,1 %	Même organisation
1921	Livre du maître Jacquemard	303 p 314p	92,6 %	7,4 %	0 %	Plus près d'un ouvrage de maths (Tombeck)
1923	Livre de l'élève CM et sup Brouet	91 p + dev 350 p avec suppléments	51,6 %	31,8 %	16,4 %	Même org. qu'en 1889
1923	Leçons et devoirs (Bresteau)	96 p + pb 254 p	43,75 %	23 %	33,3 %	Problèmes introductifs Plus de règles ni définitions
1945	Cours moyen Joly	305 317 p	81 %	13,5 %	5,5 %	Décompositions didactiques

Ces pourcentages peuvent être comparés à ceux qui ressortent de trois manuels pris après la réforme de 1970

1987	CM1 Eiler	191 p	50,6	25,3 %	24 %	Activités et rien
1995	Transmath Malaval 5 ^{ième}	256 p	43 % Numérique	0 %	57 % Géométrie	Soutien
1996	Delord Vinrich 5 ^{ième}	272 p	50 %	0 %	50 %	Luxuriance des contrats didactiques, bilans

3. Evolution des options didactiques et pédagogiques (Esquisse)

Pour avoir une idée de ce qu'était l'enseignement des grandeurs et de la mesure à cette époque il faut aussi examiner les options pédagogiques et didactiques.

Les leçons étaient organisées de manière assez différentes de ce qu'elles sont aujourd'hui. L'idée que les élèves avaient l'occasion de voir manipuler et de manipuler eux mêmes toutes

¹⁰ Il faut remarquer que si le livre contient plus d'informations que le livre de l'élèves il ne s'en distingue ni par le langage, ni par les conceptions, ni par la présentation didactique et pédagogique de sorte qu'il semble que le savoir des maîtres soit un simple complément en prolongement « naturel » des connaissances du primaire. Cette observation justifie la présence de ce type d'ouvrage dans le tableau.

sortes de mesurages (surtout à la campagne, milieu auquel appartenaient 80% de la population, conduisait à négliger en classe les réalisations effectives, difficiles à préparer, longues à effectuer, coûteuses en matériel scolaire, d'une efficacité incertaine etc. malgré les objurgations des mathématiciens et des inspecteurs qui recommandaient dès le début du siècle de multiplier les expériences en proposaient à cet effet des compendiums scolaires appropriés.

Parallèlement les restes des méthodes scolastiques conduisaient les enseignants à faire grand cas des formulations produites par les élèves. Autant que les notions introduites et leur usage, ils enseignaient un discours sur ces notions, par des jeux de questions et de réponses.

Jusqu'à la fin du XIXe siècle la forme standard des cours prend la forme d'une suite de questions et de réponses du genre :

Q : « qu'appelle-t-on grandeur ? »

R : « on appelle grandeur ou quantité tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme une somme d'argent, un nombre d'arbre, la hauteur d'un mur »

Q : « qu'est que l'unité ? »

R : « l'unité est une quantité connue qui sert à mesurer ou à évaluer toutes les quantités de la même espèce qu'elle »

Q : « Qu'est-ce qu'un nombre ? »

R : « un nombre est le résultat obtenu en comparant une quantité à son unité, il est concret si... »

Cette méthode détermine le savoir par ce que l'élève doit dire « par cœur » en réponse à une question conventionnelle précise. Même l'exécution des algorithmes fait parfois l'objet d'une description verbale complète : la règle. (cf H. Neveu, Arithmétique, Masson 1921)

A la fin du XIXe siècle une structure de leçon aux activités beaucoup plus variées tend à se substituer à la précédente. Nous en donnons le détail car il est intéressant d'observer le type et la quantité de travail effectué par l'élève. Ces paramètres interviennent autant que l'organisation mathématique et épistémologique des connaissances.

	Travail	Durée
a	Correction du devoir du soir au tableau (par le maître, ou par un élève)	0 05
b	Calcul mental (procédé La Martinière), ou interrogation orale	0 05
c	Cours : Règle et définition, exemple	0 10
d	Questions orales pour vérifier la compréhension du texte	0 05
e	Exercices sur l'ardoise ou au brouillon,	0 05
f	Correction des exercices au tableau par un(e) élève ou par le maître	0 05
g	Problème :	0 20 :
	lecture et explication de l'énoncé	0 03
	résolution individuelle	0 06
	présentation de la solution sur le cahier du jour	0 04
	correction collective au tableau	0 05
	copie des corrections par les élèves. (pendant que le professeur note les cahiers du jour	0 02
h	le soir donnée des devoirs : exercices et petit problème	

Cette structure se modifie suivant quelques modalités didactiques :

- i) L'enseignement d'une notion nouvelle comprenait essentiellement les parties: a, b, c, d, e, f, g ;
- ii) L'enseignement d'un algorithme : a, c, b, d, e, f, g ;
- iii) Une révision : a, b, e, f, d, c, g ;
- iv) L'étude d'une application : a, c, g, d, b, e, f ;

Ainsi en un mois, l'élève faisait environ 75 exercices de calcul mental , 90 exercices écrits (dont 30 à la maison) et 30 problèmes « assez fermés (dont 15 à la maison et 1 sur le « cahier mensuel »).

Il répondait environ à 7 questions orales.

Les manipulations effectives autres que les calculs, étaient le plus souvent enfermées dans la phase « cours » du professeur. La participation des élèves à ces manipulations était nécessairement extrêmement réduites. Elles n'étaient pas un but mais un moyen supposé faciliter la compréhension et l'apprentissage. Mais ces moyens paraissaient bien douteux et bien coûteux en efforts matériel et en temps devant une « bonne » formulation, explication, répétition des calculs etc.

Par la suite, d'autres formules sont apparues sous la poussée des mouvements pédagogiques. Leur étude est rendue difficile par la variété (théorique au moins) des pratiques et par toute une série d'objurgations parfois contradictoires :

Les professeurs doivent faire des leçons personnelles (ne pas reproduire) originales (innovation), ne pas utiliser le manuel (sinon pour les exercices), mais échanger leurs méthodes avec leurs

collègues (ce qui augmente la dispersion), faire travailler les enfants sur des fiches etc., avec du matériel...

Les élèves doivent comprendre plutôt qu'apprendre (par les procédés répétitifs) mais les élèves doivent être actifs et le professeur parler peu. Il doit « exploiter » les événements que ses dispositifs font naître plutôt que conduire les élèves à sa guise... Mais ils doivent évaluer tout ce qui a été appris (sans qu'on sache toujours ce qu'il faut faire en cas de difficultés excessives) et rester modeste, n'enseigner que ce qui peut être appris...

Toutes ces mesures augmentent l'instabilité du déroulement des leçons. Elles tendent à dissimuler leurs caractères communs effectifs aux yeux même des professeurs, et ceci au bénéfice de caractères qui apparaissent plus idéologiques que scientifiques et pratiques.

4. L'évolution de la structure des leçons sur la mesure des grandeurs

Au début du siècle, le traitement des grandeurs dans les manuels est purement descriptif et verbal, mais il s'appuie sur des pratiques sociales très répandues et familières. Le texte des manuels évoque donc essentiellement :

a) un exposé de savoirs (à apprendre par cœur) par le professeur, essentiellement

i) une ou des techniques de mesurage. La variété des problèmes de métrologie liés aux mesurages effectifs, des techniques (double pesée), aux instruments (bascule, romaine, vernier...)

ii) la définition et l'usage des unités (pratiques, effectives réelles, légales etc.)

b) en ce qui concerne le travail de l'élève : des calculs

i) Dans le système métrique et les transformations d'unités,

ii) et sur quelques problèmes « spécifiques » qui permettaient d'explorer implicitement des propriétés de l'espace mesuré, quelques exemples « d'exercices propres aux grandeurs » et spécifiques (EPG) tels que :

- longueurs : intervalles et bornes, périmètres de surfaces, relation d'ordre, échelles,

- masses : tare et récipients, comparaisons transformations d'expressions numériques, changements d'unités à cause de la maniabilité d'une grande échelle d'ordres de grandeur → alliages

- capacités : relations avec les volumes (→ débits, robinets)

- aires, augmentation, intersections, faces de solides,

- temps : bases (→ vitesses, moyennes, trains,) etc.

La réforme de 1905 met l'accent sur l'expérience (laboratoires de mathématiques) surtout au sens de la *démonstration* par le professeur. Ces activités ne portent guère que sur les

EPG qu'elles ont à charge d'illustrer et de faire comprendre. En fait c'est surtout l'ostension qui est réalisée dans les classes et suggérée dans les manuels. Par la suite, l'activité des élèves est mise en avant, d'abord collective puis à partir des années 30, puis individuelle (manipulation de matériels : baguettes etc.). Mais la production de matériel individuel se heurte à des difficultés économiques et leur usage à des difficultés pédagogiques presque insurmontables. Echec des valises et des compendiums individuels de calcul. Remplacement par des fiches.

Les années 70 voient apparaître des leçons spécifiques sur les grandeurs considérées comme espaces mesurables : leçons pour poser les principaux problèmes des grandeurs (masses : François Colmez, angles : M. Artigue, M.H. Salin et R. Berthelot, aire : Régine Douady, Marie Jeanne Perrin, capacités et autres : N. et G. Brousseau... et bien d'autres). Mais ces propositions n'aboutissent semble-t-il qu'à une très faible diffusion.

5. Le rôle de l'analogie dans l'enseignement « classique » des grandeurs

Le caractère épistémologique et didactique à mes yeux le plus important est probablement le suivant : l'analogie était « naturelle » elle s'imposait, elle n'était pas mise en relief. Elle était supposée tellement « naturelle » que les professeurs exigeaient des élèves qu'ils les produisent comme une évidence. L'addition de deux longueurs ou l'addition de deux masses étaient définies de la même façon : c'est l'opération matérielle qui satisfait aux propriétés des nombres qui les mesurent. De ce fait les différences entre les opérations dans les grandeurs étaient complètement effacées. Les exemples abondent. Nous en donnons un plus bas.

IV. L'ENSEIGNEMENT « ACTUEL » DES GRANDEURS

1. Difficulté de la description

Il est difficile de donner une description de l'enseignement actuel des grandeurs, car après une disparition assez prononcée des leçons et des pratiques scolaires relatives aux grandeurs, disparition « naturelle » ou du moins explicable, des voix se sont élevées pour s'alarmer des difficultés des élèves à manier les mesure des grandeurs physiques, les changements d'unités, et de façon générale la conception des grandeurs même élémentaires.

Des travaux de recherche ont signalé les difficultés que les élèves ont à se « représenter » les relations non strictement numériques entre les nombres et insistent sur la nécessité de développer des « représentations » de différentes sortes, notamment « iconiques » pour toutes

sortes de notions mathématiques¹¹. Certains préconisent même d'en faire un enseignement spécifique, comme jadis on avait proposé un enseignement des méthodes du problem solving.

Alors on voit réapparaître en ce moment dans les programmes des objurgations à s'intéresser aux grandeurs et dans les manuels des exercices et quelques leçons qui reprennent les anciennes pratiques et conceptions didactiques. Quelles sont les chances de ces leçons de remplir assez facilement leur office ?

Ces mesures pourraient peut être suffire si la disparition des exercices sur les grandeurs et sur la mesure étaient l'effet de décisions didactiques malheureuses, d'une sorte d'inadvertance des mathématiciens, de bêtise des responsables, d'incompétence de la part des enseignants ou même de malveillance caractérisée de la part d'on ne sait quels novateurs. C'est d'ailleurs ce que répètent avec obstination certains refondateurs qui préfèrent trouver des boucs émissaires que chercher à comprendre la nature profonde des phénomènes didactiques. C'est ce que laisserait entendre implicitement l'abandon hédoniste et nostalgique au retour aux anciennes pratiques. J'ignore si la réintroduction forcenée de la géométrie du triangle à tous les niveaux aura les effets escomptés sur la valeur mathématique des élèves mais je crois qu'on ne pourra pas remplacer ce que l'environnement socio-culturel des siècles derniers donnait aux enseignements sur les grandeurs dans la scolarité obligatoire.

A mon avis pour espérer redresser la barre et tirer parti de l'évolution au lieu de la subir et de la combattre, il faut d'abord la comprendre, ensuite chercher à l'utiliser pour réaliser avec des moyens nouveaux et adaptés les objectifs que le passé nous commande de conserver ou que l'avenir nous demande de nous donner.

Une des plus grandes difficultés que ce genre d'étude présente aujourd'hui c'est d'abord le terrible rabattement de tous les problèmes de didactique sur des variables psychologiques, comme si toutes les causes des difficultés de l'enseignement étaient d'ordre psychologique, (difficultés des élèves ou des professeurs) et ensuite l'absorption des études de psychologie par la nébuleuse des « sciences cognitives » sous le manteau desquelles toutes les naïvetés épistémologiques, scientifiques et sociologiques sont permises et encouragées, avec des effets destructeurs sur les pratiques sociales autour de l'enseignement et sur les recherches authentiques.

Dans le cadre de cette communication, il ne m'est pas possible d'aller plus avant dans l'étude, je me contenterai donc de me livrer à quelques propositions. Mon but est plus de vous

¹¹ Les deux volumes du numéro 17 de « the Journal of Mathematical Behavior », donnent un aperçu assez étendu de ces travaux, Gerald Goldin & Claude Janvier guest editors, Ablex Publishing Corporation Stamford Connecticut 1998

encourager à entreprendre des recherches sur ces propositions que de vous convaincre prématurément et indûment de leur validité.

2. Quelques conjectures

Voici quelques conjectures :

- a) l'enseignement rampant et précoce de l'algèbre est inéluctable avec des professeurs qui ne connaissent que les mathématiques didactiques des mathématiciens actuels et pas de didactique et qui restent entièrement soumis à leurs opinions spontanées et à leurs modes ;
- b) la perte de pratique et de motivation effective (culturelle) au calcul numérique humain, écrit ou mental est la conséquence inéluctable du développement des calculettes ;
- c) l'usage généralisé des affichages numériques fait disparaître la pratique des relations topologiques au profit des numériques ce qui a des conséquences importantes et négatives sur l'apprentissage et la connaissance de l'analyse et de la topologie ;
- d) la disparition de la vigilance scolaire sur les concepts mathématiques de base, conjuguée avec des injonctions pédagogiques peu soucieuses de la qualité objective de la pensée et de son expression chez les élèves, laisse la porte ouverte aux usages populaires les plus confus.

3. Phénomènes

L'introduction du traitement automatique de l'information et du calcul, et le développement de l'algèbre au sens large ont profondément modifié les pratiques mathématiques de toute la société. Ils devraient constituer une partie essentielle des mathématiques de la scolarité obligatoire. Mais l'influence de cette évolution sur l'enseignement dans la scolarité obligatoire n'est ni maîtrisée, ni même conçue de façon rationnelle: Seule son importance est reconnue.

Mais des connaissances mathématiques spécifiques, y compris certaines qui sont sorties des préoccupations actuelles des mathématiciens, restent indispensables au développement et à la formation des élèves, notamment ceux de la scolarité obligatoire. Elles forment les « mathématiques didactiques ». Leur contenu et leur signification doivent être l'objet d'études et de négociations culturelles et sociales appuyées sur une connaissance scientifique du fonctionnement des systèmes didactiques. En particulier une partie de l'étude des grandeurs et de leur mesure ne peut pas être pratiquement exclue de l'école primaire sous prétexte que cette étude ne fait plus partie des mathématiques actuelles. Le renvoi de leur étude aux autres disciplines pourrait être souhaité mais il se heurte à des difficultés didactiques bien plus grandes. Le point de départ se trouve dans les programmes de mathématiques eux-mêmes.

Pour la société, l'étude des mathématiques dans la scolarité obligatoire reste en bonne partie celle de « la grandeur ».

Quelques mises au point dont voici l'inventaire seraient suffisantes et éviteraient de rompre une définition multimillénaire.

- Distinction entre la grandeur (les structures) et les grandeurs (physiques, économiques, etc.)
- Intégration de la grandeurs des grandeurs (ordres de grandeur, rareté dans une distribution...)
- Intégration de la grandeur discrète : « cardinal d'un ensemble » *argumentation*
- Intégration des grandeurs ordonnées non mesurables : étude de leurs structures
- Intégration des « grandeurs » discrètes finies : probabilités, validité (logiques modales)
- Intégration de la classification et des hiérarchies non ordonnées (logique booléenne)

On peut y gagner beaucoup de clarification dans les rapports avec le public.

Le partage entre :

- l'étude mathématique : celle des structures de départ et d'arrivée (divers espaces, intégration, structures numériques et autres,
- la conception des grandeurs pertinentes à une étude donnée,
- et la métrologie (méthodes de mesurage, systèmes d'unités)

est affaire d'histoire des sciences (la mesure d'Hausdorff et son application aux fractals ne fait pas encore partie de la physique par ex.).

Mais dans la scolarité obligatoire les professeurs de mathématiques ne peuvent pas s'aligner sur les pratiques des mathématiciens.

Le plus important serait donc l'étude à moyen terme d'un programme de « mathématiques didactiques » prenant en compte à la fois les programmes de l'école primaire et leurs « conséquences » aux niveaux supérieurs – et pas seulement l'inverse (comme s'il suffisait de savoir pour pouvoir...) envisagé dans la perspective d'une mise en œuvre progressive et concertée. Le plus urgent serait de commencer les études nécessaires et la mise en œuvre d'un véritable programme de recherches en didactique des mathématiques.

4. Obstacles (et quelques vaticinations)

L'idéologie de la refondation totale de la société et de la culture par le moyen de l'école est une illusion totale et une utopie dangereuse. Le négationnisme à l'égard de la transposition et des problèmes de didactique aussi.

L'influence des dérives « naturelles », en tout cas extrascolaires, dans les usages des mathématiques est devenue aussi importante que celle de la transposition volontaire.

L'acceptation de ce compromis transpositif est probablement impossible sans un consentement de la communauté des mathématiciens et un tel consentement paraît impossible à obtenir dans les conditions actuelles.

L'idée que puisqu'il existe une culture littéraire et une culture scientifique, il existerait des élèves à l'esprit scientifique et des élèves « à l'esprit littéraire » est une « foutaise socio-médiatique », une de ces idées reçues sans discussion comme des évidences par des intellectuels peu soucieux de précision hors de leur domaine. Dans la grande majorité de la population les deux formes de connaissances sont fortement corrélées. La corrélation ne devient négative que par l'effet des formes d'examens utilisés dans les sélections.

Sur un échantillon de plus de 5000 titulaires de diverses licences candidats à l'IUFM, j'ai observé une très forte corrélation entre les résultats en français et en mathématiques.

Par contre en étudiant les résultats aux mêmes épreuves, mais seulement sur les quelque 400 élèves retenus, j'ai observé une bonne corrélation négative. C'est sur la base de cette corrélation que les recrutés fondent leur opinion au sujet de soi disant littéraires et scientifiques, et qu'ils l'imposent par leur influence à toute la société. Or il ne s'agit que d'un effet mécanique du mode de détermination des reçus. Considérons que le nuage des élèves placés dans le plan cartésien suivant leurs notes en français et en mathématiques a en gros la forme d'une ellipse allongée, la note décisive est obtenue en faisant la somme des deux notes. La droite qui discrimine les reçus et les collés est donc parallèle à la deuxième bissectrice, et elle découpe dans ce nuage une lunule allongée le long de cette droite, la corrélation négative est d'autant plus forte que la sélection est plus sévère.

Si on recrutait les élèves qui ont une note supérieure à un seuil donné, indépendamment, dans chaque discipline, on supprimerait cet effet imbécile.

Qu'en est-il pour les illettrés ? Mon analyse ne fonctionne pas pour eux. Il y a même des raisons de penser que suivant la cause de l'illettrisme, le rapport entre les compétences linguistiques et les compétences mathématiques peut varier profondément.

Ce qui s'est produit depuis les années 70 : les structures d'abord puis la géométrie ont absorbé des durées d'enseignement et des ressources didactiques considérables au détriment de la connaissance des grandeurs.

A l'école primaire par exemple, le professeur doit enseigner des sujets qui sont indispensables à la formation des élèves et des citoyens, mais qui sortis du champ des préoccupations des mathématiques sans pour autant rentrer dans celle des autres disciplines (pour autant qu'elles soient représentées), et même si elles le sont elles ne se chargent plus de leur partie mathématique.

V. SUGGESTIONS : L'ANALOGIQUE ET LE NUMERIQUE

1. Conditions

L'histoire ne revient pas en arrière. Il est donc inutile de proposer le retour de l'enseignement des grandeurs tel qu'il a pu se donner depuis un siècle et demi. On ne mettra plus sous les yeux et dans la main des enfants la pesée de chaque sac de blé, au pied des batteuses fixes, avec des bascules au mécanisme apparent et avec des masses marquées. Ils n'auront plus besoin de rechercher « continûment » l'équilibre en changeant au besoin de levier et d'échelle de déplacement. Ils ne chercheront plus l'explication dans la pesée d'un lapin à la balance romaine... Tout ce que l'école n'avait pas à enseigner parce que cela faisait partie du milieu ne pourra pas entrer dans la classe, ni à travers quelques discours, si habiles soient-ils, ni avec quelques activités aussi « fondamentales » qu'elles paraissent, et encore moins par quelque symbolique magique, serait-elle merveilleusement audio-icône-cinématique et informatique. Les quelques suggestions qui suivent n'ont pas cet objet.

Pour les notions que l'on veut enseigner, il faut recréer des « milieux » adaptés à la fois aux possibilités scolaires, toujours très limitées, et aux ressources – bien appauvries il faut s'en convaincre – de l'environnement extra scolaire. Créer un milieu dans ces conditions suppose une maîtrise extraordinaire

- de la nature des situations et des exercices et de leur rendement cognitif et affectif
- du temps nécessaire à chaque rencontre,
- de la typologie des rencontres et de leurs interactions
- de la redondance dans le processus, à la fois indispensable et dangereuse. L'absence de contrôle et de reconnaissance de la redondance didactique est la cause principale des échecs des professeurs et de leurs élèves.

Examiner les rapports que chaque « leçon » et que chaque exercice entretient avec l'ensemble des autres est une nécessité absolue pour économiser.

L'ordre axiomatique et a fortiori toutes les suggestions de nature seulement pédagogiques sont insuffisants pour assurer la nécessaire utilisation optimale du temps nécessaire à la création des milieux indispensables à la compréhension de ce que nous considérons encore – a tort peut être – comme des conditions nécessaires à la formation des citoyens.

Il faut proposer des solutions nouvelles ou qui semblent nouvelles. Pour cela nous devons reprendre la conception de l'enseignement de toute « l'arithmétique élémentaire ». L'introduction précoce de l'algèbre doit aussi être étudiée sérieusement pour améliorer la proximité culturelle des professeurs et des élèves et pour limiter les effets de l'ignorance ou de l'enthousiasme excessif.

2. Le numérique ou l'arithmétique ?

Beaucoup de professeurs considèrent aujourd'hui l'arithmétique élémentaire comme de l'algèbre sans lettres : Lorsqu'un élève écrit $3 + 4 = 7$ il écrirait une *égalité* « *numérique* », c'est à dire une égalité au sens de l'algèbre et par opposition à une 'égalité' du genre $PA + B = PV$ qui serait une *égalité* « *littérale* ».

Cette conception leur permet de proposer aux élèves des exercices directement inspirés de l'algèbre comme par exemple :

- des exercices à trous ' $3 + \dots = 7$ ' ou ' $5 + \dots = 3 + 4$ ' (« quelle valeur convient ? » ce qui veut dire « quelle valeur rend l'égalité suivante vraie ? »),

- des calculs sur des parenthèses

ou d'exprimer des « théorèmes d'arithmétique comme $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ etc.

Elle ne permet évidemment pas de donner un statut à toutes les écritures que les élèves pourraient imaginer et la règle implicite est qu'il faut se conformer aux habitudes du professeur.

Ce point de vue faussement formaliste (car il n'est pas conforme à la théorie des langages mathématiques formels) brouille complètement le sens de l'arithmétique et celui de l'algèbre.

Comme le montre Dominique BROUIN-FERGUSON dans sa thèse¹² l'arithmétique élémentaire se distingue de l'algèbre d'abord par son objet et par ses objets. Les objets sont des *quantités*, c'est à dire de valeurs de grandeurs, exprimées par des mesures, et la construction d'*expressions de quantités* par le moyen des opérations arithmétiques élémentaires. Du point de vue de l'algèbre ce sont des termes. Les données, les valeurs calculées sont des termes. Les relations algébriques dans lesquelles ces termes entrent comme argument (et notamment l'égalité) ne sont pas formalisées. Elles ne sont même formulées que de façon très allusive dans les énoncés. Ainsi ' $3 + 4$ ' est un programme de calcul et il est bien connu qu'au niveau élémentaire ' $3 + 4 = 7$ ' ne signifie pas pour les élèves que les termes ' $3 + 4$ ' et ' 7 ' désignent le même objet (sens

¹² « Arithmétique et Algèbre Élémentaires Scolaires », Université Bordeaux, 2002, à paraître

algébrique) mais au contraire qu'une certaine activité – un calcul – permet de passer du terme ' $3 + 4$ ' au terme ' 7 '. On devrait écrire quelque chose comme ' $3 + 4 \rightarrow 7$ '

De même le dédoublement des lois additives en lois, l'une interne, et l'autre externe (et formant un ensemble dual) a été abondamment montré par les travaux de Vergnaud : non seulement la multiplication « simple » exprime l'application d'un opérateur (une nombre abstrait 3, comme 3 fois) à un vecteur (la mesure d'une grandeur, un nombre concret) mais l'addition aussi est souvent considérée sous les deux angles (somme de vecteurs et translation abstraite d'un vecteur. Dans ce cas l'écrasement de ces distinctions par les notations algébriques rend plus difficile la nécessaire conception des constructions effectives des termes et leur gestion. Certes on peut oublier ces distinctions et passer au quotient pour bénéficier des propriétés d'algèbre des ensembles numériques, mais peut-on les comprendre sans passer par cette étape ?

S'il faut se plier à la nécessité de rattacher les connaissances des élèves à celles de leurs professeurs il est non moins nécessaire d'adapter celles des professeurs à la réalité des opérations qu'ils proposent. Acceptons le terme « numérique » mais convenons qu'on ne construit dans un premier temps que des termes ou mieux des **programmes de calcul**. Les élèves peuvent apprendre

- à traduire des manipulations ou des transformations de grandeurs par des programmes de calcul,
- à effectuer ces programmes,
- à les concaténer en programmes plus complexes,
- à y faire figurer des lettres

L'écriture des résultats des programmes de calcul peut si c'est vraiment nécessaire utiliser des symboles spécifiques. Mais on ne gagne rien à utiliser trop tôt l'égalité si c'est en lui donnant un sens « faux ».

La comparaison des programmes de calcul, qui suppose implicitement l'emploi de quantificateurs peut alors être détachée et enseignée le moment venu.

3. Le numérique et l'algébrique

L'algèbre « avec des lettres » peut servir explicitement à des élèves très jeunes pour écrire ou interpréter des programmes de calcul (des formules au sens populaire), que l'on connaisse les données ou non au moment de l'écriture du programme, à la condition que les calculs envisagés soient des modèles *vérifiables* de manipulations réelles (qu'elles soient effectivement réalisées ou seulement imaginées au moment du calcul : il ne sert à rien de s'enfoncer dans les arcanes de la manipulation effective dans chaque emploi de connaissances acquises).

Si l'égalité est introduite ce doit être avec son sens exact : elle exprime une relation d'identité entre deux objets. Et ce doit être dans des circonstances qui la rendent utile, par exemple si l'identité n'est pas évidente a priori, si cette identité était évidente pourquoi l'écrire ? Elle peut être introduite pour exprimer que deux programmes donnent *toujours* le même résultat, c'est à dire qu'elle prend le sens de ce qu'on appelait autrefois l'identité. En fait l'égalité n'est vraiment utile qu'à partir du moment où on veut manipuler des relations et non plus des termes (ou des expressions). Les raisons de manipuler les relations n'ont plus rien à voir avec leur sémantique et celle des objets sur lesquels elles portent. Elles sont justifiées par le projet de résolution et la méthode que l'on utilise et légitimées par des théorèmes de logique ou de mathématiques qui peuvent ne pas être concrètement significatives. Il y a là un saut qu'il y a intérêt à rendre explicite et à expliquer. On pourrait dire aux enfants sur le mode culturel « l'algèbre sert à écrire des « théorèmes », des déclarations toujours vraies comme par exemple « $2a + 3a$ est toujours égal à $5a$ » puis plus tard leur demander d'inventer d'autres théorèmes comme « $347 \times 58 = 20\,126$ » et identifier ainsi le calcul arithmétique dans un cadre directement algébrique. J'ai l'expérience du fait qu'ils « comprendraient » le discours mais je ne crois pas que l'on gagne grand chose à le tenir ainsi.

L'algèbre peut aussi à la rigueur servir à écrire des devinettes, la solution étant acceptée quels que soient les moyens employés pour l'obtenir, en particulier par tâtonnement ou par exhaustivité. L'étude de raisonnements (arithmétiques) permettant de court-circuiter ces recherches erratiques prend alors un « sens nouveau ».

4. L'ordre et la topologie numérique ?

Le principal inconvénient du traitement numérique des grandeurs est la disparition dans le modèle - c'est à dire dans les nombres - des possibilités de traitement *direct* des propriétés topologiques et des propriétés d'ordre des ensembles numériques et donc des grandeurs elles-mêmes. Pour savoir si 3,07 est voisin de 3,8 les élèves, tout comme les machines doivent « calculer » et rien ne vient secourir à un niveau sensoriel familier les moyens formels de contrôle de ce calcul. La numérisation généralisée des appareils de lecture des mesures et des calculateurs, l'automatisation des mesurages et des capteurs ou des senseurs de toutes sortes fait disparaître la pratique familière des modèles topologiques. Faut-il restaurer de tels modèles, et comment ?

5. Nombres et grandeurs

Avant de construire un système formel il faut se préoccuper de sa sémantique. Il est classique de considérer que la sémantique des nombres à l'école primaire, ce sont les collections et les grandeurs. Nous allons adopter ce point de vue mais auparavant je voudrais rappeler le fait

suivant. Caleb Gattegno, sur la fin de sa vie, sans doute sensible aux critiques que l'on adressait au formalisme avait conçu un enseignement des nombres totalement détaché de toute sémantique au sens de Carnap. Les enfants apprenaient à compter en n'utilisant qu'un seul objet : une page de livre présentant les écritures des 100 premiers nombres (de 0 à 99), en dix rangées de dix nombres. L'enfant explorait les relations entre les nombres par toute une série de jeux et d'exercices. Comme il s'agissait de nombres « petits » et de relations utiles au calcul mental on ne devait écrire formellement ces relations qu'un peu plus tard. La sémantique des nombres était donc leurs relations et non pas des classes d'ensembles d'objets. Ce procédé était en un sens à l'opposé de ceux qui utilisaient tout un arsenal de matériel : cailloux, jetons, baguettes etc. et en particulier assez différent de celui de Cuisenaire, qui avait inspiré ses premières tentatives didactiques. Or le nouveau procédé de Caleb Gattegno a très bien marché. Ce qui suffit à relativiser nos hypothèses.

Si nous voulons travailler sur les grandeurs que nos nombres mesurent, ce n'est pas parce que nous y sommes obligé pour faire comprendre les nombres, c'est pour familiariser les élèves avec les univers des grandeurs et des mesures dont on fait usage dans la vie courante et dans la vie scientifique.

6. L'analogique

Nous avons vu dans le paragraphe 2 que la mesure permet de « modéliser » certaines propriétés des espaces mesurables, des grandeurs et des objets qui les portent par des nombres et des propriétés numériques. Cette modélisation permet de prévoir le résultat d'opérations matérielles complexes à l'aide de simples calculs numériques. Cette modélisation de grandeurs par des nombres connaît une expansion et un succès sans précédent du fait de l'apparition de puissants moyens de calcul automatique numérique.

Mais pendant un certain temps il est apparu des calculateurs fondés sur une modélisation inverse : la *modélisation analogique*.

Le mesurage fait correspondre à toute valeur d'une grandeur, un nombre, et à la grandeur elle-même une structure numérique déterminée. *La modélisation analogique est l'inverse du mesurage*. Elle consiste à faire correspondre à un nombre, une valeur physique dont il est la mesure¹³. Elle fait donc correspondre à une structure numérique, une grandeur physique et par le choix d'une unité, à tout nombre, une valeur de cette grandeur.

¹³ Par exemple le nombre 3 était représenté par un courant de 3 volts, ou bien de 3 milliampères ou par une résistance de 3 ohms. Ensuite les opérations arithmétiques étaient effectuées par des opérations physiques qu'elles représentaient, elles-mêmes réalisées par des montages adéquats. Les sommes et les intégrations pouvaient être représentées par la

Les calculateurs basés sur ces principes s'appelaient calculateurs « analogiques » en référence au fait qu'ils représentaient les réels par des grandeurs continues, du continu par du continu, c'est à dire par une structure numérique par une structure topologique analogue, tandis que les calculateurs numériques sont fondamentalement discrets¹⁴.

Attention le terme « analogique » ne fait ici aucune référence aux « analogies didactiques » qui utilisent les isomorphismes de mesures et dont nous reparlerons plus loin, mais seulement à la structure topologique de l'ensemble numérique considéré.

Il ne s'agit pas de ressusciter ces étranges machines mais d'inverser le point de vue didactique qui consiste à penser que les nombres « représentent des grandeurs » pour enseigner aux élèves comment les nombres peuvent structurer les grandeurs.

Tout de suite après avoir appris les premiers nombres naturels les enfants peuvent chercher à les utiliser pour résoudre certains problèmes de mesurage de diverses grandeurs comme il est d'usage, mais ils peuvent aussi chercher la réponse à certaines questions sur les nombres en utilisant des grandeurs comme modèles. Par exemple en utilisant deux doubles décimètres pour faire une machine à additionner.

De même les élèves peuvent être conduits à chercher quelles sont les manipulations de différentes grandeurs qui correspondent à la somme ou au produit.

Nous avons présenté ce problème sous cette forme à des élèves de CM2 à propos des rationnels : si nos fractions sont des épaisseurs de feuilles de papier, qu'est-ce qui correspondrait à la somme de deux épaisseurs ? alors comment faut-il définir la somme de deux fractions ?¹⁵ Ce procédé a été fructueux à plus d'un titre mais principalement les enfants ont eu l'impression d'utiliser leurs connaissances mathématiques pour se rendre maîtres d'une règle mystérieuse et en connaître la raison et le sens.

Il serait possible d'étudier parallèlement le sens et l'usage des nombres et des opérations dans plusieurs types de grandeurs, pas seulement pour « constater » ce qu'elles ont en commun mais aussi pour observer ce qui les différencie. Par exemple si je possède une barre de trois carrés de chocolat et une barre de quatre carrés de chocolat : pour représenter la somme $3 + 4$, je peux les mettre côte à côte si je pense à la quantité de chocolat, à sa masse mais si je pense à des longueurs, je dois les mettre bout à bout.

charge progressive d'un condensateur, les dérivations par les effets d'une self, l'état stationnaire d'un circuit pouvait représenter ainsi la solution d'une équation différentielle...

¹⁴ . Ces calculateurs étaient plus rapides et plus simples pour des programmes fixés une fois pour toute. Mais chaque changement de programme demandant des interventions matérielles coûteuses sur la grandeur représentante, leur souplesse était presque nulle.

¹⁵ Nadine et Guy Brousseau « Rationnels et Décimaux » IREM de Bordeaux 1986

Evidemment il faut ajuster les projets à l'âge des enfants. Je me souviens avoir suggéré ce procédé dans mon premier livre (et dernier manuel, en 1964) pour le cours préparatoire. J'y montrais plusieurs personnages qui cherchaient à résoudre la même devinette, qui avec des écritures de nombres, qui avec les baguettes de longueurs différentes, qui avec de la monnaie, qui avec des collections de jetons, qui avec la pesée de masses marquées. Bonne idée mais succès médiocre : la considération simultanée de deux grandeurs différentes n'était pas accessible à cet âge, alors quatre ou cinq ! Les sommes de capacités, de volume, de temps, de vitesses, ont toutes leurs spécificités que l'on peut ainsi explorer.

L'introduction systématique de modélisations analogiques pourrait permettre de réintroduire toute une série de questions et d'exercices classiques sur les grandeurs avec un sens nouveau et un rôle épistémologique et didactique adaptés, et surtout sans trop consacrer de temps à restaurer des environnements perdus de toute façon. Elle permettrait aussi de réexaminer une nouvelle cohérence des représentations réclamées par certains avec l'enseignement nécessaire des structures mathématiques elles-mêmes.

7. Pourquoi ?

La considération, par les professeurs et donc sans doute finalement par les élèves, de **modélisations analogiques** et à côté de leur inverse **les mesurages ou modélisations numériques**, réintroduit l'usage didactique d'analogies au sens ordinaire de la rhétorique et de la pédagogie classique. Pourquoi introduire ce concept nouveau et ne pas rester sur la ligne ancienne qui étudiait « simplement » les différentes mesures ?

Si on pouvait faire cette introduction dans le cadre d'une réelle refonte en profondeur de l'organisation des connaissances mathématiques à l'élémentaire, et des situations utilisables par les élèves et par les professeurs, avec la possibilité de mener cette mise en place de façon assez lente et progressive... Alors oui, il serait préférable de modifier la formulation pour marquer cette différence.

Cette nouvelle dénomination serait nécessaire pour cadrer convenablement le sens de la réapparition des grandeurs sans contredire l'évolution des mathématiques et en s'adaptant à une évolution vers une introduction précoce mais précautionneuse de l'algèbre. Elle devrait permettre de faire ces analogies dans un esprit tout différent et de pallier en partie du moins à des défauts bien connus.

Mais je reconnais là des espoirs qui m'ont été familiers dans les années 60-70, ne risque-t-on pas de créer une nouvelle mode, un de ces nouveaux instruments didactiques séduisants et mal définis avec lesquels les professeurs jouent aux novateurs et qui finalement contribuent plus à rompre un peu plus avec des pratiques éprouvées ? Si bien sûr. Et c'est pour cela qu'il faut

d'abord que les didacticiens travaillent, et plutôt dans l'ombre avant de lancer des idées trop séduisantes.

BIBLIOGRAPHIE

- BARBUT M. et MONJARDET, B. 1970 *Ordre et classification, Algèbre combinatoire, 1 et 2*, Librairie Hachette Paris
- BESSOT, A. et EBERHARD, M. (1983) Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 4.3,
- BOULEAU, N., (1999) *Philosophies des mathématiques et de la modélisation du chercheur à l'ingénieur*, Paris : L'harmattan
- BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 19.1. 41-75,
- BROUSSEAU Nadine, *La mesure au CMI*, IREM de Bordeaux, 1987
- BROUSSEAU N. et G. *Rationnels et Décimaux*, IREM de Bordeaux, 1986
- BROUSSEAU N. et G. (1992) Le poids d'un récipient ou l'étude par des élèves de problèmes de mesurage, *Grand N*, 50, 65-87
- BROUSSEAU G. " Les univers de la mesure "
- CHEVALLARD Yves, (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 19.2, 221-266.
- COLMEZ, F. (1995) Place et rôle des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques de l'Ecole Primaire au Lycée *Contribution aux journées de la commission Inter-IREM " premier Cycle "*
- DHOMBRES J., (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*, Paris, CEDIC/ Fernand Nathan
- DOUADY, R., (1986) Jeux de cadres et dialectique outil objet, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 7.2.
- DOUADY, R, et PERRIN-GLORIAN, M.-J., Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, *Educational Studies in Mathematics* 20.4, 387-424
- FREUDENTHAL H, (1983) *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel Dordrech
- GUITEL G., (1975) *Histoire Comparée des Numérations écrites* " Paris, flammariion
- KAZIN, M. et KOTCHARIAN, M. Dimensionnelle (analyse et similitude) *Encyclopaedia universalis* 7. 497b
- LEBESGUE, H. (1931) *La mesure des grandeurs*, Genève : L'enseignement mathématique
- LICHNEROWICS, A., (1994) Géométrie et relativité, in Jean Paul Pier, ed. *Development of Mathematics 1900-1950* Basel : Birkhäuser
- LIZCANO, E. (1993) *Imaginario colectivo y creacion matemàtica* ", Barcelona : gedisa ed
- Rapports " Géométrie " et " Calcul " de la commission KAHANE
- REVUZ, H, *Intégration et mesure*, Encyclopaedia universalis

ROUCHE N., (1992) *Le sens de la mesure* Paris : Didier Hatier

ROY, M. F., Géométrie algébrique réelle, in Jean Paul Pier ed. *Development of Mathematics 1950-2000* Basel : Birkhäuser

WHITNEY HASSLER, (1968), The Mathematics of Physical Quantities, Part II : Quantities structures and dimensional analysis, The American Monthly.

ANNEXE

TABLEAU DES GRANDEURS LES PLUS SOUVENT EVOQUEES DANS LA VIE COURANTE

Unidimensionnelles non scalaire (I)	- Cardinal fini - Longueur et distance - Valeurs et monnaies - Masses et poids - Temps - Capacités
Unidimensionnelle Scalaire (II)	Rapports naturels
Multidimensionnelle : Mesures produits	- Aires planes - Volumes
Multidimensionnelle : Mesures dérivées	- Vitesses - Débits (volumes, masse) - Prix - Masses Volumiques
Multidimensionnelles mixtes	- Energie, travail, puissance - intensité - Information
Grandeurs bornées (Mesures à condition d'échelle)	- Pourcentages (scalaires) - Angles - Statistiques - Probabilités - Taux
Mesures à Echelle exponentielle	Puissance sonore
Mesures sur R (positives ou négatives)	- Translations numériques, Altitudes, profondeurs - Puissance, Travail - Tension électrique

Grandeurs non mesurables (ordres)

{
Température
Rangs
Echelles géophysiques (tempêtes, séismes)

Grandeur de « grandeurs »

{
Ordres de grandeur
Rareté relative

LES DIFFICULTES D'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE

A L'ECOLE ET AU COLLEGE

Eugène Comin

DAEST, Université Bordeaux II

INTRODUCTION

Dans cet exposé, il sera principalement question de savoirs sur la proportionnalité mais l'étude des conditions de leur diffusion permet d'entrevoir les contraintes qui pèsent sur les processus d'institutionnalisation.

Les résultats qui y sont présentés sont extraits de la thèse soutenue en octobre 2000 à Bordeaux 1 : « Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire ». Ils font l'objet d'un article soumis pour publication dans R.D.M., intitulé : « Les difficultés d'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège »

QUESTIONS

Pourquoi s'intéresser à la proportionnalité ?

Il est connu depuis longtemps que l'apprentissage et l'enseignement de la proportionnalité présentent des difficultés aux élèves et aux professeurs !

En quoi la proportionnalité peut-elle encore intéresser la didactique ?

La proportionnalité couvre des champs mathématiques et didactiques suffisamment vastes pour y étudier les effets des changements d'organisations savantes et scolaires sur les conceptions des élèves et des professeurs.

De plus, l'évolution rapide des contenus d'enseignement justifie qu'on fasse une analyse périodique de leurs pratiques :

Quelle(s) compréhension(s) élèves et enseignants ont-ils actuellement de la proportionnalité et de la linéarité ?

Quels sont aujourd'hui les usages des vocabulaires de la proportionnalité et de la linéarité chez les élèves et les professeurs des différents niveaux ?

Quelles sont les différentes techniques utilisées, les modèles qui ont cours ? à quels niveaux d'enseignement ?

Quelles relations élèves et professeurs établissent-ils entre ces différents modèles ?

L'exposé présente trois volets :

- I. Observation des difficultés (auprès d'élèves de seconde et de professeurs des écoles).
- II. Recherche d'explications (les conditions d'enseignement de la proportionnalité).
- III. Macrodidactique et perspectives (l'étude de ces conditions montre la nécessité d'un développement théorique et ouvre un nouveau champ de recherche).

I. OBSERVATIONS DES DIFFICULTES

Avant de donner les résultats des enquêtes que nous avons menées auprès des élèves et des professeurs des écoles, il est intéressant de noter que notre travail se situe dans la continuité des recherches récentes.

1. Quelques apports de travaux récents sur la proportionnalité

Avant 1970, la proportionnalité sert principalement de marqueur dans l'ontogenèse. Dans les années 1970, plusieurs recherches mettent en cause l'universalité du modèle des stades développé par Piaget. Trois idées se dégagent de ces travaux :

- il est possible de décrire des cheminements différents dans l'élaboration de la notion de proportion.
- les concepts de rapport et de proportion s'acquièrent sur toute la durée de l'adolescence.
- les différents aspects de la situation conditionnent la réussite ou l'échec.

A partir des années 1980, les recherches reprennent davantage en considération les apprentissages scolaires des sujets. Les travaux de Gérard Vergnaud¹⁶ présentent un double intérêt :

- une classification systématique des problèmes de l'arithmétique élémentaire.

¹⁶ Gérard VERGNAUD ; 1981 ; L'enfant, la mathématique et la réalité ; Editions Peter Lang.

- un regroupement en champs conceptuels des situations et des concepts.

Il attire l'attention sur la différence entre structures additives et structures multiplicatives. Voici ce qu'il écrit : « Il n'est pas superflu de remarquer que l'analyse des structures multiplicatives est profondément différente de celle des structures additives. Les relations de base les plus simples ne sont pas ternaires mais quaternaires parce que les problèmes les plus simples de multiplication et de division impliquent la proportion simple de deux variables l'une par rapport à l'autre. ».

Cette déclaration appelle un commentaire sur **le rôle des grandeurs**. Ce ne sont pas les structures algébriques modernes qui différencient les champs conceptuels de l'addition et de la multiplication (ces « opérations » considérées comme « lois de composition » établissent toutes deux des relations ternaires) mais les relations entre grandeurs que ces opérations décrivent. On peut additionner ou soustraire des grandeurs de même nature ; l'addition est une opération interne à une grandeur. Mais le produit de deux grandeurs est une autre grandeur. Le rapport de deux grandeurs de nature différente (rapport externe) détermine une autre grandeur et le rapport de deux grandeurs de même nature (rapport interne) est un scalaire. Dans tous les cas, la multiplication apparaît comme une opération « externe »¹⁷.

Peut-on envisager l'enseignement des mathématiques élémentaires et en particulier de la proportionnalité sans les grandeurs ? sans la notion de rapport ?

André Rouchier¹⁸ a attiré l'attention sur la « pluridimensionnalité conceptuelle » de la proportionnalité : aspects numériques, dimensions des grandeurs, aspects fonctionnels.

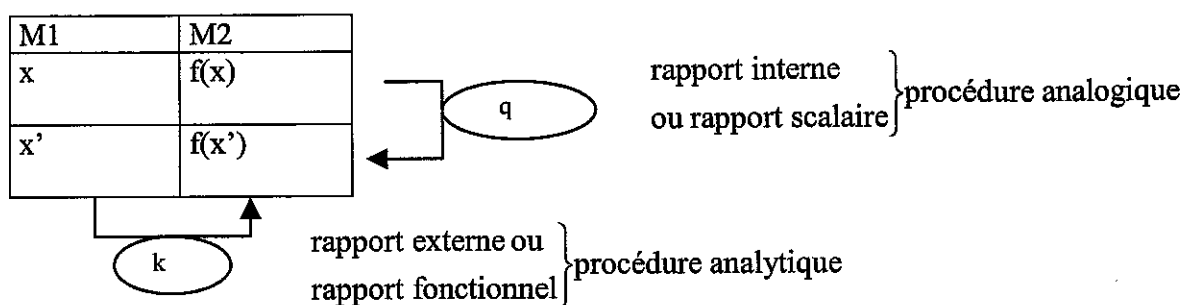
Le travail sur les grandeurs donne du sens aux nombres par les différentes fonctions qu'ils jouent dans la résolution des problèmes d'arithmétique classique : rapport, mesure, opérateur...

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des techniques utilisées par les élèves pour résoudre ces problèmes.

La comparaison des rapports de grandeurs conduit à l'étude des proportions. La proportion simple met en jeu quatre quantités appartenant à deux espaces de mesures différents M1 et M2 :

¹⁷ Hassler Witney propose une « algèbre des grandeurs » dans « The mathematics of physical quantities »

¹⁸ André ROUCHIER ; 1980 ; Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ; RDM vol 1-2.



La question standard dans un problème de proportionnalité est la recherche d'une quatrième proportionnelle.

La structure de la proportionnalité conduit à considérer deux types de procédures :

- Les procédures dites analogiques expriment une relation entre des éléments d'un même espace qu'on rapporte ensuite aux éléments correspondants de l'espace associé.
- Les procédures dites analytiques expriment une relation fonctionnelle applicable à tout couple d'éléments associés par la correspondance entre les deux espaces¹⁹.

Les contradictions qu'apportent les résultats de ces différentes recherches (Karplus, Vergnaud, Ricco, Morin, etc.) confirment que le choix d'un type de procédure n'est pas assujéti à un développement génétique universel mais dépend autant du sujet que de la situation.

Comment l'enseignement peut-il influencer les pratiques et les conceptions des élèves ?

Claire Dupuis et François Pluvinage²⁰ se sont intéressés à l'évolution de l'enseignement de la proportionnalité et ont distingué trois périodes :

1. La « règle de trois » des « mathématiques traditionnelles »
2. Les fonctions linéaires des « mathématiques modernes »
3. Les tableaux de proportionnalité des « mathématiques concrètes ».

Une des conclusions de leur travail expérimental est que l'hétérogénéité entre classes pourrait résulter de la diversité des enseignements ; les professeurs pouvant opter pour un enseignement conforme à l'une de ces trois périodes.

Marianna Bosch i Casabó²¹ identifie ces périodes à des « organisations scolaires » qui sont pratiquées en même temps, à des niveaux scolaires différents. Elle montre que les techniques de

¹⁹ Sidi Bekaye SOKONA ; 1989 ; Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation ; petit x n°19 pp 5 à 27.

²⁰ Claire DUPUIS et François PLUVINAGE ; 1981 ; La proportionnalité et son utilisation ; IRMA ; Université Louis Pasteur ; Strasbourg.

l'arithmétique souffrent de l'absence d'une algèbre des grandeurs. La notion de fonction peut y remédier facilement mais l'algèbre moderne ne permet pas de justifier l'adéquation du modèle au système étudié. La rencontre des pratiques de l'algèbre actuelle et de l'arithmétique traditionnelle donne lieu à un travail régi par une syntaxe « hybride » où les ostensifs propres à la modélisation algébrique cohabitent avec les « vestiges » de l'organisation classique ; il en résulte un phénomène « d'opacification » des techniques de la proportionnalité. Arithmétique et algèbre se côtoient sans se rencontrer réellement.

Peut-on enseigner la fonction linéaire sans la proportionnalité ?

Retour à la question initiale avant de faire des choix :

Quelle(s) compréhension(s) élèves et enseignants ont-ils actuellement de la proportionnalité et de la linéarité ?

2. Les conceptions des différents partenaires

a) Introduction et méthodologie

Les difficultés rencontrées par les élèves et les professeurs dans le traitement des questions relatives à la proportionnalité sont des indices de leurs conceptions sur cet objet. Empiriquement une conception²² se manifeste par un ensemble de réponses cohérentes données à un ensemble de questions, par un groupe d'individus suffisamment nombreux et suffisamment distinct d'autres groupes qui donnent au même ensemble de questions des réponses elles-mêmes cohérentes entre elles, mais différentes des premières. Nous avons tenté de dessiner ces conceptions à partir de questionnaires.

b) Les conceptions des élèves

Si les connaissances résultent des pratiques d'enseignement, alors les conceptions des élèves sur la proportionnalité peuvent provenir de découpages dans le corps des savoirs mathématiques sur cet objet :

- d'une part, des découpages liés à une organisation mathématique de cette connaissance : « proportionnalité » et « fonction linéaire » sont deux approches de la linéarité qui se réfèrent à deux cultures différentes : l'arithmétique et l'algèbre ;

²¹ Marianna BOSCH I CASABO ; 1994 ; La dimensión ostensiva en la actividad matemática ; el caso de la proporcionalidad.

²² voir les travaux de Ratsimba-Rahjon, Brousseau, Balacheff, ...

- d'autre part, des découpages liés à l'étude d'une propriété caractéristique de la proportionnalité : conservation des rapports internes, invariance du rapport externe.

Résultats

Le questionnaire²³ soumis à des élèves de seconde n'a pas permis de faire apparaître de telles conceptions. Pourtant, près d'un élève sur deux n'établit jamais aucun rapport entre « proportionnalité » et « fonction linéaire » mais les questions relatives à ces concepts ne séparent pas les individus. De même, *les trois principales techniques utilisées : produit en croix (34%), rapport externe (27%), rapport interne (11%), ne séparent pas les élèves sur l'ensemble des exercices*. Alors qu'on pouvait s'attendre à voir ces techniques comme concurrentes, on observe que sur l'ensemble des élèves interrogés, *les usages des procédures analytiques et analogiques sont corrélés positivement*. Plus précisément, l'analyse implicative montre que l'utilisation de la conservation des rapports internes est subordonnée à la reconnaissance de l'invariance du rapport externe elle-même assujettie à la reconnaissance d'une situation de proportionnalité (les réciproques n'étant pas vérifiées).

Par contre, les différentes analyses de données ont fait apparaître des groupements d'exercices discriminés par les cadres²⁴ arithmétique, algébrique ou géométrique. Finalement, il semble que les compréhensions nées des différents apprentissages restent attachées aux situations qui les ont fait naître et qu'il faille renoncer à l'idée de « conceptions universelles » sur l'ensemble des situations qui relèvent du concept de proportionnalité. Les élèves ne pouvant transférer d'eux-mêmes leurs connaissances d'un milieu à un autre, les conceptions localisées aux situations et aux apprentissages n'évoluent que si les savoirs qu'elles véhiculent sont décontextualisés et institutionnalisés. En particulier, à qui incombe la charge d'homogénéiser les connaissances de la linéarité en arithmétique, en algèbre et en géométrie ? Aux professeurs ? Le peuvent-ils ?

c) Les conceptions des professeurs

Problématique

L'enquête auprès des élèves rendait assez évident que leurs difficultés étaient davantage liées à des questions de culture et d'enseignement qu'à des problèmes d'apprentissage.

²³ Eugène Comin ; Proportions et applications linéaires ; mémoire de D.E.A de didactique des mathématiques ; juin 1994 ; Université de Bordeaux 1.

²⁴ La considération du rôle des cadres et le concept de jeux de cadres ont été introduits par Régine Douady.

Les progrès de la théorie de la mesure ont conduit les mathématiciens à privilégier l'étude des structures des espaces images au détriment de celle des grandeurs.

Hypothèse

La disparition des grandeurs et des rapports comme objets d'enseignement, qui s'en est suivie, limite la proportionnalité à l'étude de relations numériques et rend difficiles les explications qui permettent de distinguer la nature et la fonction des nombres dans différentes situations.

Questions

- a) Quels sont les termes effectivement utilisés par les enseignants dans les différentes situations de proportionnalité ? Sont-ils utilisés correctement ?
- b) Ces termes même inadéquats, correspondent-ils à des conceptions correctes, c'est à dire conformes aux concepts mathématiques ?
- c) Dans quelle mesure l'usage d'un vocabulaire flottant aurait-il une conséquence sur les conceptions des professeurs et des élèves ?

Méthode d'étude

Il aurait fallu observer les maîtres dans leur classe pour savoir quelles expressions ils utilisent pour désigner les différents objets qui nous intéressent et quelles sont les formulations qu'ils acceptent de leurs élèves, ce qui n'est pas possible. Nous avons opté pour le questionnaire. Les questions²⁵ construites autour de ces concepts ont été soumises à des instituteurs ou professeurs des écoles en activité.

Les fréquences de réponses aux différents items sont données en pourcentages calculés sur les 38 réponses recueillies.

Les conceptions des professeurs sont explorées à travers ces résultats.

Résultats

➤ **Usage du vocabulaire**

- *Certains mots et notions tendent à disparaître du répertoire des maîtres :*

Grandeurs : au moins 24% des professeurs interrogés évitent d'utiliser le mot « grandeur ».

Rapport : au moins 36% des maîtres semblent gênés par l'usage du mot « rapport ».

²⁵ Questionnaire de février 1997.

Proportion : L'acception mathématique du mot « proportion » tend à disparaître : seulement 47% des maîtres interrogés affirment que « $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ » est une proportion.

○ *Certains termes sont tenus à tort pour synonymes : « rapport et proportion »*

L'évanescence des mots renforce la confusion entretenue par les usages populaires.

76% des maîtres interrogés acceptent l'usage du mot « proportion » à la place du mot « rapport » dans l'expression suivante : « $\frac{4}{6}, \frac{18}{27}$ et $\frac{14}{21}$ déterminent la même proportion »

▪ *Un rapport est désigné par un terme trop spécifique :*

Fraction : 79% des maîtres interrogés acceptent l'affirmation : « Un rapport peut toujours être représenté par une fraction ».

▪ *Un rapport est désigné par un terme trop général :*

Règle : Le mot « règle » fait habituellement référence à une loi. La « règle » entre deux nombres n'a pas de sens, pourtant 32% des maîtres interrogés trouvent la déclaration suivante acceptable : « 6 est la règle qui permet de passer de 9 à 54 » (contre 58% qui la réfutent).

(On repère ici un glissement métadidactique : un moyen didactique provisoire devient un objet d'enseignement et se substitue à l'objet initial. Les maîtres ne disposent d'aucun terme pour désigner le calcul de l'image d'un nombre par une fonction linéaire. Ils utilisent le mot « règle ». Ils marquent ainsi l'importance de la technique utilisée et donnent un caractère institutionnel (institutionnalisation locale et diffuse), au mot « règle » qui, utilisé hors du contexte d'origine, conduit à une formulation erronée.)

○ *Les mots ne discriminent plus les différentes fonctions des nombres.*

C'est ce que montre l'exemple suivant où il est demandé aux professeurs d'attribuer un nom, pris parmi : « coefficient de proportionnalité, rapport, quotient », à certains rapports extraits du tableau suivant :

8	12	16
24	36	48

La disposition des nombres qui y figurent évoque une application linéaire de coefficient 3 ou $\frac{1}{3}$.

Le tableau peut-être dit « de proportionnalité ».

Les nombres proposés : $3; 2; 6; \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}$ peuvent tous être appelés « rapport » ou « quotient » mais quatre d'entre eux : $2; 6; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}$ ne peuvent pas s'appeler « coefficient de proportionnalité ».

▪ *Rapport :*

47% des maîtres interrogés n'ont jamais choisi le mot « rapport », ce mot tend à disparaître de leur vocabulaire. 11% des maîtres interrogés ont appelé à tort « coefficient de proportionnalité » le nombre « 6 » mais aucun d'eux ne lui attribue le nom de « rapport ».

▪ *Coefficient de proportionnalité :*

79% des maîtres interrogés disent que 3 est un coefficient de proportionnalité alors que seulement

37% disent que en est un ; par conséquent au moins 42% ne voient un coefficient de proportionnalité dans une application linéaire que si l'un d'eux est naturel.

21% des maîtres interrogés appellent « coefficient de proportionnalité » au moins un des quatre nombres : $2; 6; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}$, qui n'en sont pas.

▪ *Quotient :*

Les nombres entiers sont appelés, par ordre de fréquences décroissantes : « coefficient de proportionnalité » puis « quotient » et enfin « rapport ». Les nombres fractionnaires sont appelés, par ordre de fréquences décroissantes : « rapport » puis « coefficient de proportionnalité » et enfin « quotient ». Mais 40% des maîtres interrogés ne répondent pas de manière cohérente à cet ensemble de questions.

L'expression « coefficient de proportionnalité » qui précise un type de rapport est utilisé avec autant de flottement que le mot « rapport », ce qui lui fait perdre son intérêt.

○ *Les mots ne discriminent plus la nature des nombres.*

- Seulement 42% des maîtres interrogés savent que $\frac{5}{7}$ est un nombre rationnel.
- 50% des maîtres interrogés croient que $\frac{5}{7}$ est un nombre décimal.

- 11% des maîtres interrogés croient que tout rationnel est décimal et seulement 39% savent que tout décimal est rationnel ; dans les deux cas 39% disent ne pas savoir.

Finalement, sur l'ensemble de ces questions, les confusions entre rationnels et décimaux concernent au moins la moitié des maîtres interrogés.

○ *Les vocabulaires de l'arithmétique actuelle et de la proportionnalité fusionnent.*

Les maîtres connaissent les mots « diviseur » et « multiple » mais certains d'entre eux acceptent d'utiliser le vocabulaire de la proportionnalité pour dire que deux nombres sont dans un rapport multiple :

- 97% des maîtres interrogés disent bien que "54 est un multiple de 9." ; pourtant 55% acceptent la déclaration "54 et 9 sont proportionnels." et donc font synonymes ces deux formulations.

D'autres réponses confirment cette cohabitation : par exemple 95% des maîtres interrogés disent que : "Si une fraction représente un entier alors le numérateur est un multiple du dénominateur." pourtant 63% acceptent aussi : "Si une fraction représente un entier alors le numérateur et le dénominateur sont proportionnels."

- De plus, 66% des maîtres interrogés trouvent la déclaration suivante acceptable : "6 est le coefficient de proportionnalité des nombres 9 et 54." 16% acceptent la déclaration "Un coefficient de proportionnalité est un entier."

➤ **Mise en évidence de conceptions**

Les analyses en composantes principales font apparaître des groupes de questions qui sont principalement discriminés par la nature et la fonction des nombres en jeu. Certains de ces groupes révèlent trois « compréhensions » indépendantes de coefficient de proportionnalité : « Le rapport entier de deux entiers, le rapport interne dans un tableau, le rapport externe dans un tableau.

Les analyses montrent l'indépendance du modèle « fonction linéaire » avec les modèles de l'arithmétique élémentaire. La fonction linéaire n'a pas permis de reformuler les savoirs sur la proportionnalité contrairement à ce que laissaient espérer les programmes de 1968.

De plus, le choix d'une technique de résolution ne dépend ni de la manière de formuler la proportionnalité ni de la manière de la justifier : les connaissances permettent des pratiques adaptées à la situation sans que le discours laisse apparaître une organisation structurée des savoirs sur la proportionnalité.

Il est important de remarquer que les questions ne séparent pas les individus. En particulier, on ne peut pas isoler une sous population qui utiliserait systématiquement le vocabulaire de manière correcte. Les difficultés observées ne caractérisent pas les maîtres. L'absence d'une culture précise conduit chacun d'eux à faire un usage inapproprié de termes sur une question ou sur une autre.

d) Conclusions

Différentes caractéristiques montrent l'importance des dysfonctionnements précédents :

- *L'étendue :*

Les erreurs portent sur plusieurs questions qui présentent différents aspects de la proportionnalité : grandeurs, mesures, rapports, proportions, nombres, tableau, fonction linéaire et différentes structures de nombres : fractions, entiers, décimaux, rationnels.

- *L'intensité :*

Les fréquences d'erreurs (nombres de réponses erronées/nombres d'observations) peuvent atteindre 80% des maîtres interrogés sur certaines questions.

- *La rémanence :*

Certaines difficultés peuvent concerner les élèves, les professeurs et les universitaires.

- *Le flottement culturel :*

Les usages inappropriés que font les maîtres, pourraient être perçus comme des « manières de dire » ; mais ces « manières de dire » deviennent des « manières de penser » en rupture avec une culture mathématique classique. Par exemple, l'expression très ancienne « nombres proportionnels » faisait référence à des mesures de grandeurs mais lue par des gens qui ne connaissent pas l'arithmétique des grandeurs elle peut être perçue comme signifiant une relation particulière entre nombres abstraits.

Les erreurs observées peuvent donc résulter des changements de programmes ?

II. LES CONDITIONS D'ENSEIGNEMENT DE LA PROPORTIONNALITE

Pour étudier l'évolution des programmes il est nécessaire de faire un traitement didactique de la proportionnalité : analyse des structures mathématiques qui interviennent dans la proportionnalité, classification des situations non didactiques puis des modèles scolaires.

1. Traitement didactique des structures mathématiques de la proportionnalité

a) Le modèle général

La proportionnalité modélise une contrainte (physique, logique ou sociale) entre au moins deux grandeurs (qui les rend dépendantes) et décrit une relation fonctionnelle (C) entre leurs éléments.

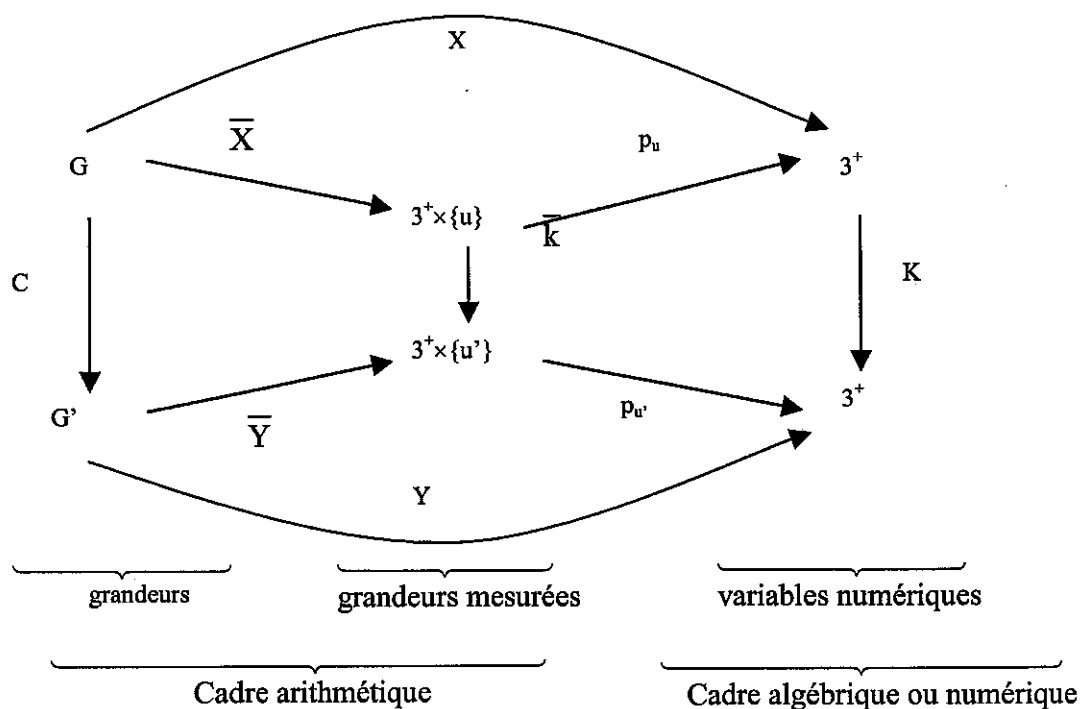
Définition : Deux grandeurs sont proportionnelles si tout rapport entre deux éléments d'une même grandeur est égal au rapport entre les deux éléments correspondants de l'autre grandeur.

Pour décrire la proportionnalité entre deux grandeurs (arithmétiques) il faut donc disposer d'un moyen de définir les rapports multiplicatifs dans chacun des deux domaines.

Cette condition est réalisée quand les grandeurs sont mesurables²⁶. La correspondance C induit, via les mesures X et Y, une correspondance de 3^+ dans 3^+ .

On peut alors modéliser la relation de proportionnalité par une fonction linéaire comme l'indique le diagramme sagittal suivant :

²⁶ Dans le présent exposé nous dirons qu'une grandeur est mesurable si elle a une structure additive de semi-groupe archimédien. Pour plus de précisions, on pourra consulter : J. Lelong Ferrand et J. M. Arnaudès ; cours de mathématiques ; tome 2 : analyse ; Dunod université ; 1974 ; p. 24.



Le diagramme sagittal schématise une situation de proportionnalité et fait apparaître trois cadres²⁷ dans lesquels s'inscrivent les situations et les différentes modélisations scolaires de la proportionnalité: celui des grandeurs, celui des grandeurs mesurées où les quantités sont exprimées par des couples (mesure, unité), celui des variables numériques ou algébriques.

b) Classifications des situations en fonction du cadre

Le cadre conditionne la mise en œuvre des moyens pour la reconnaissance d'une situation de proportionnalité et la détermination des éléments manquants. On est donc conduit à faire une classification des situations (non didactiques, in abstracto) en fonction de ces trois cadres : grandeurs, grandeurs mesurées, variables numériques ou algébriques.

c) Modèles scolaires

Les tâches des élèves s'inscrivent dans un de ces cadres et les modèles scolaires (MP, MRU, TP, FL) ont une forme adaptée à la structure mathématique du milieu sur lequel ils sont supposés agir.

²⁷ Régine Douady ; Jeux de cadres et dialectique outil-objet ; R.D.M. vol.7 n°2.

d) Résultats

La comparaison des cadres arithmétique de la proportionnalité et algébrique de la linéarité montre que l'algèbre moderne ne prend pas en charge l'étude des grandeurs. Réciproquement l'approche des connaissances mathématiques élémentaires avec la proportionnalité des grandeurs rend difficile toute autre approche avec l'algèbre moderne.

Pourquoi ? Telle qu'elle est conçue, l'algèbre ne laisse pas de place :

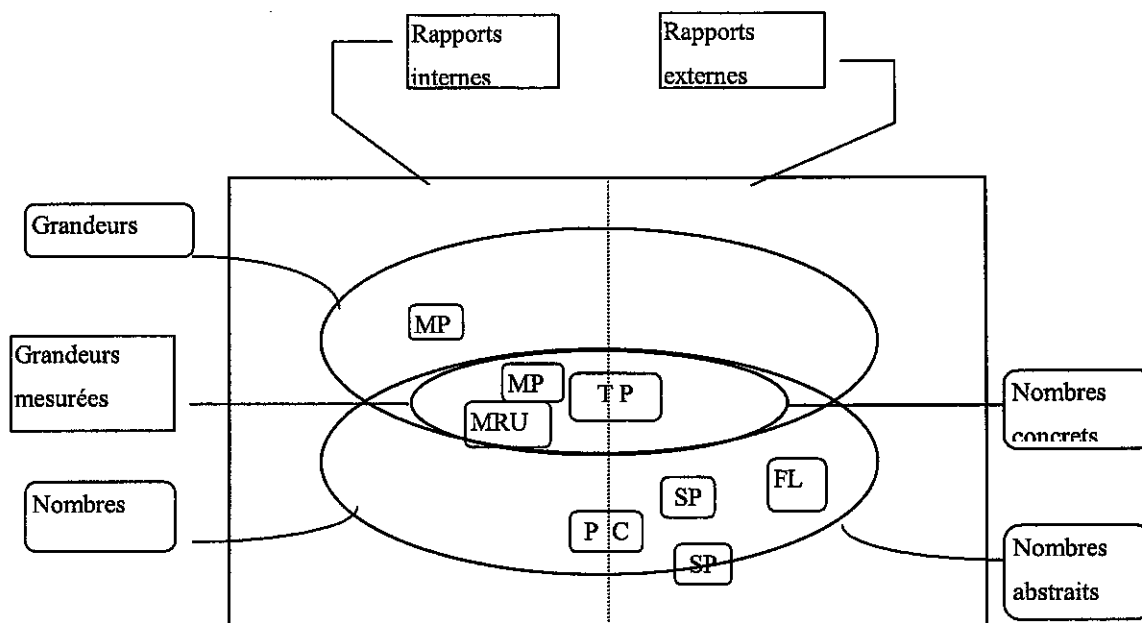
- au raisonnement arithmétique élémentaire qui est remplacé par le calcul algébrique.
- aux grandeurs qui ne peuvent figurer dans les structures algébriques actuelles.²⁸
- à la théorie des rapports et proportions qui est rendue caduque par le calcul algébrique.
- à la proportionnalité qui est remplacée par la fonction linéaire.

2. Evolution des programmes de collège de 1947 à 1985

a) Méthode

Les modélisations successives qui ont eu cours dans la scolarité obligatoire répondent aux contraintes liées à ces différents cadres, en particulier la possibilité ou non d'utiliser le rapport externe est déterminante dans le choix d'une technique.

Le schéma suivant illustre la grille de lecture qui en résulte pour cette analyse :



MP : méthode des proportions. TP : tableau de proportionnalité. FL : fonction linéaire.
 MRU : méthode de réduction à l'unité. SP : suites proportionnelles. PC : produits en croix.

b) Résultats

L'analyse du vocabulaire, des techniques et des milieux sur lesquels agissent ces techniques montre que **les changements de programmes se sont accompagnés d'un glissement du cadre des grandeurs vers celui des nombres.**²⁹

Illustration :

Programme du 18 avril 1947, classe de sixième :

« Monnaies : prix unitaire d'une marchandise et quantité de marchandise correspondant à l'unité de monnaie ».

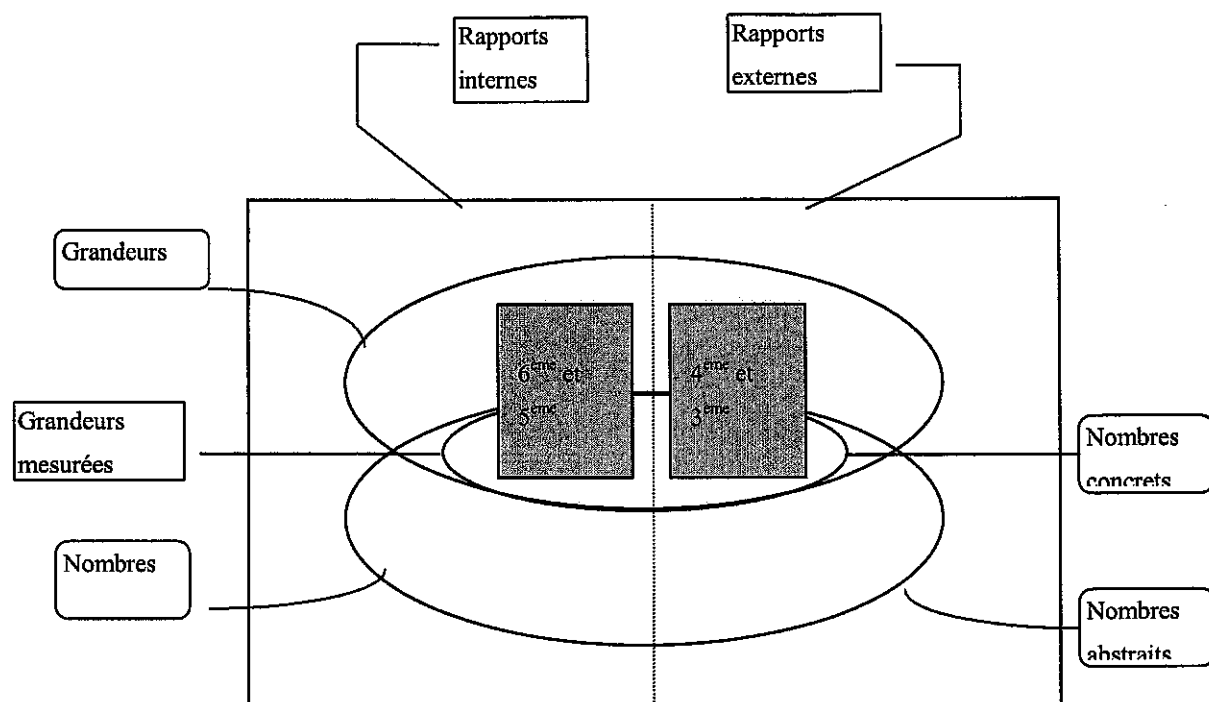
Compléments du 30 juillet 1987 aux programmes et instructions de cinquième repris dans les programmes de cinquième de 1996 :

« reconnaître, s'il y a lieu, la proportionnalité sur un tableau complet de nombres. »

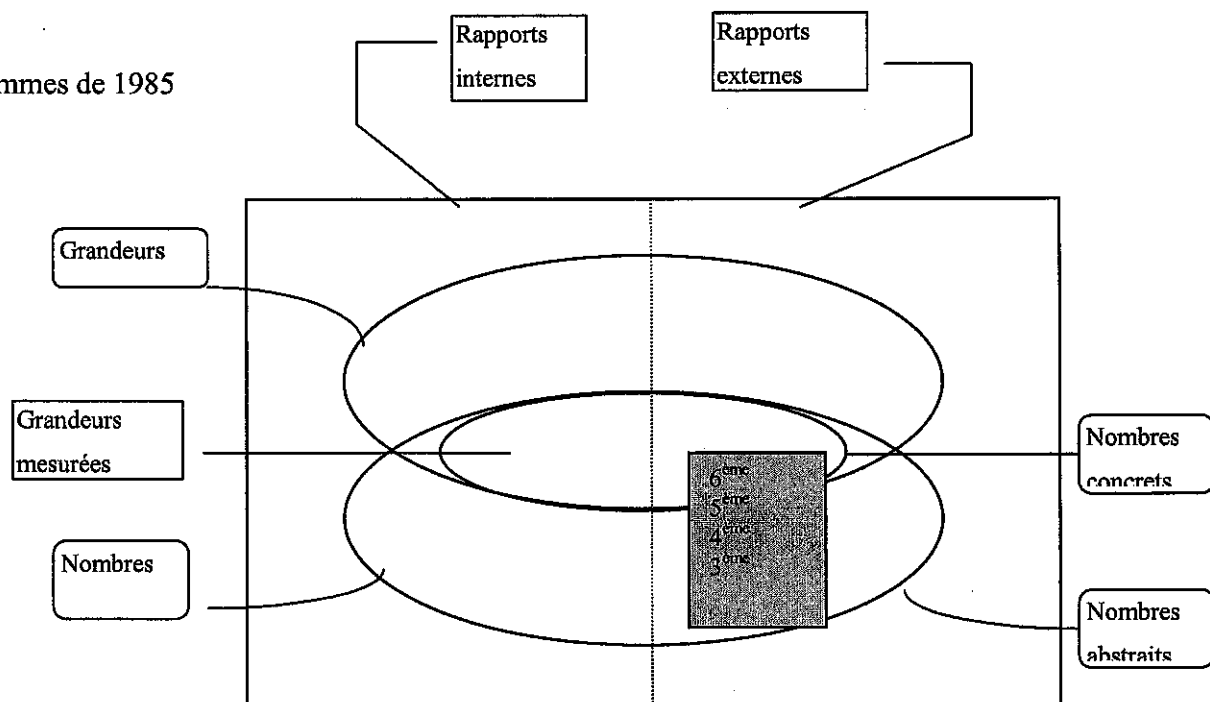
²⁸ Voir Hassler Witney pour une algèbre des grandeurs.

²⁹ Instructions de janvier 1957 : « Toute la théorie des proportions n'est elle pas contenue dans la définition du quotient exact d'un nombre par un autre, et ne peut-on lui faire prendre corps à partir de là ? »

Programmes de 1947



Programmes de 1985



Ce changement de cadre conditionne le rapport que les maîtres entretiennent à la proportionnalité. L'idée d'utiliser les structures algébriques pour décrire les relations entre grandeurs voudrait faire apparaître la proportionnalité comme une simple illustration de la fonction linéaire. Les mots et

les autres objets ostensifs qui permettaient de décrire les relations entre grandeurs se sont dilués dans les répertoires courants actuels mais les usages qui en sont faits pour décrire les structures numériques ne coïncident pas avec le sens que la culture leur avait assigné.

3. Conclusions

La disparition du traitement des mesures avec les unités, limite la proportionnalité à l'étude des relations numériques. La construction des objets mathématiques par les structures n'est plus contrôlée par le sens que portaient les grandeurs.

Les dysfonctionnements observés lors des enquêtes, ont pour origines :

- la disparition de l'étude des grandeurs, des rapports et proportions de l'enseignement secondaire.
- la difficulté de formuler les problèmes anciens dans les termes nouveaux de l'algèbre.
- l'impossibilité de rejeter la linéarité qui est omniprésente dans l'enseignement.
- l'inadaptation du vocabulaire de la proportionnalité pour décrire les relations numériques.

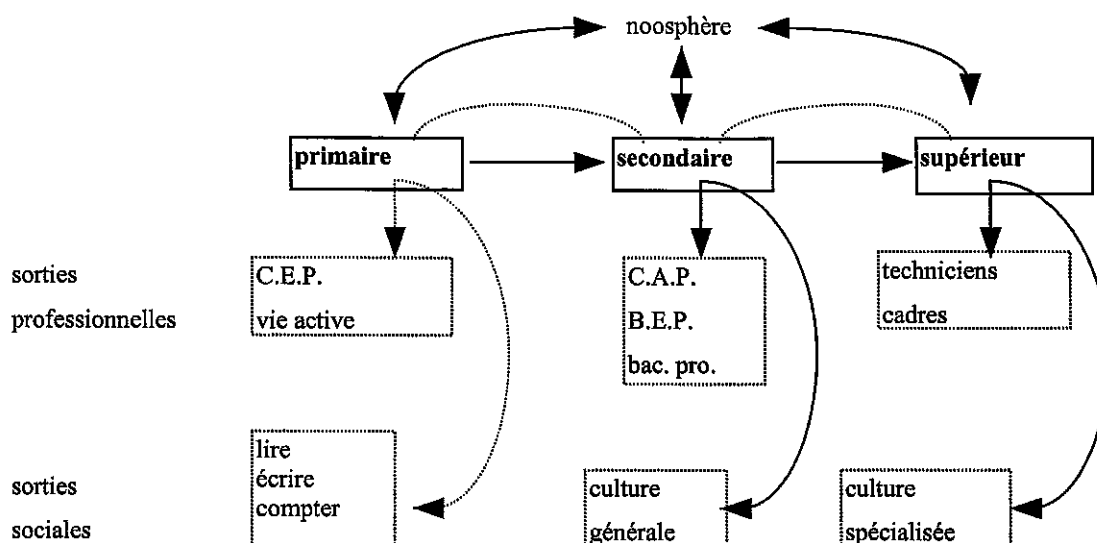
Des nouvelles questions peuvent se poser :

- Pourquoi ce renversement dans la genèse des mathématiques élémentaires ? Pour aligner l'enseignement sur la réorganisation des mathématiques savantes.
 - Pourquoi le système scolaire est resté aveugle aux conséquences de ce choix épistémologique ?
- L'explication suivante tente de montrer que d'une part l'évolution d'une institution scolaire ne dépend pas que de son histoire personnelle et d'autre part que l'enseignement de la proportionnalité est conditionné par les attentes des différentes institutions scolaires et sociétales.

4. Evolution des relations entre institutions scolaires

Le schéma suivant illustre l'évolution de l'environnement institutionnel de l'école primaire³⁰ :

³⁰ C.E.P. : certificat d'études primaires ; C.A.P. : certificat d'aptitude professionnelle ; B.E.P. : brevet d'études professionnelles



Primaire :

Avant la scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans, l'école primaire préparait les élèves à la vie active. Les connaissances de l'arithmétique élémentaire et de la proportionnalité étaient adaptées aux différentes professions auxquelles se destinaient ces élèves.

Cette mission conférait à l'école primaire une identité, un statut social, une importance reconnue par la société tout entière. De ce fait les autres institutions scolaires portaient un regard attentif sur les pratiques et les contenus de l'enseignement élémentaire.

Secondaire :

Le secondaire devait assurer la formation des futurs instituteurs et donc tenir compte des contenus d'enseignement du primaire. L'arithmétique avait une place importante dans l'enseignement secondaire. La théorie des rapports et proportions a été maintenue dans les écoles normales jusqu'en 1970. En même temps le secondaire préparait les élèves à l'enseignement supérieur, lieu privilégié de l'algèbre. Ainsi arithmétique et algèbre devaient « cohabiter » dans le secondaire. (Certains manuels scolaires traitaient le même problème séparément par l'arithmétique puis par l'algèbre.)

La société a changé. Tous les élèves entrent en classe de sixième et 80% d'une classe d'âge doit atteindre le niveau du baccalauréat. La seule sortie du primaire est le collège. L'école primaire n'est plus que la propédeutique du collège ; ce qu'elle fait ou ce qu'elle devrait faire « va de soi » pour les autres institutions scolaires qui de ce fait l'ignorent. Or le primaire ne peut traiter

correctement la proportionnalité que si elle est présente dans le secondaire car les connaissances des professeurs des écoles dépendent de ce qu'ils apprennent dans le secondaire.

Mais le secondaire, principalement orienté vers les études longues, est lui-même assujéti au supérieur et n'a aucune raison d'enseigner l'arithmétique élémentaire. Il ne prépare plus les futurs professeurs des écoles.

Cet assujettissement de chaque niveau d'enseignement au niveau supérieur a des conséquences sur le fonctionnement des institutions scolaires. Il contribue à leur isolement et les oblige à un fonctionnement autonome. Or c'est l'usage effectif d'une connaissance à travers des pratiques communes à différentes institutions qui assure sa pérennité.

Nouvelles conclusions

Les changements curriculaires résultent de l'évolution des savoirs savants mais aussi des attentes des différentes institutions scolaires et sociétales.

Le processus d'algébrisation de l'enseignement est renforcé par un assujettissement de chaque institution scolaire à l'institution de niveau supérieur. Cet assujettissement a pour origine la disparition des sorties sociales et professionnelles aux niveaux primaire et secondaire.

Le primaire est coincé entre des attentes contradictoires :

- celles du secondaire orienté vers l'enseignement de l'algèbre
- celles de la société qui entretient un rapport ancien aux connaissances de la proportionnalité

Le secondaire ne prépare plus les futurs enseignants du primaire.

III. PERSPECTIVES

1. Nécessité d'un développement théorique

Nous venons de voir que l'étude des répertoires de connaissances d'une institution ne permet pas de décrire les régulations qui s'exercent de l'extérieur. Il y a des conditions autres que logiques et fonctionnelles qui régulent l'usage et la diffusion des connaissances dans la société.

Nous avons été conduit à distinguer les conditions macrodidactiques des conditions microdidactiques.

2. Les conditions microdidactiques

La microdidactique regarde une connaissance isolée en portant une attention sur ce qu'elle a de spécifique et tente de la modéliser en termes de situations pour la rendre fonctionnelle au sein d'une institution.

La « structuration du milieu » est un instrument ad hoc et insuffisant pour décrire le fonctionnement du milieu microdidactique, c'est à dire la relation didactique au sein d'une institution (scolaire). Mais cette analyse du milieu s'arrête au professeur (noosphérique)³¹ et ne montre pas les rapports du professeur aux autres institutions scolaires et sociétales. Le milieu microdidactique ne peut pas décrire les contraintes ergonomiques que les autres institutions exercent sur l'institution au sein de laquelle agit le professeur et qui conditionnent son enseignement (souvent à son insu) et donc l'institutionnalisation des objets de savoir.

Nous sommes conduits à élargir la notion de milieu pour étudier le fonctionnement des institutions.

3. Les conditions macrodidactiques

a) Introduction

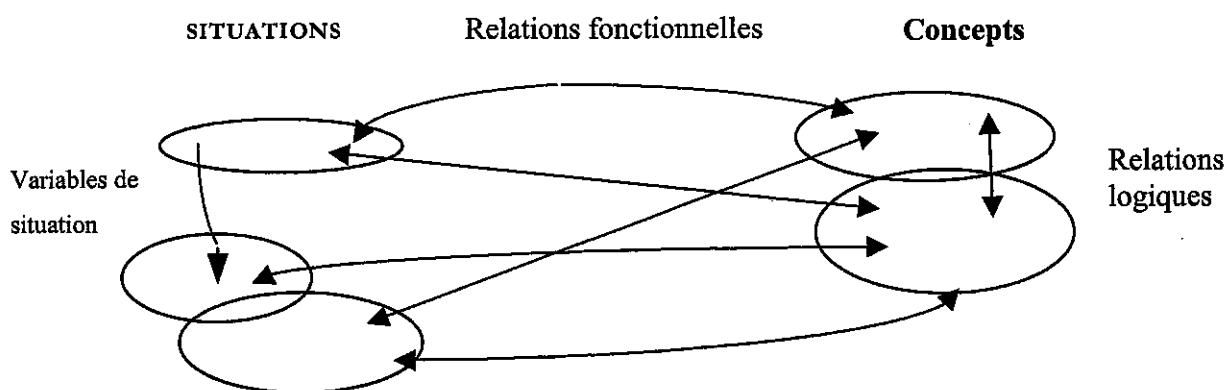
Pour décrire le fonctionnement des institutions dans leur ensemble, les conditions pour qu'une connaissance diffuse dans le réseau qu'elles constituent, nous sommes conduits à regrouper des situations et des répertoires de connaissances en faisant l'hypothèse que les groupements de connaissances diffèrent suivant qu'ils sont basés sur des relations logico mathématiques (champs conceptuels) ou sur des fréquences d'usage et de proximité (champs conceptionnels).

b) Les champs conceptuels

Si on considère les connaissances du point de vue de la transposition des savoirs savants, on peut les découper relativement à leurs structures logiques. Mais une compréhension du fonctionnement cognitif d'un sujet suppose des rapprochements de connaissances et de situations. Gérard Vergnaud a modélisé ces rapprochements en champs conceptuels³² qui regroupent des situations et des concepts qui relèvent d'une même structure mathématique.

³¹ Voir Claire Margolinas.

³² Gérard Vergnaud ; La théorie des champs conceptuels ; R.D.M. vol 10 ; p147 ; 1990.



Mais ces agrégats de situations et de concepts ne permettent pas de prévoir des agrégats d'individus ou d'institutions. La théorie des champs conceptuels ne permet pas d'expliquer les phénomènes de régulation qui résultent d'interactions entre institutions.

c) *Les champs conceptionnels*

Dans le cadre d'activités interinstitutionnelles, le milieu³³ est un champ de connaissances et de situations qui peuvent être reliées entre elles non seulement par des relations logiques ou fonctionnelles mais aussi par d'autres relations ergonomiques :

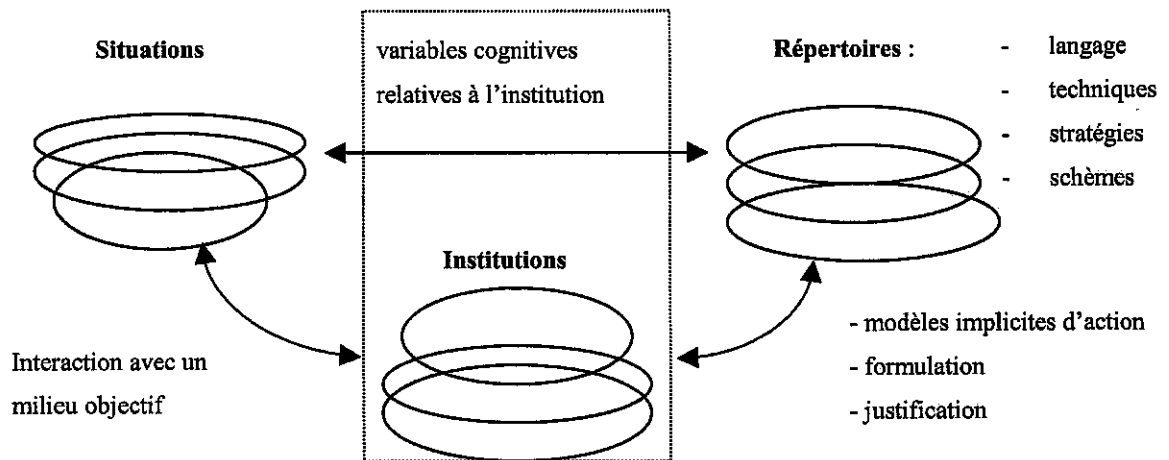
- voisinage folklorisé de connaissances engendré par une coprésence fréquente de ces mêmes objets dans certaines situations ;
- rapports que des individus ou des institutions établissent entre des connaissances et des situations (grâce aux moyens que ces connaissances leur apportent).

Dans une conception, c'est le rapport des individus ou des institutions aux situations et aux connaissances qui est déterminant. Un individu (ou une institution) traite certains milieux d'une certaine manière avec un certain répertoire « de réflexivité » plus ou moins vaste, plus ou moins juste ou erroné, avec un usage non nécessairement conforme au savoir savant. Par conséquent les groupements obtenus dans les champs conceptionnels peuvent être différents de ceux obtenus dans les champs conceptuels.

Une conception est d'autant plus intéressante qu'elle regroupe plusieurs individus ou institutions. C'est pourquoi nous avons tenté de modéliser une conception par un triplet

³³ Un exemple est donné en géométrie dans la thèse de Dilma Fregona : Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie ; Bordeaux 1 ; 1995.

d'ensembles : des situations (S), des individus ou des institutions (I), des répertoires de connaissances (R). S'il y a une « fermeture » c'est le champ de cette conception.



Un champ conceptionnel est un regroupement contingent de situations, d'institutions et de répertoires de connaissances.

d) *Besoin et tension didactiques*

Cette approche est une tentative pour traiter la complexité des champs de connaissances, de situations et d'institutions. Mais pour tenter de prévoir le fonctionnement social de la connaissance il faut trouver des moyens de décrire les contraintes qui régulent les interactions entre institutions.

Pour que deux institutions développent un répertoire commun il faut qu'elles aient à traiter la même situation avec des interactions qui les obligent à communiquer, à s'expliquer et à décider ensemble. La fréquence d'apparition de ces situations composites conditionne le « **besoin** » d'utilisation ou de création d'un répertoire commun.

La relation entre les deux institutions concernées par ces situations est d'autant plus « tendue » que leurs répertoires respectifs sont différents et que ce « besoin » se manifeste fréquemment. On peut dire que la « **tension didactique** » entre deux institutions est comme le produit de l'écart entre leurs répertoires respectifs avec la fréquence d'interactions composites. Cette « tension didactique » évalue la nécessité d'intervention didactique pour la circulation de connaissances.

La diffusion d'une connaissance entre deux **institutions** est donc conditionnée :

- par le besoin d'utilisation d'un répertoire commun. (Ce besoin est d'autant plus intense que les « situations composites » sont fréquentes.)
- par la distance entre leurs **répertoires** (plus la distance est grande, plus grande est la résistance).

Conclusion

Pour tenter d'expliquer des phénomènes macrodidactiques il faut au moins prendre en considération l'évolution des différents répertoires de connaissance, les interactions composites rendues nécessaires par les tâches communes envisagées et les institutions concernées.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie Générale

- BELHOSTE Bruno, GISPERT Hélène et HULIN Nicole ; 1996 ; Les sciences au lycée ; INRP.
- BOSCH I CASABÓ Marianna ; 1994 ; La dimensión ostensiva en la actividad matemática ; el caso de la proporcionalidad.
- BROUSSEAU Guy et Nadine ; 1987 ; Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire ; IREM de Bordeaux.
- BROUSSEAU Guy ; 1986 ; Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques ; RDM vol 7.2.
- CHEVALLARD Yves ; 1986 ; Les programmes et la transposition didactique ; illusion, contraintes et possibles ; IREM d'Aix-Marseille ; bulletin A.P.M.E.P. n° 352.
- CHEVALLARD Yves ; 1991 ; La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné ; La pensée sauvage, Editions.
- COMIN Eugène ; 1994 ; Proportions ; applications linéaires ; Mémoire de D.E.A. de didactique des mathématiques ; Bordeaux 1.
- COMIN Eugène ; 2000 ; Proportionnalité et fonction linéaire ; Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire ; Bordeaux 1.
- DOUADY Régine ; Jeux de cadres et dialectique outil-objet ; R.D.M. vol. 7 n° 2.
- FREGONA Dilma ; 1995 ; Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques ; thèse de l'université de Bordeaux 1.
- NOELTING Gerald ; 1980 ; The development of proportionnal reasoning and the ratio concept ; Educational Studies in Mathematics, 11-2.

PLUVINAGE F. et DUPUIS C. ; 1980 ; La proportionnalité et son utilisation ; IRMA ; Université Louis Pasteur ; Strasbourg.

ROUCHIER André ; 1980 ; Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ; RDM vol 1-2 ; p 225.

SOKONA Sidi-Bekaye ; 1989 ; Aspects analytiques et aspects analogiques de la proportionnalité dans une situation de formulation ; petit x n° 19 ; pp 5 à 27.

VERGNAUD Gérard ; 1981 ; L'enfant la mathématique et la réalité ; ed. Peter Lang, Berne.

VERGNAUD Gérard ; 1990 ; La théorie des champs conceptuels ; RDM vol. 10 n°2.3 ; pp. 133-170.

WHITNEY Hassler ; 1968 ; The mathematics of physical quantities. Part I : mathematical models for measurement. Part II : quantity structures and dimensional analysis.

WOILLEZ Dominique ; 1998 ; Rapport entre raisonnement arithmétique et utilisation de l'algèbre en quatrième : étude du cas d'un élève prénommé Simon ; actes de l'université d'été de La Rochelle.

Manuels scolaires

programmes de 1947

MAILLARD R. & MILLET A. ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Classique Hachette.

programmes de 1968

MAUGUIN A. ; mathématique ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Istra.

QUEYSANNE Michel et REVUZ André ; mathématique ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ;
Fernand Nathan – éditeur et « série rouge » ; Fernand Nathan.

programmes de 1985

TRANSMATH ; Maths ; classes de 6^{ème}, 5^{ème}, 4^{ème}, 3^{ème} ; Nathan.

VERS UNE ARTICULATION

THEORIE DES SITUATIONS / THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Annick Flückiger³⁴

Université de Genève

Ce texte reprend, dans ses grandes lignes, notre travail de thèse intitulé "**Genèse expérimentale d'une notion mathématique: la notion de division comme modèle des connaissances numériques**". La méthode utilisée dans la recherche conduite est expérimentale, au sens d'une mise à l'épreuve des faits, d'une vérification des hypothèses formulées. Il s'agissait, dans le cadre d'une classe de cinquième primaire, d'étudier, à la lueur de la théorie des situations, les phénomènes observés lors de la genèse provoquée de connaissances numériques. La question théorique sous-jacente est celle de la pertinence, dans les analyses, de l'articulation de la *Théorie des Champs Conceptuels* de Vergnaud avec la *Théorie des Situations* de Brousseau, cette dernière servant de cadre de référence à la mise en place expérimentale. La notion de schème - telle qu'elle est définie à la suite de Piaget par Vergnaud - en lien avec celle de *classes de situations* est au cœur des analyses faites. Le concept de *contrat didactique* dans son articulation avec le *contrat de recherche*, ainsi que le concept de *mémoire didactique* sont travaillés ici avec une centration sur le *sous-système élève*, point d'entrée privilégié de notre étude du système didactique.

Après avoir explicité quelque peu la logique sous-jacente à cette recherche, nous préciserons les questions et modèles travaillés. La deuxième partie permettra de décrire la mise en place expérimentale. Enfin, après avoir fait état des analyses et résultats obtenus, nous proposerons de questionner, à propos de la construction des connaissances numériques, la modélisation faite par Brousseau du fonctionnement des connaissances en situation a-didactique.

I. LOGIQUE GENERALE DE LA RECHERCHE

Il s'agissait pour nous dans cette recherche, de s'intéresser à la construction des connaissances, à l'élaboration d'une rationalité mathématique à propos du numérique à l'école

³⁴ annick.fluckiger@pse.unige.ch

primaire. Nous sommes dans une perspective didactique, la centration se fait donc sur les conditions de l'apparition et de l'évolution des connaissances et ce, dans le cadre scolaire, donc en référence à des savoirs organisés, socialement identifiés. Le choix fait a été celui de la division, division qui ne sera approchée dans cette expérience que du seul point de vue numérique; donc sans problème formulé avec des mots et/ou faisant référence à des situations concrètes. Les élèves de cette expérience, élèves de cinquième primaire d'une école genevoise, n'ont pas reçu préalablement d'enseignement spécifique quant à un algorithme de division. L'entrée est celle de la définition d'une opération inverse de la multiplication; ce n'est bien sûr pas formulé dans ces termes aux élèves, ceux-ci "savent" par exemple que douze divisé par quatre égal trois parce que trois fois quatre égal douze. Il est clair que même sans avoir scolairement étudié un algorithme de division, les élèves ne sont pas culturellement ignorants de son existence, et en particulier la forme du diagramme usuel, présent dans les manuels scolaires, ne leur est pas totalement étrangère.

Etudier, pour les élèves, la *notion* de division (au sens étymologique de *apprendre à connaître*) à partir de la problématisation de son calcul, et étudier à travers cela, du point de vue du chercheur, la construction des connaissances numériques dans le champ conceptuel de la division, tel est, sommairement résumé, le double objectif de la mise en place expérimentale.

1. Pourquoi la division?

Trois raisons peuvent être invoquées. La première tient à la richesse même de cette notion mathématique qui contient en elle-même la possibilité de retravailler l'ensemble des connaissances numériques abordées antérieurement à l'école primaire, qu'il s'agisse des différents algorithmes déjà étudiés mais aussi bien sûr, de la numération, des propriétés de décomposition des nombres, des propriétés des opérations... La division offre également une entrée privilégiée pour questionner l'univers numérique; notons que cette année de cinquième primaire est, en Suisse romande, l'année d'un travail spécifique sur les nombres décimaux. Relativement aux connaissances numériques, penser la division comme "modèle" est à la fois comme pour tous les modèles, producteur et réducteur car ne présentant qu'un certain point de vue. En tant que condensé des connaissances numériques, la division et son calcul vont permettre de se centrer sur une problématique exclusivement numérique sans faire référence à priori, à des pratiques sociales externes.

La deuxième raison motivant ce choix est l'extrême richesse des travaux déjà faits³⁵, qu'il s'agisse de travaux à connotation historique ou de travaux didactiques. L'analyse à priori se trouve enrichie de l'apport de ces travaux. Nous adhérons là à l'importance de la capitalisation des résultats de recherche et sommes dans une logique de continuité et non d'originalité quant au thème choisi; c'est également ce que nous allons mettre en évidence dans le point suivant.

Le troisième motif ayant conduit à travailler la notion de division, peut s'exprimer en termes de filiation relativement aux travaux initiés par une recherche FNRS (Fonds National de Recherche Scientifique), recherche effectuée de 1989 à 1991 à Genève sous la responsabilité de Brun, avec Conne et Retschitzki. Ces recherches ont permis d'étudier les caractéristiques propres à l'algorithme de division. Brun et Conne ont ensuite analysé les erreurs des élèves lors de l'effectuation d'un calcul écrit de division, mettant en évidence l'existence d'erreurs systématiques, et proposant une classification de ces erreurs. Cette classification est faite en regard de la notion de *schème*. En analysant les erreurs comme des formes transitoires de connaissances, Brun et Conne ont été amenés à penser les erreurs comme des traces de la construction progressive d'un "schème-algorithme". Ils ont mis en évidence que les erreurs manifestent une connaissance à l'œuvre et sont les produits de certains fonctionnements des schèmes; ils ont par là ouvert la voie d'une analyse des productions des élèves en regard du concept de schème tel qu'il est défini dans la théorie des champs conceptuels par Vergnaud.

C'est cette filiation là et les apports de ces travaux qui nous ont permis de penser notre recherche, de penser l'analyse des productions d'une classe d'élèves en regard du concept de schème, productions recueillies dans une mise en place expérimentale se référant à la théorie des situations.

2. Questions et modèles travaillés

Notre étude est centrée sur le sous-système élève. Bien sûr, la perspective systémique qui est celle de la didactique des mathématiques exclut que ne soient pas analysés les deux autres pôles du triplet modélisant usuellement le système didactique, à savoir le savoir et le pôle enseignant. Nous centrer sur le pôle élève, dans une recherche effectuée sur une longue durée dans une classe entière, signifie une analyse des données restituant toute l'importance de la classe en tant qu'entité d'échanges, de débats, d'interactions à propos du savoir en jeu. C'est la force de la théorie des situations de permettre cela. La prise en compte du cognitif en didactique, objet de

³⁵ Nous faisons là référence aux travaux de Brousseau bien sûr, à ceux de Guinet (1978 & 1979) concernant l'"*Histoire des techniques opératoires*" ainsi qu'à différentes thèses, en particulier celles de Mopondi 1986, Banwitiya 1993, Guinet 1994. Les travaux de Brun et Conne à Genève sont traités spécifiquement dans le paragraphe suivant

débat dans la communauté didactique, nous semble quant à nous essentielle à la compréhension des phénomènes de conceptualisation en situation didactique; cela implique bien sûr une mise en relation constante avec les conditions didactiques initiatrices de ces phénomènes. En résumé, la théorie des situations charpente conceptuellement cette recherche, la théorie des champs conceptuels avec la notion de schème est au cœur des analyses centrées sur le sous-système élève. La pertinence de cette articulation est une des hypothèses de cette recherche.

Cette double approche permet une entrée dans la question du sens des connaissances qui rompt avec la dichotomie habituelle opposant sens de la division lié à des problèmes "concrets" et algorithme de calcul. Il est d'usage, à l'école primaire, d'attribuer au travail sur les algorithmes de calcul écrit, une fonction de "drill" lui déniait par là un intérêt dans la formation des connaissances mathématiques. Nous centrer sur le numérique à l'exclusion de problèmes formulés avec des mots et montrer, de par les analyses, la pertinence à l'intérieur de l'univers mathématique, des questionnements initiés par les élèves, la variété des invariants mis en jeu, la richesse des objets rendus sensibles par les élèves ... permet de mettre en évidence un aspect du "sens" trop souvent négligé dans l'enseignement primaire. Au nom de la préservation du sens, il y a nous semble-t-il un aplatissement entre sens et référence à des situations de la vie courante, aplatissement dommageable relativement aux questions internes aux mathématiques. L'hypothèse faite est la suivante, la théorie des situations qui, depuis l'origine, se veut une théorie des rapports entre sens et situation (Artigue, 1988) est suffisamment puissante pour qu'une ingénierie adéquate soit productrice de sens y compris là où on l'attend le moins, dans le travail des algorithmes de calcul à l'école primaire. Notons que la problématique même de l'algorithmisation d'un calcul est une problématique tout à fait intéressante, non travaillée à ce niveau de l'enseignement, mais nous ne nous sommes pas donnés ici les moyens de la traiter réellement. Nous reprenons de Brousseau (1988) la définition du sens d'une connaissance en tant que tissu de raisonnements et de preuves, de reformulations et de formalisations, de modèles implicites qui lui sont associés. Dans le sens d'une connaissance, sont incluses, dit Brousseau, les questions auxquelles cette connaissance aide à répondre et celles qu'elle permet de poser. C'est dans cette perspective qu'est travaillée la question du sens dans cette recherche.

II. ASPECTS METHODOLOGIQUES

Au plan méthodologique deux caractéristiques doivent être soulignées; d'une part, la durée (il s'agit d'une étude longitudinale sur une année scolaire en ce qui concerne le corpus principal analysé), d'autre part, le type de collaboration établi avec l'enseignant.

1. Mise en place expérimentale

Après une année d'observations préalables nous permettant de nous familiariser avec l'épistémologie personnelle du maître, l'expérimentation proprement dite porte sur une classe entière de cinquième primaire. Les élèves sont alors confrontés à des problèmes exclusivement numériques de division, calculs proposés avant tout enseignement d'un algorithme adéquat, alors que les élèves ne connaissent, scolairement parlant, que l'équivalence entre multiplication et division dans les cas simples relevant des tables³⁶.

Les observations concernent la totalité des séances consacrées à la notion de division, soit près de cinquante séquences de classe³⁷. Le corpus d'analyse est constitué des protocoles des séances observées et enregistrées, ainsi que de l'ensemble des traces écrites du travail effectué, qu'il s'agisse des productions des élèves ou de celles du maître qui écrit au tableau. Les séances sont de diverses natures: séance de calcul, journal, débat, tournoi. Sans entrer dans le détail de chacune de ces séances, il semble utile de préciser que les séances dites "de calcul" sont de loin les plus nombreuses et que les séances dites "journal" font référence au dispositif mis en place par Sensevy dans son travail de thèse à propos des fractions. Ce dispositif que nous avons intégré et transformé pour l'articuler à notre problématique "division" s'est avéré robuste, et particulièrement pertinent quant à la prise en charge par les élèves de l'avancée du temps didactique; il a, de fait, été décisif dans notre expérimentation. Ce dispositif a, dans son articulation avec les autres séances, rendu possible, *dans la durée*, la mise en oeuvre du processus de dévolution indispensable à l'élaboration d'une "macro-situation a-didactique". Même si cette expression est quelque peu abusive en regard de la théorie des situations, elle est significative des caractéristiques essentielles que nous voulions voir émerger dans cette recherche, en particulier le fait que tout au long de l'année, le maître ne validera ni n'invalidera, à propos des divisions, les résultats obtenus par les élèves. Cela ne signifie en aucun cas que le maître renonce à enseigner, cela ne signifie pas que l'évolution des connaissances mises en jeu est laissée à la seule inventivité des élèves, mais cela signifie, et c'est le pari fort qui est fait, que la mise en place d'une situation a-didactique sur le très long terme est possible par le seul jeu de variables didactiques. Cela signifie qu'un choix judicieux de ces variables et une gestion des séances adéquate permettent que les élèves soient eux-mêmes producteurs de questions mathématiques pertinentes relativement au savoir mathématique en jeu.

³⁶ "table" (de multiplication...) en France, "livret" en Suisse Romande.

³⁷ Voir en annexe la liste des séances enregistrées en 5^{ème} primaire.

Les variables didactiques en question sont ici les variables numériques déterminées sur la base des travaux antérieurs notamment ceux concernant les algorithmes de division, ce sont aussi les variables de commande modifiant, sur la base d'analyses des procédures des élèves, la nature des séances proposées: séance de calcul, séance d'écriture dans le "Journal", séance de débat à partir d'une question antérieurement rendue sensible, tournois de méthodes.

Les décisions quant à l'activation des différentes variables sont prises en fonction des analyses faites des séances précédentes: cette articulation est un élément méthodologique important, nous y reviendrons dans le point suivant. Les séances de calcul constituent en elles-mêmes des "micro – ingénieries" pensées et temporellement structurées relativement à la théorie des situations . Il s'agit dans chaque cas de proposer un calcul de division et de faire en sorte, de par les conditions didactiques mises en place, que ce calcul devienne pour l'élève ce que nous appellerons une "*division-problème*". Ce qui apparaît, dans un premier temps, comme un simple calcul pour lequel il s'agit de trouver un nombre résultat, doit progressivement s'inscrire dans un processus de recherche d'un algorithme, dans un processus d'élaboration de connaissances concernant le numérique. La théorie des situations met en avant l'importance, pour que l'élève donne du sens à son activité mathématique, de faire d'abord surgir le besoin d'une nouvelle notion, d'un nouveau concept, avant d'enseigner des solutions à des problèmes non encore existants pour l'élève. A l'expression "résoudre des problèmes" Brousseau préfère celle de "s'occuper de problèmes" précisant l'importance du questionnement produit par celui qui travaille le problème.

«Savoir des mathématiques ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe des problèmes mais on oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail; trouver les bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions» (Brousseau 1986/1994, p49).

Les problèmes qui vont nous intéresser dans cette recherche vont être présentés aux élèves sans texte, uniquement par la donnée de deux nombres et d'un signe de division inscrit entre ces deux nombres, données problématisées par l'environnement didactique. De même que le sens n'est pas contenu tout entier dans un problème "concret" aussi emblématique soit-il, le sens dans le cas qui nous occupe n'est pas issu des seules données numériques mais de l'ensemble de la situation incluant les schèmes activés dans le milieu co-construit - pour reprendre la formulation de Mercier - par le maître et les élèves. Il est aussi conditionné par le contrat didactique bien sûr, mais aussi par le contrat de recherche existant de par l'expérimentation. Nous reviendrons ultérieurement sur cet aspect. C'est donc bien une analyse intégrant les conditions mises en place dans la situation didactique et non pas un relevé des procédures relativement aux seules données numériques qu'il s'agira d'effectuer.

2. Une gestion collaborative de la recherche

Rappelons qu'il ne s'agit en aucun cas d'initier ou de valider une quelconque méthode d'enseignement de la division. La mise à l'épreuve de constructions théoriques nécessitant la présence en classe des chercheurs sur une longue durée, ne peut se faire valablement sans une prise en compte, dans les analyses, des contraintes institutionnelles de l'enseignant et de son épistémologie personnelle. Cela suppose également, quand il s'agit d'un sujet comme celui ici choisi de la division et pour lequel l'impact culturel ne peut être négligé, que soient informées les familles de l'existence d'une recherche dans la classe ; ce qui a été fait.

Concernant les contraintes de l'enseignant, il s'agit à la fois d'être suffisamment familier avec le fonctionnement habituel de ce dernier en classe, pour lui laisser l'opportunité de gérer sa classe pendant les séances observées et ce, en combinant contraintes de la recherche (notamment quant au savoir au jeu) et gestion usuelle pour lui. Notre choix a été de commencer la recherche en classe par une première séance relativement familière à l'enseignant, à la fois quant à son contenu et quant à sa forme.

séance 1

- | | | |
|----|--|--|
| 1 | LE MAÎTRE- j'ai déjà eu / j'ai déjà eu plusieurs fois l'habitude de vous
montrer des ... de vous mettre quelque chose au tableau et de vous
laisser vous débrouiller aujourd'hui on va faire de même | |
| 2 | LE MAÎTRE - je mets ça | |
| 3 | STE- je sais déjà la réponse | |
| 4 | LE MAÎTRE- [qui peut lire ? | |
| 5 | STE- lire? | |
| 6 | LE MAÎTRE- qui peut lire ce qui est écrit/// STE | |
| 7 | STE- neuf cent nonante divisé par neuf | |
| 8 | LE MAÎTRE- est-ce que quelqu'un peut lire / ou veut lire d'une autre
manière / a envie de lire ceci d'une autre manière/es | |
| 9 | ES- gé gé zéro | |
| 10 | (rires) | |
| 11 | ES- ça ressemble | |
| 12 | LE MAÎTRE- dans les préliminaires j'ai dit qu'on faisait une recherche
de quoi? | |
| 13 | élèves- de mathématique | |
| 14 | LE MAÎTRE- de mathématique/ alors ça ressemble à des g mais ce n'est
pas des g // est-ce qu'on est d'accord avec ce que propose STE? | |

990 : 9

D'autres aspects des contraintes qui pèsent sur l'enseignant sont à prendre en compte par les chercheurs: les contraintes du curriculum, le suivi des élèves individuellement dans leurs apprentissages notamment en ce qui concerne les élèves en difficulté, etc.. En ce qui concerne la division, tous ces aspects seront traités collectivement par l'équipe de recherche, équipe qui, pendant la durée de la recherche inclut le maître de la classe.

L'organisation générale de l'expérimentation fait se succéder des boucles hebdomadaires comprenant, tout au long de l'année, séances en classe (une, deux ou trois) et séance de concertation entre enseignant et chercheurs. Le maître doit être à la fois enseignant pendant les séances faites en classe, et chercheur lorsque, de façon hebdomadaire, les analyses des productions des élèves sont faites "on line" en vue de décider du contenu et de l'organisation des séances suivantes. C'est en effet au cours de ces séances qu'il est décidé, en collaboration, d'activer telle ou telle variable.

Le contrat de collaboration établi entre maître et chercheur pour la durée de la recherche peut être synthétisé comme suit³⁸ (voir figure 1):

Phases de la recherche		Chercheur	Enseignant
<i>Temps de l'expérimentation</i>			
Séances hebdomadaires de concertation enseignant - chercheurs	↗ choix - décisions-anticipations ↑↓ ↘ analyses "on line"	Collaboration et décisions communes Diffusion des savoirs didactiques Diffusion des savoirs d'expérience de l'enseignant	
Séances en classe	Calcul - Journal - Débats...	Le chercheur est observateur	L'enseignant est interprète des décisions prises
<i>Temps des analyses</i>			
Travail d'analyse final	Analyse de l'ensemble des données	Le chercheur est théoricien	

Figure 1

Associé en tant que chercheur pendant les séances de concertations hebdomadaires et les analyses "on line", le praticien-enseignant interprète, pendant le déroulement des séances en classe, les résolutions prises en commun par l'équipe de recherche. Il est alors amené à prendre des décisions propres à la gestion de la classe, décisions qui seront elles-mêmes ensuite, prises en compte dans les analyses. Ce n'est que pendant les analyses faites après-coup, lorsque l'ensemble

³⁸ N'apparaît pas dans ce tableau le travail préalable fait avant que soit mise en place l'expérimentation proprement dite. Notons que dès les observations préalables le maître a été associé au projet par le biais de réunions régulières de concertation.

du corpus est rassemblé, lorsqu'il s'agit d'analyser la totalité du corpus constitué, lorsqu'il s'agit de confronter les données recueillies aux modèles étudiés, que l'enseignant est absent du processus.

Les séances faites en classe sont conçues, nous l'avons dit, comme des micro-ingénieries. La théorie des situations sert de cadrage théorique et la gestion de ces séances prend en compte les différents fonctionnements des connaissances modélisés par Brousseau. Il s'agit donc pour le maître de gérer le déroulement des séances en rendant possibles des phases d'action et de communication, phases qu'il s'agira de repérer en termes de situations d'action, de formulation et de validation. La clôture des séances est un moment délicat pour le maître puisqu'il s'agit alors de permettre que la macro-situation didactique garde un caractère a-didactique et que le processus de dévolution ne soit pas rompu. Ceci s'avère d'une gestion délicate compte tenu de la pression exercée par les élèves qui s'attendent au moins en fin de séance, et conformément au contrat usuel, à ce que le maître valide ou invalide les résultats obtenus. C'est dans la durée que doit se construire, pour les élèves, à partir de l'enchaînement des "divisions-problèmes" et des autres séances du dispositif, un questionnement pertinent relatif à la division.

III. LES RESULTATS DES ANALYSES

Procédures élaborées par les élèves et interactions en classe forment le corpus d'analyse, le schème est l'unité d'analyse privilégiée pour étudier les productions des élèves. Ces productions sont interprétées en terme de procédures relativement aux conditions didactiques de leur émergence. Après avoir traité du rôle du maître, nous présenterons, sans entrer dans le détail des analyses faites, les résultats obtenus quant à la question du contrat de recherche et de son articulation avec le contrat didactique, ainsi que quelques apports clés de la notion de schème dans une lecture didactique d'une situation d'enseignement. Un dernier point sera consacré à la notion de mémoire didactique relativement au sous-système élève.

1. Gestion du maître

Le tableau d'ensemble des séances faites en classe est donné en annexe. Il apparaît que, très rapidement, au bout de quelques séances de calcul, les procédures des élèves stagnent, se figent, chacun se spécialisant, en fonction des nombres donnés, dans un traitement reproduit plus ou moins à l'identique: décomposition des nombres donnés, transformation en multiplication "à trou", etc. Cela montre, s'il en était besoin, que la seule inventivité des élèves ne suffit pas à faire avancer le temps didactique et que ce sont bien les conditions faites de par l'activation de

variables adéquates, de par la gestion de la situation par le maître qui peuvent rendre l'élève *chronogène* ainsi que le montre Sensevy dans ses travaux (Sensevy 1994,1996).

Dans l'analyse du rôle du maître, deux dimensions sont à prendre en compte, l'une concerne les prises de décision avant la séance, l'autre la gestion de la classe pendant le déroulement de la séance. La première relève dans notre cas du dispositif expérimental puisque les décisions, nous l'avons dit, sont prises par l'équipe de recherche (incluant le maître) sur la base du projet initial et des analyses des procédures des élèves antérieurement relevées. Il s'agit alors de déterminer le type de séance à mettre en œuvre: division-problème (et avec quelles données numériques), activité d'écriture dans le journal de division, débat ascendant, tournoi des méthodes. La gestion de la classe même relève du rôle usuel du maître qui enseigne, et nous retrouvons là les caractéristiques de l'action du maître dans sa classe³⁹. Que fait le maître dans le cas qui nous occupe?

Sur l'ensemble de la macro-situation, les traits essentiels à relever sont ceux de durée, de répétition et de dévolution. Dans le texte de son ouvrage, "LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE", Chevallard met en évidence que "la distinction de l'enseignant et de l'enseigné s'affirme [...] spécifiquement, non par rapport au savoir, *mais par rapport au temps comme temps du savoir*⁴⁰" (Chevallard, 1985, p 72) ; ils ont, dit-il, des rapports différents à la durée, ce qui les constitue comme tels en tant que maître et élève. Le dispositif de la recherche est conçu pour travailler cette dimension du rapport au temps didactique des élèves. Le maître, par ses indications, fait en sorte que l'élève soit légitimé à anticiper et à relire le passé; la notion de schème qui inclut relecture du passé et anticipations, va permettre de lire en quoi les élèves deviennent progressivement initiateurs dans l'avancement du temps didactique.

Dès la première séance, le maître met en place une structure temporelle d'action: un calcul est donné, des réponses sont proposées puis discutées à la fois du point de vue du *résultat* produit et du point de vue de la *méthode* utilisée. Le débat est le point d'ancrage de la dévolution de l'avancée du temps didactique, c'est un point clé, et le maître, dès la première séance, donne des indices des règles du jeu qui doit être joué tout au long de l'année.

séance 1

35	<i>LE MAÎTRE- si / si vous avez // là l'idée on est bien d'accord c'est que ES montre comment elle a fait son raisonnement / donc on voit // et si vous avez des remarques par rapport à son raisonnement // dans la mesure où vous n'avez pas compris / euh... vous avez le droit de le faire</i>
----	--

³⁹ A ce sujet, voir l'identification des gestes et la modélisation de l'action du professeur dans Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000.

⁴⁰ En italique dans le texte

savoir / vous levez la main et vous dites tiens là j'ai pas compris
pourquoi tu fais comme ça [...]

147 élève- il y en a beaucoup qui n'ont pas répondu

148 NA- je dis pas 110

149 LE MAÎTRE- NA elle a le droit de dire // je veux dire ça c'est aussi une
réponse NA elle dit moi je dis pas 110 / j'ai rien à proposer mais je dis
c'est pas 110 / pour moi c'est aussi une réponse parce que on peut dire /
ben pour moi je sais que ça c'est pas juste / on a le droit de dire ...j'ai
pas eu le temps de finir mais je sais que ... il faut pas se fermer la
porte/ vous avez le droit de lever la main même si vous n'avez pas
quelque chose de précis à me dire /vos impressions sont déjà
importantes //si elle pense que c'est pas juste elle a le droit de le dire et
c'est aussi une réponse/ on n'est pas obligé de déboucher sur un nombre
comme réponse

A cette occasion le maître précise un élément important: ce qui est demandé c'est l'expression, la communication et non uniquement le résultat comme il est d'usage de le penser dans une situation qui, à priori, se présente comme une situation de calcul. Pour ce faire, il définit un nouveau but, il donne ainsi des indications sur le contrat didactique à l'œuvre dans cette "recherche". La situation d'action est finalisée par la recherche d'un résultat "combien ça fait", la situation de communication est finalisée elle, par l'explicitation de sa propre action ou par le jeu des questions, ou des évaluations adressées à autrui.

Progressivement, par la structuration temporelle donnée par le maître ainsi que par des indications topogénétiques et chronogénétiques, le maître permet l'élaboration d'un milieu adéquat. Par ses relances, le maître conduit les élèves à se questionner mutuellement, il met en évidence des contradictions (par exemple en affichant la liste des différents résultats obtenus et annoncés) et dévolue aux élèves la responsabilité de gérer ces contradictions.

séance 1

145 AL- moi je suis plutôt d'accord avec ES

146 LE MAÎTRE- tu es plutôt d'accord avec ES // bon /// vous avez vu qu'on
a deux réponses possibles alors

De par son refus à valider une réponse, une prise de position, il élabore un contrat didactique inhabituel en ce qui concerne le champ de la division; les élèves jouent volontiers le jeu pendant cette première séquence mais la résistance et la pression exercée par les élèves se font plus fortes à l'issue de la première division-problème lorsque les élèves réalisent que, même en fin de séance, le maître ne tranchera pas.

séance 1

150 élève- c'est quoi le vrai résultat

151 LE MAÎTRE- pardon?

152 élève- c'est quoi le vrai résultat

153 LE MAÎTRE- pourquoi tu dis le (la voix appuie) vrai résultat

154 élève- le vrai résultat de la division

155 LE MAÎTRE- ben si j'en crois le tableau c'est 109 ou 110 // c'est ce que
vous m'avez dit en tout cas

Notons que cela conduira ultérieurement à un débat, inhabituel à ce niveau d'enseignement et fort intéressant, sur l'unicité des résultats dans les calculs.

Le maître n'est pas absent, et de par la gestion qu'il fait, il restreint le champ des investigations en intervenant, comme au tout début de la première séance, pour que l'étude reste dans l'univers mathématique, ou en validant explicitement ce qui n'appartient pas à l'objet de l'étude en cours. Par exemple, en validant l'exécution d'un algorithme de multiplication il indique à la fois que :

- le but de la recherche ne concerne pas l'algorithme de la multiplication, la connaissance visée n'est pas celle-ci, la multiplication en tant que schème-algorithme est considérée comme disponible puisque pour cet objet là, le maître abandonne sa posture dévoluant,
- chronogénétiquement la question de la multiplication est dépassée il est donc possible de s'appuyer sur cette connaissance pour en faire émerger de nouvelles,
- topogénétiquement l'algorithme de la multiplication est dans le champ des connaissances à mettre en œuvre puisque le maître lui-même est prêt à jouer le rôle de personne - ressource concernant cette question, est prêt à reprendre la position classique du maître qui dit le vrai d'une réponse.

Il balise ce faisant, le champ d'investigation des élèves, indiquant en négatif ce qui n'est pas l'enjeu de la recherche.

Nous l'avons dit, l'unité d'analyse privilégiée pour étudier les productions des élèves est le schème. Vergnaud donne du schème différentes définitions. L'une d'elle, donnée au cours de la VIII^{ème} école d'été de didactique des mathématiques à Saint-Sauves d'Auvergne (août 1995) bien qu'annoncée comme «le plus souvent inutilisable» par l'auteur nous semble quant à nous judicieuse pour penser l'adaptation du sujet-élève à la situation en l'occurrence didactique. C'est celle d'une «fonction temporalisée de l'espace des informations possibles dans l'espace des actions possibles» (Vergnaud, 1996b, p177). C'est bien sur cette dualité informations disponibles - actions possibles, que le maître joue pour mettre en place le milieu adéquat à l'étude visée.

Notons également que, au cours des débats, c'est le maître seul qui garde la maîtrise du tableau et donc de l'uniformisation des symboles attachés aux procédures de calcul décrites par les élèves.

séance 1

- 129 LU- après en bas j'ai mis 90 divisé par 9 / 10 et puis en bas j'avais fait
0 divisé par 9
- 130 LE MAÎTRE- et ça fait ?
- 131 LU- 0 //après j'ai additionné le 100 et le 10
- 132 LE MAÎTRE- 0 tu laisses tomber /// j'écris comme
ça tout le monde comprend?// d'accord///
-
- 160 LE MAÎTRE- moi je sais rien je suis juste un bras
qui transcrit retranscrit vos actions et ma tête est

$900 : 9 = 100$	$\searrow$	110
$90 : 9 = 10$	$\nearrow$	
$0 : 9 = 0$		

Cette expression écrite des procédés verbalisés sert de point d'appui lors des débats mais, bien que constituant un support privilégié, ce n'est pas l'unique référence commune; les élèves font preuve d'une mémoire redoutable des propos échangés et toute modification de position est immédiatement mise en évidence, nous reviendrons sur cet aspect dans le paragraphe concernant la mémoire didactique.

Le jeu du maître est repéré au travers d'interventions qui sont centrées essentiellement sur le but de l'activité, la structuration temporelle de la séquence, les règles du jeu du débat, l'espace des informations disponibles et donc des actions possibles. L'élève est entraîné dans une dynamique qui valorise les échanges entre pairs. Ces échanges sont centrés sur deux dimensions qui vont intervenir dialectiquement tout au long de la recherche, travail du résultat, travail du procédé de calcul. Cette dialectique constitue le fondement de l'élaboration des connaissances numériques en situation didactique.

2. Schèmes et classes de situations

En lien avec la dialectique familier / nouveau, dialectique fondamentale dans le processus d'acquisition des connaissances, Vergnaud élabore une définition du schème en dualité totale avec la notion de situation. Il le définit, dans la théorie des champs conceptuels comme *totalité dynamique fonctionnelle et organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée* (Vergnaud 1990/1996a, 1996b). Il précise que l'invariance dont il est question est celle de l'organisation et non pas celle de l'activité qui elle, dépend des variables de situation et qui de fait sont, pour l'élève, contingentes. Une définition analytique et plus opératoire mentionne quatre composantes du schème:

- un but
- un processus génératif de la conduite qui peut être analysé comme un ensemble de règles d'action, de prise d'information et de contrôle
- un système de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte qui permettent de prélever l'information pertinente et de la traiter.
- des possibilités d'inférence en situation (ajustements, régulations et révisions étant possibles au cours du déroulement de l'activité)⁴¹

Si la notion de *schème* renvoie à celle de *situation*, celle d'*invariant opératoire* (concepts et théorèmes en acte) renvoie aux *objets mathématiques*, à leurs propriétés et relations. A travers les notions de *concept-en-acte* et de *théorème-en-acte* sont différenciés deux critères, celui de la *pertinence* et celui de la *vérité*. Les concepts-en-acte sont tenus pour pertinents et permettent de

⁴¹ Nous reprenons là la formulation de Vergnaud 1999. D'autres versions de la même définition peuvent être relevées notamment dans Vergnaud 1990/1996a et 1996b

sélectionner l'information appropriée compte tenu de la situation, les théorèmes-en-acte sont, dans l'action, tenus pour vrais.

a) Classification des procédures

L'approche en termes de schème permet de prendre en compte la notion de stratégie qui renvoie aux invariants rendus opératoires et aux inférences faites. Cette lecture a permis l'identification de deux grandes classes de procédures fondées sur le traitement initial mis en œuvre en situation par les élèves. L'action initiale peut porter sur le traitement du diviseur, du dividende (ou des deux), c'est la première catégorie des procédures qui engagent le calcul par le traitement des nombres donnés. Les traitements des nombres relevés sont identifiables en tant que décomposition additive, traitement chiffre par chiffre, séquencement du dividende en fonction de sa régularité par exemple. La deuxième grande classe des procédures relevées opère une transformation, non sur les nombres, mais prioritairement sur l'opération. Il peut s'agir d'un tâtonnement multiplicatif, d'une multiplication "à trou", d'une transformation en additions ou soustractions, de l'utilisation d'un algorithme de division.

Nous ne détaillerons pas plus avant cette classification, notons cependant que, compte tenu de l'entrée mathématique choisie, la soustraction n'apparaît pas dans les objets mathématiques rendus sensibles par les élèves. Cela souligne le fait que la soustraction n'est pas d'évidence associée à la division et que son émergence dans le champ conceptuel de la division est étroitement lié aux conditions didactiques de cette introduction. Dans le cas qui nous occupe qui initie le travail de division à partir de la multiplication, c'est l'addition qui émerge comme liée à la multiplication et donc à son opération inverse la division, la soustraction n'intervient dans le champ de la division que par le détour de l'addition

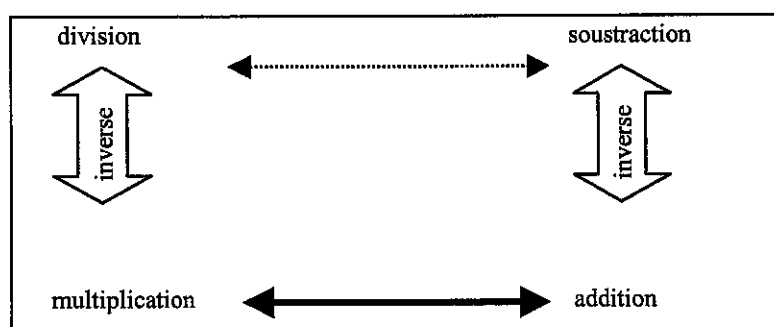


Figure 2

b) Classification des procédures

Les analyses faites mettent en évidence l'existence de deux grandes classes de situations; l'une correspond à une *situation de calcul du quotient* l'autre à une *situation de vérification / invalidation*.

Dans le cas de la *situation de calcul*, deux nombres et une opération sont donnés, le but est de fournir un nombre résultat, ainsi qu'une réponse minimalement verbalisée. Les invariants en jeu sont alors essentiellement ceux liés à la numération de position qui permet la décompositions des nombres ainsi que tous les invariants associés à la multiplication. Les ensembles de nombres (entiers, décimaux, non décimaux, négatifs) sont questionnés ainsi que la nature, l'existence, l'unicité du quotient, la pertinence de la notion de reste, etc.

Dans le cas de ce que nous appellerons *situation de vérification / invalidation*, les élèves ont à disposition la liste des résultats proposés par leurs pairs (ou leur unique résultat tant qu'il s'agit de la phase de recherche individuelle) et il s'agit d'attribuer une valeur de vérité à chacun de ces résultats. Dans ce cas les théorèmes en acte permettant d'invalider le résultat en fonction de l'ordre de grandeur, du dernier chiffre..., deviennent centraux. Vérifier ou invalider par la seule multiplication ou par une combinaison de multiplication et addition devient un point d'appui pour rendre sensible la différence entre quotient exact et quotient euclidien.

Le dialogue entre ces deux situations qui, temporellement, se conjuguent en permanence au cours des séances, va être au cœur de la conceptualisation des connaissances numériques dans cette recherche. Ces deux situations aux caractéristiques mathématiques différentes activent des schèmes différents. La notion de schème avec ce qu'elle implique d'emboîtements, de réorganisations permanentes rend compte du travail de conceptualisation des élèves.

c) Restes et retenues

Outre la confirmation des résultats antérieurs obtenus par Brun et Conne, nous avons pu mettre en évidence une difficulté propre à l'algorithme de division à partir de la question des "retenues".

Dans le déroulement de l'algorithme usuel, la division de type "division euclidienne" est présente immédiatement. En ce qui concerne la division, et contrairement à ce qui se passe dans tout algorithme antérieurement étudié, les calculs partiels ne sont pas nécessairement exécutés sur la quantité totale en jeu. Pour une addition, une soustraction ou une multiplication, le calcul est effectué, le résultat écrit par le biais d'un jeu de retenue si nécessaire. La retenue est alors utilisée pour mettre en attente une partie du résultat obtenu lors du calcul précédent celui-ci ayant été effectué dans sa totalité.

Par exemple

- pour calculer 943×7 le premier calcul partiel à faire dans l'algorithme traditionnel est $7 \times 3 = 21$, 1 est écrit et 2 est noté (ou non) en tant que "retenue" et sera réintroduit lors du calcul partiel suivant 7×4 , le système de numération jouant là pleinement son rôle dans l'exécution de l'algorithme de calcul écrit: la totalité du nombre 3 utilisé dans le premier produit partiel a été multipliée

- dans le cas de la division $943 / 7$ le premier quotient $9 / 7$ donne 1 reste 2, ces deux centaines (prises comme unité dans la division partielle de 9 par 7) ne sont pas divisées, elles ne le seront que réintroduites dans le calcul partiel suivant $24 / 7$.

Il y a là une différence fondamentale entre les algorithmes d'addition, soustraction, multiplication d'une part et division d'autre part.

Conformément aux observations déjà faites par Brun (1996), en situation d'inventivité à propos des algorithmes de calcul, les élèves réactualisent dans le nouvel algorithme de calcul les schèmes familiers concernant les retenues. Nous avons pu, par exemple, relever les productions suivantes:

Dans les productions ci-dessous chaque dividende partiel est divisé dans sa totalité

8 divisé par 2 donne 4
 3 divisé par 2 donne 1,5 (et non 1 reste 1)
le 5 est reporté à l'ordre de grandeur suivant
 2 divisé par 2 donne 1 plus la "retenue" 5
 soit 6
le même procédé est utilisé avec
 7 divisé par 2 donne 3 et 5 de retenue
 8 divisé par 2 donne 4 ajouté à 5 de retenue soit
 9

5 divisé par 2 produit 2,5 et non pas 2 reste 1
 s'il y a report c'est le report de la partie non entière du quotient
 ici il s'agit de cinq dixièmes de l'ordre considéré à savoir les unités de mille
Dans ce cas pour résoudre son problème, l'élève met en défaut la numération de position introduisant deux virgules permettant de signaler des dixièmes quelle que soit la position du chiffre considéré.

Face à un obstacle, les élèves puisent, dans le répertoire des schèmes disponibles, et ce, en fonction des caractéristiques de la situation qui font intégrer la situation nouvelle à une classe de situations connues. Ceci a mis en évidence pour nous que le principe même de la division euclidienne qui consiste à décomposer le dividende (éventuellement partiel) en somme du plus grand multiple possible du diviseur et d'un reste est présent dès l'entrée dans l'algorithme traditionnel de division. Le reste ainsi isolé ne sera pas divisé mais réintroduit dans le dividende partiel suivant lors du déroulement de l'algorithme. Ceci représente un saut conceptuel important. C'est une caractéristique essentielle de l'algorithme de division en regard des algorithmes précédemment étudiés, cette difficulté doit être didactiquement traitée lors de l'enseignement de l'algorithme de division.

3. Contrat

S'il est possible dans cette recherche de voir à l'œuvre une créativité mathématique analysable en termes de schèmes c'est, nous l'avons dit à plusieurs reprises, de par les conditions de la situation didactique mise en place. Dans ce cas, du point de vue des élèves aussi bien que du point de vue du maître, contrat de recherche et contrat didactique sont interdépendants. Nous avons mentionné l'existence d'un contrat explicite de collaboration entre maître et chercheurs. L'importance de la prise en compte dans les analyses de l'existence d'un contrat de recherche entre enseignant qui participe à une expérimentation et chercheur a été mise en évidence par Schubauer-Leoni (1986) puis retravaillée dans des contextes différents par Portugais (1995) et Leutenegger (1999). Nous voudrions quant à nous mettre en évidence la dimension de ce contrat de recherche qui concerne, non plus le maître, mais le sous-système élève. L'analyse des débats montre clairement que le fonctionnement du système didactique est surdéterminé par l'existence d'un contrat de recherche. L'existence d'une dimension de ce contrat propre à la classe est attestée à la fois par des remarques formulées par écrit dans les cahiers - notamment le journal - et pendant les débats.

séance 2 division 4

EST- on peut faire de deux manières

ER- non sinon tout le monde aurait tous les résultats

[...]

ER- c'est-à-dire si on utilise la méthode, la vraie méthode quoi, ça sert à rien que ces gens là ils viennent

Dans cet exemple extrême, ER s'interdit (et veut interdire) l'utilisation d'une forme connue d'algorithme puisque pour lui, l'existence de la recherche (et donc la présence des chercheurs) sous-entend la création de procédures originales. Pour cet élève la dialectique ancien - nouveau exclut dans le cadre de la recherche que le nouveau ne soit pas, de plus, de l'original par rapport aux connaissances scolaires. La classe dans son ensemble a d'ailleurs empêché le maître venu faire un remplacement de "montrer comment on fait la division" pour que la recherche puisse continuer à exister.

Du point de vue des élèves également, le contrat de recherche se traduit par la constitution d'un réseau de contraintes et d'attentes qui surdétermine les contraintes et attentes réciproques liées au contrat didactique usuel. Le poids relatif des contraintes institutionnelles, des contraintes liées au contrat didactique, et de celles liées au contrat de recherche, ce poids est variable au fur et à mesure du déroulement de l'année. S'articulent en fait un contrat didactique local au cours d'une séance, contrat surdéterminé par le contrat de recherche mais ce contrat de recherche est lui-même dépendant du contrat didactique général qui régit en particulier les rapports des élèves aux connaissances officielles et dont le poids se fait plus apparent en fin d'année.

4. Diffusion des procédures et mémoire didactique de l'élève

Un autre résultat qui émerge de l'analyse des données faite au travers du concept de schème concerne la mémoire didactique. Le concept de *mémoire didactique* a été travaillé par Brousseau et Centeno (1991) puis Centeno (1995) dans le cadre de la théorie des situations. Il s'agit de la mémoire du système didactique plus spécifiquement travaillée relativement à l'enseignant. La mémoire du maître lui permet, en utilisant des informations contextualisées, d'activer, par le biais de rappels, des connaissances non encore transformées par les élèves en savoir décontextualisé.

Dans notre recherche, les analyses centrées sur le sous-système élève font une large place à la notion de schème. Cela implique une prise en compte des retours en arrière et des anticipations, il n'est donc pas étonnant qu'aient été mis en évidence des phénomènes relevant de la mémoire didactique des élèves. Celle-ci se manifeste par le biais *de rappels initiés directement par les élèves*, sous différents aspects et avec différentes fonctionnalités. Il est clair que les conditions didactiques mises en place dans cette recherche et gérées avec bonheur par le maître sont favorables à l'émergence de ce phénomène. Elles laissent aux élèves l'opportunité d'être initiateurs de la relecture du passé, et les autorise à surseoir aux décisions, toutes choses constitutives de la notion de mémoire. Diffusion des procédures et donc augmentation du répertoire des résultats et procédés de calcul, aide à la transformation d'une situation de verbalisation en une situation de formulation, telles sont les fonctionnalités de cette mémoire didactique du sous-système élève que nous avons pu relever. La constitution de classes associées à un schème, à la fois source et objet de la conceptualisation, apparaît comme étroitement lié à ce phénomène de mémoire didactique.

a) *Augmentation du répertoire disponible*

C'est l'aspect le plus immédiatement observable. Compte tenu de la constitution sur la durée d'une macro-situation, les élèves s'autorisent à réutiliser des résultats antérieurement validés collectivement, même si ces résultats n'ont pas été formellement institutionnalisés.

LU explicite comment, après décomposition additive du dividende il a trouvé 120 en divisant 600 par
séance 22 division n°37 [205 650 :5]

LU – en premier 5 fois 100 égal 500 il restait 100 alors 5 fois 20

ME- je viens de me rappeler 6 divisé par 5 c'est 1,2

ER- moi aussi je me suis rappelé ça / comme il faut une centaine en plus ça fait 120

Dans cet exemple « 600 divisé par 5 » est rapporté à « 6 divisé par 5 » dont le résultat est connu. L'extension du répertoire des résultats permet de traiter de nouveaux problèmes. Le schème d'action qui à partir des données numériques « six » et « cinq » produit le résultat « un virgule deux » devient une routine qui peut être intégrée à une nouvelle combinaison de schèmes.

Ce ne sont d'ailleurs pas les seuls résultats qui sont rappelés mais aussi les procédés de calcul. C'est la cas de FR qui questionne par le biais du Journal, lieu et moyen d'expression privilégiés de la mémoire didactique de l'élève, une méthode utilisée avec succès par un autre élève lors d'une séance précédente:

FR questionne par écrit:

"Pourquoi la division ci-dessous ne marche pas, cette division a été faite par LU : $826 : 14$ "

Il réécrit alors l'intégralité du calcul de son camarade

(les opérations sont effectuées en colonne):

$80 \times 10 = 800$; $6.5 \times 4 = 26$; $800 + 26 = 826$; $86.5 \times 14 = 1211$

Pour comprendre cet étonnement il faut se référer à la division n°33 [345: 23] faite lors d'une séance antérieure et au cours de laquelle le même élève LU avait proposé: " $20 \times 15 = 300$; $3 \times 15 = 45$ " comme justification de son quotient 15, quotient alors validé par la communauté classe. Lorsque LU propose 86,5 comme quotient de [826:14] avec le même type apparent de calcul, aucun invariant n'est disponible à ce moment pour traiter de la différence des deux situations de calcul. Cette question restera –provisoirement- comme une question non résolue, vrai questionnement mathématique, initié par les élèves eux-mêmes dans l'univers des divisions.

b) Constitution de classe associée à un schème

Un élément constitutif des phénomènes de conceptualisation peut être rapporté à l'identification voire la création par les élèves de nouvelles classes de situation.

Lors du débat concernant la division n°52 [147 097 : 7] l'élève VI propose comme solution

" là il faut faire virgule neuf jusqu'à l'infini comme celui de LI c'est-à-dire cent divisé par trois"

Cet élève reconnaît alors dans la situation débattue, une situation analogue à celle antérieurement rencontrée avec cent divisé par trois, et qu'elle a associé à la production d'un quotient de type "suite illimitée de neufs après la virgule". C'est à partir de ce schème qu'elle construit et produit sa réponse. Certains indices de la situation sont traduits en termes que concepts pertinents pour traiter cette situation et à partir de cette identification, la situation problématique est rapportée à une classe connue pour laquelle un schème est disponible. Dans le cas ci-dessus, l'élève montre qu'elle a identifié une division dont les caractéristiques la font s'apparenter à la division « cent divisé par trois » déjà débattue. Sans même pouvoir produire un résultat, elle montre qu'elle peut associer ce calcul à une catégorie de calculs qui produisent une suite décimale illimitée ce qui pour elle, à ce moment de l'élaboration de ses connaissances, ne peut être qu'une succession de chiffres "neuf".

c) Passage d'une phase de verbalisation à une phase de formulation

Le dernier point ayant trait aux rappels initiés par les élèves concerne la mise en évidence par les élèves eux-mêmes de contradictions. Nous l'avons souligné, la mise en place de la recherche dans la classe et la gestion faite par le maître favorisent les débats contradictoires, le maître lui-même, lors de la mise en place de la macro-situation les suscite. Le processus de dévolution est conduit sur le long terme et les phénomènes de mémoire se multiplient de par l'enchaînement de situations toutes inscrites dans la macro situation de recherche.

La séance n°21 qui traitera de la division "six divisé par cinq" sera cruciale et l'objet de nombreux rappels. En effet au cours de cette séance une élève nouvellement arrivée SAN, défend la réponse "un reste un", résultat qu'elle appuie par la validation classique conjuguant multiplication du diviseur par le quotient entier et addition du reste. Ceci est une nouveauté pour le reste de la classe. Le débat entre les réponses "un virgule deux " et "un reste un" n'a bien sûr pas pu être tranché par les élèves et les deux résultats ont été conservés. Ce n'est que plusieurs semaines plus tard que resurgit cette problématique sous diverses formes, par exemple sous forme de la proposition de "0 reste 167" pour diviser 167 par 8. Nous ne rentrerons pas ici dans le détail des débats concernant la question du reste et autour de laquelle se sont progressivement articulées toutes les questions sensibles. Ce qu'il nous intéresse de souligner ici est la mise en évidence par les élèves de positions contradictoires d'un pair. Dans un premier temps la proposition de SAN a été massivement rejetée , "c'est de la flemme" a été un argument fréquemment utilisé pour caractériser le traitement d'une division en "laissant" un reste. Progressivement, de par les variables mises en jeu, des élèves ont été amené à se positionner différemment par rapport à cette question.

séance 21 division n°36 [6:5]
| SAN propose 1 reste 1

séance 36 division n°52 [147 097 : 7]
| Cette division donne lieu à un débat sur les restes, le résultat "21013 reste 6" est argumenté ce qui provoque la réflexion suivante de FR
| *FR- c'est facile si on ajoute des petits bouts // alors ce que SAN avait fait c'était juste / elle avait mis des restes*

séance 37 division n°53 [25:2]
| Dans la division suivante [25:2], STI propose "17 virgule reste 1", LI proteste voyant là de la part de STI un changement de position non justifié; lui aussi fait référence à la division [6 : 5]
| (en fait STI traite de 35 divisé par 2 ce qui ne gêne en rien le débat)
|
| *LI- 2 fois 17 ça fait 34/ quand SAN avait fait la même chose il était contre*
| *LE MAITRE- quand SAN avait fait quoi?*
| *LI- 6 divisé par 5 // l'autre résultat il est juste par SAN ou par nous? SAN avait trouvé 1 virgule reste 1 et nous 1 virgule 2*

LI s'appuyant sur l'incohérence des décisions de STI s'autorise alors à questionner directement le maître pour qu'il valide un résultat, qu'il prenne position, alors que depuis longtemps il est clair que dans le contrat existant, le maître n'intervient pas sur la validité des résultats.

Dans ces exemples, apparaît la mise en évidence de contradictions par les élèves eux-mêmes. Soit il s'agit d'un changement personnel de position, un élève rend publique une évolution topogénétique qui le concerne, soit il y a mise en évidence du changement de la position d'autrui ce qui peut conduire, dans le jeu des interactions, à une demande de justification de cette évolution. Il y a là potentiellement les conditions du passage d'une situation de simple verbalisation à une situation de formulation. En effet, ce qui caractérise une situation de formulation est la prise de décision dans le jeu de communication à propos des connaissances. Face à une mise en demeure de justifier un changement de position, un élève ne peut rester dans la simple verbalisation de son procédé de calcul il est amené à faire un choix, à décider de la position que finalement il adopte, il doit faire état, le cas échéant, de l'évolution de ses connaissances du point de vue de la topogénèse de ces connaissances.

IV. CONCLUSION

La mise en place d'une recherche collaborative a permis de faire vivre dans la durée une situation didactique où se trouve partagée l'intention d'enseigner entre maître et élèves. L'existence d'un contrat de recherche dont la dimension propre au sous-système élève est attestée, permet que perdure l'a-didacticité de la macro situation mise en place à propos de la division. Les analyses faites en terme de schème, outre la classification des procédures qu'elles ont permis, enrichissent la compréhension des phénomènes de conceptualisation en situation a-didactique. La notion de classe de situations associée à celle de schème s'avère être féconde quant à la compréhension de l'élaboration du champ conceptuel de la division. L'identification d'une dialectique entre situation de calcul et situation de vérification/ invalidation, le dialogue entre résultat d'une part et procédé de calcul d'autre part, sont des éléments clés de l'évolution du réseau des connaissances numériques. Ces dialectiques sont à l'œuvre quand il s'agit de passer d'une situation de formulation à une situation de validation.

Dans ce contexte didactique, les élèves sont initiateurs de l'émergence d'objets mathématiques nouveaux relativement à la genèse de leurs connaissances et pertinents dans le champ conceptuel de la division. En particulier, le phénomène de mémoire didactique, analysé du point de vue de l'élève permet de pointer le fait que, placé dans des conditions didactiques adéquates, les élèves peuvent eux-mêmes être à l'origine de situations de rappel propres aux

évolutions topogénétiques attendues, propres aux transformations nécessaires des connaissances. Dans la perspective qui est celle de la théorie des situations, s'intéressant au fonctionnement des connaissances, il s'avère que la mémoire didactique de l'élève, est un point d'appui de la transformation d'une situation de simple verbalisation de l'action - que nous rattachons aux situations d'action - en une situation de formulation.

BIBLIOGRAPHIE

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9.3, 281-308.
- Banwitiya, Y. (1993). *L'ingenierie du sens en mathématiques: la division dans N , Q et D à l'école primaire*. Thèse de doctorat, Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1972a). La division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen. In A.P.M.E.P. (Ed.), *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 267-278). Paris: APMEP
- Brousseau, G. (1988). Représentations et didactique du sens de la division. In G. Vergnaud, G. Brousseau, & M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. (Actes du colloque de Sèvres, mai 1987) Grenoble: La Pensée Sauvage Editions
- Brousseau, G. (1996). Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique, *Actes de VIIIème Ecole d'Eté, 1995*, Saint-Sauves d'Auvergne: IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Clermont-Ferrand.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.
- Brousseau, G., & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 11.2-3, 167-210.
- Brun, J. (1996). *Algorithmes et schèmes dans les calculs écrits*. Texte présenté au Symposium Concepts pragmatiques et scientifiques dans le fonctionnement et le développement des schèmes : Conférence Vygotsky - Piaget, Genève.
- Brun, J. (1997). *De l'adaptation au jeu: la théorie des situations et les rapports enseignement et apprentissage*. Premières journées de didactique des mathématiques de Montréal 2-5 juin 1997, Université de Montréal (à paraître).
- Brun, J., & Conne, F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, 3, 260-286.
- Brun, J., & Conne, F. (1991). L'étude des algorithmes de calcul dans la transmission et la constitution des connaissances numériques, *PME XV*, Assisi: Fond National de la Recherche Scientifique (recherche menée par Brun, J., Conne, F., Retschitzki, J. & Schubauer, R.
- Brun, J., Conne, F. (1993). Calculs et erreurs systématiques. *Journal de l'enseignement primaire*, Genève, 43, 29-31.
- Brun, J., Conne, F., Lemoyne, G., & Portugais, J. (1994). La notion de schème dans l'interprétation des erreurs des élèves à des algorithmes de calcul écrit, *Cahiers de la recherche en éducation* (pp. 117-132).
- Brun, J., Conne, F., & Flückiger, A. (à paraître) Algorithme de division et schèmes numériques
- Centeno, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant (thèse posthume inachevée: textes établis par C. Margolinas)*. Bordeaux: LADIST.

- Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Editions.
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12.2/3, 221-270.
- Conne, F. (1993). Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie: une démarche caractéristique en didactique des mathématiques. In U.D. Sherbrooke (Ed.), *Sens des didactiques et Didactique du sens* (pp. 205-261). Québec, Canada: Editions du CRP, Faculté d'Education, Université de Sherbrooke
- Conne, F., & Brun, J. (1991). Les débuts d'un apprentissage: où placer les routines? Journée du COED, Marseille 1990. *Cahiers Interaction didactiques n°12, mai 1991* pp 53-88
- Conne, F., Lemoyne, G. (Ed.).(1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal: Presses de l'Université de Montréal.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques- une réalisation dans tout le corpus scolaire*: Université Paris VII.
- Flückiger, A. (1999). Une étude de cas: une collaboration entre enseignant et chercheur. In Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des mathématiques (CIEAEM) (Ed.), *Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques. Actes de la CIEAEM 50. Neuchâtel Suisse 2-7 août 1998* (pp. 167-172). Neuchâtel, Suisse
- Flückiger, A., & Maisonneuve, L. (1999). Sens et Algorithmes, *Journées Nationales de Gérardmer*, APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public). Vol. 428 (pp. 367-371)
- Guiet, J. (1994). Algorithmes et schèmes: cas de la division. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 225-230): Grenoble
- Guinet, R. (1979). La division. *GrandN*, 17, 21-37.
- Leutenegger-Rhis, F. (1999). *Contribution à la théorisation d'une clinique pour le didactique. Trois études de cas en didactique des mathématiques*, Thèse de Doctorat en Sciences de l'Education, Université de Genève.
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Mopondi, B. (1986). *Problème de sens dans la négociation didactique en vue de l'institutionnalisation d'un algorithme: notion de proportionnalité au cours moyen*. Thèse de Didactique des Mathématiques, Université de Bordeaux I.
- Perrin-Glorian, M.J. (1995). Sens , algorithmes et représentations symboliques, *Mathématique et langage*. Paris: Hachette Edition
- Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*. Berne: Peter Lang.
- Rouchier, A. (1991). *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérativo- récursives, institutionnalisation*. Thèse de doctorat d'Etat, Université d'Orléans.
- Saada-Robert, M., & Brun, J. (1996). Les transformations des savoirs scolaires: apports et prolongements de la psychologie génétique, *Perspectives*, Vol. XXVI n°1 (pp. 25-37).

- Schubauer-Leoni, M.L. (1986). *Maître-élève-savoir : Analyse psychosociale du jeu et des enjeux de la relation didactique*. Thèse de doctorat, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève.
- Schubauer-Leoni, M.L. (1996). Entre théories du sujet et théories des conditions de possibilité du didactique: quel cognitif?, *VIIIème Ecole et Université d'Eté de Didactique des Mathématiques (22-31 août 1995)* (pp. 174-185), Saint-Sauves d'Auvergne: IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Clermont-Ferrand.
- Sensevy, G. (1994). *Institutions didactiques, Régulation, Autonomie. Une étude des fractions au cours moyen*. Thèse de doctorat, Université de Provence Aix Marseille I.
- Sensevy, G. (1998). *Institutions didactiques, étude et autonomie à l'école élémentaire*. Paris: PUF.
- Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20-3, pp263-304.
- Tièche-Christinat, C. (1997). *Algorithmes..., réunion du groupe d'appui de COROME*, Neuchâtel: (non publié).
- Vergnaud, G. (1996a). La théorie des champs conceptuels. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 197-242). Lausanne: Delachaux & Niestlé. (Republié de *Recherche en didactique des mathématiques*, 10, (2-3) 133-170, 1990)
- Vergnaud, G. (1996b). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, *VIIIème Ecole et Université d'Eté de Didactique des Mathématiques (22-31 août 1995)* (pp. 174-185), Saint-Sauves d'Auvergne: IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Clermont-Ferrand.
- Vergnaud, G. (1999). Un point de vue de psychologue. In G. Glaeser (Ed.), *Une introduction à la didactique expérimentale* (pp. 209-213). Grenoble: La Pensée Sauvage éditions

ANNEXE

LISTE DES SEANCES

séance	division			
n°	n°	dvd	dvs	q
1	d1	990	9	110
	d2	1818	9	202
2	d3	2546	2	1273
	d4	2592	6	432
3	d5	345	23	15
4	d6	720	20	36
	d7	426	2	213
5	d8	425	5	85
	d9	175	14	12,5
6	d10	180	15	12
	d11	427	7	61
7	d12	4500	150	30
	d13	633	3	211
8	d14	8 645 834	2	4322917
9	d15	35 787	3	11929
10	J1	Journal 1ere occurrence		
11	d16	8 324 782	2	4162391
	d17	645 357	3	215119
12	d18	405	45	9
	d19	315	45	7
	d20	3780	45	84
13	d21	2000	16	125
14	J2	Journal 2eme occurrence		
15	d22	3618	18	201
16		débat ascendant		
17	d23	4 824 266	2	2412133
	d24	4 962	2	2481
	d25	645 354	6	107559
18		nouvelle consigne : affiche		
	d26	525 575	5	105115
	d27	124 892	4	31223
	d28	35 792	2	17896
19	d29	8 324 782	2	4162391
	d30	55 155	5	11031
	d31	12 143	1	12143
20	d32	816 328	8	102041
	d33	345	23	15
	d34	71	71	1
		nouvelle élève: SAN		

séance	division			
n°	n°	dvd	dvs	q
21	d35	826	14	59
	d36	6	5	1,2
22	d37	205 650	5	41130
	d38	465	155	3
23	d39	17	5	3,4
	d40	4 854 816	4	1213704
24	d41	14 497	7	2071
	d42	301 725	5	60345
25	J3	Journal 3eme occurrence		
26	d43	304515	5	60903
	d44	369	246	1,5
27	d45	1268148	4	317037
	d46	1545005	5	309001
	d47	180	12	15
28	d48	100	3	33,33...
		(reprise réponse de j3)		
29		liste des divisions "en suspens"		
30		liste des divisions 1 a 25		
31		idem travail collectif		
32		liste des méthodes (collectif)		
		trier liste d1-d20 individuel		
33	d49	65724	2	32862
	d50	3780	90	42
	d51	3612	12	301
34		Tournoi des Méthodes n°1		
35		Tournoi des Méthodes n°2		
36		TM2 suite même liste		
	d52	147097	7	21013,8...
37	J4	Journal 4eme occurrence		
	d53	25	2	12,5
38	d54	81822	3	27274
	d55	995	9	110,55...
39		débat/ reste		
40				
41	d56	6412	8	801,5
42	d57	3615	12	301,25
	d58	224	7	32
43	d59	167	8	20,875
44	d60	75035	25	3001,4

	dispositif du vert pour vérifier sur le cahier
--	---

dx	<i>division n°x</i>
dvd	<i>dividende</i>
dvs	<i>diviseur</i>

45	d61	266	4	66,5
46	d62	2186	5	437,2
	d63	801	20	40,05
	d64	375	12	31,25
	d65	368	7	52,5714..

**TROIS REGISTRES D'EXPRESSION, DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE,
POUR L'ENSEIGNEMENT DES RATIONNELS A LA FIN DE L'ECOLE ET AU DEBUT DU
COLLEGE.**

Robert Adjage

IUFM d'Alsace

I. INTRODUCTION

La thèse (Adjage, 1999) que je vous présente aujourd'hui a pour origine le pointage d'obstacles liés à l'expression fractionnaire à la charnière école / collège, c'est à dire à l'usage de fractions (donc de couples d'entiers, séparés par une barre, et auxquels il est légitime d'appliquer un certain nombre de traitements spécifiques) pour exprimer la raison commune ou le rapport commun entre deux suites de données entières.

Cette thèse s'est ensuite développée autour de la :

- tentative de comprendre et d'expliquer la nature de ces obstacles ;
- conception et de la mise en œuvre d'un dispositif d'enseignement au cycle 3 des écoles destiné à :
 - ◊ confirmer les liens entre ces obstacles et les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des rationnels à ce niveau de la scolarité,
 - ◊ tester un certain nombre de réaménagements dans l'enseignement des rationnels.

Ce dispositif repose essentiellement sur le développement et l'exploitation, dans une classe, des vingt didacticiels de la série ORATIO (Adjage & Heideier, 1998) que j'ai conçus pour ce projet.

II. LES TROIS VISEES

Enonçons trois visées à l'origine de l'activité mathématique ou, dit plus simplement, trois bonnes raisons de « faire des mathématiques » :

visée 1.modéliser un problème de physique (ou d'économie ou de biologie...) afin de permettre des prédictions et / ou des explications ; le point de départ peut être une expérience (de physique par exemple), au cours de laquelle l'expérimentateur rencontre les limites de ses instruments de mesure, élabore un modèle mathématique pour dépasser ces limites et donc faire des prédictions et donner des explications (exemple, modéliser l'action du pantographe, G & N.Brousseau, 1987, p. 333-345) ;

visée 2.modéliser une expérience sensible, bien qu'irréalisable, comme le retournement de la sphère ou, à un niveau plus élémentaire, comme l'encerclement de la Terre par un grand ruban que l'on serre autour de l'équateur ; après avoir rajouté 60 cm au ruban, on reforme un cercle uniformément distant de la Terre. Et on demande une prévision sur la taille de l'organisme susceptible de passer alors sous le ruban (du virus au chat) ;

visée 3.interroger, généraliser... les mathématiques par et pour les mathématiques, comme dans le cas du théorème de Fermat ($x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solutions entières pour $n > 2$) ou de la recherche, qui s'étale sur des siècles, de solutions, **exprimables par radicaux**, d'une équation de degré n .

Je pointe tout de suite qu'en ce qui concerne les deux exemples de la visée 3, on constate que c'est une forme d'expression des mathématiques qui est chaque fois à l'origine et à l'horizon du problème posé. L'invariant repérable, entre $x^2 + y^2 = z^2$, qui admet des solutions entières, et $x^n + y^n = z^n$ qui n'en admet pas, est bien une certaine forme d'expression. Quant au deuxième exemple de la visée 3, il témoigne d'une volonté des mathématiciens de considérer comme **solutions acceptables à leur problème celles liées à une forme d'expression**, les radicaux, alors que par ailleurs ils développaient des méthodes d'analyse numérique fort efficaces pour exprimer et approcher les solutions de ce type d'équations – ce qu'a entrepris notamment Newton.

III. L'ACTIVITE MATHEMATIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

1. La visée 1 est prépondérante pour l'introduction aux notions, en raison de la rareté du matériel mathématique à interroger

C'est la voie suivie par la quasi totalité des didacticiens (Pitkethly et Hunting, 1996) et, notamment en France, par Guy et Nadine Brousseau (1987) ou Régine Douady et M-Jeanne Perrin-Glorian (1986).

C'est aussi la voie que, dans un premier temps, j'ai suivie moi-même pour la formation des professeurs des écoles, ce qui m'a amené à observer maintes fois le type de séquences évoqué en annexe 1 et tiré de *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. J'ai alors régulièrement pu établir le constat contradictoire suivant :

2. L'obstacle de l'expression fractionnaire

L'habileté rhétorique avec laquelle nombre d'élèves traitent de ces problèmes rationnels ; la difficulté qu'ils éprouvent à décrire, interpréter, résoudre le même type de problèmes dès lors qu'ils sont amenés à remplacer les mots de la langue naturelle par le symbolisme des fractions. Certains semblent même désapprendre, lors de ce passage, les acquisitions pourtant non négligeables – recherche de référents communs (60 feuilles partout), encadrements entiers (plus de 8 feuilles au mm pour X contre 3 feuilles au mm pour A), comparaison à des proportions simples comme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ (7 c'est moins que un tiers de 60) – de la phase rhétorique.

3. Conséquences de ces observations

- Le symbolisme des fractions n'est pas transparent même si sa découverte est précédée d'un travail minutieux ;
- une rupture dans le mode d'expression des objets mathématiques peut entraîner une rupture de compétence ;
- l'effort d'enseignement porte plus sur la conception des objets rationnels que sur leur expression symbolique, alors que des difficultés majeures sont observées de côté-là.

4. L'expression fractionnaire n'est pas la seule notion dont l'introduction se heurte à un obstacle lié à l'expression

Ainsi, lors de l'apprentissage de la numération décimale au cycle 2, il n'est pas rare d'observer des enfants capables de procéder à des regroupements, notamment par dizaines, pour comparer deux grandes collections, mais qui ne parviennent pas à fournir une expression chiffrée décimale du cardinal d'une collection à dénombrer.

IV. DEUX TYPES D'ARGUMENTS POUR UNE TENTATIVE D'INTERPRÉTATION DE L'OBSTACLE LIÉ À L'EXPRESSION FRACTIONNAIRE

Deux arguments, l'un de nature cognitive et renvoyant à la théorie des registres de Raymond Duval (1995, 1996), l'autre de nature didactique.

1. Un argument de nature cognitive : l'obstacle du « 2 pour 1 »

Les élèves ont tendance à voir deux nombres dans une fraction là où le professeur n'en voit qu'un, si bien que $\frac{a}{b}$ est plus l'expression d'une double cardinalité (a parts parmi b) que l'expression d'un lien de a à b . De façon plus précise :

- la barre de fraction introduit une **rupture** entre les deux termes de la fraction ;
- il est dès lors très délicat de suivre la progression du discours fractionnaire, d'égalité en inégalité, puisque ces dernières portent **sur un lien** (de 1 à 3, de 20 à 60, de 7 à 60 – cf annexe 1) rompu par les barres de fraction, tandis que la séquentialité du discours (implicite ou explicite) en langue naturelle, assortie des connecteurs usuels, favorise la prise en compte des mêmes liens : "*Si 3 feuilles de A font 3 mm, 60 feuilles de A feraient bien plus de 7 mm* – cf annexe 1".

Dit plus brièvement : les conversions entre le registre de la langue naturelle et le registre des expressions fractionnaires ne sont pas congruentes au sens de Duval (1995, pp. 47-59).

2. Un argument de nature didactique : l'absence de nécessité motivant l'adoption de l'expression fractionnaire

L'expression fractionnaire est souvent introduite au terme de situations comme celle rappelée par l'annexe 1, situations bien maîtrisées par le seul recours à la langue naturelle. Les élèves ne perçoivent dès lors pas l'intérêt qu'il y a à renoncer à une forme d'expression qui fonctionne bien pour lui substituer une forme d'expression plus complexe qu'ils ont du mal à faire fonctionner.

Or la nécessité d'une expression symbolique apparaît lorsque les rationnels sont mobilisés comme arguments d'opérations (somme ou produit/dilatation) car, à ce moment, les contraintes du discours sont telles que le seul recours à la langue naturelle devient extrêmement coûteux. Est-ce à dire qu'il faut attendre ce moment bien avancé dans le cursus pour introduire une forme d'expression symbolique des rationnels ? Ce n'est pas la solution que j'ai retenue.

V. LES HYPOTHESES

Elles s'appuient sur les constats et idées précédemment développés. L'activité mathématique s'organise autour de trois domaines :

- domaine 1 - l'expérience physique ;
- domaine 2 - le modèle mathématique sous-jacent ;
- domaine 3 - les moyens d'expression sollicitables pour développer le modèle.

Le domaine 3 sollicite des formes d'expression hétérogènes (langue naturelle, fractions, dessins géométriques, droites graduées, décimaux...) d'où l'importance des articulations (entre ces trois domaines d'une part et entre les divers modes d'expression mobilisés par le domaine 3 d'autre part) ; mais pour articuler, il convient auparavant de bien séparer afin de ne pas rabattre les uns sur les autres les enjeux (ce que m'apprend l'expérience physique, ce que je déduis du modèle), les méthodes (ici je mesure, là je calcule, ici je contrôle avec un instrument, là je prouve et je contrôle par un raisonnement ...), les spécificités (si j'augmente un terme d'une fraction, est-ce que la fraction est plus grande ? Et si j'augmente la partie décimale d'un nombre à virgule ?).

Une fois bien établis ces principes de séparation / articulation, je formulerai actuellement mes hypothèses de la façon suivante :

- **hypothèse 1** : l'expression fractionnaire est peu adaptée à une introduction aux nombres rationnels ; il est possible d'introduire les rationnels au moyen d'activités menées dans un registre géométrique unidimensionnel (qui sera introduit un peu plus loin) ;
- **hypothèse 2 (dite de séparation)** : l'apprentissage des nombres rationnels passe par une identification claire des trois domaines susceptibles de les mobiliser et, à l'intérieur du domaine 3, de registres différents susceptibles de les exprimer ;
- **hypothèse 3 (dite d'articulation)** : des activités systématiques d'articulation entre ces trois domaines d'une part, entre les différents systèmes sémiotiques du domaine 3 d'autre part sont déterminantes pour l'acquisition de la notion de nombre rationnel.

VI. LES IDEES CLES DU DISPOSITIF D'ENSEIGNEMENT

Puisque c'est le recours à un système d'expression fractionnaire qui pose avant tout problème, j'ai choisi, en accord avec la visée 3 de l'activité mathématique (voir p. 102), de faire de ces problèmes mes situations-problèmes.

Comme l'expression fractionnaire se révèle peu adaptée à une introduction, j'ai choisi de poser ces problèmes, dans un premier temps, au moyen d'un autre registre d'expression des rationnels, avant de retrouver les expressions numériques fractionnaires et décimales usuelles.

Les différentes formes d'expression disponibles des rationnels, et les problèmes que les passages d'une forme d'expression à l'autre soulèvent, sont alors la source de nouvelles situations-problèmes.

La résolution de problèmes liés aux grandeurs traverse l'ensemble du dispositif suivant des modalités d'articulation aux divers systèmes d'expression que je décrirai plus loin.

Pour préciser l'avant-dernier point, je me suis fixé, conformément aux principes de séparation et d'articulation, trois objectifs principaux relatifs à l'acquisition des systèmes sémiotiques permettant de développer un modèle des nombres rationnels abouti :

- identifier / différencier les spécificités de chaque système d'expression (la manière d'orienter la prise d'information – l'information renvoyée par 22 et 7 n'est pas de même nature dans 22/7 et dans 22,7) ;
- identifier, d'un système d'expression à un autre, des invariants permettant une objectivation du représenté (par exemple pour 3,14, rapport entre le 3, la virgule, le 1, le 4 de 3,14 et les actions de report et de subdivision, assorties de zooms à divers niveaux de profondeurs, pour déposer ce nombre sur droite graduée) ;
- relier les spécificités de chaque système à des aspects différents des objets représentés (par exemple, absence de point isolés dans Q, plongement de N dans Q en ce qui concerne les droites graduées et la vision globale de Q à laquelle elles renvoient ; quotient ou rapport de a à b en ce qui concerne les écritures fractionnaires de la forme a/b ; facilités d'encadrements et d'approximations permises par les écritures décimales et la vision locale de Q à laquelle elles renvoient) ;

VII. QUEL REGISTRE POUR L'INTRODUCTION ?

Il restait à déterminer quels systèmes sémiotiques exprimant les nombres étaient les plus adéquats à la réalisation de ces objectifs. Si les systèmes fractionnaires et décimaux paraissent incontournables car ils sont un produit remarquablement adapté – une fois maîtrisés – de l'évolution des mathématiques, il convenait en revanche de s'interroger sur le choix du système servant à l'introduction de ces nouveaux nombres. Le cahier des charges (Adjage et Pluinage, 2000, § 2.4 et 2.5) se devait de respecter les différentes visées, hypothèses ainsi que les principes évoqués plus haut.

1. Ce système devait permettre une articulation des trois domaines (domaine physique, domaine du modèle, domaine sémiotique) ; cette exigence orientait vers un système géométrico-

physique qui a l'avantage d'expliciter les opérations de reports et de subdivisions, fondatrices de la notion ;

2. Ce système devait avoir le statut de registre, car nous devions disposer d'un système d'expression :

◇ à part entière, véritable concurrent des systèmes fractionnaire et décimal, permettant les premières expressions rationnelles à lui tout seul, ce qui élimine l'idée même d'une simple illustration des systèmes numériques usuels ;

◇ ayant des articulations avec les systèmes numériques suffisamment robustes pour qu'il puisse exercer des fonctions d'annonce de ces systèmes puis de leur contrôle, une fois ces derniers introduits.

Ce système ne pouvait en conséquence se réduire à un mode de représentation d'une double quantification (comme les classiques parts de tarte) ; il devait exprimer des nombres, au moyen d'unités signifiantes ayant leurs équivalents dans les registres fractionnaire et décimal.

3. Ce système devait se prêter à un vaste champ d'expériences, offrant aux utilisateurs l'occasion de formuler des hypothèses et de les valider.

4. Le support de ce système devait être familier aux élèves.

5. Je me suis enfin refusé à recourir à un système transitoire, pour ne pas ajouter aux difficultés de son appropriation celles de sa liquidation ; je lui ai donc préféré un système dont l'utilité resterait incontestable bien au-delà de la phase d'apprentissage.

Ce cahier des charges en cinq points a orienté mon choix vers un système de droites graduées ne mobilisant que des signes spécifiques (intervalles, tirets, nombres entiers...) et des opérations de report, de subdivision et de zoom.

L'ensemble n'a été rendu possible, notamment pour vérifier le point 3 du cahier des charges ci-dessus, qu'en recourant à un environnement informatique et à un ensemble de logiciels spécialement développés à cet effet (Adjage et Heideier, 1998). Ces logiciels ouvrent la voie à une démarche de type essai / erreur, favorisée par le couple personnalisé action / rétroaction, démarche dont le coût, rédhibitoire dans un environnement papier / crayon (effacer, recommencer, resubdiviser...), est rendu acceptable grâce aux ressources du système : essentiellement saisir un entier par lequel sous-graduer, étiqueter certaines graduations par des entiers. Cette démarche repose sur une analyse, menée par l'utilisateur, du fonctionnement et des dysfonctionnements

perçus du système, suivie de décisions à risque – elles ont un coût, quantifiées par un score – susceptibles d’aboutir à la mise au point de méthodes (voir un exemple significatif en annexe 2).

VIII. REFLEXION SUR LE TRAVAIL DE CONCEPTUALISATION DANS CE DISPOSITIF ET DANS LE CHAMP DES RATIONNELS

Ce travail repose sur :

- un primat sémiotique ;
- une mise en œuvre totale de l'activité mathématique (les trois visées) ;
- les deux principes de séparation et d'articulation.

Concrètement je distingue, conformément aux principes de séparation et d'articulation, trois moments forts du travail de conceptualisation.

1. Un premier moment important du travail de conceptualisation sera lié à des interrogations et traitements internes à un registre.

Exemple 1 : équivalence des deux expressions suivantes de trois quarts (un quart de trois et trois fois un quart)

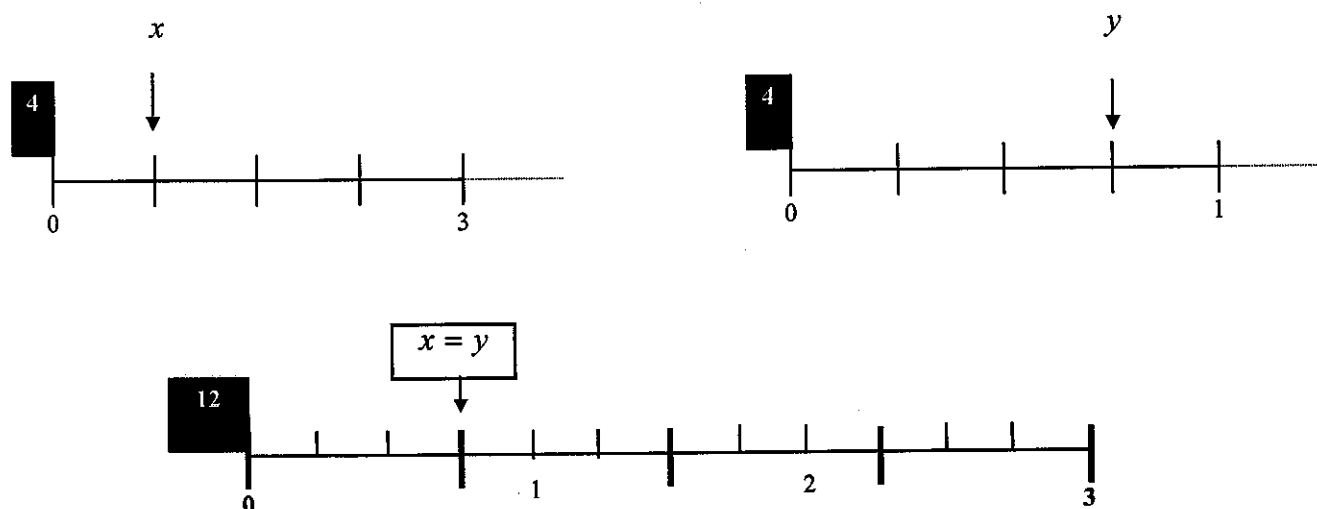


Figure 1 : Un quart de trois et trois fois un quart réfèrent au même nombre

On notera que l'égalité de x et de y ne s'obtient pas suite à un simple constat de coïncidence visuelle mais comme conséquence de décisions procédurales, dont le moment fort est **le choix, par l'utilisateur, du nombre 3** comme resubdiviseur, qui permet de comprendre pourquoi il y a 4

nouveaux intervalles entre 0 et 1 ($4 \times 3 : 3 = 4$), et pourquoi x se trouve sur la 3^{ème} nouvelle graduation, comme y (on a resubdivisé chaque intervalle en 3 et donc la 3^{ème} nouvelle graduation coïncide avec la première ancienne). Ces procédures sont reproductibles, généralisables, et donc à forte valeur explicative.

Exemple 2 : voir le point 2 de l'annexe 3

2. Un deuxième moment fort sera celui du détachement de la notion de son inscription initiale dans le premier système de représentation (les droites graduées par exemple) par la prise en compte d'une inscription concurrente dans un autre système sémiotique.

Exemple 1 : on se reportera à la Figure ci-dessous. Chaque unité signifiante (4, 0, 1, 3, nombres d'intervalles...) de l'expression sur droite graduée a-t-elle un équivalent dans l'expression fractionnaire ? Quelles répercussions aura, sur l'expression fractionnaire, la variation d'un des constituants de l'expression sur droite graduée ?

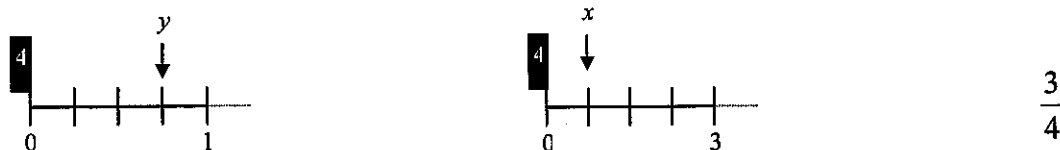


Figure 2 : trois expressions concurrentes de trois quarts

Exemple 2 : voir le point 3 de l'annexe 3.

3. Un troisième moment fort sera celui posé par la question de savoir en quoi l'une ou l'autre de ces formes d'expression interprète et permet de résoudre un problème rationnel, par exemple l'agrandissement d'un puzzle (Brousseau G. & N., 1987, pp. 137-144) dont un extrait est présenté en annexe 3.

Remarque sur le troisième moment

Précisons tout d'abord qu'au cours du moment 1 l'élève aura résolu le même problème, sans référence physique explicite, posé dans un registre d'expression symbolique, celui des droites graduées par exemple (voir le point 2 de l'annexe 3) ; l'enseignant se gardera bien entendu de signaler cette analogie. En ce qui concerne le troisième moment :

◇ l'élève peut se livrer à des expériences physiques qu'il estime utiles, par exemple, dans le cas du problème rappelé en annexe 3, mesurer la longueur d'un côté ou d'un angle, vérifier des superpositions (deux des pièces mises côte à côte recouvrent exactement une troisième pièce)... ;

◇ il est ensuite invité à résoudre le problème mathématique suscité par le problème physique (par exemple de l'agrandissement) au moyen d'une procédure et d'un mode d'expression de **son choix** ;

◇ à ce stade, certains élèves reconnaissent dans ce problème mathématique le problème déjà posé dans un registre symbolique (par exemple celui des droites graduées), d'autres doutent qu'il s'agisse du même problème, cette divergence donnant l'occasion d'ouvrir un débat scientifique ;

◇ le problème qui est alors posé n'est plus celui de l'agrandissement d'une figure, déjà résolu, mais un **problème d'explicitation du lien** entre une expérience physique, une forme d'expression de ce problème et le modèle qui s'en dégage.

C'est au prix de ce travail spécifique sur le couple séparation / articulation que les droites graduées pourront devenir, à la longue, une aide à la résolution de problèmes.

IX. REMARQUES ET COMMENTAIRES SUR LE DEBAT QUI A SUIVI L'EXPOSE

L'idée centrale est qu'une investigation spécifique de la droite graduée donne l'occasion de remonter à la racine d'une vaste classe de problèmes rationnels. Il est en outre possible, notamment par le biais de l'informatique, d'équiper la droite graduée en un registre permettant le traitement de tous ces problèmes. Dans cette optique, le travail sur droite graduée apparaît comme le paradigme de l'ensemble des activités rationnelles, ce qui permet de réaliser des économies substantielles de temps et de moyens. Il évite aussi de se disperser dans la prise en compte de toutes sortes de grandeurs et des divers problèmes qui s'y rattachent. La droite graduée constitue donc, dans mon dispositif, l'outil privilégié de l'articulation entre un fonctionnement physique et un fonctionnement sémiotique.

Mon dispositif d'enseignement des rationnels est la conséquence de trois renoncements par rapport aux ingénieries antérieures :

1. renoncer à l'expression fractionnaire pour **introduire** les rationnels ;

2. renoncer aux références exclusivement physiques pour **introduire** les problèmes rationnels ;

3. renoncer aux rationnels-mesures pour **introduire** les premiers objets rationnels.

Les deux premiers points ont été amplement justifiés lors de la conférence. Le troisième a été remarqué par nombre d'auditeurs.

Il s'agit en effet d'un choix fondamental, les rationnels étant introduits, au moyen des droites graduées, comme des rapports et non comme des mesures, ainsi que le montrent les exercices de Gradu4 d'ORATIO (Figure 9, annexe 4).

Trois types de justifications permettent de valider ce choix.

Justification théorique

La diversité des acceptions d'un rationnel (mesure – comme dans $3/4$ l –, rapport scalaire – comme dans l'agrandissement d'une figure par $7/4$ –, rapport exprimé au moyen d'unités composées – vitesse, débits, mélanges...) relève de la **physique** de la notion, pas de sa **mathématisation** qui produit un unique objet, un nombre rationnel, exprimable au moyen de divers registres. Conformément aux principes de séparation / articulation, il importait donc de proposer l'étude d'un tel objet, non édulcoré pour la circonstance, dans un système permettant des articulations avec l'univers physique et la totalité des problèmes rationnels qu'on y rencontre (voir ci-dessus). Il se trouve que la droite graduée, à condition d'y inscrire des rapports et non des mesures, permet de transcrire tous ces problèmes dans leur spécificité et de les résoudre. Ainsi entendue (moyen d'expression de rapports) la droite graduée est donc bien un outil privilégié de la mise en œuvre des principes de base (séparation et articulation) de notre dispositif.

Justifications empiriques

La rapidité (deux mois après le début de notre enseignement en ce qui concerne l'évaluation papier / crayon évoquée en annexe 5) avec laquelle de bons à de très bons résultats ont été obtenus, tant lors des passations logicielles (annexe 4) que lors des évaluations papier / crayon (annexe 5), établissent la faisabilité d'un tel projet.

Justification "physique"

Une introduction des rationnels par les mesures (de longueurs en l'occurrence) n'est pas concevable dans un système d'expression géométrico-physique. Dans un tel système, sitôt une unité commune choisie, la possibilité de comparer (et la comparaison occupe une place privilégiée

dans mon protocole d'investigation des registres rationnels) physiquement deux rationnels en comparant les longueurs des segments à l'extrémité desquels ils s'inscrivent, shunte les procédures de comparaison basées sur les opérations fondatrices de reports et de subdivisions, les seules qui soient reproductibles et généralisables, et donc porteuses du sens de la notion. Lors de passations sur Gradu4, j'ai vu des élèves tenter d'utiliser leur règle graduée, pour comparer des rationnels en comparant des longueurs à l'écran de leur ordinateur, avant d'y renoncer suite à la prise de conscience qu'une telle procédure est dénuée de sens dans un système où les objets ne sont pas vus à la même échelle. Ces mêmes élèves ébauchaient, dans de ce renoncement, leur conception d'invariance par changement d'échelle.

BIBLIOGRAPHIE

- Adjiage R. & Heideier A. (1998), *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.
- Adjiage R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse ULP Strasbourg 1, IREM, 7 rue René Descartes 67084 Strasbourg.
- Adjiage R. et Pluvinaud F. (2000), *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM Vol 20/1 n° 58, pp. 41-87, Éditions la Pensée Sauvage, 38002 Grenoble.
- Brousseau G. (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.
- Brousseau G. et N. (1987), *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM, Bordeaux.
- Douady R. et Perrin-Glorian M.J., (1986), *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.
- Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.
- Duval R. (1996), *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, pp. 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- Pitkethly A. & Hunting R. (1996), *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, (pp. 5-37), Cambridge.
- Streefland L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education : A Paradigm of Developmental Research*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

ANNEXE 1 : TRAITEMENT RHETORIQUE ET FRACTIONNAIRE D'UN MEME PROBLEME RATIONNEL

Les élèves comparent l'épaisseur de deux feuilles de papier, chacune issue d'un tas différent, connaissant l'épaisseur et le nombre de feuilles de chaque tas (dans un tas donné, les feuilles sont de même épaisseur). Ce problème est destiné à la construction, par les élèves, de la notion de rationnel-mesure.

Un traitement rhétorique du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

Propos d'un élève (cité par Guy Brousseau, thèse, 1986, p. 141) à propos d'un papier X :

« 60 f[euilles] ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A [*un des types de papier étudiés auparavant*], on avait trouvé pour A (3f ; 1 mm) » – sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm".

Un traitement fractionnaire du problème de la comparaison des épaisseurs de deux feuilles de papier

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{60} \quad \text{or} \quad \frac{20}{60} > \frac{7}{60} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3} > \frac{7}{60}$$

ANNEXE 2 : GRADU5 ET LA DEMARCHE EXPERIMENTALE

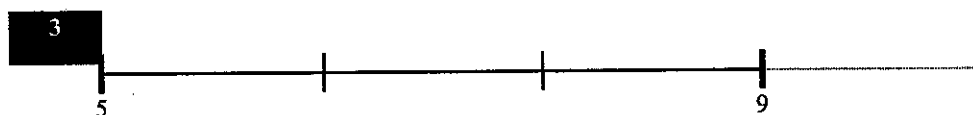


Figure 3 : déposer 8 dans un contexte peu favorable

Ressource principale : saisir un nombre par lequel on souhaite subdiviser chaque intervalle initial (ci-dessous par 3).

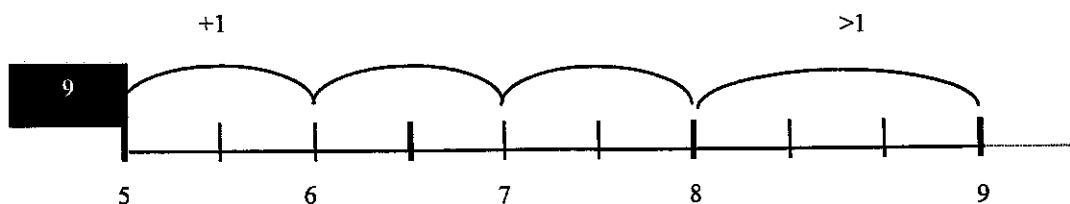


Figure 4 : une tentative qui échoue mais ouvre la voie d'un nouvel essai : modifier soit le regroupement unitaire, soit la resubdivision

Possibilité ouverte d'une évolution vers un constat du type : ce serait plus simple d'attraper le pas unitaire si le nombre total de sous-intervalles était un multiple de 4 ($4 = 9 - 5$)

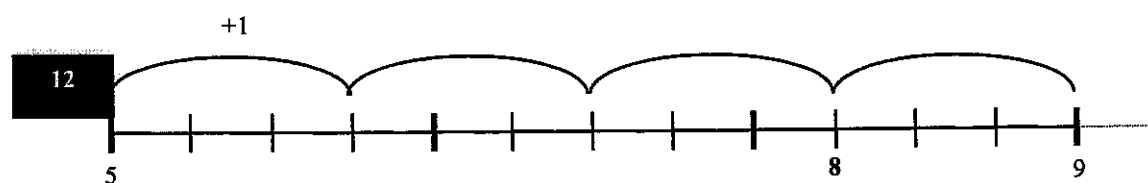


Figure 5 : la procédure experte pour déposer 8

ANNEXE 3 : AGRANDISSEMENT D'UN PUZZLE

1. **Énoncé du problème dans le registre de la langue naturelle :** Agrandir chaque pièce d'un puzzle, sachant qu'un segment de 4 cm du modèle devra mesurer 7 cm sur la reproduction.

2. **Énoncé et traitement d'un sous-problème (calcul de l'image de 5) dans le registre des droites graduées :**

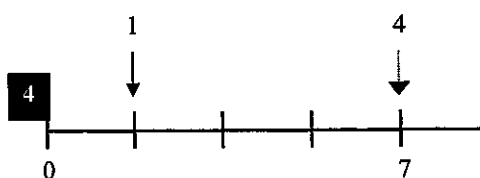


Figure 6 : une expression, sur droite graduée, de la dilatation définie par $f(4) = 7$

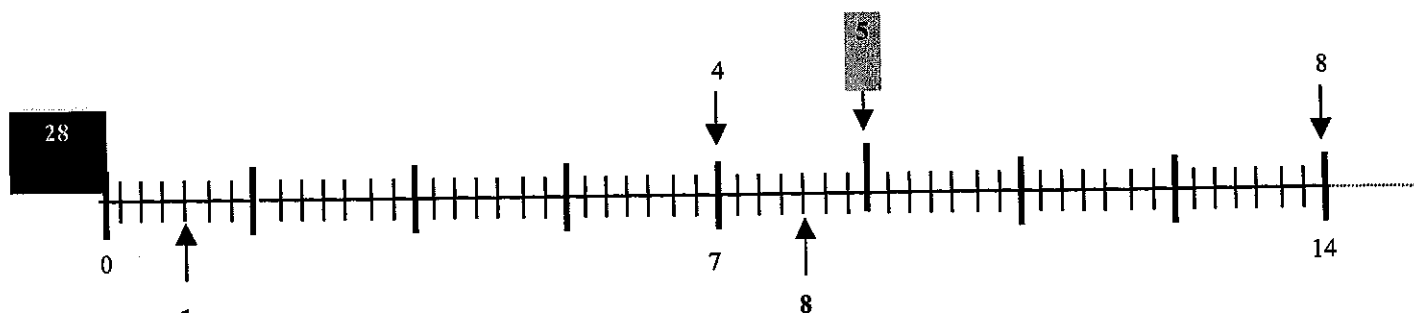


Figure 7 : recherche de l'image de 5 ; la resubdivision par 7 est utile pour situer 1 (et 8) sur l'échelle du bas

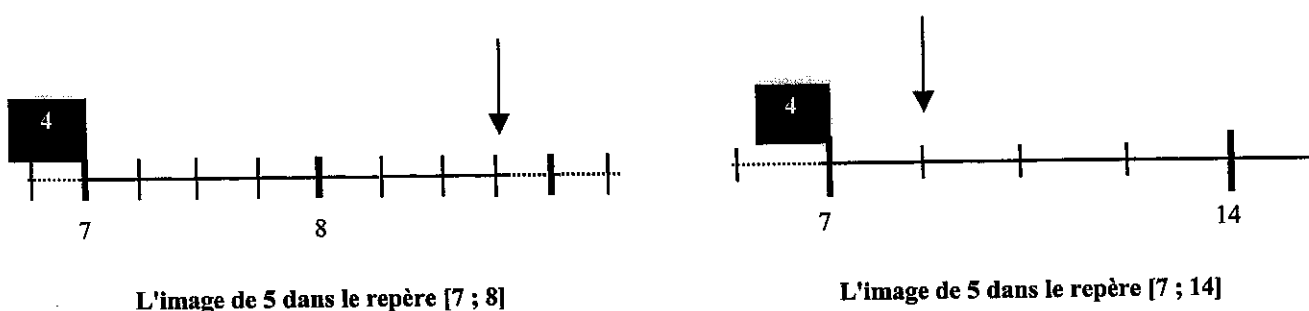


Figure 8 : la figure de gauche est un extrait agrandi de la Figure 7; la figure de droite ne nécessite aucune resubdivision et peut donc s'obtenir directement à partir de la Figure 6

3. Une expression fractionnaire de l'image de 5

$$8 + \frac{3}{4} = \frac{32}{4} + \frac{3}{4} = \frac{35}{4}$$

Une expression fractionnaire de l'image de 5, obtenue par conversion à partir de l'expression sur droite graduée

ANNEXE 4 : PASSATIONS SUR GRADU4

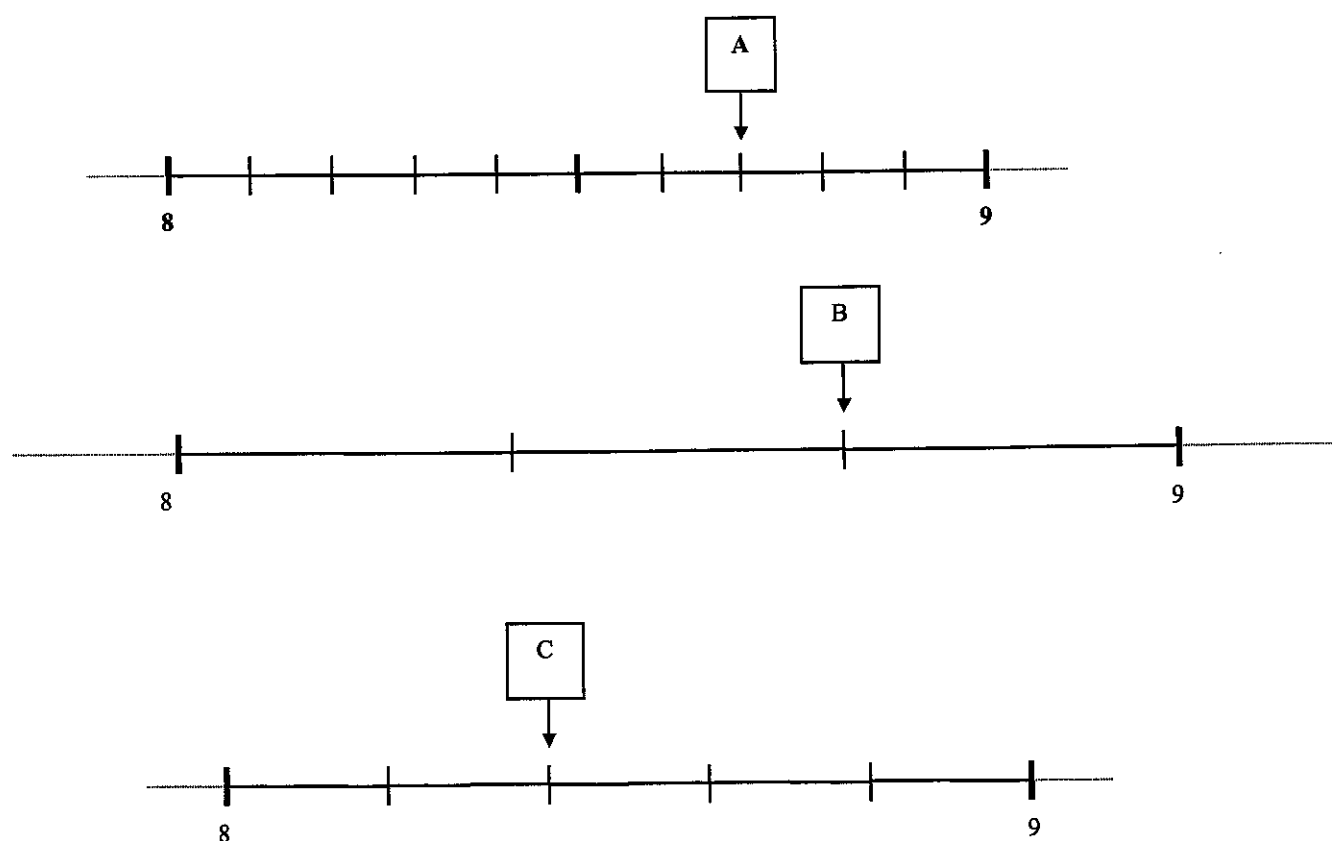


Figure 9: un exemple d'exercice posé par Gradu4, "ranger A, B, C, du plus petit au plus grand"

	Réussites	Echecs	TMoy	TMin	TMax
Anjusa	39 (70%)	17	36''	19''	1'41''
Jedafa	28 (82%)	6	1'3''	14''	3'17''
Joguima	48 (89%)	6	44''	18''	1'50''
Laechaje	49 (79%)	13	36''	16''	1'7''
Nasej	37 (80%)	9	48''	16''	1'49''
Nimajub	19 (95%)	1	1'13''	34''	2'5''

Olietc	44 (79%)	12	40''	17''	1'48''
Vicora	22 (92%)	2	1'26''	26''	4'12''

Tableau 1 : résultat des passations sur Gradu 4 du 26/09/97 (Début du CM2)

ANNEXE 5 : UN ITEM EXTRAIT DES EVALUATIONS PAPIER / CRAYON

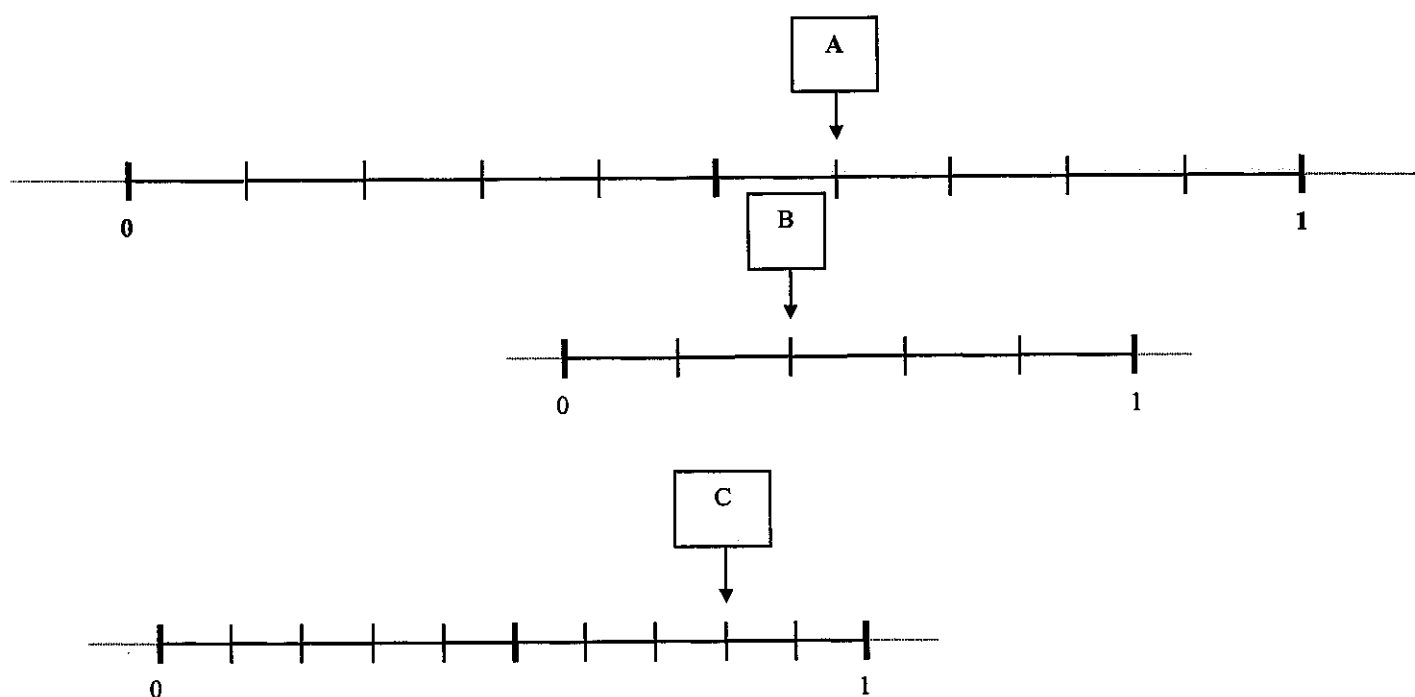


Figure 3 : extraite de l'évaluation papier / crayon 97 (fin CM1, 75% de réussite)

LES NOMBRES REELS DANS LA TRANSITION COLLEGE – LYCEE :

RAPPORTS INSTITUTIONNELS ET MILIEUX POUR L'APPRENTISSAGE

Alain Bronner

IUFM de Montpellier, Équipe ERES, Université Montpellier II

Dans la période actuelle, et de manière plus générale, les travaux numériques de la classe de Sixième se fondent sur des nombres décimaux, et cela dès l'usage de la division ; en Géométrie, dès la classe de quatrième, l'utilisation du théorème de Pythagore conduit à des nombres irrationnels ; les équations du second degré en algèbre dans la classe de troisième font surgir des racines carrées irrationnelles, en Analyse on travaille implicitement sur des intervalles de $\mathbf{R}$ et en statistiques et probabilités certains modèles font intervenir des irrationnels. Dans toutes les organisations mathématiques mettant en jeu ces objets, soit les tâches et les techniques portent directement sur des irrationnels (calcul d'approximations de π par exemple), soit les tâches et les techniques font intervenir inévitablement des irrationnels. Ainsi les travaux mathématiques dans l'enseignement secondaire nécessitent d'introduire des nombres non décimaux et même non rationnels, autrement dit un espace numérique plus large que l'ensemble des nombres rationnels. Dans ce contexte, je me propose d'étudier la nature de cet espace numérique, et notamment la présence de l'objet « nombre réel », ainsi que la manière de le traiter ou de l'éviter dans les curricula. Le moment institutionnel de la transition collège–lycée me servira de point d'entrée pour analyser les rapports, actuels ou anciens, à l'objet nombre réel dans l'enseignement secondaire et pour étudier les organisations didactiques (Chevallard 1998), tout au moins les milieux possibles, permettant la mise en place de ces organisations mathématiques. J'examinerai la place et le rôle des nombres décimaux et des nombres rationnels dans ces praxéologies (Chevallard 1998). Mon propos sera notamment de montrer les fluctuations importantes des choix quant à cette place à certaines périodes et de mettre en évidence la péjoration de l'ensemble des nombres des décimaux dans ces organisations, malgré son rôle important à certains moments du temps de l'institution scolaire.

I. UN REGARD SUR L'ENSEIGNEMENT DU NUMÉRIQUE DEPUIS UN SIÈCLE ET DEMI

On peut voir l'étude présentée dans cet article comme celle de l'histoire de l'institution de l'enseignement mathématique secondaire aux prises avec divers obstacles et celle de ses errements dans les choix des organisations mathématiques à propos du Numérique. Je porterai un regard sur l'enseignement du Numérique depuis un siècle et demi à travers ce qui fait la *mémoire de l'institution : les programmes, instructions et les manuels*. Si cette histoire nous était contée par le *sujet noosphérien* de l'institution (Chevallard 1985), il pourrait dire, selon les conditions du moment, nous allons organiser la structure du Numérique :

- à l'aide d'un environnement technologico-théorique (Chevallard 1998) se fondant sur une théorie de la mesure et des grandeurs incommensurable, et ce sera la période classique (1854-1947)
- à l'aide de l'algèbre et des structures algébriques, pendant la période (1947-1968)
- à l'aide d'un ensemble structuré à partir des développements décimaux comme pendant la réforme des mathématiques modernes (1968-1978)
- ou encore un ensemble flou ou un ensemble « fourre-tout », contenant tout nombre se présentant dans le travail, comme dans les périodes suivant la réforme des mathématiques modernes (de 1978 À 1996).

Et nous verrons les choix de ce sujet noosphérien pour la structure du Numérique dans la période de actuelle dont les nouveaux programmes ont été mis en place en Sixième en 1996, puis en Lycée en 2000 (pour la classe de Seconde).

L'institution d'enseignement, l'Enseignement Mathématique Secondaire, se distingue par sa régularité à proposer des réformes des programmes depuis cent cinquante ans. Je ferai référence dans ce texte à cinq grandes périodes délimitées par les dates de ces réformes :

- La période classique (1854-1947) ;
- Les périodes de préparation de la réforme des mathématiques modernes qui correspondent à deux réformes (1947-1958) et (1958-1968) ;
- La période des mathématiques modernes (1968-1978) ;
- La période de fermeture de la réforme des mathématiques modernes comprenant deux réformes, l'une en 1978, l'autre en 1985 ;
- La période actuelle qui commence en 1996 et qui est toujours en vigueur au moment de la publication de ce texte.

Dans toutes les périodes, le Numérique a un habitat principal : à l'époque classique c'était l'arithmétique, puis l'algèbre aux périodes suivantes et maintenant il est engendré par les

« travaux numériques ». Je montrerai que ces changements induisent, au-delà des modifications des intitulés de chapitres des programmes ou des manuels, des évolutions significatives de l'organisation mathématiques du numérique.

II. LA PERIODE CLASSIQUE (1854-1947)

Les objets du Numérique sont stabilisés à cette époque et ont pour adresse « L'Arithmétique ». Une organisation assez rigide apparaît avec seulement quelques variations sur la place de certains thèmes. Les auteurs de « traités d'Arithmétique » suivent une progression relativement identique comme le montrent les sommaires des ouvrages de cette époque⁴². *Le temps de l'institution* sera rythmé par l'introduction d'objets du Numérique en lien à des secteurs, thèmes et sujets (Chevallard 2001) dans l'ordre suivant :

Entiers, la numération décimale et les quatre opérations, la divisibilité → Fractions ordinaires et opérations → Fractions décimales, opérations et le système métrique → Racines carrées → Racines cubiques et les racines n^{èmes} → Les nombres incommensurables → Rapports de deux nombres ou deux grandeurs et applications de l'arithmétique → Logarithme.

Ce que ne laisse pas apparaître cette ossature, c'est la construction et le ciment de l'organisation mathématique de cette période. En fait, elle va se fonder sur « une théorie » de la mesure des grandeurs. À la période classique, une problématique de la mesure est sous-jacente à la construction du Numérique, affichée en général en début des ouvrages d'arithmétique :

« Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. [...] Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime par un nombre. » (Guilmin 1855)

Elle aboutit à trois éventualités en lien avec certains types de nombres ou de grandeurs :

- des nombres entiers « quand une grandeur se compose exactement de l'unité répétée un certain nombre de fois » ;

⁴² On trouve notamment cette organisation dans les manuels suivants :

Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges, A. Guilmin, Auguste Durand, Paris, 1855

Traité d'Arithmétique, R.P. Fatou, Gauthier-Villars, Paris, 1866

Cours d'Arithmétique théorique et pratique à l'usage des lycées et collèges, F. Girod, E. André Fils, Paris, 1903

Cours d'Arithmétique à l'usage des écoles primaires supérieures, des écoles normales, et des candidats aux écoles nationales d'arts et métiers, H. Neveu, Masson, Paris, 1915

- des nombres fractionnaires « quand une grandeur se trouve composée d'un certain nombre d'unités, plus une fraction moindre que l'unité » ;
- quand une grandeur ne rentre pas dans l'un des deux cas précédents, « on dit alors que la grandeur est incommensurable avec cette unité : elle ne peut être mesurée qu'approximativement avec cette unité ».

En fait cette problématique fait à la fois partie de l'organisation mathématique, tout autant que de l'organisation didactique, elle va permettre la constitution de milieux pour la construction des nombres. Elle sera toujours présente en « toile de fond » à cette époque. Par exemple, pour le traitement des nombres fractionnaires, Neveu (1915) y fera constamment référence :

« On peut toujours supposer qu'un nombre fractionnaire, quelle que soit la nature qui lui a donné naissance, soit la mesure d'une longueur »

ou encore

« Deux nombres fractionnaires sont égaux lorsqu'ils mesurent la même longueur ou des longueurs égales, ces longueurs étant mesurées avec la même unité ».

La dernière éventualité évoquée dans la définition de la problématique va donner naissance aux nombres incommensurables par l'intermédiaire d'un autre objet : la racine carrée. À partir de l'espace ancien constitué par les nombres fractionnaires, l'objet « racine carrée » s'impose sous la forme d'un algorithme analogue à celui de la division, technique permettant d'obtenir des valeurs approchées de racines carrées, dite « méthode d'extraction ». Cet objet conduit à une première extension de l'espace numérique sous les traits des *racines carrées incommensurables* :

« Quand la racine carrée d'un nombre entier, tel que 42, n'est pas un nombre entier, elle n'est pas non plus un nombre fractionnaire [...]. $\sqrt{42}$ est ce qu'on appelle un nombre incommensurable, c'est-à-dire qu'il n'a pas de commune mesure avec l'unité. Une pareille racine ne peut être évaluée que par approximation. » (Guilmin 1855)

Pour produire l'extension recherchée de l'espace numérique en complétant l'espace des nombres fractionnaires par les *nombres incommensurables*, une autre signification de la racine d'un nombre A est obtenue : $\sqrt{A}$ limite des racines carrées $\frac{an}{n}$ approchées à $1/n$ près (C. Vacquant et A. Macé de Lépinay⁴³ 1917) :

⁴³ Éléments de Géométrie, C. Vacquant et A. Macé de Lépinay, Masson, 1917.

$$\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 \leq A < \left(\frac{a_n+1}{n}\right)^2, \text{ où } a_n \text{ est entier.}$$

Cette signification va être généralisée à d'autres mesures, par l'intermédiaire d'une droite graphique pour introduire des nombres incommensurables, qui correspondent à des longueurs n'ayant aucune commune mesure avec l'unité (Girod 1903). On utilisera même cette signification pour étendre aussi les opérations. On peut avancer que cette signification faisait davantage partie du rapport au numérique de l'enseignant que de celui de l'élève. H. Lebesgue (1932) avait déjà critiqué cette présentation des opérations sur les irrationnels :

« Jadis, la possibilité, et même la signification de ces opérations résultaient de la "généralité de l'analyse" ; dans ma jeunesse, nous passions "à la limite". Je crois que, pour nos élèves de l'enseignement secondaire, il n'y a rien de changé ; que tout se réduit encore à l'emploi de quelques paroles magiques quand il s'agit de passer des opérations sur les nombres commensurables aux opérations sur les nombres quelconques. »

Les techniques correspondant aux cinq opérations de l'arithmétique ne seront pas vraiment élaborées, mais on montrera quelques exemples dans le cadre d'une pratique de calcul approché :

« On peut avoir à effectuer sur les nombres incommensurables, les mêmes opérations que sur les nombres entiers ou fractionnaires, que l'on appelle par opposition aux premiers, nombres commensurables » (Girod, 1903)

Ainsi les auteurs proposent des approximations rationnelles ou décimales de nombres irrationnels comme :

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{ou} \quad \sqrt[3]{23 + \sqrt{32}} = 5,35 \text{ à moins de } \frac{1}{100} \text{ près (Girod 1903).}$$

Ils s'en tirent par une déclaration en rapport à l'approximation. Et c'est bien là en pratique tout le problème :

« En vertu de ces définitions, le calcul des nombres incommensurables se ramène toujours à un calcul de nombres commensurables et ne présente d'autres difficultés que la question d'approximation » (Girod 1903).

L'organisation du Numérique n'aboutit pas à la construction d'un système de nombres englobant tous les types de nombres et sur lequel on dispose d'opérations internes qui vont agir indépendamment de la nature des nombres. On a plutôt ici une réunion de familles de nombres, l'ensemble des entiers, l'ensemble des rationnels positifs inférieur à l'unité (appelés parfois

fractions), l'ensemble des nombres rationnels positifs non entiers (appelés parfois nombres fractionnaires) et une autre famille contenant les racines incommensurables. L'unification, au sens d'un système de nombres présentant une signification commune et sur lequel des opérations font l'objet d'une même définition n'est pas réalisée comme dans les constructions de Descartes ou de Stevin.

Ainsi l'idée de nombre à cette époque s'appuie sur celle de *mesure d'une grandeur*, appuyée par une approche analytique pour introduire les *nombres incommensurables*. Malgré une adaptation numérique aux évolutions des savoirs des mathématiciens, on peut souligner ici la filiation avec l'exposé euclidien des *Eléments* dont les traces remontent à plus de vingt-trois siècles.

III. LES PERIODES DE PREPARATION DE LA REFORME DES MATHEMATIQUES MODERNES (1947-1958 ET 1958-1968)

Les nouveaux programmes de 1947 se présentent comme la première étape dans l'évolution du Numérique qui conduira à la réforme des mathématiques modernes. La mesure des grandeurs ne constitue plus la seule *technologie* supportant le Numérique. Le programme de la classe de mathématique (classe de Terminale) précise les limites du rapport institutionnel au Numérique à travers trois axes, la notion de mesure, l'irrationalité, et le calcul approché :

« La notion de mesure des grandeurs sera introduite au moment le plus opportun : on réservera pour une étude ultérieure tous les problèmes qui nécessitent la connaissance des nombres irrationnels. La définition seule des valeurs approchées et des erreurs est au programme de la classe. » (Programme du 24 juin 1948)

En classe de quatrième, la notion de fraction est étendue à celle de rapport de deux nombres (entiers, décimaux ou fractionnaires), défini comme quotient exact. Le lien avec les rapports de grandeurs et les mesures se réalise dans l'habitat des grandeurs proportionnelles, « le rapport de deux grandeurs est égal au quotient exact des nombres qui mesurent ces grandeurs avec la même unité » (Lebossé et Hémerly 1947), conduisant à une assimilation complète entre les quotients des mesures et les rapports de grandeurs (implicitement commensurables). Cette organisation à propos des proportions et des grandeurs proportionnelles montre que la théorie des rapports n'est pas encore prête à s'éteindre, mais l'organisation mathématique de la période précédente est modifiée. C'est le Numérique qui fournit les outils pour le travail sur les proportions et les grandeurs ; les fonctions n'apparaissent pas encore pour les problèmes de mathématisation. Le cadre de travail numérique-géométrique ainsi mis en place dans les classes de

Cinquième et Quatrième constitue *la technologie* à partir de laquelle les auteurs vont introduire les calculs métriques en géométrie dans les classes ultérieures. Il est implicite que ce cadre s'adapte naturellement aux rapports de grandeurs incommensurables qui seront rencontrés dans l'étude métrique des triangles rectangles. Une dialectique subtile entre grandeurs et nombres permet ainsi de mettre en place un espace de nombres pour travailler sur les grandeurs rencontrées à partir de la Cinquième : les grandeurs donnent accès aux nombres fractionnaires (par l'aspect opérateur), lesquels se généralisent par la notion de quotient exact, et en retour permettent de mettre en rapport les grandeurs, de les mesurer et de traiter les problèmes pratiques et géométriques rencontrés.

Les nombres vont naître dans une problématique numérique-algébrique amenant parfois dans les manuels des incohérences mathématiques. Par exemple, dans le manuel emblématique de Lebossé et Hémery (1947), les rationnels se présentent comme : « les nombres qui ne contiennent pas de radicaux », tandis que les irrationnels sont « les nombres qui comprennent un ou plusieurs radicaux ». $2 + \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont cités comme exemples prototypiques de nombres irrationnels.

Dans la réforme suivante (1958-68), l'organisation mathématique classique s'effondre complètement. On voit apparaître une construction basée sur une problématique plus algébrique au collège et au début du lycée, puis progressivement sur une problématique formelle, notamment en classe de Terminale, et cela bien avant la réforme des mathématiques modernes. Les structures formelles et les extensions successives des systèmes de nombres remplacent la construction des nombres par adjonction de la période classique. On relève, non seulement des indices, mais bien des preuves irréfutables de mutations vers les « mathématiques dites modernes ». En effet, les ensembles structurés de nombres font leur apparition bien avant la dite réforme. Dans un manuel pour la classe de Troisième (Marville et Adam 1961), la première page introduit « les trois ensembles fondamentaux de l'algèbre : $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ ». Les propriétés de ces ensembles vont être énumérées selon les structures de l'algèbre moderne. Dans les deux ouvrages précédents, les notions de racine carrée et d'irrationalité justifient le saut dans un ensemble dit des nombres réels. L'adaptation se réalise de la façon suivante chez Monge et Guinchan (1966):

« Ensemble $\mathbf{R}^+$ des réels positifs. Lorsque A n'est pas le carré d'un entier naturel ou le carré d'un rationnel, le symbole $\sqrt{A}$ permet donc de définir un nombre irrationnel positif. Il existe d'autres nombres positifs non rationnels, qui ne sont égaux ni à un entier, ni à un décimal, ni à une fraction arithmétique. [...] La réunion des rationnels positifs et des irrationnels positifs forme un ensemble que l'on appelle ensemble des réels positifs et que l'on désigne par la notation $\mathbf{R}^+$. »

Les auteurs s'inscrivent pleinement dans une *problématique algébrique* : certaines racines carrées sont adjointes à l'ensemble des rationnels, et plus généralement d'autres nombres – les irrationnels – permettant d'obtenir un ensemble noté **R**. Le prolongement des opérations s'appuie sur *le principe de permanence algébrique* :

« Nous admettons que toutes les opérations que nous avons définies dans l'ensemble **Q** des nombres rationnels peuvent aussi être définies dans l'ensemble **R** des nombres réels, et qu'elles possèdent dans l'ensemble **R** les mêmes propriétés que dans l'ensemble **Q** »
(Monge et Guinchan 1966)

L'ensemble **R** est alors déclaré « le quatrième ensemble fondamental de l'algèbre » après **N**, **Z**, et **Q**, tandis que l'ensemble **D** des nombres décimaux est complètement oublié dans la problématique précédente.

Les programmes de la classe de Mathématiques Élémentaires (classe de Terminale de l'époque) sanctionnent une évolution déjà significative en classe de Seconde et confirment la place des structures dans l'enseignement secondaire. L'institution exprime le souhait de donner des « indications sommaires » sur le mode de construction de **R**. Ce souhait laisse la porte ouverte à de nombreuses variations sur le mode de construction de **R** et le niveau d'approfondissement de l'exposé comme on peut le voir dans quelques manuels :

- une construction basée sur les suites de Cauchy chez Monge et Ruff (1962) ;
- une construction dite des sections ouvertes commençantes chez Bréard C. (1963), en lien avec les coupures de Dedekind ;
- une construction basée sur les limites d'une suite de nombres rationnels et la droite chez Lespinard et Pernet (1962).

Si les premiers auteurs se placent dans une *problématique formelle* et proposent des constructions complètes analogues à celles des ouvrages universitaires de l'époque, Lespinard et Pernet présentent effectivement des « éléments » qui semblent plus conformes aux injonctions des instructions officielles. Cet ouvrage se démarque aussi des deux précédents par l'intervention de la géométrie que voulaient absolument éviter les mathématiciens de la sphère savante de la fin du 19ème siècle. L'institution scolaire de cette époque a ainsi conduit les auteurs de manuels devant un problème didactique difficile apportant des traitements assez différents. J.Lelong-Ferrand (1964) résume le problème de la façon suivante :

« Les nouveaux programmes de Mathématiques Élémentaires, qui proposent de donner des indications sommaires sur la définition des nombres réels, placent donc le professeur devant une situation embarrassante ; car, quelle que soit la méthode adoptée, il n'est pas possible d'en donner un exposé rigoureux sans lui consacrer plusieurs leçons, au détriment du reste du cours. Les méthodes fondées sur la théorie des limites présentent, de plus, l'inconvénient de retarder la définition des nombres réels jusqu'à ce qu'on ait exposé le cours dans un ordre peu naturel à ce niveau. »

Après la théorie des rapports de la période classique, l'organisation mathématique du Numérique trouve un environnement technologico-théorique plus proche du savoir savant, mais qui n'apporte pas une solution didactique satisfaisante. Cette période contient les conditions d'un changement à venir, plus radical que les précédents, et elle porte déjà des éléments importants de cette « modernité » qui sera publiquement annoncée à la période suivante.

IV. LA PERIODE DE LA REFORME DES MATHEMATIQUES MODERNES (1968-1978)

Cette période sanctionne une évolution de la constitution du Numérique dans l'institution en réduisant le plus tôt possible et au plus près la distance avec le savoir mathématique de référence. Elle s'inscrit dans un courant structuraliste plus général.

L'organisation mathématique du Numérique va être bâtie sur de nouvelles fondations dont le socle, lui-même, est constitué par les nombres décimaux. L'institution met en scène un objet, peu présent dans les périodes précédentes : l'idécimalité. J'ai proposé ce néologisme pour désigner le caractère non-décimal de certains nombres comme on le fait depuis des siècles pour l'irrationalité. Il s'agissait aussi de pointer ce caractère particulier de la construction du Numérique de cette époque qui conduit à donner un rôle fondamental à des nombres qui restent souvent dans l'ombre : les nombres non-décimaux que j'appelle *les nombres idécimaux*. En effet, ces nombres vont vivre dans cette époque un destin particulier dans la mise en place des nombres réels, dès la classe de quatrième, sous la forme des suites décimales illimitées. C'est une caractéristique de *l'environnement technologico-théorique* du Numérique et de l'organisation didactique, qui restera original dans cette épistémologie scolaire du Numérique.

Les nouveaux programmes (arrêté du 22 juillet 1971) demandent d'introduire les nombres réels dès la classe de Quatrième en suivant un plan précis d'enseignement. Avant d'aborder les propriétés structurelles de l'ensemble des réels (dont la notion de quotient), nous relevons :

- la consolidation de l'étude de l'anneau ordonné des nombres décimaux ;

- un travail d'approximation, basé sur les encadrements par des décimaux « successifs » des différents ensembles de décimaux D_p , de sommes, produits, inverses et racines carrées de décimaux ;
- l'introduction des suites décimales illimitées ;
- l'étude des propriétés structurelles de l'ensemble des réels (dont la notion de quotient).

L'institution Enseignement Mathématique Secondaire se démarque des constructions savantes à l'honneur à cette époque - à savoir les suites de Cauchy dans l'esprit de la construction de Cantor ou les coupures de Dedekind. Elle propose une voie qui semble plus naturelle par rapport à l'idée d'approximation et par rapport aux fondations basées sur l'ensemble des décimaux. Il est ainsi suggéré de montrer la nécessité d'introduire des nombres idécimaux. Cette nécessité est notamment motivée par deux problèmes :

- a) Le premier est celui de la recherche de l'inverse d'un décimal strictement positif dans le cas où cet inverse n'est pas décimal. Par exemple, le manuel de la collection Queysanne-Revuz⁴⁴ propose le problème de la recherche de l'inverse de 12 et de 0,37 et aboutit à la conclusion : « il n'existe pas de décimal x tel que : $12x=1$. La division avec virgule de 1 par 12, poursuivie indéfiniment, fournit *une écriture décimale illimitée* : 0,083333... ». Ce problème permet aux auteurs d'introduire la suite décimale illimitée 0,083333... .
- b) Le second problème suggéré par le programme est celui de l'existence de la racine carrée de certains nombres décimaux. Les auteurs précédents proposent la recherche *des racines carrées à 10^{-n} respectivement par défaut et par excès* du nombre 6. Cette activité conduit à mettre en évidence, d'une part *une écriture décimale illimitée* (dont les auteurs demandent d'admettre qu'elle n'est pas périodique), et d'autre part *une suite d'intervalles emboîtés qui n'ont en commun aucun point de D* .

Les deux problèmes sont réunis pour une cause commune, la motivation à faire émerger de nouveaux nombres : les nombres idécimaux. Les auteurs du manuel précité assument totalement ce choix comme en témoigne le titre de l'un des paragraphes : « Introduction de nombres non décimaux ». Un nombre réel est alors un objet représenté par une suite décimale illimitée et doit être conçu comme une limite de nombres décimaux - notion non formalisée et intuitive à ce niveau : « Une écriture décimale illimitée qui n'a pas pour période 0 ni 9 ne représente pas un nombre décimal. Nous convenons de dire qu'une telle écriture représente un "nouveau nombre" ». Cette organisation se conclut par la définition suivante de l'ensemble des

⁴⁴ Mathématiques, Classe de Quatrième, collection Queysanne-Revuz, Série rouge, Nathan, 1973.

nombres réels : « Les nombres qui peuvent être représentés, au moins d'une façon, par une écriture décimale illimitée s'appellent les nombres réels (ou plus simplement les réels) ». Les nombres idécimaux deviennent ainsi un objet fondamental dans la constitution mathématique et didactique du Numérique. On notera que le premier problème n'est pas suffisant pour motiver l'introduction d'un ensemble plus vaste que $\mathbf{Q}$. Le problème de la recherche de racine carrée suffit alors et est toujours prêt à servir cette « cause ».

Les deux problèmes ne permettent pas cependant de justifier l'extension jusqu'à $\mathbf{R}$. En effet, en se plaçant dans des corps quadratiques, ou plus largement dans des corps contenant $\mathbf{D}$ et stables par racine carrée - le corps des nombres constructibles ou encore le corps des nombres algébriques par exemple - les deux problèmes sont résolus. Par contre la nécessité d'étendre $\mathbf{D}$, au-delà des corps précédents et jusqu'à $\mathbf{R}$, va apparaître si l'on veut avoir des propriétés topologiques comme l'axiome de Dedekind-Cantor des intervalles emboîtés. Dans la revue de l'APMEP⁴⁵, Dehame, co-auteur du manuel Queysanne-Revuz, explicite ses intentions qui s'inscrivent dans la perspective que je viens d'énoncer :

« Cette différence fondamentale entre $\mathbf{D}$ et $\mathbf{R}$ ne peut être énoncée dans toute sa généralité en Quatrième. Mais il ne faudra pas manquer de la faire ressentir à propos des exemples proposés par le programme (recherche de l'inverse et de la racine carrée). »

Ainsi les auteurs vont prendre en compte ce problème, autant que faire se peut à ce niveau, et aller au-delà des problèmes de nature algébrique précisés par le programme. Pour Dehame, la représentation graphique des décimaux par les points d'une droite ne peut suffire à faire percevoir de façon intuitive ces lacunes topologiques. De plus, il ajoute qu'une introduction de $\mathbf{R}$ basée exclusivement sur des problèmes de mesure (au sens physique) ne peut que donner des idées fausses ou incomplètes. Il est clair qu'une représentation graphique ne permet pas de différencier véritablement $\mathbf{R}$ et $\mathbf{D}$. L'obstacle de la commensurabilité est ici remplacé par celui de la *décimalité* et la solution didactique proposée est une formalisation extrême à l'aide des suites décimales illimitées. Chez l'auteur précédent, l'enjeu est clair : « [...] il faut que l'élève sente qu'au moment où l'on introduit les réels, on fait un nouveau pas dans l'abstraction, dans l'idéalisation [...]. » Dans cette organisation mathématique du Numérique, la racine carrée, est toujours présente. Elle est reliée au quotient pour faire « découvrir » des nombres idécimaux. Néanmoins son rôle est minoré.

⁴⁵ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, bulletin numéro 279, Paris.

Ainsi, dans cette période des mathématiques modernes, l'institution propose une nouvelle épistémologie scolaire des nombres réels basée sur la *complémentarité décimal/idécimal* et sur une présentation des nombres réels sous forme de suites décimales illimitées. Cette problématique est bien différente de celle de toutes les périodes précédentes : $\mathbf{R}$ se construit, non plus par rapport à $\mathbf{Q}$, mais en opposition à $\mathbf{D}$, tout en le prolongeant. La complémentarité rationnel/irrationnel des périodes précédentes s'efface pour laisser la place à une opposition décimal/idécimal, ou, du moins, à une extension du système des nombres décimaux. Les choix de cette période conduisent à une construction des nombres idécimaux. La plupart des manuels de Troisième ne citent même plus le terme « irrationnel » dans la séquence sur la racine carrée, mais se placent dans le nouvel environnement technologico-théorique mis en place pour les réels : les approximations décimales et les écritures décimales illimitées.

V. LES PERIODES DE FERMETURE DE LA REFORME DES MATHÉMATIQUES MODERNES (1978-1985 ET 1985-96)

À partir de 1978, année à partir de laquelle se « refermait » la réforme des mathématiques modernes, se dessinait déjà un changement de problématique modifiant complètement le rapport de l'institution au Numérique. La réforme de 1978 s'inscrit dans un mouvement général de recul de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des structures. Le symptôme de ce changement se situe en classe de Quatrième dans laquelle le Numérique apparaît sous le domaine « Calcul numérique ». Le long paragraphe des programmes de 1971 intitulé « Nombres décimaux et approche des réels » est remplacé par un paragraphe exigu laissant apparaître la lapidaire expression « pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels » (Arrêté du 16 novembre 1978). Pour ce qui est spécifique des réels, la seule instruction se réduit à la description suivante :

« Pour $\mathbf{R}$ il suffit que les élèves sachent qu'il s'agit, suivant la présentation adoptée, d'un sur-ensemble de $\mathbf{D}$ ou de $\mathbf{Q}$ sur lequel l'addition, la multiplication, la relation d'ordre se prolongent en disposant des mêmes propriétés, et que tout élément positif de $\mathbf{R}$ admet une racine carrée. »

Les conséquences de cette évolution du Numérique, évidé en quelque sorte, conduit à observer dans les manuels une grande variété d'organisations mathématiques. L'objet « nombre réel » est notamment présenté sous des rapports très différents selon les manuels :

- Introduction par les développements décimaux illimités dans la continuité de la période précédente avec un formalisme moindre (Monge, 1978) ;

- Introduction par la problématique de la mesure des longueurs où le nombre apparaît comme le résultat d'une mesure (Maugin 1979) ;
- Introduction s'appuyant sur la droite graduée où les nombres sont utilisés pour repérer les points d'une droite ((Deledicq 1983).

Dans la période suivante, la réforme commencée en classe de Sixième à la rentrée 1986 (Arrêté du 14 novembre 1985) va « diluer » le Numérique dans le domaine, étiquetée par l'institution « Travaux numériques », reléguant à l'histoire la traditionnelle répartition arithmétique - algèbre. Le Numérique est construit à travers une perspective essentiellement algébrique dissociée de la mesure des grandeurs. Le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres décimaux est déclaré avec un statut de nombre à partir de la définition comme « le nombre qui multiplié par b donne a » (B.O. du 30-7-87). L'objet racine carrée s'inscrit dans ce cadre comme algorithme de calcul - « touche de la calculatrice » - en quatrième, puis comme opérateur algébrique (lié à l'opérateur carré) et comme symbole « radicaux » permettant de traduire des relations entre des nombres. L'étude de la nature des racines carrées, ainsi que ceux de l'irrationalité et de l'idécimalité sont absents des programmes comme de la plupart des manuels. La problématique d'extension des systèmes de nombres, apparue dans les années soixante, disparaît dans cette période. Il est ainsi assez rare en classe de Troisième de voir le mot « irrationnel » dans la séquence sur l'objet « racine carrée ». Il peut figurer mais il est rarement institutionnalisé et prend plutôt un caractère exotique. En fait, au lieu de traiter vraiment ces problèmes de nature arithmétique, les agents - auteurs de manuels - vont les déplacer vers un autre problème, différent mais intimement lié, celui de la différenciation « valeur exacte/valeur approchée ». Un symptôme peut être remarqué dans n'importe quel manuel de Troisième de cette époque. Quand une propriété est énoncée comme « Quels que soient les nombres a, b et c : si a $\leq$ b alors a + c $\leq$ b + c » (Bonnefond 1989), elle est formulée sans domaine de référence et sans faire intervenir la nature des nombres. Implicitement les auteurs laissent circuler l'idée que ces propriétés peuvent s'appliquer à tous les nombres rencontrés et en particulier aux racines carrées.

La classe de Seconde, au lycée, confirme le peu d'attention aux systèmes de nombres « S'ajoutent en Seconde [...] les notations **N**, **Z**, **Q**, **R** ; sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et aucun développement n'est au programme » (arrêté du 25 avril 1990). Dans les manuels, l'ensemble **R** apparaît comme « *un grand fourre-tout* »⁴⁶ qui s'élabore sur une notion préconstruite de « nombre » indépendant de sa nature arithmétique, et pour lequel les

⁴⁶ Selon l'expression des auteurs du manuel Hachette pour la classe de Seconde (1994).

règles de calcul vont être officialisées une fois pour toutes, la nature des nombres étant mise à l'écart. L'unité de ce réservoir de nombres que constitue $\mathbf{R}$ est obtenue à l'aide de la représentation par la droite numérique : « nous pouvons représenter géométriquement tous les nombres réels : ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée » (Terracher et al, 1994).

VI. LA PERIODE ACTUELLE (1996-2002)

Dans les nouveaux programmes, mis en place à partir de la sixième en 1996, en passant par la Seconde en 2000 et qui trouveront leurs termes en Terminale en 2002, un timide retour de l'Arithmétique en Troisième (1999) peut être repéré par l'intermédiaire d'un thème nouveau « Nombres entiers et rationnels » et des objets « diviseurs communs à deux entiers » et « fraction irréductible ». L'organisation de ce thème n'est pas sans surprendre avec la présence, voire l'opposition, de deux blocs : un bloc pratico-technique bien identifié autour des types de tâches :

« Déterminer si une fraction est irréductible ;

Simplifier une fraction ;

Déterminer si deux entiers sont premiers entre eux. »

et un bloc technologique constitué autour de la nature des nombres qui semble relever de la culture :

« une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. »

ou encore :

« À côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché. »

Il s'agit d'une suggestion plutôt qu'une injonction forte de développement sur la nature des nombres et la structure des ensembles de nombres. Ces conditions nouvelles, offertes à l'enseignement du Numérique, conduisent actuellement à peu de changement sur le domaine numérique et aucune variation effective sur les organisations mathématiques et didactiques ne peut être repérée. En effet, la plupart des auteurs de manuels répondent aux injonctions institutionnelles en rajoutant, à la suite de la progression stabilisée depuis 1978, un chapitre qui est nommé « Arithmétique » (Delord et Vinrich 1999 et Bonnefond 1999) ou tout simplement

« Nombres entiers. Nombres rationnels » (Malaval et al 1999 et Serra et al 1999). L'espace est envahi par une praxéologie locale constituée par les types de tâches citées précédemment et une technologie basée sur les propriétés des notions de « diviseurs communs à deux entiers » et de « PGCD ». Le travail évoqué sur la nature des nombres ou les ensembles de nombres se résume souvent en une activité dirigée à propos de l'irrationalité du mytique nombre $\sqrt{2}$ ou en une annonce culturelle sur l'histoire de ce nombre. Les manuels de Troisième laissent ainsi apparaître une conformité des plus strictes avec les programmes.

En classe de Seconde, l'institution demande un travail à propos du Numérique qui ne résume pas aux simples notations des systèmes de nombres, lesquelles fixaient les limites de l'étude des périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes (1978 - 1996). Si l'objectif affiché par les programmes est d' « Approfondir la connaissance des différents types de nombres », on ne précise cependant qu'un seul thème d'étude « Nature et écriture des nombres », sans expliciter la praxéologie correspondante. Le seul type de tâches qui est explicité est de savoir « distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées » avec comme élément technologique : « On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite ». L'évolution technologique aidant, l'institution suggère aussi un travail en lien avec la calculatrice, sur les représentations des nombres dans une calculatrice et les limites de celle-ci. Comme pour la classe de Troisième, ces changements ne vont pas bouleverser la structure de l'organisation mathématique du Numérique en classe de Seconde, mais deux thèmes nouveaux viendront se greffer dans l'organisation ancienne autour des deux types de tâches : « reconnaître la nature d'un nombre » et « distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées ». Les praxéologies ne seront pas très développées comme on peut le voir dans la plupart des manuels. Une technique pourra être ébauchée parfois : « Pour reconnaître la nature d'un nombre, on commence par l'écrire le plus simplement possible » (Malaval et al, Math 2^e, Hyperbole, Nathan, 2000, p 49). La technologie se limite en général aux définitions des différents types de nombres, de sorte que ces types de tâches devraient rester problématiques pour les élèves.

VII. LE VIDE DIDACTIQUE INSTITUTIONNEL ET LA PLACE DE L'ENSEMBLE D

Cette analyse des organisations du Numérique de 1850 à nos jours m'a amené à proposer la notion de *vide didactique institutionnel* (A. Bronner 1997) pour caractériser les périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes relativement au problème de l'extension de l'ensemble des nombres et du calcul des nombres décimaux ou rationnels aux nombres réels. Alors qu'un plan précis d'enseignement et une signification précise de la notion de nombre réel

étaient proposés pendant la période des mathématiques modernes, on ne trouve guère d'instruction à propos des nombres réels dans les périodes suivantes.

L'ensemble $\mathbf{D}$ n'a jamais eu une place centrale dans les programmes d'après la réforme des mathématiques modernes, il est même oublié dans les programmes des périodes de fermeture. On peut trouver une origine de ce phénomène dans la place que tiennent les décimaux dans les institutions universitaires, et de ce fait, il en est de même pour les idécimaux. En effet c'est l'opposition rationnel/irrationnel qui structure le Numérique, héritage lointain de la Grèce Antique et toujours présent. Malgré les apports des Babyloniens, des mathématiciens arabes et de Stevin sur les décimaux et les développements décimaux illimités, les nombres idécimaux n'ont pas le même poids culturel, et n'imposent pas une complémentarité analogue dans l'étude du Numérique, au niveau de l'enseignement supérieur. La « qualité » de $\mathbf{Q}$ d'être un corps contrairement à $\mathbf{D}$, peut être aussi une des raisons de cette péjoration de l'étude et de la place des nombres décimaux dans l'institution universitaire, et par voie de conséquence, dans l'institution d'enseignement secondaire. L'introduction précoce à l'école élémentaire⁴⁷, l'utilisation importante des décimaux dans les pratiques sociales et dans les applications numériques de divers domaines scientifiques et sociaux n'en font plus un objet sensible d'enseignement en fin de collège et au lycée.

Sur une idée assez vague de « nombre » et sur les fondations structurées autour des nombres décimaux, l'organisation du Numérique est mise en place selon une problématique que j'ai qualifiée d'algébrique. La période (86-96) amplifie le phénomène de *vide didactique institutionnel* à l'objet « nombre réel » : la quête des réels qui était un but dans l'organisation de la période classique - sous les traits des incommensurables, puis un fondement dans la période des mathématiques modernes, n'apparaît plus au collège comme au Lycée. Je fais l'hypothèse que les effets de la réforme des mathématiques modernes ont été tels que les agents didactiques « auteurs de programme » ont été conduits à produire ce *vide didactique institutionnel* dans l'institution Enseignement Mathématique Secondaire à propos de l'objet « nombre réel ». Les problèmes d'enseignement et d'apprentissage engendrés par la réforme sont réglés par ce vide, laissant aux enseignants la responsabilité complète d'une transposition des nombres réels en classe. C'est la nouvelle réponse au difficile problème d'enseignement des nombres réels.

Nous avons perçu des indices d'une évolution possible du Numérique à partir de 1996. On peut se poser la question de savoir quelles sont les raisons d'être de ces nouveaux thèmes d'études à propos des nombres dans la période actuelle. Est-ce la perception d'un vide sur le Numérique

⁴⁷ Officiellement en classe de CM1 en France (élèves d'âge moyen de 9 ans).

par rapport aux besoins mathématiques ? Et il s'agirait alors de combler une partie du vide institutionnel que j'ai pointé dans les périodes de fermeture de la réforme. Est-ce une motivation liée à l'utilisation des moyens de calcul, et notamment l'utilisation de la calculatrice, qui est soulignée dans les trois colonnes du bandeau de programme ? Il s'agirait alors de proposer une technologie permettant de traiter les thèmes liant nombres, calcul et calculatrices. Les documents d'accompagnement insistent d'ailleurs largement sur ce sujet (mars 2001).

BIBLIOGRAPHIE

- Brousseau G. (1983) *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, RDM Vol 4.2, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Brousseau G. (1986), *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques* RDM Vol. 7/2, La pensée sauvage.
- Brousseau G. (1990), *Le contrat didactique : le milieu*, RDM Vol. 9/3, La pensée sauvage.
- Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique*, La pensée sauvage.
- Chevallard Y. (1988-89), *Le concept de rapport au savoir*, Séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique, Université J.Fourier, Grenoble.
- Chevallard Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, RDM Vol 12/1, La pensée sauvage.
- Chevallard Y. (1996), *La fonction professorale : Esquisse d'un modèle didactique*, Actes de la VIIIème d'été de didactique des mathématiques, IREM de Clermont-Ferrand.
- Chevallard Y. (1998), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique*, Actes de l'université d'été, La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand
- Chevallard Y. (2001), *Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions*, Cours de la 11^{ème} école d'été de didactique des mathématiques, La pensée sauvage, Grenoble
- Lebesgue H. (1975- nouvelle édition), *La mesure des grandeurs*, Éditions Albert Blanchard.
- Lelong-Ferrand J., Arnaudès J.M. *Cours de mathématiques* (1976), Dunod.

Lelong-Ferrand J. (1964), *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, Armand Colin.

Manuels utilisés classés par ordre chronologiques

Guilmin A., (1855), *Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges*, Auguste Durand, Paris

Faton R.P., (1866), *Traité d'Arithmétique*, Gauthier-Villars, Paris

Girod F., (1903), *Cours d'Arithmétique théorique et pratique à l'usage des lycées et collèges*, André Fils, Paris

Neveu H., *Cours d'Arithmétique à l'usage des écoles primaires supérieures, des écoles normales, et des candidats aux écoles nationales d'arts et métiers*, Masson, Paris

Lebossé et Héméry, (1947), *Mathématiques*, classe de Troisième, Nathan

Maillard et Millet, (1954), *Classe de Mathématiques*, Arithmétique, Hachette

Marvillet et Adam, (1961), *Mathématique*, 3ème, 1961, librairie Armand Colin.

Monge et Ruff, (1962), *ensembles et nombres*, Librairie Belin

Bréard C. (1963), *Mathématiques, classe de mathématiques élémentaires*, Tome 1, Editions de l'Ecole

Lespinaud et Pernet, (1962), *Arithmétique, Classe de mathématiques élémentaires*, Editions André Desvigne

Monge et Guinchan, (1966), *Mathématiques*, 3ème, librairie Belin

Dehame et al, (1973), *Mathématiques*, Classe de Quatrième, collection Queysanne-Revuz, Série rouge, Nathan

Monge M., Begot M., Hautcœur S., (1978), *Mathématiques, Quatrième*, Collection Monge, Belin

Fauvergue F., Jeanmot, Rieu R., (1979), *Mathématiques, Quatrième*, Collection Mauguin, Istra

Deledicq A., Lassave C., Missenard C et D., (1983) *Faire des mathématiques, Classe de Quatrième*, Cedic

Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., (1989), *Mathématiques*, Troisième, collection Pythagore, Hatier

Terracher P.H. et al, (1990), *Mathématiques, Seconde*, Hachette

Delord R. et Vinrich G., (1999), *Cinq sur cinq*, Math 3^è, Hachette

Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., (1999), *Pythagore* 3^è, Hatier

Serra et al, (1999), *Math* 3^è, Bordas

Malaval et al (1999), *Math* 3^è, Nouveau Transmath, Nathan

Malaval et al, (2000), *Math* 2^e, Hyperbole, Nathan

UN NOUVEAU CONCEPT POUR PENSER LE PROGRES EN ARITHMETIQUE
ELEMENTAIRE : CELUI DE CONCORDANCE / DISCORDANCE ENTRE LA
REPRESENTATION INITIALE D'UN PROBLEME ET L'ECONOMIE DE SA RESOLUTION
NUMERIQUE

Rémi Brissiaud

IUFM de Versailles

Laboratoire CNRS Cognition et activités finalisées - ESA 7021

Considérons ces énoncés de problèmes M1 et M2 :

M1 : Un enfant achète 3 chocolats à 50 cruzeiros l'un. Quel est le prix total ?

M2 : Un enfant achète 50 chocolats à 3 cruzeiros l'un. Quel est le prix total ?

Non seulement ils appartiennent à la même catégorie au sein du "champ conceptuel" des problèmes multiplicatifs (Vergnaud, 1983), mais ils utilisent les mêmes mots et comportent les mêmes nombres. Et pourtant, lorsque ces problèmes sont proposés à des sujets qui n'ont pas étudié la multiplication, le taux de réussite est de 75% environ pour le premier, alors qu'il est de 0% pour le second (Schliemann et al, 1998) ! Dans ce texte, nous voudrions :

1°) Avancer une explication théorique de ce phénomène : la résolution d'un problème nécessite d'abord de se représenter la situation décrite dans l'énoncé, puis de déterminer la solution numérique. Suivant les problèmes, ces deux phases s'articulent différemment chez le débutant et, dans le cas de M1, il y a concordance entre la représentation initiale du problème et l'économie de sa résolution numérique alors que dans celui de M2, il y a discordance. L'étude de ce phénomène conduit donc à envisager une nouvelle "variable didactique" : la concordance vs discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. Cette variable rend compte de la façon dont la sémantique des énoncés et la taille des données numériques interagissent au cours de la résolution d'un problème par un débutant. Elle est donc différente de celle que Duval appelle congruence vs non-congruence entre l'organisation rédactionnelle d'un

énoncé et les traitements arithmétiques requis, parce que la variable didactique étudiée par Duval ne concerne d'aucune façon la taille des données numériques (Duval, 1991).

2°) Montrer que les problèmes du type M2 sont intéressants du point de vue didactique non seulement en début d'apprentissage mais aussi en cours d'apprentissage.

3°) Montrer que le phénomène de discordance est tout à fait général et qu'il se retrouve concernant tous les concepts arithmétiques élémentaires.

4°) Montrer que son analyse permet d'avancer des éléments de réponses à des questions telles que :

- Comment caractériser un apprentissage réussi ?
- Quels sont les principaux processus psychologiques en jeu dans la conceptualisation arithmétique ?
- Quelles situations favorisent cette conceptualisation ?

I. LA RESOLUTION DE CE TYPE DE PROBLEMES AVANT TOUT APPRENTISSAGE : L'EXEMPLE DE LA MULTIPLICATION

Les sujets de l'étude de Schliemann et al (1998) qui échouent massivement le problème M2 (*50 objets à 3 cruzeiros*), ont 9 ans. Bien qu'ils ne soient pas scolarisés, ils ont des pratiques numériques parce qu'ils vendent des confiseries dans les rues de Récife. Chez des enfants scolarisés du même âge, la même étude montre que le taux de réussite est de 75% environ pour les deux problèmes. Il est donc crucial d'aller à l'école pour réussir M2, mais non M1. Expliquons ce phénomène.

Rappelons d'abord un résultat bien établi : avant l'apprentissage des signes "+", "-", "x" et ":", dès l'école maternelle, les enfants sont susceptibles de résoudre une grande variété de problèmes relevant de ces opérations, par des procédures d'ajouts ou de retraits successifs qui simulent les actions décrites dans l'énoncé. Les anglo-saxons parlent de "modeling strategies" (voir par exemple Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993). C'est la sémantique de l'énoncé qui détermine la nature de la "modeling strategy" activée : cette procédure correspond à *la représentation initiale du problème*. Dans le cas du problème M1, une "modeling strategy" consiste à calculer 3 fois 50 cruzeiros et, dans le cas de M2, 50 fois 3 cruzeiros. Cependant, le calcul de $50 + 50 + 50$ (3 fois 50) en comptant de 50 en 50 est très facile alors que celui de $3 + 3 + 3 + 3 + \dots$ (50 fois 3) en comptant de 3 en 3 ne l'est pas du tout.

Dans le cas de M1 (*3 chocolats à 50 cruzeiros l'un*), la représentation initiale induit d'emblée une procédure de calcul économique : $50 + 50 + 50$. Il n'est nullement nécessaire

d'avoir appris la multiplication pour calculer cette addition réitérée, et donc pour réussir ce problème. En revanche, dans le cas de M2 (*50 chocolats à 3 cruzeiros l'un*), la représentation initiale induit le calcul de "50 fois 3" alors que la résolution numérique économique de ce même problème, consiste à calculer "3 fois 50". Il y a, dans ce problème, discordance entre la représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique (Brissiaud, 1994, parle de "conflit"), parce qu'elles n'induisent pas la même procédure. Il est clair qu'en dehors d'un apprentissage scolaire, cela n'a rien d'évident que 50 fois 3 F soit égal à 3 fois 50 F. D'où l'échec massif.

Avec Richard (1990, pp. 177-180), nous pensons que les équivalences entre procédures de cette sorte ("50 fois 3 est égal à 3 fois 50", par ex.), de par l'économie cognitive qu'elles procurent (remplacer le calcul de "50 fois 3" par celui de "3 fois 50", par ex.), *fondent les concepts arithmétiques*. L'école a pour mission d'aider les élèves à s'approprier ces équivalences pour qu'à terme, ils réussissent les problèmes comme M2, dans lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de la résolution numérique, en remplaçant la "modeling strategy" par une procédure économique qui lui est équivalente.

Montrons que les problèmes de type M2 peuvent être le point de départ d'une démarche didactique favorisant la conceptualisation de la commutativité de la multiplication. Considérons ce problème M'2 : *Sur la façade d'une tour, il y a 3 fenêtres à chaque étage. La tour a 50 étages. Combien y a-t-il de fenêtres sur cette façade ?*

Le calcul de $3 + 3 + \dots$ ne menant pas à la solution numérique, les élèves peuvent être invités à amorcer une schématisation des fenêtres en dessinant 3 fenêtres, puis 3 autres en dessous, etc. Ce qui met à leur disposition un codage spatial de la collection sous la forme d'un quadrillage ou du moins, parce qu'il n'est pas nécessaire de dessiner les 50 lignes de fenêtres, cela met à leur disposition un codage spatial d'une partie de la collection. L'important est que les élèves puisse ainsi accéder à un autre mode d'énumération des unités : dans l'image prolongée, il y aurait 50 fenêtres à gauche, 50 fenêtre à droite et 50 au milieu. Grâce à ce codage spatial des données du problème, les élèves mobilisent donc une équivalence entre schèmes de parcours des unités d'une collection et *c'est cette équivalence qui fonctionne comme preuve et confère un statut d'évidence à la solution*.

Résumons : les problèmes dans lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de leur calcul créent un échec massif lorsqu'ils sont proposés avant tout enseignement. En revanche, lorsqu'on aide les élèves à réorganiser l'énumération des unités en jeu dans le problème, on les amène à découvrir en acte l'équivalence entre procédures qui fonde le concept et, donc, à progresser vers la conceptualisation.

II. LA RESOLUTION DE CE TYPE DE PROBLEMES EN COURS D'APPRENTISSAGE : L'EXEMPLE DE LA SOUSTRACTION

Evoquons une recherche qui concerne la soustraction et, plus précisément, l'équivalence : "chercher ce qu'il faut ajouter au nombre b pour avoir a , équivaut à chercher a moins b ". Les deux problèmes suivants s'analysent comme M1 et M2 :

S1 : Julie a 51 bonbons et Odile a 47 bonbons. Odile veut avoir le même nombre de bonbons que Julie. Combien doit-elle en acheter ?

S2 : Pierre a 63 bonbons et Paul a 4 bonbons. Paul veut avoir le même nombre de bonbons que Pierre. Combien doit-il en acheter ?

En effet : 1°) Leurs énoncés utilisent les mêmes mots. Dans les deux cas, la représentation initiale conduit à s'interroger sur la valeur d'un ajout. 2°) Dans le cas de S1, cette représentation (47 et combien, font 51 ?), active une procédure qui conduit de manière économique à la solution numérique. Souvent les jeunes enfants "comptent au-dessus de 47" : 47, 48 (1), 49 (2), 50 (3) et 51 (4). En revanche, ce n'est pas le cas avec S2 : il est beaucoup plus économique de compter à rebours que de "compter au-dessus de 4" pour déterminer : "4 et combien font 63 ?". Dans le problème S2, il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie du calcul.

On dispose de résultats empiriques qui montrent que chez des enfants de C.P. n'ayant reçu aucune instruction sur la soustraction, S2 provoque un échec quasi-total alors que S1 est assez bien réussi (Brissiaud 2002). En revanche, la situation se présente très différemment lorsque ces problèmes sont proposés à des élèves qui ont déjà appris à calculer une soustraction. En effet, le problème S1 ne nécessite d'aucune façon l'emploi de la soustraction : sa représentation initiale est celle d'un ajout et la simulation de cet ajout conduit d'emblée à la solution numérique. Le problème S2, en revanche, incite vraisemblablement à l'abandon de la procédure d'ajout correspondant à la représentation initiale, pour adopter celle qui correspond à un calcul économique (calcul d'une soustraction).

Brissiaud (1994) l'a vérifié en proposant ces deux problèmes à des élèves de CE1. Ceux-ci n'avaient pas encore appris la soustraction en colonnes mais on leur avait enseigné les deux grandes stratégies du calcul mental d'une soustraction. D'une part, ils avaient appris le calcul de $102 - 6$ (cas où on retire très peu) par retraits successifs : 102 moins 2, 100 ; et encore moins 4, ça fait 96. Et d'autre part, celui de $102 - 94$ (cas où on retire presque tout), par compléments successifs : 94 pour aller à 100, il faut 6 ; et encore 2 pour aller à 102, ça fait 8. Notons que cela revient à enseigner que la soustraction $a - b$, selon les valeurs de ces nombres, se calcule soit par retrait, soit par complément, c'est-à-dire à enseigner l'équivalence de ces deux procédures.

Conformément à l'hypothèse de départ, on observe 51% d'emploi de la soustraction avec le problème S2 contre 12% avec le problème S1.

Au début de ce texte, nous avons vu que les problèmes dans lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie du calcul, lorsqu'ils sont présentés avant tout enseignement, provoquent un échec massif. En revanche, lorsqu'ils sont proposés après un premier enseignement d'une des équivalences qui fondent les concepts arithmétiques, ils constituent des contextes privilégiés pour que les élèves abandonnent, au cours de leur résolution, la procédure correspondant à la représentation initiale, pour adopter celle qui correspond à un calcul économique, c'est-à-dire pour que les élèves *transfèrent* à de nouveaux contextes, l'usage des équivalences qui leur ont été enseignées. En termes vygotskiens, cela peut s'exprimer de la manière suivante (Brissiaud, 1994, 2002) : les problèmes qui présentent des cas de discordance entre leur représentation initiale et l'économie de leur résolution constituent des situations privilégiées pour repérer les élèves chez qui un premier enseignement a réussi à créer une zone de proche développement.

III. D'UNE EQUIVALENCE ENTRE PROCEDURES A L'INVENTION D'UN PROBLEME POUR LEQUEL IL Y A DISCORDANCE... : L'EXEMPLE DES FRACTIONS

Tous les concepts arithmétiques, avons-nous dit, peuvent s'analyser en termes d'équivalences entre procédures. Comme les phénomènes de discordance trouvent leur origine dans les difficultés d'appropriation de ces équivalences, on devrait pouvoir, pour chaque concept arithmétique, produire des phénomènes de concordance / discordance.

Pour étayer cette idée d'une généralité du cadre théorique proposé ici, la démarche suivante va être développée avec un nouveau concept arithmétique : celui de fraction. Il s'agira

- 1°) De mettre en évidence des équivalences entre procédures qui fondent le concept de fraction.
- 2°) De montrer comment, à partir de l'une de ces équivalences, on peut construire un problème pour lequel il y a discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique.
- 3°) De montrer que la résolution de ce problème favorise, chez le débutant, la conceptualisation des fractions.

IV. DES EQUIVALENCES ENTRE PROCEDURES QUI FONDENT LE CONCEPT DE FRACTION.

Il existe diverses façons d'accéder aux différents sens que peuvent prendre les fractions (pour une synthèse, voir : Carpenter, Fennema & Romberg, 1993). Comme ce type de nombres a été inventé pour résoudre des problèmes de mesure, la façon la plus simple de procéder à une telle analyse sémantique est vraisemblablement de " distribuer " des unités de mesures (des litres, des

grammes ...) aux différentes places possibles dans l'écriture d'une fraction (au-dessus de la barre, à droite du numérateur ; à droite de la barre de fraction ; etc.) et d'écrire les problèmes ainsi créés (selon les cas, l'écriture a/b doit se lire " a divisé par b " ou " a *bième*" ou encore " a pour b "). En utilisant la fraction $3/4$, c'est ce qui a été fait dans la figure 1. Celle-ci montre que l'on peut distinguer quatre sens ou manières principales de référer les fractions à des contextes (il est facile de vérifier que les autres façons de "distribuer" les unités ne produisent pas de sens) :

- deux sens où les fractions renvoient à une division : il s'agit d'une part de la division – partition d'une pluralité (3 unités sécables partagées équitablement en 4 parts) et d'autre part de ce qu'on appelle habituellement la division – quotient (en 3 combien de fois 4 ?) ;
- un sens où les fractions renvoient à un fractionnement d'une unité (prendre les 3 quarts d'une unité sécable) ;
- un sens où elles renvoient à une proportion (3 pour 4).

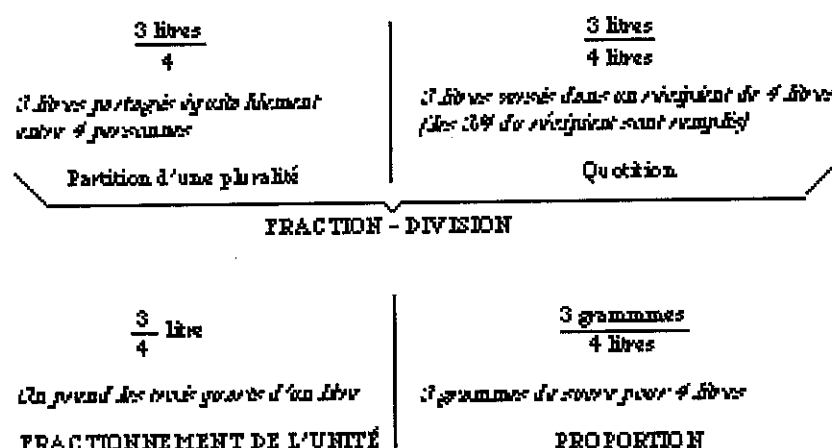


Figure 1: Les différents sens de la fraction $3/4$

Parmi toutes les équivalences entre procédures qu'il serait possible d'envisager, intéressons-nous à l'équivalence entre la *partition d'une pluralité* et le *fractionnement d'une unité* (colonne de gauche dans la figure 1) : il est équivalent de partager a unités en b parts égales (partition d'une pluralité) et de partager une seule unité en b parts égales (ce qui produit 1 *bième*), à condition de prendre ensuite a exemplaires du *bième* obtenu, c'est-à-dire a fois 1 *bième* (fractionnement d'une unité).

Cette équivalence est loin d'aller de soi : dans le premier cas, pour mettre en œuvre une stratégie de simulation, il faut commencer par imaginer a unités différentes avant de les partager en b parts égales alors que dans le second, il faut imaginer d'abord *une seule unité* pour la fractionner ! D'emblée les actions correspondantes ne portent pas sur les mêmes objets et les deux situations n'ont *a priori* que peu de traits communs⁴⁸. Il devrait donc être possible, à partir de cette équivalence entre partition d'une pluralité et fractionnement d'une unité, de construire des énoncés de problèmes pour lesquels il y a discordance entre leur représentation initiale et l'économie de leur résolution numérique.

V. D'UNE EQUIVALENCE ENTRE PROCEDURES, VERS L'ECRITURE D'UN PROBLEME POUR LEQUEL IL Y A DISCORDANCE...

Intéressons-nous maintenant à l'effet de valeurs numériques précises sur l'interprétation des fractions. Il semble plus difficile de concevoir $3/4$ sous la forme "3 divisé par 4" que de concevoir $21/4$ comme "21 divisé par 4". Il semble donc plus difficile d'évoquer le partage d'une pluralité lorsque le numérateur est plus petit que le dénominateur (c'est-à-dire lorsque la valeur d'une part est plus petite que 1) que dans le cas contraire (lorsqu'elle est plus grande que 1). L'origine de cette différence est vraisemblablement la suivante : dans le *curriculum* scolaire, l'enseignement de la division avec reste (cas d'unités non sécables) précède de beaucoup l'enseignement des fractions. Or, dans le cas d'une division avec reste, la valeur d'une part est pratiquement toujours supérieure à 1. Il est rare, par exemple, de proposer un problème de partage de billes où il est impossible d'en donner au moins une à chacun ! C'est ce qui explique que le partage d'une pluralité soit plus facilement évoqué avec les valeurs numériques 21 et 4 qu'avec 3 et 4 (Ce type de phénomène qui relève de la création d'un "obstacle didactique" a été bien étudié en didactique des mathématiques ; en psychologie, Fischbein, 1994, en donne de nombreux exemples).

A la suite de cette analyse, considérons les deux problèmes suivants :

F1 : *J'ai 21 pizzas et je les partage entre 4 personnes.*

Quelle est la part d'une personne ?

F2 : *J'ai 3 pizzas et je les partage entre 4 personnes*

Quelle est la part d'une personne ?

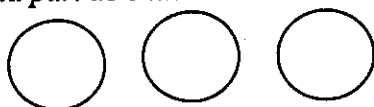
⁴⁸ Remarquons cependant que dans le cas particulier des fractions unitaires : $1/2$, $1/3$... $1/n$, l'équivalence entre partition d'une pluralité et fractionnement de l'unité va de soi : il est clair que "1 divisé en n ", c'est aussi "1 $n^{\text{ième}}$ ".

L'énoncé de F1 décrit la partition d'une pluralité et c'est donc cette procédure qui sera activée par la représentation initiale de ce problème. De plus ses données numériques sont 21 et 4. Ces nombres, eux aussi, favorisent la partition d'une pluralité : pour partager 21 unités en 4, il faut en donner 5 à chacun (division entière) et il faut encore partager l'unité restante. Comme ce reste est 1, il est facile à fractionner. Dans ce problème, il y a donc vraisemblablement concordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique.

L'énoncé F2 décrit lui aussi une partition d'une pluralité. Mais les données numériques y sont 3 et 4 qui, contrairement à 21 et 4, ne favorisent pas la partition d'une pluralité. On pourrait penser alors qu'il y a dans ce problème F2, discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution numérique et qu'il conduit, par conséquent, à un échec massif lorsqu'on le propose avant tout enseignement des fractions. Or ce n'est pas le cas. Le problème suivant de type F2 a été proposé à des élèves de CM1 avant que les enseignants n'aient abordé les fractions en classe (Brissiaud 1998 ; 2000) :

F2 : *On veut partager équitablement 3 pizzas entre 4 enfants : Alain, Bernard, Christian et Denis qu'on notera par leurs initiales : A, B, C et D.*

Quelle sera la part de chacun ?



(Tu peux dessiner les parts en utilisant les lettres A, B, C et D)

On observe 65 % de réussite et les enfants, très majoritairement, résolvent ce problème ainsi (Kieren et al, 1985, obtiennent des résultats similaires) :



Le taux de réussite observé n'est guère compatible avec l'existence dans ce problème, d'une discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution (avant tout enseignement, ce type de problème devrait conduire à un échec massif). Outre ce taux de réussite élevé, la procédure utilisée par les élèves laisse, elle aussi, penser que ce problème ne correspond pas un cas de discordance. En effet, contrairement aux apparences, il se peut que l'enfant qui

partage ainsi chaque pizza, n'utilise pas l'équivalence : 3 partagé en 4, c'est 3 quarts de 1. En effet, sa procédure est la même que s'il partageait équitablement une pizza, une quiche et une tarte. Rien n'assure que les parties prélevées sur chacune des trois pizzas soient considérées comme équivalentes et formant alors ensemble les 3 quarts d'une seule pizza. L'enfant exprime la solution à partir de la partition d'une pluralité d'unités qui ne sont pas nécessairement considérées comme équivalentes et non à partir d'un fractionnement de l'unité.

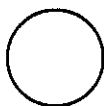
Pour être certain qu'un sujet a effectivement utilisé ou découvert *hic et nunc* l'équivalence cruciale, il convient de transformer cet énoncé de la manière suivante (Brissiaud 1998 ; 2000) :

F'2 : 3 pizzas sont dans le four. Elles vont être partagées équitablement entre 4 frères.

L'un des enfants a un entraînement de foot et il doit manger avant les autres.

Sa mère lui dit : " Sors une pizza, prend ta part et remets le reste dans le four ".

Quelle part doit-il découper ?



(Dessine cette part sur la pizza sortie mais ne dessine pas les autres pizzas.)

Dans ce cas, avant tout enseignement des fractions, le taux de réussite n'est que 5 % ! (Brissiaud, 2000). En obligeant les sujets à exprimer la solution sur une seule pizza, ce nouvel énoncé crée réellement une discordance entre la représentation initiale du problème (qui parle de la partition de 3 pizzas) et l'économie de sa résolution (il faut exprimer la solution à partir du fractionnement d'une seule pizza).

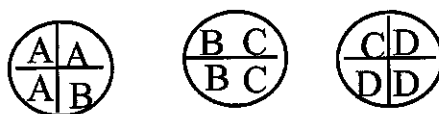
Un concept arithmétique étant donné, il est donc possible de trouver des problèmes pour lesquels il y a discordance entre leur représentation initiale et l'économie de leur résolution, comme nous venons le faire pour les fractions. La démarche qu'il convient d'adopter est la suivante : 1°) Procéder à une analyse *a priori* des différentes significations du concept et sélectionner une équivalence entre deux procédures qui le fonde 2°) Une signification étant choisie, qui active l'emploi de l'une des deux procédures en jeu dans l'équivalence précédente, choisir les données numériques pour que ce soit l'autre procédure qui permette d'accéder à la solution de manière économique. Comme dans l'exemple précédent, il convient éventuellement de procéder à quelques adaptations de l'énoncé pour que la résolution de ce problème mette réellement en jeu l'équivalence entre procédures qui fonde le concept.

F'2 est donc un authentique problème pour lequel il y a discordance entre sa représentation initiale et l'économie de sa résolution. Nous allons voir qu'il présente le même intérêt didactique

que ses homologues M2 et S2 et, en étudiant sa résolution par des débutants, nous expliciterons une première forme d'abstraction qui accompagne le processus de conceptualisation des opérations arithmétiques.

VI. UNE PREMIERE FORME D'ABSTRACTION QUI ACCOMPAGNE LE PROCESSUS DE CONCEPTUALISATION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES

Lorsque le problème F'2, où les élèves ne peuvent opérer que sur une seule pizza, est présenté d'emblée à des novices, nous venons de voir que l'échec est massif. En revanche, lorsqu'on leur présente d'abord le problème F2 où les 3 pizzas sont dessinées et où les élèves peuvent opérer dessus, et ensuite F'2, la solution de ce dernier problème est facilement comprise au sein d'une classe (Brissiaud 1998). Cela s'explique aisément. Dans les deux problèmes, le but de la tâche est le même : trouver la valeur d'une part lorsqu'on partage 3 unités sécables en 4 parts égales. Il apparaît donc immédiatement aux élèves que la procédure utilisée pour résoudre le premier problème serait pertinente pour résoudre le second. Or le fait d'avoir résolu le premier problème donne accès à un codage spatial de la collection de tous les quarts de pizzas résultant du partage de chacune d'elles. La comparaison des problèmes F2 et F'2 donne ainsi aux élèves l'idée de la solution : “ pour prélever 3 quarts, je peux prendre un quart dans chaque pizza, mais je peux aussi les prendre tous dans une seule, celle qui est sortie dans le second problème ”. Les élèves ont souvent besoin de s'assurer qu'un partage où l'on commence par prélever 3 quarts sur la pizza sortie, peut se poursuivre de sorte que chacun des 4 enfants ait une même part. Ils le poursuivent le plus souvent de la manière suivante :



Ils sont ainsi amenés à énumérer différemment la collection des “ quarts de pizzas ”. Comme dans le cas de la multiplication, *c'est ainsi une équivalence entre schèmes de parcours des unités d'une collection qui fonctionne comme preuve et confère un statut d'évidence à la solution.*

De plus, remarquons que cette équivalence entre schèmes de parcours conduit l'enfant à considérer de manière plus abstraite les quarts de la pizza qui est sortie du four dans le second problème : ils ne sont plus seulement des quarts de cette seule pizza, mais des représentants d'une unité numérique abstraite, susceptible d'être prélevée sur n'importe quelle pizza : le “ quart de pizza ”. Et ce qui vient d'être dit des quarts de pizza pourrait tout aussi bien l'être concernant les pizzas elles-mêmes : la pizza sortie du four dans le second problème devient elle-même une pizza

abstraite représentante de la classe qu'elle forme avec les deux autres pizzas dans la mesure où, considérée comme substituable partie par partie à chacune des deux autres pizzas, elle l'est nécessairement dans son entier⁴⁹. On voit bien sur cet exemple que le processus de conceptualisation arithmétique s'accompagne d'un processus d'abstraction d'unités numériques.

La même analyse peut être conduite concernant le problème M'2 (*Sur la façade d'une tour, il y a 3 fenêtres à chaque étage. La tour a 50 étages..*). Cet énoncé invite à énumérer les unités en prenant d'abord en compte toutes les unités d'un groupe de 3 avant de s'intéresser à celles d'un autre groupe de 3, etc. Le nouveau processus énumératif qui conduit à la solution, nécessite un cheminement différent dans la prise en compte des unités (les 50 fenêtres de gauche, etc.). L'adopter, c'est exprimer que deux unités qui n'apparaissaient pas contiguës dans la manière de compter qui est décrite dans l'énoncé sont équivalentes. Or, concernant le nombre, des unités abstraites sont des unités substituables dans le processus énumératif de la totalité. L'enfant qui réorganise son énumération des fenêtres, procède en acte à une telle substitution d'unités, il atteint le niveau d'abstraction des unités qui est nécessaire pour résoudre ce problème.

De manière générale, il est possible de montrer que lorsqu'un problème présente un cas de discordance entre sa représentation initiale et l'économie de la résolution numérique, la représentation de l'énoncé qui conduit à la réussite s'accompagne toujours d'un processus d'abstraction : c'est parce que les unités sont considérées à un niveau plus général que l'activité du sujet est moins contrainte et qu'il est susceptible de réorganiser son schème d'énumération (Brissiaud, 2002).

VII. UNE SECONDE FORME D'ABSTRACTION QUI ACCOMPAGNE LE PROCESSUS DE CONCEPTUALISATION DES OPERATIONS ARITHMETIQUES

Pour qu'un élève s'approprie un concept arithmétique comme la multiplication, il ne suffit évidemment pas qu'il sache résoudre le problème : "*Sur la façade d'une tour, il y a 3 fenêtres à chaque étage. La tour a 50 étages..*". Cette résolution exige seulement qu'il s'aide d'un codage spatial de la collection de fenêtres pour abstraire les unités nécessaires à la réorganisation de leur

⁴⁹ Souvent les enseignants ont du mal à comprendre que dans une situation donnée, une pizza puisse être considérée de manière "plus abstraite" que dans une autre situation. Pour eux, ce qui est matériel, ne saurait être "abstrait" parce que seul ce qui ressort du monde des idées pourrait être qualifié ainsi. Les psychologues, comme les philosophes d'ailleurs, n'utilisent pas le mot "abstrait" comme ces enseignants en tant que synonyme d'"idéal", c'est-à-dire dans une opposition binaire à ce qui peut être qualifié de "matériel". Les psychologues font un usage *relatif* du mot "abstrait". Pour eux, une même entité (matérielle ou non) est considérée de manière plus ou moins abstraite selon les propriétés qui en sont retenues : plus celles-ci sont nombreuses, moins l'entité est considérée de manière abstraite.

énumération. Mais, pour accéder à l'opération arithmétique, il est nécessaire que l'élève "réfléchisse" cette réorganisation sans quoi, il y a peu de chance que la réussite au problème précédent assure la réussite à un problème du type : " *Quel est le prix de 50 objets à 3 F l'un ?* ".

Il est important que les élèves comprennent que le calcul de a fois b unités discrètes est équivalent à celui de b fois a unités, quelque soient par ailleurs les autres éléments de contexte. Pour favoriser cette seconde forme d'abstraction, les pédagogues associent souvent l'écriture $a \times b$ au dénombrement des cases d'un quadrillage de a lignes et b colonnes parce que les deux modes de calcul dont il s'agit de favoriser l'équivalence, dans ce cas, correspondent à des schèmes d'énumération dont les enfants savent qu'ils conduisent au même résultat : ceux du dénombrement ligne par ligne et colonne par colonne, des cases d'un même quadrillage. D'une façon générale, le symbolisme arithmétique joue un essentiel dans cette seconde forme d'abstraction quelque soit le type d'opération arithmétique (" $\times$ ", "-", ":", etc.).

Il faut en effet souligner que la première abstraction (celle d'unités numériques substituables) et la seconde (celle qui correspond à la prise de conscience de l'équivalence entre schèmes d'énumération) sont de nature différente. Alors que la première est guidée par un codage spatial des unités des collections impliquées dans le problème, la seconde conduit à un affranchissement de ces éléments contextuels parce qu'elle trouve son origine dans la coordination des actions énumératives de l'enfant. Cette coordination, lorsqu'elle est effective, fonctionne même en l'absence du modèle du quadrillage qui n'est qu'un codage temporaire favorisant le "réfléchissement" des actions énumératives. En termes piagétien, la première abstraction est plutôt de type empirique alors que la seconde est une abstraction "réfléchissante".

La même analyse peut évidemment être conduite concernant les fractions : il ne suffit pas qu'un enfant sache partager 3 pizzas en 4 parts égales en prenant les 3 quarts de l'une d'elles, pour être sûr qu'il a conceptualisé les fractions. Il faut de plus que l'enfant prenne conscience que, de façon générale, la procédure activée par la représentation initiale du problème qu'il vient de résoudre et celle qui lui a permis d'accéder à sa solution, sont équivalentes. Dans tous les cas, l'opération arithmétique constitue la solution de ces problèmes à un niveau plus abstrait que celui correspondant aux premières résolutions que nous avons décrites. Dans tous les cas, l'accès à l'opération arithmétique dépend d'une abstraction "réfléchissante".

VII. CONCLUSION

L'analyse des phénomènes de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique permet d'avancer des réponses à

quelques unes des principales questions qui, de façon générale, se posent à quiconque étudie l'apprentissage dans un domaine de connaissances enseignées à l'école.

Une première question est d'ordre épistémologique : comment caractériser l'apprentissage réussi ? Existe-t-il une classe de situations qui seraient critiques du point de vue de la connaissance, au sens où le comportement du sujet après l'apprentissage, s'y différencie clairement de celui qu'on observe avant. Chez des sujets non-scolarisés, les problèmes pour lesquels il y a discordance entre la représentation initiale et l'économie de la résolution, créent un échec massif, ce qui, de notre point de vue, assoit l'idée que ces problèmes mettent en jeu des aspects cruciaux de la connaissance : les équivalences entre procédures qui fondent les concepts arithmétiques.

Une seconde question concerne la nature d'un enseignement qui favorise l'appropriation par les élèves de ces aspects cruciaux de la connaissance. Il s'agit notamment de penser l'articulation entre ce que l'élève sait faire avant tout enseignement (résoudre les problèmes M1, S1, F1) et ce qu'il doit apprendre (résoudre les problèmes M2, S2, F'2). La résolution de ce second type de problèmes au sein de la classe peut être le point de départ d'un processus d'appropriation par les élèves du concept arithmétique concerné. Ces derniers problèmes sont en effet bien compris (Cf. le taux de réussite élevé à la résolution de M1, S1 et F1 dont les énoncés utilisent les mêmes mots que M2, S2 et F2) mais dans le même temps, ils nécessitent que les élèves "s'adaptent" (sinon, ils conduisent à un échec massif). La clef du processus d'adaptation est le suivant : 1°) le passage "en acte" de la procédure activée par la représentation initiale du problème à celle qui permet la solution numérique et 2°) la prise de conscience, l'explicitation et la généralisation de l'équivalence entre ces procédures.

Au départ, c'est le plus souvent en favorisant un codage spatial des données de l'énoncé que le pédagogue permet aux élèves de réorganiser leur schème d'énumération des unités en jeu dans le problème. C'est l'équivalence entre des schèmes de parcours d'une collection d'unités qui sert de preuve et donne à la solution son caractère d'évidence. Et cette réorganisation correspond toujours à un processus d'abstraction d'unités numériques. Cela a été montré ici concernant la multiplication et les fractions, on trouve une démonstration analogue concernant la soustraction dans Brissiaud (2002) et concernant la division euclidienne dans Brissiaud (1996).

Puis se pose le problème du transfert d'apprentissage et de la généralisation : c'est un processus d'abstraction "réfléchissante" qui est alors visé. Concernant la soustraction, on a suggéré ici que les problèmes correspondant à un cas de discordance entre la représentation initiale et l'économie de la résolution numérique sont également susceptibles d'avoir un intérêt didactique majeur lors de cette étape du progrès car ils permettent aux enseignants de repérer les élèves qui

ont commencé à s'approprier à titre personnel les équivalences cruciales (voir aussi Brissiaud, 1994).

A ce moment du progrès, le symbolisme arithmétique (les signes "-", "x", ":", etc.) est susceptible d'être un appui majeur pour ce processus d'abstraction : c'est évidemment le cas s'il émerge en classe comme symbole de l'équivalence. Il importe cependant de remarquer qu'un usage précoce du symbolisme arithmétique est tout autant susceptible de freiner le progrès que de l'accélérer. Supposons en effet qu'on enseigne la résolution des problèmes du type M2 comme suit : on entraîne les élèves à reformuler "*Quel est le prix de 50 objets à 3F l'un ?*" sous la forme : "Il faut chercher 50 fois 3", on les entraîne à traduire cette phrase par l'écriture : " 50×3 " et on leur dit, sans le justifier, qu'ils "ont le droit" d'effectuer ce calcul dans le sens qu'ils veulent. A terme, les élèves sauront résoudre ce type de problèmes. En général, ils le sauront même assez vite. Mais ces "réussites" ne résultent pas, alors, de la conceptualisation de la commutativité (i.e. de l'appropriation d'une équivalence entre schèmes), elles sont la conséquence de l'enseignement d'une "souplesse d'usage" du signe "x". Avant de présenter le signe "x" aux élèves, une démarche didactique comme celle qui est décrite dans ce texte, apparaît très souhaitable : l'enseignement des mathématiques ne vise pas seulement l'appropriation de moyens permettant d'obtenir les solutions numériques de quelques "problèmes-types", il vise le progrès dans la résolution de problèmes en général et, pour y parvenir, il doit être une éducation au raisonnement.

Au total, il semble bien que le concept de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution peut jouer un rôle crucial pour penser la première phase du progrès des élèves dans la conceptualisation arithmétique. Une théorisation du rôle du symbolisme arithmétique est vraisemblablement tout aussi cruciale pour penser la suite de l'histoire. Une question devrait être au cœur des débats futurs : est-il préférable, comme nous l'avons suggéré (Brissiaud, 1996), d'introduire le symbolisme arithmétique dans un sens non-typique, c'est-à-dire lorsqu'il n'est pas une simple abréviation sténographique du langage ordinaire ? Par exemple : vaut-il mieux introduire le signe ":" de la division euclidienne dans une situation de "division-quotition" (en a combien de fois b ?) plutôt que dans une situation de "division - partage" (où l'on cherche la valeur d'une part) ? Ou encore : vaut-il mieux introduire la barre de fraction dans une situation de "division-partition" (a partagé en b parts égales) plutôt que dans une situation de fractionnement (prendre a fois $1 b^{\text{ième}}$ de l'unité) ?

La première rencontre avec le symbolisme arithmétique est un phénomène didactique qui a été peu étudié jusqu'ici et c'est dommage parce qu'il apparaît clairement que la signification privilégiée lors de cette première rencontre, bénéficie d'une sorte de "prime à l'apprentissage". Ne conviendrait-il pas d'accorder cette "prime à l'apprentissage" aux significations les moins

typiques ? Par ailleurs, lorsqu'on joue trop sur cette variable (lorsqu'on introduit le symbolisme arithmétique avec une signification non-typique mais de manière très précoce), est-on certain de favoriser au mieux la conceptualisation ? De nombreuses recherches sont encore nécessaires avant de pouvoir répondre à ces questions.

BIBLIOGRAPHIE

- Brissiaud, R. (1994). Teaching and Development : Solving "Missing Addend" Problems Using Substraction. In Schneuwly & Brossard (Eds) : Learning and development: contributions from Vygotsky. *European Journal of Psychology of Education*, 9 (4), 343-365.
- Brissiaud, R. (1996) *J'apprends les mathématiques, CE2., Livre du maître*. Enseigner le calcul mental d'une division et d'une soustraction. Paris : Retz, .
- Brissiaud, R. (1998). Les fractions et les décimaux au CM1. Une nouvelle approche. *XXV Colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres* . COPIRELEM – Loctudy, mai 1998 (pp 147-171).
- Brissiaud, R. (2000) Apprendre l'arithmétique élémentaire : les cas de concordance / discordance entre la représentation initiale d'un problème et l'économie de sa résolution numérique. *Actes des Journées Internationales d'Orsay de Sciences Cognitives (JIOSC 2000)*, décembre 2000 (pp. 105-110).
- Brissiaud, R. (2002). Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds) : *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, 265-291. Paris : Hermes
- Carpenter T. P., Ansell E., Franke M. L., Fennema E. & Weisbeck L. (1993). Models of problem solving : a study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 428-441.
- Carpenter, T. P., Fennema & Romberg, T. A.(1993) *Rational Numbers. An Integration of Research*, Hillsdale, N.J. : Lawrence Erlbaum.
- Duval, R. (1991) Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 4, 163-196.
- Fischbein, E. (1994). Tacit models. In D. Tirosh (Ed.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach* (pp. 97-109). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Kieren, T., Nelson, D. & Smith, G. (1985) Graphical algorithms in partitioning tasks. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 25-36.

Richard J.F. (1990). *Les activités mentales*. Paris : Armand Colin.

Schliemann A. D., Araujo C., Cassundé M.A., Macedo S. & Nicéas L. (1998). Use of multiplicative commutativity by school children and street sellers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 422-435.

Vergnaud G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New-York : Academic Press.

*Etude des mathématiques, dispositifs d'étude et
travail personnel de l'élève*

MEDIATIONS ENTRE LA CLASSE ET LE TRAVAIL A LA MAISON :

LE ROLE DES ASSORTIMENTS

Florence Genestoux

IUFM d'Aquitaine & DEST, Université Bordeaux 2

I. INTRODUCTION

Mon exposé se compose de trois parties. Dans un premier temps, je brosserai à grands traits le contenu de la thèse que j'ai soutenue à Bordeaux l'année dernière. Je me limiterai aujourd'hui à montrer l'articulation du questionnement et les méthodes utilisées en pointant au fur et à mesure les titres des différents chapitres.

En deuxième partie, j'extraierai de cette recherche les éléments qui concernent plus particulièrement l'organisation de l'étude personnelle des élèves. Je présenterai un modèle pour les interactions qui accompagnent la réalisation des devoirs du soir. Puis j'énoncerai les principaux résultats expérimentaux qui justifient l'importance, dans les rapports école / familles, de ces objets didactiques peut-être modestes que sont les exercices qui transitent entre la classe et la maison. L'intérêt que je leur ai accordé m'a conduite à une formalisation en terme d'assortiment didactique.

Cet exposé se clôturera par une rapide présentation de cette nouvelle notion, qui s'inscrit dans le cadre théorique de la Théorie des Situations. Je l'actualiserai sur l'enseignement des identités remarquables au collège. Ce n'est pas le thème mathématique retenu à l'origine dans la thèse. Cette troisième partie constitue donc un prolongement, c'est une première généralisation préparée à l'occasion de l'école d'été de didactique des mathématiques (Corps 2001).

II. LE FONCTIONNEMENT DIDACTIQUE DU MILIEU FAMILIAL DANS LA REGULATION DES APPRENTISSAGES SCOLAIRES EN MATHEMATIQUES

1. Une décantation vers une problématique didactique

Les mathématiques se transmettent pour l'essentiel sous la responsabilité des enseignants. Toutefois, des devoirs du soir fournissent aussi matière à des apprentissages privés au domicile des élèves. Le partage entre temps scolaire et extrascolaire perdure dans la scolarité obligatoire, en dépit des directives officielles de 1956 pour l'enseignement primaire, et malgré les soupçons et les critiques des dernières décennies. En effet, certains voient là l'occasion d'introduire ou de renforcer certaines disparités socioculturelles entre les élèves ou encore le risque de perturber les relations entre les protagonistes concernés.

Désaccords et coopérations rythment les échanges entre les enseignants et les familles. Les parents sont qualifiés tantôt d'usagers, tantôt de partenaires, tantôt de consommateurs, tantôt d'assistants en cas de difficulté. Et les institutions satellites se développent autour de la classe et de l'école. Dans le domaine de l'aide scolaire, de nombreuses idées, théories, idéologies, résultats, opinions s'entremêlent, qui influencent considérablement les pratiques et qui pèsent lourd sur les frontières des institutions.

Dans ma thèse, j'ai tenté de comprendre comment, dans le cas spécifique des mathématiques, mieux répartir entre l'école et les familles les tâches et les responsabilités nécessaires à la transmission des savoirs utiles à la vie de la cité, et plus largement comment articuler les rôles des différents dispositifs que notre société met en place pour réaliser ce projet.

Pour tenir à distance les fausses évidences qui s'imposent spontanément ou que les communautés laissent apparaître comme des nécessités, j'ai choisi de traiter de cette question à la lumière des modèles de la Didactique des Mathématiques. J'ai en effet considéré, conformément à ce que la didactique fondamentale délimite comme territoire d'investigation, que dès lors qu'il était possible d'identifier des connaissances mathématiques et une intention de les modifier, il était légitime de l'interpréter comme un fait didactique.

Toutefois ce parti pris méthodologique appelait à combler une absence de données préalables tant sur le plan théorique que sur celui de la contingence. En effet, les résultats empiriques disponibles à propos des apprentissages hors temps scolaire, étaient issus de recherches qui le plus souvent tenaient très peu compte des variables didactiques (en particulier dans le champ de l'éducation familiale). Même si le contenu mathématique des

interactions était évoqué au moment des observations et des constats, il disparaissait des analyses et des systèmes d'argumentation. D'autre part, les didacticiens identifiaient un rôle des parents dans les négociations sociales de l'enseignement et étudiaient les effets de l'épistémologie familiale et culturelle dans les classes. Mais le fonctionnement des institutions de régulations et d'appui extérieurs à la classe restait jusque là peu exploré.

2. La fonction de l'accompagnateur d'étude

Pour désigner les partenaires de la relation didactique, la Théorie Anthropologique fait appel à une syntaxe qui tient à distance les dénotations habituelles les plus prégnantes. En appelant X les sujets d'une institution qui étudient, avec l'aide ou sous la direction de sujets Y, elle embrasse sous le même terme « étude » un très vaste ensemble de formes didactiques. C'est un choix qui présente l'intérêt d'instaurer une culture commune de référence pour des interactions très diversement reconnues dans l'histoire des sociétés et de marquer que certaines contraintes didactiques transcendent celles que les dispositifs éducatifs réifient.

Pour ma part, je m'intéresse au rôle de l'accompagnateur des apprentissages scolaires, celui qui ne remplit pas la fonction principale d'enseignement et que je nommerai désormais dans cet exposé « l'accompagnateur d'étude », en réservant dans mon propos le mot « étude » à l'étude personnelle des élèves qui se déroule hors temps scolaire ou du moins en dehors des cours principaux.

Les travaux qui réfèrent à la Théorie des Situations faisaient apparaître jusqu'à présent seulement deux positions : celles du professeur et de l'élève. Ces termes désignent bien entendu des fonctions didactiques et non des rôles sociaux, encore moins des personnes. Mais pouvais-je considérer que les interactions d'accompagnement et d'enseignement étaient de même nature ? Et sinon, était-il possible de les distinguer d'un point de vue théorique et empirique ?

Considérer que l'accompagnateur d'étude est une position didactique nouvelle, exige des modèles à trois places, tenant compte des articulations entre 3 fonctions distinctes et mettant en évidence les assujettissements, les répertoires et les champs d'actions de chacune d'elles.

Le premier chapitre de la thèse présente une structuration des milieux de l'accompagnement. Le principe organisateur de cette modélisation s'inspire des modèles en oignon de Brousseau (1986) et de Margolinas (1993). Elle permet de réinterroger la notion de

milieu didactique, en tenant compte d'autres contraintes que celles qui sont habituellement retenues.

3. Les choix méthodologiques retenus

Etudier l'action des familles sur les apprentissages scolaires en mathématiques met en jeu des interactions entre de vastes systèmes. Il m'apparaissait donc indispensable :

- de pouvoir extraire de cette complexité anthropologique certains fonctionnements didactiques de base ;
- de pouvoir le moment venu replacer ces fonctionnements basiques dans les organisations sociales qui les abritent effectivement ;
- d'analyser les effets de composition avec les autres éléments de ces organisations que nous connaissons déjà par ailleurs ;
- et pour gagner en rigueur, d'être en mesure d'expliquer ces effets de composition indépendamment de ce que chaque acteur pouvait localement percevoir des événements et de ce qu'il en disait en étant placé dans certaines conditions particulières.

Vu les ambitions affichées de toutes parts, il était fort probable qu'un écart important existait entre ce qui était annoncé et ce qui était réalisé. C'est pourquoi, j'ai jugé peu productif de sonder d'emblée les différents partenaires par de larges enquêtes, avant d'avoir pu discerner ou pressenti les principaux phénomènes de l'accompagnement.

J'ai au contraire privilégié l'observation directe des interventions parentales et préféré recourir à des méthodes de recherche cliniques, pour éliminer en préalable les conjectures les plus douteuses. Une lecture holistique des événements permet en effet de différer le tri des variables qu'il est raisonnable de retenir comme significatives.

L'analyse clinique permet également une observation fine des comportements et des effets des interactions du chercheur avec ses dispositifs expérimentaux. En terrain connu, chacun se fait une idée minimale au sujet de son interlocuteur et la confiance qui s'instaure entre ceux qui sont observés ou interviewés et le chercheur ou l'enquêteur peut réduire certaines interférences. Dans le cas des parents qui interviennent en mathématiques, je ne pouvais guère m'appuyer sur des habitudes sociales, ni me référer à des résultats précis.

Les méthodes cliniques n'ont pas pour ambition de produire des lois de portée générales, toutefois de telles études de cas permettent d'extraire un certain nombre de faits indépendants des particularités des personnes, parce que les modèles utilisés en didactique réfèrent à des sujets épistémiques et à des savoirs mathématiques objectivables.

4. Les dispositifs expérimentaux

Pour permettre cette observation directe et pour contrôler certaines variables didactiques, j'ai mis en place un dispositif pré expérimental qui fonctionne comme un centre de formation pour des parents qui serait collectif et spécifique de l'accompagnement des apprentissages scolaires en mathématiques. Ce type d'institution n'existe pas dans notre environnement social, j'ai donc artificiellement et ponctuellement réalisé les conditions d'un tel fonctionnement didactique.

C'est à l'occasion de mon DEA en 1995 que j'ai procédé au recueil de ce premier corpus empirique, en réunissant à propos de la résolution d'un problème d'algèbre, 11 binômes constitués chacun d'un collégien accompagné d'un de ses parents. Le second chapitre de la thèse présente l'analyse de ce corpus à l'aide du modèle de structuration emboîtée dont j'ai parlé plus haut.

Puis, j'ai souhaité élargir mon système, pour étudier d'une part les conditions des partages entre les trois principaux protagonistes didactiques et d'autre part les négociations de ces coopérations. C'est l'objet des troisième et quatrième chapitres. J'y étudie entre autres le fonctionnement des régulations didactiques et comment le rôle d'une institution principale articule ceux des institutions auxiliaires. Je distingue quatre types de contrats d'accompagnement ou d'appui, selon la nature des responsabilités didactiques que l'accompagnateur prend à sa charge : contrat de vérification ; de répétition ; de remédiation et un contrat que j'ai pour l'instant nommé faute de trouver mieux orthodidactique bien que le terme me déplaie.

Ces contrats coïncident seulement en partie avec la réalité des institutions sociales, ce sont des modèles didactiques. Un parent ou un professionnel peuvent se positionner selon tel ou tel contrat sans toujours disposer pour autant des connaissances et des moyens qui leur seraient nécessaires pour l'assumer. Ils peuvent aussi se voir malgré eux chargés d'un rôle qui ne correspond pas à leurs possibilités.

Un second dispositif expérimental m'a permis d'établir une monographie familiale sur trois années scolaires. J'ai suivi de près une famille comprenant deux enfants scolarisés à l'école primaire. J'ai constitué conjointement à cette occasion trois autres corpus empiriques. Chacun vise des préoccupations différentes.

Le premier permet d'étudier les régulations didactiques au sein d'une famille. J'ai pu disposer de données concernant à la fois les régulations ordinaires et celles qui répondent aux périodes critiques du point de vue des apprentissages.

Le second s'intéresse au partage didactique entre une famille et une école élémentaire. J'ai recueilli des faits précis avec leur contexte didactique.

Le troisième corpus concerne les régulations didactiques professionnelles qui répondent ou non à des difficultés avérées et qui s'exercent à l'intérieur et à l'extérieur de l'école. Il permet d'étudier l'articulation de ces régulations avec l'avancement des enseignements.

Ce dispositif expérimental incluait une institution d'appui, elle aussi assez singulière puisqu'elle se voulait spécifique des dysfonctionnements des apprentissages en mathématiques. La société actuelle ne favorise guère de spécialisation professionnelle correspondante au 4^{ème} contrat d'accompagnement. Dans cette institution d'appui, un intervenant didacticien :

- interagissait en relation duelle avec l'élève en difficulté ;
- établissait un diagnostic à l'aide des savoirs de la Didactique ;
- élaborait des situations adaptées en recourant à l'ingénierie didactique ;
- agissait sur l'entourage proche de l'élève, en fournissant des médiateurs pour apprendre en famille.

Je tenais le rôle de cet intervenant. J'explicité dans la thèse les différentes positions que j'ai été amenée à prendre au cours de cette recherche.

Les chapitres 5 et 6 rapportent les analyses et les résultats concernant ces régulations familiales en mathématiques et les négociations pour un appui en cas de difficultés scolaires. J'examine particulièrement les conditions de l'attribution d'échec par les différentes institutions concernées.

III. PROBLEMATIQUE DE L'ACCOMPAGNEMENT DES APPRENTISSAGES SCOLAIRES EN MATHEMATIQUES

1. Les différentes fonctions de l'accompagnement

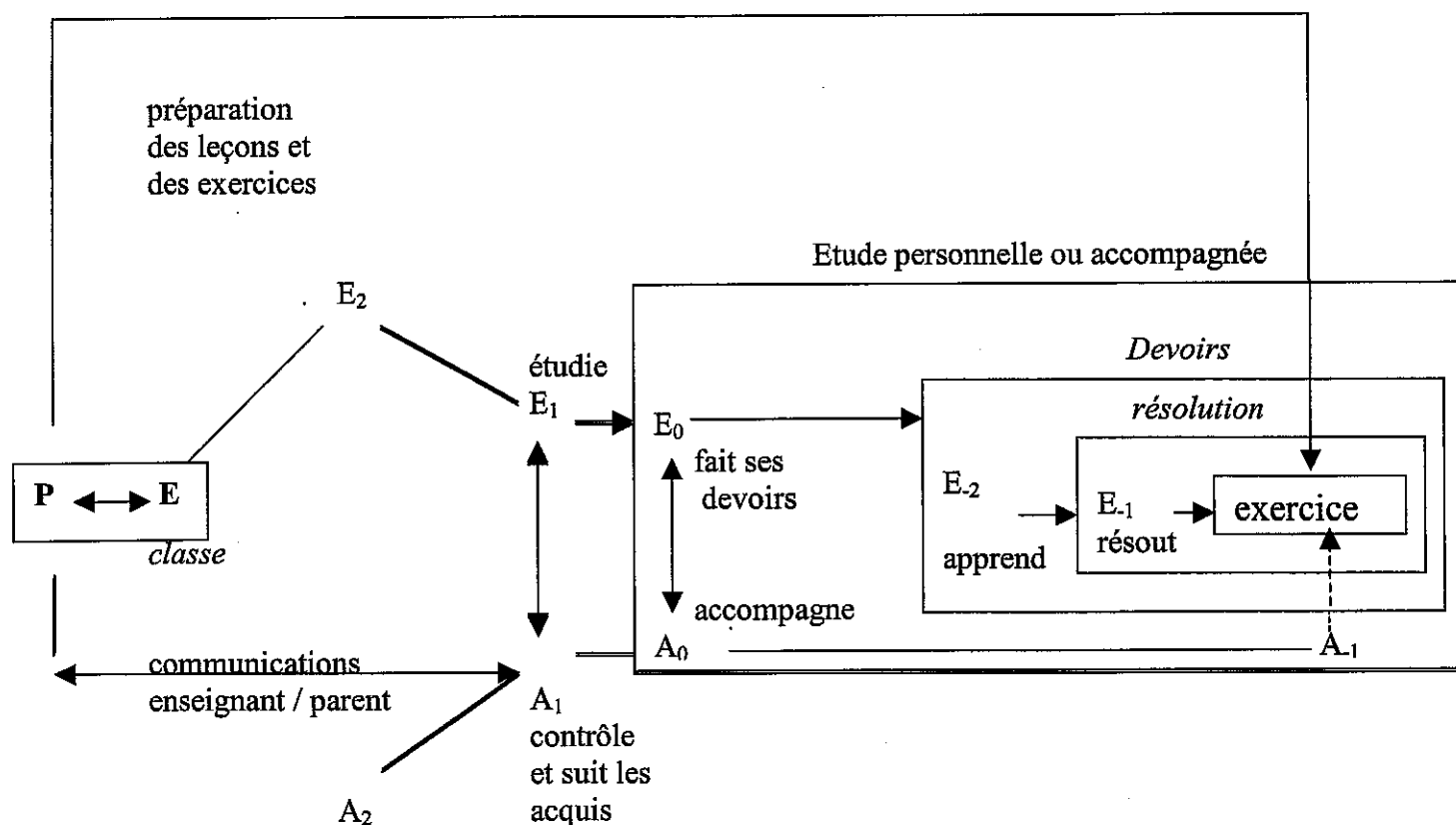
Lorsque le professeur prévoit sa leçon, il organise aussi l'étude personnelle des élèves, par l'intermédiaire d'exercices qu'il leur prescrit et qui seront résolus hors de son contrôle direct.

En privé, peut-être à son domicile, l'élève-agissant (E_2) résout l'exercice. A un niveau réflexif, il (E_1) apprend de cette résolution, il peut être amené à recommencer plusieurs fois pour aboutir à une solution satisfaisante. C'est bien cet apprentissage que désignent les devoirs et pas seulement la production d'une solution mathématiquement correcte. En particulier, la réponse doit se présenter sous une forme acceptable par l'institution d'enseignement.

L'étude personnelle inclut la réalisation des devoirs prescrits, mais ne s'y restreint pas toujours. Elle sera considérée comme efficace lorsque les réponses deviennent, pour l'élève (E_1), reproductibles à volonté dans un délai fixé et dans des conditions données.

Parents, institution scolaire et pouvoirs publics sont conjointement engagés dans l'évaluation de ce que l'élève (E_1) a appris, afin d'être en mesure de réagir s'il en est besoin et si cela est possible.

PARTAGE DES RESPONSABILITES DIDACTIQUES POUR L'ETUDE



Un parent, même s'il décidait de ne pas scolariser son enfant, ne peut se soustraire à la position A_1 , imposée par le contrat social. Le contrôle et le suivi des acquisitions est un assujettissement durable de l'obligation scolaire.

Mais si à terme l'élève (E_1) doit pouvoir conduire de manière autonome son étude personnelle, aux débuts de l'enseignement, lorsque l'enfant est jeune, un accompagnateur d'étude peut en améliorer les conditions, en lui rappelant ses nouvelles responsabilités didactiques, en faisant vivre dans son environnement proche les enjeux de l'apprentissage et en renouvelant les énergies qui lui sont nécessaires. A_0 désigne le rôle de cet accompagnateur d'étude, un rôle qui n'est en principe que transitoire. La situation S_0 localise également les régulations occasionnelles des difficultés, quel que soit l'âge de l'élève.

Dans la situation S_0 , deux contrats didactiques se superposent pour l'élève, celui qui le lie au professeur et celui qui le lie à l'accompagnateur. L'accompagnateur ne peut pas non plus se départir du projet imposé par le professeur, même si provisoirement il propose d'autres exercices.

Ce rôle A_0 peut éventuellement se confier à un autre membre de la famille (une grande sœur par exemple) ou se déléguer à des professionnels. Mais il (A_0) reste sous le contrôle de A_1 . Bien souvent, l'accompagnateur est conduit à résoudre lui-même l'exercice qui est prescrit à l'élève. Dans la position A_{-1} , il engage ses propres connaissances mathématiques. Contrairement à ce qui se passe pour la position du professeur, l'accompagnateur n'a pas choisi l'exercice, il ne peut pas le modifier, il n'est en général pas seul au moment d'en prendre connaissance, et il doit très rapidement s'en faire une idée.

2. Les principaux résultats expérimentaux au sujet des parents et des devoirs du soir

Cette modélisation et les matériaux collectés durant les deux expérimentations ont permis d'établir des résultats convergents, indépendamment du fait que les interactions familiales soient collectives et publiques, comme dans le premier dispositif, ou qu'elles s'exercent en privé comme dans le second, qu'elles concernent des collégiens ou des écoliers du primaire, qu'elles portent sur l'algèbre ou sur le calcul élémentaire. Je ne citerai ici que trois de ces résultats :

- il s'avère nécessaire de distinguer, pour un sujet donné, la position du résolveur de problème (A_{-1}) de celle de l'accompagnateur de la résolution (A_0). Même lorsque le parent sait résoudre, lorsqu'il est seul, l'exercice qui est prescrit, ses moyens didactiques ne lui

suffisent pas toujours pour accompagner son enfant. Il peut se trouver en posture délicate pour impulser l'activité mathématique de l'élève ou pour la relancer. Certaines erreurs qu'il n'attendait pas peuvent le troubler. Il peut ne pas reconnaître la diversité des réponses possibles. Sa réponse n'est pas toujours communicable, et peut ne pas toujours être partagée avec l'élève en s'adaptant aux attentes scolaires. Deux répertoires sont bien en présence : un répertoire mathématique pour résoudre et un répertoire didactique pour accompagner ;

- les connaissances méthodologiques ou psychopédagogiques, qui sont générales du point de vue des mathématiques, ne peuvent en situation S_0 remplacer l'un au l'autre des répertoires précédents. Pour pouvoir mobiliser à bon escient au cours de la résolution ce type de connaissances, il faut être en mesure de les conjuguer de manière pertinente avec les connaissances mathématiques en jeu ;

- enfin il arrive que des erreurs grossières soient produites ou laissées involontairement sans correction en position didactique, lorsqu'il y a surcharge attentionnelle ou cognitive. Alors que tout laisse penser que dans une autre position, ces erreurs auraient vraisemblablement été repérées et évitées par les mêmes protagonistes.

Ces résultats corroborent les analyses de pratiques professionnelles des enseignants. Peut-être rendent-ils mieux compte de certains phénomènes, parce que dans le cas des parents, les conditions didactiques sont extrêmes.

3. Les négociations des enseignements et l'action didactique

J'ai prévu un dernier niveau dans mon modèle. La position A_2 est une position réflexive par rapport à la fonction d'accompagnateur. C'est à ce niveau que la littérature spécialisée contacte et informe les parents. C'est encore au niveau 2 que le parent communique à propos de son rôle et que le chercheur l'interroge lors d'un entretien.

Les questionnaires du dispositif pré expérimental font apparaître que les parents de collégiens décrivent leur rôle en se référant à celui de l'enseignant et en interprétant l'aide qu'ils devraient fournir comme un apport d'explications et de connaissances mathématiques nouvelles. Ces représentations du rôle de l'accompagnateur sont conformes à celles que les médias et les textes officiels communiquent au grand public, mais ne sont ni en relation avec les connaissances effectives des parents qui répondent au questionnaire, ni avec celles qu'ils s'attribuent eux-mêmes. Ainsi, un parent qui reconnaît ne pas être suffisamment armé en mathématiques pour résoudre l'exercice de son enfant s'aventurera à l'« aider » si celui-ci le lui demande. Il n'est alors pas en mesure d'estimer les dégâts que ses interventions

occasionnent, en privilégiant une réponse fausse ou en disqualifiant des tentatives correctes. Plusieurs observations montrent dans la thèse que ces réactions inadéquates peuvent même être défendues avec aplomb par leurs auteurs, qui tirent arguments de principes pédagogiques mal à propos.

C'est pourquoi, ma recherche s'est résolument orientée vers les conditions reproductibles de l'étude (en particulier vers les milieux didactiques qui l'organisent) plus que vers les multiples effets induits par les accompagnateurs dans les conditions qui sont habituelles aujourd'hui.

En matière de partage école/parents, il s'avère extrêmement prudent de discerner ce qui relève des négociations (qui doivent emporter la conviction des partenaires) et ce qui relève des actions elles-mêmes (dont la réussite dépendra étroitement des moyens disponibles bien plus que des intentions et des bonnes volontés). La thèse met à jour une inflation de communications « élogieuses » à l'occasion des coopérations didactiques entre la classe et l'extérieur. Cette inflation touche plus particulièrement la transmission des savoirs qui paraissent délaissés et négligés par les producteurs de mathématiques, par les théoriciens des apprentissages, par les formateurs des professionnels, par les enseignants, les praticiens de la remédiation et les animateurs du périscolaire. En cas de reports successifs de responsabilité, ce sont le plus souvent les parents qui constituent le dernier maillon de la chaîne.

4. Coopérer pour apprendre la table de multiplication

La coopération de l'école avec les familles est ancienne et massive au sujet de l'apprentissage des tables.

La table de multiplication appartient à la catégorie des savoirs dévalués. En un siècle, son statut didactique s'est progressivement dégradé au sein de l'enseignement du calcul. Elle caricature les difficultés que rencontre l'école pour négocier son apprentissage malgré l'ancrage des calculatrices dans notre vie quotidienne et malgré la pression du parascolaire qui prétend mettre à disposition des familles des moyens efficaces et ludiques.

Une tentative de réhabilitation s'est produite en 1972 lorsque Brousseau a proposé d'utiliser le vocabulaire du langage formel pour traiter des produits élémentaires comme d'un répertoire de formules mathématiques. Ce langage devait permettre de puiser dans la culture scientifique les améliorations de la transmission de ce répertoire afin de mathématiser l'action des élèves.

Cette proposition a été peu entendue. Depuis, l'apprentissage des tables s'est encore éloigné des mathématiques, au nom des compétences méthodologiques transversales et du partenariat avec les familles et le tissu associatif des quartiers.

Il est plus gratifiant aujourd'hui de s'occuper du raisonnement et des démonstrations que du calcul ; de s'occuper des résolutions de problèmes que du calcul mental ; de s'occuper des stratégies de calcul mental que des répertoires numériques qui leur sont associés.

La coopération massive au sujet de l'apprentissage de la table a fait place à un autre phénomène. Par le biais des renvois de l'apprentissage à l'extérieur, la culture courante a fait irruption dans les classes, sans que les savoirs praxéologiques des professeurs suffisent à juguler tous ses effets.

Les chapitres 7 et 8 de la thèse élucident une tendance à la dédidactification de l'enseignement des produits élémentaires. Un phénomène qui érode les conditions démocratiques de la scolarité obligatoire, mais de manière socialement invisible puisque justement il est en partie entretenu par les dispositifs d'aide aux élèves.

5. Un paradigme d'études pour les organisations didactiques qui visent à transmettre un répertoire de formules

En étudiant cette transmission particulière, j'ai en fait rencontré de nombreuses questions qui se posent de manière générale et fondamentale lorsque l'on bâtit un long processus en mathématiques.

Objet circonscrit et très familier, la table offre les caractères d'un paradigme commode pour analyser les choix qui préludent à l'enseignement des savoirs destinés à être appris par cœur, comme les formules de trigonométrie ou de différentiation, par exemple.

Les organisations didactiques des produits élémentaires se révèlent de bons représentants pour étudier les équilibres à maintenir dans les institutions didactiques entre question et théorème ; entre raisonnement et procédures algorithmisées. Chaque ensemble de formules présente bien sûr ses particularités. C'est la fonction principale de la Didactique que de mettre en évidence les spécificités des savoirs et de leur enseignement. Mais il semble bien qu'il existe des similitudes organisationnelles, du moins c'est le pari théorique que nous tentons avec les assortiments didactiques. Cette notion n'est introduite qu'au cours du 9^{ème} et dernier chapitre de la thèse.

Comment négocier le projet d'apprendre des formules mathématiques, malgré un climat défavorable dans et hors de l'école ?

Comment maintenir sur le long terme les efforts nécessaires à ce projet ?

Comment insérer cet apprentissage dans une perspective de mathématisation de l'activité des élèves et en particulier lorsqu'ils sont en difficulté ?

Comment aménager les conditions d'une étude autonome ?

Comment atténuer les effets des interventions intempestives des familles, sans les couper du suivi des acquisitions ?

Comment mettre en perspective les apprentissages les plus fondamentaux avec l'environnement social des élèves, étant donné que justement l'enseignement anticipe l'amélioration des connaissances communes aux citoyens, ce qui a pour conséquence que les jeunes générations n'apprennent pas comme celles de leurs parents ?

Comment organiser l'apprentissage hors de la classe en optimisant le rendement didactique pour ne pas décourager inutilement les bonnes volontés ?

Les enjeux sont multiples et peuvent paraître inconciliables.

Les résultats de la thèse montrent qu'il est dans certains cas plus facile de transmettre aux parents et aux élèves des situations (et donc des comportements) que de modifier directement leurs représentations à propos des mathématiques et de la façon de les acquérir. De telles situations, qui visent à rapprocher l'entourage proche des élèves avec les aléas ordinaires de l'apprentissage et à constituer le fond commun sur lesquels enseignants et parents actualiseront leurs échanges et leur coopération, présentent des caractères didactiques proches des exercices qui sont composés de plusieurs questions semblables.

Une opinion largement répandue consiste à penser que les instruments culturels familiers, comme la table, fournissent des supports adaptés aux interactions familiales. Malgré l'avantage qu'ils présentent au moment de négocier la coopération, ils s'avèrent de piètres moyens d'apprendre, puisque leur fonction première est au contraire de dé-mathématiser l'action des usagers.

Aussi le contrôle du rendement didactique des milieux destinés au travail à la maison appelle une étude théorique et pragmatique des collections de questions qui visent à transmettre un répertoire de formules.

IV. LES ASSORTIMENTS DIDACTIQUES

1. Organisations formelles et réorganisations didactiques

a) Définition d'un assortiment didactique

J'appelle « assortiment didactique » une suite ordonnée de questions réunies autour d'une même intention didactique et réalisable dans une unité de temps didactique.

L'exercice est un objet institutionnel et multidimensionnel. L'assortiment est un modèle relatif au rôle du professeur et qui a pour fonction de décrire, de comparer, de construire, d'éprouver, de modifier des suites de questions, rassemblées à des fins didactiques, pour optimiser le rendement d'une résolution groupée.

Plusieurs caractères sont attachés aux assortiments, parmi lesquels : la taille (le nombre de questions), le répertoire de formules qu'il mobilise, la redondance, la proportion nouveauté/ ancienneté, le rythme induit par l'ordre des questions, la fréquence d'apparition d'une formule, etc. Ils représentent les leviers didactiques que le concepteur d'assortiment peut actionner pour ajuster au mieux ce type de milieu didactique en fonction du rôle qu'il veut lui faire jouer au cours d'un processus.

b) Un exemple

En 4^{ème}, lorsque la distributivité de la multiplication sur l'addition est enseignée, les élèves apprennent un corollaire scolaire nommé : « double distributivité ». Puis certains cas particuliers prennent le statut de « formules » en classe de 3^{ème}. L'institution scolaire les désigne comme des savoirs élémentaires qu'il convient d'utiliser directement. Ils sont regroupés sous une même étiquette : les « identités remarquables ».

Pour l'enseignement de ce répertoire, comment organiser le partage entre le professeur et l'élève ? Laissons ici de côté le rôle joué par les parents.

Quels exercices favoriseront une utilisation rapide et fiable de ces formules ?

Les exercices à donner en classe, à la maison, en études dirigées ou en remédiation gagnent-ils ou non à être différents ?

Comment formaliser les distinctions et comment en tirer le meilleur parti ?

Comment construire les questions qui prolongeront la durée d'un entraînement ?

Comment modifier localement des questions pour mieux les ajuster à l'occasion des régulations des apprentissages ?

Voilà un exercice tiré du manuel *Triangle*¹ niveau 3ème (n° 6 p 85).

« Factoriser, si possible, les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable.

- 1) $9a^2 + 12a + 4$
- 2) $25a^2 - 30a + 9$
- 3) $36y^2 + 30y + 25$
- 4) $9 + 12y + 4y^2$
- 5) $4 - 28x + 49x^2$
- 6) $25x^2 + 10x + 1$
- 7) $49x^2 + 4 + 28x$
- 8) $24x + 16 + 9x^2$
- 9) $4x^2 - 5x + 9$
- 10) $25x^2 + 30xy + 9y^2$
- 11) $x^2 - 8xy + 16y^2$
- 12) $9/16x^2 + 5/2x + 25/9$ ».

Cet exercice correspond à un assortiment de taille 12, puisque chacune des 12 questions de l'exercice mobilise l'une des formules du répertoire considéré.

Pour mieux voir l'agencement des questions, il est envisageable de ne retenir que quelques informations. Par exemple, je remplace chaque question par la formule qu'elle mobilise (même si cette formule ne permet pas de factoriser, elle est sollicitée pour résoudre). Je note $f_1 : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $f_2 : (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $f_3 : (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; et je garde trace du couple $(a ; b)$ des valeurs prises par f_i dans la question. J'obtiens ainsi :

- | | | |
|----|-------------|------------------|
| 1 | f_1 ? oui | $(3a ; 2)$ |
| 2 | f_2 ? oui | $(5a ; 3)$ |
| 3 | f_1 ? non | $(6y ; 5)$ |
| 4 | f_1 ? oui | $(3 ; 2y)$ |
| 5 | f_2 ? oui | $(2 ; 7x)$ |
| 6 | f_1 ? oui | $(5x ; 1)$ |
| 7 | f_1 ? oui | $(7x ; 2)$ |
| 8 | f_1 ? oui | $(3x ; 4)$ |
| 9 | f_2 ? non | $(2x ; 3)$ |
| 10 | f_1 ? oui | $(5x ; 3y)$ |
| 11 | f_2 ? oui | $(x ; 4y)$ |
| 12 | f_1 ? oui | $(3/4x ; 5/3)$. |

¹ Chapiro G., Mante M., Mullet-Marquis R., Pérotin C. (1999), *Mathématiques 3^{ème}*, collection Triangle, Paris : Hatier.

A partir de là, je peux analyser, sur les éléments que j'ai retenus comme significatifs, les valeurs choisies par le concepteur de l'assortiment. Seules f_1 et f_2 sont sollicitées par l'assortiment, f_3 a été écartée momentanément des interactions didactiques. Deux questions sur 12 ne correspondent pas à une factorisation (elles sont placées aux rangs 3 et 9).

- 1 rencontre avec la première formule ;
- 2 rencontre avec la seconde formule ;
- 3 première impossibilité de factoriser (avec la première formule), l'erreur suggérée concerne le double produit ;
- 4 changement de place de la variable dans la première formule ;
- 5 idem pour la seconde formule ;
- 6 introduction (avec la première formule) du facteur 1 qui doit être reconnu comme un carré et n'est pas « visible » dans le terme rectangle ;
- 7
- 8
- 9 encore une absence de factorisation avec cette fois la seconde formule et pour une autre raison (l'erreur suggérée ($5x$ au lieu de $12x$) fait apparaître la somme $a + b$, au lieu de $2ab$) ;
- 10 la première formule met en scène deux monômes ;
- 11 idem pour la seconde formule, avec combinaison du facteur 1 ;
- 12 introduction d'écritures fractionnaires et de nombres décimaux (avec la première formule).

L'organisation sous-jacente des questions semble se référer à une organisation logique qui déclinerait pour l'une ou l'autre des formules certaines variables en suivant une progression ascendante de la difficulté cognitive. J'ai commencé à regarder de près les exercices de ce point de vue, dans quelques manuels couramment utilisés en 3^{ème}, et j'ai assez fréquemment retrouvé ce type d'agencement.

Les éléments que j'ai retenus dans mon codage ne laissent apparaître aucune nouveauté pour les questions 7 et 8. Mais en revenant aux questions d'origine, d'autres variables se font jour qui concernent la place des termes dans le libellé de la question : dans la question 7, les deux carrés n'entourent plus le terme rectangle comme dans les 10 autres questions, il est repoussé en fin d'expression ; dans la question 8 il est au contraire placé en première position.

Tous ces choix sont-ils adéquats au regard de l'intention didactique de celui qui donne à résoudre l'exercice ? Cet agencement est-il ergonomique du point de vue de l'apprentissage ?

Si la difficulté maximale survient en fin de course, lorsque l'élève est fatigué ; si le rythme induit par l'ordre et la variété des questions n'offre que peu d'occasions d'élaborer des routines, on peut faire l'hypothèse que l'assortiment est perfectible et même que les améliorations éventuelles seraient à affiner selon que l'exercice est donné en début de processus ou en fin.

c) Variété et répétition

Ajuster des questions à un projet d'enseignement ne se limite pas à varier des valeurs numériques. Certaines organisations sont plus adaptées que d'autres à la fonction didactique. Une variété anarchique ne favorise pas l'apprentissage. Lorsque l'élève est ballotté de manière imprévisible entre difficulté et facilité, il ne peut « lire » aucune intention didactique, il ne peut s'appuyer sur aucune régularité pour s'adapter.

La répétition ne possède pas non plus en elle-même de vertu didactique. Lorsque de longues définitions se ressemblent, sauf pour quelques nuances, les exposer successivement devient lassant pour l'auditeur qui n'a pas eu l'occasion de se poser de question à ce sujet. Les distinctions fines disparaissent derrière l'énorme masse d'informations qui est plusieurs fois répétée et l'effet produit est l'inverse d'un apprentissage : l'auditeur croit savoir, alors qu'il n'a rien perçu de ce qui motivait l'exposé.

2. Répartir les responsabilités didactiques

Pour interroger les caractères des assortiments, indépendamment de ce que les concepteurs attribuent comme propriétés à leurs exercices, il fallait pouvoir les mettre en correspondance avec un modèle dynamique qui décrive l'avancement d'un processus d'un double point de vue. Celui de l'évolution du statut des formules dans l'institution didactique, et de celui de l'évolution du partage des responsabilités entre un élève et un professeur qui vise une plus grande autonomie pour une étude personnelle du répertoire de formules.

La notion d'assortiment didactique se situe au confluent des concepts de Contrat et de Milieu.

Dans un premier temps, j'ai discrétisé le rapport d'un sujet avec son milieu en ne retenant que 6 responsabilités. Puis j'ai considéré que le professeur, par le truchement des

milieux didactiques, délègue petit à petit ces responsabilités pour que l'élève s'adapte progressivement au fonctionnement d'une institution non didactique. Par glissements successifs du professeur vers l'élève, j'obtiens 7 niveaux de familiarité pour une formule ou un répertoire de formule. Je vais expliciter maintenant quelques-uns de ces niveaux.

3. Plusieurs niveaux de familiarités avec une formule

Pour le professeur, il s'agit d'optimiser l'accès à une familiarité « d'expertise ». L'élève doit être capable de résoudre un problème en utilisant directement les identités remarquables, mais aussi en cas de besoin, changer de posture et contrôler la pertinence et la validité de sa réponse à l'aide de connaissances algébriques. Dans un contrat d'enseignement fortement didactique, c'est au professeur de transmettre les connaissances qui servent au choix d'une identité remarquable et à son bon usage. Les exercices jouent dans ce projet un rôle essentiel au collège.

Les programmes identifient les théorèmes, mais les moyens de le transmettre n'apparaissent pas dans la transaction. L'élève et son entourage peuvent croire que le professeur attend seulement une citation. J'appelle « aptitude » la familiarité qui permet à un sujet d'énoncer une formule de manière sûre. S'il y a malentendu sur ce qu'apprendre veut dire, si l'élève n'attache pas au texte savant de moyen de résolution exportable, ses performances différeront fortement selon les conditions de l'évaluation, ce qui peut laisser entendre qu'il a oublié ce qu'il avait pourtant mémorisé.

J'ai envisagé d'autres formes de familiarité avec les identités remarquables, qui concernent seulement les connaissances qui permettent de les construire et reconstruire. Par exemple lorsqu'un sujet sait développer de manière sûre une expression en utilisant la double distributivité et en anticipant des simplifications particulières sur les termes rectangles.

Le professeur espère le saut épistémologique qui consiste à remplacer une production devenue habituelle par l'emploi opportun d'une formule. Ce renversement de répertoires est une rupture de contrat. Pouvoir étayer l'établissement d'un résultat en le confortant par des connaissances, est une amélioration perceptible pour l'élève. En revanche, la conversion d'un moyen commode de produire en un moyen de vérifier après coup une décision directe est un projet didactique qui doit être soutenu par un tiers, car l'apprenant ne peut apprécier tout de suite le profit qu'il retirera d'une application formelle.

J'ai considéré que l'objectif terminal de l'enseignement était atteint lorsque l'usage des formules ne nécessitait plus d'effort. Lorsque le sujet les active de sa propre initiative, parce qu'elles sont devenues fonctionnelles pour lui. Il en oublie même l'époque où il n'en disposait pas. Au dernier niveau du modèle, la familiarité est telle que le professeur n'a plus à se préoccuper de ménager de milieu didactique particulier ; l'utilisation fréquente réactive d'elle-même l'entretien du répertoire. Mais avant d'atteindre ce niveau de « maîtrise », la rétention doit être volontairement provoquée. Dans un contrat fortement didactique, le professeur fournit régulièrement aux élèves des occasions judicieuses de faire fonctionner les formules et maintient dans la classe l'intérêt de s'entraîner. Sinon, c'est à l'élève et à son éventuel accompagnateur de s'en charger.

6 responsabilités à répartir entre un professeur et un élève

- 1 Déterminer un contexte ou reconnaître un contexte (construire un milieu, identifier des conditions).
- 2 Adapter une décision à des conditions (choix d'une réponse dans un éventail de possibles).
- 3 Contrôler la validité d'une réponse par un raisonnement.
- 4 Algorithmiser la production d'une réponse à l'aide d'un savoir qui étiquette le triplet (conditions, décision, contrôle).
- 5 Contrôler l'emploi d'un savoir par un raisonnement.
- 6 Maintenir dans un répertoire les moyens de convertir le savoir en connaissances (c'est à dire en moyens de décision).

7 niveaux de familiarité avec une formule

- 1 niveau de l'**exécution**
- 2 niveau de la **construction**
- 3 niveau de la **production**
- 4 niveau de la **production auto-contrôlée**
- 5 niveau de l'**aptitude**
- 6 niveau de l'**expertise**
- 7 *niveau de la **maîtrise***

4. Trois temps forts pour les assortiments de questions

Si je laisse ici de côté le temps de l'évaluation des connaissances, qui présente ses particularités propres, j'identifie dans un processus au moins trois phases au cours desquelles les questions se densifient et pour lesquelles l'analyse en terme d'assortiment peut éclairer certaines décisions locales :

1) Le moment où le professeur vise le niveau 3, et fait dévolution d'un apprentissage qui donne du sens aux identités remarquables, qui les inscrit parmi les connaissances algébriques et leur attache des conditions de référence.

2) Le moment où le professeur vise le niveau 6 et fait dévolution d'un entraînement pour que les identités remarquables puissent jouer leur rôle d'outil et que les performances des élèves à cet égard deviennent robustes mêmes dans des conditions complexes.

3) Et enfin le moment où le professeur met en perspective l'intérêt de disposer de ce répertoire de formules. La puissance de l'algèbre tient à ce qu'elle tire bénéfice d'une formalisation pour gommer les disparités entre différentes structures numériques. Elle étend le domaine d'application en faisant glisser le contrôle du sens vers le formel.

Les élèves ont rencontré et manipulé des formes comme $(ax + b)(ax + b)$ avec des valeurs familières, il leur faut remplacer les conceptions locales par une formule générale de la forme $(A + B)^2$ vraie pour toute valeur réelle.

Le professeur peut provoquer et soutenir l'exploration des problèmes épistémologiques que la généralisation suppose (et que l'élève ne soupçonne pas a priori). Les questions posées durant cette phase d'institutionnalisation ont pour double enjeu le domaine de validité du répertoire et l'extension du champ des résolutions apporté par le statut d'identité algébrique. Car en se détachant des conditions des premiers apprentissages (de la forme des premières questions), chaque formule devient une entité manipulable par la pensée pour elle-même. Selon la progression classique, les identités sont d'abord rencontrées dans le sens du développement, qui sert de base à leur démonstration. Puis le renversement des hypothèses et des conclusions ouvre à la factorisation.

5. Didactifier l'étude personnelle

Comment une institution qui voudrait faciliter l'accès des élèves à cet outil algébrique performant pourrait-elle optimiser ses questions au cours de ces trois phases ?

Je vais pour finir, citer quelques points seulement. La mise en correspondance des deux modélisations (celle des assortiments et celles des niveaux de familiarité) a produit beaucoup plus sur les identités remarquables. Vous trouverez plus d'éléments sur le CD-Rom des actes de l'école d'été.

a) Différencier selon les élèves

Concernant la différenciation selon les élèves, la durée de l'apprentissage et de l'entraînement peut être variable pour chacun. D'où l'idée d'en adapter le rythme et la

complexité et d'aménager, en prévention, des paliers supplémentaires pour les élèves les plus fragiles. En revanche, il paraît important que tous les élèves puissent bénéficier des assortiments qui accompagnent la dévolution des gains épistémologiques apportés par ce répertoire de formules. Car ces assortiments marquent l'entrée dans la culture algébrique. Ménager un accès démocratique à cette culture mathématique, si peu présente dans notre environnement social, conduit à ne pas recourir à la différenciation pédagogique pour les assortiments de la phase d'institutionnalisation.

b) S'entraîner sur du déjà appris

Concernant l'entraînement sur du déjà appris, la variété entre questions permet tantôt de lutter contre la lassitude d'une répétition pourtant indispensable, tantôt d'augmenter la complexité de ce qui est demandé. Le rythme induit par l'ordre des questions permet de doser les efforts et de développer l'endurance.

Les formules du répertoire peuvent progressivement se mêler à de nouvelles connaissances. Elles peuvent participer aux réorganisations des anciennes. Mais lors d'une résolution, chaque formule doit être disponible indépendamment des autres. Dans les phases d'entraînement, qui gagnent à solliciter chacune d'entre elles, le répertoire n'a pas besoin d'être souligné par un dispositif didactique qui mobilise collectivement toutes les formules au cours d'un même assortiment. Le répertoire permet au sujet de ranger les formules dans sa mémoire. Ce n'est pas lui la cible de l'entraînement.

c) Apprendre du nouveau

Pour apprendre du nouveau, les enjeux sont différents et les variations entre questions ne s'expriment pas sur les mêmes variables didactiques.

Les premières familiarisations s'effectuent sur un domaine numérique non problématique (c'est justement pour les cas litigieux qu'il sera intéressant de disposer d'une formule pour dégager plus d'attention cognitive).

La principale cible de l'apprentissage des identités remarquables, c'est la recherche systématique (par anticipation) de réductions particulières. Il n'y a pas lieu à ce moment-là de marquer, dans les assortiments, de distinction entre chaque formule, puisque le principe d'établissement leur est commun. Par contre, il est avantageux que le professeur veille à éviter que les élèves amalgament les invariants avec des éléments non pertinents mais présents dans les conditions qui leur sont présentées (par exemple l'ordre des termes). Pour les assortiments qui visent les premiers apprentissages, la variété des questions s'exprime sur ce qui n'est pas variable pour les formules. Il vaut mieux développer chez les élèves une vigilance qui, le

moment venu, facilitera la « lecture » pertinente des écritures canoniques des formules. Lorsque la présentation des questions se standardisera pour l'entraînement, ils ne seront pas dupés par la disposition spatiale des symboles ou toutes autres scories contingentes.

d) Les répertoires

Une institution didactique maintient certains équilibres didactiques qui touchent à ce qui est retenu comme formule et ce qui restera à l'état de connaissance.

Un étayage mathématique donne du sens aux formules, mais il est coûteux pour l'enseignement. Il s'agit d'optimiser l'ergonomie du processus en mathématisant l'action des élèves sans inutilement alourdir leurs décisions et sans trop allonger le temps d'apprentissage.

La méta cognition s'intéresse à l'ergonomie de la mémorisation, elle remet rarement en question les organisations formelles qui servent de référence commune aux institutions, indépendamment des usages qu'elles en feront. Il est pourtant utile à une institution didactique de pouvoir s'affranchir des formes savantes et culturelles des connaissances. En particulier, le professeur a intérêt à ne pas traiter toutes les formules du répertoire officiel selon le même régime, même si l'organisation formelle contribue à les unifier et à les uniformiser.

Le professeur donne à voir le répertoire officiel aux élèves et à leurs familles comme une image de ce qui sera ou a été étudié. Mais il peut dans l'action didactique s'en écarter transitoirement pour concevoir des organisations plus adaptées à l'apprentissage. Par exemple, l'accès du répertoire sera facilité si son contenu est dans un premier temps hiérarchisé par des liens signifiants entre les formules. En aménageant, dans les assortiments des premiers apprentissages, des co-présences judicieuses de formules (en les agrégeant à des fins didactiques), le professeur favorise le contrôle mathématique du répertoire. Ces organisations didactiques ne sont que provisoires. Une fois l'apprentissage terminé, il est souhaitable que l'élève oublie le détail des aventures qui l'ont permis et le remplace par un formalisme décontextualisé plus universel.

Le maintien d'une taille raisonnable pour les assortiments est une préoccupation incontournable des institutions didactiques. Il leur faut en particulier éviter que leurs interactions se diluent sur de trop vastes répertoires.

De manière locale, le nombre de questions potentielles s'accroît au fur et à mesure que le processus se déroule. Les répétitions propres à soutenir l'apprentissage ne font que l'augmenter encore.

De manière globale, le professeur peut miser sur certaines connaissances mathématiques (qu'il enseignera et entraînera par ailleurs), pour engendrer la totalité du répertoire officiel à partir d'un petit nombre de formules seulement. Seul un petit répertoire direct sera alors vraiment à mémoriser. Nul n'est besoin d'apprendre par cœur les 121 produits de la table de Pythagore, il suffit en mobilisant des propriétés des nombres et des opérations, de concentrer ses efforts sur 36 produits seulement.

Ce problème de réductions est plus aigu pour les grands répertoires, mais je l'ai tout de même rencontré dans le cas des identités remarquables. Classiquement, elles sont au nombre de 3. Il ne serait pas abusif, du côté des coulisses professionnelles, d'en considérer seulement deux comme fondamentales : $(A + B)(A - B)$ et $(A + B)^2$ puisqu'il est attendu des futurs algébristes qu'ils transforment les expressions en contrôlant les signes des différents termes. Or les auteurs du manuel *Triangle* ont fait un choix différent. Ils présentent aux élèves 6 formules à mémoriser, en les dédoublant. Ce qui leur fait perdre le statut d'identité algébrique.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Une augmentation du répertoire désigné à l'étude personnelle peut présenter quelques avantages pédagogiques. La taille se fait le relais du gain épistémologique. Une taille imposante reflète l'importance accordée par l'institution à ce répertoire et justifie que de nombreux efforts soient investis. Mais la mémorisation se heurte alors à des ressemblances formelles que les connaissances mathématiques permettent justement ne plus percevoir.

Le milieu (par le truchement des écritures) prend partiellement en charge certains contrôles. En figeant de « bonnes formes », le milieu épargne à l'élève de mobiliser certaines connaissances mathématiques (il « dé mathématise » systématiquement son action aux mêmes endroits). Les connaissances que l'élève développera ne lui permettront pas de s'affranchir de ce milieu. Ou bien il développera une confiance déraisonnable en ses propres capacités, ou bien il restera profondément troublé face à des réussites et des échecs qui lui semblent aléatoires malgré ses décisions raisonnées.

C'est pourquoi j'interprète ce choix de 6 formules comme l'effet d'une dédidactification et je fais l'hypothèse qu'il est lié à la négociation relative à l'étude personnelle.

Celui qui anticipe les erreurs fréquentes des élèves est tenté d'abuser des milieux « alliés ». Mais alors reste à la charge de celui qui régule les apprentissages défaillants, de prendre sur lui pour jouer les perturbateurs, et de proposer au bon moment des milieux « antagonistes » qui déstabiliseront les connaissances de l'élève. C'est une part du métier bien difficile à communiquer. La formalisation des assortiments est une tentative pour rationaliser les régulations didactiques en terme de modification locale de milieu pour viser, non pas une réussite immédiate, mais un meilleur apprentissage.

V. CONCLUSIONS

Ces différents modèles, pour la plupart encore en cours d'élaboration (en particulier, les mises à l'épreuve expérimentales font encore défaut) présentent une même finalité, celle d'ouvrir des perspectives pour une ingénierie spécifique de l'entraînement des connaissances les plus fondamentales.

L'enjeu social est important, il s'agit de favoriser, en amont des échecs personnels, la prise en charge collective de l'organisation de l'étude hors de la classe (qu'elle soit autonome ou accompagnée), au lieu de la rabattre sur une mémorisation individuelle et de compter sur des appuis exogènes.

Les discours en direction des familles les éloignent de la réalité des actions. Améliorer l'information et la communication entre école et parents est certes important, mais s'intéresser au contenu des « devoirs à la maison » contribue fortement à une organisation non discriminante de l'enseignement obligatoire. Dans ce projet, les exercices jouent un rôle complémentaire non négligeable en rapprochant les partenaires de l'étude des aléas « ordinaires » de l'apprentissage. Une formalisation en terme d'assortiments permet de redidactifier des objets scolaires qui ont été peu à peu banalisés dans les différentes institutions qui participent à la transmission des savoirs mathématiques scolaires.

BIBLIOGRAPHIE

- Brousseau G. (1972), Processus de mathématisation, in *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris : APMEP, pp. 428-457.
- Brousseau G. (1973), Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?, *Cahier de l'enseignement élémentaire IREM de Bordeaux* 13, 195-237.

- Brousseau G. (1986), La relation didactique : le milieu, in *Les actes de la IV^e école d'été de Didactique des Mathématiques*, Paris : IREM de Paris 7, pp. 54-58.
- Brousseau G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard Y. (1998), Analyse de pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, *Actes de l'U.E. de la Rochelle*, IREM de Clermont-Ferrand.
- Chevallard Y, Joshua M-A. (1991), *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*, 2^{ème} édition, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Esmenjaud-Genestoux F. (2000), *Le fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*, thèse, Université Bordeaux 1.
- Genestoux F. (1995), "*Quelle institution d'appui aux élèves en difficulté en mathématiques ? Etude des conditions spécifiques*", mémoire de DEA, LADIST, Université Bordeaux 1.
- Genestoux F. (1996), "Combien en reste-t-il ? Il suffit d'enlever !" ; *Journal des Instituteurs* n° 3, Dossier "Nul en Maths ?" , Paris : Nathan, novembre 1996.
- Genestoux F. (1997), "Pour la réussite de tous en Mathématiques : des Coups de Pouce ? " ; in *Mathématiques de base pour tous ? Tous les enfants peuvent-ils connaître la réussite en Mathématiques, en début de scolarité ?*, APFEE (Association pour favoriser une école efficace), Lyon : ALEAS.
- Margolinas C., Steinbring H. (1993), Double analyse d'un épisode : cercle épistémologique et structuration du milieu, in Artigue M. et al. (eds.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 250-257.
- Perrin Glorian M-J. (1993), Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans le cadre des classes dites "faibles" , *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 13, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp 5-118.
- Sarrazy B. (1996), *La sensibilité au contrat didactique*, Thèse, Université Bordeaux 2.

LES TPE COMME PROBLEME DIDACTIQUE

Yves Chevallard

IUFM d'Aix-Marseille

I. INTRODUCTION

Les *travaux personnels encadrés* ont été mis en place, à partir de la rentrée 2000, dans les classes de première des lycées d'enseignement général et technologique. La violence symbolique de leur imposition à une institution scolaire malmenée, et les conditions incertaines de leur mise en route, ne doivent pas masquer que cette innovation, dont la pérennité n'est aujourd'hui nullement assurée, constitue pourtant un analyseur de l'ordre didactique établi au lycée, où la séparation disciplinaire, qui gouverne sans faiblesse la transposition et le fonctionnement de l'énorme masse de connaissances diffusées par l'École, ne s'allège que pour laisser voir les tensions interdisciplinaires qu'elle peine à dissimuler.

Comment penser alors le surgissement des TPE dans la culture didactique scolaire et les effets qu'ils pourraient avoir sur l'École comme opérateur de diffusion de connaissances ? Les TPE ne seraient-ils, à l'instar de quelques autres dispositifs, qu'une simple verrue sur le visage boursoufflé d'un curriculum trop souvent livré au scalpel des chirurgiens des programmes ? Ou bien y aurait-il en eux, sans que quiconque les y ait mises, de plus profondes leçons à entendre ? Dans quels termes un tel enseignement peut-il se dire ? Et quel sort promet-il aux mathématiques, à ceux qui les enseignent, à ceux aussi qui en étudient la didactique ? Telles sont quelques-unes des questions auxquelles on se réfère brièvement dans ce qui suit.

II. QUE SONT LES TPE ?

Le projet officiel de mettre en place, dans les classes de première des séries générales (S, ES et L), des "Travaux personnels encadrés" (TPE) vise à créer *un type nouveau de systèmes didactiques scolaires*. Nous en présentons rapidement la conception officielle en suivant, pour faire court, la circulaire de rentrée publiée au BO n° 3 du 20 janvier 2000.

“ Les TPE, y lit-on d’entrée, représentent une innovation pédagogique forte de la réforme du lycée et un enjeu stratégique important, symbolique de toute une évolution des pratiques pédagogiques ”.

De quoi s’agit-il au juste ? Dans le dispositif des TPE, les élèves “ réaliseront une seule production en travail personnel encadré au cours de l’année de première”. Ils “ travailleront en autonomie, par groupes ou individuellement ”, en faisant porter leur effort “ sur un projet articulant des notions issues des programmes de deux disciplines dominantes de la série ”.

Quel doit être l’objet de ces travaux ? Selon la circulaire de rentrée, “ des thèmes seront sélectionnés par les professeurs et les documentalistes à partir de la liste nationale de thèmes² [...] pour que les professeurs des disciplines concernées puissent établir des propositions de sujets à présenter aux élèves à la rentrée”. Corrélativement, “ les élèves seront répartis dans différents groupes autour des sujets choisis sur les conseils des enseignants ”.

Selon quelles modalités les travaux se déroulent-ils alors ? Tout d’abord, “ un carnet de bord, tenu par chaque élève, permettra de mesurer la progression du travail ”. Ensuite, ce travail devra aboutir “ à une réalisation concrète qui fera l’objet d’une communication orale, lors de l’évaluation qui sera effectuée en fin d’année scolaire, à une date arrêtée par l’équipe pédagogique ”. Enfin, “ les résultats de cette évaluation des compétences développées par les TPE seront portés sur le livret scolaire ”.

De quels moyens ce nouveau dispositif de formation bénéficie-t-il ? Il est prévu que “ pour mettre en œuvre les TPE, 72 heures par division seront à répartir entre les professeurs concernés”. Au-delà, une véritable mobilisation doit être conduite dans les établissements “ afin d’assurer dans les meilleures conditions possibles une mise en œuvre rapide des TPE à partir de l’année 2000 en classe de première”. Dans cette perspective, indique la circulaire citée,

– “ il est souhaitable que les chefs d’établissement engagent dès cette année une réflexion et des échanges à l’intérieur de leur établissement sur ce nouveau dispositif pédagogique ” ;

² Pour la série S, cette liste comportait en 2000-2001 les thèmes suivants : “ Croissance ”, “ Eau ”, “ Images ”, “ Risques naturels et technologiques ”, “ Science et aliments ”, “ Temps, rythmes et périodes ”.

- “il est indispensable de prévoir dès à présent et dans chaque lycée les conditions qui permettent un accompagnement pratique et matériel répondant aux besoins des équipes pédagogiques, enseignants et documentalistes” ;
- “les aides-éducateurs [...] permettront, par leur présence, d’élargir l’accès aux salles spécialisées et aux salles de travail individualisé, éléments nécessaires au bon déroulement des TPE”.

La circulaire expose alors la panoplie des objectifs à atteindre “à partir d’un inventaire exhaustif des salles, des équipements, des matériels et des ressources documentaires” :

- “aménagement du CDI (espace de recherche documentaire et de consultation de documents sur tous supports, petites salles satellites pour le travail individualisé)” ;
- “salles et matériels dédiés aux sciences expérimentales ou aux disciplines artistiques” ;
- “création, sur le réseau interne à chaque établissement, d’un espace d’échanges destiné à faciliter le suivi des projets, le travail d’équipe, la publication des projets des élèves (qui pourront ensuite être mis en ligne sur le site de l’établissement)” ;
- “mise en réseau de l’établissement et connexion au réseau Internet” ;
- “modes d’organisation permettant un accès généralisé aux postes informatiques multimédias, connectés au réseau Internet” ;
- “possibilités données aux enseignants de consulter et de modifier à distance les ressources mises à la disposition des élèves sur le réseau, dans le cadre des TPE”.

Dans cet effort, les enseignants sont évidemment aux avant-postes – de concert avec les élèves et, bien sûr, avec leurs collègues documentalistes. “Si les TPE ne doivent pas être réduits à la simple constitution de dossiers thématiques, précise le texte cité, ils supposent néanmoins un travail préalable important de recherche documentaire”. Ce travail incombe aux enseignants “chargés de guider les élèves dans la définition et l’élaboration de leur projet”, aux élèves eux-mêmes, “qui auront à effectuer des recherches en autonomie et à savoir les utiliser avec pertinence”, enfin aux “documentalistes des CDI sollicités par les enseignants comme par les élèves”.

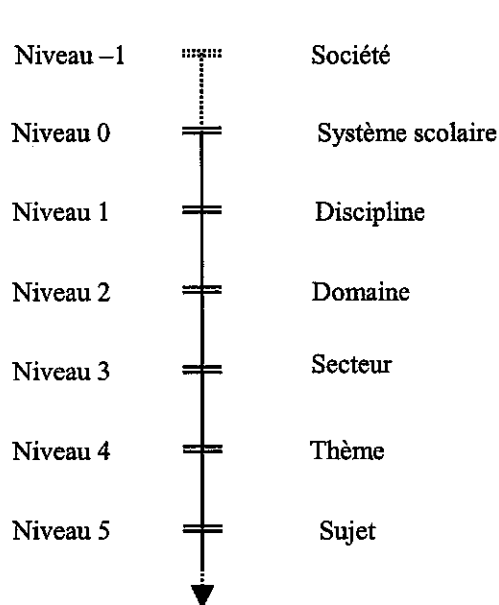
Il découle de là qu’il est “nécessaire de mettre à la disposition des équipes pédagogiques un réseau de ressources documentaires complétant les ressources des établissements qui doivent d’ores et déjà être recensées pour faciliter la mise en route des projets de travail.” À cet égard, plusieurs dispositions sont énoncées :

- “le CNDP et les CRDP constitueront des ressources méthodologiques et documentaires accessibles aux enseignants et aux documentalistes” ;

- “au niveau académique, des IA-IPR des disciplines concernées et des documentalistes seront invités par les recteurs à prendre l’attache des CRDP pour orienter la présentation des ressources documentaires relatives aux thèmes en fonction des programmes” ;
- “il est également nécessaire que les CRDP et les CDDP soient conviés dans les établissements pour faire connaître aux enseignants leurs compétences, leurs missions et leurs produits documentaires” ;
- “les ressources nationales seront mutualisées via le réseau Internet. Des ressources didactiques pourront également être mises en ligne sur les serveurs académiques sous la responsabilité des IA-IPR”.

III. LES TPE OU LA DEREGULATION

La didactique des mathématiques (DDM) peut être définie comme la *science de la diffusion des connaissances et des savoirs mathématiques dans les institutions de la société*. Il résulte de là en particulier que le territoire de la DDM dans l’institution scolaire inclut les classes de mathématiques, mais aussi de *physique*, de *chimie*, de *technologie*, de *biologie*, de *géologie*, de *géographie*, etc., et, bien sûr, *les TPE*. D’où la pertinence pour les didacticiens des mathématiques d’enquêter en tant que tels sur les TPE.



Pour étudier l’économie didactique des TPE, on introduit un outil fondamental – la hiérarchie des *niveaux de détermination* d’une *organisation didactique*, représentée sur le schéma ci-contre, et dont on ne donnera ici qu’un commentaire minimal :

– le niveau 0 est le niveau *pédagogique*, celui des conditions offertes et des contraintes imposées, dans le cadre du système scolaire existant, à l’étude, dans le type de systèmes didactiques considéré, d’une question Q quelle

qu’elle soit ;

– le niveau 1 (respectivement 2, 3, etc.) est le niveau des conditions offertes et des contraintes imposées à l’étude, dans le type de systèmes didactiques considéré, d’une question Q regardée

comme relevant du niveau correspondant de détermination (celui de la discipline, du domaine, du secteur, etc.) de l'organisation de savoir dont elle relève.

Une première remarque peut alors être faite à propos de l'“ implémentation ” dans le système scolaire³ du projet ministériel de TPE : cette implémentation engendre un mini-monde didactique – celui des TPE – dont la hiérarchie des niveaux est en fait à construire presque entièrement.

Devant cette situation, selon un très ancien *habitus*, les professeurs observés mettent en avant les deux niveaux qui, de manière réductrice mais effective, se sont historiquement imposés comme ceux de toute négociation entre l'intérieur et l'extérieur du système scolaire – le niveau 0, c'est-à-dire le niveau pédagogique, et le niveau 1, celui de la discipline (mathématiques, physique et chimie, biologie et géologie, etc.).

Dans ce contexte, le niveau pédagogique est présenté d'abord comme l'alpha et l'oméga de l'affaire : pendant plusieurs mois, celle-ci semble presque toute entière suspendue à un unique problème – celui de la surveillance des élèves⁴. À côté de cela, les enseignants découvrent, lors des stages de formation⁵, l'incroyable variété – d'un établissement à l'autre, voire d'une division à l'autre – de choix que l'on croyait uniques parce qu'ils étaient vécus comme naturels et allant de soi.

Au niveau 1, celui de la discipline, les professeurs ont avec un bel ensemble mis en avant la préservation de ce que l'histoire a constitué en emblème de leur discipline : ainsi de “ *l'expérience* ” dans le cas des sciences dites expérimentales, physique-chimie et biologie-géologie. Le cas des mathématiques présentait une variante intéressante : cette discipline scolaire ayant, depuis des décennies, oblitéré ses liens organiques avec les autres disciplines⁶, ses servants ont surtout eu à cœur de ne pas la voir retomber dans une dépendance épistémologique dont elle avait pu se croire entièrement libérée – l'accord se faisant alors sur la crainte d'être “ instrumentalisés ”.

³ On se réfère ici à la mise en place des TPE en série S, et plus précisément à ce qu'on a pu en observer dans le cadre de stages de formation où se sont côtoyés des professeurs des trois disciplines dominantes de la série S représentant un grand nombre de lycées de l'académie d'Aix-Marseille.

⁴ Dans la mesure où ces derniers sont amenés à circuler dans l'établissement, voire hors de l'établissement, pendant les heures de TPE.

⁵ Voir la note 2.

⁶ Voir Yves Chevallard, “ Les mathématiques et le monde : dépasser “l'horreur instrumentale” ”, *Quadrature*, n° 41, p. 25-40.

Aux niveaux plus profonds de détermination didactique, on notera un fait crucial : le mot d'ordre d'*autonomie* des élèves lancé par le ministère (les élèves “ travailleront en autonomie, par groupes ou individuellement ”) a eu des effets mal anticipés, conduisant en un premier temps à l'*anomie* des TPE et, corrélativement, à la prolifération *idionomique*⁷, chaque professeur tendant spontanément à élaborer ses propres règles dans sa relation aux élèves encadrés. Par contrecoup, ce phénomène ravageur a conduit les professeurs⁸ à redécouvrir l'exigence *synnomique*⁹, c'est-à-dire l'ardente obligation d'élaborer ensemble des règles partagées, pour corriger, entre autres choses,

- l'oubli de contraintes non dépassées de l'économie des systèmes didactiques, par exemple la nécessité du travail *hors classe*, pour l'élève comme pour le *professeur*,
- la reconduite subreptice de contraintes non idoines, telle l'imposition *a priori* de contenus de savoir disciplinaires à “ intégrer ” dans le produit du travail personnel encadré,
- l'absence de règles idoines, telle la distinction des rôles de *directeur d'étude* et de *consultant expert*¹⁰.

IV. LA DIFFUSION SIGNIFIANTE DES CONNAISSANCES

L'ensemble de faits précédent conduit à reprendre l'ensemble du projet à la lumière de l'approche anthropologique en DDM, dont on rappelle ici certaines notions de base.

Les TPE apparaissent formellement très proches du schéma fondamental de l'étude, par lequel on peut définir la *diffusion signifiante des connaissances*. En ce sens, donc, les TPE peuvent être regardés comme un retour aux sources de l'École, considérée dans sa mission d'instruction publique¹¹.

La réalisation concrète du schéma fondamental de l'étude suppose en effet d'abord une *question* Q à étudier, une équipe X qui *étudie* Q , une équipe Y qui *dirige* l'étude de Q par X : soit au total un système *didactique* $S(X; Y; Q)$. Le fonctionnement de $S(X; Y; Q)$ engendre alors *une réponse* R , fragment d'une organisation de savoir en construction : $S(X; Y; Q) \rightsquigarrow R$.

⁷ Du grec *idios*, privé, particulier, et *nomos*, loi.

⁸ Nous ne savons rien, de ce point de vue, sur ce qu'il en est du côté des élèves.

⁹ Du grec *sun*, avec.

¹⁰ On se réfère ici à un schéma rarement observé sous une forme spontanée : l'équipe d'élèves engagée dans un TPE est dirigée par un *unique* professeur, possédant une affiliation disciplinaire déterminée (mathématiques, physique, etc.), tandis que d'autres professeurs, affiliés à d'autres disciplines, sont consultés régulièrement afin d'exercer un contrôle scientifique sur les aspects du TPE qui relèvent de leurs compétences ; on peut même envisager qu'un professeur directeur d'étude d'une équipe de TPE sollicite à titre de consultant un collègue de la *même* discipline – par exemple sur des questions qu'il estimerait mal connaître.

La production de la réponse R suppose des *savoirs*, anciens et nouveaux, et, plus généralement, des *œuvres*, $R_1, \dots, R_n$, qui constituent un *milieu* pour la production de R (selon le schéma : $S(X; Y; Q)_{|R_1, R_2, \dots, R_n} \rightarrow R$), et que cette production (re)motive, c'est-à-dire qui trouvent là une (nouvelle) *raison d'être*, tout comme la réponse R elle-même.

On dira en effet d'une œuvre O qu'elle est *motivée dans une institution I* si elle y apparaît comme *permettant de répondre* à une ou plusieurs questions, ou comme *réponse* à une question Q , c'est-à-dire s'il existe $X, Y, Q, R_1, \dots, R_n, R$ tels que $S(X; Y; Q)_{|R_1, R_2, \dots, R_n} \rightarrow R$, avec $O \in \{ R_1, \dots, R_n, R \}$.

De ce point de vue, on peut espérer que les TPE participent à un mouvement aujourd'hui crucial de (re)motivation des connaissances et savoirs diffusés par l'École. On va voir pourtant que cette espérance se heurte à des obstacles propres à la culture didactique scolaire telle que l'histoire l'a construite.

V. LE RECOPIAGE CULTUREL

L'École, on l'a suggéré, est une institution qui doit permettre aux jeunes générations d'entrer dans la société, en "entrant" dans ses *questions* et dans ses *œuvres*, en *étudiant* un large choix de ses questions, et en *motivait* ainsi un large choix de ses œuvres, c'est-à-dire en faisant apparaître de telles œuvres comme engendrées, directement ou indirectement, par la production de réponses à un certain choix de questions.

Mais ce schéma est *peu stable* : la plupart des institutions scolaires vont, à la longue, enseigner directement *les réponses* (qui cessent alors d'apparaître comme telles), en *oubliant les questions* qui les engendreraient. L'École va ainsi être tentée de *recopier* les œuvres de la culture de manière immotivée, ou plutôt uniquement motivée par leur inscription dans la culture.

S'il est vrai que cette diffusion "insignifiante" des œuvres par l'École n'interdit pas absolument leur appropriation signifiante par *quelques-uns* des sujets de l'École, il n'en reste pas moins que l'École, ou du moins toute une partie de l'École, tend aujourd'hui à apparaître, globalement, comme une institution de recopiage culturel, propédeutique à l'épistémologie culturellement dominante dont les jeux télévisés offrent souvent une mise en œuvre à peine caricaturale.

¹¹ Nombre d'acteurs et d'observateurs, identifiant l'étude aux pratiques scolaires existantes, ont pu conclure, à l'inverse, que les TPE étaient le commencement de la fin d'une certaine École : la chose n'est pas contradictoire avec l'affirmation faite ici.

Dans le cas des TPE, la tentation du recopiage culturel est sensible dès les textes officiels, qui, en opposant à cette tendance lourde de l'évolution scolaire la quiète distinction du *thème*, du *sujet* et de la *problématique*, offrent aux blandices de la culture – motivante parce qu'immotivée – un trop fragile barrage. De cela témoignent superlativement la liste des *sujets* proposés en tel lycée (voir l'encadré), où se montre sans fard la laborieuse volonté de s'enfermer dans le circuit clos du recopiage culturel, sans qu'aucune question ne soit placée au principe de la quête de culture que les TPE devraient inspirer.

Lycée X***

TPE - Série S

Thème : *Temps, rythmes et périodes*. Sujets proposés :

– *Du sablier à l'horloge à quartz* : le repérage du temps et la mesure des durées.

Principe des horloges. Réalisation d'un signal périodique électrique

– *La flèche du temps* : l'écoulement du temps. La machine à remonter le temps. La réversibilité et l'irréversibilité des transformations physiques et chimiques. Chutes des objets, réactions naturelles. Illustration vidéo de l'irréversibilité

– *La propagation des ondes* : dans le domaine des sons et des ondes de déformation des liquides. Dégager l'expression du principe de propagation. Montrer expérimentalement la possibilité d'ondes dites stationnaires. Envisager et rechercher dans le domaine des sons leur utilisation.

– *Les sons musicaux, la gamme* : donner une relation entre les grandeurs physiques (périodes, fréquences, intensité) et les grandeurs musicales (ton, gamme...). Suite géométrique des tons à l'octave.

– *Datation par éléments radioactifs* : principe de la décroissance radioactive. Période radioactive. Applications.

– ...

Par contraste, pour être fidèle au principe de la diffusion signifiante des œuvres, il convient au contraire que le sujet de l'étude se présente comme une question *Q*, *naïve* tant qu'on

voudra, à laquelle on n'hésite pas à imposer la forme interrogative, et que l'on *étudiera* en vue d'y apporter au moins des *éléments de réponse*.

Agissant comme élève *in partibus*, l'auteur de ces lignes s'est ainsi soumis à l'épreuve de l'étude de trois questions formulées, elles, par des élèves bien réels de Première S :

- le premier sujet, relatif à la peste¹², n'était pas, par exemple, *La peste noire au Moyen Âge*, ou encore *La peste de 1720 à Marseille*, "sujets" qui auraient fait verser presque imparablement du côté du recopiage culturel, mais a pris la forme d'une question toute simple : " *Comment se fait-il qu'on n'attrape plus la peste aujourd'hui ?* " ;
- sur le même modèle, le deuxième sujet, qui avait trait aux "risques du nucléaire civil", s'énonçait ainsi : " *Pourquoi a-t-on fermé Tchernobyl ?* " ;
- le troisième sujet, enfin, portait sur les comètes et astéroïdes et tenait dans cette question redoutable : " *Sommes-nous à l'abri d'un choc céleste ?* " .

La formulation interrogative ne saurait prévenir à elle seule le risque de dérive vers la démotivation. De fait, une telle dérive a pu s'abriter derrière une métaphore souvent entendue selon laquelle, au cours d'un TPE, la question de départ "évoluerait", cette "évolution" masquant en vérité la substitution subreptice, à la *question Q* posée initialement, de *réponses R'*, *R''*, etc., trouvées toutes faites dans les répertoires culturels, sans que les questions correspondantes, *Q'*, *Q''*, etc., aient été envisagées. À cette métaphore intéressée, il convient donc d'en opposer une autre : ce n'est pas la question initiale *Q* qui évolue, c'est *l'étude de cette question* – et non d'une autre – *qui, en se développant, engendre d'autres questions Q₁, Q₂, etc.*, en ce sens que la production de la réponse *R* visée apparaît comme supposant l'étude préalable, à titre de moyens (et non de fin), des questions *Q₁, Q₂, etc.*

VI. ÉTUDIER UNE QUESTION

L'étude d'une question *Q* peut être modélisée comme un entrelacement de cycles à *cinq temps* : *observation* de réponses *R₀* déposées dans les œuvres¹³ ; *analyse*, expérimentale et théorique, des réponses *R₀* ; *évaluation* de ces mêmes réponses *R₀* ; *développement* d'une réponse *R* ; enfin *défense & illustration* de la réponse *R* ainsi produite.

De manière optimale, ces temps de l'étude devraient être menés à bien dans un espace de travail structuré par des tensions bipolaires que l'on nommera, pour cela, des *dialectiques*,

¹² Les trois sujets indiqués relèvent tous d'un même thème, celui des "risques naturels et technologiques".

¹³ La notation *R₀* (lue "r poinçon") manifeste le fait que ces réponses participent d'œuvres institutionnellement "estampillées".

et que l'on décrit succinctement dans ce qui suit en faisant ressortir en quoi, dans la culture didactique scolaire actuelle, elles apparaissent encore largement *bloquées*.

La première dialectique est celle *du sujet et du hors-sujet* : contre le postulat scolaire du plus court chemin, qui ne conduit jamais qu'à un but déterminé à l'avance, elle pousse, dans une recherche en principe *ouverte*, à risquer le hors-sujet tant en matière de recherche documentaire par exemple¹⁴ que dans le choix des questions engendrées dont on entamera l'étude.

La deuxième dialectique est celle *du parachutiste et du truffier* : contre l'habitus scolaire de la rareté documentaire¹⁵, elle porte à "ratissier" de *vastes zones*, où l'on sait *a priori* qu'on ne trouvera pas grand-chose, mais où pourra advenir *de l'inattendu*, et où l'on apprendra à repérer les rares "pépites", souvent peu visibles, qui feront progresser la recherche.

La troisième dialectique est celle *des boîtes noires et des boîtes claires* : contre le primat de la connaissance disponible et la propension à clarifier les boîtes... claires enchâssées dans les savoirs enseignés, elle invite à donner le primat à la connaissance *pertinente*, fût-elle impertinente envers les savoirs enseignés, à limiter au nécessaire la clarification (les boîtes "claires" sont toujours des boîtes *grises*), à prendre le risque, donc, de clarifier des boîtes noires ordinairement abandonnées aux ténèbres extérieures, et d'obscurcir des boîtes claires dans le curriculum familial, enfin à traquer les boîtes "invisibles" parce que "transparentes", pour *déconstruire les évidences* de la culture de l'institution d'accueil chaque fois que c'est utile.

La quatrième dialectique est celle *de la conjecture et de la preuve* : contre la mise à l'épreuve réglée à l'avance¹⁶ d'assertions réputées sûres en vertu surtout de l'autorité de l'institution, elle engage à soumettre les assertions obtenues à la critique des diverses dialectiques et à évaluer le degré d'incertitude d'une assertion donnée.

¹⁴ En opposition avec l'un des principes apparemment les mieux établis – et pour cause ! – de la profession de documentaliste.

¹⁵ Même dans les disciplines qui pratiquent "abondamment" le travail documentaire.

¹⁶ Par exemple par des "expériences" parfois ambiguës, telles qu'il arrive aux sciences "expérimentales" d'en pratiquer.

La cinquième dialectique est celle *de l'excription*¹⁷ *et de l'inscription* : contre le recopiage de réponses R_0 , corrélatif d'une écriture déterministe, contre aussi le dogme du "plan" préalable à un écrit pré-inscrit, elle convie à entrer dans la dialectique de la lecture excriptrice de réponses R_0 et de l'écriture inscriptrice d'une réponse R , en multipliant les niveaux d'écrit (carnet de bord, notes de synthèse, le glossaire, production finale).

La sixième dialectique est celle *de la diffusion et de la réception* : contre la tentation de ne pas défendre sa réponse R , supposée par avance connue et reconnue, contre l'opportunisme à l'endroit de R afin de complaire à qui l'on s'adresse, elle provoque à défendre R sans infidélité mais dans l'attention à ce qu'autrui en peut recevoir.

La création d'un synnomie didactique adéquate en matière de TPE se pose aux différents niveaux de détermination. En particulier, elle ne saurait qu'être contemporaine de la création d'une culture scolaire amicale aux dialectiques de l'étude – ce qui, en soit, est déjà un très vaste programme.

VII. MATHEMATIQUES CODISCIPLINAIRES

L'un des principaux obstacles au projet de TPE demeure cependant la faiblesse des liens entre disciplines au sein de l'École. Les œuvres $R_1, \dots, R_n$ que mobilise la production d'une réponse R , c'est-à-dire les œuvres telles que $S(X; Y; Q)_{R_1, R_2, \dots, R_n} \rightsquigarrow R$, sont généralement *hétérogènes*. Cette *hétérogenèse* de R n'est, en général, nullement *monodisciplinaire*. Contre la *séparation* disciplinaire, contre les *tensions* interdisciplinaires, qui sont l'ordinaire du régime épistémologique scolaire, la production de R suppose en général une *coopération disciplinaire*, c'est-à-dire une pratique d'étude et de recherche véritablement *codisciplinaire*.

Comment se pose alors, aujourd'hui, le problème de la présence des mathématiques dans les TPE, et plus généralement dans la production d'une réponse R à une question Q ?

On peut penser qu'il y a là, en vérité, une chance à saisir : contre le silence mathématique de nombre de réponses R_0 pourtant produites avec des mathématiques, les mathématiques ont à *(re)conquérir leur place* dans la production des réponses R .

¹⁷ Sur cette notion, voir ma communication au Séminaire national du 18 octobre 1998.

À titre d'exemples, on pourrait ainsi montrer que, dans l'étude de la question *Comment se fait-il qu'on n'attrape plus la peste aujourd'hui ?*, le modèle mathématique traditionnel (1927), à savoir

$$\begin{cases} x' = -\beta xy \\ y' = \beta xy - \gamma y \\ z' = \gamma y \\ x(0) = x_0 > 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

(où $x(t)$ est l'effectif des *susceptibles*, $y(t)$ celui des *contagieux*, et $z(t)$ celui des *immunisés*), à la fois conforte et expose la *pauvreté* de la réponse traditionnelle quant à la diffusion de la peste (et d'autres "épidémies").

De manière analogue, à propos de la question *Pourquoi a-t-on fermé Tchernobyl ?*, on gagnera à observer que le modèle mathématique de la désintégration radioactive, bien diffusé, et formellement "optimiste", gêne la diffusion d'un modèle exponentiel moins agréable, qui donne le nombre n de molécules *non* endommagées lorsqu'une cellule est soumise à une dose D de radiations ionisantes : $n = n_0 e^{-kD}$, avec, bien sûr, $k > 0$.

Quant à la question *Sommes-nous à l'abri d'un choc céleste ?*, notons simplement que, selon tel auteur non dépourvu *a priori* de compétences¹⁸, "statistically, the chance of any one person killed by a major comet impact in any one year may be only about 1 in 2 million, but that still means that on average 2,700 people are killed by large comets each year, 390 in the developed world alone". C'est là faire un usage tout à fait explicite d'un modèle mathématique qui, pour une diffusion sociale bien contrôlée des connaissances, demanderait sans doute à être interrogé et sur ses tenants et sur ses aboutissants.

¹⁸ John Gribbin, *The Little Book of Science*, Penguin Books, 1999, p. 92-93.

**RECONNAITRE INSTITUTIONNELLEMENT CERTAINES CONNAISSANCES SUR LE
FONCTIONNEMENT MATHEMATIQUE COMME DES ENJEUX D'APPRENTISSAGE POUR
LES ELEVES ?**

Corine Castela

Équipe Didirem (Paris) et IUFM de Haute-Normandie

L'objectif de cet exposé n'est pas de répondre à la question posée en titre – dans l'état actuel de mon travail je ne le pourrai pas – mais d'en préciser le sens et d'évoquer très succinctement dans quelles directions je me propose de travailler au plan empirique pour étudier le problème didactique que j'aurai défini.

I. PRESENTATION DU PROJET DE RECHERCHE

1. Les origines de la recherche

Le travail que j'ai entrepris s'inscrit dans le cadre des recherches sur la résolution de problèmes en mathématiques. Plusieurs observations réalisées à des niveaux différents d'enseignement m'ont conduite à considérer que la question de l'acquisition des connaissances en jeu dans la résolution de problèmes constitue encore, malgré les travaux déjà réalisés, une question vive pour la didactique des maths.

De quelles observations s'agit-il ? Quelles questions soulèvent-elles ?

* Premier domaine d'observation : la préparation à la deuxième épreuve orale du Capes, épreuve dite sur dossier, officiellement considérée comme ayant un caractère professionnel. Rappelons qu'il s'agit pour le candidat de constituer une liste d'exercices de niveau Enseignement Secondaire illustrant un thème donné puis d'exposer au jury les motivations du choix effectué. Sauf exceptions très rares, les thèmes sont centrés sur un type de problèmes, éventuellement croisé avec un concept considéré dans sa dimension outil. De nombreux formateurs ont, je pense, été confrontés comme moi aux difficultés des étudiants

face à cette épreuve, tout particulièrement au niveau de l'explicitation des motivations du choix. La nature de cette épreuve comme les observations évoquées rapidement ici soulèvent plusieurs questions dont certaines sont dans la perspective de la réforme du Capes, tout à fait d'actualité :

A quelles attentes de l'institution « Education Nationale » cette épreuve correspond-elle ? Quelles sont les connaissances qui y sont en jeu ? Pourquoi sont-elles, au moins implicitement, considérées comme nécessaires pour les enseignants ? Pourquoi font-elles défaut à une proportion élevée d'étudiants licenciés ?

* Le deuxième domaine d'observation que j'aborderai s'inscrit toujours dans le cadre de la préparation au Capes¹⁹ ; dans un module centré sur les savoirs de géométrie figurant au programme des lycées, je constate depuis des années que, malgré une révision préalable des savoirs en question, les étudiants éprouvent de très grandes difficultés à les utiliser de manière autonome dans des problèmes non guidés dont on trouve l'équivalent dans certaines questions des problèmes de l'écrit du Capes centrés sur la géométrie (Castela et Eberhard 1999).

En quels termes analyser cet écart entre la connaissance du savoir savant en jeu et sa mise en fonctionnement dans un problème « brut » ? Comment préparer les étudiants à traiter de telles questions dans le contexte d'une épreuve écrite de concours ?

* On pourrait penser que ce questionnement est tout à fait spécifique de l'enseignement supérieur. Or, en tant que chercheur (mais de manière encore trop peu systématique pour prétendre en tirer des résultats), j'ai analysé un certain nombre d'énoncés de problèmes ou d'exercices à l'aide de la grille d'analyse élaborée par Aline Robert, grille centrée sur les différents niveaux de mise en fonctionnement d'une connaissance (voir Pian 1999 p. 9 ; Robert 1997 p.165-166) ; j'ai relevé le fait suivant qui ne devrait étonner personne mais dont la portée est peut-être sous-estimée : dans un énoncé de niveau n, centré sur un objet sensible, apparaissent des sous-tâches non guidées nécessitant que l'élève mobilise seul des connaissances portant sur des objets d'enseignement des années précédentes supposés non sensibles (avec la terminologie d'Aline Robert, on reconnaît la notion de connaissances disponibles, ce fait pourrait également être formulé en utilisant les notions de milieu et de

¹⁹ Capes : concours de recrutement des professeurs intervenant dans le second degré.

topos de la théorie anthropologique). Or, c'est une expérience largement partagée, me semble-t-il, par les enseignants de lycée, que, pour de nombreux élèves, le passage à la mise en fonctionnement autonome des connaissances soit un cap difficile à franchir.

Est-il possible d'apporter sur ce point une aide, sinon aux élèves vraiment faibles, du moins à une partie des élèves fragiles ? Par quels dispositifs ?

Ces observations, ces questions m'ont conduite à formuler un certain nombre d'interprétations, de réponses, qui à la fois motivent le projet de recherche et orientent la définition de la problématique. Quelles sont-elles ?

- En premier lieu, j'interprète les difficultés rencontrées par les élèves et les étudiants dans la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques en principe non sensibles en termes de manque, manque de certaines connaissances « parallèles » qui ne relèvent pas toutes, loin de là, du savoir savant.

- Dans les années antérieures, ces connaissances « parallèles » n'ont majoritairement pas été objets d'enseignement ; néanmoins, les exercices et problèmes proposés par l'enseignant ainsi que (surtout dans l'enseignement supérieur) les démonstrations du cours ont permis à certains élèves de construire certaines de ces connaissances.

- Les connaissances que ces élèves sont susceptibles de construire sont très dépendantes du corpus des problèmes choisis par l'enseignant. L'absence d'explicitation institutionnelle de ces enjeux d'apprentissage peut être source d'une grande variabilité d'un enseignant à l'autre, d'une classe à l'autre ; ainsi peuvent s'ouvrir des vides, des discontinuités au sein de ce que l'on peut considérer comme un curriculum caché.

- Par ailleurs, d'autres élèves ignorent la fonction cachée d'apprentissage des tâches mathématiques auxquelles ils sont confrontés ou en perçoivent mal le contenu et échouent à y satisfaire par leur travail personnel (on rejoint ici l'idée avancée par plusieurs sociologues d'une inégale efficacité du travail personnel des lycéens, avec des différenciations selon l'origine sociale, voir Bautier 1995, Barrère 1997).

L'hypothèse selon laquelle il existe un curriculum caché et cependant nécessaire au déroulement du curriculum affiché, discontinu, très instable suivant les enseignants et ignoré d'une partie des élèves, me conduit à vouloir étudier la possibilité de faire émerger en tant qu'enjeu d'apprentissage institutionnellement reconnu une partie au moins des connaissances en jeu.

2. La problématique de la recherche

Précisons d'abord quelques éléments qui définissent le cadrage général de la réflexion. Je considérerai l'enseignement de mathématiques dans sa dimension « formation à une pratique, la résolution de problèmes ». Il ne s'agit pas bien entendu d'adopter la perspective d'une formation ciblée qui se contenterait de chercher à rendre les élèves systématiquement capables de résoudre certaines catégories précises de problèmes pour lesquelles ils devraient posséder des méthodes de résolution assurément efficaces. Une telle approche aurait pour conséquence de rendre très difficile, sinon impossible, l'usage didactique que nous attribuons à la résolution de problèmes dans la construction des connaissances. Celui-ci nécessite que soit préservée la dimension créative, la part d'incertitude de la recherche d'un problème, j'y suis attentive. Mes hypothèses sont les suivantes : **à partir du lycée au moins**, premièrement certaines des connaissances que je vais définir dans la suite doivent être acquises pour que dans les problèmes posés à un niveau donné la partie de création soit raisonnablement accessible et deuxièmement la possession de ces connaissances ne réduit pas à néant la dimension recherche des problèmes qu'il est possible de poser au niveau considéré.

Le point de vue « Formation à une pratique » me conduit à m'intéresser à des connaissances spécifiques, qui sont prises en compte dans plusieurs domaines de recherche sous une dénomination assez variable, connaissances **opérationnelles** (ergonomie cognitive, voir par exemple le numéro 123 d'*Education permanente*, 1995-2) ou **pragmatiques** (par ex, F.Conne 1992). Ces connaissances sont **orientées vers l'action**, leur critère de validation est **l'efficacité** en situation (et non l'effectivité, assurance de réussite en un nombre fini de pas), elles vivent en général sous le régime du **souvent**. Elles se différencient donc nettement du savoir savant mathématique, validé sur un critère de **vérité** établi de manière interne, placé sous le régime du **toujours/jamais**.

Est-il possible de faire vivre ces deux systèmes de connaissances dans la même institution d'enseignement sans que l'un pervertisse l'autre ? Cette question est un élément central de la problématique que je définis ici, elle constitue certainement un point de débat dans la communauté des didacticiens français des mathématiques : chacun connaît par exemple la position de G.Brousseau sur ce sujet pour les connaissances heuristiques : « Les indications de type heuristique seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes pour l'autre »

(Brousseau 1986, p.61). J'expliquerai un peu plus loin (III.1.), quand j'aurai défini le domaine particulier de connaissances en jeu, sur quelles bases je pense possible d'instaurer, à partir d'un certain niveau d'enseignement au moins, un contrat didactique spécifique des connaissances opérationnelles. Rappelons dès maintenant que les expérimentations menées par A.Schoenfeld aux Etats Unis (1985), I.Tenaud en France (1991) plaident en faveur de cette hypothèse.

Dans ce cadre général, la problématique de la recherche est la suivante :

A. Définir un domaine de connaissances

- qui soient susceptibles d'outiller efficacement la résolution de problèmes et en particulier de favoriser la mise en fonctionnement des connaissances strictement mathématiques,
et

- qui vérifient certaines conditions a priori favorables à l'émergence officielle des connaissances en question en tant qu'enjeux d'apprentissage au sein de l'enseignement de mathématiques, ce que je traduirai de la façon suivante :

* **du point de vue cognitif** : l'objet de ces connaissances, du fait de son mode d'existence, est accessible au sujet cognitif selon des voies indisponibles lorsque l'objet est une pratique.

* **du point de vue institutionnel** : ce domaine de connaissances est explicitement présent dans certaines institutions de la recherche mathématique et peut donc être reconnu par la communauté des mathématiciens comme dotées d'une légitimité.

Ce domaine de connaissances étant défini, il s'agit alors

B. d'étudier sous quelles formes il vit dans le système d'enseignement post-obligatoire actuel,

C. d'expérimenter des dispositifs faisant officiellement apparaître une partie de ces connaissances en tant qu'enjeu d'apprentissage pour les élèves dans le cadre de l'enseignement de mathématique ou pour le moins dans des systèmes didactiques institutionnels relevant de l'Education Nationale ; l'effet recherché dans ces dispositifs est l'amélioration des capacités des élèves à mobiliser de manière autonome leurs connaissances en situation de résolution de problèmes.

II. ANALYSE DU DOMAINE DE CONNAISSANCES CONSIDERE

1. Une première définition, exemples et contre-exemples

Puisqu'il s'agit de former à la résolution de problèmes en mathématiques, je m'intéresserai aux connaissances qui ont pour objet cette pratique, en me restreignant à celles qui peuvent être construites à partir des produits finis de la pratique considérée, autrement dit, je considérerai en première approximation comme objets de connaissance les problèmes résolus et les textes qui expriment une réponse considérée comme mathématiquement valide aux questions énoncées dans le problème, ce que j'appellerai des textes de solutions (le terme « solution » étant distingué de « résolution » réservé à la pratique de recherche d'un problème). Ces solutions sont acceptées dans une institution donnée (recherche, classe d'un niveau donné) et dépendent des savoirs reconnus dans cette institution. Les connaissances susceptibles d'être construites à partir de ces textes sont donc directement conditionnés par l'environnement institutionnel. Les exemples présentés ci-dessous illustreront cette remarque. Pourquoi focaliser la réflexion sur ces connaissances précisément ? Je donnerai des éléments de réponse à cette question dans la suite, précisons dès maintenant qu'il s'agit de prendre en compte la deuxième condition énoncée dans le point A ci-dessus, sur les plans cognitif et institutionnel.

a) Exemples des connaissances considérées :

- Fonction « outil » d'un objet mathématique

Il s'agit là d'une catégorie bien connue de connaissances dont les exemples sont nombreux au sein même du texte du savoir savant, je passerai donc rapidement :

* Grâce à la multiplicité de ses expressions ainsi qu'à sa bilinéarité, le produit scalaire est un outil possible pour le calcul de longueurs et d'angles, pour démontrer une orthogonalité...

- Techniques (méthodes)

* Pour démontrer une égalité $A = B$, on peut partir de A et arriver à B, partir de B et arriver à A, transformer à la fois A et B en un même C, montrer que la différence est inférieure à tout nombre réel positif...

* Pour calculer une longueur, on peut dans certains cas utiliser le théorème de Thalès (si parmi les objets du problème figurent des droites parallèles), le théorème de Pythagore (si on dispose d'hypothèses d'orthogonalité)... Ces connaissances peuvent

amener à mobiliser le théorème de Thalès ou de Pythagore, à extraire une sous-figure de la configuration, voire à introduire des éléments nouveaux.

* Pour démontrer que trois droites sont concourantes, on peut introduire le point d'intersection de deux d'entre elles et montrer qu'il appartient à la troisième ou montrer qu'un point appartient aux trois droites ou ... Ceci peut conduire, pour le concours des hauteurs d'un triangle par exemple, à substituer à un problème de concours un problème d'alignement puis d'orthogonalité et à mobiliser le produit scalaire.

Mais aussi

* Dans le théorème de Ménélaüs, une solution utilise la partie directe pour démontrer la réciproque, cette démarche fonctionne car il y a unicité du point divisant un segment dans un rapport donné.

Par cet exemple, je tiens à marquer l'importance de connaissances construites à partir d'un exemple précis, que l'on va dans un premier temps hésiter à retenir comme techniques mais qui semblent trouver une place non négligeable chez de très bons étudiants de Mathématiques Spéciales sous la dénomination « **Astuces** »²⁰ : une astuce est une façon de faire dont la généralité n'est pas établie mais qui s'est révélée au moins une fois suffisamment habile pour qu'on ait envie de la retenir, au moins provisoirement, une astuce est un espoir de technique.

Donnons maintenant quelques exemples de connaissances que je considère comme exclues du domaine auquel je veux restreindre la recherche.

b) Contre-exemples

Voilà quelques contre-exemples :

* Dans un problème de construction géométrique, pour construire une figure d'étude dans une phase d'analyse, on peut modifier l'ordre d'introduction des objets imposé par le problème.

* Pour établir une conjecture, on peut regarder des cas particuliers, des cas limites.

* Pour repérer une erreur dans le traitement d'une équation, on peut vérifier si le nombre que l'on a trouvé satisfait à l'équation posée.

* Pendant la recherche d'un problème, il est préférable de s'arrêter régulièrement pour voir l'état d'avancement du travail ; si on est bloqué, on peut faire le bilan des hypothèses déjà utilisées.

Comme on le voit, ces contre-exemples sont des connaissances heuristiques, elles concernent le déroulement de la résolution, l'activité du chercheur, il n'est pas possible de les construire à partir de la seule solution écrite, **sauf si la façon de trouver est aussi la façon de prouver** comme c'est par exemple le cas de la phase d'analyse dans le raisonnement par analyse-synthèse dans le cas où il s'agit de trouver toutes les solutions d'un problème de construction.

D'autres connaissances ne relèvent pas du domaine envisagé ici, citons : les connaissances spatiales étudiées par M-H Salin et R. Berthelot (1992), les connaissances en jeu dans l'énumération (J.Briand,1993), dans le raisonnement (Pilar Orus Baguena, 1992) ; par contre, pour reprendre le travail de J.Briand, « dans un problème de dénombrement, représenter bijectivement l'ensemble à dénombrer par un ensemble plus facile à compter », est une connaissance sur les solutions de problèmes de dénombrement, c'est la base de la démarche de modélisation par un univers qui apparaît explicitement à partir d'un certain niveau.

2. Les spécificités de l'accès aux textes de solutions. Deuxième définition du domaine de connaissances : les connaissances sur le fonctionnement mathématique.

Venons maintenant aux raisons qui président au choix de restreindre la recherche aux connaissances concernant les problèmes et les textes de leurs solutions. La première réside dans l'hypothèse suivante : ces connaissances vivent officiellement dans certains dispositifs au sein de la communauté des mathématiciens et jouent un rôle dans le développement des mathématiques, ce qui peut conférer une certaine légitimité à leur prise en compte dans l'enseignement. Je ne développerai pas ce point dans le cadre de cet exposé (voir Castela 2000 pour plus de précisions), me contentant (avec beaucoup de légèreté, je le reconnais) d'invoquer pour appuyer ma position les développements qu'Y.Chevallard consacre à la notion de praxéologies mathématiques (voir par exemple les cours d'Y.Chevallard aux écoles d'été de 1995 et 2001).

La seconde raison se situe au plan cognitif et concerne la construction des connaissances considérées dont la spécificité, par rapport aux connaissances sur la pratique en général, tient au mode d'existence écrit des objets en jeu. Je vais m'intéresser aux ressources

²⁰ Cette allusion réfère à un travail que j'ai consacré aux objets du travail personnel en mathématiques dans l'enseignement post-baccalauréat (classes préparatoires, université) à paraître dans les cahiers de Didirem.

dont dispose un sujet qui veut connaître un texte de solution, sujet qui peut occuper deux positions, chercheur-rédacteur ou lecteur [une troisième posture est éventuellement possible : rédacteur seul], par comparaison aux deux postures possibles par rapport à une pratique, acteur ou observateur. Je m'appuie ici sur les analyses que Raymond Duval (1998) a consacrées aux modes d'expression écrite et orale (je transfère aux pratiques les éléments appliqués au mode d'expression orale, il est clair que dans le cas de la résolution de problèmes, ce transfert ne conserve pas l'intégralité des propriétés en question du fait de la forte dimension écrite de l'activité mathématique).

La première de ces facilités de connaissance est liée à la propriété suivante : un écrit est à chaque instant présent dans son intégralité (**simultanéité** qui s'oppose à la **séquentialité**), ceci permet à qui veut le connaître tous les arrêts, tous les retours en arrière et tous les délais nécessaires à la réflexion (**intermittence** : possibilité de différer l'appréhension de ce qui suit, opposé à la **fluence** du discours oral). L'acteur ou l'observateur d'une pratique ne dispose pas de ces ressources puisqu'une partie au moins des actes accomplis s'évanouit à mesure que l'action progresse. Remarquons cependant que dans le cas de la résolution de problèmes, la fluence est partielle : pendant la résolution, les traces écrites sont nombreuses et essentielles puisque opératoires, elles permettent à celui qui cherche une certaine auto-interaction avec ses actes, avec ses pensées objectivées par l'écrit. Il s'agit là d'un élément particulièrement favorable au contrôle et à la régulation de l'action.

Quoiqu'il en soit, la simultanéité de l'écrit ouvre des possibilités qui me paraissent propices à la construction de connaissances, ces facilités sont disponibles tant aux lecteurs qu'à l'auteur de la solution. Ceci ne veut pas dire que les deux positions sont équivalentes. Selon le point de vue adopté en didactique sur l'apprentissage, l'inventeur d'une solution est dans une position a priori plus favorable puisqu'il a lui-même dans le cours de la résolution pris les initiatives efficaces, j'ajouterai que le travail de rédaction finale est pour lui une occasion privilégiée de nouer un rapport réflexif avec ses propres créations.

Les caractéristiques que je viens de rappeler s'appliquent à l'ensemble des écrits, ce n'est pas le cas des éléments que je vais aborder maintenant lesquels sont plus spécifiques des textes mathématiques, ils offrent au lecteur un deuxième niveau de ressources favorables à l'étude. Je les résumerai de la façon suivante : **effacement de l'auteur, interaction directe du lecteur avec le monde mathématique.**

Je m'explique : lorsqu'il écrit un texte de solution, l'auteur s'efforce de supprimer toute référence personnelle c'est-à-dire qu'il s'applique à délivrer au public cible un contenu précis que les lecteurs pourront déterminer en étudiant le texte à partir des seules connaissances

mathématiques qu'ils sont supposés posséder, sans recourir à une quelconque connaissance de l'auteur lui-même (ceci n'est pas nécessairement vrai pour les textes d'élèves ni pour les travaux de chercheurs réputés, du moins dans les premiers niveaux de la communication entre mathématiciens). Le lecteur d'une solution n'est donc pas confronté comme l'est l'observateur d'une pratique à la **médiation d'autrui**, avec l'inévitable **opacité** de l'objet étudié qui en résulte²¹. En mathématiques, il l'est d'autant moins que contrairement à d'autres textes scientifiques, un texte de solution non seulement évoque le réel de référence mais en fait il le convoque, jeu de mots qu'il faut comprendre dans le sens suivant : le lecteur d'un texte de solution par ses connaissances mathématiques établit un rapport personnel direct avec les objets mathématiques qui lui sont présentés dans le texte sous couvert de leurs représentations symboliques, il est en situation d'agir sur ce réel autant que l'auteur du texte l'a été, la **prédominance de la littéralité** dont parle R.Duval atteint en mathématiques un paroxysme que l'on ne retrouve pas dans d'autres sciences.

Ces différents éléments me conduisent à proposer une deuxième caractérisation des connaissances envisagées : à travers la production mais aussi l'étude de textes de solutions peuvent se construire des rapports de connaissance avec un objet que j'appellerai **le fonctionnement mathématique** et que je définirai de la façon suivante : c'est l'ensemble des modalités d'intervention des différents objets mathématiques dans les solutions de problèmes ou sous une forme qui me paraît finalement préférable car plus symétrique : **l'ensemble des rapports entre les objets mathématiques et les problèmes mathématiques**. C'est donc finalement **aux connaissances sur le fonctionnement mathématique** et à leur transposition au niveau scolaire que je restreindrai mon travail.

²¹ V.Durand-Guerrier a contesté ce point de vue pendant les débats qui ont suivi mon exposé : ses travaux la conduisent à relativiser la dimension « effacement de l'auteur », certains textes de mathématiciens fonctionnant sur un ensemble d'implicites important qui constitue pour un public d'étudiants par exemple un obstacle à la rencontre personnelle avec les objets mathématiques évoqués. Si j'ai bien compris ses objections, elles ne me semblent pas contradictoires avec mes analyses dans la mesure où je considère que l'auteur ne s'efface que pour un public cible qu'il s'est donné, caractérisé par un certain corps de connaissances. Peut-il en être autrement : la réalité du monde mathématique ne saurait être conçue indépendamment des connaissances que doivent posséder les membres d'une certaine communauté pour que les objets mathématiques accèdent à une certaine forme d'existence objective au sein de la communauté en question.

3. Pourquoi les connaissances sur le fonctionnement mathématique sont-elles susceptibles d'outiller utilement la résolution de problèmes ?

Le travail a consisté jusqu'à présent à mettre en avant et à explorer la distinction solution/résolution ? Répondre à la question qui fait le titre de cette partie suppose de s'interroger au contraire sur les liens existant entre texte et pratique.

Je ne m'étendrai pas sur ce point qui ne me semble pas problématique. Certes le texte de la solution n'est pas une narration de recherche, on n'y trouvera aucun détail sur les erreurs, les difficultés qui ont marqué la recherche, les mécanismes de pensée qui ont débouché sur la réussite. Cependant, le texte définitif montre au lecteur, en tout cas au lecteur averti qui se positionne comme futur résolveur, toutes les initiatives efficaces prises par celui qui a trouvé la solution. De quelles initiatives est-il ainsi rendu compte ? Je citerai par exemple, l'introduction d'objets nouveaux, le changement de cadres, la reformulation d'une expression ou d'une propriété, le choix d'un outil, d'une méthode ou d'un théorème etc. Dans une certaine mesure, **le texte de la solution est donc une évocation de la résolution qui l'a produit, une représentation** qui informe sur la pratique mais a l'avantage d'être plus facile d'accès que la pratique elle-même. Les connaissances sur le fonctionnement mathématique qui peuvent être construites à partir des textes de solution d'un certain ensemble de problèmes ont donc une dimension outil, elles disent aussi comment il est possible de faire (voir les exemples).

Cependant ces connaissances n'ont guère d'intérêt si elles ne peuvent être réinvesties avec une certaine efficacité, moyennant des adaptations plus ou moins grandes, dans la résolution d'autres problèmes ; autrement dit, sur le long terme, ce sont essentiellement les connaissances mettant en jeu des ensembles de problèmes qui vont émerger de la totalité des connaissances sur les problèmes. Pour désigner ces ensembles, j'utilise le terme de type de problèmes (ce qui n'a évidemment rien de nouveau) lorsque les problèmes sont rapprochés sur la base d'un trait commun, mais on ne peut pas exclure, au niveau du sujet cognitif au moins, que se constituent des conglomerats beaucoup plus hétéroclites qui correspondent à la notion de complexe chez Vigotski. **Les types de problèmes sont des connaissances essentielles sur les problèmes**, ce qu'avec Pastré (1995) on pourrait considérer comme **des concepts pragmatiques** : ils jouent un rôle fondamental dans la mise en relation de l'expérience antérieure avec l'activité présente ou future ; introduisant une certaine économie au sein des connaissances construites dans la production et l'étude de solutions, ils sont par

essence orientés vers la résolution de nouveaux problèmes ; à ce stade, ce sont des outils d'analyse et de mobilisation de connaissances opérationnelles.

Les connaissances sur le fonctionnement mathématique sont donc dotées d'une double organisation : autour des concepts et théorèmes mathématiques, autour des types de problèmes. Ces deux organisations ne sont pas identiques car en général plusieurs concepts sont utilisables pour un même type de problèmes et un même concept est outil dans plusieurs types de problèmes.

Dans l'espoir d'éviter certains malentendus, évoquons quelques points que je ne développerai pas (voir pour plus de précisions, C.Castela 2000) :

- Les types de problèmes sont d'abord des constructions cognitives qui s'élaborent dans la succession des activités de résolution : lorsqu'il cherche un nouveau problème, le sujet va, selon des mécanismes divers que je ne cherche pas à expliciter, rapprocher ce problème d'un autre ; si ce rapprochement est efficace c'est-à-dire si certaines des connaissances sur la solution de l'ancien sont utiles pour le nouveau, on peut penser que sur la durée les associations d'abord fortuites se pérennisent (et éventuellement des astuces deviennent des techniques).
- Ceci étant dit, les types de problèmes ne constituent pas seulement une modélisation de l'activité du sujet cognitif, ils apparaissent en tant qu'objet aussi bien dans la recherche mathématique qu'au niveau scolaire.
- Les types de problèmes construits dépendent du corpus des problèmes rencontrés (il est clair que cela a des conséquences au niveau scolaire).
- Les types de problèmes sont des objets évolutifs tant au niveau cognitif que dans les différentes institutions où ils peuvent vivre, en particulier dans la recherche mathématique.

III. LES DIRECTIONS DE RECHERCHE

Dans la double perspective d'étudier la place occupée par les connaissances sur le fonctionnement mathématique dans l'institution scolaire et de concevoir des dispositifs didactiques visant leur apprentissage par les élèves, j'envisagerai trois modes de vie d'une connaissance dans une institution.

1. Sous forme de savoir institué dans un texte

Il s'agit là de la forme classique analysée notamment par A.Rouchier (1991) qui résulte du processus d'institutionnalisation dans lequel les connaissances sont explicitées, dépersonnalisées, décontextualisées et enfin légitimées par l'institution via un texte qui constitue un objet institutionnel.

Je n'exclus pas du tout a priori d'envisager l'émergence d'une partie des connaissances sur le fonctionnement mathématique, à partir du lycée au moins, sous cette forme instituée, en tant qu'enjeux institutionnels d'enseignement, ne serait-ce que comme une solution pour construire chez les élèves le fonctionnement mathématique en tant qu'objet de connaissances dont ils devront cependant acquérir seuls l'essentiel (il est clair qu'une faible partie seulement de ce curriculum caché peut être intégré aux programmes officiels sous peine d'empêcher une progression raisonnable dans le texte du savoir savant).

Dans cette perspective, il ne s'agit pas d'appliquer à ce savoir un mode d'enseignement différent de celui que nous prônons pour le savoir mathématique, autrement dit, il ne s'agit pas de donner directement ces connaissances ou bien de les faire découvrir par une forme de maïeutique. Mais ce point de vue conduit à interroger les travaux de didactique des mathématiques ; jusqu'à quels points nous outillent-ils pour élaborer un enseignement lorsque les savoirs en jeu sont des savoirs opérationnels ? Quelles questions nouvelles les spécificités de ces savoirs nous posent-elles ? Cette problématique n'a guère été abordée jusqu'à présent me semble-t-il, pourtant sa pertinence n'est pas limitée aux connaissances sur le fonctionnement mathématique, j'ai par exemple retrouvé des questions tout à fait identiques à celles que je me pose dans l'exposé de J-J. Dupin sur la modélisation à l'Ecole d'été de 95.

Puisqu'il est ici question d'enseigner explicitement des connaissances sur le fonctionnement mathématique, je voudrai revenir sur des affirmations tenues dans la partie I.2. : premièrement, il est possible selon moi de faire cohabiter dans une classe des savoirs savants mathématiques et des savoirs opérationnels sans que les élèves identifient les seconds aux premiers ; deuxièmement, l'enseignement envisagé ne réduit pas nécessairement la résolution de problèmes à l'application quasi automatisée d'algorithmes, autrement dit, il est compatible avec la préservation d'un territoire de créativité dans le topos des élèves.

Ceci suppose un choix adapté des savoirs qui sont pris comme enjeux didactiques. Il faut éviter qu'une technique enseignée s'avère à tout coup efficace pour les problèmes abordables à un niveau donné, autrement dit, puisque selon la coutume en vigueur tout problème posé doit pouvoir être résolu, il convient de s'intéresser à des types de problèmes

pour lesquels il existe, au niveau d'enseignement considéré, différentes techniques qui ne possèdent pas le même domaine d'efficacité. Les élèves doivent rencontrer la responsabilité de sélectionner une technique parmi celles qui sont disponibles, ils doivent être confrontés à l'inadéquation de certains choix. Par ailleurs, il convient de choisir des techniques non algorithmisées dont l'application efficace dans un problème donné nécessite encore un réel travail de la part de l'élève. Mon hypothèse est que l'on devrait ainsi préserver dans la classe une conception de la résolution de problèmes qui inclut pour les élèves la responsabilité d'inventer, d'adapter. J'ajouterai que, pour entretenir la dévolution d'une telle activité de recherche, il est peut-être préférable de poser souvent des problèmes dans lesquels la connaissance sur le fonctionnement mathématique que l'on vise à faire construire n'est pas incontournable mais seulement notablement plus efficace (et l'on retrouve l'idée d'astuces).

Remarquons que les conditions décrites ci-dessus ne sont pas automatiquement réalisées. Il est possible qu'on ne puisse trouver à l'école primaire et au début du collège des types de problèmes répondant aux contraintes énoncées. Par ailleurs, les différentes techniques envisageables pour un type de problèmes mettent souvent en œuvre des outils relevant de chapitres différents dans le texte du savoir enseigné ; confronter les élèves à la responsabilité de choisir une technique plutôt qu'une autre suppose donc de s'émanciper de l'organisation usuelle de la progression en termes de concepts et de théorèmes mathématiques, des types de problèmes suffisamment larges doivent apparaître comme des objets institutionnels de connaissances. Il s'agit donc de mettre sur pied une double définition du programme, en termes de concepts d'une part, de types de problèmes d'autre part, en veillant à ce que les élèves aient rencontré suffisamment tôt dans l'année plusieurs techniques différentes. Ce n'est en général pas le cas des types abordés dans les rubriques « Travaux Pratiques » des classes de lycée ; il est vraisemblable qu'une telle optique impose souvent de choisir des types de problèmes mettant en œuvre des connaissances rencontrées séparément les années précédentes, ceci est tout à fait possible à tous les niveaux du lycée (citons seulement pour illustrer le propos les problèmes de comparaison de nombres et d'alignement).

En résumé, il me semble qu'à partir de la seconde au moins, il est possible de faire émerger dans le curriculum officiel certains savoirs sur le fonctionnement mathématique choisis de façon à minimiser les risques de glissement contre lesquels G.Brousseau nous a constamment mis en garde, semblant parfois postuler qu'ils étaient inévitables, dès qu'il s'est agi d'enseignement de méthodes et de méta (par exemple, Brousseau 1986).

2. A l'opposé de l'hypothèse précédente, systèmes institutionnels de connaissances non reconnues dans l'institution

Je reprends ici une expression utilisée par Y.Chevallard (1992, p.107) pour désigner ce que sont, dit-il, à peu près les « savoirs pratiques » de Bourdieu. Dans ce cas, j'aurai recours comme outil d'analyse à la notion « d'exercices structuraux » introduite par Bourdieu pour penser l'organisation sociale de la transmission de ces savoirs pratiques : « Entre l'apprentissage par simple familiarisation [...] et la transmission explicite et expresse par prescriptions et préceptes, toute société prévoit des exercices structuraux tendant à transmettre telle ou telle forme de maîtrise pratique » (Le sens pratique p. 126)

Je me demande si on ne peut pas interpréter comme de tels exercices structuraux certaines tâches forgées par la tradition qui auraient, auraient eu ou auraient encore dans certaines classes favorisées comme fonctions non explicitées ou en tout cas comme effets d'assurer l'apprentissage de certaines connaissances sur le fonctionnement mathématique (voir peut-être la notion d'assortiment didactique proposée dans sa thèse par Florence Génestoux). Etudier les formes de présence des connaissances sur le fonctionnement mathématique dans l'enseignement passe par la recherche de telles tâches, hier et aujourd'hui, dans différentes classes, dans différentes institutions d'enseignement. Je pense en particulier que le corpus des problèmes proposés joue un rôle déterminant : sur quels points fournit-il aux élèves l'occasion de rencontrer l'ignorance (Mercier 1995) ? Par exemple, en seconde, trouve-t-on et dans quelle proportion des énoncés dans lesquels les élèves doivent eux-mêmes décider de la méthode à utiliser pour comparer deux nombres ? Il faut corrélativement s'interroger sur l'existence de dispositifs dans lesquels ce type de problèmes a des chances d'apparaître, par exemple, devoirs à la maison, phases de révision en début d'année dans lesquelles l'enseignant s'autorise à changer de niveau de mise en fonctionnement, séances de recherche en groupe sur des problèmes non guidés... Pour ces différents dispositifs, on pourra se demander ce qui dans les tâches proposées est susceptibles de favoriser, toujours implicitement, l'apprentissage des élèves. Je pense par exemple ici au rôle qui me semble très important de la rédaction soignée d'une solution (voir pour une expérience en ZEP, Assude, Lattuati, Léorat, 2000).

Cette direction du travail se résume ainsi : mettre en évidence des dispositifs qui ont disparu ou ne vivent que sous des formes affaiblies dans les classes ordinaires et dont on

pense a priori qu'ils peuvent déboucher sur l'apprentissage de connaissances sur le fonctionnement mathématique sans jamais expliciter cet enjeu aux élèves, expérimenter la réapparition d'un tel dispositif et tester ses effets en terme de mise en fonctionnement des connaissances qui est le but véritable.

Mais cette approche ne tient pas compte de l'inégale perception par les élèves des enjeux d'apprentissage, elle ne s'interroge pas non plus sur la mise en œuvre des dispositifs évoqués dans l'enseignement ordinaire par des enseignants non avertis des enjeux visés. Ceci me conduit à envisager un troisième mode de vie des connaissances dans une institution, intermédiaire entre les deux précédents, c'est ce par quoi je vais conclure.

3. Connaissances reconnues institutionnellement : savoirs de sujets

Voici une hypothèse : une institution peut reconnaître la nécessité pour certains de ses sujets de posséder, d'utiliser, d'apprendre ou de faire apprendre selon les cas dans le cadre de leurs activités institutionnelles une connaissance sans que cette connaissance ne fasse l'objet d'une institutionnalisation dans le texte du savoir de cette institution. Cette connaissance pourra apparaître publiquement et officiellement dans l'institution via les sujets de l'institution. Je dirai que les connaissances en question sont officialisées ou reconnues institutionnellement en tant que savoirs de sujets dans l'institution en question²².

J'ai dit que la connaissance officialisée n'était pas mise en texte, ceci ne veut pas dire qu'aucun savoir institué n'est en jeu dans la reconnaissance institutionnelle mais que ce savoir n'est pas l'explicitation décontextualisée de la connaissance.

Des exemples :

* Dans le journal « L'Humanité » du 3 Juillet 2001, dans une interview consacrée à la torture en Algérie, M.Rebérioux dit : « La torture n'a pas été universelle, ni même, au sens propre du mot, générale. Ce fut, en revanche, un phénomène institutionnalisé, intégré dans un ensemble. La torture était couverte, implicitement ordonnée à travers le recours à des formules du type « mettez fin au terrorisme par tous les moyens » qu'utilise le ministre résident à Alger, Robert Lacoste ». Pour reprendre la terminologie que j'ai introduite, je dirai qu'aux yeux de

²² Ceci peut correspondre à ce qu'A.Rouchier désigne comme une forme faible d'institutionnalisation, je préfère pour ma part n'utiliser ce terme que dans son sens fort, rappelé au III.1.

M.Rebérioux, la torture était pendant la guerre d'Algérie une pratique **officialisée** par l'état français **pour** certains au moins de ses **sujets militaires**.

* A un niveau beaucoup moins dramatique, la notion de savoir-faire, de compétence sert précisément en général à officialiser des connaissances qui ne sont finalement évoquées qu'à travers les situations qu'il s'agit de maîtriser. La reconnaissance par l'institution (par exemple, une branche professionnelle) se fait à partir d'un savoir institué qui dans ce cas consiste en une description des tâches à accomplir positivement.

* Dans une institution d'enseignement, une connaissance peut être reconnue à partir d'un savoir didactique, je pense ici par exemple au travail de M-H.Salin et R.Berthelot sur les connaissances spatiales. Voilà comment j'en ai compris la ligne directrice : certaines connaissances spatiales pourraient apparaître comme enjeux d'apprentissage dans l'enseignement primaire à travers un certain nombre d'objectifs exprimés sous forme de savoir-faire et une suite de situations d'enseignement communicables aux enseignants. Le fait que ces situations dans certaines conditions « garantissent » l'acquisition des connaissances spatiales visées est un savoir didactique dont on voit bien qu'il n'a rien à voir avec une institutionnalisation des connaissances spatiales. De plus, c'est également à partir d'un savoir didactique que les enseignants pourront mettre en œuvre les situations d'enseignement dans les conditions qui les rendent efficaces et entre autres choses reconnaître les comportements, les difficultés, les apprentissages de leurs élèves. Dans ces conditions, les connaissances spatiales pourraient apparaître comme des enjeux d'apprentissage pour les élèves, enjeux reconnus institutionnellement, sans jamais être elles-mêmes institutionnalisées, les apprentissages des élèves étant dans la classe reconnus en termes de savoir-faire.

* Dernier exemple lié aux connaissances sur le fonctionnement mathématique.

Dans certaines classes, ces connaissances sont publiquement utilisées par le professeur dans ses commentaires, par exemple au moment des corrections, sans que ces connaissances soient jamais institutionnalisées comme savoirs de la classe. On peut penser que pour de nombreux élèves ces connaissances ne sont pas identifiées comme relevant de leur topos. Je fais l'hypothèse que, pour qu'elles le deviennent, il faudrait créer un dispositif institutionnel qui reconnaisse ces connaissances comme des savoirs pour les élèves aussi. Un tel dispositif pourrait prendre place dans le cadre des aides à l'étude, j'interprète également en tant que tel

les dispositifs expérimentés par Paquelier²³ en classe lesquels visent à faire dévolution aux élèves du travail réflexif sur les activités mathématiques passées dans une perspective d'avenir.

Cette perspective soulève donc notamment la question des savoirs qui sont la base de la reconnaissance, au niveau de l'institution, au niveau des enseignants ainsi que celle des dispositifs dans lesquels peuvent vivre officiellement les connaissances sur le fonctionnement mathématique.

Ainsi se dessinent à propos du domaine de connaissances qui a été défini par son objet, le fonctionnement mathématique, un programme de recherche comprenant trois directions de travail qui peuvent être utilisées pour l'étude de l'existant comme pour l'expérimentation. Les perspectives ouvertes dépassent les forces d'un seul chercheur et sont bien évidemment ouvertes à chacun mais elles rencontrent d'ores et déjà des travaux menés tout à fait indépendamment, comme ceux de Matheron sur la mémoire ostensive qu'on trouvera évoqués dans ces Actes.

BIBLIOGRAPHIE

- ASSUDE T., LATTUATI M., LEORAT N. (2000), L'écriture au quotidien dans une classe de mathématiques. *Petit x*. 54 5-28.
- BARRERE A. (1997), *Les lycéens au travail. Tâches objectives, épreuves subjectives*. Paris : PUF.
- BAUTIER E. (1995), *Pratiques langagières, pratiques sociales*. Paris : L'Harmattan.
- BERTHELOT R., SALIN M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse, Université Bordeaux 1
- BOURDIEU P. (1984), *Le sens pratique*. Paris : Éditions de Minuit.
- BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections : un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Thèse, Université Bordeaux 1.
- BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2) 33-115.

²³ Ces travaux ont été réalisés dans le cadre des recherches du groupe CESAME de Nice, exposés au Séminaire Didirem mais ils n'ont pas encore donné lieu à publication.

- CASTELA C., EBERHARD M. (1999), Quels types de modifications du rapport aux mathématiques en vue de la possibilité de quels gestes professionnels ? In *Actes de la X^e École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 164-172). Houlgate : ARDM
- CASTELA C. (2000), Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique.
Recherches en Didactique des Mathématiques. 20(3) 331-380.
- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(1) 73-112.
- CHEVALLARD Y. (1995), La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In Noïrfalise R, Perrin M.-J. (eds) *Actes de la VIII^e École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.
- CONNE F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12(2/3) 221-270.
- DUPIN J.-J. (1995), Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques. In Noïrfalise R, Perrin M.-J. (eds) *Actes de la VIII^e École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 247-257). Clermont-Ferrand : IREM.
- DUVAL R. (1998), Écriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In *Actes du colloque « Produire et lire des textes de démonstration »* (pp. 79-98). Rennes : IREM.
- GENESTOUX F. (2000) *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires en mathématiques*. Thèse, Université Bordeaux I.
- MERCIER A. (1995), Approche biographique de l'élève et des contraintes temporelles de l'enseignement : un cas en calcul algébrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 15(1) 97-142.
- ORUS BAGUENA P. (1992), *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique : effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse, Université Bordeaux I
- PASTRE P, SAMURÇAY R. (1995), La conceptualisation des situations de travail dans la formation des compétences. *Éducation Permanente*. 123 13-32.
- PIAN J. (1999), *Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES. Vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels*.
Cahier de Didirem 34. Paris : Université Paris 7

- ROBERT A. (1997), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*. 18(2) 139-190.
- ROUCHIER A. (1991), *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itérativo-récurrentes, institutionnalisation*. Thèse de doctorat d'état, Université d'Orléans, UFR Sciences fondamentales et appliquées.
- SCHOENFELD A. (1985), *Mathematical Problem Solving*. Orlando : Academic Press.
- TENAUD A. (1991), *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthodes de travail en petits groupes*. Thèse d'université. Paris : Université Paris 7.

ORDRES DE CONNAISSANCES ET INSTITUTIONNALISATION

Groupe CESAME²⁴

Catherine Sackur, Maryse Maurel, Jean-Philippe Drouhard, Teresa Assude²⁵

GECO-IREM de Nice

I. INTRODUCTION

Le but de nos travaux est de comprendre les difficultés rencontrées par nos élèves quand ils apprennent des mathématiques et nous cherchons des façons de lutter contre les erreurs tenaces des élèves. Notre travail théorique s'appuie en permanence sur notre pratique d'enseignants, mais cette pratique s'alimente à la théorie qui sert de fil directeur à nos préparations et décisions d'enseignement.

En ce qui concerne les erreurs des élèves nous savons que la réalisation d'exercices répétitifs est inefficace si on refuse le dressage mathématique. Nous voudrions que nos élèves apprennent à distinguer par eux-mêmes le vrai du faux. Nous pensons qu'un mathématicien n'utilise pas seulement les règles du raisonnement logique pour faire cette distinction. Nous pouvons donc nous demander comment identifier les connaissances utilisées par un mathématicien pour faire des mathématiques et pour faire partager la validité de ses résultats ? Quelles sont parmi ces connaissances celles que n'ont pas certains de nos élèves quand ils font des mathématiques en classe ?

Quel que soit le type d'enseignement, certains élèves acquièrent ces connaissances par eux-mêmes, d'autres ne les acquièrent pas spontanément. Ce sont ceux-là qui nous intéressent. Ce sont pour ceux-là que nous cherchons des dispositifs d'enseignement spécifiques qui permettront de leur enseigner tout ce qui ne se réduit pas à des définitions, des théorèmes ou des méthodes. C'est ainsi que nous en sommes arrivés à la notion d'*ordres de connaissances* que nous allons présenter ici.

²⁴ CESAME est un groupe de recherche composés de six chercheurs dont le nom est l'acronyme de Construction Expérientielle du Savoir et Autrui dans les Mathématiques Enseignées.

²⁵ Voir en fin d'article le rattachement institutionnel et les mels des auteurs.

Dans la recherche CESAME, développée depuis plusieurs années, nous avons élaboré des séquences pour permettre à nos élèves ou à nos étudiants de faire l'expérience du caractère nécessaire des énoncés mathématiques. La connaissance qui émerge de cette expérience est de nature particulière. Le plus souvent, il ne suffit pas de l'énoncer d'emblée, elle s'acquiert dans la pratique et l'expérience des mathématiques. C'est ce type de connaissances que nous voulons institutionnaliser. Dans ce texte, nous allons rendre compte de ce qui s'est passé autour d'un partiel dans une première année de DEUG MASS²⁶ au cours du deuxième semestre 2000-2001. Il s'agit d'un *dispositif d'enseignement* qui résulte de notre réflexion sur " ce que cela veut dire d'apprendre des Mathématiques ".

Après un exposé du problème mathématique, nous décrirons, du point de vue des professeurs, la chronologie de la mise en place du dispositif. Puis nous décrirons les outils théoriques que sont les ordres de connaissances pour montrer la *spécificité des dispositifs d'enseignement* qui visent ces connaissances et la *pertinence de cette notion d'ordres de connaissances* pour analyser des données issues du terrain. La partie suivante étudiera, avec les outils de la théorie CESAME, la genèse du dispositif et les effets produits sur le travail des étudiants. Enfin la dernière partie, en forme de conclusion, fera le lien avec l'institutionnalisation et la notion de milieu dans la théorie des situations didactiques.

II. LES MATHÉMATIQUES

L'exercice sur lequel portent nos observations avait pour but de tester, dans un partiel, la compréhension des étudiants sur le thème des développements limités d'une fonction à une variable. Nous rappelons ici le savoir de référence pour les étudiants.

Pour une fonction à une variable et son étude locale au voisinage d'un point (nous choisirons ici le point 0), il s'agit d'écrire

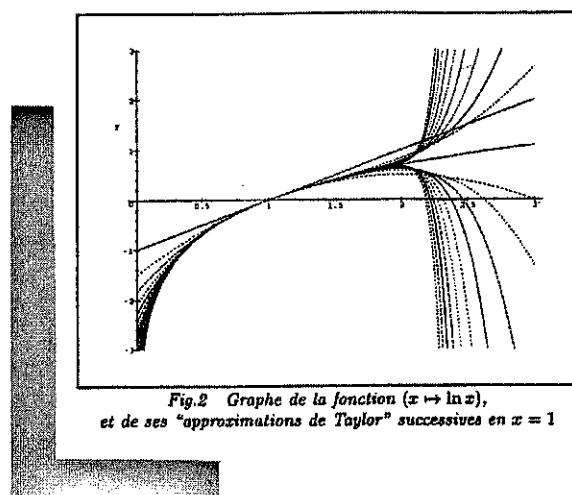
$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

où $P_n(x)$ est l'expression d'un polynôme de degré n qui réalise la meilleure approximation polynomiale de f et où $o(x^n)$ est le reste.

Ce reste doit vérifier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$.

Il a été distribué aux étudiants un feuillet de dessins obtenus avec le logiciel Maple comme celui que nous reproduisons ci-dessous.

²⁶ MASS : Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales ; le MASS est une filière scientifique qui offre aux étudiants trois enseignements fondamentaux, les mathématiques, l'économie et l'informatique.



Si on définit une fonction évanescence en 0 comme une fonction φ qui vérifie

$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ (notée *eva* dans cet enseignement²⁷) on en déduit que $o(x^n)$ est le produit de x^n par

une fonction évanescence en 0.

Dans ce cas, deux définitions sont possibles pour $o(x^n)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0 \quad \text{ou} \quad o(x^n) = x^n \cdot \text{eva}$$

III. LA CHRONOLOGIE

1. Le premier partiel (P1)

A la fin de la première partie du deuxième semestre, les étudiants ont passé un partiel d'analyse qui comportait quatre exercices. L'énoncé de l'exercice 2 était le suivant :

Sachant que $\alpha = x + o(x)$, quels développements limités en 0 pouvez-vous en déduire pour les expressions suivantes : α^2 et $(1+\alpha)^2$?

Dans les séances de TD²⁸ qui ont suivi le partiel, les étudiants ont fait à leurs professeurs le retour suivant : ils n'ont pas donné ce qu'ils se sentaient capables de donner. Ils avancent deux raisons pour expliquer ce fait ; ils n'ont pas eu suffisamment de temps pour préparer ce partiel²⁹ et ils ont trouvé le sujet trop long. Ils disent aussi que ce n'est pas

²⁷ Pour plus d'information sur cet enseignement de MASS première année, conçu par Frédéric Pham, voir la brochure de la Commission Inter Irem Université (*L'expérience de Nice*, à paraître).

²⁸ TD : Travaux Dirigés, séances d'exercices en trois groupes de trente cinq étudiants.

²⁹ Ce qui est vrai, compte tenu de la charge de travail par ailleurs.

compatible avec le conseil donné par les professeurs selon lequel il est plus important de comprendre et d'aller au fond des choses que d'être rapide. Les professeurs, de leur côté, dans le cadre de ce programme expérimental articulé avec l'enseignement de l'économie, se sont engagés à envoyer en deuxième année des étudiants maîtrisant bien ces notions.

La correction du partiel se fait dans une séance de TD. A propos de l'exercice 2 sur les développements limités, le professeur dit :

- J'ai trouvé ces deux réponses dans vos copies :

Réponse 1 : $(1+\alpha)^2 = 1+2x+o(x)$

Réponse 2 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$

Il lance alors un débat en demandant :

- Est-ce que les deux réponses sont justes ? Qu'en pensez-vous ?

De façon unanime, les étudiants votent oui et expliquent :

- Oui, les deux réponses conviennent, cela dépend de l'ordre du développement limité ; comme il n'est pas précisé, on pouvait donner l'un ou l'autre, le premier résultat donne le développement limité à l'ordre 1, le deuxième donne le développement limité à l'ordre 2.

Les étudiants sont tous d'accord et il n'y a pas de débat. Le professeur, qui avait un peu anticipé cette éventualité à partir des réponses trouvées dans les copies, propose un contre-exemple :

Calculer $(1+\alpha)^2$ pour $\alpha=x+x^2$.

Après calcul, les étudiants obtiennent :

$$(1+x+x^2)^2 = 1+2x+3x^2+2x^3+x^4$$

soit, à l'ordre 1 : $1+2x+o(x)$,

et, à l'ordre 2 : $1+2x+3x^2+o(x^2)$,

ce qui infirme la deuxième réponse.

Les étudiants commentent :

- Bof ! si vous le dites, c'est faux, d'accord, le contre-exemple le prouve, mais je ne comprends pas pourquoi.

Ils acceptent que la deuxième réponse soit fausse, ils ne peuvent pas faire autrement, mais ils ne sont pas vraiment convaincus.

Le professeur :

- Vous y réfléchissez et nous en reparlerons à votre demande.

Ils ont l'habitude de ce type de commentaire et ils savent que le professeur n'ira pas plus loin dans ses explications, qu'ils n'en obtiendront plus que s'ils posent des questions.

Certains étudiants en ont reparlé en TD, beaucoup sont venus en discuter dans les bureaux des professeurs, certains plusieurs fois.

A la fin du TD, le professeur distribue à chacun la copie virtuelle³⁰ de l'épreuve. Voici l'extrait de la copie virtuelle correspondant à l'exercice 2 :

(II: 3½)

exercice 2 :

$$d = x + o(x)$$

Développement limité en $x=0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow d^2 &= (x + o(x))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x) + o(x)^2 \\ &= (x + \varepsilon_a \cdot x)^2 = x^2 + o(x^2) \\ &= x^2 + 2x \cdot \varepsilon_a + (x \cdot \varepsilon_a)^2 \\ &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1+d)^2 = (1+x+o(x))^2 = (1+x+o(x))(1+x+o(x))$$

$$= 1 + x + o(x) + x + x^2 + x \cdot o(x) + o(x) +$$

$$(1+x+\varepsilon_a \cdot x)(1+x+\varepsilon_a \cdot x) = 1 + x + \varepsilon_a \cdot x + x + x \cdot \varepsilon_a + \varepsilon_a \cdot x^2 + \varepsilon_a \cdot x + \varepsilon_a \cdot x^2 + (\varepsilon_a \cdot x)^2$$

$$= 1 + 2x + o(x^2)$$

oui

manque
l'explication

un peu succinctes,

mais le calcul avec les "éva"

montre que l'étudiant a compris

2. Le deuxième partiel (P2)

Entre les deux partiels, les deux professeurs responsables de cet enseignement réfléchissent à l'idée d'interroger à nouveau les étudiants, dans un autre partiel, sur ce même programme d'analyse, pour améliorer les notes du premier partiel sur la base d'un réel travail de la part des étudiants.

Ce deuxième partiel est annoncé pendant le cours en amphithéâtre avec la consigne suivante : " Le prochain partiel sera facultatif, son but est de vous permettre d'améliorer vos notes, il portera sur le même programme, vous pourrez y gagner des points qui s'ajouteront à

la note du premier partiel. Comment faire ? Inutile d'apprendre par cœur la copie virtuelle. Il faut faire mieux, certes, mais surtout vous devrez montrer que vous avez compris et que vous savez pourquoi. Vous devrez savoir faire les exercices demandés et expliquer en quoi, selon vous, votre compréhension s'est améliorée depuis le premier partiel et ce qui s'est passé pour vous entre les deux partiels ”.

Les professeurs décident alors de poser exactement le même sujet, accompagné d'une consigne écrite qui reprend ce qui a été expliqué à tous les étudiants pendant un cours et qui a été redit plusieurs fois sous différentes formes à la demande des étudiants, un peu inquiets comme toujours.

La consigne écrite sur le recto du texte du partiel le jour de l'examen reprend celle qui a été expliquée en cours oralement.

DEUG MASS1, Mathématiques

Jeudi 17/5/2001 8h15 à 9H45

Documents et calculatrices interdits

Objectifs de l'épreuve : améliorer votre note du partiel du 12/4.

1^{er} cas Vous êtes satisfait de votre note du partiel.

Au revoir !

2^e cas Vous voulez montrer que vous maîtrisez les principales notions au programme du partiel, mieux que votre copie du 12/4 ne pourrait le laisser croire.

Prouvez-le nous en choisissant librement certaines des exercices ou passages d'exercices sur lesquels vous pensez avoir fait des progrès importants.

Rédigez-en la solution.

Commentez votre évolution personnelle depuis le partiel (obstacles éventuels dont vous avez compris entre temps comment les franchir).

Les points supplémentaires seront attribués aux copies montrant un progrès substantiel par rapport à la copie du 12/4, et faisant preuve d'un vrai travail de réflexion.

Les étudiants savaient que ce partiel serait corrigé par les deux professeurs de façon indépendante, sans barème et en toute subjectivité et que les notes obtenues après addition des points gagnés seraient sans appel. Ils savaient aussi que les points supplémentaires seraient attribués sur les résultats mathématiques et sur la preuve d'une bonne compréhension de ces résultats. Rappelons qu'à Nice les copies de partiels et d'examens sont anonymes.

³⁰ La copie virtuelle est un montage de bonnes réponses d'étudiants accompagné de commentaires. Elle montre que chaque question était accessible puisqu'au moins un étudiant a su donner une réponse obtenant le maximum (ou plus) des points prévus par le barème.

IV. LES ORDRES DE CONNAISSANCE

1. Analyse de quelques copies de P2.

Entre P1 et P2, beaucoup d'étudiants ont appris la définition et la citent. On peut penser que ceci est induit par le commentaire du professeur sur la copie virtuelle. Pour certains on en reste là : la définition ne leur sert pas à travailler, la définition est citée pour la première question et pas pour la deuxième (alors que le plus souvent ils ont déjà fait la première question juste dans P1).

S. G.

Elle³¹ connaît la définition, mais ne s'en sert pas pour justifier son résultat ; elle revient au contre exemple donné en TD.

Elle développe $(1+\alpha)^2$ et arrive à :

$$1+2x+x^2+2xe\alpha+2x^2e\alpha+2x^2e\alpha+x^2e\alpha^2$$

et conclut : $(1+\alpha)^2=1+2x+o(x)$.

Elle explique ce qu'elle fait :

En effet, dans cet exemple, on ne laisse pas la variable en x^2 , car on n'est pas sûr de son coefficient (ce dernier n'est pas forcément égal à 1). Prenons un contre exemple afin de prouver ceci...

elle déroule alors le contre-exemple du TD de correction.

Donc cet exemple confirme bien qu'on ne puisse pas mettre le terme en x^2 dans le DL, fait que je n'avais pas bien compris lors du dernier partiel.

On peut se demander si ce qu'elle vient de faire pourra être réutilisé sur un autre exercice où ce contre exemple ne sera pas pertinent, mais nous n'en savons rien.

D'autres étudiants utilisent la définition pour faire des mathématiques, elle est un véritable outil pour résoudre la deuxième question de l'exercice.

A.B.

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)^2 &= (1 + x + o(x))^2 = (1 + x + e\alpha.x)^2 = \\ &= 1 + 2x + 2e\alpha.x + 2xe\alpha.x + x^2 + x^2(e\alpha)^2 = 1 + 2x + o(x) \\ \text{étant donné que :}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x.eva &= o(x) \\
 x^2 &= x.eva = o(x) \\
 x^2.eva &= o(x^2) = o(x)
 \end{aligned}$$

Elle ne fait pas de commentaires, mais ses écritures prouvent qu'elle utilise la définition pour réécrire les expressions. Par opposition à S.G., elle peut faire fonctionner la définition sur différents cas.

2. Les ordres de connaissance

Nous avons donc l'impression que certains étudiants ont appris l'énoncé de la définition et que d'autres ont appris quelque chose de plus qui est que la définition permet de répondre à la question.

Dans la théorie CESAME, nous avons introduit la notion *d'ordres de connaissance* qui permet de faire la distinction entre différentes connaissances.

En ce qui concerne les définitions, **une connaissance d'ordre I** est un énoncé tel que : "on appelle $o(x)$ toute fonction qui se présente sous la forme du produit de x par une fonction évanescence" ou "on appelle $o(x)$ toute fonction telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ ".

Une connaissance d'ordre II fait référence aux règles du jeu mathématique ; elle indique qu'une "définition définit comme elle est censée définir".

A quoi sert une définition en mathématiques ? Nous avons vu que les étudiants n'utilisent pas tous les définitions de la même façon. Certains les donnent, c'est tout, d'autres les donnent et les font travailler. Si, bien souvent, les étudiants n'apprennent pas les définitions précises et se fabriquent des règles d'usage approximatives³², c'est bien parce qu'ils ne savent pas que les définitions doivent permettre de faire des mathématiques, en permettant de distinguer le vrai du faux par des raisons internes aux mathématiques.

³¹ Dans le cadre du programme pour l'égalité des chances, nous avons décidé de décliner tous les exemples au féminin.

³² Citons comme exemple de ces règles : En TD, un étudiant a dit, "je mets dans $o(x^2)$ ce que je ne connais pas, comme x^2 je le connais, je le garde". Pour d'autres, on calcule sur la partie polynomiale du développement limité et selon son ordre (c'est-à-dire le degré du polynôme obtenu) on le termine par un $o(x)$ ou un $o(x^2)$.

Dire qu'une définition "définit comme elle est censée définir" signifie qu'une définition doit permettre de produire des résultats cohérents pour le sujet, partageables par l'ensemble du groupe social et efficaces d'un point de vue mathématique. Nous retrouvons ici les trois espaces de la triple approche (Léonard & Sackur 1991) et l'idée qu'un résultat exact est, nécessairement, à la fois cohérent, efficace et partagé sinon ce n'est pas un résultat mathématique.

Comparons ce qu'a fait A.B. dans les partiels P1 et P2 et voyons comment la définition lui permet de faire des mathématiques partagées, au sens de "on est obligé d'être tous d'accord".

Partiel 1. :

$$(1+\alpha)^2=1+2\alpha+o(\alpha)$$

on remplace par la valeur de α , ça nous donne :

$$(1+\alpha)^2=1+2(x+o(x))+o(x+o(x))=1+2x+o(x) \text{ car tous les termes en } o(x) \text{ se regroupent.}$$

Partiel 2. :

$$(1 + \alpha)^2 = (1 + x + o(x))^2 = (1 + x + eva.x)^2 = \\ = 1 + 2x + 2eva.x + 2xeval.x + x^2 + x^2 (eva)^2 = 1 + 2x + o(x)$$

étant donné que :

$$x.eva = o(x)$$

$$x^2 = x.eva = o(x)$$

$$x^2.eva^2 = o(x^2) = o(x)$$

$$x^2.eva = o(x^2) = o(x)$$

L'argument que donne A.B. dans le premier partiel est certes exact, mais il peut ne pas convaincre quelqu'un qui n'aurait pas bien compris la notion de $o(x)$. L'argument du deuxième partiel, au contraire, permet de convaincre.

3. Pour résumer notre propos

Nous venons de montrer, à propos de la définition, ce que sont une connaissance d'ordre I et une connaissance d'ordre II.

L'ordre I concerne les énoncés, axiomes, définitions, théorèmes.

L'ordre II est relatif aux connaissances qui font que les parties du discours mathématique fonctionnent comme elles sont censées fonctionner : les définitions définissent comme elles sont censées définir, les théorèmes établissent comme ils sont censés établir, les écritures dénotent ce qu'elles sont censées dénoter... Ces connaissances font ce qui fait que les mathématiques sont ce qu'elles sont censées être. Elles permettent, comme pour le principe de non-contradiction par exemple, aux règles du jeu mathématique de s'appliquer. Ainsi une des propriétés importantes des énoncés mathématiques est leur caractère nécessaire ; nous avons déjà étudié cette connaissance d'ordre II et sa mise en œuvre en classe par des dispositifs spécifiques (Sackur & Maurel, 2000 et Maurel 2001).

L'ordre III fait référence aux croyances de ce que sont les mathématiques et l'activité mathématique. Le fait que les connaissances mathématiques soient socialement construites suppose une forme minimale d'accord sur ce que sont ces connaissances, sur ce qui fait qu'elles sont mathématiques ou non. Peut-être n'y a-t-il qu'une unique connaissance d'ordre III, à savoir que l'activité mathématique consiste à jouer avec des connaissances d'ordre I selon des règles du jeu d'ordre II. Un étudiant peut dire à un autre : "en algèbre, il n'y a rien à comprendre", un professeur peut rendre sa copie à un étudiant et lui dire "non, ça, ce n'est pas des maths". Ce n'est ni de l'ordre I, ni de l'ordre II ; nous disons que ce qui permet de tels énoncés ce sont les connaissances d'ordre III.

V. COMMENT LE DEUXIEME PARTIEL DEVIENT LE "PARTIEL REFLEXIF" ?

1. Les origines théoriques

Nous allons nous intéresser maintenant à la partie du travail CESAME qui permettait de savoir que ce dispositif déclencherait ce qu'il a déclenché. Deux axes de recherche sont particulièrement importants pour cette analyse, ce qui concerne la problématique du récit et ce qui concerne la posture réflexive. Nous en ferons un bref exposé avant de commenter quelques copies d'étudiants.

La problématique du récit

A partir des travaux de Ricœur (Ricœur, 1983), nous avons souligné l'importance, pour un élève, de l'inscription dans son expérience personnelle de l'histoire de ses connaissances (CESAME 1997). On peut l'aider à faire exister cette histoire grâce à des récits structurés par des indicateurs langagiers : "avant je pensais que..., j'ai appris que..., maintenant je pense (ou je sais) que...". Cette 'mise en intrigue narrative', demandée en

classe, réorganise pour le sujet son expérience et lui donne une signification dans l'ensemble de ses connaissances. L'intention didactique est de faire exister en classe les trois temps de l'apprentissage, le présent du passé, le présent du présent et le présent du futur. Ce type de récit permet alors de faire de ce temps vécu par les élèves en classe un temps raconté qui pourra être partagé (Assude et alii, 1998). La temporalité de ce temps vécu, raconté et partagé s'oppose à celle du temps didactique de l'avancement du programme.

La posture réflexive

La posture réflexive consiste à prendre pour objet d'étude un fait de sa propre pensée, de l'isoler pour pouvoir le décrire et l'étudier. Nous empruntons à la phénoménologie et à la psychophénoménologie³³ pour décrire et étudier l'expérience subjective. Il y a des connaissances implicites inscrites dans les actions des élèves, ces connaissances sont le plus souvent pré-réfléchies (Vermersch, 1994) au sens *de non encore portées à la conscience du sujet*. Il est possible de demander à des élèves de tourner leur attention vers ce qu'ils ont fait quand ils ont fait leur exercice comme ils l'ont fait le jour où ils l'ont fait et quand ils l'ont retravaillé ensuite. Cette injonction les oriente vers des actes de pensée qui, la plupart du temps, ne sont pas présents spontanément chez eux. Le but recherché est de faciliter des prises de conscience qui seront utiles pour l'activité mathématique présente et à venir. Cela peut se faire spontanément, mais *si vivre une expérience subjective est spontané, s'en souvenir et l'utiliser est une expertise*³⁴. Ici, il s'agit de faire l'expérience de quelque chose pour avoir de l'expérience et pour se construire en même temps une identité d'étudiant en mathématiques. Ce que nous faisons, sans être sûrs de gagner à tous les coups, c'est que nous créons une situation d'accompagnement, de facilitation, où est possible, dans la classe, la création du souvenir en vue de son utilisation ultérieure, pour avoir de l'expérience en mathématiques, pour sortir du pré-réfléchi de ce vécu et le porter à la conscience réfléchie, pour en faire un souvenir conscient et mobilisable.

Dans la théorie CESAME, nous avons montré, à propos du caractère de nécessité des énoncés mathématiques, que le récit est lié à l'expérience³⁵. Il la fait exister pour les élèves, pour certains d'entre eux au moins, sous une forme langagière et permet ensuite son institutionnalisation par le professeur, même pour les étudiants qui ne l'ont pas faite. Cette

³³ Vermersch P. (1996), Expliciter N° 13, Pour une psychophénoménologie, téléchargeable sur le site du GREX (www.grex-fr.net).

³⁴ Vermersch P., op. cité.

théorie prévoit donc que, pour faire émerger un certain type de connaissance, qui sera institutionnalisée ensuite, il faut que les étudiants en fassent l'expérience. Il faut donc qu'il se passe quelque chose pour eux, mais aussi qu'ils aient l'occasion de prendre conscience de ce qui s'est passé, c'est-à-dire que cette chose qui s'est passée soit recrée avec son déroulement temporel personnalisé³⁶.

Dans cette perspective, sur le plan pratique, nous utilisons dans nos dispositifs d'enseignement et de recherche les *narrations de recherche* telles qu'elles sont décrites dans les travaux de l'IREM de Montpellier (Sauter, 2000).

Sur un plan plus théorique, remarquons que Sensevy, dans son 'journal des fractions', mettait en place un dispositif qui tend vers ce même but d'introduire une temporalité personnelle et de mettre les élèves en situation de réfléchir sur leur activité mathématique (Sensevy, 1996).

2. Analyse du dispositif avec les outils de la théorie CESAME.

Pour les étudiants de MASS, se mettre en projet d'écrire quelque chose pendant P2, sous l'effet de la consigne, leur permet de se rendre compte qu'il y a eu des changements pour eux, de faire la différence entre : avant, un jour, maintenant. Le deuxième partiel, et la consigne qui l'accompagne, donne aux étudiants l'occasion d'écrire des récits de ce type dans lesquels ils vont s'informer et informer les correcteurs des progrès qu'ils ont faits et de la conscience qu'ils en ont. Nous pouvons donc prévoir, dans la préparation du deuxième partiel et dans sa passation, que certaines connaissances seront conscientisées par les étudiants, même si nous ne savons pas à propos de quelle connaissance cela va se passer.

Pour l'expérimentation sur le caractère de nécessité des énoncés mathématiques, nous avons créé un dispositif *ad hoc*. Ici, pour le deuxième partiel, cela s'est fait dans le feu de l'action des professeurs. Nous trouvons des traces de connaissance d'ordre II sur la définition dans les copies de P2 parce que l'enseignement a été anticipé avec la théorie CESAME comme fil directeur et parce que nous avons des outils théoriques pour en voir les traces écrites.

³⁵ Au sens de "vécu". L'anglais est une langue commode pour exprimer cette idée dans la mesure où il fait la différence entre "to experience" et "to experiment". Il ne faut pas confondre ces deux sens des mots 'faire l'expérience' avec l'expression 'avoir de l'expérience' telle qu'on l'utilise dans la langue courante.

³⁶ Comme le dit Jérôme Bruner dans son ouvrage "Car la culture donne forme à l'esprit" : les histoires n'arrivent qu'à ceux qui savent les raconter.

Une fois que nous avons identifié les conditions pour que puisse émerger, à travers expérience et récit, la connaissance d'ordre II, nous pouvons préparer un dispositif expérimental sur cette connaissance et étudier comment l'institutionnaliser.

3. La consigne, rappel du contrat général

La consigne de P2 n'est pas vraiment une nouveauté pour les étudiants. Les étudiants ont fait ce travail réflexif parce qu'ils savaient le faire, ils avaient eu l'occasion de s'y entraîner. Pendant le premier semestre, ils ont suivi un enseignement dit de 'Raisonnement Scientifique'³⁷ où il leur était demandé, à la fin de chaque séance, de faire un compte-rendu de la séance du point de vue de *ce qui s'était passé d'important pour eux*. Ces comptes-rendus annotés leur étaient ensuite rendus. L'évaluation de cet enseignement s'est faite de la même manière, avec un mémoire où ils devaient exposer ce qu'ils avaient appris en mathématiques mais surtout ce qu'ils avaient appris de leur façon de faire des mathématiques. Ce travail les a conduits à mettre en place une activité de pensée qui ne leur était à l'origine ni familière, ni spontanée. Le contrat didactique qui a géré l'ensemble des enseignements de cette première année a permis la mise en place progressive d'un travail réflexif et la production d'écrits sur ce travail.

La consigne de P2 est volontairement vague. Notre expérience de chercheurs et des études théoriques³⁸ nous ont montré qu'une consigne trop précise entraîne soit une résistance du sujet, soit des réponses qui ne sont pas fiables. Celui-ci risque de se sentir contraint dans un cadre qui n'est pas forcément le sien et dans lequel il risque de donner la réponse qu'il croit que le professeur attend. Ainsi, si on demande : "qu'avez-vous appris sur les relations entre $o(x)$ et $o(x^2)$?", on n'obtiendra pas forcément la découverte faite par certains que x^2 est un $o(x)$. Mais si on demande : "Est-ce que x^2 est un $o(x)$?", on risque fort d'induire des réponses qui ne correspondent pas à la réalité de la réflexion des étudiants.

Le caractère ouvert ne signifie pas pour autant que ce dispositif est analogue à un questionnaire très ouvert où tout ce qui est dit est intéressant à prendre. Il s'agit bien ici d'un dispositif d'enseignement qui se donne pour objectif de guider l'activité de pensée des étudiants. La dévolution de ce travail réflexif n'est pas triviale. Il faut que les étudiants soient preneurs. Dans le cadre de P2, les professeurs les intéressent par leur proposition d'améliorer

³⁷ Voir brochure de la Commission Inter Irem Université (*L'expérience de Nice*, à paraître).

³⁸ En particulier celles menées au sein du GREX (Groupe de Recherche sur l'Explicitation).

les notes, les étudiants font par contrat le travail réflexif et ce faisant, ils font des mathématiques, à l'ordre I et à l'ordre II.

Que pouvons-nous dire très globalement des résultats du deuxième partiel ? Les étudiants ont manifesté leur satisfaction d'avoir eu l'occasion de bien faire et d'améliorer leurs notes, ce qui était important pour eux ; les professeurs, de leur côté, ont constaté que les étudiants avaient travaillé, qu'ils s'étaient posé des questions intéressantes et qu'ils avaient fait sur leur copie des commentaires prouvant un réel travail de compréhension. Ce sont certains de ces commentaires que nous analysons maintenant.

4. Analyse de quelques réponses d'étudiants

Dans ces copies, nous trouvons des indices de travail en compréhension (Sackur & al. 1997) effectué grâce au retour au texte mathématique et aux définitions. Non seulement ils appliquent des règles mais ils donnent leurs raisons d'appliquer ces règles. Nous y trouvons aussi des traces de temporalité.

J.T.

Dans P2, l'étudiante fait le calcul exact puis donne des arguments pour expliquer sa certitude. Après son calcul, elle écrit :

Or on peut montrer qu'un $o(x^2)$ est un $o(x)$,

$o(x^2)=x^2.eva$

$=x.x.eva$

$=x.eva$

$=o(x)$

mais il est impossible de montrer qu'un $o(x)$ est un $o(x^2)$, car c'est faux.

O.M.

Pour cet exercice aussi³⁹, je pense avoir fait des progrès : en effet, lors du dernier partiel, j'ai appliqué la formule de Taylor sans réfléchir, alors que cela me donnait des résultats monstrueux. Depuis, j'ai appris à me servir d'autres formules, comme la substitution par exemple.

Plus loin : Ce qui est pratique avec les DL, c'est qu'on peut les intégrer.

³⁹ Ce commentaire concerne l'exercice 3 du partiel, exercice que nous n'analysons pas ici.

Elle critique ce qu'elle a fait dans son apprentissage : elle avait retenu une méthode qu'elle pensait universelle (la méthode de Taylor). Elle découvre l'intérêt d'autres méthodes qui ne l'avaient pas intéressée lorsqu'elles ont été traitées en cours. Ainsi, elle réorganise son expérience personnelle et elle prend conscience du fait qu'elle sait plus de choses et des choses qui lui seront utiles. Son commentaire a une forme de récit avec des indicateurs langagiers de temporalité : “ *Lors du dernier partiel ..., depuis...* ”

S-H.B.

On trouve ici d'autres indicateurs langagiers : “ *Au départ..., maintenant...* ”

Au départ, je pensais que comme le développement limité de α était à l'ordre 1, il fallait faire des développements limités à l'ordre 1 pour α^2 et pour $(1+\alpha)^2$. Je comprends maintenant que la question n'a plus beaucoup de sens s'il s'agit de faire seulement ça, et que ce qui est intéressant ici est de voir jusqu'à quel ordre on peut pousser le développement limité.

A.L.

Chez cette étudiante, nous trouvons les trois temps : “ *Lors du premier partiel..., jusqu'à ce que..., Dès lors...* ”

Lors du premier partiel, je ne faisais pas trop le rapprochement, et j'avais du mal à mettre en relation les $o(x)$ et les eva. Jusqu'à ce que j'apprenne que $o(x) = eva.x$. Dès lors, je sus dérouler les développements limités de base.

M.W.

M.W. revit son expérience comme si elle y était :

C'est pour la deuxième expression que j'ai eu des problèmes. J'ai fait un développement correct, j'ai obtenu :

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)^2 &= (1 + x + o(x))^2 = (1 + x)^2 + 2(1 + x)o(x) + (o(x))^2 = \\ &= 1 + 2x + x^2 + 2o(x) + 2xo(x) + (o(x))^2\end{aligned}$$

A ce moment là, je me suis dit : on ne m'a pas demandé le DL à un ordre précis, je trouve des termes en x^2 , alors je vais faire ce DL à l'ordre 2. Ce qui ne s'est pas avéré très judicieux (suivent des explications et le résultat exact). Je pense maintenant avoir cerné le raisonnement de ce type d'exercice.

VI. LE LIEN AVEC L'INSTITUTIONNALISATION

Nous venons de décrire un dispositif qui propose aux étudiants de se mettre en position réflexive et qui permet à certains de retrouver le déroulement temporel de leur apprentissage. Nous avons montré que ce dispositif a fait émerger une connaissance d'ordre II, qu'il faut maintenant institutionnaliser. Il est très difficile d'institutionnaliser ces connaissances, dans la mesure où un simple discours du professeur ne peut évidemment pas suffire. Pour ce faire, nous proposons de mettre les étudiants en situation de vivre une expérience : autrui et la réalité mathématique fournissent les rétroactions nécessaires à l'établissement du vrai et du faux, et l'expérience vécue se prête à un retour réflexif ; le sujet peut s'arrêter pour regarder ce qu'il a fait, mettre à jour les connaissances inscrites dans ces actions et retenir l'histoire de ce qui s'est passé. C'est bien ce qu'ont fait les étudiants entre P1 et P2, nous en avons montré des traces dans leurs copies.

Le couple (copie virtuelle, partiel réflexif) a fait émerger la connaissance d'ordre II pour un grand nombre d'étudiants. Une fois qu'elle a émergé, le maître peut l'institutionnaliser. Ce dispositif permet d'envisager l'extension de la notion de milieu. Le couple (copie virtuelle, partiel réflexif) constituerait alors un milieu pour une connaissance d'ordre II sur la définition.

Ce travail n'était pas un travail expérimental. Le cours d'analyse était terminé après P2, la suite de l'enseignement étant consacré à l'algèbre linéaire. Mais on peut imaginer à partir de là un dispositif didactique pour l'enseignement de cette connaissance : P1, copie virtuelle, P2, et débat en classe suivi de l'institutionnalisation de deux connaissances, l'une d'ordre I, la définition de $o(x)$ entre autres, et l'autre d'ordre II : "une définition définit comme elle est censée définir et c'est utile pour faire des mathématiques qui soient des mathématiques".

VII. CONCLUSION

Tout le monde sait qu'une définition définit et qu'en mathématique il y a des définitions et qu'il faut les connaître pour faire des mathématiques. Or nous constatons que la grande majorité des étudiants ne connaît pas l'énoncé exact des définitions et ne s'en servent pas de façon explicite ni même de façon implicite. Dans P1, 65 étudiants ont répondu à l'exercice, 6 donnent une définition du type $o(x^n)=x^n.eva$ et 3 donnent une réponse exacte, pas forcément en utilisant explicitement la définition. Dans P2, 60 étudiants ont refait l'exercice,

50 donnent une définition et, ainsi que nous l'avons montré, nous avons pu différencier leurs réponses. La nature des explications données en P2 montre que certains étudiants ont appris quelque chose sur la définition au-delà de son énoncé pur et simple.

Qu'est-ce qu'apporte le modèle des ordres de connaissances ? Si nous restons dans l'ordre I, nous pouvons nous tromper sur ce qui pose problème aux étudiants. Nous apportons des réponses inadaptées, et nous leur apportons des aides qui ne les aident pas. La modélisation qui distingue les connaissances d'ordre I de celles d'ordre II permet de comprendre que les connaissances d'ordre I ne sont pas les seules à acquérir pour faire des mathématiques. Nous identifions clairement ici d'autres connaissances indispensables pour faire des mathématiques et nous pouvons dès lors réfléchir à des situations qui permettront de les faire émerger et ensuite de les institutionnaliser.

Après notre travail sur le caractère nécessaire des énoncés mathématiques, le travail que nous venons de présenter est un deuxième exemple de l'utilisation de ce modèle.

BIBLIOGRAPHIE

- ASSUDE T., SACKUR C. & MAUREL M. (1998): CESAME: The Personal History of Learning Mathematics In the Classroom. An Analysis of Some Students Narratives, in I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I* (texte repris dans PoME 11, <http://www.ex.ac.uk/~PErnest/>).
- CESAME (1997), Présentation de travaux. *Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, 70-75.
- LEONARD F. & SACKUR C. (1991), Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10(2/3) 205-240.
- MAUREL M. (2001), Derrière la droite, l'hyperplan. *Repères-IREM* 42 83-114
- RICŒUR P. (1983), *Temps et Récit*. Seuil
- SACKUR C. & MAUREL M. (2000), Les inéquations en classe de seconde. Une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x*53 5-26.
- SACKUR C., DROUHARD J-PH., MAUREL M. & PECAL M. (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire?, *Repères-IREM*. 28 37-68.
- SAUTER M. (2000), Formation de l'esprit scientifique par les narrations de recherche au collège. *Repères-IREM*. 39 7-20.

- SENSEVY G. (1996), Le temps didactique et la durée de l'élève. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 16/1 7-46.
- VERMERSCH P. (1994), *L'entretien d'explicitation*, Paris, ESF.

PROPOSITION D'UN MODELE POUR L'ETUDE DIDACTIQUE DE LA MEMOIRE

Yves Matheron

Université de Provence, IREM et IUFM d'Aix-Marseille

« On pourrait traiter toute la didactique sous ce terme de mémoire » a pu écrire Julia Centeno dans sa thèse posthume. Cependant, depuis la publication de ce travail fondateur, peu de recherches ont poursuivi l'étude du thème de la mémoire au sein des systèmes didactiques, même si bien des auteurs, et non des moindres - d'Aristote à Paul Ricœur, en passant par Henri Bergson ou Maurice Reuchlin - s'accordent pour associer mémoire et apprentissage. L'objet de cette communication, qui s'appuie sur un travail de thèse sous la direction d'Alain Mercier, est d'exposer une reprise possible de la problématique de la mémoire dans les institutions didactiques, en en proposant une modélisation.

S'engager dans un travail sur la mémoire se heurte immédiatement à la polysémie du terme et aux méprises qu'elle induit⁴⁰. De fait, la modélisation proposée se démarque par bien des points de ce que l'on entend d'ordinaire sous le terme de « mémoire ».

On la voit volontiers comme une faculté personnelle, propre au sujet, interne, voire intime ; elle est ici montrée *collective, externe, visible, ostensive* et, de surcroît, *outillée* par d'autres instruments que le seul cerveau humain. On la traque grâce à des dispositifs expérimentaux, dans des laboratoires, et souvent à travers l'expression de ses dysfonctionnements, de ses pathologies, or le propos porte dans ce texte sur son observation dans le normal et *l'ordinaire des classes de mathématiques*, hors laboratoire et hors expérimentation. On la considère généralement comme associée à la constitution personnelle de l'identité, ce qui renvoie alors volontiers aux idées de différenciation interindividuelle, voire de liberté individuelle, or, dans ce qui suit, lorsqu'il s'agira de considérer la mémoire personnelle, la personne sur laquelle porte le regard sera d'abord vue comme *assujettie* à une

⁴⁰ Ricœur (2000) indique une voie pour aborder le thème de la mémoire : « À l'encontre de la polysémie qui, à première vue, semble propre à décourager toute tentative même modeste de mise en ordre du champ sémantique désigné par le terme de mémoire, il est possible d'esquisser une phénoménologie éclatée, mais non radicalement dispersée, dont le rapport au temps reste l'ultime fil conducteur. »

institution principale, l'institution didactique, et secondairement à des institutions pour l'étude qui lui sont annexées.

La conception culturelle courante de la mémoire semble ainsi l'anti-thèse de la thèse principale sur laquelle se fonde ce travail. Cette thèse peut s'exprimer ainsi : pour accéder à l'étude du rôle de la mémoire, dans l'étude des mathématiques, il est nécessaire de considérer cette mémoire comme l'expression d'un rapport, inscrit dans une temporalité, à une pratique au sein d'une institution.

I. UNE DEMARCATION NECESSAIRE PAR RAPPORT AUX THEORIES COURANTES DE LA MEMOIRE

Tout d'abord, pour rentrer dans la problématique dans laquelle se place l'exposé, il est nécessaire de mettre à l'écart certaines théories de la mémoire : celles qui, issues de la psychologie, diffusent au sein de la société par l'intermédiaire de revues de vulgarisation qui font régulièrement leurs couvertures sur le thème⁴¹. Elles importent le double handicap d'une absence, classique, de prise en compte du contexte, et aussi d'une construction basée sur un paradigme limitatif : pour appréhender le « sémantique » en tant que dimension du cognitif, elles se déploient selon le principe de la catégorisation. Or les concepts mathématiques, se prêtent mal à la catégorisation, parce qu'ils renvoient souvent simultanément à une quantité de catégories qu'ils dépassent par leur mise en relation. De surcroît, si l'on tente de se servir de ces théories afin de rendre compte de phénomènes mnésiques spécifiques de l'étude des mathématiques (Matheron 2000, pp. 25-42), l'analyse nécessite rapidement la mobilisation de toutes les catégories : mémoire à court et long terme, épisodique et procédurale, explicite et implicite, sémantique et lexicale, etc. La catégorisation est donc inopérante, sauf à vouloir appréhender la mémoire relative à l'enseignement des mathématiques - la mémoire didactique - sous l'angle des déficits rapportés à des catégories posées *a priori* ; mais ceci n'est pas l'objet du travail exposé qui se préoccupe de la mémoire utilisée, en général, par des élèves et des professeurs de classes ordinaires, c'est-à-dire réputés « normaux »... et non pathologiques !

Un autre champ des sciences humaines s'est penché sur l'étude de la mémoire : les théories sociologiques de la mémoire, au premier rang desquelles se trouve l'œuvre de

Maurice Halbwachs (1924 & 1950), présentent l'intérêt de considérer la mémoire comme portée par une collectivité humaine, et non comme propriété spécifique d'un individu. En première approche, cette préoccupation semble pouvoir mieux rendre compte de la dimension collective associée à l'étude scolaire. L'œuvre d'Halbwachs contient une idée-force – la mémoire est relative à des cadres sociaux -, qui ouvre sur deux directions. À partir de l'idée qu'un cadre social est une structure sociale unifiant une pensée, on peut en effet soit rechercher quelle est la forme spécifique que prend cette mémoire, soit rechercher comment se constitue cette forme spécifique.

En suivant la première direction, se trouvent un ensemble de travaux qui décrivent la spécificité selon le cadre social : les travaux d'Halbwachs sur la mémoire familiale, religieuse, de classe telle la noblesse, ceux de Gérard Namer sur les déportés, les Juifs égyptiens, les contremaîtres ou ceux d'Anne Muxel sur la mémoire familiale. Ces travaux ont la double particularité, tout d'abord, de considérer le cadre comme relatif à de grandes institutions (la famille, la religion, les Juifs, une classe sociale, etc.), et ensuite, de considérer la mémoire comme un discours que l'on va recueillir sous la forme d'histoires de vie. Or l'étude des mathématiques trouve place dans une multitude de petites institutions annexées aux classes du système éducatif, et le discours qui porte sur « une histoire de vie » de l'étude menée par des élèves ne nous renseigne pas forcément sur les phénomènes mémoriels relatifs à l'étude des mathématiques.

En suivant la seconde direction, illustrée par les études d'Halbwachs lui-même sur la mémoire collective chez les musiciens ou chez les géomètres, on met l'accent non plus sur le discours de mémoire, mais sur l'activité spécifique d'un groupe social constituant le cadre, activité qui organise le type de mémoire propre au groupe, et se rapportant précisément à cette activité. Mais, ici encore, l'activité peut être essentiellement langagière. C'est le cas du célèbre exemple, étudié par Evans-Pritchard, des Nuers qui doivent dire la lignée des cinq ancêtres dont ils descendent pour déterminer les offrandes données et reçues lors de cérémonies. Ou encore des études ethnographiques, telles que celle de Françoise Zonabend sur un groupe de femmes du village de Minot en Bourgogne : elles reconstruisent la mémoire de la communauté villageoise en se promenant certains jours dans le cimetière, et en se racontant les histoires de vie des personnes qu'elles ont connues et qui y sont enterrées. De

⁴¹ À celles-ci il faut adjoindre divers ouvrages, dotés d'une certaine notoriété dans le milieu enseignant, qui voudraient faire accroire que certains résultats de recherches sur la mémoire permettent d'ores et déjà de régler le problème pratique du rôle de celle-ci à l'École.

même, dans l'étude de Maurice Bloch relative à la mémoire de la répression du soulèvement à Madagascar en 1947, la mémoire se dit à partir d'objets, notamment topographiques.

Nous retrouvons donc, comme prédominant dans ces travaux, le même aspect langagier. Certes, y apparaît la notion intéressante d'activité comme support de la mémoire mais, assez curieusement, l'accent n'est pas mis par les chercheurs sur les outils qui instrumentent l'activité. Adopter le point de vue de la théorie anthropologique du didactique, qui se détourne soigneusement de l'écueil pour l'analyse didactique que peut représenter la métaphore des mathématiques comme un langage (cf. Marianna Bosch 1994 et Marianna Bosch & Yves Chevallard 1999), conduit à considérer les mathématiques comme une pratique, un travail, qui s'accomplit grâce à des outils au sein d'une institution.

La mémoire peut-elle être relative à une pratique instrumentée ? Ricœur (2000) répond sans hésiter par l'affirmative en revenant au concept bergsonien de « mémoire-habitude » qu'il enrichit, parlant après Marcel Mauss et Pierre Bourdieu, de la prise en compte des capacités corporelles et des habitus sociaux ; il parle alors des « savoir-faire » auxquels, dit-il, *« dans la vaste panoplie des usages du mot "mémoire", nous appliquons une des acceptions admises de ce mot »*. Il rejoint ainsi les résultats de travaux anciens, mais dont la prise en compte est souvent négligée lorsqu'il s'agit de mémoire : ceux de Lev Sémionovitch Vygotski, vieux de soixante-dix ans, qui montrent comment des outils sémiotiques facilitent la mémorisation, ou ceux d'André Leroi-Gourhan, vieux de quarante ans, qui inscrivent la mémoire dans « la synergie opératoire de l'outil et du geste ».

Dès lors, une conséquence immédiate découle du positionnement anthropologique de la mémoire pour l'étude des mathématiques. Elle relève de deux pratiques : celle des mathématiques et celle de leur étude. On doit alors considérer au moins trois instances pour la mémoire didactique : une qui relève de la pratique du savoir lorsqu'on en maîtrise les outils, une qui relève de l'institution d'étude, et une qui relève de l'étude de la maîtrise des outils de la pratique. L'analyse des deux dernières dimensions permet d'envisager tout à la fois comment s'opère la mémorisation par l'assujettissement de la personne à l'institution d'étude, et de quel degré de liberté dans l'expression de sa mémoire dispose la personne. Nous aboutissons ainsi à la proposition d'un modèle de la mémoire selon trois dimensions : personnelle, institutionnelle et propre au savoir pour sa pratique.

II. LA MEMOIRE DU SAVOIR

L'objet de ce paragraphe est de montrer que le savoir mathématique contient une mémoire des pratiques qui lui sont relatives ; ce que nous nommons *la mémoire du savoir*. Pour qui s'adonne au travail mathématique, ou en prend connaissance, il y a nécessité afin de contrôler la justesse du travail réalisé, de s'attacher à la *chaîne de raisons* qui le charpentent. Étudier la mémoire du savoir nécessite de « faire un pas de côté » en donnant la primauté à la *chaîne d'actes* volontaires, conscients et revendiqués, que des hommes ont dû accomplir en certaines institutions, à l'échelle de l'histoire plusieurs fois millénaire des savoirs mathématiques, pour pouvoir fonder ces savoirs.

L'étude suivante, menée à grands traits, et relative à l'exemple du développement historique du calcul différentiel et intégral nous permettra de montrer plus facilement cela. On se réfère dans ce qui suit, soit aux ouvrages originaux des mathématiciens cités, soit aux commentaires qu'ont pu en faire des historiens des mathématiques.

1. Étude d'un exemple

En 1666, Leibniz soutient sa thèse dans laquelle se trouve une étude des différences des carrés de deux entiers consécutifs et de la somme de ces différences, égale au dernier carré :

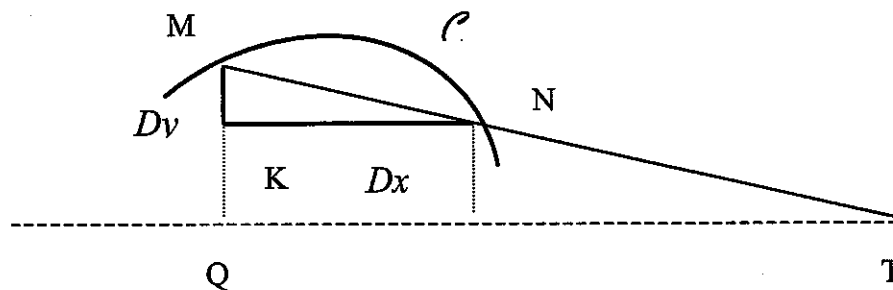
$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36 \\ & 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 \\ & 1+3+5+7+9+11=36 \end{array}$$

À partir de 1675, Leibniz utilise un formalisme qui le conduit à écrire :

$$\begin{array}{cccccc} y : 0, & 1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36 \\ dy & 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 \\ \int : \text{initiale de } \textit{summa omnium}. \text{ D'où : } \int dy = y \end{array}$$

Lors d'une mission diplomatique à Paris en 1672, Leibniz obtient de Huygens, le *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal dans lequel, dit-il : « j'y trouvai une lumière que l'auteur lui-même n'y avait point vue. » C'est ainsi qu'en 1684, dans *Acta eruditorum*, le problème du triangle caractéristique trouvé dans le *Traité des sinus du quart de cercle*, devient pour Leibniz : $\frac{Dy}{Dx}$ reste constant et sa limite (cas du triangle inassignable) s'écrit $\frac{dy}{dx}$.

En 1684, l'idée est utilisée dans *Nova methodus pro maximis et minimis* pour le problème des tangentes à une courbe, et non plus des tangentes à un cercle. Elle peut s'illustrer de la manière suivante :



Le triangle KMN restant semblable au triangle QMT lorsque N varie sur la courbe $\mathcal{C}$:

$$\frac{Dy}{Dx} = \frac{QM}{QT} = \frac{y}{\text{sous-tangente}}, \text{ d'où par passage à la limite lorsque N tend vers M :}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\text{sous-tangente}}$$

On connaît les développements du calcul différentiel et intégral durant le siècle qui suivit. Nous nous arrêtons sur le travail de Lagrange dont le projet, rendu public dès 1772, est de substituer à l'emploi des différentielles celui des fonctions dérivées.

Ce changement n'est pas anodin et ne relève pas d'un « caprice » mathématique. Ovaert (1976) récapitule, en effet, les intentions de Lagrange quant aux objectifs qu'il se fixe et les critiques qu'il formule à l'encontre de l'emploi des anciennes méthodes du calcul infinitésimal :

« 1. Insistance sur l'emploi des fonctions dérivées et non des différentielles [...]

Selon Lagrange, l'emploi des différentielles a non seulement entraîné un manque de clarté et de rigueur, mais il a suscité un obstacle épistémologique à la construction du calcul différentiel à plusieurs variables. [...]

2. Établir les principes du calcul différentiel et intégral sur des règles purement algébriques, à l'exclusion de toute considération de géométrie et de mécanique [...]

3. Le calcul différentiel et intégral doit apporter des bases claires à la géométrie et à la mécanique [...]

4. Le recours à toute métaphysique des infiniment petits est expressément exclu. [...]

5. À l'opposé, il faut recourir à des analyses rigoureuses dans les domaines qui le permettent et retrouver la perfection des raisonnements des Anciens, mais par l'usage des moyens théoriques

modernes. [...] Nous voyons que, comme Euler, Lagrange situe la source de la rigueur dans la manipulation algébrique et formelle des fonctions et leurs développements en série. [...]

6. Ces conclusions font apparaître un autre aspect important des intentions de Lagrange : la méthode des infiniment petits est efficace, il ne faut renoncer à aucun de ses résultats. Il est donc inutile de reprendre toutes les applications de cette méthode [...] Seuls sont à corriger les principes. [...] »⁴²

On peut relever de cette liste d'objectifs quelques non-ostensifs, quelques « concepts mathématiques », émergents cristallisés de certaines pratiques mathématiques dont l'engagement dans les « nouvelles » pratiques du calcul infinitésimal élaborées par Lagrange va induire réorganisations, modifications, déplacements par rapport aux anciennes. Ainsi, par exemple, les principes du calcul différentiel et intégral doivent découler, pour Lagrange, du calcul algébrique et non plus de la géométrie, comme pour Leibniz, les Bernoulli, L'Hospital, ou de la mécanique, comme c'était le cas avec Newton et sa méthode des fluxions. Aussi, tout au contraire, dans la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, c'est « la théorie des fonctions », l'analyse, qui va fournir des applications à la géométrie et à la mécanique. Pour cela, les « fondements » du calcul infinitésimal seront revisités, eux aussi. Apparaissent en effet pour Lagrange, à cette époque, comme relevant de la métaphysique, les méthodes des infiniment petits et des limites. Cette dernière méthode, utilisée par Maclaurin et D'Alembert, et qui n'a pas encore acquis la rigueur à laquelle elle accédera au cours du XIX^e siècle, encourt le reproche de Lagrange : « *l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer, est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul.* » C'est, entre autres choses, de cette « métaphysique » que veut se dégager Lagrange, mais aussi de l'écriture du rapport de deux différentielles considéré comme « *réduit à l'expression vague et indéterminée de zéro divisé par zéro* ».

Le développement des mathématiques au cours du XVIII^e siècle, permet à Lagrange d'utiliser diverses « clés » pour réaliser son projet. En effet, Euler a développé le non-ostensif « fonction » (défini comme étant « *une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes* » pour les fonctions d'une variable⁴³), et introduit l'ostensif $f(x,y,z,\dots)$ ⁴⁴. Newton et Euler ont obtenu les

⁴² Ovaert et alii (1976), pp. 167-171.

⁴³ Lagrange (1797) en donne la définition suivante : « *On appelle fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, reliées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.* »

développements en série entière de fonctions rationnelles et irrationnelles, de l'exponentielle et du logarithme, du sinus et du cosinus, de l'arc tangente, etc. Lagrange peut ainsi écrire, dès la leçon 1 des *Leçons sur le calcul des fonctions*, « Le développement des fonctions, envisagé d'une manière générale, donne naissance aux fonctions dérivées de différents ordres ; et l'algorithme de ces fonctions une fois trouvé, on peut les considérer en elles-mêmes et indépendamment des séries d'où elles résultent. Ainsi une fonction donnée étant regardée comme primitive, on en peut déduire, par des règles simples et uniformes, d'autres fonctions, que j'appelle *dérivées* ; et lorsqu'on a une équation quelconque entre plusieurs variables, on peut passer successivement aux équations dérivées, et remonter de celles-ci aux équations primitives. Ces transformations répondent aux différentiations et aux intégrations ; mais dans la théorie des fonctions, elles ne dépendent que d'opérations purement algébriques, fondées sur les simples principes du calcul formel. »

C'est ce plan d'exposition que Lagrange suit déjà dans la *Théorie des fonctions analytiques* de 1797. Les fonctions dérivées de f sont définies comme coefficients des puissances de i dans le développement en série de $f(x+i)$, f étant la fonction primitive :

« Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x . Si à la place de x on met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$, dans laquelle les quantités $p, q, r, \&c.$, coefficients des puissances de i , seront de nouvelles fonctions de x , dérivées de la fonction primitive fx , et indépendantes de la quantité i . » p. 2

Lagrange démontre ensuite que les puissances de i ne peuvent qu'être entières (pp.7-8), puis s'intéresse à chacun des termes du développement en série. Après avoir démontré que « [...] $f(x+i)$ sera égale à fx , plus à une quantité qui doit disparaître en faisant $i=0$ », donc qui s'exprime selon les puissances entières de i , Lagrange obtient le développement limité à l'ordre 1 : « On aura donc ainsi $f(x+i)=fx+iP$, donc $f(x+i)-fx=iP$, et par conséquent divisible par i ; la division faite, on aura $P=\frac{f(x+i)-fx}{i}$. »

⁴⁴ Pour Lagrange (1797) : « Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x , nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f , ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la formulation d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2 ou $a+bx$ ou $\&c.$, on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi, fx désignera une fonction de x , $f(x^2)$, $f(a+bx)$, $\&c.$ désigneront des fonctions de x^2 , de $a+bx$, $\&c.$ Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y , nous écrirons $f(x,y)$, et ainsi des autres. »

Il montre qu'en itérant le raisonnement précédent, on obtient ainsi les différents « coefficients des puissances de i », et donne en exemple, les développements de $\frac{1}{x}, \sqrt{x}$. Puis :

« Après ces considérations générales sur le développement des fonctions, nous allons considérer en particulier la formule du n°3, $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$, et chercher comment les fonctions dérivées $p, q, r, \&c.$ dépendent de la fonction primitive fx . » p. 13

En remplaçant i par $i+o$, le développement devient : $fx+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+\&c.$, puis en développant les puissances de $i+o$: $fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\&c.+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\&c.$

En remplaçant x par $x+o$, « et en ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o », les fonctions $fx, p, q, r, \&c.$ deviennent respectivement $fx+f'xo+\&c., p+p'o+\&c., q+q'o+\&c., r+r'o+\&c.$ La formule du n°3⁴⁵ devient alors : $fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\&c.+f'xo+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\&c.$ Puis :

« Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o , on aura, en comparant les termes affectés de o , de io , de i^2o , &c. $p=f'x, 2q=p', 3r=q', 4s=r', \&c.$ Maintenant, de même que $f'x$ est la première fonction dérivée de fx , il est clair que p' est la première fonction dérivée de p , que q' est la première fonction dérivée de q , r' la première fonction dérivée de r , et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par $f'x$ la première fonction dérivée de fx , par $f''x$ la première fonction dérivée de $f'x$, par $f'''x$ la première fonction dérivée de $f''x$, et ainsi de suite, on aura $p=f'x$, et de-là $p'=f''x$; donc $q=\frac{p'}{2}=\frac{f''x}{2}$; donc $q'=\frac{f'''x}{2}$, et de-là $r=\frac{q'}{3}=\frac{f'''x}{2\cdot 3}$; donc $r'=\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3}$, et de-là $s=\frac{r'}{4}=\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}$, et ainsi de suite. Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction $f(x+i)$, on aura $f(x+i)=fx+f'xi+\frac{f''x}{2}i^2+\frac{f'''x}{2\cdot 3}i^3+\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}i^4+\&c.$ » p. 14.

De la formule de Taylor, ainsi démontrée, Lagrange tire les définitions suivantes :

« Nous appellerons la fonction fx , *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'x, f''x, \&c.$ qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celles-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée $f'x$, *fonction prime*; la seconde dérivée $f''x$, *fonction seconde*; la troisième fonction dérivée $f'''x$, *fonction tierce*, et ainsi de suite. » pp.14-15.

⁴⁵ Rappelons que la formule du n°3 est $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+\&c.$

Avec le développement du concept de limite au cours du XIX^e siècle, Cauchy peut donner, quelques décennies plus tard, la définition de la dérivée d'une fonction comme limite en 0 du rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, et non plus comme « coefficients des puissances de i » dans la formule connue désormais sous la désignation de Taylor-Lagrange, pour une forme particulière de son reste.⁴⁶ Cependant, le système d'ostensifs défini par Lagrange va fixer un système de pratiques.

2. Permanence de certaines pratiques ostensives et oubli des raisons d'être

L'ostensif scriptural f' et l'ostensif langagier « dérivée » demeurent de nos jours, de même que les ostensifs $\int$ et « primitive ».

La genèse des pratiques dans lesquelles ils sont engagés a changé, au point de pouvoir être ignorée, donc « oubliée » de qui se contente de leur manipulation, sans la référer à l'histoire des mathématiques. Il en résulte alors que, de l'organisation nouvelle des pratiques dans lesquelles ces ostensifs sont engagés, vont émerger des non-ostensifs nouveaux. Ainsi, le non-ostensif « la fonction dérivée » n'aurait sans doute pas le même sens dans l'organisation du savoir mathématique, parce que renvoyant à d'autres pratiques ostensives, si son histoire s'était arrêtée avec Lagrange. Il serait apparu, ainsi que le définit Lagrange, comme « dérivant » d'une fonction « primitive », car c'est effectivement à partir d'une pratique d'où il découle d'une fonction « première », développée en série de Taylor, qu'il est défini par Lagrange. Alors que dans la présentation standard du calcul différentiel et intégral « classique », le non-ostensif « primitive d'une fonction » apparaît, inversement, comme

⁴⁶ En fait, comme l'indiquent Ovaert et Verley (1997) : « Il n'est donc pas possible, comme l'a tenté Lagrange dans la *Théorie des fonctions analytiques* (1797), de fonder le calcul différentiel sur le développement en série de Taylor. » La raison en est que « .. l'application de Taylor T de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans l'anneau $C[[X]]$ des séries formelles à coefficients complexes, définie par $T : f \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} X^n$ est surjective. » (souligné par nous).

Le Bourbaki des *Éléments d'histoire des mathématiques* n'est, quant à lui, guère tendre envers le travail de Lagrange : « Le monumental ouvrage de Lagrange représente une tentative de fonder l'analyse sur l'une des plus discutables conceptions newtoniennes, celle qui confond les notions de fonction arbitraire et de fonction développable en série de puissances, et de tirer de là (par la considération du coefficient du terme du premier ordre dans la série) la notion de différentiation. » pp. 246-247. Même s'il concède que donner la démonstration de la formule de Taylor, avec reste intégral et son évaluation, et fournir des matériaux pour, à la fois, la théorie des fonctions d'une variable complexe et la théorie des séries formelles, n'est pas rien, il conclut : « Mais, du point de vue de son objet immédiat, elle représente un recul plutôt qu'un progrès. » p. 247 !

découlant du non-ostensif « dérivée d'une fonction », car la pratique de la dérivée est première.

Citons pour illustrer cela l'exemple, antérieur à la période des « mathématiques modernes » à laquelle on pourrait à tort attacher ce trait, du *Cours de mathématiques spéciales* de H. Commissaire et G. Cagnac (1936), dans lequel les raisons d'être des ostensifs utilisés par Lagrange ont d'ores et déjà disparues. Cet ouvrage définit de la manière suivante les fonctions primitives, en son chapitre II « Recherche des fonctions primitives » du troisième et dernier tome consacré au calcul intégral :

« 406. *Fonctions primitives et intégrales indéfinies.* - DÉFINITION. - Étant donnée une fonction $f(x)$, on appelle primitive de $f(x)$ toute fonction admettant $f(x)$ pour dérivée.

NOTATION. - On représente une fonction primitive quelconque de la fonction $f(x)$ par le symbole $\int f(x)dx$ (qui s'énonce somme de $f(x)dx$).

Les notations $y'=f(x)$ ou $dy=f(x)dx$, d'une part, et $y=\int f(x)dx$ d'autre part, ont la même signification.

Si $F(x)$ est une primitive particulière de $f(x)$, on a

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

C étant une constante arbitraire.

[...]

Le symbole $\int$ s'appelle le signe somme ; la fonction $f(x)$ est dite placée sous le signe somme ; $f(x)dx$ est appelé l'élément différentiel de l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ » p. 19.

Cette définition importe, à travers les non-ostensifs qu'elle désigne (fonction, primitive, dérivée, élément différentiel, intégrale indéfinie), et les ostensifs qu'elle contient ($f(x)$, y' , dy , dx , $F(x)$, C , $+$, $\int$, $\int f(x)dx$), la mémoire du savoir mathématique, des choix des règles et conventions qui furent faits, sans pour autant les expliciter ou les rendre intelligibles de prime abord.

Elle importe, de la même manière, les débats mathématiques et les avancées qui en résultèrent, sans pour autant les justifier, ni les rendre compréhensibles au lecteur qui s'arrêterait, en ce point, à la lecture de l'ouvrage : pourquoi y a-t-il équivalence entre « $y'=f(x)$ ou $dy=f(x)dx$,⁴⁷ d'une part, et $y=\int f(x)dx$ d'autre part » ? Pourquoi « le signe

⁴⁷ On peut remarquer que cet ouvrage donne aussi la notation ostensive due à Leibniz, sans autre forme d'explication. Il faudrait vérifier si le manuel en faisait un usage spécifique que n'aurait pas permis l'écriture $f'(x)$, autrement que pour la notation d'une primitive sous forme d'intégrale indéfinie.

somme » ? Pourquoi « intégrale » et pourquoi « indéfinie » ? Y en a-t-il qui soient « définies » ?

Cet exemple montre que les ostensifs langagiers peuvent demeurer, tandis que les pratiques originelles dans lesquelles ils furent tout d'abord engagés, ainsi que les non-ostensifs qui en résultèrent, peuvent être oubliés.

Il montre aussi le processus par lequel les œuvres⁴⁸ mathématiques peuvent demeurer présentes dans la mémoire d'une institution donnée, à travers la perpétuation des pratiques utilisant les outils ostensifs bâtis au fil du développement de l'œuvre, alors que les raisons d'être de l'œuvre ont été oubliées⁴⁹. En reprenant les métaphores des « chaînes » évoquées par Halbwachs et Leroi-Gourhan, les « chaînes des raisons d'être » ont historiquement tendance à être oubliées, tandis que demeurent les « chaînes d'actes ».

Ces chaînes d'actes n'apparaissent pas, de prime abord, à qui pratique les mathématiques, parce que leur connaissance n'est pas nécessaire pour la pratique. Elles sont pourtant présentes, sous la forme du savoir qui est enjeu de la pratique mathématique et qui en constitue une mémoire cristallisée.

Nous trouvons donc la *mémoire du savoir*, en théorie anthropologique du didactique, à la fois au niveau des outils pour les pratiques mathématiques, et au niveau des « objets » sur lesquels ces pratiques portent : à savoir, d'une part les ostensifs (scripturaux qu'on nomme communément les « notations mathématiques », graphiques, gestuels, etc.) qui se donnent à voir, et d'autre part les non ostensifs associés (soit ce qu'on nomme communément « notions » ou « concepts »), les deux étant des produits de ces actes fondateurs.

Ainsi les chaînes d'actes producteurs d'ostensifs et de pratiques, décisions fondatrices assumées par leurs auteurs, commandent aux chaînes d'actions que l'usage de ces ostensifs engage, puisque les premières correspondent aux choix faits pour les secondes. Ces dernières commandent enfin, à leur tour, les gestes qui permettent l'accomplissement de la pratique. C'est dans ce sens, et dans ce sens seulement, que l'on peut dire que le savoir mathématique est dépositaire de mémoire.

⁴⁸ La notion d'œuvre est prise ici dans le sens que lui donne Chevallard (1996) : « J'appelle œuvre toute production humaine *O* permettant d'apporter réponse à un ou des types de questions *Q*, questions "théoriques" ou "pratiques", qui sont les *raisons d'être* de l'œuvre – et cela sans considération de la "taille" de l'œuvre (parmi les œuvres, beaucoup sont des "œuvrettes" : par exemple, la théorie de la transposition didactique) »

⁴⁹ Cette question est abordée par Chevallard (1997) : « Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui » in Actes du colloque « Défendre et transformer l'école pour tous », IUFM d'Aix-Marseille.

L'accomplissement d'un geste mathématique actualise le choix du type d'action, de l'acte volontaire dont le savoir est porteur, et qui commande le geste. Pour autant, ces activations ne supposent pas le souvenir narratif des actes fondateurs et des choix qui les ont produits : c'est même parce que la mémoire est incorporée dans les systèmes d'objets mathématiques, que les mathématiques peuvent sembler une pratique qui ne nécessite pas de mémoire, et que s'oublient les raisons qui les ont fondées.

C'est ainsi que la création d'ostensifs et leur utilisation réalisent, pour la pratique des mathématiques, le principe « d'économie de l'énergie cognitive » mis en évidence par Douglas (1999) dans le fonctionnement des institutions. Ce principe d'économie se retrouve, dans la pratique mathématique « ordinaire ». Lors d'une observation que nous analysons ci-dessous, deux élèves de Terminale S en font l'expérience pratique ; leur soumission à ce principe résulte de leur assujettissement à l'institution didactique. À quelques semaines d'intervalles, ils oublient, réellement, la coûteuse technique de résolution d'une équation logarithmique qui leur a été enseignée lorsque le défilement du texte du savoir ne permettait encore de disposer ni de l'ostensif (e^x), ni du non-ostensif (l'exponentielle), par lesquels cette économie pouvait s'obtenir ; ce faisant ils reconstruisent leur passé didactique.

III. LA MEMOIRE PRATIQUE

1. Étude d'un exemple

Lors de la séance du 5 février dans une classe de Terminale S qui étudie la fonction logarithme, un élève passe au tableau pour résoudre l'équation : $\ln x^2 + \ln x = 2$ que les élèves avaient tous à rechercher pour ce jour-là. Après être parvenu à $3\ln x = 2\ln e$, il réfléchit un instant puis écrit $x^3 = e^2$; se produit alors l'épisode suivant (P désigne le professeur et ce qui est écrit au tableau est noté en gras) :

16. [...]

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{e^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

17. P : Quoi, quoi, quoi ? Tu simplifies par ln de... !

18. L'élève efface $\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

19. P : Alors, écoute-moi ! Qu'est-ce que ça veut dire $\sqrt[3]{e^2}$? Ça veut dire que si tu mets ce nombre-là au cube tu trouveras e^2 , d'accord ? Si tu mets : $(\sqrt{e})^3$ qu'est-ce que tu vas trouver ? Tu vas trouver...

20. L'élève : $e\sqrt{e}$

21. P : Tu vas trouver $e\sqrt{e}$, pas e^2

$$(\sqrt{e})^3 = e\sqrt{e}$$

Attention !... Bon, c'est vrai qu'on n'a pas vu encore les puissances fractionnaires !... Ça va ?... C'est-à-dire que pour rédiger ça, on va plutôt rédiger, puisqu'on n'a pas vu les exposants fractionnaires... (P rajoute)

$$\Leftrightarrow 3\ln x = 2\ln e \Leftrightarrow \ln(x^3) = \ln(e^2)$$

$$\text{Donc } x^3 = e^2 \text{ donc } x = \sqrt[3]{e^2}$$

La séance du 5 février, qui a été filmée, est montrée dans son intégralité le 25 mars à deux bons élèves de cette classe présents le 5 février. Le 25 mars, il leur est demandé de dire les souvenirs que la projection du film de la séquence du 5 février évoque pour eux, au fur et à mesure de son défilement. Les propos sont enregistrés. Lors du passage relatif à la résolution de $\ln x^2 + \ln x = 2$, et de la difficulté rencontrée par l'élève à propos de la racine cubique, l'échange relatif au tour de parole 16 du 5 février, est le suivant (Q désigne la personne qui questionne, G l'élève garçon et F l'élève fille) :

1. Q : Et là, vous, vous faites comment ? Parce qu'il a l'air d'être embarrassé... 2. F : Moi, j'avais marqué $\ln x = \frac{2}{3}$ 3. G : Voilà, ouais 4. Q : Et là ? 5. F : Et après 6. G : $x = e^{\frac{2}{3}}$ 7. F : $x = e^{\frac{2}{3}}$, oui [...] 12. Q : Et d'écrire $e^{\frac{2}{3}}$, ça vous gênait pas ?... 13. G : Non, non. En fait on avait fait comme ça : 2, c'est $2\ln e$, donc égale $\ln e^2$. Donc dès qu'on avait $\ln x = 3$, donc $x = e^3$

Q fait part de son étonnement à propos de l'utilisation de cette technique à cet instant de l'année :

14. Q : Oui, mais là y'a une nouveauté quand même... C'est la puissance fractionnaire, l'exposant fractionnaire.

Ce qui provoque l'embarras de F et G :

15. F : Oui 16. G : Là, heu... Ça on l'a fait après, l'exposant fractionnaire, on a fait ça quand même !
 17. F : Oui 18. Q : Oui. Je veux dire : là le $e^{\frac{2}{3}}$, vous l'avez fait après, quand vous avez étudié les fonctions puissances j'imagine ? 19. F et G : Oui 20. Q : Exponentielle et puissance 21. F : Oui 22. Q : A ce moment-là du cours, vous ne l'aviez pas fait ? 23. F : Oui, à ce moment-là, non on ne l'avait pas fait.

2. Interprétation de l'exemple

L'observation montre que, pour ces élèves, tout semble s'être passé comme si le savoir nouveau relatif à l'exponentielle, enseigné depuis par le professeur et qu'ils ont appris, avait effacé de leur mémoire des connaissances pratiques dont ils disposaient lorsque ce savoir n'était pas encore disponible. Par exemple il n'est plus besoin pour eux, désormais, de mobiliser la substitution de 1 par l'écriture $\ln e$, ni la technique passant par l'étape $\ln x = \ln y$ ou la racine n -ième. Un non-ostensif nouveau, l'exponentielle, contient, grâce aux manipulations ostensives qu'il autorise, des réponses aux questions qui nécessitaient l'emploi de ces techniques. Leurs raisons d'être s'effacent derrière la manipulation ostensive : $\ln x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2}{3}}$ et, avec elles, la mémoire pratique des techniques antérieures. Les pratiques mathématiques des élèves objectivent les derniers niveaux travaillés de leur mémoire relative à la pratique des mathématiques.

Arrivés en ce point, on pourrait se poser la question de la définition du type de mémoire dont nous parlons ici. S'agit-il de la mémoire personnelle et privée des élèves, qui opère à leur insu, comme cela semble être le cas pour le commun des mortels, soumis aux caprices de sa propre mémoire ? Ou bien s'agit-il d'une mémoire artificielle, car officielle, travaillée sciemment par l'institution, et à partir de laquelle il est possible, de provoquer des « oublis officiels », mais dont personne n'est réellement dupe ? Ainsi, le professeur pourrait-il dire cette mémoire en ces termes : « Quand on aura à résoudre une équation du type $\ln x = a$, on se souviendra que la solution est $x = e^a$ », sous-entendant ainsi que la technique antérieure n'a plus cours et que, même si certains élèves la conservent dans leur mémoire, il n'est plus désormais de mise de l'utiliser ; donc qu'à ce moment de son histoire, elle est officiellement oubliée de l'institution d'étude.

Ce deuxième type de mémoire, qui définirait les comportements conformes, transmis et attendus à un moment donné du temps didactique, et dans une institution donnée, se

rapproche du sens couramment attribué à la mémoire collective. C'est une mémoire qui nécessite d'être instrumentée pour être travaillée, agie, et qui s'accommode de la définition que donne Leroi-Gourhan (1964) :

« Mémoire est entendu, dans cet ouvrage, dans un sens très élargi. C'est non pas une propriété de l'intelligence mais, quel qu'il soit, le support sur lequel s'inscrivent les chaînes d'actes. On peut à ce titre parler d'une "mémoire spécifique" pour définir la fixation des comportements des espèces animales, d'une mémoire "ethnique" qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines et, au même titre, d'une mémoire "artificielle", électronique dans sa forme la plus récente, qui assure, sans recours à l'instinct ou à la réflexion, la reproduction d'actes mécaniques enchaînés. » p. 269.

Le « support » de ce deuxième type de mémoire est, pour l'exemple des équations logarithmiques, de deux ordres :

- il s'agit tout d'abord, banalement, d'un support « matériel » constitué d'un dispositif (une feuille ou un tableau, un stylo ou une craie) et de gestes incorporés (gestes de la main qui tient l'outil permettant l'écriture)
- ensuite, un deuxième support, plus transparent mais sans lequel n'auraient jamais existé les gestes activant le premier, renvoie aux conduites tacitement attendues des partenaires de la relation didactique : le contrat didactique auquel l'assujettissement des élèves, dans l'institution indirectement observée, leur a permis d'écrire, pour une manipulation réglée et sous contrôle institutionnel, des ostensifs permettant l'engagement dans la pratique mobilisant $e^{\frac{2}{3}}$.

Ce deuxième ordre de support correspond à la mémoire « ethnique », dont parle Leroi-Gourhan, et qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines. Il s'agit ici, par l'adhésion des élèves au contrat didactique, d'obtenir la reproduction des comportements, envers ce type d'équation, tels que définis par la « société humaine des classes de Terminale S » à la fin de l'année scolaire, dans le système éducatif français.

On pourrait alors considérer ces deux types de mémoire comme dotés d'une certaine étanchéité. Il y aurait d'une part, selon l'acception généralement admise parce qu'elle semble aller de soi, les comportements qu'il est convenu d'adopter dans une certaine « société humaine ». Et il y aurait d'autre part les comportements personnels qu'un individu connaît et

qu'il peut décider ou non d'adopter lorsqu'il se trouve dans une autre société, ou lorsqu'il choisit de mettre ces « sociétés humaines » à distance, selon son gré.

Or, il est troublant de constater qu'à un peu plus d'un mois et demi seulement d'intervalle, les élèves observés ont oublié les pratiques qui étaient attendues dans la classe. Cet oubli est tel qu'ils leur substituent, dans leurs propres souvenirs, les pratiques qui ont cours aujourd'hui (ce qui pourrait se comprendre s'ils avaient été « absents », physiquement ou mentalement, à ce moment-là – mais ce n'est pas le cas). Cela les étonne même lorsque, s'apercevant de la déformation de leurs souvenirs, ils conviennent qu'ils ont décrit, à leur insu, l'utilisation d'une technique non alors disponible. En quoi, le fait de se plier à la conformité des comportements attendus dans une institution donnée, créerait-il l'oubli des comportements qui ont été les siens dans une autre institution, ou dans la même, mais à un autre moment de la vie institutionnelle ? Comment s'opère ce qu'on peut considérer comme un recouvrement de la mémoire personnelle par cette mémoire officielle ? L'institution « manipule-t-elle », à leur insu, la mémoire des élèves, au cours d'une sorte de « lavage de cerveau institutionnel » ?

La vision du film constitue un moyen d'évoquer l'univers cognitif dans lequel baignaient ces élèves un mois et demi auparavant. Il constituait un cadre formé d'une part d'ostensifs, à l'usage réglé, et d'autre part de certains non-ostensifs, tels le logarithme ; ostensifs et non-ostensifs étant pris dans certaines techniques. Mais l'univers cognitif des élèves n'est plus le même désormais : l'utilisation des ostensifs disponibles antérieurement s'est élargie, d'autres ostensifs sont apparus, des non-ostensifs nouveaux l'ont enrichi, par exemple l'exponentielle. Ceux-ci ont modifié le cadre personnel antérieur qui devient difficile à retrouver. C'est la raison pour laquelle les souvenirs relatifs à la mémoire pratique de ces deux élèves n'apparaissent plus.

Ces élèves savent que cet oubli est sans conséquence pour la réalisation de la tâche qui mobilisait auparavant un souvenir pratique qu'ils ont perdu ; ils ont l'assurance de parvenir encore, et par d'autres moyens, à l'accomplir. En effet, on peut faire l'hypothèse que ces bons élèves, « bons sujets » très assujettis aux contraintes de l'étude, s'appliquent par leur travail à réduire régulièrement l'écart, constamment créé par l'enseignement, entre le temps didactique et celui de leur propre apprentissage. Ils savent d'expérience, et par contrat, que le savoir qu'ils étudient régulièrement leur garantit la résolution des problèmes relevant d'un enseignement passé et qui, au sein de l'école, leur sont proposés. La résolution de cette équation implique la mise en œuvre d'au moins une technique permettant d'accomplir cette

tâche. La connaissance de cette technique est officiellement garantie par l'apprentissage, une fois la tâche reconnue. Sachant cela, ces élèves travaillent à transformer par l'étude, et régulièrement, leur système mémoriel. Du point de vue d'un tel élève, il n'est donc pas nécessaire que le souvenir de certaines techniques soit demeuré, puisque la connaissance actuelle, garantie par l'apprentissage, possède en elle-même et retrouve autour d'elle les moyens de les fabriquer. Si la connaissance disponible actuellement ne permet pas de disposer d'une technique, c'est que ces moyens sont insuffisants, donc que l'apprentissage est insuffisant. Ce n'est pas que la connaissance fasse obstacle à un souvenir réel qui voudrait se montrer : c'est qu'entre les techniques disponibles à un élève d'alors et celles d'un élève actuel, il y a trop de différences⁵⁰.

Et en effet, les moyens techniques dont disposent les élèves au moment où ils visionnent le film, sont d'une terrible efficacité comme le montre le schéma suivant :

Technique institutionnalisée en classe les 4 et 5 février et justification technologique	Technique décrite par les élèves le 28 mars et justification technologique
$\ln x^2 + \ln x = 2$	$\ln x^2 + \ln x = 2$
$2 \ln x + \ln x = 2$ (car $\ln x^n = n \ln x$)	$2 \ln x + \ln x = 2$ (car $\ln x^n = n \ln x$)
$3 \ln x = 2$ (car $2+1=3$)	$3 \ln x = 2$ (car $2+1=3$)
$3 \ln x = 2 \ln e$ (car $\ln e = 1$)	$\ln x = \frac{2}{3}$ (car $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$)
$\ln x^3 = \ln e^2$ (car $n \ln x = \ln x^n$)	$x = e^{\frac{2}{3}}$ (car $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$)
$x^3 = e^2$ (car $\ln$ bijection)	
$x = \sqrt[3]{e^2}$ (car définition de la racine cubique)	

⁵⁰ Pour que de telles pratiques oubliées puissent reparaître, il faudrait sans doute, pour ces élèves, changer d'institution et modifier alors leur univers cognitif afin de le rendre compatible avec cette nouvelle institution. Par exemple, se faire l'aide d'un élève plus jeune qui, l'année suivante, parcourra au cours de son étude, la même organisation mathématique.

L'économie des gestes est manifeste : seulement quatre pas de calcul sont désormais utiles lorsqu'il en fallait six auparavant. Leur mise en œuvre est plus simple, puisqu'ils ne nécessitent qu'une seule fois la manipulation de $\ln x^n$ et la seule connaissance de $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$, quand il fallait utiliser $\ln x^n$, $\ln e$, puis $n \ln x$, ainsi que la bijectivité et la racine cubique. Enfin, la générativité du geste qui consiste à passer de $\ln x = a$ à $x = e^a$ est plus grande, puisqu'il permet de résoudre, par ailleurs, des équations d'un nouveau type telles que $\ln x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, pour lesquelles le recours à une éventuelle racine $\sqrt{2}$ -ième paraît hasardeux !

Il y a ainsi une véritable puissance de la manipulation ostensive, qui tient à son efficacité, pour qui possède la maîtrise des gestes convenables, au point d'effacer le souvenir de techniques plus rustiques et d'usage mal commode. C'est ce que savent ces bons élèves qui, oublieux des techniques anciennes au profit de nouvelles d'une plus grande portée, soulagent ainsi leur mémoire afin de s'engager, avec plus de chances de succès, dans les apprentissages à venir. Nous retrouvons, en ce point, un principe d'anthropologie cognitive décrit, entre autres, par Douglas (1999), qui le désigne sous la forme de « l'économie de l'énergie cognitive », et par Brousseau dans la théorie des situations, qui parle de « coût d'une stratégie ». Mercier (1996) désigne un de ses effets, la stabilité des connaissances, en ces termes :

« Selon Brousseau, la connaissance socialement stable associée à une situation didactique peut donc être prévue par l'étude du coût des différentes stratégies permettant de réussir des tâches demandées. Je rappelle ici que le coût d'une stratégie s'analyse en un coût à l'apprentissage et un coût à l'emploi, ce qui permet de prédire d'emblée qu'une connaissance chère à l'apprentissage ne sera stable que si les occasions de son emploi sont nombreuses [...] ». pp. 1-2.

Nous pouvons désormais préciser ce que l'on entend par « stabilité des connaissances ». Il s'agit des souvenirs relatifs à sa mémoire pratique et que la personne peut mobiliser. Ces souvenirs seront d'autant plus faciles à mobiliser que le coût, certes à l'apprentissage mais ici surtout à l'emploi, sera plus faible. La baisse de ce coût est, dans ce cas, assurée par certains ostensifs, dont l'apprentissage de la mise en œuvre permet l'économie des gestes qui, en définitive, soulage la pensée, et ceci à un point tel qu'il n'est plus nécessaire de conserver le souvenir de manipulations ostensives antérieures beaucoup trop coûteuses.

3. Mémoire pratique : définition

Une pratique suppose un dispositif constitué de moyens matériels. Ce dispositif doit être outillé par des gestes, afin que la pratique puisse se déployer. Il est donc nécessaire que soient mobilisés des moyens personnels, pour l'activation du dispositif. Il faut que la personne qui produit les gestes possède une mémoire pour ces gestes ; c'est-à-dire qu'elle puisse reproduire les gestes de la pratique antérieurement appris. C'est ce que nous nommons *la mémoire pratique de la personne*. Elle est le produit de l'incorporation personnelle de chaînes opératoires traditionnelles, portées par « la collectivité culturelle » (les anthropologues disent ethnique, et nous la considérons ici comme étant la collectivité qui étudie : la collectivité didactique), qui joue à la fois le rôle de mémoire externe et de médiateur pour l'apprentissage personnel de cette mémoire externe, conservée par une institution humaine comme œuvre humaine : la mémoire du savoir. Dans un domaine de réalité à l'intérieur d'une institution didactique, si la pratique qui s'y déploie est outillée par les gestes permis par le savoir qui les commande et qui agit comme mémoire de ces gestes pour régler leur activation, l'accomplissement de la pratique par une personne construit simultanément une mémoire nouvelle de cette pratique pour la personne ; c'est ce qu'illustre l'exemple précédent.

IV. LA MEMOIRE OSTENSIVE

1. Définition

Nous appelons *mémoire ostensive*, la mémoire délibérément donnée à voir, de manière revendiquée, et par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu, quelle que soit sa position dans l'institution. Bien qu'elle obéisse, suivant la position occupée par la personne, à certaines règles institutionnelles (par exemple, le professeur évoquera la mémoire officielle du savoir enseigné, l'élève montrera sa mémoire personnelle et pratique du savoir appris), cette ostension peut être réalisée, comme pour les ostensifs outils du travail mathématique, dans le cadre de divers registres perceptifs : gestuel, discursif - langagier, graphique, scriptural.

Ainsi l'espace et les gestes, des uns et des autres, sont-ils sciemment organisés dans la classe pour que certains événements didactiques puissent se produire « au vu et au su » de tous, ou au contraire à destination d'un seul, à l'abri du regard des autres. Lorsqu'ils sont ou ne sont plus accomplis en direction de tous dans l'institution, ces gestes, qui donnent à voir la

mémoire, permettent que soient emmagasinés, oubliés ou rappelés certains souvenirs. On peut dans ce cas qualifier cette mémoire de « mémoire didactique ostensive de la classe », parce qu'elle s'appuie sur des événements relatifs au savoir enseigné qui ont été publiquement, et intentionnellement pour une grande partie d'entre eux, donnés à voir (ou à entendre, manipuler, etc.), et sur certains que l'on ne montre plus.

2. Exemple

L'enseignement ordinaire, qui recourt à l'ostension assumée ou déguisée, fournit de nombreux exemples d'utilisation de la mémoire ostensive. L'exemple suivant, relatif au discours du professeur après la résolution des équations $(\ln x)^2 + \ln x = 2$ et $(\ln x^2) + \ln x = 2$, reste dans le registre des équations logarithmiques en Terminale S, mais chacun peut trouver d'autres illustrations, tant elles abondent :

Alors, regardez ces deux équations. Evidemment, le gros truc, c'est ça (*P entoure* $(\ln x)^2$ et $(\ln x^2)$). Qu'est-ce qu'on a fait, là ? Dans les deux, on a composé la fonction logarithme avec la fonction carré. Seulement, on les a pas composées dans le même sens ! Ici (*P montre de la main sous* $(\ln x)^2$), on a d'abord fait $\ln$ et ensuite la fonction carré :

$$\langle \quad + \quad \rangle = (\ln x)^2$$

(Puis sous $(\ln x^2)$).

$$x \xrightarrow{\text{carré}} x^2 = X \xrightarrow{\ln} \ln(X) = \ln(x^2)$$

Ici (*P montre sous* $(\ln x)^2$), ça donne un polynôme de degré 2 où la variable a été remplacée par $\ln x$:

$$X^2 + X - 2$$

[...] Je vais transformer ça, je sais transformer ça, en logarithme de machin égale logarithme de truc. [...]

Vous allez vous ramener à logarithme de machin égale logarithme de truc :

$$\ln \blacksquare = \ln \bullet$$

Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. La deuxième chose qu'il faut voir, c'est que tantôt on se ramènera à ça (*P montre sous* $(\ln x)^2$), et que tantôt on se ramènera à ça (*P montre sous* $(\ln x^2)$). Suivant que le logarithme joue un rôle d'inconnue, vous pouvez toujours vous ramener à une forme où le logarithme joue un rôle de variable. Ou bien alors, vous pouvez transformer votre équation en logarithme de quelque chose égale logarithme d'autre chose.

Jusque dans la gestuelle du professeur, qui désigne de la main les deux équations et entoure $\ln x^2$ et $(\ln x)^2$, dans le symbolisme (« $\ln \blacksquare = \ln \bullet$ ») ou le vocabulaire qu'il utilise (« logarithme de machin égale logarithme de truc »), il s'agit bien pour lui de *montrer*, pour les institutionnaliser et les discriminer, les étapes les plus importantes de techniques dont la

désignation est mal commode, ou pas assez « parlante » à ce niveau de l'enseignement (« le changement de variable »). Cette ostension passe par l'appel direct à la mémoire des élèves : « Alors, on a vu que, hier, y'a un premier problème, toujours, c'est le problème du domaine de définition, c'est un problème très important. » Dans cet exemple, l'usage de l'ostension et de la mémoire ostensive, par le professeur, permet de rassembler les éléments épars, enseignés sur deux séances, et qui constituent la technique à institutionnaliser.

3. Quelques fonctions de la mémoire ostensive

Pour qu'un enseignement puisse être assuré, il est nécessaire de ménager des phases d'institutionnalisation qui indiquent une homogénéisation des pratiques personnelles antérieures. À travers la standardisation des pratiques, est engagée une reconstruction du passé, donc un travail de mémoire à travers les pratiques qu'il contient. Celle-ci opère à un double niveau : public, en ce qui concerne la mémoire didactique ostensive de l'institution, et privé en touchant à la mémoire pratique personnelle. Travail qui se poursuivra dans ce dernier cas par l'étude, afin d'atteindre à nouveau à une compatibilité de ces deux types de mémoire.

Cette homogénéisation peut être réalisée, dans la pratique courante de l'enseignement par ostension, afin de construire un milieu pour l'enseignement d'un savoir. Il s'agit alors, pour le professeur, de montrer les savoirs ou les savoir-faire que les élèves doivent connaître afin qu'il puisse s'engager dans l'enseignement d'un objet nouveau. Ce faisant, ce n'est pas un milieu a-didactique d'action, au sens de la théorie des situations didactiques de Brousseau, qui est créé. Nous assistons plutôt à la production d'un ensemble de souvenirs relatifs à des notions, jugées par le professeur comme étant communes à un nombre suffisant d'élèves, afin que le cours délivré ne puisse être vu comme un monologue duquel les élèves sont exclus. Cette manière de faire réalise la nécessité de montrer, au sein de l'institution, que l'intention d'enseigner rencontre aussi l'intention d'apprendre, condition nécessaire à la pérennisation de la relation didactique. Mais surtout, tant dans l'institutionnalisation que dans l'ostension, c'est « un principe de cohérence institutionnelle », mentionné par Douglas, qui est en jeu ; dans l'institutionnalisation, pour montrer que tous doivent désormais se comporter envers le savoir de la manière conforme aux usages institutionnels, et dans l'enseignement par ostension, afin de créer une convivialité didactique officielle censée élargir le *topos* de chaque élève en attribuant à chacun ce qui est une propriété déclarée de l'institution, fiction rendue crédible par le spectacle d'un débat sur l'objet montré : le cours comme exposé d'une démonstration.

Sous cet angle, la mémoire apparaît, une fois de plus, comme un processus cognitif, mais pris en charge, pour partie, par l'institution. Mise en œuvre pour la construction d'un milieu, la mémoire ostensive, en retour, est constamment reconstruite à partir des rapports aux arrangements inédits des objets pris dans la construction du milieu. Ce type de mémoire, qui définirait les comportements institutionnellement conformes, transmis et attendus à un moment donné du temps didactique, se rapproche du sens couramment attribué à la mémoire collective. Nous y retrouvons cependant cette dimension pratique qui organisait un clivage par rapport aux approches traditionnelles de la mémoire, dans le sens où les souvenirs nécessitent d'être instrumentés pour être travaillés afin d'en construire de nouveaux.

V. PRENDRE EN COMPTE LES PHENOMENES MEMORIELS POUR DEVELOPPER DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Le concept de mémoire apporte une dimension supplémentaire au concept de rapport au savoir, en l'inscrivant dans une temporalité, donc dans l'histoire de sa constitution et dans la biographie de sa construction. La statique du rapport permettait de montrer son existence et de le définir ; la mémoire ajoute une dimension dynamique à la description en intégrant tout à la fois sa naissance, son patrimoine génétique en quelque sorte, et ce que son histoire en a fait, ce qu'il a conservé ou perdu, donc son développement et sa construction. Elle situe donc respectivement le cognitif (la pensée), son objet (le savoir), et son sujet (l'homme qui apprend par la pratique du savoir), dans un processus institutionnel et temporel.

Notre connaissance de la mémoire des objets de la pratique du savoir peut permettre de mieux appréhender les processus didactiques en œuvre, tant du point de vue de la mémoire de ces processus telle qu'elle se dit, que du point de vue des pratiques incorporées mobilisées par les personnes qui étudient. Elle permet donc d'imaginer des dispositifs didactiques capables d'assurer certaines évolutions du rapport personnel au savoir, c'est-à-dire l'apprentissage.

Grâce au modèle de la mémoire construit, intégrant les trois types de mémoire présentés, il est possible d'envisager un nouveau champ d'étude didactique. Ainsi, l'analyse qui suit, relative à une ingénierie didactique mise en place en 1999-2000, pointe une direction à prendre pour favoriser et diriger le travail de la mémoire mobilisée par les élèves pour leur pratique des mathématiques, et donc pour leur étude. Elle passe par un travail portant sur les ostensifs ; l'utilisation de ceux disponibles dans la communauté qui étudie, et aussi

l'anticipation ou la création de nouveaux, leur communication au groupe et leur évaluation au regard de leur efficacité pratique.

Nous montrons, pour exemplifier les déclarations qui précèdent, des extraits d'une expérience menée par une équipe dirigée par A. Mercier dans le cadre d'un travail conjoint ENFA, IUFM d'Aix-Marseille et de Toulouse, INRP. Il s'agit d'un enseignement des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues dans des classes de 3^e, réalisé au cours de six séquences par un professeur volontaire. Ces séquences sont organisées en trois « tableaux » pensés pour permettre l'écriture des formules, leur observation, la résolution des équations et l'établissement des méthodes générales de résolution. Chaque tableau est fait d'une classe de problèmes dont la résolution passe par une modélisation à l'aide d'un système d'équations. Des groupes de quatre à cinq élèves sont constitués dans la classe. Après une phase de dix à quinze minutes de recherche individuelle des problèmes du tableau, le travail est ensuite mené dans chaque groupe, afin de réaliser en commun un transparent qui sera montré à la classe pour qu'elle en débattenne, lors d'une phase d'exposé des travaux des groupes. Les séances sont filmées et elles sont précédées et suivies d'entretiens enregistrés avec le professeur de la classe. Les feuilles de travail des élèves et les transparents sont photocopiés et conservés.

Du premier tableau, nous extrayons le deuxième problème :

Deuxième problème : Un grand hôtel dispose de 50 chambres et peut recevoir 83 personnes. Il y a des chambres pour une personne et des chambres pour deux personnes. De combien de chambres pour une personne et de combien de chambres pour deux personnes dispose cet hôtel ?

La production ostensive est très diverse dans l'échantillon de transparents de groupe dont nous disposons. Elle peut parfois se limiter à une écriture langagière qui expose le travail mené dans le groupe. C'est le cas du groupe 2 qui rédige un transparent, pour ce problème, de la manière suivante :

Deuxième problème.

Pour trouver le résultat, nous avons encore effectué une soustraction. Nous avons soustrait le nombre de personnes au nombre de chambres. Donc $83 - 50$ est égal à 33. Alors il y a 33 chambres de 2 lits et 17 chambres à 1 lit. »

Le groupe 3 est plus laconique et sa solution, dans sa rédaction, réalise une économie substantielle par rapport à celle du groupe 2. La référence à la nature des choses (chambre ou lit) à laquelle se rapportent les nombres n'est plus mentionnée, et les symboles - et = remplacent la rédaction en français du groupe 2. Elle est la suivante :

2^{ème} problème

$$83-50=33$$

Donc il y [a] 33 chambres de 2 lits.

$$50-33=17$$

Donc il y [de nouveau manque le a] 17 chambres de 1 lit.

La rédaction du groupe 6 introduit, quant à elle, des ostensifs (encadrements, flèches, disposition des calculs) qui lui sont spécifiques :

Problème n°2

Il y a 50 chambres et 83 personnes.

Pour 80 personnes et toujours 50 ch.

30 + 20	chambres à 2 lits → 30×2= chambres à 1 lit → 20×1=	60 + 20	
50		80	
		+3	
30+3=33 20-3= <u>17</u> 50	(33×2)+17= →	83	

Dans ce premier tableau, les élèves n'en sont encore qu'à l'exploration d'une solution ; c'est donc « par tâtonnement » qu'ils parviennent à trouver les nombres du résultat. Il est remarquable de noter que, dans l'écriture de la solution du groupe 6, les ostensifs accompagnent et commandent cette recherche, « par tâtonnement », de la solution. Ainsi, après avoir ramené le problème à 80 personnes (les 3 qui restent pouvant être réparties, soit en utilisant une chambre à 2 lits et une chambre à 1 lit, soit trois chambres à 1 lit), les nombres encadrés représentent respectivement une décomposition des 50 chambres en 30 et 20 qui permet de décomposer à son tour les 80 personnes utilisées dans cette première étape. La correspondance est indiquée par les « petites » flèches qui indiquent qu'à la décomposition

30+20 peut être associée une décomposition 60+20. Reste le problème des 3 personnes. Par un heureux hasard dû aux données du problème, l'erreur commise dans le raisonnement qui suit va cependant conduire à la solution. En effet, ce nombre de personnes (3) se transmute en nombre de chambres soustrait et ajouté au nombre de chambres de chacun des types (ce qui ne modifie pas leur somme, mais change la répartition des personnes qui ne correspond alors plus à la correspondance du deuxième encadré), tandis qu'il est ajouté aux 80 personnes pour arriver aux 83 à répartir. On obtient alors 33 chambres à 2 lits et 17 à 1 lit, ce qui est effectivement la solution du problème, obtenue de manière chanceuse (puisque les 3 chambres ajoutées correspondent à 6 personnes ajoutées et les 3 chambres retirées à 3 personnes soustraites, donc à une somme algébrique égale aux 3 personnes à rajouter à 80). La vérification est notée et correspond, à l'aide de l'ostensif « flèche », aux 83 personnes. La manipulation ostensive s'accompagne donc ici d'une erreur, mais elle économise, et masque, toute la description du raisonnement que nous venons d'exposer. On peut raisonnablement imaginer que, pour parvenir à faire accepter et noter cette écriture dans le groupe, il a sans doute fallu discuter, argumenter, montrer et expliciter ce raisonnement. On retrouve donc cette propriété des ostensifs de conserver la mémoire du débat ou du raisonnement dont on peut, à travers cette rédaction, retrouver quelques éléments.

Lors du deuxième tableau, après avoir vu que ces problèmes peuvent être modélisés par des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, les élèves sont invités à revenir sur les problèmes du premier tableau afin de réaliser la modélisation et de les résoudre.

Le troisième problème du premier tableau était le suivant :

Troisième problème : Dans un refuge de montagne, il n'y a que des chambres à deux lits et des chambres à 4 lits. Aujourd'hui elle affiche complet, 30 randonneurs occupant tous les lits des 12 chambres du refuge. Combien de chambres à 2 lits et combien de chambres à 4 lits y a-t-il dans le refuge ?

Suivant la consigne, une élève revient au problème qu'elle avait résolu lors du premier tableau, en utilisant ici aussi des ostensifs qui lui sont propres, de la manière suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Chambres à 2 lits} \\ \text{Chambres à 4 lits} \end{array} \right\} 30 \text{ randonneurs}$$

12 chambres

12 → au moins 2 personnes = 24

$$30 - 24 = 6 \div 2$$

↓

si on divise 6 par 2 ça fait 2 × 3 randonneurs à placer 2 + 2 = 4

donc

3 chambres à 4 lits et 9 chambres 2 lits

Maintenant qu'elle dispose des ostensifs appropriés, elle peut alors les utiliser pour écrire, lors du deuxième tableau :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

Ce qui la conduit à développer sa propre « créativité » mathématique : elle « invente » deux techniques pour parvenir à la solution trouvée lors du premier tableau. La première est la suivante :

$$2x + 4y = 30$$

$$x + y = 30 - x - 3y$$

$$12 = 30 - x - 3y$$

$$x + 3y = 30 - 12$$

$$x + 3y = 18$$

$$x + y = 18 - 2y$$

$$12 = 18 - 2y$$

$$2y = 18 - 12$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

$$x = 12 - 3 = 9$$

La première technique « inventée » consiste donc à faire apparaître la première équation à partir de l'autre afin de substituer à la première la constante à laquelle elle est égale, et à itérer le procédé jusqu'à « disparition », dans la deuxième équation, d'une des inconnues. Ceci permet, au bout d'un certain nombre d'étapes, de la résoudre comme équation du

premier degré à une inconnue, et à obtenir alors la valeur de la deuxième inconnue. Cette élève, qui parvient dans un deuxième temps à perfectionner sa technique, écrit alors :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

Plus court $\rightarrow 2x + 4y = 30$ $2(x + y) + 2y = 30$

$2(x + y) = 30 - 2y$ ←

$2 \times 12 = 30 - 2y$

$24 = 30 - 2y$

$2y = 30 - 24$

$2y = 6$

$y = 3$

$x = 12 - 3 = 9$

Il s'agit donc d'une amélioration technique, allant dans le sens d'une économie, tant de l'énergie cognitive à déployer que de l'expansion de l'écriture ostensive, dans la mesure où la double itération du procédé consistant à faire apparaître $x + y = 12$ dans $2x + 4y = 30$ peut être remplacée par une factorisation par 2 après décomposition de $4y$.

Cette pratique ostensive, qui permet un travail de la technique dans le sens d'une économie identifiée par l'élève, contient et s'appuie sur la mémoire de la technique précédente, moins élaborée ; un travail de la mémoire pratique permet un travail de la technique.

Cet état de fait peut alors être judicieusement utilisé par le professeur, en engageant la classe à travailler sur la portée de la technique. Nous mène-t-elle à la solution à tout coup ? Sinon, dans quels cas fonctionne-t-elle ? Et comment faire dans les cas de systèmes pour lesquels elle est inapplicable ? Que sont ces systèmes et pourquoi est-elle inopérante alors ? La prise en compte de ces questions par la classe débouche sur le travail de la dimension technologique des techniques disponibles à cet instant (Chevallard, 1999). Ceci n'a pas échappé au professeur, lors d'un entretien *post* séance, qui relate en ces termes :

P : [...] À partir du moment où il y en a un qui a eu cette idée de retrancher $x + y$ et de retrancher 20, [...] Ils sont restés sur cette piste-là, en se demandant comment ils pouvaient, par soustraction, faire... procéder à la transformation. [...]

P : [...] Et après, j'ai fait venir quelqu'un d'autre au tableau, qui a proposé... qui est la copine d'Émilie d'ailleurs, et qui a proposé cette méthode où finalement on décompose : $5y$. Et qui a eu énormément de mal à l'expliquer. [...] Et alors, il y a eu tout un débat sur : il manque des étapes [...] Bon, il y avait un

autre débat, parce qu'il y a tellement de choses qui sont sorties de là. C'est que... l'autre débat c'est : on perd, on perd en route des conditions qui doivent être remplies, et euh... comment, quel choix va-t-on faire, et est-ce qu'on aurait le droit de rajouter, d'associer à ces deux premières équations ce fameux $2x+2y = 172$. Alors moi, je leur ai posé la question, il n'y a pas eu de réponse.

Le « principe d'économie de l'énergie cognitive » est identifié par les élèves, ce que relève le professeur :

P : [...]donc, à la quatrième séquence sont apparues les deux méthodes principales, par substitution et par addition, avec d'autres à côté, du type méthode des fonctions par exemple. Ils ont trouvé ça, plus encore une ou deux autres, mais ils se sont bien rendus compte que finalement les deux qui étaient efficaces, qu'ils utiliseraient sûrement, ce sont celles-là.

P : [...] Dans l'autre classe on a eu le temps de mettre en forme les deux méthodes, on a eu le temps d'étudier la deuxième méthode, où elle écrit dans les deux équations x en fonction de y , où elle a même développé l'argument : de toute façon, si on divise par deux ce n'est pas un problème, on s'en débarrasse après. Donc, ça a été accepté par tout le monde comme étant une troisième méthode possible, mais un peu en retrait des autres, ce qui est intéressant, parce que moins économique.

Enfin, à travers la diversité des écritures créées par les élèves eux-mêmes, le travail des ostensifs leur apparaît dans sa dimension mémorielle facilitant l'exécution du calcul, et contenant la mémoire des dimensions technologiques associées à la technique. Dans ce travail des ostensifs, c'est le travail de la mémoire pratique, avec ces variantes personnelles, qui peut être mené collectivement et sous la direction du professeur :

P : [...] Et, lui avait écrit, il avait écrit ceci : $2x+4y = 232$ et en dessous il avait écrit, il avait préparé son accolade, c'est important, parce qu'il y en a qui ont toujours pas éprouvé le besoin...

[...]

P : De coder l'association des deux conditions. Alors il y en a qui numérotent, il y en a qui ont laissé de l'espace, ça se voit. Et c'est vrai que ceux qui... et pourtant ça a été suggéré. C'est le bon moyen de faire comprendre au cerveau qu'on associe les deux conditions. Eh ben non. Comme c'est pas écrit formellement sur le... et qu'on n'a pas appris une leçon qui dit qu'il faut mettre une accolade, il a écrit : je fais $2x-2x$ ça fait hein... $5y-3y = 232-162$.

Les ostensifs interviennent alors dans la mémoire ostensive de la classe. Se montre la nécessité d'y recourir, et les difficultés qui surgissent lorsqu'on déroge à leur utilisation :

P : Alors, le débat, il y en a qui comprenaient plus d'où ça sortait ça, pourquoi il écrivait ça ; alors il a commencé à expliquer qu'il faisait une soustraction. Et puis finalement, je me suis rendue compte que,

le fait de le laisser persister avec une écriture comme celle-là, avec la deuxième équation associée à nouveau à celle-ci, ça apportait une confusion complète, et le sens de la soustraction membre à membre disparaissait, au profit d'un autre problème qui était : est-ce qu'il faut absolument continuer à associer ces deux conditions, est-ce que celle-là elle est absolument nécessaire. Alors le débat...

L'expérience que nous venons de décrire rapidement indique une voie pour un d'enseignement en lequel le temps de l'étude est en grande partie pris en charge par le professeur. Mercier (1998) souligne *a contrario* ce trait de l'enseignement ordinaire qui conduit à ce que « *le travail des savoirs désignés indirectement par les épisodes didactiques ne peut trouver place dans le cours ordinaire de la classe, parce qu'il ne produit pas de progression du temps didactique.* » Les épisodes qui signent des moments d'apprentissage personnel, pour un élève donné, de savoirs pertinents pour l'enseignement à venir d'autres éléments de savoir, autrement dit le travail de l'idonéité du rapport au savoir, est mené le plus souvent de façon privée, hors de la classe. Des dispositifs didactiques, tels que celui-ci, prennent à leur charge le nécessaire travail personnel de la mémoire pratique, sous la direction de l'enseignant, avant sa mise en commun ; donc ils prennent en compte le processus de construction de la mémoire pratique selon les nécessités personnelles rencontrées par chacun, et l'articulent à la mémoire ostensive : celle qui se dit et qui est relative à des connaissances et savoirs institutionnalisés. Ils peuvent ainsi favoriser le travail de l'idonéité du rapport au savoir, parce qu'il n'est plus laissé à la charge exclusive des élèves.

BIBLIOGRAPHIE

- Bosch M. (1994) : *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelone.
- Bosch M. & Chevallard Y. (1999) : *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique*, Recherches en didactique des mathématiques, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 77-124.
- Bourbaki N. (1969) : *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris.
- Centeno J. (1995) : *La mémoire didactique de l'enseignant*, thèse posthume inachevée, LADIST, Bordeaux.

- Chevallard Y. (1989) : *Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*, Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1988-1989, Université Joseph Fourier, pp. 211-235.
- Chevallard Y. (1996) : *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, in Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques, Noirfalise R. et Perrin-Glorian M-J. eds., IREM de Clermont-Ferrand, pp. 83-122.
- Chevallard Y. (1997) : *Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui*, in Actes du Colloque Défendre et transformer l'École pour tous, IUFM d'Aix-Marseille.
- Chevallard Y. (1999) : *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, 19/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 221-266.
- Commissaire H. & Cagnac G. (1936) : *Cours de mathématiques spéciales, Tome III, Calcul intégral, courbes et surfaces du second degré*, Masson et C^{ie}, Paris.
- Dahan-Dalmedico A. & Peiffer J. (1986) : *Une histoire des mathématiques, routes et dédales*, Éditions du Seuil, Paris.
- Delachet A. (1949) : *L'analyse mathématique*, coll. Que sais-je ?, PUF, Paris.
- Dieudonné J. (1978) : *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Tome I, Hermann, Paris.
- Douglas M. (1999) : *Comment pensent les institutions*. Paris : La Découverte.
- Halbwachs M. (1925 ; 1994) : *Les cadres sociaux de la mémoire*, Postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.
- Halbwachs M. (1950 ; 1997) : *La mémoire collective*, Préface et postface de G. Namer, Albin Michel, Paris.
- Houzel C., Ovaert J.-L., Raymond P., Sansuc J.-J. (1976) : *Philosophie et calcul de l'infini*, François Maspero, Paris.
- Lagrange J.-L. (1797) : *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel*, Imprimerie de la République, Prairial an V, Paris.
- Leroi-Gourhan A. (1964) : *Le geste et la parole II, La mémoire et les rythmes*, Albin Michel, Paris.
- Matheron Y. (2000) : *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au Collège et au Lycée. Quelques exemples*, Université Aix-Marseille I.
- Mercier A. (1996) : *Comment appréhender le cognitif, depuis la position de la didactique des mathématiques ?*, communication au symposium REF, 1996, Université de Montréal.

- Mercier A. (1998) : *La participation des élèves à l'enseignement*, Recherches en didactique des mathématiques, 18/3, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 279-310.
- Muxel A. (1996) : *Individu et mémoire familiale*, Nathan, Paris.
- Namer G. (1987) : *Mémoire et société*, Méridiens Klincksieck, Paris.
- Ovaert J. – L. & Verley J. – L. (1997) : *FONCTIONS représentation & approximation des*, in *Dictionnaire des mathématiques, algèbre, analyse, géométrie*, Encyclopædia Universalis et Albin Michel, Paris, pp. 361-400.
- Ricœur P. (2000) : *La mémoire, l'histoire, l'oubli*, Seuil, Paris.
- Vygotski, L. (1978) : *Mind in society, the development of higher psychological processes*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Interactions professeur- élèves

ACTIVITE COORDONNEE ET COMPLEMENTAIRE D'UN PROFESSEUR ET DE SES ELEVES LORS DE L'INTRODUCTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS EN TROISIEME

Lalina Coulange

Laboratoire Leibniz-Imag

I. INTRODUCTION

Dans notre travail de thèse centré sur l'activité du professeur, nous avons adopté un point de vue singulier sur l'enseignement des systèmes d'équations et sur les moments de transition arithmétique-algèbre, tout en nous inspirant d'apports théoriques existants. Il s'agit dans un premier temps de présenter succinctement les éléments de ce cadre théorique, qui s'appuie sur l'utilisation d'outils issus d'une part de la théorie anthropologique de Chevallard, d'autre part de la théorie des situations didactiques de Brousseau.

1. Couple enseignant-enseigné

Précisons tout d'abord que suivant l'approche conjuguée de Chevallard (1995) et Mercier (1998), nous considérons l'acte d'enseigner comme une activité coopérative entre l'enseignant et l'élève. Suivant Conne (1997), on peut dire que nous nous intéressons à *l'activité du couple enseignant-enseigné*. Il s'agit d'étudier l'enseignement à travers les choix des professeurs et d'interroger leurs comportements et ceux des élèves comme complémentaires et coordonnées (Chevallard 1995, p. 13). En cela, nous rejoignons le point de vue de Bloch (1999) sur l'activité de l'élève :

“ Quel avantage y a t-il à envisager ainsi l'activité du couple enseignant / enseigné, au lieu de focaliser sur les connaissances et l'activité de l'élève seul ? l'idée est que l'observation des situations d'enseignement / apprentissage ne se fasse plus par seule référence aux connaissances, erreurs, conceptions... de l'élève, mais par une reconnaissance *d'interactions*. (...) En ce sens il est possible de rapporter, dans une certaine mesure, l'activité de l'élève à celle de l'enseignant, (et réciproquement) (...). ” (Bloch 1999, p. 145).

2. En termes de contraintes et de libertés – théorie anthropologique et théorie des situations

Par ailleurs, l'activité de ces deux acteurs du système didactique peut être caractérisée en termes de contraintes et de libertés, en prenant appui sur un usage conjoint et articulé de l'approche anthropologique et de la théorie des situations didactiques.

On considère enseignant et élève comme étant soumis à des contraintes externes génériques (dispositifs didactiques généraux) et spécifiques du savoir mathématique à enseigner (aspects épistémologiques de l'objet de savoir à enseigner, objectifs d'enseignement associés à cet objet, fixés par les programmes, etc.) qui pèsent sur tout système didactique. Ces contraintes résultent de leurs assujettissements respectifs en tant que sujets de différentes institutions. La première hypothèse formulée relativement à ces contraintes dites externes est la suivante :

L'approche anthropologique du didactique permet de dégager des contraintes externes, spécifiques d'une institution et d'un objet mathématique à enseigner, en les abordant du point de vue du concept de rapport institutionnel au savoir.

Il reste néanmoins au professeur, ainsi qu'à l'élève, des degrés de libertés dans les limites des contextes définis par ces contraintes externes. Par exemple, à l'aide de ses connaissances didactiques et mathématiques, l'enseignant peut faire des choix et agir de façon plus personnelle, lorsqu'il élabore son projet d'enseignement ou gère sa réalisation en classe.

Cependant, au sein même de cet espace de liberté, les régulations de leur relation didactique soumettent à leur tour professeur et élève à de nouvelles contraintes dites internes. Ceci nous conduit à formuler une deuxième hypothèse :

La théorie des situations didactiques permet de dégager des contraintes dites internes auxquelles le professeur et l'élève sont soumis : il s'agit d'étudier les régulations de la relation didactique entre ces acteurs, du point de vue des concepts de milieu et de contrat didactique.

Ainsi le modèle général de situation pour le professeur et l'élève, soumis à ces deux classes de contraintes externes et internes peut-être schématisé comme suit :

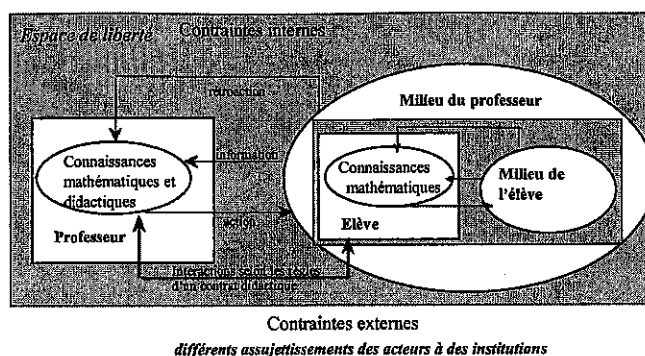


Fig.1 Situation de l'enseignant et de l'élève – Contraintes externes et internes

Ce modèle est pour nous un moyen d'interroger l'activité du couple professeur-élève. Dans la suite, nous allons formuler les questions qu'il permet de poser sur l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième.

II. CONTRAINTES INSTITUTIONNELLES D'ENSEIGNEMENT ET D'ETUDE DES SYSTEMES D'EQUATIONS EN TROISIEME

Dans un premier temps, nous nous sommes située dans le cadre de la théorie anthropologique développée par Chevallard, pour déterminer des contraintes externes qui touchent à l'enseignement et à l'étude des systèmes linéaires en fin de collège. Les questions formulées dans ce cadre sont les suivantes : *Quelles contraintes institutionnelles pèsent actuellement sur l'enseignement et l'introduction des systèmes d'équations fin de collège ? Quelles sont les origines et causes de ces contraintes ? Quelles alternatives possibles peuvent être associées à d'anciens systèmes de contraintes institutionnelles ?*

Pour répondre à ces questions, nous avons considéré à la fois la période contemporaine⁵¹ et des périodes d'enseignement "passées". Nous avons mené une analyse écologique de programmes et de manuels de 1902 à 1999, considérant ces éléments textuels du savoir enseigné comme représentatifs de contraintes institutionnelles. En deçà d'un promontoire d'observation des pratiques contemporaines d'enseignement, cette enquête historique permet de prendre en compte diverses praxéologies didactiques et mathématiques, associées à ces périodes d'enseignement, que les enseignants ont pu connaître et qui peuvent se constituer en choix possibles d'enseignement. Afin de rendre compte de traces d'anciennes pratiques institutionnelles qui subsisteraient ainsi dans l'enseignement contemporain des

⁵¹ C'est-à-dire celle associée à la réforme du Collège de 1985, et aux programmes de 3^e de 1989. De nouveaux programmes sont en application depuis 1999. Mais l'essentiel des résultats présentés ici ne prend pas en compte cette réforme.

systèmes d'équations, notre analyse de programmes et de manuels a été complétée par un questionnaire auprès de professeurs de troisième (interrogés en 1998-1999, $\Sigma = 19$) : sur leurs choix d'enseignement des systèmes linéaires et les raisons (du côté de leurs connaissances mathématiques sur les systèmes) par lesquelles ils justifient ces choix. Nous résumons ci-dessous quelques résultats de l'analyse écologique et complétons ces résultats avec de brefs commentaires sur les réponses à notre questionnaire.

Pratiques institutionnelles d'introduction des systèmes d'équations

1. Propos technologiques visant à introduire les systèmes linéaires en continuité de l'équation à deux inconnues

Dans les manuels de la période dite *contemporaine* (1989-1999), on relève les traces d'un discours d'introduction des systèmes linéaires, à la suite d'une brève présentation ostensive de l'équation à deux inconnues, au sein de la partie identifiable à un cours (identifiable au topos du professeur). À travers ces propos d'ordre technologique, l'objet système d'équations est présenté comme moyen de répondre à la question : *Sachant qu'une équation à 2 inconnues admet "plusieurs" couples solutions, comment calculer les couples solutions vérifiant 2 équations à 2 inconnues ?*

Des discours visant ainsi à introduire l'objet système, en continuité de l'équation à deux inconnues, sont relevés au sein de tous les manuels des périodes précédentes. Les propos tenus varient d'une époque à l'autre, selon différents niveaux technologiques, voire théoriques. Par exemple, dans les ouvrages de la période dite de *contre-réforme* (1980-1988), les systèmes sont introduits à la suite d'une étude géométrique de l'équation linéaire à deux inconnues, à travers un discours tenu en langage ensembliste, associé à la question : *Quelle est l'intersection des ensembles infinis de couples solutions de 2 équations à 2 inconnues correspondant à 2 droites ?*

Ce type de discours est une alternative encore envisagée par un nombre non négligeable de professeurs contemporains. Cinq des dix-neufs enseignants interrogés parlent de "montrer le lien avec les équations de droite" et de questionner la nature de l'intersection de deux droites du plan, lors de l'introduction officielle des systèmes dans leur classe de Troisième.

Cependant, l'analyse des manuels des années 1990, ainsi que des réponses des autres professeurs au questionnaire, montre que ce type de propos, typiquement du côté de l'enseignant, tend à perdre de son importance. Il se trouve supplanté par des "activités préparatoires ou introductives".

2. Activités préparatoires visant à introduire le système d'équations comme outil de résolution de problèmes concrets

Comme le souligne Matheron (1994), au-delà d'idées directrices sur le savoir mathématique à enseigner, c'est une nouvelle approche de l'enseignement qui se met en place en 1989. Les personnalités du moment mettent l'accent sur l'activité de l'élève. Ceci amène la création de nouveaux dispositifs didactiques génériques, telles les activités, destinées à faire participer l'élève à l'enseignement d'une notion mathématique nouvelle. Il règne d'autre part une idéologie utilitariste : il s'agit de montrer l'utilité des mathématiques "dans la vie quotidienne". Au sein des manuels contemporains, les systèmes d'équations sont dès lors, introduits à travers des activités qui font massivement intervenir les problèmes concrets.

C'est le choix auquel se rallie la majorité des enseignants qui ont répondu à notre questionnaire. Conformément à leur position dans l'institution contemporaine, onze des dix-neuf enseignants interrogés prévoient d'introduire officiellement le système d'équations comme outil de résolution de problèmes concrets.

Précisons l'origine des énoncés choisis par les professeurs et les auteurs de manuels contemporains à cet effet. Ils correspondent à des problèmes anciennement traités à la fois en arithmétique et en algèbre élémentaires, pendant la période d'enseignement dite *classique* (1902-1958). Ces énoncés-types : partage en parties inégales, double achat, double vente, etc. étaient le lieu d'étude de techniques de résolution arithmétique, telles que : des méthodes dites de substitution arithmétique (sans désignation algébrique, à l'aide d'un graphique conventionnel sous forme de barre ou de segment, voir ci-dessous) et des méthodes de fausses suppositions, au début du secondaire. Citons à titre d'exemple un problème de partage en deux parties inégales connaissant leur somme et leur différence :

Deux ouvriers ont reçu ensemble une somme de 249 f. Le premier a reçu 75 f. de plus que l'autre. Combien chacun d'eux a-t-il reçu ? (...)

Solution : si l'on retranche 75f à 249f, il reste deux fois la part du second ou $249f - 75f = 174f$. Le second ouvrier a donc reçu $174/2 = 87f$. Et le premier : $87f + 75f = 162f$.

Vérification : $162f + 87f = 249$

9f

$$162f - 87f = 75f$$

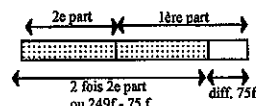


Fig. 62

Remarque – On aurait pu raisonner aussi bien, en remarquant que la somme 249f augmentée de 75f, contient la première part. (Royer et Court 1931, p.64).

Les équations et systèmes d'équations du premier degré étaient dès lors introduits en fin de secondaire comme outils de résolution de ces mêmes énoncés. Ces problèmes concrets nourrissaient ainsi une articulation entre arithmétique, et algèbre élémentaires, faite de filiations et d'oppositions, centrale au sein du savoir enseigné à cette époque.⁵²

L'étude des activités introductives des systèmes d'équations montre que certains auteurs de manuels contemporains cherchent à travers la résolution d'énoncés similaires, à introduire le système d'équations en heureux rival de techniques de résolution non algébriques, censées être mises en œuvre spontanément par les élèves avec leurs connaissances numériques antérieures. Par un effet de mimétisme culturel, ces problèmes concrets, anciens lieux privilégiés d'un passage arithmétique-algèbre, servent ainsi l'émergence de l'outil algébrique système d'équations comme concurrent de stratégies par essais-erreurs ou tâtonnements.

À titre d'exemple, citons le début de l'activité du début du chapitre des systèmes d'équations de l'ouvrage *Pythagore* (Bonnetfond et al. 1993, pp. 72-73) :

A/ Au foyer

À la première table, on a servi 3 oranginas et 2 cocos pour 39 F.

À la deuxième table, on a servi 1 orangina et 3 cocos pour 34 F.

Combien coûte l'orangina ? Le coca ? (on pourra procéder par essais-successifs).

B/ L'omnibus de 1900

Le conducteur d'un omnibus a reçu 2,85 F pour 12 places, les unes d'intérieur, les autres d'impériale. On sait que la place d'intérieur se paye 0,30 F et celle d'impériale 0,15 F. Combien y a-t-il de places de chaque sorte ?

Résoudre ce problème tiré d'un vieux cahier d'élève. (On pourra chercher des couples d'entiers dont la somme est 12). (op. cité, p. 72).

À la suite de ces deux énoncés, la consigne associée à un troisième problème concret (*Le Cheval et les deux bœufs*) induit une résolution intermédiaire. Les questions posées guident l'écriture de deux équations à deux inconnues. Mais les techniques de résolution algébrique d'un système n'ayant pas encore été introduites, les élèves sont censés résoudre la conjonction de ces équations " par tâtonnements et essais successifs ".

Il s'agit donc à travers cette activité introductive, d'amorcer une progression vers la démarche algébrique avec le système d'équations, en s'appuyant sur et contre les connaissances numériques d'élèves... comme lorsque pendant la première moitié du XXe, l'algèbre élémentaire était introduite sur et contre l'arithmétique préalablement enseignée.

⁵² Nous nous référons aux travaux de Chevallard sur ce qu'il appelle la stratégie classique d'introduction à

D'après les réponses à notre questionnaire, ce type de dispositifs didactiques visant à introduire officiellement le système d'équations correspond à un choix d'enseignement fait par un nombre non négligeable de professeurs. Six des onze professeurs prévoyant d'introduire le système comme outil de résolution de problèmes concrets, précisent qu'il s'agit de mettre en scène une concurrence entre l'outil algébrique et des méthodes de résolution non algébrique.

III. ACTIVITE DU COUPLE ENSEIGNANT-ENSEIGNE LORS DE L'INTRODUCTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS – CONTRAINTES EXTERNES ET INTERNES

À la lueur de cette première étude, nous entendons maintenant nous intéresser à l'économie d'une telle situation "ordinaire" d'enseignement des systèmes d'équations, en menant une étude de cas. Il s'agit d'étudier l'influence conjointe du contexte institutionnel décrit ci-dessus et de contraintes dites internes, sur l'activité d'un professeur de Troisième ainsi que sur les comportements de ses élèves lors d'une activité introductive des systèmes linéaires. À cet effet, nous avons collaboré avec un enseignant (désigné par P dans la suite du texte) et mis en place un dispositif d'observation naturaliste du même type que Comitì et al. (1995). N'intervenant en aucune façon dans la conception et la mise en œuvre du projet de ce professeur, nous avons recueilli différents types de données provenant :

- d'un entretien avec P avant les séances d'enseignement des systèmes : nous lui avons posé des questions relatives à son projet préalable et aux raisons de ses choix planifiés.
- de fiches relatives à la série de problèmes désignée par "Cailloux" envisagée par P lors de cet entretien (jointe en annexe I), et à l'énoncé appelé "Bouchon-Bouteille" qu'il intègre par la suite pour des raisons évoquées avant la première séance observée.
- d'observation des trois séquences d'une heure (mars 1998) correspondant au déroulement effectif du projet de P et de brefs échanges "à chaud" avec P après les séances observées.

Les outils théoriques utilisés pour l'analyse du corpus constitué par l'ensemble des données ainsi recueillies, relèvent de ce que Perrin-Glorian (1999) appelle le *double feuilletage* du milieu, sous-jacent à la théorie des situations didactiques de Brousseau. Nous détaillons dans la suite, les questions que l'une des deux échelles évoquées par cet auteur : la structuration verticale du milieu,⁵³ a permis de poser dans l'étude de la situation d'enseignement des systèmes d'équations considérée.

l'algèbre s'appuyant sur et contre l'arithmétique traditionnelle, typique du début du XXe (Chevallard 1989, p.7).

⁵³ Tel qu'il a été créé par Brousseau (1986) puis élargi et modifié par Margolinas (1994) dans la perspective d'une étude plus approfondie de l'activité du professeur.

1. Structuration du milieu de la situation envisagée par le professeur

a) *Analyse descendante de la situation projetée par le professeur*

Les niveaux surdidactiques correspondent aux sujets distincts auxquels l'enseignant peut s'identifier lorsqu'il élabore et imagine une situation d'enseignement. L'analyse de ces niveaux nous informe sur les décisions prises par l'enseignant lorsqu'il imagine ou envisage un projet d'enseignement, ainsi que sur le fonctionnement des connaissances sous-jacentes à ces décisions. Avant de rentrer dans le cœur de l'analyse du projet d'introduction des systèmes d'équations de P, il nous semble nécessaire de nous arrêter un instant sur la question théorique de la description des connaissances du professeur.

En guise de préambule, la question de la description des connaissances de l'enseignant

Une question de l'analyse descendante tient effectivement à la diversité des connaissances mises en jeu par le professeur dans les niveaux surdidactiques. Comme Margolinas (1994) le souligne, les connaissances de l'enseignant peuvent relever de différents domaines et ne sont ni décrites, ni structurées de façon autonome comme le sont les mathématiques. Si on y regarde de près, cette difficulté se fait sentir dans les analyses descendantes de situations de classe ordinaire, faites jusqu'ici : pour décrire les connaissances de l'enseignant, les chercheurs sont souvent conduits à paraphraser le discours du professeur. En réponse à ce problème, nous avons choisi de décrire les connaissances du professeur en faisant référence à des praxéologies didactiques ou mathématiques. Selon Chevallard (1999), toute connaissance qu'elle soit de nature mathématique ou autre, peut être vue comme le fruit de pratiques humaines et est donc modélisable par une organisation praxéologique :

“Le postulat de base de la TAD [Théorie Anthropologique du Didactique] fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que toute activité humaine peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie.” (Chevallard 1999, p.92).

Ainsi le modèle à quatre composantes de praxéologie, issu de la théorie anthropologique, permet-il de prendre en compte et de structurer la diversité des connaissances du professeur. C'est ce que nous avons tenté de faire pour décrire les connaissances de P au sein des différentes positions surdidactiques. En nous référant au

discours de P lors de l'entretien, nous rattachons ces connaissances à des praxéologies didactiques ou mathématiques ainsi qu'aux moments de l'étude distingués par Chevallard.

Ces outils de la théorie anthropologique nous invitent à une nouvelle lecture des niveaux positifs du schéma de Margolinas. L'analyse descendante peut être interprétée comme une descente vers des organisations didactiques et mathématiques toujours plus spécifiques de la notion mathématique dont l'apprentissage est visé. Nous rejoignons en cela le point de vue de Chevallard, vis-à-vis de l'importance de la prise en compte conjointe du spécifique et du générique :

“ Les problèmes spécifiques de l'étude d'une organisation locale particulière restent en général mal posés tant qu'on n'analyse pas les “ choix ” didactiques conscients ou non, faits à des niveaux de moindre spécificité. ” (Chevallard 1999, p. 107).

Le schéma suivant illustre notre propos :

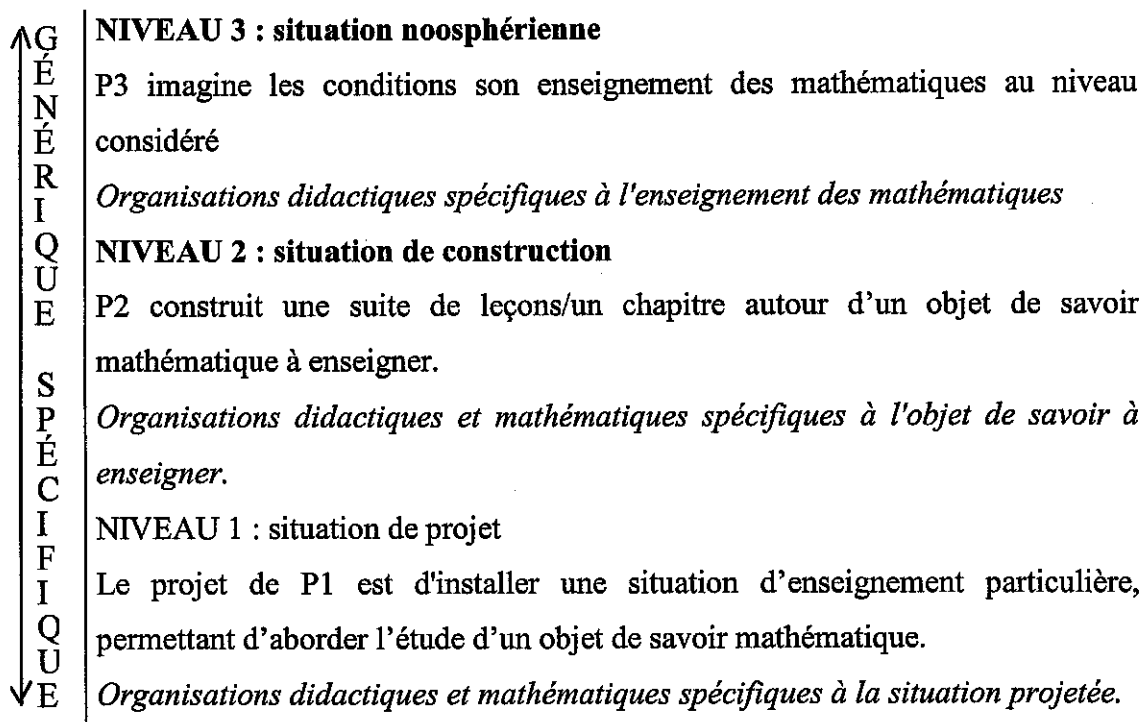


Fig.2 axe générique/spécifique correspondant à la descendante dans les niveaux (de +3 à +1)

D'autre part, toujours en référence à la théorie anthropologique, nous confronterons les connaissances de l'enseignant P décrites en termes de praxéologies aux organisations didactiques et mathématiques dégagées à travers notre analyse de manuels et de programmes du début du XXème à 1999. Cette confrontation permettra de situer et de préciser la position du professeur “ particulier observé ” dans un champ de possibles institutionnels suggérés par notre enquête écologique.

Développons à présent l'analyse descendante de la situation d'introduction des systèmes d'équations envisagée par le professeur P. Cette analyse a pour objectif d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes : *Quelles sont les choix de P lorsqu'il envisage les premiers moments d'enseignement des systèmes d'équations en classe de Troisième ? Quelles connaissances didactiques et mathématiques sous-tendent ces choix ?*

Niveau 3 : situation noosphérienne

La situation noosphérienne représente une position non finalisée : P-noosphérien est en quelque sorte loin du professeur qui cherche à introduire les systèmes linéaires dans sa classe. Nous faisons l'hypothèse qu'en situation noosphérienne, le sujet met en jeu des connaissances génériques : non spécifiques du savoir visé, associées à sa représentation générale de pratiques d'enseignement des mathématiques en Troisième. Parmi les connaissances en jeu à ce niveau, celles qui vont jouer un rôle central dans le contexte présent, décrites ci-dessous, ont trait au moment de la *première rencontre avec un nouveau savoir mathématique*.⁵⁴

P-noosphérien envisage deux techniques pour introduire officiellement un savoir nouveau en classe de Troisième, que l'on peut rattacher à deux types principaux de tâches didactiques : " introduire un savoir nouveau par une activité préparatoire " et " introduire un savoir nouveau de façon classique " :

- L'introduction par une activité préparatoire renvoie pour l'enseignant interrogé, à un problème qu'il qualifie d'ouvert : il le définit comme " simple dans la compréhension " et " amathématique " ou concret. Pour organiser ce type de première rencontre, il s'agit donc de proposer aux élèves un tel énoncé, pour lequel : il existe plusieurs méthodes possibles de résolution, la méthode la plus efficace et la moins coûteuse étant associée au nouveau savoir mathématique qu'il s'agit d'introduire. Ce qui justifie et légitime une telle façon de faire est d'une part, relatif au sens donné au savoir visé comme outil efficace de résolution de problème, d'autre part relatif à l'investissement d'une majorité d'élèves, y compris ceux qui sont en difficulté dans le genre de problème " ouvert ".
- Pour P3, introduire un savoir de façon classique revient soit à organiser une phase d'étude théorique autour de ce nouvel objet de savoir mathématique, soit à le présenter

⁵⁴ P-noosphérien met également en jeu des connaissances relatives à d'autres moments de l'étude : élaboration d'une technique, constitution d'un environnement technologico-théorique, institutionnalisation et évaluation, non détaillées ici (Coulange, 2000).

“ par ostension ”. Il justifie ces façons de procéder, en pointant le fait qu’on ne peut pas toujours trouver une activité préparatoire appropriée (selon les critères fixés ci-dessus). D’autre part ces techniques didactiques sont selon lui, de moindre coût pour l’enseignant et “ acceptées par les élèves en cours de mathématiques. ”

Le milieu M3 de construction est constitué des situations d’enseignement d’un savoir mathématique en Troisième vécues (ou imaginées) et connues par P (à travers ses lectures de revue, ses travaux didactiques, ou ses discussions avec des collègues) : incluant les situations d’enseignement des systèmes d’équations et de la mise en équations résultant de la situation de construction. P-noosphérien interagit avec ce milieu avec les connaissances didactiques décrites ci-dessus : il imagine les conditions d’enseignement d’un savoir mathématique nouveau en fin de Collège. Il envisage et oppose deux façons d’organiser une première rencontre avec ce nouvel objet de savoir : à “ travers une activité préparatoire ” et “ de façon classique ”. Il imagine les avantages de telle ou telle façon d’aborder ce premier moment de l’étude dans sa classe, les pratiques didactiques associées à chacune.

De manière conforme au contexte institutionnel contemporain évoqué plus haut, P-noosphérien accorde une préférence générale aux activités introductives. Mais encore faut-il pouvoir trouver le problème ouvert approprié qui permet d’accomplir à ses yeux ce type de tâches dans le cadre de l’enseignement des systèmes d’équations.

Niveau 2 : situation de construction

Une partie des connaissances mises en jeu par P-constructeur correspond à des connaissances de l’enseignant sur les dispositifs didactiques spécifiques de l’enseignement des systèmes d’équations ou des méthodes de résolution de systèmes. Pour la plus grande part, on peut faire apparaître ces connaissances comme relatives à des spécifications d’organisations didactiques envisagées en situation noosphérienne.

P2 met en jeu des connaissances relatives à l’organisation d’une première rencontre avec les systèmes linéaires dans sa classe de Troisième :

- il envisage une introduction officielle des systèmes linéaires “ par une activité préparatoire ”. Pour cela, il s’agit selon lui, de proposer un énoncé ouvert, ayant les propriétés plus spécifiques suivantes : ce problème doit laisser la possibilité de deux grands types de résolutions : algébriques (associées aux systèmes d’équations) et non algébriques. D’après P2, cette technique didactique est un moyen de donner du sens à

la méthode algébrique (et donc à l'outil système d'équations) comme plus efficace, que les méthodes non algébriques, dans la résolution de problèmes "de la vie courante".

L'organisation didactique ainsi imaginée par P-constructeur, autour d'une première rencontre avec l'objet système paraît en tout point, conforme au rapport institutionnel contemporain dégagé par notre analyse de manuels.

On dégage aussi des propos tenus par l'enseignant, une organisation didactique spécifique, relative à une "façon classique" d'aborder l'étude des systèmes d'équations. Il s'agit pour P2 de commencer son enseignement en faisant le constat théorique : "une équation à deux inconnues admet une infinité de solutions", afin de donner une raison d'être au système d'équations. Il justifie parfois cette technique didactique en affirmant qu'elle permet d'aborder plus directement l'étude de la résolution graphique d'un système de deux équations à deux inconnues, et d'envisager les différents "cas" d'ensemble de couples solutions.

L'introduction classique des systèmes linéaires évoquée par P peut être rapprochée du rapport institutionnel typique de la contre-réforme, décrite plus haut : il s'agit d'introduire officiellement les systèmes d'ordre deux, en continuité des équations à deux inconnues, associées à des droites du plan. P péjore cette manière de faire, qu'il déclare obsolète.

P2 imagine parallèlement à ces deux façons d'aborder l'étude des systèmes d'équations, des organisations didactiques liées à l'introduction des méthodes algébriques de résolution "par substitution" ou "par addition". Celles-ci apparaissent également comme des spécifications des pratiques du niveau +3 :

- Selon l'enseignant interrogé, le problème ouvert approprié pour introduire une méthode de résolution algébrique dans le contexte d'une "activité préparatoire", doit se ramener à un système d'équations canonique, relativement à la technique visée : c'est-à-dire sous une forme pour laquelle cette technique algébrique s'avère la plus économique.
- Introduire la substitution ou l'addition de "façon classique" revient pour P à présenter ces techniques algébriques par ostension. Pendant l'entretien, l'enseignant insiste sur le fait que l'apprentissage de la substitution apparaît plus difficile que celui de l'addition si on la présente ainsi, de manière "classique".

Le sujet constructeur P2 met également en jeu des connaissances mathématiques sur les systèmes d'équations et l'algèbre. Celles-ci sous-tendent ses choix dans l'élaboration d'une organisation mathématique à enseigner autour des systèmes d'équations.

Une première organisation mathématique est relative aux pratiques de résolution des problèmes du premier degré. La résolution d'énoncés inspirés "de la vie courante" renvoie pour P nécessairement à deux grandes classes de techniques : arithmétique et algébrique :

- il est possible de résoudre ce type d'énoncés concrets par des méthodes que P qualifie "d'arithmétiques". Quelles sont les connaissances de l'enseignant au sujet de ces techniques ? Le terme d'arithmétique employé par cet enseignant contemporain renvoie-t-il aux méthodes de résolution telles que : des substitutions arithmétique (sans désignation algébrique, voir exemple cité auparavant) et des méthodes de fausses suppositions, enseignées pendant la première moitié du XXe, au début du secondaire ? Quelles sont les connaissances de P relativement à cette arithmétique traditionnelle enseignée autrefois ? Il paraît difficile de répondre à cette question à partir de la chronique d'entretien, le professeur ne détaillant pas ce qu'il entend par une résolution arithmétique de problème. Cependant les événements observés dans la classe tendent à prouver que P a peu de connaissances relatives aux méthodes arithmétiques de la période classique.⁵⁵ Ceci pose plus généralement la question des connaissances des professeurs contemporains relativement à ce domaine de l'arithmétique élémentaire, disparu de l'enseignement secondaire, depuis les années 1970 (Coulange 2001) ;

- on peut également résoudre les énoncés du premier degré "par l'algèbre" en passant par les étapes suivantes : mise en équations puis calcul de la solution des équations obtenues. P qualifie les méthodes algébriques de rapides, efficaces, normées et faciles à communiquer, par opposition aux techniques "arithmétiques" qu'il semble considérer comme rivales de l'algèbre dans la résolution de problèmes concrets.

Une deuxième organisation mathématique est relative aux types de tâches : résoudre algébriquement un système d'équations (la plupart du temps de deux équations à deux inconnues en classe de Troisième, voire de trois équations à trois inconnues). Les deux méthodes de résolution algébrique auxquelles P fait allusion, comme nous l'avons déjà évoqué plus haut : "l'addition" et "la substitution". P affirme que la technique par substitution est souvent plus coûteuse que la précédente. Il la justifie et la légitime cependant par le fait que contrairement à l'addition (qui est spécifique du linéaire), la substitution a une portée plus grande que la résolution des systèmes d'équations linéaires. Il insiste sur le fait que cette technique algébrique intervient par ailleurs, comme dans la composition de fonctions.

⁵⁵ Nous avons traité de ces questions lors de la précédente école d'été (Coulange, à paraître).

Le milieu de projet M2 est constitué des situations d'enseignement vécues par P (incluant notamment celles qui sont associées à l'activité "Cailloux") ou connues de l'enseignant (par ses lectures de revues ou de manuels sur l'algèbre, ses échanges avec ses collègues au sujet de l'enseignement des systèmes d'équations). En interagissant avec ce milieu, P-constructeur construit son projet d'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième. Il organise les moments de première rencontre suivants :

- Il choisit l'activité "Cailloux" extraite de *petit x*, pour aborder l'étude à la fois des systèmes d'équations et de la méthode de résolution algébrique par substitution.
- Ne trouvant pas de problème ouvert approprié pour introduire de façon similaire la méthode par addition, il envisage de l'introduire de "façon classique", c'est-à-dire par ostension.

Niveau 1 : situation de projet

Les connaissances de l'enseignant en position de projeteur, sont celles qui justifient la construction de l'activité introductive "Cailloux", visant à introduire les systèmes d'équations. Entre autres, P1 met en jeu des connaissances didactiques liées à la préparation de son cours ou à ses choix de problèmes, à l'écriture de la consigne, ou encore à l'installation de la séquence associée dans sa classe.

On relève ainsi un premier type de tâches, envisagé par P1 : l'organisation d'une suite de problèmes "cailloux" à partir de la fiche initiale, tirée de *petit x*. Le professeur interviewé envisage de réduire le nombre d'énoncés par rapport à cette fiche de départ. Il justifie ce choix en affirmant que la résolution d'une série aussi longue de problèmes relativement semblables entre eux, est susceptible de "lasser les élèves". Par ailleurs, il ne prévoit aucune autre modification des énoncés initiaux. P insiste notamment sur le fait qu'il ne faut "pas toucher" aux données numériques des problèmes "cailloux", résultant de choix pertinents des auteurs. Lors de l'entretien, P en position de projeteur prévoit également un scénario associé à "Cailloux". Celui-ci se déroulerait en quatre temps :

- Dans un premier temps, le professeur envisage d'organiser une phase de travail en petites équipes sur les quatre premiers énoncés : P1 envisage de donner la fiche avec les problèmes "Cailloux" sans faire de commentaires, puis d'observer les stratégies qui apparaissent dans sa classe. Les élèves devraient s'engager assez vite dans la résolution des énoncés, et *utiliser spontanément différentes méthodes de résolutions algébriques et non algébriques*.

- L'enseignant prévoit ensuite une phase de bilan sur les différentes techniques de résolution utilisées. Les élèves constatent dès lors les différences entre les stratégies et les comparent pour savoir laquelle est la plus efficace. Pour P, cette étape de bilan est nécessaire avant de passer à la suite de la série et aux énoncés "à trois tas de cailloux". L'enseignant identifie un saut de complexité dans le passage de l'énoncé 4 (à deux tas de cailloux) à l'énoncé 5 (à trois tas de cailloux). L'enseignant prévoit également que ce bilan est un moyen de convaincre les élèves de la supériorité des techniques algébriques faisant intervenir les systèmes d'équations linéaires sur les techniques arithmétiques.
- Pour les énoncés suivants, P-projeteur envisage de "laisser faire les élèves". Ce troisième temps relève pour lui du travail de la substitution algébrique : les stratégies non algébriques ont disparu, les élèves étant convaincus lors de la phase précédente de la supériorité algébrique.
- Le quatrième et dernier temps serait consacré à l'institutionnalisation des connaissances algébriques nouvelles acquises à travers cette activité.

Le milieu didactique M1 avec lequel interagit P-projeteur comprend ici l'ensemble des situations "vécues" : passées ou imaginées, associées à la mise en place de "Cailloux" dans une classe de Troisième. Dans ce cas précis, la composante « passé » joue un rôle essentiel : c'est la troisième année, que ce professeur met en scène cette activité dans une classe de Troisième ; lors de l'entretien, P se réfère souvent à des épisodes passés.

En situation de projet, P1 imagine les conditions de l'activité "Cailloux". À la suite de l'entretien, il organise le texte des problèmes "Cailloux", prévoit le scénario en quatre temps décrit plus haut.

Un moment d'apprentissage de P suite à une modification du milieu didactique

Cependant, entre la date de l'entretien avec P et l'observation de la réalisation effective de son projet, s'est produit un événement qui éclaire le fonctionnement des connaissances d'un professeur. P a réalisé "le projet" que nous venons de décrire dans une première classe de Troisième. Or au cours de cette séance (à laquelle nous n'avons pas pu assister), P a constaté un décalage entre ses prévisions ou attentes et ce qui s'est réellement passé. La mise en concurrence avec des stratégies non algébriques, souhaitée par le professeur, n'a pas fonctionné : les élèves se sont directement engagés dans des stratégies de nature algébrique. Cette situation d'enseignement et le constat de la non-apparition des stratégies que P qualifie d'arithmétiques a transformé le milieu didactique en s'y intégrant.

Cette modification provoque un moment d'apprentissage pour P-projeteur en interaction avec ce nouveau milieu. P1 prend connaissance des effets de la présence des lettres : x, y et z dans la consigne des énoncés "cailloux", au sein d'une "bonne classe".⁵⁶ Le milieu didactique transformé l'informe de l'insuffisance du scénario en quatre temps projeté lors de l'entretien, relativement à sa décision d'introduire l'outil algébrique système en concurrence de stratégies non algébriques. P-projeteur prévoit dès lors un nouveau scénario en cinq temps, en proposant au préalable, avant le début de l'activité "Cailloux", l'énoncé "Bouchon-Bouteille" :

Une bouteille et son bouchon pèsent 110 grammes. La bouteille pèse 10 grammes de plus que le bouchon. Combien pèse le bouchon ?

Cet énoncé doit favoriser les stratégies non algébriques. De ce fait, selon les propres termes du professeur lors d'un entretien "à chaud" avant la première séance observée, ce problème permettrait d'ouvrir la situation associée à "Cailloux" (et donc de donner plus de chances à l'apparition de stratégies non algébriques en réponse à ces problèmes) :

"J'ai donné des feuilles à une classe et c'est là, en voyant si tu veux un élève qui de suite semble aller un peu trop vite, c'est-à-dire que vue que dans Cailloux, les x et les y si tu veux, on induit très fortement la mise en équation et l'idée d'équation. Donc c'est pour ça, j'ai pensé que là avec l'autre classe, je pouvais la faire... la faire plus ouverte, faire un problème plus ouvert."

Niveau 0 : situation didactique

Au niveau de la situation didactique, P-professeur met en jeu des connaissances didactiques pour assurer l'émergence des connaissances visées et gérer la séquence projetée en classe : P0 imagine les aides qu'il va être obligé d'apporter publiquement à l'ensemble des élèves, les décisions à prendre en situation en fonction de ses observations, les diverses connaissances à institutionnaliser.

Dans cette position, P met en jeu des connaissances didactiques relatives à la gestion d'un moment de bilan (projeté dans son scénario, au niveau +1). P envisage lors de cette phase, de faire "verbaliser" les diverses méthodes algébriques et arithmétiques utilisées par les groupes d'élèves pendant la phase précédente, pour expliquer leurs stratégies aux autres.

⁵⁶ Selon P, les deux classes de Troisième sous sa responsabilité cette année-là, sont de "bonnes classes", relativement aux années précédentes. Les bons élèves, jouant le jeu du contrat didactique spécifique à l'algèbre, sont réceptifs aux indices des attentes de l'enseignant, que peuvent représenter les lettres de la consigne ; tandis que les élèves en difficulté, passeraient outre et s'engageraient plus facilement dans stratégies non algébriques.

Cette demande d'explication devrait selon lui permettre de favoriser les méthodes algébriques (qui selon ses connaissances des niveaux supérieurs, sont plus facilement "communicables") et disqualifier les procédures non algébriques.

Suivant le scénario élaboré en position de projeteur, P-professeur imagine également l'organisation d'un temps d'institutionnalisation des connaissances algébriques nouvelles en fin de séance. Il prévoit d'écrire lui-même ou collectivement une fiche pour "résumer" les savoirs en lien avec la mise en équations de problèmes du premier degré, se ramenant à des systèmes linéaires, ainsi que les savoirs en lien avec la résolution algébrique par substitution.

Le milieu M0 d'apprentissage est constitué : des différentes observations effectuées par P-1 passées ou imaginées d'élèves de Troisième engagés dans la résolution de la même série de problèmes "Cailloux" et des différentes réponses brutes données par ces élèves. P0 prévoit et envisage l'organisation de phases de bilans ou diverses institutionnalisations qu'il est raisonnable de faire à partir de ces observations effectuées en situation d'apprentissage.

En guise de conclusion de l'analyse descendante

En guise de conclusion, revenons brièvement sur les apports de l'emploi du modèle d'organisations praxéologiques didactiques et mathématiques dans l'analyse descendante du projet de l'enseignant P. Ce choix méthodologique a permis une description fine des connaissances de nature diverse du professeur dans différentes positions. Il a également nourri une articulation de cette analyse descendante avec notre analyse de pratiques institutionnelles. Celle-ci s'est avérée particulièrement pertinente. Elle a été un moyen de reconnaissance de systèmes cohérents de connaissances mathématiques et didactiques évoqués par bribes ou de façon incomplète dans le discours du professeur interviewé. Elle a également permis de situer la position de cet enseignant dans un champ de possibles institutionnels, en partie appréhendés dans la première partie de notre exposé et détaillés dans d'autres publications. Les choix et connaissances qui sous-tendent les décisions du professeur P s'avèrent pour la plus grande part, conformes au système de contraintes institutionnelles contemporaines. Mais notre analyse montre que le contexte institutionnel de la contre-réforme reste assez "vivant" pour cet enseignant : P se réfère souvent à des organisations didactiques ou mathématiques typiques de cette période d'enseignement, pour les opposer aux pratiques contemporaines d'enseignement, et éventuellement valoriser ces dernières.

D'autre part, l'analyse descendante précise le point de vue de l'enseignant sur la situation d'enseignement ainsi élaborée : elle nous permet de décrire les enjeux didactiques

affichés par ce professeur à travers l'activité introductive "Cailloux", et nous donne partiellement accès à une analyse de la situation d'enseignement associée, faite par l'enseignant. Les analyses qui vont suivre ont pour objectif d'étudier les problèmes "Cailloux" du point de vue d'un sujet générique en position d'élève. En un retour sur les intentions didactiques de l'enseignant, il s'agira alors d'appréhender le fonctionnement économique a priori de cette situation didactique "ordinaire" d'introduction officielle des systèmes d'équations.

b) Analyse ascendante de la situation projetée par le professeur

Selon le schéma de structuration du milieu de Margolinas, le point de vue de l'élève est pris en compte par l'analyse ascendante des niveaux adidactiques. Dans le cadre de notre recherche, nous avons conduit cette analyse du niveau -3 au niveau 0 de façon classique : sans référence explicite à la théorie anthropologique dans la description des connaissances mises en jeu par des élèves génériques. Soulignons au passage le rôle essentiel que jouent les connaissances que sont les connaissances⁵⁷ associées aux "éléments pérennes" du contrat didactique dans l'étude a priori d'une situation d'enseignement : elles seront dans le cas présent, spécifiques de l'algèbre enseignée ou à la résolution de problèmes concrets. Nous ne retraçons ici que les points essentiels de l'analyse ascendante des énoncés "Cailloux". Nous proposons tout d'abord de faire rentrer le lecteur dans des emboîtements de milieux relatifs au premier problème de la série sans décrire dans le détail les positions adidactiques correspondantes et les connaissances impliquées.⁵⁸ Puis suivra une synthèse des résultats de l'analyse conduite sur l'ensemble des problèmes "Cailloux".

Analyse ascendante du premier problème "Cailloux" projetée par l'enseignant

Reprenons la consigne associée au premier énoncé de la série "Cailloux", envisagée par l'enseignant interrogé :

⁵⁷ On reprend ici à notre compte la définition du mot "connaissance", donnée par Brousseau et Centeno (1991, p. 176) : "les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat, conformément à une attente et à une exigence sociale."

⁵⁸ Cette analyse a été développée dans le détail dans Coulange (2000).

Voici deux tas de cailloux

x désigne le nombre de cailloux du 1^{er} tas.

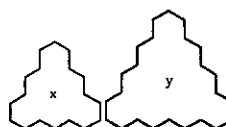
y désigne le nombre de cailloux du 2^{ème} tas.

Le second tas a 19 cailloux de plus que le premier.

a/ Donne une écriture de y à l'aide de x .

b/ Il y a 133 cailloux en tout. Écris une égalité vérifiée par x et y .

c/ Trouve x et y .



L'analyse ascendante nous permet de dégager plusieurs emboîtements possibles de "milieux", associés à ce premier problème : correspondant à autant de cheminements possibles d'élèves génériques.

Situations numériques S(Num)

La première famille de situations associée à cet énoncé "cailloux" suppose la mise en jeu de connaissances élémentaires sur la résolution de problèmes concrets à données numériques (acquises à l'école primaire). Il s'agit de mettre en œuvre des opérations élémentaires (additions et soustractions) directement sur les données numériques de l'énoncé, en position d'agissant (niveau - 2), sous l'influence d'éléments pérennes du contrat didactique spécifique de la résolution de problèmes comme dans le *problème de l'âge du capitaine*. S(Num) donne lieu à des résultats faux rendus publics, non invalidés en situation d'action.

Situations arithmético-numériques S(Ar-num)

Un deuxième emboîtement de "milieux" fait intervenir des connaissances moins élémentaires sur la résolution numérique de problèmes du premier degré. Cette nouvelle famille de positions adidactiques peut être associée à des stratégies d'essais-vérifications. À partir de la mise en relations d'opérations sur les tas de cailloux (étiquetés " x " et " y "), évoquées dans la consigne, et d'opérations sur les entiers cardinaux de ces tas, l'apprenant fait des essais et des vérifications d'entiers pour le nombre de cailloux du premier ou du deuxième tas. Un résultat juste ($x = 57$ et $y = 76$) peut être obtenu et rendu public, avec les dernières opérations de vérification effectuées.

Situations arithmétiques S(Ar1) (substitution)

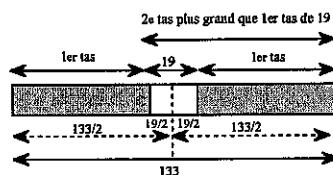
Un autre emboîtement peut être associé à la technique arithmétique “par substitution”, similaires à celles autrefois enseignées en arithmétique élémentaire comme méthode de résolution de problèmes de partages en deux parties inégales, connaissant leur somme (133) et leur rapport (19). À partir de mises en relations d’opérations sur les tas de cailloux et d’opérations sur les nombres entiers de cailloux correspondant (incluses dans le milieu d’action), l’apprenant raisonne par substitution arithmétique, sans désignation algébrique, en s’appuyant ou non sur un dessin, du type :



E-1 trouve alors que si on retranche 19 à 133, on obtient deux fois le nombre de cailloux du premier tas. Soit le nombre de cailloux du premier tas égale 114 divisé par 2 : 57. Puis l’apprenant calcule le nombre de cailloux du deuxième tas en ajoutant 19 à 57 : 76. Ces résultats ($x = 57$ et $y = 76$) sont rendus publics par l’élève en situation didactique, ainsi que les opérations arithmétiques qui ont permis de les obtenir : $133 - 19 = 114$; $114 \div 2 = 57$; $57 + 19 = 76$.

Situations arithmétiques S(Ar2) (changement de variables)

Un quatrième emboîtement de milieux peut être associée à une technique arithmétique dite “par changement de variables”. Un sujet apprenant ayant été dans des positions objective et d’action semblables aux précédentes, peut chercher à “corriger” l’erreur commise en ramenant le nombre de cailloux des premier et deuxième tas à la demi-somme, sans désignation algébrique, s’appuyant ou non sur un dessin du type :



E-1 détermine les relations : le nombre de cailloux du premier tas est égal au nombre total de cailloux : 133 divisé par 2 diminué de 19 divisé par 2 ; le nombre de cailloux du deuxième tas égale 133 divisé par 2, auquel on ajoute 19 sur 2. Suivant la synthèse de son raisonnement arithmétique, il effectue les calculs : $133 \div 2 = 66,5$ et $19 \div 2 = 9,5$, d’où le nombre de cailloux du tas “y” est $66,5 + 9,5 = 76$ et le nombre de cailloux du tas “x” est : $66,5 - 9,5 = 57$.

Soulignons que les deux emboîtements non algébriques que nous venons de caractériser, sous-entendent l'apprentissage de nouvelles connaissances arithmétiques de la part d'un élève de Troisième contemporain (ce type de techniques ne lui ayant pas été enseigné auparavant).

Situations algébriques S(Alg1) (équation à une inconnue)

Nous envisageons également une famille de situations associées à l'utilisation d'une équation à une inconnue dans la résolution de ce problème. En situation d'action, E-agissant passe outre la double désignation algébrique en x et y de l'énoncé (pourtant identifiée en situation objective) et cherche des informations relatives à une seule quantité inconnue, en vue de ramener le problème à une équation à une inconnue. E-apprenant en position réflexive par rapport à ses actions ramène le problème à une équation à une inconnue $x + (x + 19) = 133$ (1). E-1 résout ensuite cette équation avec ses connaissances de calcul algébrique élémentaire, acquises en classe de Quatrième. En situation didactique, l'élève rend le résultat obtenu ($x = 57$ et $y = 76$), ainsi que l'équation (1) et la suite de calculs algébriques qui ont permis de la résoudre. Dans ce type d'emboîtements, interviennent des éléments pérennes du contrat didactique relatif à la résolution algébrique de problème, installés en Quatrième.

Situations algébriques S(Alg2) (deux équations à deux inconnues)

Au final, reste à considérer l'emboîtement qui correspond à l'intervention de la conjonction de deux équations à deux inconnues dans la résolution de ce premier énoncé "cailloux". Après avoir identifié la double désignation algébrique des nombres respectifs de cailloux des deux tas évoqués dans l'énoncé, le sujet en situation d'action, cherche des informations relatives à ces deux grandeurs inconnues en vue de ramener le problème à deux équations à deux inconnues. En réfléchissant à ses actions, E-1 écrit les deux équations : $y = x + 19$ et $x + y = 133$. Avec une nouvelle connaissance algébrique, éventuellement acquise lors de cette phase adidactique, il substitue l'expression $x + 19$ à y dans la deuxième équation. Il se ramène dès lors à l'équation $x + (x + 19) = 133$, qu'il résout avec ses connaissances algébriques acquises en Quatrième. L'apprenant obtient $x = 57$ puis par substitution numérique, $y = 76$. L'élève rend public : ce résultat, les deux équations à deux inconnues auxquelles se ramène le problème posé, ainsi que la suite d'opérations algébriques qui ont permis d'en résoudre la conjonction, par substitution.

Ce dernier cheminement dans la résolution du premier énoncé de la série "Cailloux", avec l'outil système d'équations, suppose une adaptation des connaissances du contrat didactique installé en Quatrième, à la mise en équations d'un énoncé "à deux inconnues", à la résolution par substitution algébrique d'un tel système, etc.

Analyse ascendante de l'activité "Cailloux" envisagée par l'enseignant

Sans détailler l'analyse ascendante des neuf problèmes de l'activité "Cailloux", résumons les résultats essentiels en les commentant brièvement. Les notations $S(\text{Num})$, $S(\text{Ar-Num})$, etc. employées ci-dessous recouvrent des familles de situations qui ne sont pas tout à fait semblables entre elles, mais qui font intervenir des connaissances de même nature.

À propos des emboîtements de situations non algébriques

Les emboîtements de types Num et Ar-Num peuvent être envisagés en réponse de l'ensemble des énoncés "cailloux". Mais $S(\text{Num})$, engageant des connaissances numériques qui paraissent élémentaires pour des élèves de Troisième, ne permet jamais d'obtenir un résultat exact. Et une résolution relevant de $S(\text{Ar-Num})$ paraît relativement coûteuse et peu favorisée par les données numériques de la plupart des énoncés.

Les emboîtements désignés par $S(\text{Ar}2)$ ont un domaine de validité recouvrant tous les énoncés à deux tas de cailloux, type "somme et différence" (le nombre total de cailloux est donné, ainsi que la différence entre les nombres de cailloux de chacun des deux tas) : le sixième problème est le dernier de la série de ce type. Soulignons que cette technique arithmétique ne s'applique à aucun des énoncés "à trois tas de cailloux".

Les techniques relevant de la substitution arithmétique et de $S(\text{Ar}1)$ permettent de résoudre la quasi-totalité des problèmes de l'activité "Cailloux" : seul le neuvième et dernier énoncé fait exception. Néanmoins, notons que le passage du septième au huitième énoncé représente un saut de complexité dans l'application de cette technique arithmétique. Le nombre total de cailloux des trois tas n'étant pas indiqué, il est en effet nécessaire d'isoler un sous-problème intermédiaire "à deux tas" pour résoudre le huitième problème "à trois tas de cailloux".

À propos des emboîtements de situations algébriques

Les familles de situations S(Alg1) qui font intervenir l'outil algébrique : équation à une inconnue permettent de résoudre les sept premiers énoncés "cailloux". Cependant, malgré la présence prévisible d'éléments pérennes du contrat didactique propre à l'enseignement de l'algèbre en Quatrième, les stratégies relevant de ce type d'emboîtements restent peu probables : en raison de la double désignation algébrique qui favorise nettement l'écriture de deux équations à deux inconnues.

Les familles de situations S(Alg2) qui font intervenir la conjonction de deux/trois équations à deux/trois inconnues permettent de résoudre efficacement l'ensemble des problèmes prévus par l'enseignant. Néanmoins l'analyse ascendante permet de pointer deux sauts de complexité, induits par la succession des septième, huitième et neuvième problèmes "cailloux". Ces sauts de complexité sont en lien avec la résolution par substitution algébrique des systèmes de trois équations à trois inconnues auxquels se ramènent les deux derniers énoncés. Il est nécessaire que le sujet en position d'apprenant adopte une position réflexive pour repérer où substituer algébriquement (une voire deux fois dans le neuvième problème), et ne se contente plus de remplacer des inconnues par l'expression algébrique équivalente dans l'équation "somme" : correspondant à "il y a n cailloux en tout...". Ces sauts de complexité peuvent poser des difficultés, voire bloquer des stratégies algébriques d'apprenants.

D'autre part, ces analyses ascendantes révèlent globalement une faible adidacticité des sous-situations didactiques de nature algébrique, associées aux problèmes "cailloux". C'est uniquement par l'intermédiaire de connaissances du contrat didactique que le milieu adidactique est susceptible de provoquer des apprentissages sur les équations à plusieurs inconnues comme outil de résolution de problèmes, et sur la technique de substitution algébrique, comme permettant de résoudre deux/trois équations à deux/trois inconnues.

Le tableau ci-après synthétise les résultats de l'analyse ascendante conduite sur l'activité "cailloux", que nous venons de commenter.

Situations non algébriques				Situations algébriques	
numérique	arithmético-numérique	arithmétique "substitution"	arithmétique "changement de variables"	équation à une inconnue	équations à plusieurs inconnues (2 ; 2) et (3 ; 3)
S(Num)	S(Ar-Num)	S(Ar1)	S(Ar2)	S(Alg1)	S(Alg2)
Énoncés "Cailloux" (1,2, ..., 9)					
1 → 8 très peu probable	1 → 8 très peu probable	1 → 7 → 8	1, 3, 4, 5, 6	1 → 7 peu probable	1 → 7 → 8 → 9
Forte didacticité				Faible didacticité Contrat didactique	

Tableau 3 : résultats de l'analyse ascendante des problèmes "Cailloux"

Conclusions de l'analyse ascendante

La confrontation de l'analyse ascendante à l'analyse descendante, nous permet de formuler l'hypothèse de contraintes internes pour le couple professeur/élève dans la situation didactique considérée. Nous questionnons ici les contraintes résultant de décalages entre le point de vue du professeur et celui d'apprenants, révélés par cette confrontation.

La mise en regard des deux analyses précédentes nous laisse tout d'abord présumer de décalages entre les enjeux didactiques de l'enseignant P et les apprentissages d'élèves de Troisième au sein de la situation d'enseignement. Nous voyons la possibilité d'un dédoublement de situations progressif. Le professeur interviewé pense que l'activité introductive "Cailloux" impose d'elle-même la méthode de résolution algébrique qui fait intervenir l'outil système d'équations, et ceci bien avant le dernier problème de la série. Il ne prévoit l'intervention de stratégies non algébriques qu'au début de l'activité et uniquement à titre de faire valoir des méthodes algébriques qui prendraient rapidement le dessus. Or l'analyse ascendante tend à prouver la possibilité d'apprentissages de connaissances arithmétiques, puisque les techniques dites de substitution arithmétique, permettent de résoudre la quasi-totalité des énoncés.

D'autres décalages sont probables. P prévoit un unique saut de complexité dans le passage du dernier énoncé à deux tas de cailloux (sixième problème) au premier énoncé à trois tas (septième problème). Or l'analyse ascendante amoindrit l'importance de ce saut, mais révèle que la série de problèmes "cailloux" occasionne deux autres sauts de complexité importants, ignorés par l'enseignant (dans le passage du septième au huitième problème, puis

dans le passage du huitième au neuvième problème), susceptibles de conduire à des blocages de la part des apprenants.

Notre modèle de structuration verticale du milieu construit ci-dessus nous invite ainsi à prévoir des tensions internes au sein du couple enseignant/élève au sein d'une telle situation "ordinaire" d'enseignement et nous conduit à formuler les questions suivantes : *quelles sont les régulations nécessairement produites par l'enseignant et les élèves, pour maintenir la relation didactique, au sein de la situation d'enseignement considérée ? Quels sont les jeux entre élèves et enseignants qui résultent des décalages présumés ? Notamment, quel rôle l'enseignant fait-il jouer "en situation" aux différences identifiées entre les élèves ?*

Ces questions nous conduisent à faire l'analyse a posteriori des séquences de classe observée, afin de confronter ce modèle à la contingence et de chercher des éléments de réponses aux questions posées ci-dessus.

2. Analyse a posteriori de la situation d'enseignement observée

Nous donnons une partie des résultats de nos analyses a posteriori selon un découpage en quatre phases principales de la réalisation du projet de P, associée à l'activité "Cailloux".⁵⁹

a) Première phase (problème 1 → problème 4) élèves algébristes et élèves arithméticiens

Une première phase des séquences de classe observée peut être associée à la résolution des quatre premiers problèmes de l'activité "Cailloux".

Résolution des problèmes posés

Dans un premier temps, l'enseignant transfère aux élèves (organisés en petits groupes), la responsabilité de chercher un résultat aux problèmes posés. On rentre dans un processus de dévolution. Il donne à ses élèves des explications qui leur permettent de s'engager dans une interprétation correcte et dégagée de tous présupposés didactiques, de la consigne. P intervient d'abord auprès de tous les groupes puis uniquement auprès de ceux qui le demandent, tout en observant les stratégies engagées par ses élèves. Il cherche à identifier les procédures arithmétiques et algébriques correspondantes. À partir d'extraits de protocoles, nous pouvons dire que les observables retenus par l'enseignant relèvent des situations

⁵⁹ Nous laissons ici de côté l'analyse de la première étape du scénario élaboré par P en position de projeteur, associée au problème "Bouchon-Bouteille". Nous renvoyons le lecteur intéressé à Bessot et Coulangue (1999).

numériques, arithmétiques et algébriques, identifiées dans notre analyse ascendante : S(Num), S(Ar1) S(Ar2) (pour les premier, troisième et quatrième problèmes “ cailloux ”) et S(Alg2). Mais il est difficile de savoir ce que l’enseignant reconnaît et distingue précisément comme stratégies en dehors des stratégies algébriques.⁶⁰

Moments de bilan

L’enseignant envoie des groupes d’élèves au tableau, rendre publiques leurs solutions aux problèmes “ cailloux ” posés”. En accord avec son projet initial de mise en concurrence entre procédures algébriques et non algébriques, P choisit des élèves visiblement engagés dans des stratégies arithmétiques : S(Ar1), S(Ar2), et algébriques : S(Alg2). Il laisse de côté les élèves apparemment restés dans une interprétation très élémentaire des problèmes posés : S(Num). En reprenant les termes de Mercier (1998, p. 303), on peut dire que le professeur autorise uniquement les élèves algébristes et arithméticiens, et seulement eux à enseigner à toute la classe. Pendant les moments de bilan, apparaissent ainsi au tableau, des solutions relevant de divers emboîtements de situations arithmétiques ou algébriques. Par exemple, en réponse au premier problème “ cailloux ” :

sol.1 (Anaïs, Cyril...) 1) $x+y=133$ $y=x+19$ $x+(x+19)=133$ y $2x = 114$ $x=57$ $y=57+19$ $y=76$	sol.2 (Amblin, Caroline ... Laure) I $133-19=114$ $114 \div 2=57$ $x=57$ $y=57+19=76$ $x+y=133$	sol.3 (Benoit, Xavier, Claire ...) 1) $x=y-19$ $y=x+19$ $133 \div 2=66,5$ $19 \div 2=9,5$ $x=66,5-9,5$ $x=57$ $y=66,5+9,5$ $y=76$ $76+57=133$ $76-57=19$
Solution algébrique de type S(Alg2)	Solution arithmétique de type S(Ar1)	Solution arithmétique de type S(Ar2)

Le professeur demande aux élèves restés au tableau d’expliquer leurs solutions. Notons les difficultés qu’ont les élèves arithméticiens à expliquer publiquement leurs procédures arithmétiques : l’absence d’un contrat didactique spécifique à la rédaction et à l’oralisation de solutions relevant de S(Ar1) ou S(Ar2) se fait sentir.⁶¹ P associe ses propres

⁶⁰ Nous avons étudié la possibilité d’apprentissages de l’enseignant en situation, relativement à des procédures arithmétiques employées par ses élèves (Coulange 2001).

⁶¹ Un élève du début du XXe aurait sans doute éprouvé moins de difficulté à rendre publiques ce type de solutions et à verbaliser leurs raisonnements arithmétiques. Ceci faisait en effet partie des enjeux explicites d’enseignement, que d’avoir à résoudre “ oralement ” des problèmes-types partagés en parties inégales.

explications à celles de ces élèves. Il se borne souvent à décrire les opérations arithmétiques écrites au tableau. Au-delà des difficultés qu'il a lui-même à identifier les procédures sous-jacentes, ou à les expliquer à l'oral, il ne s'agit sans doute pas pour lui de s'attarder sur ces techniques arithmétiques qui ne représentent pas un enjeu d'enseignement en soi, et ne sont là que pour valoriser les techniques algébriques. Il s'attarde d'ailleurs de plus en plus au fil de ces quatre énoncés sur la solution algébrique faisant intervenir l'outil système d'équations : il introduit officiellement l'objet système d'équations, avec l'ostensif accolade comme traduction des phrases de la consigne. Les explications de P prennent également de plus en plus de place au fil des bilans organisés autour de ces quatre premiers énoncés "cailloux" : P cherche à reprendre la maîtrise de la situation.

b) Deuxième phase (problème 5 → problème 6) : avancée du projet "algébrique"

C'est chose faite à partir du cinquième problème "cailloux", premier énoncé à trois tas de cailloux. Pendant la deuxième phase correspondant à la résolution des cinquième et sixième énoncés de la série, l'enseignant décharge les élèves de la responsabilité du savoir, et redevient maître du jeu didactique. Ce changement de gestion par l'enseignant renvoie au moins dans un premier temps au saut de complexité prévu par P-projeteur dans le passage des problèmes à deux tas à ceux à trois tas de cailloux. Mais il cherche également à fermer la situation et à imposer l'algèbre. P se rend compte que la concurrence entre stratégies algébriques et non algébriques n'a pas fonctionné dans le sens prévu : les stratégies arithmétiques résistent, ce qui tend à prouver la composante adidactique de ces problèmes "cailloux", vis-à-vis de techniques arithmétiques, prévue par notre analyse ascendante. Pour revenir à son projet d'enseignement de l'algèbre, l'enseignant montre de plus en plus explicitement ses attentes qui sont l'écriture d'un système d'équations puis sa résolution par substitution. Illustrons notre propos en reprenant l'épisode associé à la résolution du sixième énoncé.

Résolution du problème posé

Pendant la phase de résolution de ce sixième énoncé, l'enseignant intervient exclusivement auprès de Laure, élève en difficulté qui semblait se désinvestir explicitement de la situation d'enseignement. Laissant le reste de la classe travailler en autonomie, il guide "pas à pas" cette élève vers une solution algébrique de type $S(\text{Alg}2)$. Dans les échanges entre P et Laure, on note un effet Topaze très marqué.

Moment de bilan

Le professeur envoie Laure rédiger au tableau la solution qu'il a ainsi lui-même produite en aparté avec cette élève. L'ensemble de la classe est en mesure de deviner que cette solution provient de l'enseignant. Par ce biais, P cherche à modifier le contrat didactique initialement installé : il s'agit à partir de maintenant de produire une solution algébrique conforme à celle écrite par Laure au tableau. L'enseignant fait jouer à cette élève, un rôle de "porte-parole".

c) Troisième phase (problème 6 → problème 8) : élèves algébristes

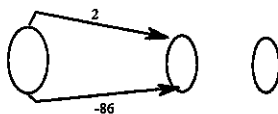
Pendant cette troisième phase, P ne gère plus de moments de résolution : il n'intervient plus en aparté auprès des élèves ; ses observations de leurs stratégies sont limitées (il a d'ailleurs donné une partie de ces problèmes à résoudre "à la maison"). Lors de plusieurs moments de bilan, P s'appuie sur l'ensemble des élèves ayant manifestement perçu ses attentes concernant les solutions algébriques. Il s'agit maintenant pour lui d'envoyer ces élèves et seulement au tableau : le temps de la concurrence entre procédures algébriques et non algébriques a vécu. En accord avec ses prévisions en situation de projet, P cherche à faire rentrer ses élèves dans un moment de travail de la résolution d'un système d'équations par substitution algébrique. Retraçons pour illustrer le moment de bilan associé à l'avant dernier problème de "Cailloux".

Moment de bilan

P envoie Antoine au tableau, qui rédige une solution algébrique de type S(Alg2). En commentant cette solution, l'enseignant perçoit les nombreuses incompréhensions qui subsistent dans la classe vis-à-vis de la procédure algébrique sous-jacente. Ceci est conforme à notre analyse ascendante qui nous permettait de prévoir un saut de complexité important occasionné par le passage du septième à ce huitième énoncé, au sein de la résolution algébrique du système d'équations par substitution. L'enseignant incrimine le fait que la solution d'Antoine est peu lisible (cet élève n'a pas assez bien appuyé sur sa craie).

P envoie Benoît au tableau. Mais à sa grande surprise, cet élève s'engage dans l'explication publique d'une solution arithmétique relevant d'un emboîtement type S(Ar1). Benoît fait le dessin ci-dessous, montrant qu'il isole un sous-problème intermédiaire "à deux

tas de cailloux ” (correspondant à un énoncé type partage en deux parties inégales connaissant leur rapport et différence).



Cette résistance forte d'élève à rentrer dans le jeu algébrique de l'enseignant confirme l'adidacticité de la situation d'enseignement, vis-à-vis de connaissances arithmétiques. Le professeur élude cette solution arithmétique "indésirable". Seuls les élèves ayant un profil algébrique sont autorisés à enseigner.

d) *Quatrième phase (problème 9) : Retour au projet algébrique*

Lors de cette dernière phase, l'enseignant pressé de revenir à ses enjeux d'enseignement (la fin de séance est imminente) fait à nouveau le choix d'envoyer une élève en difficulté au tableau. Rémandine est chargée de jouer le "porte-craie" : elle écrit au tableau la solution algébrique idoine, produite collectivement et dictée par l'enseignant. Le professeur cherche ensuite rapidement à institutionnaliser les savoirs algébriques nouveaux mais n'arrive pas au bout du résumé prévu à cet effet (en position de projeteur), faute de temps.

e) *Conclusions de l'analyse a posteriori*

Les résultats a posteriori présentés, révèlent les différents jeux didactiques entre le professeur et ses élèves. L'enseignant observé s'appuie sur trois ensembles d'élèves pour contrôler les tensions internes inhérentes à la situation projetée (que laissait présumer notre modèle de structuration du milieu) et maintenir la relation didactique dans le sens de ses enjeux d'enseignement : les arithméticiens, les algébristes et les élèves "en difficulté". Il utilise notamment ces derniers pour fermer la situation et revenir à ses objectifs didactiques. Ainsi l'hétérogénéité rencontrée dans cette classe (plus persistante que ne semblait le prévoir l'enseignant en position de projeteur), devient pour lui un moyen d'exprimer ses attentes et de mener à terme son projet initial.

Notons que vis-à-vis de l'enseignement contemporain au Collège, la situation de classe "ordinaire" analysée ici paraît exemplaire. En réponse aux directives officielles, le professeur est souvent conduit à enseigner des savoirs nouveaux par l'intermédiaire de dispositifs ouverts, qui offrent la possibilité de divers cheminements (dont certains ne mettant

pas en jeu les savoirs précisément visés). Mais l'enseignant ne se retrouve-t-il pas contraint (par des effets de contrat) de fermer de telles situations qui faute de "moyens mathématiques", ne rendent pas optimales l'utilisation des connaissances visées ?

IV. EN GUISE DE CONCLUSION

Ce travail se veut un essai d'utilisation conjointe de l'approche anthropologique et de la théorie des situations dans l'analyse de situations de classes "ordinaires", en termes de couple enseignant/enseigné. Nous espérons qu'à la lueur des résultats présentés ici, le lecteur est en mesure d'entrevoir les promesses de telles études s'appuyant sur les outils théoriques évoqués en introduction. Le début de la deuxième partie de cet article illustre l'intérêt d'un regard théorique croisé sur l'activité de l'enseignant. Comme nous l'avons déjà évoqué, l'articulation entre notre enquête sur les pratiques institutionnelles d'enseignement de l'algèbre et l'analyse descendante conduite à partir discours du professeur interviewé, s'est avérée particulièrement pertinente. Mais l'étude écologique de programmes et de manuels a également permis d'éclairer l'analyse ascendante de la situation, et l'activité arithmétique d'une partie des élèves de la classe observée. D'autre part, l'outil de structuration du milieu en théorie des situations didactiques apparaît comme productif dans l'analyse des interactions professeurs-élèves. Il donne accès aux enjeux didactiques du professeur et aux apprentissages mathématiques d'élèves au sein d'une situation d'enseignement donnée. La confrontation des analyses descendantes et ascendantes permet dès lors de distinguer le caractère nécessaire des décisions des acteurs du système didactique du caractère contingent de certaines autres, et par suite d'éclairer leurs interactions au sein de la situation didactique réalisée.

BIBLIOGRAPHIE

- BESSOT A. et COULANGE L. (1999), Analyse a posteriori d'un protocole à l'aide d'un modèle local a priori, *Actes de l'Université d'Été de Didactique des mathématiques de La Rochelle 1998*, in Noirfalise (ed.) IREM de Clermont Ferrand, pp. 53-64.
- BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.19, n°2, pp. 221-266, Edition La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G., CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 11, n° 2/3, pp. 167-210, Edition La Pensée Sauvage.

- CHEVALLARD Y. (1989), *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche*, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.
- CHEVALLARD Y. (1995-1996), *Séminaire d'analyse et d'ingénierie didactique*, IUFM d'Aix-Marseille.
- CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.19, n°2, pp. 221-266, Edition la Pensée Sauvage.
- COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C. (1995), Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classes et modélisation de phénomène didactiques in Arsac et al. (coord.) *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 92-113, eds La Pensée Sauvage.
- CONNE F. (1997), l'activité du couple enseignant / enseigné, , *Actes de la neuvième École d'Été de didactique des mathématiques, Houlgate 1997*, in Bailleul (éd.), pp. 15-24.
- COULANGE L. et BESSOT A. (1999), Structuration du milieu et modèle local a priori, *Actes de l'Université d'Été de Didactique des mathématiques de 1998*, in Noirfalise (éd.) IREM de Clermont Ferrand, pp. 39-51.
- COULANGE L. (2000), *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologie et économique, Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- COULANGE L. (à paraître), Evolution du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20ème siècle : contraintes et espaces de libertés pour le professeur, *petit x*, n° 57, pp. 65-85.
- COULANGE L. (2001), Analyse de l'activité du professeur à propos de l'enseignement des systèmes d'équations en Troisième, in Dorier eds., *Actes de la XIe Ecole d'Été de Didactique des mathématiques*.
- MARGOLINAS C. (1994), Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire Didatech*, LSD-IMAG Grenoble, pp. 27-83.
- MATHERON Y. (1993), Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès, *petit x*, n° 34.
- MERCIER A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18 n°3, pp. 279-310, Edition La Pensée Sauvage.

PERRIN-GLORIAN M-J. (1999) Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol.19, n°3, pp. 279–322, Edition la Pensée Sauvage.

Annexes - Problèmes " Cailloux "

1 Voici deux tas de cailloux.

x désigne le nombre de cailloux du 1^{er} tas.

y désigne le nombre de cailloux du 2^{ème} tas.

Le second tas a 19 cailloux de plus que le premier.

a) Donne une écriture de y à l'aide de x .

b) Il y a 133 cailloux en tout. Ecris une égalité vérifiée par x et y .

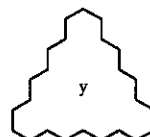
c) Trouve x et y .



2 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :

- le 2^{ème} tas a 7 fois plus de cailloux que le 1^{er} ;

- il y a 56 cailloux en tout.



3 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :

- le 2^{ème} tas a 26 cailloux de moins que le 1^{er} ;

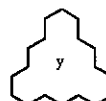
- il y a 88 cailloux en tout.



4 -Refais le même travail qu'en 1 avec les renseignements suivants :

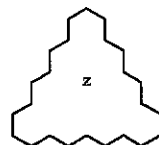
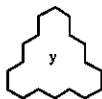
- le 1^{er} tas a 65 cailloux de plus que le 2^{ème} ;

- il y a 175 cailloux en tout.



5 -Voici trois tas de cailloux :

- x désigne le nombre de cailloux du 1er tas.
- y celui du 2ème tas.
- z celui du 3ème tas.



Tu sais que :

- le 1er tas a 15 cailloux de moins que le 3ème ;
- le 2ème tas a 5 cailloux de moins que le 3ème.

a) Donne une écriture de x à l'aide de z ; de y à l'aide de z ;
- il y a 31 cailloux en tout.

b) Ecris une égalité vérifiée par x, y et z.

c) Trouve x, y et z.

6 - Refais le même travail avec les renseignements suivants :

- le 1er tas a 5 cailloux de moins que le 3ème ;
- le 2ème tas a 15 cailloux de plus que le 3ème ;
- il y a 31 cailloux en tout.

7 - Tu sais que :

- le 2ème tas a 3 fois plus de cailloux que le 1er ;
- le 3ème tas a 2 fois plus de cailloux que le 1er ;
- il y a 72 cailloux en tout.

Refais le même travail mais en calculant cette fois y et z à l'aide de x.

8 - Tu sais que :

- le 1er tas a 2 fois plus de cailloux que le 2ème ;
- le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er ;
- le 2ème tas a 86 cailloux de moins que le 1er.

Trouve x, y et z.

9 - Tu sais que :

- le 1er tas a deux fois plus de cailloux que le 2ème ;
- le 3ème tas a 36 cailloux de plus que le 1er ;
- le 2ème tas a 43 cailloux de moins que le 3ème.

Trouve x, y et z.

INTERACTIONS DIDACTIQUES ET PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT, LE CAS DE LA PROPORTIONNALITE AU COLLEGE.

Magali HERSANT

Equipe Didirem et IUFM de Versailles

L'objet de ce séminaire était de présenter mon travail de thèse (Hersant, 2001) qui porte sur l'analyse de pratiques d'enseignement des mathématiques dans des classes ordinaires de collège, c'est-à-dire lorsqu'il ne s'agit pas d'ingénierie didactique. Dans mon exposé j'ai principalement traité les aspects de ce travail qui concernent l'institutionnalisation et ce sont les résultats concernant ces mêmes aspects que je reprendrai ici après avoir rappelé la problématique et la méthode d'étude.

I. PROBLEMATIQUE

Dans les pratiques d'enseignement, je m'intéresse à la façon dont le professeur gère l'avancée de son projet dans la classe et contrôle l'avancée des connaissances des élèves. Je cherche à avoir accès à des informations qui se situent au niveau de ce que fait le professeur pour réaliser son projet dans la contingence et au niveau des rôles respectifs du professeur et des élèves dans la construction des connaissances.

En particulier, une des questions que je me pose est de savoir comment le professeur procède au niveau de l'institutionnalisation. Il semble qu'actuellement au collège le cours est très interactif et que la « leçon », c'est-à-dire le moment où les élèves notent sur le cahier ce qu'il y a à retenir a une place réduite. Or ce moment permet habituellement la décontextualisation et l'institutionnalisation des connaissances et savoirs. La question est donc de savoir si ces fonctions de décontextualisation et d'institutionnalisation sont assumées en dehors de la leçon et comment. Pour les élèves, il s'agit de savoir comment ils peuvent alors distinguer ces fonctions qui apparaissent sur un même plan que, par exemple, la correction d'exercices.

Un autre aspect des pratiques d'enseignement questionné concerne l'intégration de logiciels dans la classe. En particulier, j'ai étudié au cours de mon DEA le logiciel *La proportionnalité à travers des problèmes* qui propose aux élèves des problèmes avec explications. Les explications correspondent à une partie de ce que peut dire le professeur en classe et on peut se demander comment s'articulent le travail sur le logiciel et le travail avec le professeur et si le discours du professeur ne se superpose pas au discours dans le logiciel. Par ailleurs, une autre question concerne le rôle des explications et messages dans l'institutionnalisation dans le logiciel et leur impact sur les connaissances des élèves. Pour traiter ce questionnement, j'ai effectué des premiers choix à différents niveaux.

II. PREMIERS CHOIX

1. Approche du problème

Dans le logiciel, les explications tiennent lieu de discours du professeur : elles permettent à la fois de faire avancer les connaissances des élèves et le projet d'enseignement du logiciel. En faisant un parallèle entre le logiciel et la classe, j'ai tenté dans un premier temps d'aborder l'analyse des pratiques d'enseignement en classe du point de vue de l'explication. Je pensais que les explications qui correspondent en quelque sorte à des moments clé du déroulement du projet me permettraient d'en suivre l'avancée. A partir de différents travaux, j'ai donc caractérisé l'explication comme une communication entre un récepteur et un émetteur dont le but est de faire progresser le récepteur sur un domaine particulier de connaissances. Mais, dans la classe les échanges sont plus complexes que cela et je ne voulais pas écarter de l'étude certains moments qui correspondaient à une avancée du projet ou des connaissances des élèves. J'ai donc choisi de m'intéresser aux interactions didactiques, c'est-à-dire aux communications verbales au sujet d'une connaissance ou d'un savoir dans une situation didactique. Les interactions didactiques sont un *moyen d'accéder à la façon dont les connaissances et savoirs se construisent dans la classe (dévolution / institutionnalisation)* et aux rôles respectifs du professeur et des élèves dans cette construction.

2. Observations

Pour permettre des comparaisons, j'ai choisi d'observer un professeur A lorsqu'il utilise le logiciel *La proportionnalité à travers des problèmes* et lorsqu'il ne l'utilise pas, ainsi qu'un professeur B qui n'utilise pas le logiciel.

3. Cadre théorique

Pour cette étude, je me suis placée dans le cadre de la théorie des situations qui modélise les interactions des acteurs à propos d'un savoir et dans laquelle les interactions interviennent notamment dans les processus de dévolution et d'institutionnalisation.

4. Thème mathématique

J'ai aussi choisi un thème mathématique dont je soupçonnais l'enseignement riche en interactions : la proportionnalité. C'est un enseignement qui fait une grande place aux problèmes et dans lequel il y a peu de savoirs décontextualisés à enseigner.

5. Type de corpus analysé

Enfin, l'objectif étant d'étudier la façon dont le professeur gère l'avancée de son projet d'enseignement, j'ai choisi d'analyser, à partir de leurs transcriptions, des périodes assez longues qui correspondent au déroulement d'un objectif d'enseignement.

III. VUE D'ENSEMBLE DU TRAVAIL

Dans mon questionnement, trois pôles interviennent de façon dépendante : le contenu mathématique, le logiciel et les pratiques d'enseignement. L'étude des pratiques d'enseignement constitue le pôle principal de mon travail mais, pour analyser les pratiques en classe, il m'a d'abord semblé nécessaire d'avoir une connaissance de la transposition didactique de la proportionnalité et une connaissance plus précise du logiciel. J'ai donc débuté ma recherche par une étude du contenu mathématique puis une étude du logiciel avant d'en venir à l'étude de pratiques.

1. Étude didactique du contenu mathématique

A partir des programmes, j'ai repéré qu'actuellement l'enjeu principal de l'enseignement de la proportionnalité est de reconnaître si un problème relève ou non de la

proportionnalité, d'en reconnaître les variables, de voir comment on peut l'algébriser et le traiter dans différents registres sémiotiques. Par ailleurs, dans une étude de l'évolution de la transposition de didactique de la proportionnalité, j'ai montré comment les organisations mathématiques actuelles se sont mises en place au cours du 20^{ème} siècle à partir de modifications par petites touches.

En utilisant différents outils, j'ai aussi repéré des variables des problèmes de proportionnalité que j'ai classées en deux groupes : les relations de proportionnalité en jeu (cadre, type de relation, nature des grandeurs et des nombres en jeu), les types de problèmes (application linéaire outil ou objet, place des ostensifs, domaine de l'étude, types de tâches). Cette étude de la proportionnalité permet de compléter les travaux existants dans ce domaine. Les variables précitées sont utilisées pour l'analyse des problèmes du logiciel et pour ceux donnés par les professeurs.

2. Analyse du logiciel

J'ai envisagé les potentialités d'intégration du logiciel à partir d'une analyse de ses problèmes, messages et explications et de l'observation d'élèves travaillant avec.

Ce logiciel correspond à un environnement fermé dans lequel le professeur n'a pas besoin d'intervenir, et peu de difficultés peuvent être prévues en ce qui concerne la dévolution du travail avec le logiciel. En revanche, on peut prévoir des difficultés dans l'articulation du travail papier crayon et du travail avec le logiciel. En effet, le logiciel propose de nombreux problèmes courts et pour les élèves une « multitude » de parcours est possible. Il n'y a pas réellement de mémoire de classe, ce qui entraîne des difficultés au niveau de l'institutionnalisation, avec le professeur, des savoirs rencontrés dans le logiciel. Pour atténuer ces difficultés, il faudrait, par exemple, que le professeur reparte de situations communes à la classe lorsqu'il revient au papier crayon.

3. Les observations

Compte tenu des choix faits, j'ai observé l'enseignement de la proportionnalité dans trois classes :

-la classe A4 qui est classe de 4^{ème} du professeur A où le logiciel est utilisé. C'est la première fois de sa carrière que le professeur intègre un logiciel à son enseignement, mais elle a participé à l'élaboration du logiciel ;

- la classe A3 qui est une classe de troisième du professeur A. Elle est observée un an après la classe A4 et dans un autre établissement ;
- la classe B qui est une classe de 4^{ème} du professeur B, observée, elle aussi, un an après la classe A4.

Ces observations représentent au total vingt-cinq séances sur la proportionnalité qui ont été transcrites. Pour étudier la façon dont le professeur gère l'avancée de son projet dans la classe face à la contingence, il fallait que je me place à un niveau d'analyse assez fin tout en me donnant les moyens de situer les actions du professeur par rapport à son projet et à sa réalisation en cours. J'ai donc procédé par zooms successifs pour entrer dans le corpus, c'est à dire que j'ai découpé le corpus initial en moments de plus en plus petits en faisant des analyses à différents niveaux et en écartant de l'étude certains morceaux de ce corpus.

Le choix des morceaux retenus s'est effectué de la façon suivante. Pour permettre des comparaisons je voulais retenir, si possible, un corpus dans lequel :

- 1/ Les professeurs A et B fonctionnent sur des contenus assez proches ;
- 2/ Ce que fait le professeur A en classe a un lien avec le logiciel.

Par ailleurs, je voulais retenir aussi, si possible, des morceaux de cours riche en interactions.

IV. METHODE D'ETUDE

Pour choisir les morceaux retenus du corpus, j'ai donc procédé à un premier découpage. J'ai repéré les gros objectifs d'enseignement traités dans les classes à partir des entretiens préalables au début de l'enseignement et des exercices choisis par les professeurs. Dans les trois classes on retrouve les mêmes objectifs : les pourcentages d'augmentation / réduction, la notion de vitesse et la linéarité.

Ces objectifs ont permis d'identifier des périodes qui correspondent à leur réalisation et que j'ai appelé des *séquences*.

Ensuite, à partir des exercices proposés aux élèves, des scénarios prévus et des scénarios réalisés pour chacune des séances, j'ai relevé les progressions choisies, situé et caractérisé les régulations effectuées dans chaque classe, précisé les modalités de travail pour la recherche d'exercices et l'institutionnalisation, ainsi que les modalités d'interaction dans la classe. Cela m'a permis d'émettre des hypothèses sur les choix d'enseignement des professeurs. Ce premier niveau d'analyse qui donne une idée de la globalité des

enseignements observés m'a permis de retenir quatre séquences à analyser : celles sur les pourcentages dans les trois classes et celle sur la linéarité dans la classe A4.

1. Présentation des séquences retenues

La séquence sur la linéarité correspond à une articulation entre le travail sur le logiciel et le travail en classe. C'est la seule séquence où cette articulation a lieu. On y observe de nombreuses modifications du projet initial.

Pour la séquence sur les pourcentages dans la classe A4, le travail n'est pas en lien avec le logiciel. Par ailleurs, dans les trois classes observées, les professeurs veulent amener les élèves à calculer le prix résultant d'une augmentation ou d'une réduction sans passer par le calcul de la valeur de l'augmentation ou de la réduction. Cet objectif est explicitement au programme de 3^{ème}, mais dans les deux classes de 4^{ème} (A4 et B), les professeurs le traitent. Cependant, les enseignants n'introduisent pas le coefficient de la même façon. Dans sa classe de 4^{ème} et dans sa classe de 3^{ème}, le professeur A utilise une factorisation dans le cadre algébrique pour obtenir le coefficient de proportionnalité entre le prix initial et le prix final, tandis que le professeur B utilise la linéarité et le passage par la valeur unitaire. Par ailleurs, dans la classe A3, cette séquence présente de nombreux écarts entre le projet initial et sa réalisation, ce qui devrait se traduire par de nombreuses interactions professeur-élèves.

A ce stade de l'analyse, j'ai une idée de la globalité des enseignements observés. Mais les séquences retenues restent des unités assez grosses. Par exemple la séquence dans la classe A3 dure plus de quatre heures. Pour analyser les pratiques comme je le souhaite, un découpage plus fin est nécessaire. J'ai donc effectué un découpage des séquences en phases et épisodes.

2. Découpage des séquences

Une phase correspond à une unité d'activité du professeur et des élèves, c'est une étape de la réalisation du projet du professeur. A l'intérieur de chaque phase, j'effectue un nouveau découpage en épisodes ; un épisode correspondant à une unité de contenu mathématique. Pour illustrer ce découpage, considérons le début de la séquence sur les pourcentages dans la classe A4.

Le premier exercice de la séquence est le suivant. Il est constitué par ce qui n'est pas en gras. Les élèves avaient à le chercher à la maison. Au début du cours, le professeur modifie l'exercice en ajoutant la ligne somme totale et la question 3 qui sont en gras.

Une banque verse 5% d'intérêt annuel sur toute somme d'argent placée. L'intérêt annuel versé est proportionnel à la somme d'argent placée.

1) Complète le tableau suivant :

somme placée	100	200	350	550	660	780	896	s
intérêt								
somme totale								

2) On désigne la somme placée par la lettre s et le montant des intérêts par la lettre i .

Exprime le montant des intérêts en fonction de la somme placée.

3) Exprimer la somme totale en fonction de la somme placée.

A partir de cet exercice modifié, le professeur poursuit deux objectifs, l'un, non déclaré, concerne l'application d'un pourcentage (vu dans les classes précédentes), l'autre, déclaré, concerne le passage direct de la somme placée à la somme totale qui est quelque chose de nouveau pour les élèves.

Dans cette séquence, j'ai repéré quatre phases. Les trois premières ont lieu au cours de la première séance :

-Phase 1 : modification de l'exercice par le professeur, remplissage de la ligne " somme totale", travail individuel (somme totale = somme placée + intérêt)

-Phase 2 : correction des questions 1 et 2 de l'exercice : montant des intérêts, expression algébrique de l'intérêt $i = 0,05s$

-Phase 3 : le professeur pose le problème du passage de la somme placée à la somme totale, la question est résolue collectivement.

-Phase 4 : reprise du problème du passage de la somme placée à la somme totale.

Ensuite, en zoomant encore, dans la phase 1, par exemple, j'ai repéré quatre épisodes désignés par des lettres de (a) à (d).

Epi.	Titre
(a)	Signification de l'expression « somme totale »
(b)	Remplissage individuel de la ligne « somme totale »
(c)	Nouvelle explication de l'expression « somme totale » (incise dans le travail individuel des élèves)
(d)	Fin du remplissage de la ligne « somme totale »

Remarquons que lors du découpage de phases en épisodes, des repères langagiers, comme « d'accord ? », « Bon. » « Alors... » coïncident le plus souvent avec les changements d'épisodes, ce qui permet de valider le découpage.

Revenons maintenant à la méthode d'étude, pour voir où on est dans la réalisation de l'objectif. A ce niveau de découpage, on a des informations sur la façon dont avance le projet du professeur dans la classe, en particulier, on a une chronologie du déroulement du projet. Mais cela ne permet pas encore une analyse au niveau de la façon dont il procède. Pour cela, je reconstruis, lorsque c'est possible, une situation a-didactique dont j'effectue une analyse a priori.

3. Analyse a priori de la séquence

La recherche d'une situation a-didactique associée à un problème présente un double intérêt : elle permet d'abord de statuer sur les possibilités de réalisation de l'objectif du professeur de façon adidactique : elle permettra aussi, ensuite, de situer les actions du professeur en classe par rapport aux caractéristiques de la situation, notamment en termes de modification du milieu, le cas échéant.

Dans l'analyse a priori, je repère essentiellement les enjeux de savoir, ce que peuvent faire les élèves face à la situation et comment l'exercice choisi permet de parvenir à l'objectif fixé.

Reprenons l'exemple précédent. L'exercice est donné par le professeur pour obtenir l'expression du coefficient de proportionnalité entre la somme placée et la somme totale. La question 3 de l'exercice sur l'expression algébrique de la somme totale peut être interprétée comme une situation a-didactique qui modélise ce savoir. Le milieu de cette situation est constitué par le tableau rempli qui permettra de vérifier, éventuellement, que l'on trouve bien

le même résultat en faisant la somme et en multipliant par le coefficient. L'expression algébrique de l'intérêt et celle la somme ($s = x + 0.05x$) font aussi partie du milieu.

Ici, je dis qu'il s'agit d'une situation adidactique puisqu'il y a des moyens de rétroactions, mais en réalité, il s'agit, pour le moment, d'une situation qui possède des potentialités adidactiques. En effet, son déroulement adidactique suppose, entre autres, que les connaissances algébriques des élèves soient disponibles, ce qui n'est pas évident puisqu'en 4^{ème} le calcul algébrique est relativement nouveau pour les élèves qui n'auront pas forcément le réflexe de factoriser.

4. Analyse a posteriori de la séquence

Après cette analyse a priori, j'effectue une analyse a posteriori de la séquence, toujours dans le cadre de la théorie des situations. A ce niveau, l'objectif est de repérer la façon dont procède le professeur et le rôle respectif du professeur et des élèves dans l'avancée des connaissances et savoirs dans la classe. Ici, la notion de milieu, si on utilise la structuration, permet d'identifier les connaissances nécessaires pour agir sur le milieu, mais ne permet pas de savoir comment ces connaissances sont produites. De plus, il n'est pas toujours possible de reconstruire un milieu adidactique.

Pour avoir des éléments plus fins sur les pratiques, j'ai donc utilisé la notion de contrat didactique dont j'ai poursuivi et précisé la caractérisation proposée par Brousseau à l'école d'été de 1995. Cette notion correspond mieux à mon objectif puisque déjà, elle donne des éléments pour analyser les rôles respectifs du professeur et des élèves en termes de répartition de responsabilités.

V. LE CONTRAT DIDACTIQUE : OUTIL POUR CONNAITRE L'AVANCEE DES CONNAISSANCES ET SAVOIRS DANS LA CLASSE

1. Composantes et structuration du contrat didactique

A partir de travaux sur le contrat didactique, j'ai identifié quatre composantes du contrat :

- le domaine mathématique auquel appartient la notion (algèbre, arithmétique) ;
- le style d'enseignement, en considérant, dans une première analyse, principalement deux styles, la transmission du savoir par des situations et la transmission directe du savoir. Bien entendu, le fait de considérer initialement ces deux styles

d'enseignement correspond à une caricature de la réalité puisque des modalités intermédiaires d'enseignement existent ;

- le statut didactique du savoir. Dans son cours à l'école d'été en 1995, Brousseau parle essentiellement du savoir nouveau et dit qu'il faudrait préciser les stratégies didactiques pour les savoirs anciens. En considérant toujours les statuts didactiques par rapport à la ligne ancien / nouveau, j'ai distingué cinq statuts : le savoir entièrement nouveau, le savoir après une première rencontre, le savoir en cours d'institutionnalisation, le savoir institutionnalisé utilisé dans des exercices d'entraînement et le savoir déjà institué que l'on va rappeler ou évaluer ;
- la répartition des responsabilités entre le professeur et les élèves par rapport à la production et à la validation des réponses : responsabilités entièrement du côté de la classe, entièrement du côté du professeur, partagée entre la classe et le professeur, responsabilité laissée à chaque élève de la classe, responsabilité partagée entre le professeur et un élève.

Par ailleurs, j'ai aussi distingué trois niveaux de structuration du contrat qui caractérisent ce qui se passe dans la classe à différentes échelles de temps :

- le macro-contrat qui est à l'échelle de l'enseignement d'une notion ;
- le méso-contrat qui est à l'échelle de la réalisation d'une activité au moins ;
- le micro-contrat qui est à l'échelle de l'épisode.

L'articulation entre les composantes de contrats et les niveaux de structuration de contrats réside dans la stabilité des certaines composantes à certains niveaux.

Au niveau du macro-contrat, le domaine et le style d'enseignement sont des composantes généralement stables. Ensuite, au niveau du méso-contrat, le statut didactique du savoir va aussi se stabiliser le plus souvent. On a alors trois composantes stables. Puis, au niveau du micro-contrat, c'est le partage de responsabilités entre le professeur et les élèves qui va s'ajouter comme une composante stable.

Par ailleurs, selon le style d'enseignement, on peut attendre des associations différentes au niveau des méso et micro contrats. Par exemple, dans le cas de la transmission par des situations, on aura plutôt l'association du savoir nouveau à la responsabilité du côté des élèves. Par contre, dans le cas de transmission directe du savoir, on aura l'association du savoir nouveau à la responsabilité du côté du professeur.

2. Apports de la structuration du contrat didactique à l'analyse de pratique, exemples

La structuration du contrat permet de rendre compte de la façon dont les connaissances progressent dans la classe en termes de responsabilités, de voir qui fait quoi. Pour illustrer la façon dont j'utilise cet outil, reprenons l'exemple de la séquence dans la classe A4.

Le domaine est le domaine arithmétique, avec d'éventuels passages dans le domaine algébrique. Pour cette séquence, le style d'enseignement est plus proche de la transmission par des situations que de la transmission directe du savoir puisque j'ai pu reconstruire une situation a-didactique et que je n'ai pas observé que le professeur « donnait » le savoir.

Dans cette séquence, il y a deux types de savoirs en jeu : un savoir déjà connu qui est l'application d'un pourcentage et qui fait l'objet de la phase 2 ; un savoir nouveau : l'utilisation d'une unique multiplication pour calculer la somme totale. Ce savoir fait l'objet des phases 3 et 4.

Dans la phase 2 qui concerne le savoir déjà connu des élèves, la responsabilité entre le professeur et les élèves se répartit de la façon suivante au cours des dix épisodes.

Épisode	Titre	Responsabilités
Phase 2 : correction des questions 1 et 2		
(a)	Valeur pour 100F	P/ classe
(b)	Signification de 5% d'intérêt : 5F pour 100F	P/ classe
(c)	Calcul de l'intérêt pour 200F(1)	P /classe
(d)	Coefficient entre somme placée et intérêt (2)	P / 2 élèves
(e)	Suite de la correction de la ligne 2 (3)	P/ classe
(f)	Calcul de coefficients analogues	P/ classe
(g)	Fin de la correction de la ligne 2 (4)	P/ classe
(h)	Intervention de Pascal, valeur unitaire (5)	P/Pascal
(i)	Correction de la ligne 3, procédure additive	P/ classe
(j)	Intérêt en fonction de la somme placée	Classe
Phase 3 : problème du passage du prix initial au prix final		
(a)	Expression de la somme finale en fonction de la somme placée	P/ Damien, Romain, Julien
(b)	Justification du coefficient	Romain
(c)	Calcul de coefficients	P/ classe

Dans les trois premiers épisodes qui portent sur des savoirs anciens des élèves (valeur de l'intérêt pour 100F, signification de 5% et valeur pour 200F en utilisant la procédure linéaire), le professeur n'intervient pas dans la production des réponses, mais seulement au niveau de leur validation, et les élèves qui interviennent ne sont pas toujours les mêmes. Par contre, dans l'épisode (d) où il s'agit d'exprimer le coefficient de proportionnalité entre la somme placée et l'intérêt, qui est aussi un savoir ancien pour les élèves, mais qui correspond à un des objectifs fixés par le professeur, la répartition des responsabilités est modifiée puisque le professeur s'appuie sur deux élèves seulement. Puis, pour le reste de la correction de la ligne 2 et le calcul d'autres coefficients de proportionnalité (pour 8%, pour 15%) (e, f, g), le professeur redonne la main à l'ensemble de la classe, en gardant une part de responsabilité dans l'évaluation des réponses.

Dans l'épisode (h), un élève, Pascal, intervient pour proposer de calculer le montant des intérêts en passant par la valeur unitaire. A ce moment-là, la responsabilité est partagée entre le professeur et cet élève que le professeur laisse expliquer son calcul. Cet épisode est une incise dans le travail de la classe, mais la répartition des responsabilités entre le professeur et les élèves correspond, il me semble, à une caractéristique forte de la pratique de l'enseignant, puisqu'alors on aurait pu observer une prise de responsabilité totale du professeur.

Ensuite, pour la correction de la troisième ligne en utilisant la procédure additive (i), la responsabilité est aussi partagée entre les élèves qui produisent les réponses et le professeur qui les valide. En revanche, pour l'expression de l'intérêt en fonction de la somme placée (j), la responsabilité est entièrement laissée aux élèves puisque le professeur note les différentes propositions des élèves au tableau et leur demande d'effectuer un tri pour retenir les bonnes. Dans la phase 3 qui porte sur le savoir nouveau, pour les deux premiers épisodes qui concernent l'expression de la somme finale en fonction de la somme placée et la justification du coefficient de proportionnalité $\times 1.05$, le professeur s'appuie de nouveau sur quelques élèves. Ce partage de responsabilité professeur - quelques élèves va être modifié une fois le coefficient produit puisque le professeur va alors redonner à la classe la responsabilité de la production d'autres coefficients de même type.

Au cours de ces phases, on observe donc que le partage de responsabilités varie en fonction du statut didactique du savoir en jeu et de son lien avec les objectifs de l'enseignant. La responsabilité est souvent partagée entre le professeur et les élèves lorsqu'il s'agit d'un savoir relativement ancien, par contre s'il s'agit de produire quelque chose de nouveau ou de relativement nouveau, comme par exemple dans les épisodes (d) de la phase 2 ou (a) et (b) de

la phase 3, le professeur s'appuie sur quelques élèves de la classe seulement. Ces fluctuations du partage de responsabilités entre le professeur et les élèves ne sont pas, en un sens, très étonnantes dans la mesure où, pour ce qui concerne un savoir nouveau on peut supposer que tous les élèves de la classe ne sont pas capables de participer. Cependant, elles correspondent probablement à une caractéristique de la pratique du professeur qui est d'obtenir, autant que possible, le savoir nouveau de quelques élèves de la classe pour ensuite faire utiliser ce savoir par l'ensemble de la classe. En effet, dans la classe B, comme on va le voir, les fluctuations de responsabilités entre le professeur et les élèves ne sont pas du même type.

Dans cette classe B, pour le même objectif d'enseignement, le professeur propose l'exercice suivant pour débiter la séquence.

a/ L'abonnement annuel à une revue coûte 940F. On propose une réduction de 15%. Calculer le prix réduit.

b/ La TVA est une taxe à la valeur ajoutée au prix d'une marchandise. Le taux de TVA étant égal à 20.6%. Quel est le prix TTC d'une marchandise qui coûte 1250F hors taxe ?

Cet exercice ressemble à celui donné dans la classe A4 et il était aussi à chercher à la maison. Cependant, la question est posée pour une seule valeur à chaque fois et il n'y a pas d'algèbre. Il n'y a donc pas de rétroaction possible. Par ailleurs, on peut s'attendre à ce que les élèves calculent la valeur de la réduction ou de la TVA à chaque fois et calculent la valeur finale en faisant une somme. Pour cette séquence, je n'ai pas pu reconstruire une situation adidactique, mais les outils d'analyse présentés précédemment fonctionnent aussi dans ce cas.

Pour obtenir le coefficient de proportionnalité, le professeur B va procéder de la façon suivante. Au cours de la phase 1 (sept épisodes), il s'agit de faire un rappel sur les pourcentages, et notamment de rappeler ce que le professeur désigne par la « phrase-clé », par exemple : « si on a une augmentation de 5%, le prix de l'augmentation est de 5F pour 100F et le prix final est de 105F ». La phase 2 concerne la correction de la question a/ de l'exercice. Je l'ai découpée en sept épisodes au cours desquels les responsabilités se répartissent de la façon suivante.

Épisode	Titre	Responsabilités
Phase 2 : correction de la question a/		
(a)	Production de la phrase-clé pour l'exercice (3)	P
(b)	Calcul du prix final pour 10F, 20F, 40F, 500F et 400F (4)	P/ classe
(c)	Explication de la procédure linéaire à une élève	P
(d)	Calcul du prix final correspondant à 940F (5)	P
(e)	Explication de la procédure linéaire à un élève (6)	P
(f)	Calcul du coefficient de proportionnalité entre le prix initial et le prix final	P
(g)	Calcul du prix final en utilisant le coefficient $\times 0.85$	Chaque élève

Dans l'épisode (a), le professeur demande aux élèves de produire la phrase-clé dans le cas de 15% de réduction. Pour cela, elle procède par analogie et donne pratiquement la réponse, c'est pourquoi je dis qu'elle a la responsabilité de la production.

Ensuite, dans l'épisode (b), le professeur B reconstruit de façon ostensive le tableau que le professeur A donnait dans l'énoncé. Il s'agit d'utiliser la propriété de linéarité qui est un savoir ancien, B laisse la responsabilité aux élèves. Puis, dans les épisodes (d) et (e) où la propriété de linéarité additive est en jeu et dans lesquels il s'agit de calculer le prix final, le professeur a la responsabilité de la production. En fait, comme la plupart des élèves ne comprennent pas pourquoi le professeur passe par ces valeurs, l'enseignant est obligé de donner les réponses. Dans ces épisodes, le professeur justifie la proportionnalité entre le prix initial et le prix final dans le cadre arithmétique en montrant que l'on fait les mêmes opérations sur le prix initial et sur le prix final. Cela va justifier l'utilisation d'un coefficient de proportionnalité et sa recherche par le moyen habituel dans l'épisode (f) où le professeur a encore la responsabilité de la production. Enfin, dans l'épisode (g), en demandant aux élèves de calculer individuellement le prix final avec le coefficient, le professeur redonne la responsabilité de la production à chaque élève.

Dans cette phase 2, le partage de responsabilités varie encore en fonction du statut didactique du savoir. Mais ces variations ne sont pas du même type que celles observées précédemment. Il y a peu de moments didactiques et le professeur assume pratiquement seul la responsabilité dans la production du savoir.

3. Point sur la méthode d'étude

En utilisant conjointement la notion de milieu et la structuration du contrat didactique, et notamment les composantes « statut didactique du savoir » et « partage de responsabilités », j'ai repéré la façon dont les connaissances et savoirs avancent dans la classe. Cela me permet de savoir, en particulier, comment les deux professeurs arrivent au coefficient de proportionnalité (quels rôles elles laissent aux élèves et quels rôles elles assument entièrement, éventuellement). J'ai, par ailleurs, montré que le professeur B justifie quelque chose que A ne montre pas. Cependant, ce qui n'apparaît pas encore de façon précise dans cette analyse, ce sont les gestes didactiques du professeur qui permettent l'avancée des connaissances, ce que je vais aborder maintenant.

VI. L'ANALYSE DES INTERACTIONS

1. Présentation de la grille d'analyse

L'étude des interactions sera faite à l'aide d'une grille établie autour de deux types de variables. Le premier type est celui de l'interaction comme communication entre des personnes (interlocuteurs, objet, but, résultat) ; il correspond à un aspect local de l'interaction. Par exemple, l'objet de l'interaction peut-être une procédure de calcul ou la justification d'une réponse. Le but de l'interaction peut-être différent pour chacun des interlocuteurs. Ainsi, lors d'une même interaction, le professeur peut chercher à rectifier l'erreur d'un élève alors que, pour certains élèves de la classe, il s'agira de montrer au professeur qu'ils connaissent une procédure correcte. Le second type de variables met en perspective l'interaction didactique dans le déroulement du projet du professeur à partir de sa fonction didactique et de son mode. La fonction didactique est le rôle que joue l'interaction dans le déroulement du projet du professeur. Elle se traduit localement en buts du professeur. Le mode est la façon dont le professeur gère cette interaction.

Ces deux dernières variables sont utilisées tout au long de l'analyse des pratiques et, particulièrement, pour l'analyse fine d'interactions qui correspondent à une avancée des connaissances dans la classe ou à une difficulté significative. Ces échanges peuvent être soit à l'initiative du professeur, soit à l'initiative des élèves.

2. Exemples

Par exemple dans la classe A4, j'ai retenu une interaction dans l'épisode (g) de la phase 2 car elle correspond à un moment où le professeur institutionnalise l'utilisation du coefficient de proportionnalité pour le calcul de l'intérêt. Dans cette interaction, ce qui apparaît correspond à ce qui me sert le plus dans l'analyse de la fonction et du mode.

Interaction 4 : De la sûreté de la procédure coefficient décimal, valorisation de la procédure coefficient décimal pour le calcul de l'intérêt

A : Et puis, donc ici (896) c'est combien ? Floriane : 46 A : quarante... ah, non. Ee : 44 / 46 A : 44 virgule 80. Alors, faut expliquer à Floriane comment vous avez fait. On va voir ça. Et puis, je crois que y'a peut être pas trente-six méthodes hein. Quelle est la seule qui pourrait heu... nous éviter de commettre des erreurs ? Jérémie. Jérémie: 896 divisé par 20. A : oui, c'est ça ou multiplié par... ee : 0.05. A : ah, je crois que le coefficient, là, il sert. Parce que huit cent quatre heu... à moins que quelqu'un ait bien le sens des nombres, moi j'en sais rien. Vous avez ajouté, là, des cases pour trouver 896 ? Vous avez multiplié une des cases par un nombre pour trouver 896 ? Non. Donc, là on est coincé, on est bien obligé d'utiliser le coefficient.	<u>interlocuteurs</u> : A, Floriane, Jérémie, ee <u>objet</u> : procédure coefficient décimal pour le calcul de l'intérêt <u>but</u> : pour A, permettre à Floriane de rectifier son erreur ; pour Jérémie, montrer qu'il sait <u>fonction de l'interaction</u> : marquer la procédure coefficient décimal pour le calcul de l'intérêt, <u>mode</u> : A valorise la procédure en évoquant sa sûreté <u>résultat</u> : Jérémie donne la méthode qu'il a utilisée, cela permet de rectifier l'erreur de Floriane
---	--

Cette interaction a lieu alors que la responsabilité est du côté de la classe. Elle illustre le geste utilisé par le professeur pour réorienter le travail vers l'utilisation de la procédure coefficient décimal lors de l'erreur d'une élève : A évoque la sûreté de la procédure.

Prenons un exemple dans la classe B maintenant avec l'interaction 3 qui se situe au début de la phase 2, au moment où le professeur demande aux élèves de produire la phrase-clé.

Interaction 3 : Production de la phrase-clé

B : La réduction de 15%, voulez-vous, comme vous me l'avez dit tout à l'heure en revenant sur ce nombre-clé de 100. Ca veut dire quoi réduction de 15%, Arnaud ?	<u>interlocuteurs</u> : B, Arnaud, Marine, Charlotte
Arnaud : ça revient à dire que... on heu... multiplie par 15 divisé par...	<u>objet</u> : sens de
B : non, c'est pas ça. C'est pas ce que j'ai dit jusque là. Je voudrais que tu reviennes à la phrase qu'on a donnée tout à l'heure...	15% de réduction
Arnaud : ben...	<u>but</u> : pour le professeur,
B : chut.	obtenir la
Marine : si on a 100 francs....	« phrase-clé »
B : alors, sur <i>B note au tableau</i> prix in...je vais dire ici prix initial. (...) si je prends un prix initial de 100F ... <i>Les élèves parlent beaucoup.</i> (...) Si j'ai un prix initial de 100 francs, ça voudra dire quoi ... ma réduction de 15% Charlotte, s'il te plaît ?	<u>fonction</u> de l'interaction : produire la phrase-clé
Charlotte : ben, on fera moins...	<u>mode</u> : appel à l'analogie, effet
B : j'ai une réduction, alors vous me mettez prix initial, vous m'écrivez réduction 15 francs, je laisserai tomber les francs puisque je les mettrai au début puisque ... <i>B a noté au tableau.</i> Vous m'écrivez ceci s'il vous plaît. ...	Jourdain
Prix initial 100....(...) Vous m'écrivez prix initial, 100 francs, vous m'écrivez réduction 15 francs et vous m'écrivez prix réduit et vous procédez comme moi au tableau s'il vous plaît parce qu'on va avoir des colonnes. Pour le prix... prix réduit, vous faites le calcul de tête ... vous aurez à payer combien ?	<u>résultat</u> : B obtient la définition attendue
Marine : 100 moins 15 85	
Pe : 85 francs.	
B : 85 francs. Vous faites 100 moins 15, bien sûr 85.	

Dans cette interaction, le professeur procède par analogie pour obtenir la phrase-clé et utilise un effet Jourdain. La responsabilité est plutôt du côté du professeur, c'est une forme d'ostension.

3. Problèmes méthodologiques

Cette méthode d'analyse permet d'identifier et de caractériser les façons de procéder des deux professeurs observés. Cependant, la grille utilisée n'est pas tout à fait satisfaisante. En particulier, il n'est pas toujours facile de distinguer la fonction didactique et le mode. Par exemple, dans ma thèse, « orienter la recherche » a quelquefois été considéré comme un mode, quelquefois comme une fonction didactique. En fait, il me semble qu'il faudrait préciser la définition de « fonction didactique », puisque finalement le mode et la fonction didactique sont deux moyens de réalisation du projet du professeur, mais à des niveaux différents. Le mode est un moyen de réalisation plus local du projet. Il va, par exemple, correspondre à un moyen d'obtenir des élèves une réponse attendue ; la fonction didactique devrait peut-être être plus liée à l'avancée du savoir dans la classe.

Par ailleurs, la méthode utilisée est lourde, ce qui constitue une limite importante de ce travail, comme pour la plupart des travaux sur les pratiques d'enseignement qui procèdent par études de cas.

VII. RESULTATS DE LA RECHERCHE

Ce travail apporte, d'une part, une connaissance fine des pratiques des professeurs A et B et fournit, d'autre part, des résultats sur le plan théorique avec la précision de la notion de contrat didactique et la caractérisation du cours dialogué.

1. Les pratiques des professeurs A et B

L'analyse des trois séquences retenues m'a permis de caractériser les pratiques habituelles des enseignants, d'identifier des points communs aux deux professeurs et des différences, pressenties à première vue, dans la gestion de certains moments de l'enseignement. En particulier, notamment en ce qui concerne les aspects de l'enseignement qui sont relatifs à la production du savoir et à son institutionnalisation, au sens large, en considérant, aussi par exemple la fonction didactique d'étiquetage de certains éléments qui joue un rôle dans la constitution de la mémoire de la classe nécessaire à la réalisation de l'institutionnalisation, la place accordée à la formulation de savoir, ainsi que les traces écrites laissées aux élèves ou encore l'adaptation du projet aux connaissances des élèves.

a) La production du savoir nouveau : le choix des exercices, le rôle du professeur et des élèves

Dans les trois classes, les professeurs traitent les mêmes aspects de la proportionnalité (linéarité, vitesse, pourcentage). Dans les classes de 4^{ème}, les professeurs abordent un objectif qui est explicitement au programme de 3^{ème}. De plus, dans ces classes, la séquence sur les pourcentages débute par la correction d'un exercice cherché à la maison et la question du passage du prix initial au prix final est posée oralement. Tandis que dans la classe de 3^{ème} du professeur A, cette séquence débute par un exercice que les élèves cherchent en classe.

Par ailleurs, les professeurs n'introduisent pas de la même façon le coefficient de proportionnalité, ni du point de vue mathématique, ni du point de vue didactique puisque la répartition des responsabilités entre les élèves et le professeur n'est pas la même à ce moment là, comme on l'a vu dans les exemples précédents. Dans ses deux classes, le professeur A laisse les élèves exprimer les procédures qu'ils ont utilisées pour résoudre un problème dans lequel il s'agit d'utiliser un savoir ancien, puis « surfe » sur les interventions des élèves pour, d'une part, permettre un rappel des connaissances anciennes et, d'autre part, institutionnaliser la procédure coefficient décimal pour le calcul de l'augmentation. Elle pose oralement le problème du passage direct du prix initial au prix final à l'ensemble de la classe, pour qu'il soit résolu collectivement, et s'appuie sur les interventions de quelques élèves pour obtenir ce coefficient de proportionnalité k qu'elle demande ensuite à l'ensemble de la classe de justifier. Par ailleurs, le professeur A s'attache à laisser aux élèves la responsabilité de la production et de la validation de leur production dans le cas d'un savoir déjà rencontré mais encore enjeu d'apprentissage. Dans sa classe de 3^{ème} où les élèves travaillent en groupe, les interventions qu'elle effectue dans les groupes sont à cet égard tout à fait caractéristiques.

Au contraire, le professeur B ne demande pas aux élèves d'exprimer les procédures qu'ils ont utilisées pour résoudre un exercice portant sur l'application de pourcentage et qui lui sert de support pour la production du coefficient de proportionnalité k . Elle dirige la correction en découpant la tâche en sous-tâches, « maîtrise » les interactions didactiques dans la classe et oriente la recherche de façon à obtenir le coefficient de proportionnalité k tel qu'elle l'avait prévu, à partir de l'image de 1 obtenue en utilisant la linéarité. De cette façon, B ferme la situation au départ et algorithmise dès le début de la séquence une façon de trouver le coefficient de proportionnalité k .

D'autres différences ont été pointées au niveau de l'évolution du transfert de responsabilités vers les élèves. Ainsi, si les deux professeurs peuvent proposer une suite d'exercices plus ou moins répétitifs, elles gèrent, en revanche, différemment cette succession

d'exercices : A propose des exercices qui mettent en jeu différents points de vue sur le savoir et laisse, à certains moments, aux élèves la responsabilité de la validation, tandis que B propose des exercices moins variés et ne laisse pas aux élèves de responsabilité dans la validation.

b) Ce qui est étiqueté et pourquoi

L'étiquetage d'une procédure ou d'une connaissance permet de rappeler rapidement auprès des élèves cette procédure ou cette connaissance et joue un rôle dans la constitution de la mémoire de classe.

Par exemple, parce qu'elles procèdent différemment pour produire le savoir nouveau, les deux professeurs n'ont pas besoin de convoquer rapidement les mêmes éléments et n'étiquettent donc pas les mêmes choses. A qui s'appuie sur les productions des élèves pour produire le savoir nouveau désignera plutôt une procédure par le nom d'un élève (« la procédure de Thomas »), tandis que B qui procède en dirigeant le travail des élèves et qui a besoin d'indiquer aux élèves quelle procédure elle veut qu'ils utilisent créera un lien, tout à fait pertinent d'ailleurs, entre calcul mental et procédure linéaire et un autre lien entre calculatrice et procédure coefficient décimal. Ainsi, l'étiquetage du professeur A est provisoire et destiné à être oublié alors que celui du professeur B fait partie du savoir institutionnalisé.

On voit ici qu'il y a une place pour des savoirs provisoires dans un cas et pas dans l'autre : le professeur A a besoin d'une mémoire didactique, ce qui n'est pas nécessaire pour le professeur B puisque la structuration du savoir tient alors lieu de mémoire.

c) L'institutionnalisation : décontextualisation et dépersonnalisation des connaissances

Dans les deux classes du professeur A (avec et sans logiciel), l'institutionnalisation est caractérisée par une forte " dilution " tout au long de la séquence et le peu de structuration et de décontextualisation du savoir : c'est le cours dialogué. Pour les séquences sur les pourcentages, le professeur amène petit à petit les élèves à utiliser le coefficient de proportionnalité k , toujours en rebondissant sur leurs interventions, en faisant des remarques sur le domaine de validité de la procédure qui utilise le coefficient k , sur l'intérêt mathématique de cette procédure et sur son intérêt pour les élèves qui se destinent aux métiers du commerce. Toutefois, elle n'exclut pas l'utilisation d'autres procédures comme la procédure

linéaire. Des gestes d'institutionnalisation de l'utilisation du coefficient k pour le calcul du prix final se retrouvent pratiquement tout au long de la séquence et il n'y a pas de moment " formel " de cours. Le savoir nouveau est peu structuré et n'est pas décontextualisé, mais les élèves savent dans quels types de problèmes il intervient.

Dans la classe du professeur B, le savoir est proposé dès le début de l'enseignement sous la forme où il sera institutionnalisé. L'institutionnalisation s'effectue essentiellement lors de la " leçon " qui a lieu à la fin de la séquence et en référence aux attentes de l'institution : le professeur institutionnalise le savoir et la formulation du savoir que les élèves doivent utiliser, en particulier pour le contrôle. L'institutionnalisation s'effectue à partir d'exemples proches des exercices effectués en classe, mais sans que la question de l'utilisation du savoir soit explicitement posée. Cependant, les exercices d'entraînement proposés au cours de la leçon permettent aux élèves de savoir comment utiliser ces savoirs. Le savoir est structuré et peut être décontextualisé.

d) Les traces écrites laissées aux élèves

Dans les classes du professeur A, les traces écrites pour les élèves sont composées de la correction de certains exercices qui correspondent aux notes de cours et de " remarques " notées sur les feuilles d'exercices. Ces notes restent contextualisées et ne présentent pas le savoir sous une forme structurée. De plus, comme le professeur A ne se réfère pas aux éléments de cours donnés dans le livre, les élèves n'ont pas forcément les moyens de retrouver le savoir à connaître.

En revanche, dans la classe B, les élèves disposent, d'une part, des notes de correction des exercices, et d'autre part, des notes de la leçon qui présentent le savoir sous une forme structurée et quelquefois décontextualisée. De plus, au cours de la leçon, le professeur B indique aux élèves où retrouver certains éléments de cours dans le manuel. La façon dont procède le professeur B devrait donc permettre aux élèves de retrouver facilement, soit dans la leçon qu'ils ont copiée, soit dans leur manuel, le savoir institutionnalisé.

2. Apport théorique

Les composantes du contrat didactique que j'ai identifiées ainsi que les niveaux de contrat distingués sont des outils d'analyse qui permettent de rendre compte de la façon dont les connaissances progressent dans une classe : comment le professeur gère la production du savoir nouveau, comment il fait intervenir les différentes connaissances en jeu au fil de

l'avancée du temps didactique, comment il répartit (localement) les responsabilités par rapport au savoir entre le professeur et les élèves. Ces outils donnent un cadre pour l'analyse de classes ordinaires, même lorsqu'il n'est pas possible de reconstituer de milieu adidactique (cas de la transmission directe). Les ruptures apparaissent quand une composante, en principe stable à un niveau de contrat, change de valeur : par exemple, un retour en arrière sur le savoir en jeu, une « fermeture » de la situation par le professeur.

a) *Caractérisation du cours dialogué*

L'utilisation de ces outils permet de caractériser la pratique de « cours dialogué » dans laquelle le professeur choisit de s'appuyer sur un problème pour réaliser son objectif mais n'effectue pas réellement la dévolution du problème à ses élèves puisque la responsabilité de la production des connaissances et de leur évaluation est laissée aux élèves à de rares moments, tandis que le professeur privilégie une résolution collective et guidée du problème, en s'appuyant sur quelques élèves de la classe. Dans cette façon de procéder l'institutionnalisation est très diluée tout au long de l'enseignement.

Dans un enseignement par transmission directe aussi bien que dans un enseignement par des situations, c'est-à-dire avec un style d'enseignement de type constructiviste, on peut observer des phases qui correspondent à une unité d'activité pour le professeur et les élèves et au cours desquelles les différentes composantes du contrat didactique restent stables, y compris le statut du savoir et le partage de responsabilité entre le professeur et les élèves. On peut donc définir un méso-contrat caractéristique de chacune de ces phases. Par exemple dans un enseignement de type constructiviste, on trouvera un savoir nouveau avec une responsabilité laissée à l'élève pour une phase de recherche, alors que dans un enseignement par transmission directe on aura l'association du savoir nouveau à la responsabilité du côté du professeur et que la responsabilité sera laissée à l'élève pour un savoir déjà institutionnalisé. On n'a pas la même association des composantes dans le méso-contrat mais on peut identifier un méso-contrat par une certaine stabilité des composantes au cours d'une phase, même si on peut trouver ici ou là quelques inversions de responsabilité entre le professeur et l'élève.

Dans le cours dialogué, au contraire, le fait que le professeur surfe sur les interventions des élèves pour faire avancer son projet d'enseignement entraîne des modifications fréquentes du partage des responsabilités entre le professeur et les élèves et il est difficile d'identifier un méso-contrat. Cette difficulté est accrue par le fait que le savoir a, pendant une longue période, un statut intermédiaire de savoir en cours d'institutionnalisation.

Pour ces raisons, je considère le cours dialogué comme une valeur de la composante « style d'enseignement », composante stable au niveau du macro-contrat, au même titre que la transmission directe ou la transmission par des situations. Le « cours dialogué » peut donc être associé à un macro-contrat de transformation de connaissances des élèves dans lequel il y a une certaine incertitude du côté du professeur puisque si les élèves ne « coopèrent » pas au déroulement du projet, le projet ne peut se réaliser. Cependant cette incertitude est moins grande que dans un contrat de type constructiviste. Sa gestion requiert des régulations au niveau du système élève-milieu et un contrôle fréquent de l'avancée des connaissances des élèves. Enfin, dans ce type de contrat les connaissances intermédiaires ont une place.

3. Prolongements

Un premier prolongement de ce travail concerne la formation d'enseignants et l'analyse de pratiques d'enseignement à partir d'un corpus plus large pour apprécier la stabilité des pratiques observées et mieux cerner ce que ces pratiques ont de commun dans leur diversité. Une des questions à laquelle mon travail n'a pas répondu est celle de l'analyse de l'impact des pratiques sur les apprentissages. Même si j'ai observé à certains moments des avancées des connaissances de certains élèves dans la classe B ou dans la classe A3, des questions restent posées sur la relation entre les pratiques des professeurs et la pérennité, la mobilisation et l'adaptabilité des connaissances acquises. Pour cela il faudrait compléter la méthode par un versant élève.

Enfin, une part importante du travail à venir concerne la confrontation de cette recherche avec d'autres travaux sur les pratiques d'enseignement des mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

- Balacheff, 1991, Nature et Objet de raisonnement explicatif, in Séré, Weil-Barras, *Actes du colloque L'explication dans l'enseignement et l'EIAO*, Ed Paris-Onze
- Balacheff, 1994, Didactique et intelligence artificielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 14 1.2, Eds La Pensée Sauvage
- Brousseau & Centeno, 1991, La mémoire du système didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 11.2-3, pp 167-210
- Brousseau Guy et Nadine 1987, Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire

- Brousseau, 1980, Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 1.1*, pp. 11-56, Ed. La Pensée Sauvage
- Brousseau, 1981, Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 2.3, pp. 37-127, Ed. La Pensée Sauvage
- Brousseau, 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7.2, pp. 33-115
- Brousseau, 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7.2, pp. 33-11.5, Ed. La Pensée Sauvage
- Brousseau, 1989, Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9.3, pp 309-336.
- Brousseau, 1996, L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, in Perrin-Glorian, Noirfalise (ed), I.R.E.M. de Clermont-Ferrand, pp. 3-46
- Cauzinille & Mathieu 1991, Explications, guidages cognitifs et méta-cognitifs, *Actes du colloque L'explication dans l'enseignement et l'EIAO*, Ed. Paris Onze
- Cauzinille & Melot, 1998, Explication et apprentissage : l'anlayse d'un dialogue tutoriel dans l'enseignement de l'algèbre, *Tutelle et médiation dans l'éducation scientifique*, sous la direction de Dumas-Carré et Weil-Barais, Ed. Peter Lang
- Comiti & Grenier, 1996, Etude de quelques phénomènes typiques de l'activité didactique, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques*, in Perrin-Glorian, Noirfalise (ed), I.R.E.M. de Clermont-Ferrand, pp 57-65
- Comiti & Grenier, 1997, Régulations didactiques et changements de contrats, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17.3, pp 81-102
- Comiti, Grenier, Margolinas, 1995, Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situations de classe et modélisation de phénomènes didactiques liés à ces interactions in Arsac, Grea, Grenier, Tiberghien (eds), *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp 93-112, Ed. La Pensée Sauvage
- Duval, 1992, Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x n° 31*, pp 37-61
- Hersant, 2001, *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnnalité au collège*, Thèse Université Paris 7
- Mopondi, 1995, Les explications en classe de mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 15-3, pp 7-52

- Perrin-Glorian, 1996, Gestion didactique de moments a-didactiques : enseignement de la valeur absolue en classe de seconde, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*, in Perrin-Glorian, Noirfalise (eds), I.R.E.M. de Clermont-Ferrand, pp. 69-82
- Perrin-Glorian, 1999, Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu : structuration du milieu pour l'élève et pour le maître, *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été de la Rochelle*, pp 17-38, I.R.E.M. de Clermont-Ferrand, Noirfalise
- Sierpiska, 1995, *La compréhension en mathématiques*, De Boek Université
- Soury-Lavergne, 1998, *Etayage et explication dans le préceptorat distant, le cas de TéléCabri*, Thèse de l'Université Joseph-Fourrier Grenoble 1

**PRESENTATION DU RAPPORT DE SYNTHESE SUR "ETUDE DES STRATEGIES DE
L'ENSEIGNANT EN SITUATION D'INTERACTION"**

Marie-Jeanne Perrin-Glorian,

IUFM Nord-Pas-de-Calais et Equipe DIDIREM, Université Paris 7.

L'exposé au séminaire était une présentation d'un chapitre en cours de rédaction pour le rapport de synthèse du thème 6 de l'action "Ecole et sciences cognitives" du Ministère de la Recherche dans le cadre du programme Cognitique. Le but de cet exposé était de présenter l'état du chapitre à ce moment là d'une part pour information, d'autre part pour susciter un débat permettant d'en améliorer la rédaction. Le rapport doit être rendu au Ministère à la fin de janvier 2002. Nous espérons qu'il sera publié. Je vais donner ici un aperçu du chapitre 7 à partir d'un plan détaillé.

I. PRESENTATION DU THEME

Le responsable du thème est Pascal Bressoux, Université Pierre Mendès France, Grenoble. Le rapport se composera de deux parties : la première regroupe les approches non disciplinaires de l'activité enseignante et la seconde les approches didactiques de l'activité enseignante. La première partie comporte quatre chapitres : les recherches processus-produits (M. Arnoux et P. Bressoux), la pensée des enseignants : pensée, jugement et prise de décision (P. Bressoux, P. Dessus, J.J. Maurice), la gestion et l'organisation de l'interaction maître-élèves (J. Clanet), approche ergonomique de l'activité enseignante (R. Amigues). La deuxième partie comprend trois chapitres : didactique du français (C. Barré de Miniac), didactique de l'anglais langue étrangère (F. Raby), didactique des mathématiques (M.J. Perrin-Glorian).

II. PLAN DU CHAPITRE 7

Après une introduction expliquant que j'interpréterai "didactique des mathématiques" au niveau international par ce qui se fait dans le courant "Mathematics Education",

particulièrement dans le cadre de PME et que la didactique des mathématiques s'appuie sur l'important travail d'innovation qui s'est fait dans les IREM, j'ai adopté un plan en cinq parties:

- Quelques spécificités de la didactique des mathématiques
- Les grands types de recherche concernant l'enseignant en classe de mathématiques au niveau international
- L'étude de l'enseignant dans les recherches françaises en didactique des mathématiques
- Utilisation des TICE et stratégies de l'enseignant
- Conclusion : perspectives de recherche

et j'ai référé à 112 titres dans la bibliographie (66 auteurs français, 46 auteurs étrangers).

La première partie pointe d'abord la spécificité des mathématiques elles-mêmes et la place qui y est faite à la résolution de problèmes avant de souligner que les recherches sur l'enseignement des mathématiques se sont développées dans la foulée des grands mouvements de réforme des années 70, que le découpage du champ est lié à l'objectif à long terme d'améliorer l'enseignement des mathématiques, que l'étude du savoir à enseigner y a une place essentielle et que l'étude de l'enseignant est assez récente dans le champ et plus souvent restreinte à celle de la formation des enseignants. Le découpage du champ fait qu'il n'est pas toujours facile d'isoler les recherches portant sur les stratégies de l'enseignant. Le troisième point concerne la recherche en didactique des mathématiques en France et présente très succinctement le développement des trois grands cadres théoriques que sont la théorie des champs conceptuels, la théorie des situations didactiques et la théorie anthropologique du didactique.

La deuxième partie comprend six paragraphes :

1. *Les types de questions abordées.* A partir des synthèses sur les questions concernant l'enseignant qu'on trouve dans les "handbooks" sur Mathematics Education (références à la fin) et dans certaines conférences plénières de PME, en particulier Hoyles (1992) et Da Ponte (1994), on dégager dans ce paragraphe les grands types de questions qui font l'objet des paragraphes suivants.

2. *Recherches descriptives et comparatives : enquêtes internationales.* Il s'agit ici de rendre compte des grandes enquêtes SIMS et TIMSS dans ce qu'elles peuvent dire sur les pratiques des enseignants.

3. *Croyances et connaissances des professeurs.* Ce paragraphe part des synthèses de Thompson d'une part, Fennema et Loef Franke dans le Handbook of research on mathematics teaching and learning paru chez Mac Millan en 1992 et y ajoute des éclairages complémentaires, tirés essentiellement des actes des rencontres du groupe PME. On peut remarquer la tendance à passer d'une problématique de recherche de croyances comme des systèmes statiques à une prise en compte de plus en plus importante des contextes, en particulier les facteurs culturels et sociaux. La relation entre les croyances et les pratiques puis entre les pratiques et l'apprentissage des élèves n'est pas facile à faire et les recherches concernant les croyances posent de redoutables problèmes méthodologiques. Concernant les connaissances des professeurs, les recherches distinguent divers types de connaissances mais là encore, si l'on a pu montrer dans certains cas l'influence des connaissances des professeurs sur leurs choix pédagogiques, la relation avec l'apprentissage des élèves n'est pas faite. Il faut noter que, concernant le savoir mathématique, ce sont souvent des manques qui sont pointés chez les enseignants du primaire, souvent par le biais de situations de formation mais qu'il y a peu de choses concernant les enseignants du secondaire.

4. *La formation des enseignants et l'association des enseignants aux recherches : des moyens privilégiés d'étudier les pratiques ?* Dans ce paragraphe, on examine la place des recherches où des enseignants font des recherches ou sont associés à des recherches sur leurs propres pratiques, (teacher researcher) courant peu développé en France mais présent au niveau international et en particulier européen. On évoque aussi la question de la formation, comme moyen pour le chercheur de connaître les pratiques des enseignants et comme occasion de réflexion sur les cadres théoriques permettant d'étudier les pratiques des enseignants et les moyens de les faire évoluer, c'est-à-dire les possibilités d'apprentissage des enseignants.

5. *Des méthodes et des modèles pour étudier l'enseignant en contexte.* Des récits théoriques des pratiques reconstruits par le chercheur (Simon et Tzur), au modèle de Shoenfeld qui vise à prévoir les décisions d'un enseignant particulier dans un contexte précis et dans une classe donnée, certains modèles cherchent à décrire la conduite d'un enseignant particulier en privilégiant la cohérence. D'autres travaux cherchent plutôt à caractériser des conduites

générales à partir de l'analyse d'exemples particuliers. C'est le cas de Voigt qui décrit un procédé proche de ce que Bauersfeld appelle la stratégie de l'entonnoir : à partir d'une question assez ouverte, l'enseignant guide les élèves vers la solution prévue par un resserrement progressif des questions. On trouve dans ces travaux de l'école de Bielefeld certaines préoccupations communes avec les travaux français par la considération d'aspects institutionnels et d'un principe d'économie pour le professeur. D'autres études, qu'on peut trouver au fil des "reports" de PME ne sont pas forcément repérées comme des travaux sur l'enseignant, mais décrivent des pratiques à propos de l'enseignement d'une notion précise, ce qu'on retrouvera aussi dans les travaux français.

6. *Les problématiques en interaction forte avec les travaux français.* On trouve surtout dans ce paragraphe des références à des travaux suisses ou canadiens (Conne, Portugais, Leutenegger) visant à caractériser le rôle du maître dans des situations, voire à construire un modèle de l'intention didactique (Portugais) ou à mettre en place une méthode clinique pour étudier les systèmes didactiques (Leutenegger), le professeur n'étant qu'un des éléments du système.

La troisième partie consacrée aux recherches françaises est aussi structurée en six grands paragraphes, mais différemment.

1. *Vers une prise en compte explicite de l'enseignant dans les recherches.* On retrace ici l'évolution de la place de l'enseignant dans les recherches : à partir des études d'ingénierie didactique où le chercheur avait tendance à occuper la place de l'enseignant mais où se sont posés les premiers problèmes de reproductibilité des situations et des résistances des enseignants au scénario prévu, on identifie les circonstances et les raisons d'une évolution qui amènent les chercheurs à s'intéresser davantage à l'enseignement dans des classes ordinaires et à poser de nouvelles questions concernant le rôle et les contraintes de l'enseignant. Cela amènera de nouvelles questions théoriques et méthodologiques.

2. *Les recherches descriptives.* Ce paragraphe court renvoie aux grandes enquêtes internationales et signale deux recherches descriptives françaises d'origine institutionnelle, l'une sur des pratiques déclarées, l'autre sur des pratiques observées, qui montrent la diversité de ces pratiques et la difficulté à les relier aux effets sur les élèves.

3. *Les questions abordées pour l'étude de ce qui touche à l'enseignant en classe dans les recherches françaises actuelles.* Les questions posées sont liées aux cadres théoriques et aux méthodes choisis pour les étudier mais on peut retrouver des préoccupations largement partagées dans les recherches. Nous essayons de les dégager ici. La question des croyances se retrouve dans l'étude des représentations des enseignants au début des années 90 mais cette question a pratiquement disparu ou s'est convertie en la recherche d'un rapport à la discipline lié à certaines contraintes institutionnelles. Les autres questions retenues sont les suivantes : déterminer des contraintes et des marges de manœuvre de l'enseignant ; rechercher des caractéristiques de la position d'enseignant dans une institution didactique ; identifier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer son projet d'enseignement et la place laissée à l'élève dans la réalisation de ce projet ; rechercher des régularités et des variabilités dans les pratiques des enseignants ; comprendre comment se construisent les connaissances de l'enseignant.

4. *Les grandes lignes des méthodes utilisées.* C'est difficile de décrire des méthodes indépendamment des questions posées et des cadres théoriques utilisés. On peut remarquer cependant que presque toutes les recherches utilisent des méthodes qualitatives, souvent des études de cas. On peut distinguer quelques autres grandes caractéristiques des méthodes utilisées. La recherche peut porter sur l'enseignement d'un contenu particulier et comporte alors en général l'étude approfondie de ce contenu. Les choix de l'enseignant sont alors rapportés à l'analyse de ce contenu. Elle peut se compléter d'une étude comparative si plusieurs classes sont observées ou porter sur une seule classe. Elle peut même porter sur l'analyse d'une seule séquence de classe. D'autres études portent sur des questions plus transversales sans spécifier le contenu ou en en prenant plusieurs, souvent avec des méthodes comparatives, parfois combinées avec une situation de formation ou avec un dispositif particulier changeant la situation d'interaction usuelle de l'enseignant. Enfin des recherches cherchent à articuler plusieurs approches dans des études pluridisciplinaires.

5. *Les développements théoriques.* Nous donnons ici le développement de quelques outils nécessités par l'étude des classes ordinaires, en distinguant l'adaptation et la précision de concepts existants et l'articulation avec des concepts importés d'autres disciplines. Du premier côté, on peut citer le concept de milieu, la distinction entre connaissances et savoirs, le contrat didactique, le développement de la théorie anthropologique avec, par exemple, l'identification de différents moments de l'étude, qui reprend d'un point de vue institutionnel des distinctions

faites d'un point de vue épistémologique et cognitif dans les différentes phases de la dialectique outil-objet. De l'autre côté, des chercheurs ont cherché à articuler une analyse didactique du travail de l'élève et de l'organisation de ce travail par l'enseignant et une analyse du travail de l'enseignant en termes de métier, en utilisant des concepts d'ergonomie cognitive.

6. *Quelques résultats et questions nouvelles.* En plus des résultats théoriques abordés précédemment, on peut regrouper les résultats en quelques grandes catégories :

- *régularités et diversités, systèmes de contraintes.* On observe des régularités fortes au niveau global dans le respect de certaines contraintes comme les programmes, de grandes variations au niveau local. Des régularités peuvent se trouver chez des groupes d'enseignants soumis à des contraintes fortes auxquelles ils semblent apporter une réponse collective. Différents paramètres ont été définis pour caractériser les pratiques et mieux cerner ces régularités et diversités. En plus des contraintes institutionnelles ou externes, l'enseignant gère en classe des contraintes internes à la situation didactique elle-même ;

- *une régularité qui interroge : les pratiques ostensives.* Malgré les inconvénients relevés par les chercheurs au niveau de l'apprentissage, les pratiques ostensives résistent. Des chercheurs cherchent maintenant à étudier quelle est leur fonctionnalité dans la pratique de l'enseignant ;

- *importance de la mémoire didactique de l'enseignant* qui a besoin de connaître non seulement le savoir enseigné et les situations proposées aux élèves mais aussi ce que chacun a produit pour gérer la progression de la classe et la mémoire collective et aussi la progression de chaque élève. L'ostension pourrait d'ailleurs avoir une fonction dans la gestion de la mémoire de la classe, cela reste à étudier ;

- *la gestion du temps, temps d'horloge et temps didactique.* L'avancée du temps didactique est un élément essentiel de la relation professeur-élève. Le professeur règle l'avancée du temps didactique, en tenant compte de ce que font les élèves. Mais on peut observer des épisodes didactiques où se produit, éventuellement à l'insu du professeur, l'apprentissage d'un élève donné sur un objet qui n'est plus enjeu d'enseignement. Cependant l'enseignant peut ménager un espace pour des tels apprentissages ;

- *les régulations du contrat didactique.* L'affinement de la notion de contrat didactique qui permet d'identifier différents types de contrats donne des moyens pour décrire les régulations qui s'opèrent au cours des interactions en classe. Cela permis de préciser l'étude des interactions dans des classes ordinaires ;

- *les actions de l'enseignant pour gérer la classe.* Différentes études ont commencé à identifier de façon empirique des gestes didactiques de l'enseignant. C'est toute la praxéologie didactique de l'enseignant qu'il s'agit d'identifier mais dont l'étude commence à peine ;
- *l'effet des formations. Questions pour la formation.* Il y a encore peu d'études sur les formations. elles visent à comprendre comment s'installent les pratiques des enseignants et à identifier des leviers sur lesquels la formation pourrait agir pour les faire évoluer.

La quatrième partie porte sur l'utilisation des nouvelles technologies et leurs effets sur les pratiques des enseignants. Cette partie est en grande partie une contribution de Maha Abboud-Blanchard à partir d'un rapport rendu au CNCRE en 2000.

Dans ce domaine, l'étude du rôle de l'enseignant est encore plus récente, même si le problème de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement a été posé depuis longtemps. Les études amènent des résultats sur :

- les variations dans les stratégies des enseignants quand ils utilisent les TICE, suivant leur niveau d'expertise
- l'influence sur la gestion du temps
- la représentation par l'enseignant de son rôle dans la classe et la modification de ce rôle.

Les tâches sur lesquelles sont utilisées les TICE varient selon les études. La tendance est plutôt dans les travaux français de considérer l'usage des TICE dans des curriculums existants alors qu'on a plus souvent affaire à des innovations dans les travaux anglo-saxons.

Dans la cinquième partie, nous essayons de dégager quelques perspectives de recherche.

Il faut noter un déplacement récent de la recherche d'explication de l'enseignant en tant qu'individu vers une prise en compte des diverses contraintes de fonctionnement d'un enseignant qui veut enseigner un savoir donné à des élèves donnés dans un contexte donné. C'est ainsi que se développent beaucoup de recherches cherchant à comprendre l'économie des classes ordinaires et la stabilité des pratiques. Nous avons dégagé quelques questions pratiquement inexplorées et des questions émergentes :

- Peut-on identifier différents genres d'enseignants de mathématiques pour différentes institutions ?
- Quels sont effets sur les élèves des stratégies d'enseignement que l'on peut identifier ?
- Formation des enseignants : comment se constituent les savoirs professionnels de l'enseignant ?

- Quel est l'effet sur la gestion de la classe, du travail effectué à l'extérieur de la classe ?
- Comment organiser ces interactions indirectes et leurs relations avec le travail en classe ?
- Articulation de cadres théoriques et mise au point de méthodes plus performantes.

BIBLIOGRAPHIE.

Il est impossible de reproduire la bibliographie qui comprend 10 pages. Je donne ci-dessous les références des "handbooks" ainsi que les Actes de la CIEAEM de 1998 et ceux du colloque européen de 1998. La plupart des autres références proviennent soit des publications de la pensée sauvage (Recherches en didactique des mathématiques et collections associées dont le colloque des 20 ans, le colloque franco-allemand et le colloque de Sèvres), soit des Actes de PME ou de Educational Studies in Mathematics, et aussi des thèses récentes pour les travaux français. J'ajoute celle de Shoenfeld qui est un site internet.

Je n'ai volontairement pas cité de nom du côté français parce qu'il était impossible de faire figurer dans le résumé tous ceux que j'ai cités dans le texte du rapport.

M.C. Wittrock (ed.) *Third Handbook of Research on Teaching*, (1986) New York, Mac Millan.

- chapitre 29 : Romberg, T.A. & Carpenter, T.P. Research on teaching and learning mathematics : two disciplines of scientific inquiry.

Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning, (1992) Mac Millan

- chapitre 6 : Schatz Koehler, M. & Grouws, D. A. Mathematics teaching practices and their effects. p. 115-126.
- chapitre 7 : Thompson, A. G. Teachers' beliefs and conceptions : a synthesis of the research p. 127-146.
- chapitre 8 : Fennema, E. & Loef Franke, M. Teachers' knowledge and its impact. p. 148-164.

Bishop A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds) (1996) *International Handbook of Mathematics Education*, , Kluwer Academic Publishers.

- chapitre 15 Bodin, A. & Capponi, B. Junior Secondary School Practices. (pp. 565-614)
- chapitre 16 Grugnetti, L. & Jacquet, F. Senior secondary school practices (pp. 615-645).

- chapitre 29 Boero, P., Dapuelto, C. & Parenti, L. Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers. (pp.1097-1121).
- chapitre 31 Cooney, T.J., & Krainer, K., Inservice mathematics teacher education : the importance of listening. (pp. 1155 -1185).
- chapitre 32 Crawford, K. & Adler, J. Teachers as researchers in mathematics education., (pp. 1187 - 1205).

Krainer K., Goffree F., & Berger P. (Eds) *European research in Mathematics Education I,III, On research in mathematics teacher Education*, Forchungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück, 1999

CIEAEM (1999) Les liens entre la pratique de la classe et la recherche en didactique des mathématiques. Relationships between classroom practice and research in Mathematics Education. Actes de la CIEAEM 50, Neuchâtel, août 1998.

Schoenfeld, A. H. (1998) *Towards a theory of teaching-in-context*, site internet : www-gse.berkeley.edu/Faculty/aschoenfeld.

TITRE

ACTES DU SÉMINAIRE NATIONAL DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES. ANNÉE 2001

AUTEUR(S)

Teresa ASSUDE et Brigitte GRUGEON((EDS)

RESUME

Ces actes recouvrent la plupart des textes correspondant aux communications données dans les trois séances du séminaire national de didactique des mathématiques qui ont eu lieu à Paris au cours de l'année 2001. Ils abordent essentiellement les thèmes suivants :

- champ numérique,
- étude des mathématiques,
- dispositifs d'étude et travail personnel de l'élève,
- interactions professeur-élèves.

MOTS CLES

Didactique des mathématiques
Champ numérique
Étude, dispositifs d'étude
Travail personnel de l'élève
Interactions professeur - élèves

Editeur : IREM et ARDM
Université PARIS 7-DENIS Diderot
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 2002
ISBN : 2-86612-226-7