INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

43
OCTOBRE 2002

CAHIER DE DIDIREM

DEA DE DIDACTIQUE DES DISCIPLINES
DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

ETUDE EXPLORATOIRE DES CAPACITES
MATHÉMATIQUES CHEZ DES ADULTES ILLETTRES

Julie LASCAR

DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT

Étude exploratoire des capacités mathématiques chez des adultes illettrés

Julie Lascar

Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques,
Dirigé par Michèle Artigue
Septembre 2002

Jury : Michèle Artigue
François Colmez
Jean-Pierre Leclere

Université Paris 7-Denis Diderot

SOMMAIRE

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Marie-Alix Girodet, pour m'avoir reçue si gentiment alors que mon projet était encore très vague, et de m'avoir aiguillée vers le CUEEP.

Je remercie vivement toute l'équipe du CUEEP de Tourcoing : les stagiaires des groupes Math Départ et Math de Base et en particulier Djoer, Véronique et Claude qui ont accepté d'être interviewés. Merci aussi à Bruno de m'avoir permis de faire des observations et à Madame Cardinal pour m'avoir donné des informations.

Un merci sincère à Marie-Christine Liefooghe qui m'a permis d'intervenir dans son groupe malgré mon manque d'expérience avec ce public. Je la remercie pour son aide et sa disponibilité.

Merci à Michèle Artigue, François Colmez et Jean-Pierre Leclere d'avoir accepté d'être membre du jury de la soutenance de ce mémoire.

Mes remerciements les plus chaleureux à Michèle Artigue pour avoir dirigé ce mémoire et à Jean-Pierre Leclere pour m'avoir accueillie au CUEEP. Je les remercie tous les deux de m'avoir écoutée, guidée, soutenue et encouragée tout au long de mon travail. Ma gratitude est d'autant plus grande que je sais que leur temps est précieux.

Introduction

Au cours de mon année de maîtrise de mathématiques, j'envisageais de poursuivre l'année suivante un DEA en didactique des mathématiques car j'ai toujours été attirée par la pédagogie. Une rencontre avec Marie-Alix Girodet suite à la lecture de son livre intitulé « Influence des cultures sur les pratiques quotidiennes de calcul » a suscité mon intérêt pour la formation d'adultes et en particulier si cette formation s'adresse à un public culturellement diversifié.

En France, peu de travaux en didactique des mathématiques ont été effectués sur un public d'adultes illettrés. Pourtant des formations leur sont proposées et d'un point de vue social, il me paraît important de s'y intéresser. Marie-Alix Girodet m'a présentée à Jean-Pierre Leclere, permanent du CUEEP[1] en mathématiques et qui précisément mène des travaux dans cette direction. Une seule rencontre avec le groupe de Jean-Pierre Leclere au CUEEP de Tourcoing a suffit à me convaincre de me lancer dans cette voie.

J'ai donc choisi de mener dans le cadre de mon mémoire de DEA une étude exploratoire visant à comprendre les difficultés et les capacités en mathématiques des adultes dits de « bas niveau de qualification »[2].

En l'absence de travaux sur le domaine visé, je me suis appuyée d'une part, sur des travaux nous renseignant sur ce public que je n'avais jamais rencontré dans le cadre d'une formation, d'autre part sur des recherches faites sur les enfants en ce qui concerne l'apprentissage du nombre et enfin sur l'ethno-mathématique se rapprochant plus des adultes. Un aperçu de ces travaux est l'objet du chapitre 1.

A partir de ces travaux, de ce que j'observais au CUEEP de Tourcoing et de la formation didactique que je recevais parallèlement, je me suis posée un certain nombre de questions auxquelles j'ai essayé de répondre en mettant en place une méthodologie de travail. Je présente dans le chapitre 2 les différents dispositifs utilisés pour recueillir des données : entretiens individuels, résolutions en séances collectives de problèmes portant sur des systèmes linéaires à deux ou trois inconnues, évidemment présentés sous une forme adaptée à ce public.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons une analyse des différentes observations menées au sein du groupe Math de Base, dirigé par Marie-Christine Liefooghe.

---

[1] Centre Universitaire-Economie d'Enseignement Permanent.

[2] Nous employons les deux termes « bas niveaux de qualification » et « illettrés » pour désigner le public que nous avons rencontré au CUEEP de Tourcoing dans la mesure où la plupart de ces adultes savent peu lire et où la première ou la deuxième dénomination conviennent plus ou moins bien aux stagiaires.

CHAPITRE 1

LES ADULTES DITS DE BAS NIVEAU DE QUALIFICATION ET LES MATHÉMATIQUES

I. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord préciser ce que l'on entend par « adultes de bas niveau de qualification » en donnant des renseignements sur leurs catégories sociales ainsi que sur leurs capacités cognitives.

Puis, dans la mesure où nous nous intéressons à la formation de ces adultes en mathématique et plus particulièrement dans le domaine numérique, il nous semble important de préciser ce que l'on sait sur l'apprentissage du nombre. La littérature ne fournissant que très peu de renseignements chez l'adulte, ces recherches sur le nombre ont été menées chez les enfants en contexte scolaire.

C'est pourquoi, afin de nous rapprocher des questions relatives aux adultes en situation d'illettrisme, nous nous sommes intéressés à l'ethno-mathématique, domaine étudiant les pratiques mathématiques dans la vie quotidienne chez les enfants et les adultes.

II. Les adultes dits de « bas niveau de qualification »

A. Qu'est ce qu'une personne dite « de bas de niveau de qualification » ?

La catégorie « bas niveau de qualification » désigne théoriquement les personnes n'ayant pas les compétences requises par un diplôme de niveau V[3]. D'un point de vue pratique, ce sont en fait les personnes qui ne peuvent qu'occuper les postes situés en bas de l'échelle de qualification (Pailhous, Vergnaud, 1989).

Ce terme regroupe aussi bien les jeunes sortant du système scolaire sans qualification, les travailleurs immigrés dont les compétences ne sont pas reconnues par le système français, les mères de famille n'ayant jamais travaillé, les marginaux allant de petits boulots en petits boulots...

L'âge de ces adultes peut varier de 18 à 60 ans, certains ne savent pas lire ; ils n'ont jamais appris ou ont oublié par manque de pratique, d'autres ont connu la drogue ou l'alcoolisme...

Ces individus ont, pour un grand nombre d'entre eux, vécu des expériences professionnelles (chômage, expulsion de groupes de travail) et des expériences personnelles (isolement, fragilité psychologique) difficiles à surmonter. Pour certains, tout se passe comme si les différents types d'échecs vécus (échec scolaire, échec professionnel, échec familial) se renforçaient mutuellement. Cela se répercute dans leur capacité à communiquer avec autrui, à s'insérer au sein d'un groupe, à entreprendre des projets, à se repérer dans le temps et l'espace. Cette situation est d'autant plus difficile pour les personnes illettrées dans une société où l'écriture est omniprésente, notamment dans la transmission de l'information et du savoir ; nous pouvons facilement imaginer les difficultés que ces personnes rencontrent au cours de la vie quotidienne et qui accroissent notamment leur exclusion sociale.

Les adultes regroupés sous le qualificatif de « bas niveau de qualification» représentent donc une population très hétérogène et rencontrent des **difficultés à tous niveaux**.

Tout d'abord dans la recherche d'un travail : pour trouver un emploi, *« il faut qu'il [l'adulte] puisse se considérer comme capable d'occuper lui-même un emploi, c'est-à-dire qu'il se perçoive comme doté des compétences nécessaires et en mesure de les exercer. »* (Avice, Bonnal-Lordon, Jean-Montcier, 1992). Or une personne au chômage a bien souvent une mauvaise représentation d'elle-même ; elle perd confiance en elle et doute de ses compétences professionnelles, ce qui est pourtant nécessaire pour trouver un emploi.

Tous ont des compétences dans des domaines variés mais le problème est qu'il est difficile en général de les identifier. Les personnes « peu qualifiées » ne sont pas sans qualités mais les emplois qu'elles ont eus ou les activités qu'elles pratiquent ne sont pas forcément reconnues en tant que qualification (par exemple dans le domaine artisanal). Ou encore, *« certains travailleurs passent pour ne posséder aucune compétence tout simplement parce qu'il n'existe plus de témoin de leur expérience professionnelle, ni d'épreuve possible pour la vérifier.»* (Pailhous, Vergnaud, 1989)

---

[3] **Niveau V** : sorties de l'année terminale des cycles courts professionnels (BEP, CAP) et abandons de la scolarité du second cycle long avant la classe terminale.

Ce niveau correspond à une qualification complète pour l'exercice d'une activité bien déterminée avec la capacité d'utiliser les instruments et les techniques qui s'y rapportent. Cette activité concerne principalement un travail d'exécution qui peut être autonome dans la limite des techniques qui y sont afférentes. (d'après l'éducation nationale)

Puis, en ce qui concerne les adultes salariés « peu qualifiés », une reconversion leur est nécessaire pour faire face aux nouvelles techniques et leur pose alors bien souvent des difficultés. La tâche de reconversion des adultes dits « en bas niveau de qualification » apparaît difficile tant du côté du formateur que du formé : il s'agit, pour le formateur, en règle générale coupé de l'entreprise, *« d'élaborer des contenus et des méthodes appropriés à des personnes qui ont été déshabituées à utiliser et à étendre des compétences acquises en formation initiale, dans la vie quotidienne ou, dans des tâche spécialisées, et qui, en formation de reconversion, sont coupées du milieu de travail dans lequel ces compétences peuvent le mieux s'expliciter et donc se transférer »* (Pailhous, Vergnaud, 1989). Cette tâche est d'autant plus difficile que le formateur a en général peu conscience du savoir et des capacités à apprendre de ces adultes au départ.

B. Les capacités cognitives des adultes dits de bas niveau de qualification

Les recherches en psychologie cognitive permettent cependant de nous éclairer quant aux compétences cognitives (comme savoir apprendre et utiliser un savoir, pouvoir le transférer à d'autres situations, comprendre la logique d'une situation) de ces adultes.

Par exemple, le rapport de Richard cité dans (Pailhous, Vergnaud, 1989) pointe des difficultés de compréhension dans des tâches industrielles et administratives :

- Il relève une **interprétation inadéquate de documents administratifs** ; l'implicite contenu dans des textes fait référence à une culture et un savoir scolaire que des individus n'ont pas forcément, faute d'avoir pu fréquenter l'école ou parce qu'ils viennent d'un autre pays par exemple.
- Pour pouvoir comprendre une situation, il faut **savoir passer d'un point de vue à un autre, d'un mode d'organisation à un autre** et cela est apparemment ce qui pose des problèmes aux BNQ[4] : *« il est pour eux pratiquement impossible de traiter une information qui n'est pas présentée selon le point de vue qui est requis pour réaliser la tâche : il faudrait construire une longue chaîne d'inférences pour transformer l'information fournie et la mettre sous une forme utilisable. »*. Par exemple, pour comprendre un système mécanique, *« on peut adopter soit le point de vue du déroulement, consistant à considérer la suite des événements qui constituent le processus avec leur relations causales, soit le point de vue fonctionnel ou téléologique, qui décrit les fonctionnalités du système et leurs relations en termes de buts-sous-buts »*.
- « On a constaté chez les BNQ un **déficit massif des opérations de traitement des relations**, à la fois celles qui concernent le traitement des connecteurs logiques et celles qui concernent l'inclusion des classes dans les classifications ». Les BNQ disposent en outre « d'un répertoire d'opérations cognitives limité pour combiner les différents éléments d'information fournis dans un texte sous la forme de propositions ».

Les technologies ne cessant de progresser, on demande aux salariés « peu qualifiés » de s'adapter aux nouveaux systèmes (avec ou sans formation). On relève en fait un décalage entre la structure logique des tâches demandées et la capacité intellectuelle à les effectuer. Par exemple, la difficulté à distinguer deux points de vue et à utiliser l'un plutôt que l'autre dans une situation ou encore à suivre des raisonnements particuliers comme le raisonnement sous condition (Pastré, 1992).

[4] Bas Niveaux de Qualification

Pour ce public, une formation visant à développer un certain nombre de compétences intellectuelles et plus généralement cherchant à modifier leur rapport au savoir peut donc s'avérer très utile.

C. Pour les personnes ayant l'opportunité de suivre des remises à niveau, quel est l'intérêt de faire des mathématiques ?

Quatre raisons principales peuvent être avancées :

Pour améliorer leurs capacités cognitives

Les recherches en psychologie cognitive mettent en évidence un dysfonctionnement de l'appareil cognitif (notamment au niveau de l'analyse de situations et des structures logiques) de ces adultes et donc la nécessité d'éduquer celui-ci, ce qui est justement l'un des intérêts de l'activité mathématique.

En effet, la résolution d'un problème mathématique exige un effort d'analyse : analyser la situation pour comprendre le problème, saisir les données et mettre au point une stratégie de résolution.

L'avantage de pratiquer des exercices mathématiques dans les cours de remise à niveau est de permettre de se débarrasser de certaines contraintes affectives du réel. Par exemple, une dame inquiétée par le prix excessif de sa livre de tomates et de son kilo d'abricots ne vérifiera pas forcément si le compte est bon par crainte du regard du maraîcher et des autres clients attendant d'être servis. Un contexte « scolaire » peut toutefois provoquer d'autres types d'angoisses...

Un problème mathématique peut faire intervenir diverses relations logiques, des comparaisons, des classements, etc., et peut développer des compétences telles que analyser une situation, émettre des hypothèses, poursuivre un raisonnement. Le raisonnement fait intervenir des principes universels et donc handicape moins les personnes illettrées.

D'un point de vue métamathématique, les mathématiques peuvent développer des capacités de rigueur et de persévérance, de permettre de réfléchir sur sa propre façon de penser, d'agir de manière objective.

Ces compétences sont utiles pour pouvoir analyser les situations de la vie quotidienne de façon objective, pour pouvoir reconnaître les arguments rigoureux des arguments fantaisistes, prendre en compte les informations pertinentes, etc. En effet, dans notre société, un grand nombre d'arguments à couleur scientifique s'appuient souvent sur des chiffres et des pourcentages comme par exemple *« au loto, 100% des gagnants auront tenté leur chance »* ou sur des sujets plus graves :

« Les scientologues sont en bonne santé (plus de la moitié ne manque pas une seule journée de travail par an), actifs (une majorité d'entre eux participe à des activités ecclésiastiques, de défense des droits de l'homme, de protection de l'environnement ou à diverses œuvres charitables) et réussissent dans leur profession (aux États-Unis, les trois quarts d'entre eux gagnent plus que le salaire moyen). Les scientologues ne se droguent pas (aucun d'eux n'use de stupéfiants).

Ces chiffres sont contraires à la plupart des tendances actuelles de la société. Ils démontrent combien la Scientologie aide les gens à mener une vie meilleure. »

(www.questquela.scientologie.tm.fr)

Il est d'ailleurs possible que les chiffres avancés soient à peu près exacts. En revanche, la dernière phrase « ils démontrent que... » est très contestable.

En outre, il suffit qu'il y ait des nombres pour qu'un fait prenne un statut de vérité.

Pour améliorer sa confiance en soi

Dépasser les angoisses que l'on a pu éprouver face aux mathématiques et se rendre compte que l'on est finalement capable de résoudre des problèmes peut contribuer à améliorer son estime et sa représentation de soi.

Dans un but de professionnalisation

Dans un cadre professionnel, des compétences mathématiques sont exigibles pour certains emplois et peuvent aussi être un critère de sélection. Et puis, à n'importe quel âge, les mathématiques peuvent susciter des vocations !

Pour les aider dans la vie courante

Les connaissances relatives à l'utilisation de représentations mathématiques comme les tableaux et les graphiques sont transférables dans la vie quotidienne ; savoir décoder un tableau d'horaires, lire et comprendre un relevé de comptes, etc.

Les mathématiques ont de plus pour but de se familiariser avec un certain nombre d'outils (nombres, aires, périmètres, figures géométriques) utiles dans la vie courante. Par exemple, calculer le temps à attendre avant l'arrivée de son prochain train, calculer le nombre d'œufs à ajouter pour la préparation d'un gâteau pour huit personnes dont on a la recette pour six, vérifier une addition qui paraît très chère, calculer la surface des murs à peindre pour estimer le nombre de pots de peinture à acheter, fabriquer le patron d'un pantalon taille 40, estimer la somme nécessaire pour acheter 1,5 kg de bœuf à 7,45 € le kilo, convertir un prix affiché en euros, en francs sont des activités de la vie quotidienne, exécutées plus ou moins facilement suivant les compétences numériques et le degré de familiarisation que l'on a avec ces activités.

Nous vivons dans une société où les nombres sont présents dans tous les domaines (en géographie, en politique, en biologie, chez le boucher, etc.) et où leur manipulation peut s'avérer utile.

Un des buts des remises à niveau en mathématiques est donc en particulier de connaître les nombres et d'apprendre à calculer de façon exacte ou approchée dans des situations variées.

Nous allons ainsi étudier dans la prochaine partie, l'apprentissage du nombre sous ses différentes formes.

III. L'apprentissage du nombre

L'apprentissage du nombre chez l'adulte est le thème central de notre étude. Peu de travaux ont été effectué dans ce domaine, la plupart des recherches sur le nombre ayant été menées chez les enfants, voire chez les très jeunes enfants (Fuson, 1996, Brissiaud, 1989), nous utiliserons par conséquent les travaux sur l'apprentissage des nombres chez les enfants comme cadre de référence pour l'étude du rapport au nombre chez les adultes.

Le niveau des adultes auxquels nous nous intéressons plus particulièrement correspondrait, dans la scolarité, au niveau du cours élémentaire.

Nous allons dégager les caractéristiques du rapport au nombre à travers trois axes, développés de manière non indépendante dans les ouvrages traitant du nombre chez l'enfant :

- la connaissance du nombre (Ermel, 2001, Fayol, 1990) ;
- le calcul (Ermel, 2001, Butlen, Pézard, 1989) ;
- la résolution de problèmes (Verschaffel et De Corte, 1996, Vergnaud, 1981, Brissiaud, 2001).

Tout d'abord, précisons que connaître les nombres, c'est du point de vue objet (Douady, 1986) :

- connaître notre système de numération en base 10 ;

- pouvoir lire et écrire les nombres ;

- connaître certaines relations entre les nombres : structuration arithmétique et relation d'ordre.

Néanmoins, connaître le nombre c'est aussi savoir l'utiliser dans sa dimension outil pour mener différentes activités de calcul et résoudre différents types de problèmes. Dans cet exposé, nous nous restreignons au champ conceptuel des problèmes additifs car c'est essentiellement à ce niveau que notre étude se déroule.

D'un point de vue sémantique, des travaux comme ceux de Verschaffel et De Corte (1996) et de Vergnaud (1981) ont permis de classer les problèmes faisant partie du champ conceptuel des structures additives. Nous présenterons les différentes catégories de problèmes répertoriées par ces chercheurs.

Nous verrons ensuite qu'un même problème peut être résolu de différentes manières, plus ou moins expertes et que l'un des objectifs des classes élémentaires est l'apprentissage de l'opération arithmétique comme procédure de résolution de problème.

A. Les nombres

Le système de numération de position

Nous utilisons en France, et dans la plupart des autres pays, un système de numération en base dix.

Ce système de numération de position, né en Inde il y a plus de quinze siècles, présente de nombreux avantages ; il permet *« non seulement une représentation simple et parfaitement rationnelle de n'importe quel nombre (aussi grand soit-il), mais aussi et surtout une pratique simple, à la portée de tous, des opérations arithmétiques, et cela indépendamment du choix de leur base. Et c'est précisément en cela que notre numération écrite actuelle (ou n'importe* *laquelle de ses équivalentes) constitue l'un des fondements de l'outillage intellectuel de l'homme aujourd'hui.* » (Ifrah, 1994)

Ce système de numération est bâti autour de trois grandes idées qu'il faut avoir à l'esprit pour pouvoir le comprendre :

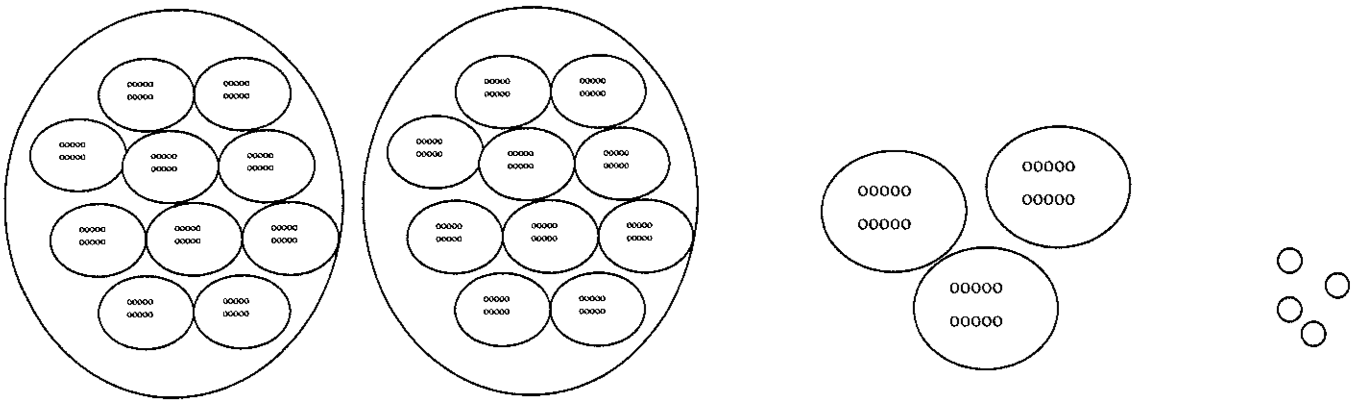
- *« l'idée de donner aux chiffres de base des signes graphiques détachés de toute intuition sensible, n'évoquant donc pas visuellement le nombre des unités représentées.*
- *l'idée que notre système de numération est basé sur des groupements réguliers itérés auxquels on associe une écriture à l'aide de chiffres qui quantifient les différents ordres de groupement : unités, dizaines, etc. Ces chiffres ont une valeur qui varie suivant la place qu'ils occupent dans les représentations numériques.*
- *l'idée de se donner un zéro totalement « opératoire », c'est à dire permettant de remplacer le vide des unités manquantes et ayant simultanément le sens « nombre nul ».* » (Ifrah, 1994, Ermel, 2001).

Illustrons à travers un exemple les caractéristiques de notre système de numération écrite : une numération de position, basée sur les groupements par dix :

- la première place désigne le nombre de paquets de paquets de dix unités, ou plus simplement le nombre de paquets à 10^2 unités : 2

- la deuxième place désigne le nombre de paquets à dix unités : 3

- la troisième place désigne le nombre d'unités restantes : 4



2 3 4

Ce nombre se lit « deux cent trente quatre » et s'écrit 234.

Ainsi, d'après le groupement de recherche pédagogique ERMEL (2001), les élèves arrivant en fin de CE2 devraient être capables :

- d'associer à une collection donnée, une écriture chiffrée et à un nombre une collection correspondante ;

- d'anticiper l'impact d'une modification de la collection d'objets sur l'écriture correspondante ;

- de savoir extraire le nombre de dizaines, centaines ou milliers d'un nombre pour résoudre un problème ou dans des exercices formels ;

- de différencier la valeur des chiffres suivant leur position ;

- de connaître les décompositions canoniques des nombres, comme $5864 = 5\times1000 + 8\times100 + 6\times10 + 4$;

- de connaître la signification du zéro dans l'écriture du nombre ;

- d'avoir pris conscience de la récurrence du processus de groupement par 10 : $1000=10\times100=10$ centaines$=10\times10\times10$ en liaison notamment avec différents systèmes de mesure.

Ce système de numération écrite en base 10 est commun à la plupart des civilisations mais ce qui varie d'une langue à une autre, c'est la communication orale de ces nombres. Nous allons donc préciser les spécificités de celle-ci en langue française, ceci étant d'autant plus nécessaire que le français n'est pas forcément la langue maternelle des adultes concernés par notre étude.

Désignations écrites et orales des nombres

Le système oral est composé :

- de **mots-nombres** ; les unités : « un », « deux », « trois »,..., « neuf » ; les dizaines : « dix », « vingt »,... ; les particuliers ; « onze », « douze »,...
- de **règles** qui permettent de repérer des noms de nombres à partir des mots-nombres ; par exemple « vingt et un », c'est vingt plus un.
- d'**irrégularités** par rapport à ces règles qui renvoient à d'autres décompositions que la décomposition canonique associée à la règle, utilisant l'addition et la multiplication de façon implicite ; par exemple $82 = 4\times20 +2$; $96 = 4\times20 +16$.

Les systèmes oraux varient d'une langue à l'autre et la régularité du système favorise nettement son apprentissage. Le système chinois est, par exemple, très cohérent et les études de Miller et Stigler (cité in Fayol, 1990) montrent que l'apprentissage oral est acquis plus précocement chez les enfants chinois que chez les enfants américains. En chinois, onze se dit « dix un », vingt trois se lit « deux dix trois ». La logique de ce système oral permet de mieux retenir le nom des nombres mais surtout de comprendre la structure de groupement par dix qui est sous-jacente.

En revanche, en utilisant les mots « cent, mille », etc., nous indiquons les différentes puissances de 10, permettant de percevoir immédiatement l'ordre de grandeur du nombre en question ce qui ne serait pas le cas si notre numération orale était calquée sur la numération écrite ; nous ne lisons pas 5451, « cinq, quatre, cinq, un » mais bien « cinq mille quatre cent cinquante et un ». Le système oral français de numération a donc des spécificités qui ont des raisons d'exister mais présente aussi des irrégularités qui engendrent des difficultés dans l'apprentissage de celui ci.

Ceci conduit Fayol (Fayol, 1990) à distinguer deux types d'erreurs dans la désignation orale du nombre : **syntaxique** et **lexicale**.

Les **erreurs syntaxiques** se situent au niveau de la position des chiffres : « *les perturbations consistent en :*

- *un traitement terme à terme aboutissant soit à la lexicalisation d'éléments du nombre verbal (ainsi « Mille neuf cent » est transcrit 1000 9 100), soit à une stricte mise en correspondance d'un item verbal par un chiffre (ainsi « Cent deux mille six » est transcrit 1216).*
- *un transcodage de Mille/Cent/Vingt par 0 ou par rien ou par adjonction d'un 1 (ainsi « Mille huit cent dix » est transcrit 18010, « Cent deux mille » est transcrit 102 1000).* »

Puis, Fayol s'appuie sur les travaux de Deloche et Seron (Deloche et Seron, 1984) pour analyser les **erreurs lexicales** : *« l'étude attentive de celles-ci les conduit à considérer que le lexique de la numération s'organise en ensembles ordonnés : les piles. Celles-ci sont au nombre de trois :*

-les unités : de un à neuf

- les particuliers : de onze à seize.

- les dizaines : de dix à soixante.

Dès lors les erreurs lexicales sont de deux types :

** Les premières consistent en une confusion d'éléments relevant de la même « pile » ; confusions aboutissant à des substitutions telles que 11 à 12, 30 à 60, 5 à 7, etc.*

** les secondes procèdent par changement de pile. Les sujets remplacent, par exemple, 50 par 15 ou par 5 : c'est à dire qu'ils passent d'un ensemble à l'autre en conservant la position sérielle de l'élément. »* (Fayol, 1990).

Savoir communiquer des nombres est essentiel dans la vie de tous les jours ; par exemple, pouvoir lire dans un magasin qu'un objet coûte 74 € et le dire à une autre personne. De plus, savoir que l'on peut payer cet objet de diverses manières ; avec un billet de 50 €, deux billets de 10 €, et deux pièces de 2 €, ou bien avec trois billets de 20 €, un billet de 10 €, et quatre pièces de 1 € est un autre type de connaissance qu'il est aussi très important de maîtriser.

Relations entre les nombres

Structure arithmétique des nombres

D'après Ermel déjà cité, *« connaître les nombres c'est aussi, au vu de la connaissance de leurs désignations canoniques et de leurs décompositions liées à ces désignations, maîtriser d'autres relations concernant ces nombres ».*

Par exemple, 150 n'est pas seulement 100 plus 50 mais aussi 5 fois 30, 75 et 75, 125 et 25. 92, c'est 100-2 ; 25 c'est 100/4, etc.

Il s'agit de savoir décomposer un nombre de manières différentes en faisant intervenir des nombres de référence ; 5, 10, 50, etc. et les différentes opérations.

Pour cela, il est nécessaire d'avoir à sa disposition un ensemble suffisant de nombres de référence, de connaître les binômes de chiffres complémentaires à la dizaine (il faut ajouter 2 à 8 pour obtenir une dizaine), de bien manipuler les calculs sur les nombres référents, et en premier lieu les calculs additifs.

Ordre et comparaison

Connaître les nombres ne consiste pas seulement à percevoir le sens de chaque nombre séparément mais au contraire à considérer les nombres dans leur ensemble, pouvoir faire des liens entre eux : *« connaître les nombres c'est aussi, au vu de leur écriture, savoir les comparer rapidement entre eux, savoir en ordonner plusieurs et savoir situer des nombres par rapports à des nombres repères »* (Ermel, 2001).

Dans cette première partie, nous avons présenté le nombre comme objet en précisant les caractéristiques institutionnelles (désignation des nombres) et structurelles du nombre. Lorsque nous résolvons des exercices sur les nombres, notre rapport au nombre s'enrichit à la fois dans la connaissance du nombre comme objet mais aussi comme outil. Nous allons maintenant nous intéresser au nombre dans cette dimension outil du nombre à travers le calcul et la résolution de problèmes.

B. Le calcul

Dans cette partie, nous ne cherchons pas à faire un bilan exhaustif sur le thème du calcul. Nous nous attachons à exposer des notions sur le sens des problèmes et la classification de ceux-ci dues à Vergnaud (1981) et à Verschaffel et De Corte (1996) ainsi que sur les niveaux des procédures de résolution des problèmes (Brissiaud, 2001) que nous utiliserons par la suite.

Les différentes formes de calcul à l'école

D'après Ermel déjà cité, *« savoir calculer aujourd'hui, c'est être capable de choisir parmi les différents moyens de calcul existant et de les mettre en œuvre correctement »*. Ils distinguent alors différentes formes de calcul :

- le recours à des résultats mémorisés ; par exemple 5 + 5 = 10 ; 15 + 15 = 30.
- **le retour au calcul mental**. Pour effectuer « dans sa tête » une addition, l'enfant ou l'adulte aura une démarche dépendant des valeurs numériques en jeu, de leur propriétés arithmétiques et de la connaissance de l'enfant ou de l'adulte de celles-ci, des résultats mémorisés qu'il possède, et sans doute aussi de raisons plus personnelles.

Par exemple, suivant les personnes (et le jour), l'addition 58+13 ne sera pas effectuée de la même manière :

- on décompose les deux nombres en dizaines et unités : 50 et 10, 60 ; 8 et 3, 11 ; 60 et 11 ; 71.

- on décompose uniquement le second nombre : 58 et 10, 68, et 3, 71 ou 58 et 3, 61, et 10, 71.

Etc.

8 et 3 sera un résultat mémorisé pour certains. D'autres devront calculer ce nombre avec le calcul réfléchi : 8 + 2 +1 = 10 +1 = 11 ou tout simplement avec leurs doigts.

Un exemple montrant que les démarches de calcul diffèrent en fonction des valeurs numériques en jeu est proposé par Brissiaud (2001) : *« un adulte ne calcule pas 104-6 comme il calcule 104-98. Dans le cas de 104-6, il procède par retraits successifs (104-4)-2, c'est à dire en « reculant ». Et dans le cas de 104-98, il procède par recherche du complément en « avançant » : « 98 pour aller à 100, il faut 2, et pour aller à 104, 4 de plus, ça fait 6 »*. Précisons que dans ce dernier cas, on pourrait aussi procéder par retrait et accommodation par ajout (104-100) + 2.

Un nombre important de travaux didactiques (Verschaffel et De Corte, 1996, Brissiaud, 2001, Ermel, 2001, Butlen et Pézard, 1989) préconise le calcul mental à l'école. Ceci s'est répercuté dans les programmes de l'école élémentaire (ministère de l'éducation nationale) qui accordent aujourd'hui en conséquence une grande place au calcul mental et au calcul réfléchi.

Butlen et Pézard (1989) insistent en particulier dans leur travail sur le fait que le recours au calcul mental et au calcul réfléchi [5]:

- permet tout d'abord de se familiariser avec la structure des nombres et les opérations arithmétiques ; ceci est repris dans les programmes : *« ils [les élèves] élaborent*

[5] Calcul réfléchi : organisation et traitement de calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs, mentalement ou avec l'aide de l'écrit (d'après le bulletin officiel)

les premières relations additives et multiplicatives entre les nombres d'usage courant, au travers des activités de calcul mental ».

- permet ensuite de « faire fonctionner et s'approprier les propriétés des opérations » (comme par exemple la commutativité) et de construire des techniques de référence comme l'utilisation des doubles et des compléments à 10. Cette réflexion sur le calcul est nécessaire car les techniques opératoires peuvent s'avérer trop *« coûteuses en mémoire pour se prêter à une exécution mentale »* (Artigue, 2002).

- permet d' « enrichir, de diversifier et d'étendre les procédures de calcul ». Ces facultés sont nécessaires pour pouvoir reconstruire des calculs et mémoriser à plus long terme des résultats. Les programmes insistent aussi sur ce point : *« si un résultat a été oublié, il doit pouvoir être reconstruit ».*

Le calcul mental peut enfin intervenir au niveau du raisonnement : *« il [le calcul mental] est une façon privilégiée de lier calcul et raisonnement, en mettant en jeu les propriétés des nombres et des opérations, comme le montrent par exemple les travaux de D. Butlen et N. Pézard ».* Il permet aussi de *« susciter des formulations, des généralisations et des preuves ».* (Artigue, 2002).

- **le recours aux techniques opératoires** ; chaque culture possède ses propres algorithmes de calculs (en général basés sur les mêmes propriétés de la numération de position). Girodet (1996) insiste sur le *« caractère instructif des différences »* et l'enrichissement que peut permettre la confrontation et l'échange des stratégies de calcul opératoire au sein d'un groupe d'adultes.
- **le recours à l'instrumentation** ; bouliers, calculatrices. L'utilisation des calculatrices est intégrée dès le cours élémentaire : *« pour certaines activités, les calculatrices sont également mises à disposition des élèves. Elles sont utilisées comme moyen de calcul, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes, par exemple lorsque l'élève a déterminé les calculs nécessaires, mais n'est pas capable de les exécuter assez rapidement et avec une bonne fiabilité, et qu'il risque donc de perdre le fil de sa réflexion... »* (programme des cours élémentaires)

Pour les adultes dits de « bas niveau de qualification », il semble nécessaire de travailler ces différentes formes de calculs et de développer une bonne flexibilité entre ces modes complémentaires de calcul car :

- cela permet de travailler des compétences mathématiques comme la connaissance structurelle du nombre ;

- ces modes de calculs ont des utilités diverses et applicables dans des contextes différents ; par exemple, utiliser la calculatrice pour vérifier ses comptes, ou poser l'opération lorsque l'on ne dispose pas de calculatrice, calculer de tête la valeur approchée de ses achats, etc.

Effectuer une opération arithmétique et résoudre un problème ne provoquent pas le même type de difficulté suivant les personnes. Certaines seraient par exemple capable de résoudre l'exercice « combien me rend t-on si j'achète un sac à 173F et que je donne 200F ? » mais ne pourraient répondre si l'on leur demandait « combien fait 200 moins 173 ? ». D'autres personnes savent effectuer les opérations arithmétiques mais sont incapables de les utiliser pour résoudre des problèmes contextualisés. La difficulté d'un problème n'est pas alors tant de « calculer » mais de se représenter mentalement la situation et de chercher un « moyen » pour trouver le résultat.

Ces « moyens » ou procédures ne seront pas les mêmes suivant le type de problème auquel nous sommes confrontés.

Par exemple, considérons les deux exercices suivants :

Exercice 1

Au début de la récréation, j'ai 18 billes. J'en perds 6 pendant la récréation. Combien ai-je de billes à la fin de la récréation ?

Exercice 2

Julien et moi avons rassemblé notre argent. J'ai mis 6F. A nous deux, nous avons 18F. Combien a mis Julien ?

Ces deux exercices, bien que les variables numériques et l'opération en jeu soient identiques, ne seront en général pas résolus de la même manière par des enfants en première année de cours élémentaire.

Pour l'exercice 1, la plupart des enfants se diront : « j'enlève 6 à 18 ».

Pour l'exercice 2, les enfants se diront plutôt : « combien faut-il ajouter à 6 pour avoir 18 » ce qui correspondrait à effectuer l'opération à trou « 6 + □ = 18 ».

Les enfants ont des gestes mentaux différents pour des exercices qui relèvent a priori de la même opération de soustraction. C'est pourquoi la classification des problèmes additifs et multiplicatifs suivant la représentation mentale qu'ils permettent ou favorisent a été l'objet de nombreux travaux, que nous allons présenter brièvement.

C. Classification des catégories de problèmes

Les littératures anglo-saxonne (Fuson 1992 ; Riley, Heller & Greeno 1983 ; Verschaffel & De Corte 1993, in press) et française (Vergnaud, 1981) se rejoignent dans les critères de classification des problèmes du champ conceptuel des structures additives.

En effet, les différents travaux réalisés établissent leur classification des problèmes additifs et soustractifs tout d'abord suivant la catégorie de problème (« situation »en anglais).

Verschaffel et de Corte (1996) distinguent ainsi trois catégories de problèmes :

- **les problèmes de changement** : « change problems refer to active or dynamic situations in which some event changes the value of an initial quantity ». (exercice 1)
- **les problèmes de combinaisons** : « Combine problems relate to static situations consisting of two quantities that are considered either separately or in combination ». (exercice 2)
- **les problèmes de comparaison** : « Compare problems involve two amounts that are compared and the difference between them ».

De plus, à l'intérieur d'une même catégorie, les auteurs (français et anglo-saxons) classent les problèmes suivant deux principaux critères :

- le statut de l'inconnue ;
- le type d'opération a priori engagé.

Vergnaud (Vergnaud, 1981) a classé ces mêmes problèmes suivant des critères équivalents. Nous présentons les analogies entre les travaux français et anglo-saxons dans le tableau ci-après.

	Vergnaud	Verschaffel et al	exemples[6]
Catégorie / situation	la composition de deux mesures en une troisième	**combine** problems	1) Il y a 4 filles et 5 garçons autour de la table. Combien y a-t-il d'enfants en tout ? (1) 2) Pete and Ann have 8 apples altogether. Pete has 3 apples. How many more apples doe Ann have? (2)
Classe	1) Connaissant les deux mesures élémentaires, trouver la composée. 2) Connaissant la composée et l'une des élémentaires, trouver l'autre.	1) unknown : super set 2) unknown : subset	
Catégorie / situation	la transformation (quantifiée) d'une mesure initiale en une mesure finale	**change** problems	Voici 3 exemples parmi 6 : 1) il y avait 17 personnes ans le bus, il en monte 4. Combien y en a-t-il maintenant ? (positif, état final) 2) Paul vient de jouer aux billes. Il en avait 41 avant de jouer. il en a 29 maintenant. Combien en a t-il perdues ? (négatif, transformation) 3) Pete had some apples. Then he gave 3 apples to Ann. Now Pete has 5 apples. How many apples did Pete have in the beginning? (increase, start set)
Classes	il distingue 6 classes de problèmes : 1) selon le signe de la transformation : positif ou négatif 2) selon que la question porte sur l'état final, sur la transformation, sur l'état initial	ils distinguent 6 classes de problèmes selon : 1) direction : increase or decrease 2) unknown : result set, change set, start set	
Catégorie / situation	la relation (quantifiée) de comparaison entre deux mesures	**compare** problems	Voici 3 exemples parmi 6 : 1) Pete has 8 apples. Ann has 3 apples. How many more apples does Pete have more than Ann? (more, difference set) 2) Pete has 8 apples. Ann has 3 apples less than Pete. How many apples does Ann have? (less, compared set) 3) Pete has 8 apples. He has 3 apples more than Ann. How many apples does Ann have? (less, reference set)
classes	il fait des distinctions de façon implicite (notamment suivant le statut de la comparaison) mais ne les classe pas explicitement	ils distinguent 6 classes selon : 1) direction : more or less 2) unknown : difference set, compared set, reference set	

Ce tableau montre de grandes analogies dans les critères pris en compte pour classer les problèmes additifs et soustractifs par ces différents chercheurs.

Vergnaud (1981) affine d'autre part cette classification en proposant trois autres catégories de problèmes :

- La composition de deux transformations. Par exemple :

« Jean a joué deux parties de billes. A la première partie il a gagné 16 billes. A la seconde partie il en a perdu 9. Que s'est-il passé en tout ? »

Ou encore :

« Pierre a joué deux parties de billes. Au cours de la première partie, il en gagné 7. Il a joué une seconde partie. En faisant ses comptes pour les deux parties, il s'aperçoit qu'il a perdu 2 billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie ? »

- La transformation d'une relation

[6] Les exemples en français sont tirés de « l'enfant, les mathématiques, la réalité » (Vergnaud, 1981). Les exemples en anglais sont issus de l'article de Verschaffel et De Corte (1996)

Par exemple :

Je dois 16 € à Stéphanie. Je lui rends 10 €. Combien dois-je encore lui rendre ?

- La composition de deux relations. Par exemple :

Varma doit 20 € à Franck. Franck lui en doit 6. Combien Varma doit-il encore rendre à Franck ?

Ces problèmes se différencient aussi en classes selon le statut de l'inconnue et les opérations a priori en jeu.

Les problèmes, suivant la catégorie et la classe à laquelle ils appartiennent, n'ont pas le même niveau de difficulté et engendrent des erreurs de nature différente. Une raison importante est que le **type[7] de problème** influence grandement la façon dont nous nous représentons l'exercice. Ceci est illustré à travers l'exercice 1 et l'exercice 2.

Fayol écrit de plus sur ce fait : *« les sujets tendent à simuler, en action déployée à l'extérieur ou intériorisée, les évènements décrits. En conséquence, la procédure de résolution retenue se trouve sous la dépendance de la plus ou moins grande facilité à « mimer » tel ou tel déroulement ; de là la relative facilité pour les problèmes de changement. »*

D'autres facteurs agissent dans la représentation mentale que l'on peut se faire d'un problème comme par exemple :

- la représentation sémiotique du problème (Duval, 1996)

- les nombres en jeux et *« la facilité plus ou moins grande du calcul numérique nécessaire »* ainsi que l'ordre de présentation des informations (Vergnaud, 1981)

- le contexte de l'exercice : il est plus facile de se représenter un problème dont le contexte est familier.

Les compétences des enfants dans la résolution de problèmes dépendent en grande partie de la faculté à se représenter le problème, liée aussi au nombre de fois où ils auront pu être confrontés au type de problème en question. Verschaffel et De Corte rapportent à ce sujet que la proportion des catégories d'exercices donnée aux enfants n'est pas la même suivant les classes. Ils recensent une majorité d'exercices de changement, tandis que les exercices de combinaisons sont très faiblement abordés.

Selon les sujets, les facteurs énoncés vont avoir une plus ou moins grande influence sur la façon de résoudre les problèmes ; celle-ci peut s'effectuer à plusieurs niveaux, plus ou moins experts. Nous allons présenter ces différents niveaux de résolution dans la partie suivante.

D. Niveaux des procédures de résolution des problèmes et apprentissage des opérations arithmétiques au sein d'un problème

Nous avons souligné que des enfants perçoivent les exercices 1 et 2 de manières différentes, ce qui provoque des procédures de résolution distinctes. En revanche, une personne plus avancée mathématiquement utilisera plus facilement la même procédure pour les deux exercices : la soustraction.

Ainsi, un des objectifs des classes élémentaires est d'associer à différents gestes mentaux une unique opération arithmétique. Par exemple, prendre conscience que « enlever x à y » est équivalent à « chercher combien il faut ajouter à x pour obtenir y » et que ces deux gestes

[7] Un type de problème est l'ensemble des problèmes correspondant à une catégorie et une classe données.

mentaux reviennent à effectuer la soustraction « y-x ». Brissiaud (2001) dégage quatre points essentiels que nous présentons ci-après :

1. Il existe trois niveaux de résolution d'un même problème.

2. La transition du 1er au 2ème niveau se fait dans la continuité.

3. L'équivalence de deux gestes mentaux comme fondement de chacune des opérations arithmétiques

4. La transition du 2ème au 3ème niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne.

1. Il existe trois niveaux de résolution d'un même problème

Pour décrire ces trois niveaux, nous allons prendre l'exemple du problème dit de soustraction :

> « *Eric a 28 billes. Il va en récréation et il gagne des billes. Maintenant il a 54 billes. Combien a-t-il gagné de billes ?*

Au 1er niveau, l'enfant peut s'y prendre ainsi : il commence par dessiner 28 billes, il change ensuite la couleur de son crayon pour bien distinguer ces 28 billes de celles qu'il va maintenant ajouter et il dessine des billes jusqu'à en avoir 54 en tout. Enfin, il compte combien il vient d'ajouter de billes.

Au 2ème niveau, l'enfant teste par exemple des hypothèses : « Eric a 28 billes au départ. 28+30 ça fait 58. C'est trop, ce n'est pas 30 billes. 28+25, ça fait 53, c'est presque 25, il a gagné 26 billes. ». Cette procédure, qui peut aussi prendre la forme d'une « addition à trou » reste très proche d'une simulation de l'action décrite dans l'énoncé. On remarquera notamment que le signe « + » y est employé dans un sens trivial, comme synonyme de « gagner ».

Enfin, au 3ème niveau, l'enfant, après une première lecture de l'énoncé, reconnaît presque immédiatement ce problème comme appartenant à la catégorie des problèmes de soustraction et il calcule 54-28.

En bref, avant d'être un problème de soustraction (3ème niveau), le problème d'Eric et ses billes est donc un problème de recherche de la valeur d'un ajout. Il se résout soit en simulant cet ajout (1er niveau), soit par une addition à trou. La résolution à l'aide de la soustraction est la procédure la plus experte. » (Brissiaud, 2001)

Nous avons observé les stagiaires du CUEEP mettre en œuvre ces trois niveaux de procédures et plus particulièrement les niveaux 2 et 3 : leurs procédures de résolution semblent être influencées par le type de problème en jeu et leur représentation sémiotique. Nous allons ainsi étudier ce passage du niveau 2 à 3 plus précisément dans nos recherches, d'autant plus que c'est l'un des objectifs du groupe Math de Base, groupe dans lequel nous allons effectuer nos observations.

2. La transition du 1er au 2ème niveau se fait dans la continuité

« Le passage du 1er au 2ème niveau de résolution correspond à un premier usage du symbolisme arithmétique et offre beaucoup moins de difficulté que le passage du 2ème niveau au 3ème niveau » puisque dans les deux premiers niveaux, *« c'est la compréhension du langage quotidien et la simulation des actions ou des relations présentes dans l'énoncé qui conduisent à la solution ».* (Brissiaud, 2001)

3. L'équivalence de deux gestes mentaux comme fondement de chacune des opérations arithmétiques

« Considérons les deux problèmes suivants :

a) Recherche de la valeur d'un ajout

Eric a 3 billes. A la récréation, il gagne des billes. Maintenant il a 21 billes. Combien a-t-il gagné de billes ?

b) Recherche du résultat d'un retrait

Eric a 21 billes. A la récréation, il perd 3 billes. Combien a-t-il de billes maintenant ? »

Ces deux exercices sont des problèmes de changement où l'opération a priori en jeu est la soustraction. La place de l'inconnu est par contre différente : on recherche une transformation dans le 1er exercice et un état final dans le 2nd.

« L'enfant qui sait résoudre ces problèmes au 3ème niveau repère immédiatement qu'ils se résolvent de la même manière en calculant 21-3.

Mais considérons le cas d'un enfant de CE1, par exemple, qui n'a pas encore étudié la soustraction. Il peut seulement résoudre ces problèmes au 1er ou au 2ème niveau.

Dans le cas du premier problème, il cherchera ce qu'il faut ajouter à 3 pour avoir 21. S'il utilise une stratégie de comptage sur les doigts pour simuler le gain, l'enfant dira : 3 (quantité initiale de billes) puis il comptera successivement sur ses doigts 4, 5, 6, 7,..., 21, tout en tenant le compte du nombre de doigts qu'il a ainsi levés, 18, qui constitue la solution numérique. Avec cette stratégie, donc, l'enfant avance sur la suite des nombres.

Pour résoudre le second problème, en revanche, il est plus probable que pour simuler la perte des 3 billes, l'enfant recule sur la suite des nombres : 21 billes en tout, 20 (1 bille est enlevée), 19 (2 billes sont enlevées), 18 (trois billes sont enlevées).

L'enfant avance sur la suite des nombres dans le premier cas, il recule dans le second. On conçoit qu'il ne lui soit guère facile de prévoir que ces deux procédures produisent le même résultat et, plus généralement, de comprendre qu'elles sont équivalentes. Or c'est cette équivalence qui fonde le concept arithmétique de soustraction parce qu'elle est à l'origine d'une économie cognitive considérable.

Le premier problème illustre bien ce phénomène d'économie cognitive car le geste mental qu'il suscite (avancer sur la suite des nombres depuis 3 jusqu'à 21) est plutôt long et pénible, et cela procure une économie cognitive substantielle de le remplacer par le second geste mental (reculer de 3 sur la suite des nombres à partir de 21). C'est parce que ces deux procédures sont équivalentes que l'on peut remplacer l'une par l'autre.

C'est parce qu'une culture a intérêt à ne pas laisser se perdre de tels phénomènes d'économie cognitive que cette équivalence a été dûment étiquetée par une étiquette verbale : le signe écrit « - » et le mot « soustraction ». » (Brissiaud, 2001)

4. La transition du 2ème au 3ème niveau correspond à une réorganisation de l'expérience quotidienne.

Le passage du 2ème au 3ème niveau correspond à une appropriation des opérations arithmétiques. Mais celle-ci se fait de manière inégale suivant les opérations ; l'addition et la multiplication sont « plus faciles » à s'approprier que les opérations inverses.

Les deux gestes mentaux qui fondent la multiplication ne sont pas radicalement différents : ils consistent en la recherche d'un ajout réitéré ; chercher a fois b d'une part et chercher b fois a d'autre part. Considérons par exemple les deux exercices suivants :

1. Combien vais-je payer si j'achète 19 stylos à 3 € pièce ?
2. Combien vais-je payer si j'achète 3 stylos à 19 € pièce ?

Un enfant ou un adulte qui n'aurait pas appris la multiplication résoudrait ces deux exercices de façon différente ; pour le 1er exercice, il calculerait 3+3+3+3+3+3+3+... (19 fois) et pour le 2nd, il calculerait 19+19+19. Nous constatons, par le premier geste mental l'intérêt d'apprendre la multiplication. D'après Brissiaud, l'équivalence des deux gestes mentaux qui fondent la multiplication ne pose pas beaucoup de difficultés pour les élèves : *« la reformulation du problème sous la forme 19 fois 3 ne pose guère de problème et elle conduit l'enfant à reconnaître qu'il s'agit là d'un problème de multiplication »* et à utiliser la notation symbolique 19×3 ou 3×19. Ils prennent ensuite rapidement conscience que ces opérations sont équivalentes (lors d'activités en classe) et il arrive fréquemment qu'en écrivant 3×19, ils le calculent comme 19×3 (19+19+19).

En revanche, *« la soustraction et la division sont des opérations qui apparaissent « difficiles » aux enseignants parce qu'ils n'ont pas la même possibilité »* (la soustraction et la division ne sont entre autre pas commutatives).

Dans le cas de la soustraction, c'est l'équivalence des deux gestes mentaux correspondant à « la recherche du résultat d'un retrait » et à «la recherche de la valeur d'un ajout » qui fonde la soustraction (cf. point 3, page 24). Associer la soustraction au premier geste mental ne pose pas beaucoup de difficulté mais en produit en revanche beaucoup pour le second geste mental (ceci est dû en grande partie au fait que la soustraction est associé dans le langage commun à une perte, une idée de recul et non à l'idée d'un rajout).

« De même, les deux gestes mentaux dont l'équivalence fonde la division sont eux aussi de nature très différente : l'un est la recherche des résultats d'un partage équitable, et l'autre la recherche des résultats d'un groupement réitéré (combien de groupes peut-on former ? Restera-t-il des éléments isolés ?). Comme dans le cas de la soustraction, l'étiquetage par le signe « : » (« divisé ») est très facile pour le premier type de problème mais est plus difficile pour l'autre » (dans le langage courant, la notion de division est associée à une idée de partage).

E. Conclusion

L'étude du nombre possède de nombreuses entrées ; considérer 21 comme le seul nombre entier compris entre 20 et 22, ou comme une température, ou comme la différence de 54-33, ou comme la largeur en mètres de mon jardin, ou comme la quantité de crêpes sur la table, etc., relèvent de conceptions différentes en ce qui concerne le nombre 21. Autant de façons de considérer le nombre qui nous ont amenés à faire des choix thématiques visant à développer ses principales fonctions : le nombre en tant qu'objet structurel de communication et de mémorisation, le calcul et la résolution de problèmes. Nous avons choisi de développer ces caractéristiques du nombre afin d'en établir un rapport avec les observations effectuées et les objectifs des niveaux Math Départ et Math de Base du CUEEP de Tourcoing :

- **Le nombre** est ancré au sein d'un système de numération de position et nous avons constaté que celui-ci n'est pas forcément naturel aux personnes n'ayant pas ou peu fréquenté l'école. En effet, beaucoup de stagiaires ont de grandes difficultés à lire et à écrire les nombres, en chiffres ou en lettres, la place des zéros posant notamment des problèmes. La structure arithmétique des nombres et les propriétés de notre système de numération sont beaucoup travaillées dans le premier niveau (Math Départ).

- Nous avons exposé les différents modes usuels de **calcul** : la place et l'utilisation de ceux-ci est inégale suivant les groupes ; en Math Départ, l'accent est mis sur l'utilisation du calcul réfléchi et les stagiaires n'utilisent pas de calculatrice. En Math de base (2ème niveau), les stagiaires peuvent utiliser la calculatrice pour résoudre des problèmes, mais vont apprendre séparément les algorithmes des opérations.
- En ce qui concerne **la résolution de problème**, les observations effectuées dans les deux groupes d'adultes sont en rapport avec les travaux effectués sur les enfants. Des variables telles que la catégorie (transformation, combinaison, comparaison) et la classe (statut de l'inconnue, opération a priori) du problème en jeu, la représentation, le contexte et les nombres en jeu, semblent influencer la représentation mentale, la dévolution et la procédure de résolution du problème.
- Enfin, nous nous sommes intéressés aux différents **niveaux de résolutions de problèmes** ; nous avons remarqué qu'il est possible de résoudre des problèmes de type soustractif, multiplicatif, ou de division en utilisant uniquement l'opération d'addition. C'est ce que font les stagiaires du groupe Math Départ, l'utilisation de l'opération arithmétique comme procédure de résolution étant l'un des objectifs du groupe suivant, Math de Base.

Les études sur le nombre chez l'enfant semblent donc être un bon outil pour analyser le rapport au nombre chez l'adulte. Elles nous ont permis d'étudier plus précisément les difficultés mathématiques de ces adultes et de construire un questionnaire visant à mieux connaître le rapport aux nombres des adultes que nous exposerons dans le chapitre 2.

Les travaux que nous venons d'exposer sont cependant incomplets pour notre étude sur les adultes en situation d'illettrisme car ces travaux étudient le développement de compétences en ce qui concerne le nombre dans un cadre scolaire. Or, les adultes et les enfants non scolarisés peuvent développer des savoirs faire mathématiques dans des activités de la vie quotidienne. Les ethno-mathématiciens analysent ces savoirs ; un aperçu des études faites à ce sujet est l'objet de notre prochaine section.

IV. L'approche ethno-mathématique

« J'avais réuni les habitants du village nommé Ganthier [en Haïti] et je leur posai des problèmes en leur demandant de les résoudre à haute voix. Aux premières questions posées, je me suis aperçue qu'il y avait un leader qui calculait plus vite que les autres mais très vite, il refusait de répondre et s'éloignait sous le prétexte « qu'on le prenait pour un enfant ». Je lui posais donc un problème très compliqué avec un assez grand nombre de données concernant le rapport de la vente d'un troupeau convoyé vers un marché distant de dizaines de kilomètres : au cours du trajet, comme il se produit dans la réalité, le nombre de têtes diminuait, les vaches maigrissaient ; il fallait, de plus, considérer le prix de la viande, celui des peaux, etc. Il se mit alors au milieu du groupe et commença ses calculs. A chaque étape du compte, il disait à quelqu'un : « Tu me retiens tant ». Il arriva rapidement et sans erreurs au résultat. Il compensait le fait de ne pas savoir écrire les nombres en utilisant les gens autour de lui pour « noter » les résultats intermédiaires. » (Girodet, 1996)

Les mathématiques sont souvent associées à l'écrit, notamment en ce qui concerne les tâches complexes. Cette citation montre qu'il est tout à fait possible de venir à bout d'un problème compliqué, en utilisant d'autres moyens.

Le rapport des mathématiques à l'écrit a été étudié par Nunes (Nunes, 1993) où elle met en évidence les facultés des enfants des rues brésiliens à calculer dans leurs activités de vendeur et les difficultés qu'ils rencontrent lors de problèmes mathématiques écrits.

Un public scolarisé ou non, qu'il soit enfant ou adulte, développe des compétences mathématiques lors des ses activités quotidiennes. C'est dans la perspective de comprendre les relations entre savoirs mathématiques acquis en contextes scolaire et hors scolaire, et de saisir l'influence des cultures dans l'activité mathématique que se situe l'approche ethno-mathématique. Une définition en est donnée par D'Ambrosio : *« ethnomathematics refers to forms of Mathematics that vary as a consequence of being embedded in cultural activities »* (D'Ambrosio cité in Nunes, 1992).

Une approche ethno-mathématique peut donc s'avérer très utile dans l'étude des compétences mathématiques chez les adultes non scolarisés.

Quels sont les types de savoirs développés en contexte hors scolaires ?

Pour des adultes en situation d'illettrisme mais en phase de scolarisation, comment exploiter les connaissances développées dans la vie quotidienne pour pouvoir suivre un apprentissage efficace ?

A. Des savoirs acquis « dans la rue »

Les adultes et les enfants non scolarisés sont amenés à « faire des mathématiques » pour répondre à des besoins quotidiens.

Au Brésil, l'échec des enfants d'ouvriers en mathématique à l'école a conduit un certain nombre de chercheurs (Nunes, Carraher, Schliemann) à étudier les causes de cet échec. Ainsi, ils ont observé que, pour un exercice comportant les mêmes calculs, les enfants n'affichent pas les mêmes performances suivant le contexte selon lequel il est présenté : dans le cas où le problème est simulé comme dans un magasin, c'est-à-dire si l'enfant joue au vendeur et le chercheur au client, les compétences des enfants des rues sont du niveau de celles des autres enfants. Quand il s'agit d'un exercice proposé à l'écrit en situation scolaire, leurs performances diminuent alors nettement : ils n'appliquent plus leurs stratégies mais, sous un effet de contrat didactique[8] probablement, utilisent des opérations arithmétiques avec lesquelles ils ne sont pas à l'aise.

Pourtant, les techniques orales et écrites en ce qui concerne l'addition et la soustraction ne sont pas si différentes dans la mesure où elles reposent toutes les deux sur l'associativité de l'addition: *« The particular decompositions chosen in written and oral procedures are not the same ; yet, the properties used, namely the associativity of addition and subtraction, are the same in both procedures »* (Nunes, 1992)

Pour Nunes, les pratiques arithmétiques peuvent différer suivant les cultures, mais les stratégies contiennent en général les mêmes invariants logiques.

Deux autres études qui nous semblent particulièrement intéressantes montrent que les adultes non scolarisés sont capables d'élaborer différentes notions mathématiques.

Un premier travail concerne le concept de groupement ; l'étude porte sur des ouvriers travaillant dans une usine de lait et chargés de l'inventaire des briques de lait en temps limité dans un local où les possibilités de mouvement sont très restreintes. Les briques étaient rangées en piles de même surface, de hauteur différente et accolées les unes aux autres. Il était très difficile de se déplacer au sein du local ; les ouvriers grimpaient sur des caisses pour observer les dernières rangées des piles et estimer alors leur hauteur.

Fahrmeier (cité in Nunes, 1992) dénombre des stratégies de comptage mettant en jeu l'utilisation des piles suivant leur hauteur comme nouvelles unités. Ils ont basé leur procédure de comptage sur les propriétés des caisses (leur hauteur) ce qui permet à la fois un inventaire plus rapide et plus précis.

Une autre étude (Saxe et Moylan cité in Nunes, 1992) révèle la capacité des adultes non scolarisés Oksapmin (population indigène de Papouasie en Nouvelle Guinée) à faire des inférences transitives avec leur système de mesure (utilisant les différentes partie du corps : bras, taille, etc.). Par exemple, un exercice proposé était de juger si deux sacs A et C étaient de même taille ; ils ne pouvaient pas comparer directement les deux sacs mais pouvaient les mesurer en utilisant une partie de leur corps B. Résoudre cet exercice consiste à faire un raisonnement mathématique de type : $A = B$ & $C > B \rightarrow C > A$. Ces travaux montrent que la plupart des Oksapmin adultes non scolarisés a réussi les exercices de ce type mettant en jeu la transitivité.

Ces trois exemples montrent que les capacités mathématiques des individus ne manquent pas de se développer dans la vie quotidienne et peuvent concerner à la fois des performances calculatoires, des concepts mathématiques ou encore des inférences logiques.

Toutefois, ces compétences s'exercent dans chacun des cas dans des situations spécifiques et sont mises en jeu de façon inconsciente. Si les adultes développent dans leurs activités quotidiennes des capacités mathématiques, celles-ci ne sont pas forcément transférables à d'autres situations. Il n'est par exemple pas évident que le compteur haïtien cité au début de cette partie résolve le problème proposé si l'on remplace les animaux par des animaux moins familiers ou si l'on remplace les villages par des villages non connus.

De plus, dans l'étude concernant les Oksapmin, il est précisé que les individus scolarisés réussissent plus rapidement que les autres les exercices comportant des inférences transitives. L'enseignement scolaire a donc un grand rôle dans le développement des compétences mathématiques, un tant soit peu décontextualisées ou utilisables dans une diversité de contextes.

Des travaux (Carraher cité in Nunes, 1992) montrent que si les différences entre adultes scolarisés et non scolarisés ne sont pas vraiment perceptibles dans la résolution de problèmes

[8] Brousseau, 1986

directs[9], elles le sont nettement dans la résolution de problèmes inverses[10]. Toutefois, comme il a été observé chez les enfants des rues au Brésil, certains adultes utilisent leurs propres méthodes (notamment émettre des hypothèses) pour résoudre des problèmes inverses en situation de travail (Schliemman & Carraher cité in Nunes, 1992) ; ces stratégies s'avérant performantes, il est alors difficile dans ces cas d'établir une relation entre les effets d'une scolarisation et les compétences mathématiques.

En ce qui concerne les problèmes d'addition et de soustraction, d'après Nunes, les stratégies de résolution scolaires et non scolaires dépendent des mêmes invariants logiques mais un apprentissage scolaire est nécessaire car il permet d'unifier les différentes catégories de problèmes (cf. chapitre1, section III) et de transférer des méthodes de calculs à un plus grand nombre de situations : *« schooling may be a source of learning about inversion, either through systematic practice using inversion in problem solving or through the introduction of symbolic systems that unify very different situations under the same symbols, like + and – »* (Nunes, 1992).

B. Une approche ethno-mathématique dans l'enseignement des mathématiques

Prendre en compte les diversités culturelles

Dans les centres de formation continue, les groupes d'adultes en « bas niveau de qualification » sont composés de cultures et parcours diversifiés. Ils disposent de savoirs et de savoirs faire différents qu'ils ont acquis grâce à leur culture et aux activités qu'ils ont pratiquées.

Permettre aux apprenants de partager ces savoirs au sein du groupe a un intérêt social et pédagogique : présenter sa « technique » peut ainsi aider à s'intégrer au sein d'un groupe (Girodet, 1996) et peut aussi se révéler très enrichissant du point de vue mathématique.

Nous avons en effet observé en Math Départ plusieurs techniques très astucieuses concernant l'addition et méritant d'être retenues. Lors de la résolution d'un problème, il s'agissait de calculer le prix de six tickets à 18F pour aller faire un tour de « grande roue ».

Différentes techniques d'addition ont alors été proposées par les adultes du groupe :

- des techniques basées sur la décomposition en unités et dizaines

(1)
```
      18
      18
      18
      18
      18
      18
60          48
     108
```

On calcule la somme des unités et des dizaines séparément et on fait ensuite la somme des deux

[9] Dans la classification de Vergnaud (1982), ces problèmes correspondraient à ceux dont l'inconnue a un statut d'état final (cf.l'apprentissage du nombre).

[10] Dans la classification de Vergnaud (1982), ces problèmes correspondraient à ceux dont l'inconnue a un statut d'état initial (cf.l'apprentissage du nombre).

- des techniques basées sur le regroupement

(2)

18
18
18
——
54
54
——
108

Cette technique est basée sur la propriété a+a+a+a+a+a = 2 × (a+a+a)

(3)

18
18
——
36
36
36
——
108

Cette technique est basée sur la propriété a+a+a+a+a+a = 3 × (a+a)

- des techniques basées sur le regroupement et la décomposition en unités et dizaines

(4) 18
18 16

18
18 16

18
18 16
48
6
108

On calcule unités et dizaines séparément : on calcule d'abord les unités en regroupant les termes deux par deux.

- la technique d'Amina

(5) 18 2
18 2
18 2
18 2
18
1
——
108

Amina décompose 8 en 2+2+2+2 qu'elle répartie avec les autres 8 disponibles pour « faire 10 ». Elle repère ensuite le nombre d'unités et le nombre de dizaines.

Toutes ces techniques reposent sur la structure de notre système de numération ainsi que sur l'associativité de l'addition. Ceci est très nettement perceptible si l'on décrit les techniques utilisées à l'aide des symboles mathématiques :

(1) 18+18+18+18+18+18 = (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) = (10+10+10+10+10+10) + (8+8+8+8+8+8) = 60 + 48 = 108

(2) 18+18+18+18+18+18 = (18+18+18) + (18+18+18) = 54 + 54 = 108

(3) 18+18+18+18+18+18 = (18+18) + (18+18) + (18+18) = 36 + 36 + 36 = 108

(4) 18+18+18+18+18+18 = (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) = (8+8) + (8+8) + (8+8) + (10+10+10+10+10+10) = (16+16+16) + (60) = 48 +60 = 108

(5) 18+18+18+18+18+18 = (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) + (10+8) = (8+8+8+8+8+8) + (10+10+10+10+10+10) = [(2+2+2+2) +8+8+8+8+8] + (10+10+10+10+10+10) = [(2+8)+(2+8)+(2+8)+(2+8)+8] + (10+10+10+10+10+10) = 8 + (10+10+10+10+10+10+10+10+10+10) = 108

Le fait de rencontrer plusieurs techniques de calcul peut non seulement permettre le choix d'une technique mieux adaptée à soi, mais peut aussi permettre de comprendre mieux la structure de numération sous-jacente ; entre autres le groupement par dix et une écriture chiffrée de position. Nous pouvons de plus remarquer le jeu sur les compléments à 10 et le rôle des doubles dans les stratégies présentées qui sont des techniques que l'on retrouvera chez ces adultes.

Vers un apprentissage contextualisé

Pour enseigner une notion mathématique, il peut être utile d'analyser les différentes situations où les apprenants ont pu aborder cette notion : *« When a teacher faces a class with the aim of teaching a particular concept, the teacher must ponder wether the pupils are likely to have used the concept in everyday life. Until more research is available on this subject, teachers will have the task of looking for everyday uses of the concept and attempting to analyse the logical invariants that underlie everyday concepts and procedures. »* (Nunes, 1992)

En effet, les études ethno-mathématiques montrent que les individus peuvent réinventer des structures mathématiques dans des situations particulières : il paraît alors intéressant d'utiliser ces savoirs déjà construits.

Pour des tâches a priori équivalentes mais présentées dans des contextes différents, les personnes ayant peu fréquenté l'école n'affichent pas les mêmes performances : le choix des contextes des exercices mathématiques semble très important et ceci d'autant plus pour restaurer la confiance en soi dès le départ. Que ce soit pour étendre des savoirs déjà construits, faire prendre conscience de la structure de certains concepts mathématiques ou enseigner de nouvelles connaissances, il parait nécessaire, chez ce public, de donner du sens aux situations que l'on propose et d'introduire les notions mathématiques sous un contexte privilégié. Par exemple, chez les enfants des rues brésiliens, en jouant au marchand, chez les bergers en faisant référence à leur troupeaux, etc.

Puis, la rencontre avec plusieurs problèmes approchant le même concept mais dans des situations différentes permettrait, selon une hypothèse de Nunes, d'enrichir ce concept et de pouvoir aborder les invariants logiques le régissant.

Nous allons utiliser cette approche pour étudier les questions relatives à la conceptualisation et à la mise en place d'une procédure de résolution, en travaillant avec les stagiaires du CUEEP sur une même catégorie de problèmes dans des contextes différents.

V. Problématique

Durant les premières séances passées au CUEEP, nous avons observé des difficultés :

- au niveau psychologique et social :

- des sentiments d'échec, des problèmes de découragement, d'abandon et de confiance en soi ; « je ne saurai pas apprendre », « je n'y arriverai pas », « je ne comprends rien » ;

- des problèmes de rigidité, de difficultés à remettre en question leurs connaissances.

Nous avons aussi noté des problèmes de dévolution[11], liés au rapport que les adultes entretiennent avec les mathématiques ou la situation d'enseignement. Ceci est marqué par :

- la passivité de certains ;

- une volonté pour d'autres d'accéder vite et directement au résultat ; ils trouvent rapidement « une » solution en demandant alors à l'enseignant si « c'est bon » sans prendre le temps de réfléchir au problème.

Les problèmes effectués en séance sont pour la plupart contextualisés ; ces contextes permettent à l'adulte d'entrer plus facilement dans la situation. Néanmoins, ils peuvent créer des blocages quand les adultes ont un rapport personnel ou affectif trop proche avec l'objet d'étude ou au contraire quand ils ne connaissent pas l'existence de l'objet.

Leur système de compréhension est fondé sur les représentations qu'ils se sont construites au cours de leur vie et qu'ils refusent quelquefois de remettre en cause pour évoluer. Par exemple, dans le problème des cibles (cf. annexe), Jean Serge « savait » qu'une flèche valait 15 points et refusait tout autre valeur. Ils attribuent des prix, des valeurs aux objets de la vie quotidienne qu'il est parfois difficile de remettre en question.

- au niveau cognitif et mathématique.

Dans la résolution de problèmes en séance, nous avons remarqué :

- des problèmes dans la compréhension de l'exercice souvent liés aux difficultés à lire, à saisir la logique et l'implicite des supports (tableau, dessin, etc.) ;

- des difficultés au niveau calculatoire selon le type d'opération et le nombre d'opérations à effectuer ;

- des difficultés à saisir une situation dans son ensemble, à sélectionner les éléments pertinents, à faire des relations entre les données.

Le niveau de lecture et d'écriture est faible dans l'ensemble, ce qui représente un obstacle majeur dans la compréhension et dans la résolution des problèmes écrits. Un exercice écrit est bien sûr lu à voix haute mais les informations s'oublient vite et il est alors difficile pour les adultes illettrés de les retrouver. En outre, ils ne peuvent pas effectuer d' « aller-retour » entre l'énoncé et la question posée comme nous le faisons lorsque nous résolvons un exercice.

La difficulté calculatoire est de plus un grand obstacle dans la résolution des problèmes ; en passant du temps et en concentrant son énergie sur une opération à effectuer, ils en oublient le sens et perdent le fil du problème. Il nous est fréquemment arrivé de constater qu'à la suite d'une opération, ils ne pouvaient plus expliquer pourquoi ils l'avaient effectuée ou le sens de celle-ci.

[11] Brousseau, 1986

Ces premières observations de stagiaires du CUEEP nous ont amenés à nous poser un certain nombre de questions, qui ont évolué au fur et à mesure de nos observations mais aussi des recherches bibliographiques que nous faisions parallèlement et de notre formation en didactique.

Quelles variables mettent en difficultés ou accroissent la compréhension et la dévolution d'une situation mathématique donnée chez un public illettré?

En prenant appui sur l'approche ethnomathématique, nous voulions tout d'abord étudier l'influence des contextes dans la dévolution et la résolution de situation problèmes.

Nous désignons par contexte :

- l'action, le lieu et l'objet de l'exercice : dans les magasins, au cinéma, les glaces, etc.

- les grandeurs : prix, masses, longueurs et les unités de ces grandeurs : euros, kg, mètres, etc.

Puis, nous nous sommes aperçus que la compréhension d'un problème ne pouvait être étudiée indépendamment du support en jeu. Nous appelons support la façon dont on énonce un problème : tableau, dessin, texte, etc.

Ainsi, afin de remédier à l'obstacle de la lecture dans la compréhension du problème, nous avons réalisé des problèmes dans lesquels les informations sont représentées à l'aide de dessins et de chiffres. Les travaux concernant le nombre et l'approche ethno-mathématique montrent de plus que la façon de raisonner dépend du contexte et de la manière dont on énonce l'exercice.

Quel est l'effet de la représentation d'un problème au niveau du raisonnement ?

Nous avons alors commencé à faire travailler les stagiaires sur quelques exercices mathématiquement équivalents, en variant supports et contextes. En les observant, nous avons remarqué que les nombres en jeu pouvaient aussi influencer leurs procédures de résolution.

Comment les nombres, le support et le contexte agissent-ils sur les procédures de résolution utilisées par les adultes ?

Nous avons donc travaillé différents exercices de même type mathématique en variant les nombres en jeu, les supports et les contextes, et en corrigeant les exercices à chaque séance.

Comment la rencontre avec divers contextes peut contribuer à la conceptualisation ? Comment les connaissances construites dans des situations particulières peuvent-elles s'utiliser dans d'autres situations ? Un transfert des stratégies de résolution vers l'abstraction est-il possible ?

CHAPITRE 2

DISPOSITIF ET MÉTHODOLOGIE

I. Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter le contexte dans lequel se situe notre étude ainsi que la méthodologie que nous allons appliquer pour tenter de répondre aux questions que nous nous sommes posées.

En France, il existe différents systèmes de formation pour adultes dont les structures et les objectifs pédagogiques ne sont pas équivalents. Les APP (Atelier de Pédagogie Personnalisée) sont par exemple basés sur l'autonomie des stagiaires. Il existe aussi des centres de formation dans lesquels un seul formateur assure l'ensemble des disciplines (maths, français, ...) pour un groupe. Nous réalisons notre étude dans le cadre du **CUEEP de Tourcoing**. Ce centre a une structure différente de celle des autres centres cités ci-dessus et il nous semble tout d'abord important de la présenter sous ses différents angles (type de stagiaires, formateurs, cours proposés) ainsi que de préciser les niveaux (Math Départ et Math de Base) dans lesquels nous allons effectuer nos observations.

Les travaux didactiques portant sur les adultes dits de « bas niveau de qualification » étant peu nombreux en mathématiques, nous avons choisi de mener une **étude exploratoire** visant à analyser un certain nombre de difficultés rencontrées par ces adultes lors de la résolution de problèmes. La problématique définie, ainsi que le caractère très diversifié de ces personnes, nous ont conduit à effectuer une **étude qualitative** basée sur un certain recueil de données :

- **des observations « naturalistes »** ; nous avons observé quelques séances afin de nous familiariser avec ce domaine et repérer les difficultés de public.

- **des entretiens individuels** visant à situer, au niveau social et mathématique, les sujets qui participent à ces séances ;

  Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à quatre stagiaires du CUEEP pour des raisons socioculturelles et mathématiques :

  - Djoer est algérienne, n'a jamais été à l'école, ne sait pas lire et a un rapport au nombre difficile.

  - Véronique est sénégalaise, n'a jamais été scolarisée, apprend à lire cette année, et a un bon rapport au nombre.

  - Jean-Serge est français, il a été scolarisé jusqu'à 8 ou 9 ans et a un rapport au nombre difficile.

  - Claude est français et son parcours scolaire n'est pas clair. Il ne sait pas lire mais a un bon rapport au nombre.

  Les données que nous avons recueillies sur Djoer et Jean-Serge n'étant pas suffisantes pour notre étude, nous nous centrerons sur Claude et Véronique.

  Nous présenterons dans ce chapitre le questionnaire, visant à cerner de façon plus précise le rapport au nombre de ces adultes, en précisant les raisons de nos choix d'exercices. Le rapport de nos entretiens sera exposé dans le prochain chapitre.

- **des séances collectives** construites avec un objectif précis visant à étudier l'influence du contexte et des représentations.

  Afin de recueillir des données les plus représentatives et les plus riches possibles en ce qui concerne l'apprentissage des adultes en situation d'illettrisme, nous avons travaillé en groupe une quinzaine de problèmes de même type mathématique pendant une période de quatre mois. Nous avons choisi des problèmes portant sur la résolution de systèmes linéaires par des méthodes arithmétiques car ce thème offre une large catégorie d'exercices permettant de travailler le raisonnement et une grande diversité dans le choix des contextes et des représentations sémiotiques dont nous voulons étudier l'influence. Ainsi, ces problèmes visent à analyser l'influence des contextes et des représentations dans la compréhension et la résolution d'un problème, les difficultés rencontrées, les progrès effectués d'une séance à l'autre, les liens établis d'une situation à une autre et en particulier les capacités de transfert vers des exercices plus abstraits.

Il convient donc dans ce chapitre, de préciser les caractéristiques mathématiques de ces problèmes puis de présenter et de justifier l'organisation de la succession des tâches que nous avons adoptée.

- **une évaluation** des connaissances construites durant les séances.

  Pour tenter de cerner ce qu'ils ont retenu de la structure de nos problèmes, nous leur avons demandé de construire chez eux des problèmes similaires aux nôtres mais avec des données personnelles. Nous les avons enfin interrogés sur les difficultés qu'ils éprouvaient dans la résolution de nos problèmes.

II. Le contexte du CUEEP

A. Le CUEEP de Tourcoing

Le CUEEP, centre universitaire-économie d'enseignement permanent, se divise en quatre établissements, répartis dans la région du Nord-pas-de-Calais ; à Lille, à Villeneuve d'Ascq, à Sallaumines et à Tourcoing.

Le CUEEP accueille tout type de public ; les personnes bénéficiant d'allocations (plan PARE[12]), les mères de famille, les retraités, les salariés en formation et autres. Pour être admis, il suffit d'avoir plus de seize ans et ne plus être scolarisé depuis un an minimum.

La gratuité des formations est accordée jusqu'à un certain niveau.

Les objectifs pédagogiques sont divers : préparation d'un diplôme (CFG[13], brevet, DAEU[14]), remise à niveau, professionnalisation et autres.

A Tourcoing, l'enseignement proposé va du niveau VI[15] au niveau DAEU.

Il y a entre 600 et 700 stagiaires dans l'année et environ 80 formateurs.

Des conseillers sont également présents pour accueillir le public, les aider dans le choix de leur formation, les inscrire aux cours et faire le suivi de leur formation.

Il existe au CUEEP différentes activités : les cours, les ateliers, le tutorat et le CURE.

Les cours proposés sont modulaires : ils suivent un parcours pédagogique très structuré en niveaux. Le français, les mathématiques, l'anglais, l'informatique, l'économie, l'institution politique et sociale, les cours de citoyenneté y sont notamment enseignés.

Les ateliers (arts plastiques, jeux d'écriture, logique et autres) sont des activités transversales et n'ont pas de lien direct avec la montée en niveau. Leur objectif est de redonner goût aux disciplines et d'aider à progresser dans celles-ci.

Le tutorat permet une aide au travail ; les stagiaires y effectuent leur travail personnel, en demandant éventuellement de l'aide au tuteur.

Le CURE (centre universitaire de ressources éducatives) est un lieu où les adultes peuvent venir travailler et faire leur travail personnel ; des livres et des ordinateurs y sont disponibles et des tutrices sont présentes pour les conseiller.

Aucun cours n'est obligatoire mais certains sont nécessaires pour obtenir des diplômes. Les adultes sans contrat sont libres dans le choix de leur emploi du temps. En revanche, les personnes bénéficiant de l'ARE (allocation retour emploi) ou de l'AREF (allocation retour emploi formation) suivent 20 heures de formation par semaine (dont 12 à 15h de cours).

---

[12] PARE : Plan d'Aide au Retour à l'Emploi.

[13] CFG : Certificat de Formation Générale.

[14] DAEU : Diplôme d'Accès aux Etudes Universitaires.

[15] Niveau VI : sorties du premier cycle du second degré (6ème, 5ème, 4ème) et des formations pré professionnelles en un an (CEP, CPPN et CPA).

B. Les niveaux Math Départ et Math de Base

L'enseignement des mathématiques s'effectue de façon modulaire au CUEEP ; une progression pédagogique est assurée du premier niveau Math Départ jusqu'à celui préparant le DAEU.

Nous effectuons notre étude dans le groupe Math Départ et dans le groupe lui succédant, Math de Base. Ces groupes sont, au moment de notre étude, dirigés par Jean-Pierre Leclere et Marie-Christine Liefooghe.

Les tableaux ci-dessous, établis par Leclere (Leclere, 2000), présentent les contenus mathématiques enseignés en Math Départ et en Math de Base.

	Math Départ
3 objectifs principaux	La numération. T(extes),T(ableaux), G(raphiques). La géométrie élémentaire.
La proportionnalité	Elle se situe au niveau cumulatif, l'opérateur est + a ou – a (a est un nombre entier). Table à pas constant. On donne une structure à (N ; +).
La mesure	La mesure dans un rapport entier avec la grandeur "unité choisie". La notion d'encadrement est précisée. Les instruments (le double décimètre, la balance, le verre ou la bouteille). La notion d'égalité est affirmée
Le graphique et le repérage	La lecture se fait sur une graduation portant sur des grandeurs entières. Le repérage d'un point sur une graduation et la notion de milieu est un objectif. La notion de "pas" est plus utile que les unités "classiques". Connaître les carrefours "cases" et les carrefours "lignes".
Le problème	Le choix de la réponse est proposé. L'évaluation des résultats se fait par une somme (dans un sens ou dans un autre).
La géométrie	Le repérage plan. Le repérage spatial. La lecture et la création d'un schéma.
Les concepts	La numération. La base 10. La grandeur unité. Le milieu par le calcul et en géométrie. Le périmètre.
La gestion de données	Le tableau 2 lignes ou à 2 colonnes.
Activités numériques	L'addition en colonnes et en chaînes.
Le vocabulaire	Celui de comparaison Celui de classification. Celui de formulation .Celui du repérage.
Algorithmes	Addition-soustraction.

Gestion de formules	Du type P = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 x 5 (4 ; 5 fois)

	Math de base
4 objectifs principaux	La numération. T(extes),T(ableaux), G(raphiques). Les trois opérations + , - , x. La géométrie élémentaire.
La proportionnalité	Elle se situe au niveau cumulatif, l'opérateur est x a avec a nombre entier). Table à pas constant. On donne une structure à (N ; + , x).
La mesure	La mesure dans un rapport décimal avec la grandeur "unité choisie". La notion d'encadrement est acquise. Les instruments (le double décimètre, le compas, les masses). La notion d'égalité est confirmée.
Le graphique et le repérage	La lecture se fait sur 2 axes parallèles dont les graduations sont des grandeurs entières. Placer un point. Le repérage peut se faire avec des " pseudo" décimaux (4cm2mm). La présentation du repérage en axes orthogonaux est faite.
Le problème	Les textes écrits sont courts. Il n'y a qu'une opération mais le choix est à faire. Donner du sens aux opérations est l'objectif des problèmes proposés.
La géométrie	Des reproductions en vraie grandeur, en grandeur réduite ou agrandie doivent être réalisées.
Les concepts	La notion de multiples et sous-multiples. Les unités de grandeur. Le calcul approché. L'aire par pavage.
La gestion de données	Le tableau multiligne et multicolonne.
Activités numériques	Le calcul mental Les chaînes logiques Inversion de calculs Jeux numériques.
Le vocabulaire	Celui de la numération. Etablir un glossaire est conseillé.
Algorithmes	Soustraction et multiplication
Gestion de formules	Du type $P = 10^P \times a$ et $P = a \times 10^P$

Voici en résumé, les notions développées en Math Départ et en Math de Base que nous avons observées lors des visites :

- Au niveau géométrique :

- En Math Départ les exercices proposés visent à travailler le repérage sur le plan et dans l'espace, à développer les notions de milieu et de périmètres, à reproduire des figures à l'aide d'instruments (compas, équerre, règle).

- En Math de Base, le travail effectué correspond essentiellement à des reproductions (réductions, agrandissements, symétries axiales) de figures construites sur une feuille quadrillée, et de développer alors le concept d'aire par pavage.

- Au niveau numérique :

- L'enseignement proposé en niveau Math Départ est centré sur l'étude du nombre entier ; numération en base 10, décomposition arithmétique des nombres ainsi que sur la structure additive des entiers. Les problèmes effectués en séances sont de toutes catégories mais les solutions proposées ne font intervenir que les notions additives. Par exemple, pour calculer le prix de douze parapluies à 4 euros pièce, on procédera comme ceci : 4 + 4 + ... +4 (12 fois).

- Le groupe Math de Base a pour objectif d'acquérir la maîtrise des trois opérations : addition, soustraction et multiplication, au niveau algorithmique mais surtout du point de vue de la signification dans différents problèmes, et aussi d'introduire les décimaux.

Dans les groupes, les problèmes sont proposés suivant différents registres : texte, tableau, graphique.

Notre étude porte plus particulièrement sur l'aspect numérique. Nous proposons, dans la prochaine partie, une analyse a priori du questionnaire sur le nombre que nous avons construit.

III. Analyse a priori du questionnaire

Afin de cerner le rapport aux nombres et de connaître l'« histoire de vie » des adultes interrogés, nous nous entretenons avec eux, en alternant discussions et exercices mathématiques. Nous présentons dans cette partie l'analyse du questionnaire visant à mieux connaître leur rapport aux nombres ainsi que les questions relatives à leur parcours de vie.

A. Une histoire de vie

Pour parvenir à comprendre les habitudes de penser, de raisonner, les attitudes face aux problèmes proposés, les difficultés d'apprentissage, il semble essentiel, dans notre étude, de prendre en compte l'histoire personnelle de ces adultes. Nous les avons entre autre interrogés de façon informelle sur leur passé scolaire, leur structure familiale, leur vie professionnelle antérieure et leurs projets futurs, et nous avons essayé de comprendre ensemble comment ils ont développé leur rapport au nombre.

B. Questionnaire sur le rapport aux nombres

Connaître le rapport aux nombres de ces adultes est essentiel pour pouvoir analyser leurs difficultés dans les tâches que nous proposerons par la suite. En effet, des données numériques seront présentes dans chacune des situations et, selon la conception du nombre qu'ils ont, les problèmes proposés ne seront certainement pas traités de la même manière.

En nous appuyant sur les connaissances exposées dans la première partie sur l'apprentissage du nombre, nous avons ainsi créé un questionnaire, visant à cerner le rapport aux nombres des adultes interrogés.

Le questionnaire vise les connaissances portant sur le nombre, le calcul et la résolution de problèmes simples. Nous allons en particulier tester la connaissance de notre système de numération à travers des exercices où le raisonnement mathématique se situe à plusieurs niveaux et où les opérations et les relations font intervenir des connaissances structurelles de notre système numérique. Pour cela, il nous paraît important de jouer sur trois variables didactiques :

- **le type d'opération a priori en jeu** ; addition, soustraction, division, multiplication ;
- **la catégorie de problème pour une opération en jeu** au sens de la classification identifiée par Verschaffel et De Corte ; nous avons ainsi proposé trois exercices a priori de soustraction mais de catégories différentes, la soustraction étant l'opération centrale intervenant dans les problèmes que nous proposerons par la suite ;
- **la présence ou non d'un contexte** ; nous faisons l'hypothèse que les adultes ont un rapport privilégié avec l'argent en ce qui concerne le nombre et utilisons ainsi l'argent comme unité de valeur dans les exercices avec contexte afin d'étudier leur capacité à calculer dans la vie quotidienne.

  Nous avons essayé de renforcer la mise en situation de nos problèmes contextualisés en adaptant les problèmes aux préoccupations quotidiennes des adultes (choix de ce qu'ils achètent, pour quelle occasion ils achètent ce tee shirt, etc.). Cette mise en situation a pour but de percevoir les stratégies mises en route dans des problèmes de la vie courante, sans doute différentes de celles utilisées dans des situations sans lien a priori avec la réalité.

La plupart des exercices avec contexte sont posés et résolus oralement. Toutefois, quand nous sentons chez l'adulte interrogé des difficultés de compréhension du problème, nous lui écrivons les données numériques du problème et nous l'autorisons à effectuer les calculs par écrit suivant sa capacité à calculer mentalement telle que nous avons pu l'estimer dans les exercices précédents.

Pour les exercices sans contexte, nous avons utilisé des supports qui ont déjà été travaillés en cours afin de ne pas passer trop de temps à faire comprendre l'exercice, ce qui n'est pas le but de ce test. Nous présentons ces exercices par écrit.

Bien sûr, nous ne pouvons approcher de façon exhaustive le rapport au nombre de chacune de ces personnes, dans la mesure où les temps d'entretien sont limités et où l'utilisation des nombres par les adultes est multiple et variée. Nous avons dû faire des choix que nous détaillons ci-après.

Les nombres

D'après les instructions de 1945, *« pour avoir véritablement la notion d'un nombre, il faut pouvoir le reconnaître sous ses aspects divers,* ***connaître son nom, sa figure****, sa constitution »*. Ce type de connaissance est la base de tout apprentissage dans un cadre institutionnel car elle est nécessaire pour pouvoir communiquer entre professeur et élèves. Nous allons donc tout d'abord étudier les désignations écrites et orales des nombres.

La connaissance des nombres : désignations écrites et orales

Il s'agit de déceler les erreurs que pourraient commettre les adultes dans l'écriture et la lecture des nombres. Nous les avons pour cela interrogés sur des nombres représentant les difficultés de la numération écrite et orale française, en jouant sur trois variables didactiques :

- la taille des nombres ;
- la présence ou non d'irrégularités lexicales (comme avec 70, 92) ;
- la présence ou non de difficultés syntaxiques (présence d'un ou plusieurs zéros intermédiaires).

Voici les deux tâches que nous proposons :

Ecrire : 13, 25, 70, 92, 101, 353, 675, 1024, 100 003.

Lire : 7, 214, 03, 78, 1001, 1111, 372 000.

Les particularités des nombres que nous avons choisis sont présentées dans le tableau ci-après :

		caractéristiques lexicales			caractéristiques syntaxiques			taille des nombres				
					présence de 0			nombre de chiffres				
		noms particuliers	irrégularités	suit les règles	en début	intercalaire	à la fin	1	2	3	4	plus de 4
	13	×							×			
	25			×					×			
E	70		×				×		×			
C	92		×						×			
R	101					×				×		
I	353			×						×		
R	675		×							×		
E	1024					×					×	
	100 003					×						×
	7	×						×				
	214			×						×		
L	03	×			×							
I	78		×						×			
R	1001					×					×	
E	1111			×							×	
	372 000		×				×					×

Structure du système de numération

Il est évidemment impossible d'évaluer la connaissance du système de numération indépendamment de la faculté à lire, écrire, comparer, ordonner les nombres. Nous évaluons donc en quelque sorte la compréhension de la numération dans tous les exercices où des nombres interviennent. Notre choix ici est d'évaluer plus précisément son utilisation dans le comptage de collections d'objets, dans les calculs mentaux simples et dans quelques situations plus complexes de la vie quotidienne.

Compter une collection d'objets:

Nous proposons deux exercices dans lesquels nous avons joué sur la disposition spatiale des objets à compter.

Dans le premier, **nous éparpillons tout d'abord une cinquantaine de dés de couleurs différentes sur la table et nous demandons à l'adulte de nous dire combien il y en a.**

Le second exercice introduit une pré-structuration liée à la numération :

Nous disposons une quarantaine de dés de couleurs en deux rangées et nous leur demandons le nombre de dés sur la table.

Le but de ces exercices est d'analyser la technique de comptage des adultes interrogés et d'observer si celle-ci varie en fonction de la répartition spatiale des objets.

Nous distinguons trois techniques de comptage :

1. **Compter** les objets 1 par 1, ou 2 par 2, ou encore 5 par 5. Dans ce cas, c'est l'aspect **ordinal** de la numération qui entre en jeu.

2. **Regrouper les objets par paquets** de dix (ou autre) et compter ensuite le nombre de paquets ainsi que les objets restants pour en déduire le nombre total d'objets de la collection à dénombrer. Cette technique fait intervenir la structure de numération (regroupement par paquets) et est axée sur l'aspect **cardinal** de la numération.

3. Faire des sous-collections selon des critères non mathématiques ; classer par exemple les objets par couleur.

Il est évidemment possible de combiner ces trois méthodes. Nous pouvons par exemple commencer par organiser des sous-collections de l'ensemble des objets à dénombrer en les classant suivant leur couleur, puis dénombrer ces sous collections en formant des paquets de dix objets. Nous pouvons noter que, pour regrouper les objets par paquets dix, il faut justement avoir compté dix objets (en utilisant la première méthode).

Calcul mental : utiliser la structure de numération

Nous proposons trois exercices de calcul, de difficulté croissante.

Le premier exercice vise à cerner la capacité à ajouter des dizaines : nous faisons varier le nombre de dizaines à ajouter, et la place de celles-ci dans l'addition.

Le deuxième exercice vise à cerner la capacité à ajouter les nombres se terminant par 5 : nous faisons varier la place des nombres les plus grands dans l'addition (45+5 ne se calcule pas forcément de la même façon que 5+45).

Le troisième exercice vise à cerner la capacité à ajouter des nombres avec ou sans dizaine, en faisant varier la place des nombres les plus grands et la présence ou non de retenue.

Les additions sont posées par écrit en ligne et les adultes doivent effectuer ces opérations de tête.

1) Ajouter les dizaines :

10+20 : sans unités « ni à gauche, ni à droite »

23+10 : avec unités à gauche

10+47 : avec unités à droite et une seule dizaine à gauche

30+7 : sans dizaine à droite

50+41 : avec unités à droite et plusieurs dizaines à gauche

2) Ajouter des nombres se terminant par 5 :

25+25 : opération familière

15+25 : avec dizaines à gauche et à droite

45+5 : sans dizaines à droite

3) Ajouter des nombres avec unités et inférieurs à 100 :

53+12 : sans retenue et plusieurs dizaines à gauche

17+21 : sans retenue et plusieurs dizaines à droite

9+23 : avec retenue, un nombre sans dizaine à gauche et un nombre avec dizaines à droite

38+4 : avec retenue, un nombre à dizaines avec gauche et un nombre sans dizaine à droite

48+12 : avec retenue « ronde » et des nombres avec dizaines à gauche et à droite

NB : l'addition des unités « 9 et 3 », « 8 et 4 », « 8 et 2 » (dans les trois dernière opérations) n'est pas la compétence étudiée dans cet exercice ; nous avons ainsi choisi de mettre les chiffres les plus élevés en première position (cette position étant la plus facile).

Utilisation du système de numération dans des situations plus complexes :

Ces exercices visent à analyser la façon dont les adultes utilisent le système de numération dans des situations de la vie quotidienne où cette utilisation est moins triviale. Ces problèmes sont plus complexes mathématiquement : les deux premiers exercices mettent en jeu la notion de division et, le troisième, la notion de multiplication. Pour résoudre les exercices, il ne s'agit pas d'utiliser ces opérations mais d'utiliser la structure du système de numération.

Les exercices sont posés à l'oral, et nous laissons aux adultes le choix d'écrire les données.

1) « On vous donne 160 F en pièces de 10F, combien vous donne t-on de pièces ? »

Compétence visée : savoir extraire le nombre de dizaines d'un nombre à trois chiffres et sans unité dans un problème avec contexte.

2) « Vous allez au restaurant et vous payez l'addition de 123 F. Combien de pièces de 10 F devez-vous donner ? ».

Compétence visée : savoir extraire le nombre de dizaines par excès d'un nombre à 3 chiffres et à unités non nulles dans un problème avec contexte.

3) « J'achète douze stylos à 10 F pièce. Combien devrai-je payer ? »

Compétence visée : savoir que 10 dizaines correspondent à une centaine ou que x dizaines correspondent au nombre qui s'écrit : « x0 ».

Relations entre les nombres

« Le concept de nombre n'est séparable ni des liens qu'il entretient avec les situations à traiter, ni des opérations et des relations qu'il autorise » (Vergnaud)

Comparer :

Quel est le plus grand nombre des deux : 7 et 48 ; 16 et 21 ; 82 et 78 ; 1003 et 3000 ; 1114 et 2110 ; 1 403 749 et 800 479 ;

Nous avons joué sur deux critères permettant de comparer deux nombres :

- le nombre de chiffres des deux nombres à comparer.

- les valeurs des chiffres suivant leur position ; chiffres communs aux deux nombres, chiffres plus grand au niveau des unités, etc. Par exemple, pour 1114 et 2110, les chiffres correspondant aux dizaines et centaines sont identiques, 1114 a un chiffre des unités plus grand mais un chiffre des milliers plus petit que 2210.

Nous avons aussi joué sur la taille des nombres ainsi que sur les difficultés lexicales (comme par exemple 82) et syntaxiques (présence de 0 comme dans 1003) des nombres en jeu.

Le tableau ci-dessous caractérise les nombres à comparer en fonction des variables didactiques que nous avons choisies.

	les nombres à comparer ont le même nombre de chiffres	présence de chiffres communs	taille des nombres en jeu					difficultés relatives aux nombres	
			nombre de chiffres						
			1	2	3	4	plus de 4	lexicales	syntaxiques
7 et 48	non	non	×	×					
16 et 21	oui	non		×					
82 et 78	oui	non		×				×	
1003 et 3000	oui	oui				×			×
1114 et 2110	oui	oui				×			
1403749 et 800479	non	non					×	×	×

Ordre et connaissance symbolique du nombre

Nous testons la connaissance de la suite des nombres principalement dans le sens croissant mais en variant les pas et les points de départ.

Compter de 10 en 10 en partant de 0.

Compter de 5 en 5 en partant de 0.

Compter de 3 en 3 en partant de 0.

Compter de 10 en 10 en partant de 2.

Compter de 5 en 5 en partant de 3.

Nous testons le décompte à reculons avec un pas de 2, moins difficile.

Compter à reculons de 2 en 2 en partant de 18.

Décomposition arithmétique :

Le but de ces exercices est de cerner la connaissance structurelle du nombre. Nous posons pour cela des exercices avec et sans contexte, faisant intervenir des connaissances liées à la décomposition arithmétique des nombres. Les exercices sans contexte ont des supports connus des adultes ; ils ont déjà effectué des exercices du même type en « Math départ ».

Cependant, nous n'avons pas interrogé tous les adultes sur ces exercices, les capacités mises en jeu pour les résoudre étant inadaptées au niveau de certains d'entre eux.

0) Décomposition d'un nombre rond par des nombres se terminant par 5

« Trouvez quatre nombres qui se terminent par 5 pour faire 60 »

Cet exercice est très ouvert : il admet plusieurs solutions ((5, 5, 5, 45) ; (5, 5, 15, 35) ; (5, 15, 15, 25) ; (15, 15, 15, 15)) et n'indique pas de stratégie de résolution particulière.

Voici par exemple deux manières de résoudre cet exercice :

- diviser 60 par 4 ; nous obtenons alors la solution (15, 15, 15, 15).

- chercher trois chiffres se terminant par 5 dont la somme est strictement inférieure à 60 et en déduire la quatrième valeur ; par exemple (5, 15, 5) sont trois chiffres dont la somme fait 25, il manque 35 pour arriver à 60, c'est donc la valeur du quatrième chiffre.

Les exercices suivants portent sur les décompositions arithmétiques d'un nombre à deux chiffres. Pour tenter de cerner leur capacité en ce qui concerne la structuration arithmétique des nombres, il nous a semblé important de jouer sur trois variables didactiques :

- le chiffre des unités du nombre ciblé : « 0 » dans l'exercice 1, « 1 » dans l'exercice 2 et « 3 » dans l'exercice 3 ;

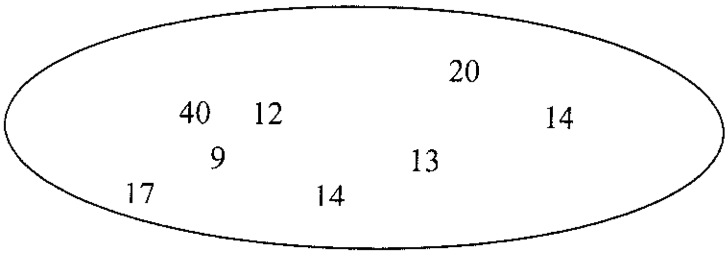
- le nombre de nombres à considérer pour décomposer le nombre ciblé : trois dans l'exercice 1, deux dans l'exercice 2, deux, trois et quatre dans l'exercice 3 ;

- le nombre de solutions possibles : deux dans l'exercice 1, une seule dans l'exercice 2, quatre dans l'exercice 3.

Ces exercices n'admettent a priori pas de méthode de résolution prédéfinie mais des stratégies peuvent cependant être mise en place ; nous allons en exposer quelques unes.

1) Décompositions d'un nombre rond par des nombres quelconques

« Faites 40 avec trois nombres se trouvant dans la bulle»



Deux solutions sont possibles : (12, 14, 14) et (9, 14, 17).

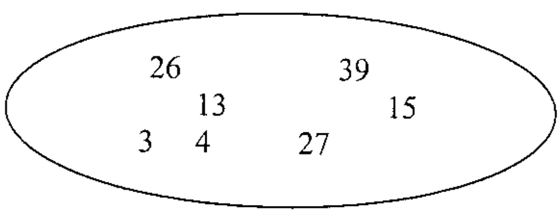
Une stratégie est d'assembler des nombres pour fabriquer des dizaines. La première solution peut être en effet repérée en fabriquant 10 à partir des unités de trois nombres : 2+4+4 = 10. La seconde solution consiste à faire 20 à partir des unités de trois nombres : 9+4+7 = 20. Dans les deux cas, il s'agit bien de trouver trois nombres dont la somme des unités est un multiple de dix.

De plus, pour pouvoir parvenir au résultat sans multiplier les essais, certains nombres peuvent être éliminés par leur taille : 40 et 20 (après avoir pris conscience qu'il n'est pas possible de faire 20 avec deux nombres contenus dans la bulle).

Il s'agit aussi de ne pas se laisser distraire par les perturbateurs numériques 13 et 17 (la décomposition 10 = 3+7 est plus évidente que 10 = 4+4+2).

2) Décomposition d'un nombre quelconque par deux nombres

« Faites 41 avec deux nombres se trouvant dans la bulle»



Dans cet exercice, une seule solution est possible : (26, 15).

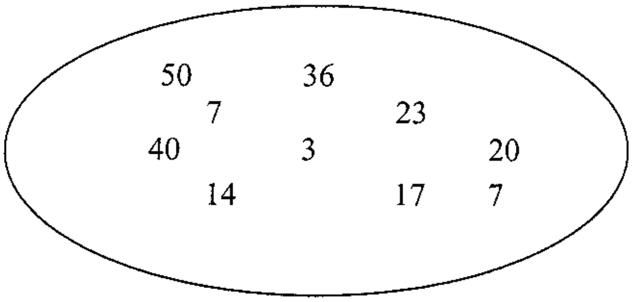
Une stratégie serait de repérer les nombres tels que la somme des unités fassent 1 ou 11.

Il existe deux couples satisfaisant cette condition : (26, 15) et (27, 4). Cette méthode s'avère donc très efficace.

Une autre méthode consisterait à éliminer les nombres un par un : 39 ne convient pas car il faudrait le nombre 2 pour obtenir 41, 27 non plus, pour 26, il faudrait 15 pour arriver à 41, ces deux nombres sont donc solution.

3) Décomposition d'un nombre quelconque avec plusieurs nombres

« Faites 53 avec 2, 3, 4 nombres se trouvant dans la bulle »



Dans cet exercice, il s'agit en plus d'analyser la conscience qu'a un adulte du fait qu'un nombre a diverses décompositions et de cerner les nombres sur lesquels il portera le plus son attention.

Les solutions de cet exercice sont :

- (50, 3) ; (36, 17) : décomposition de 53 avec deux nombres
- (36, 14, 3) : décomposition de 53 avec trois nombres
- (20, 23, 7, 3) : décomposition de 53 avec quatre nombres

Le chiffre « 3 » étant isolé, une stratégie consiste à trouver comment décomposer 50 avec un, deux et trois nombres. Nous pouvons alors utiliser des stratégies semblables à celles utilisées dans l'exercice 1 comme par exemple trouver des nombres tels que la somme des unités fasse 10. La solution (36, 17) ne peut pas être trouvée par cette méthode.

Une autre possibilité est de procéder comme dans le 2$^{\text{ème}}$ exercice et de trouver des nombres tels que la somme des unités fassent 3 ou 13.

Les exercices qui suivent sont mathématiquement de type différent : il s'agit de décomposer un nombre à deux chiffres à partir de la combinaison de deux ou trois nombres.

Nous avons joué sur la nature des nombres avec lesquels il faut décomposer le nombre ciblé. Dans l'exercice 4, nous avons utilisé des nombres de références : 10, 5, 2. Ce sont des nombres susceptibles d'être utilisés dans la vie courante en manipulant l'argent. Nous pouvons noter que notre système de monnaie contient implicitement la structure de notre système de numération. Dans l'exercice 5, les nombres en jeu (6 et 7) ne sont pas utilisés aussi fréquemment sous le contexte de l'argent (il n'existe de pas de billet ou de pièce de 6 € ou de 7 €) et la recherche risque en conséquence d'être moins évidente.

4) Décomposition simple sur un exercice avec contexte

« Vous vous achetez une radio à 49 €. Combien de pièces de 10 €, de 5 €, de 2 € allez-vous donner ? »

5) Décomposition plus complexe sur un exercice avec contexte

« Nous sommes maintenant dans un pays imaginaire où les pièces de 6 € et de 7 € existent. Vous devez donner 33 €. Combien de pièces de 6 € et de 7 € allez-vous donner ? »

Le calcul

Le calcul mental : utiliser les connaissances structurelles des nombres

Il s'agit d'utiliser ses connaissances du système de numération et de la structure arithmétique des nombres pour pouvoir effectuer de tête différentes opérations.

Compétences visées : savoir regrouper les nombres qui s'emboîtent, distinguer unités, dizaines, centaines.

Nous avons choisi un exercice sans contexte et un autre avec, en faisant varier le nombre d'opérations et les nombres.

Des études comme celle de Wheeler (1939) cité dans (Fayol, 1990) montrent que la représentation des calculs en ligne ou en colonne influence la manière dont les individus effectuent leurs calculs. Nous avons par conséquent proposé des additions suivant ces deux formes ; en ligne dans le premier exercice, en colonne dans le second.

Qui va effectuer les opérations dans sa tête ?

1) Combien font ?

7+4 ; 7+5+3 ; 11+10+13+2 ; 258+242 ; 21+33+54 ; 1030+3140 ; 18+53 ; 3+3+3+3+3 ; 14+102+6 ; 12+17+31+43+28.

Nous demandons aux adultes de ne pas poser les opérations pour effectuer les calculs.

La difficulté provient du nombre d'opérations, des nombres en jeu, et de la présence de retenues. Nous avons classé les opérations en fonction de ces trois critères.

Nombre d'opérations Nombres de chiffres	2	3	4 et plus
1	*7+4	*7+5+3	*3+3+3+3+3
2	*18+53	21+33+54	*12+17+31+43+28
3	*258+242		
4	1030+3140		
différents		*14+102+6	11+10+13+2

* : présence d'une retenue

Nous choisissons les opérations à donner en fonction du niveau des adultes.

2) « Vous invitez votre famille au restaurant ; le garçon apporte l'addition. Vous vérifiez la note car le prix vous parait suspect. Bien sûr, vous n'avez pas de stylo et devez compter de tête.»

56
40
23
32
11
——
173

Ici, nous avons contextualisé l'exercice pour analyser les connaissances mises en jeu lors d'un calcul quotidien.

Problèmes « de soustraction » suivant les différentes catégories de problèmes

Nous nous somme inspirés de la classification établie par Verschaffel et De Corte (1996) pour construire nos exercices. Nous avons ainsi choisi d'étudier l'aptitude à résoudre des exercices de catégorie différente mais correspondant tous a priori à une soustraction.

Les caractéristiques de chaque exercice sont exposées dans le tableau ci-dessous.

	Catégorie/situation	Statue de l'inconnue	Opération
Exercice 1	changement	Etat final	-
Exercice 2	combinaison	Sous ensemble	-
Exercice 3	comparaison	Différence d'ensemble	-

1) « Vous avez 25 € en poche. Pour l'anniversaire de votre fils, vous achetez un tee shirt à 15 €. Combien vous reste-il ? »

2) « Nous décidons de partager nos économies. Vous avez mis 22 €. A nous deux, nous avons 40 €. Combien ai-je mis dans la cagnotte ? »

3) « Vous en avez marre d'arriver en retard et vous décidez donc de vous acheter une montre. Vous hésitez entre une montre à 70 € et une autre à 97 €. La dernière montre coûte combien de plus que la première ?

Dans les trois exercices, l'énoncé verbal ne suscite pas l'utilisation de la soustraction. Au contraire, dans le 3ème exercice, le terme « de plus » dans « la dernière montre coûte combien de plus que la première ? » incite plutôt à utiliser l'addition que la soustraction.

Niveaux des procédures

« Ce sont précisément les problèmes de recherche de la valeur d'un ajout (pour la soustraction) et les problèmes de groupement réitéré (pour la division) qui permettent le mieux de savoir si l'appropriation de ces équivalences est amorcée. Ces problèmes sont donc les meilleurs révélateurs du niveau conceptuel des enfants. » (Brissiaud, 2001)

Recherche de la valeur d'un ajout

« Vous avez 24 € en poche. Vous allez à la banque, au marché,..., et vous revenez finalement chez vous avec 66 €. Combien avez vous en plus à la fin de la journée ? »

Ce problème peut être résolu à plusieurs niveaux :

- au niveau 1 : une méthode consisterait tout d'abord à sortir 24 € de sa poche et à faire l'appoint jusqu'à 66 € en mettant cet argent de coté, puis de compter cet argent.
- au niveau 2 : il s'agirait par exemple de compter avec ses doigts ou par tâtonnements combien il faut rajouter d'argent pour aller de 24 € à 66 €.
- au niveau 3 : cette méthode plus experte consiste à poser la soustraction 66-24.

Problème de groupement réitéré

« **Nous avons 235 paquets de gâteaux. On veut faire des lots de 4 paquets avec ces gâteaux. Combien de lots peut-on former ? Y aura t-il des paquets de gâteaux en rabe ?** »

De même, il existe de nombreuses façons pour résoudre ce problème :

- au niveau 1 : à défaut d'avoir des gâteaux à disposition, il s'agirait de dessiner 235 gâteaux, de former des lots de 4 avec, et de compter le nombre de lots ainsi obtenus. Cette méthode est très difficilement réalisable dans cet exercice, compte tenu du nombre de gâteaux en jeu!
- au niveau 2 : *« une autre possibilité consiste à s'imaginer en train de former les lots tout en tenant compte des paquets restants (...) et effectuer ainsi une suite de soustraction de multiples de 4»* (Brissiaud, 2001) : 235-4=231, un lot est formé, 231-4=227, deux lots sont formés...si je forme encore dix lots, il me restera 227-40 =187 et ainsi de suite.

  Une autre possibilité est de procéder par essais ; 10 lots correspondent à 40 paquets, ce n'est pas assez, 20 lots correspondent à 80, 40 à 160, 80 à 320, c'est trop. 50 lots, c'est 200 paquets (50×4 ou 160+40 qui correspond à 10 lots plus 40 lots), ce n'est pas assez...
- au niveau 3 : il s'agirait de déterminer le reste et le quotient de la division 235 : 4.

IV. Analyse a priori des problèmes proposés

Nous avons choisi de travailler avec les stagiaires sur des exercices portant sur un même thème mathématique : ***la résolution d'un système d'équations par une méthode arithmétique.***

Nous appelons méthode arithmétique, l'ensemble des techniques utilisant les nombres entiers positifs comme support de résolution et non les symboles algébriques.

Ce type d'exercice, qui nous a été proposé par Jean-Pierre Leclere lors d'un entretien, nous a tout d'abord interpellé par sa complexité car nous le rapprochions alors à des problèmes algébriques : comment faire résoudre des systèmes linéaires à des adultes n'ayant jamais fréquenté l'école ?

Puis, en analysant plus finement ces exercices, nous nous sommes aperçus que ce type de problème se prêtait bien aux questions que nous nous posions ; ce thème est suffisamment riche pour faire varier à la fois contextes, représentations et valeurs numériques, et met en jeu du raisonnement ainsi que du calcul.

Ce thème étant de plus très vaste, nous avons choisi de nous centrer sur un type de système linéaire particulier, à deux ou trois inconnues et admettant une méthode générale de résolution arithmétique.

Nous proposons donc dans cette partie d'étudier différentes façons arithmétiques de résoudre un système d'équation à deux ou à trois inconnues, en dégageant les connaissances mises en jeu, puis nous présenterons le type d'exercice que nous avons retenu pour travailler avec les groupes. Enfin, nous exposerons la manière dont nous avons représenté nos problèmes et les variables didactiques que nous avons choisies pour organiser la succession de nos problèmes dans les séances.

A. Les systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

Un système à deux inconnues se présente algébriquement sous la forme suivante :

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Suivant les valeurs des paramètres a, b, c, d, e, f, ce système admet une, une infinité ou aucune solution. Nous allons présenter ces différents cas en nous restreignant au cas où a, b, c, d, e, f sont des entiers naturels.

1

1^{er} cas : si ae = bd

Si ce = fb

Exemple :

$$2x+2y= 24$$
$$x+y = 12$$

Alors le système admet une infinité de solutions : les couples (x ; y) satisfaisant la première ou la seconde équation ou encore les points appartenant à la droite d'équation ax+by = c ou dx+ey = f.

Est-il possible de comprendre qu'il existe une infinité de solutions à ce système de manière arithmétique ?

Contextualisons tout d'abord le problème :

Deux gâteaux au chocolat et deux tartes aux fraises coûtent 24 €.

Un gâteau au chocolat et une tarte aux fraises coûtent 12 €.

Combien coûte un gâteau au chocolat ? Une tarte aux fraises ?

Une méthode consiste tout d'abord à attribuer un prix à l'une des pâtisseries, par exemple le gâteau fait 7 € donc la tarte doit faire 5 € pour faire un total de 12 € et satisfaire les conditions de la deuxième ligne. Puis il s'agit de vérifier si ces valeurs satisfont celles de la première ligne : 7 + 7 + 5 + 5 = 24 € et de conclure alors que ces deux valeurs conviennent. Ensuite, il s'agit d'attribuer au gâteau une autre valeur ; par exemple si je suppose que le gâteau vaut 8 €, alors d'après la seconde ligne, la tarte vaut 4 € et 8 + 8 + 4 + 4 = 24 € donc ces deux valeurs conviennent aussi. Au bout de plusieurs essais, quelques personnes pourraient conjecturer que, finalement, on peut attribuer au gâteau au chocolat n'importe quel prix du moment que celui-ci soit inférieur à 12 €. D'autres peuvent s'apercevoir que si les conditions de la première ligne sont vérifiées (resp. de la deuxième) alors celles de la seconde (resp. de la première) le sont forcément aussi car il est normal de payer deux fois moins cher (resp. plus cher) lorsque l'on prend deux fois moins (resp. deux fois plus) de produits ; ainsi il suffit de trouver des valeurs satisfaisant les conditions de la première ou la deuxième ligne et il en existe de nombreuses !

Si ce $\neq$*fb*

Alors, le système n'admet pas de solution.

Exemple :

2x+2y = 3

x+y = 3

Si l'on contextualise cet exercice, il parait « évident » qu'il ne « marche » pas :

Deux croissants et deux baguettes coûtent 3 €.

Un croissant et une baguette coûtent 3 €.

Combien coûte un croissant ?

Mais, dans d'autres cas, l'absence de cohérence entre les deux équations peut être moins évidente :

Six croissants et deux baguettes coûtent 5 €.

Trois croissants et une baguette coûtent 3 €.

Combien coûte un croissant ?

S'il parait difficile de déceler l'erreur de cet exercice en utilisant la méthode par essais, il est toutefois toujours possible, en raisonnant un peu, de s'apercevoir que ce système est contradictoire. Par exemple, on peut déduire de la seconde ligne que si trois croissants et une baguette coûtent 3 €, alors six croissants et deux baguettes coûtent 6 €, ce qui ne correspond pas au prix indiqué en première ligne.

Le raisonnement employé « avec des mots » correspond en fait à exploiter l'équivalence algébrique entre les équations 3x+y=3 et 6x+2y=6.

$2^{ème}$ cas : si ae* $\neq$*bd

Alors, le système admet une unique solution.

Afin de simplifier les calculs, nous ne considérons que les systèmes où les paramètre a, b, c, d, e, f et la solution du système sont des entiers naturels.

Exemple :

$2x+4y = 10$ (1)

$3x+5y = 14$ (2)

En algèbre, il existe différentes méthodes pour résoudre ce type d'exercice parmi lesquels :

- la méthode par substitution ;

$x = (10-4y) : 2$	*on exprime x en fonction de y en utilisant la première équation*
$3\times(10-4y) : 2+5y = 14$	*on remplace x par sa valeur en fonction de y dans la deuxième équation*
$y = 1$	*on en déduit la valeur de y*
$x = 3$	*puis celle de x*

- la méthode par combinaisons ;

$3\times(1)\ \ 6x+12y = 30$	*on multiplie la première et la deuxième équation de façon à*
$2\times(2)\ \ 6x+10y = 28$	*avoir le même nombre de x*
$12y-10y = 30-28$	*on soustrait les équations ainsi obtenues pour en obtenir une ne contenant que des termes en y*
$y = 1$	*on en déduit la valeur de y*
$x = 3$	*puis celle de x*

- la méthode de Cramer, qui donne directement la valeur des solutions en fonction des paramètres du système ;

$x = (bf-ec) : (ae-bd)$

$y = (af-cd) : (ae-bd)$

Dans les systèmes d'équations à trois inconnues, ces trois cas sont aussi possibles ; nous ne les avons pas détaillé car ils sont plus compliqués et nous n'en avons pas besoin dans le cadre de notre étude.

Quels sont les systèmes d'équation que l'on peut résoudre par une méthode arithmétique et comment les résoudre ?

Quels pré-requis cela nécessite t-il ?

Les méthodes algébriques sont-elles « arithmétisables » ?

B. Les méthodes arithmétiques de résolution des systèmes d'équations

Définitions préliminaires

Nous commençons par préciser quelques définitions mathématiques afin de décrire les théorèmes en acte intervenant dans la résolution arithmétique des systèmes d'équations :

- Dans nos problèmes, nous manipulerons deux (pour les systèmes à deux inconnues) ou trois (pour les systèmes à trois inconnues) types d'objets. Par exemple, dans le problème « Les fruits », les types d'objets sont les fraises et les grappes de raisin. Des objets de même type ont même valeur, on dira qu'ils sont semblables.

- Les objets semblables sont représentés par un même symbole. Il est convenu que deux occurrences distinctes d'un même symbole représentent deux objets semblables différents.

- Les ensembles que l'on considère sont constitués d'une combinaison de ces objets.

- Si A est un ensemble et T un type d'objet, on note $n_A(T)$ le nombre d'éléments de A de type T.

- Soit A et B deux ensembles ; on dit que A est plus riche que B si pour tout type T, $n_A(T)$ est supérieur ou égal à $n_B(T)$.

- Deux ensembles sont comparables si l'un d'eux est plus riche que l'autre.

- Les ensembles A et B sont isomorphes si pour tout type d'objet T, $n_A(T)$ est égale à $n_B(T)$.

- Si A est plus riche que B, la différence A-B est un ensemble C tel que, pour tout type T, $n_C(T) = n_A(T) - n_B(T)$

Nous pouvons maintenant aborder les connaissances mises en jeu dans les différentes méthodes arithmétiques de résolution des systèmes d'équations.

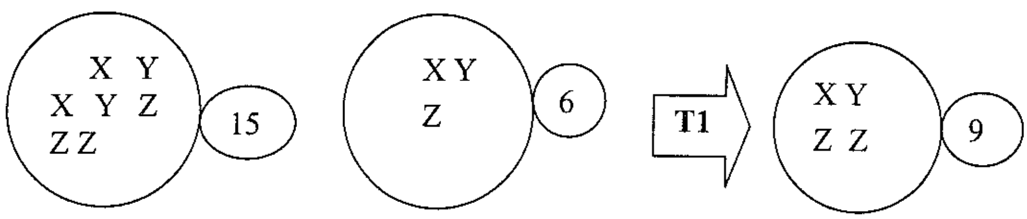
Les connaissances mises en jeu

La résolution des systèmes d'équations à deux ou trois inconnues met en jeu différentes sortes de connaissances :

- des connaissances implicites et en particulier des théorèmes en acte (Vergnaud, 1990)

T1 : La valeur de la différence de deux ensembles « séparés » et comparables est égale à la différence des valeurs de ces deux ensembles.

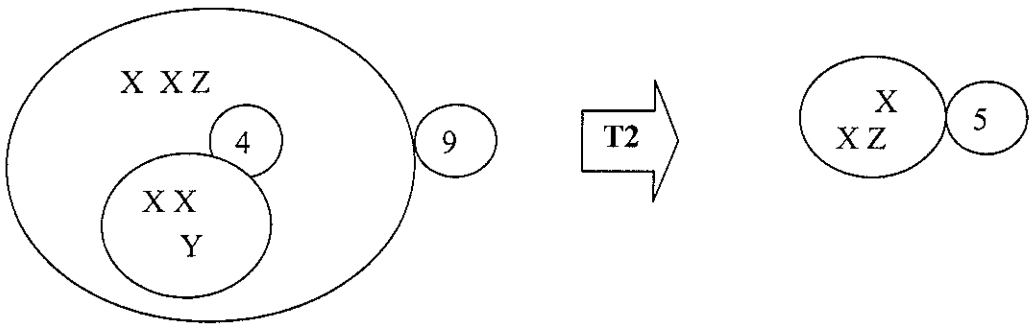
Exemple :



On voit tout de suite que le premier ensemble est plus riche que le deuxième. Ces ensembles sont donc comparables et la valeur de la différence de ces deux ensembles est la différence des valeurs associées aux ensembles.

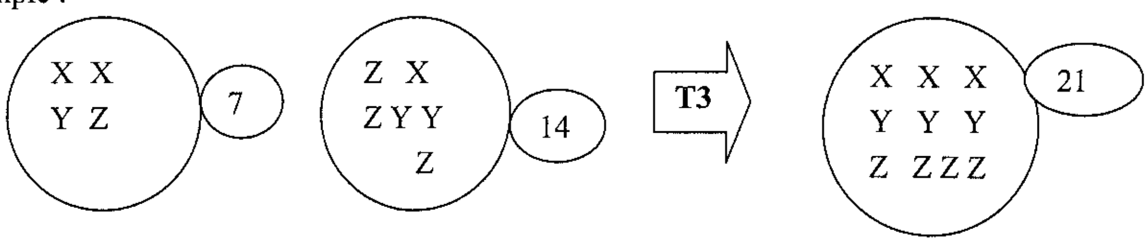
T2 : Si C, D, E sont des ensembles tels que $E = C \cup D$ avec $C \cap D = \emptyset$, alors M(C) = M(E)-M(D), où M(A) désigne la valeur associée à l'ensemble A.

Exemple :



T3 : La valeur associée à l'union de deux ensembles disjoints est égale à la somme des valeurs associées à ces ensembles.

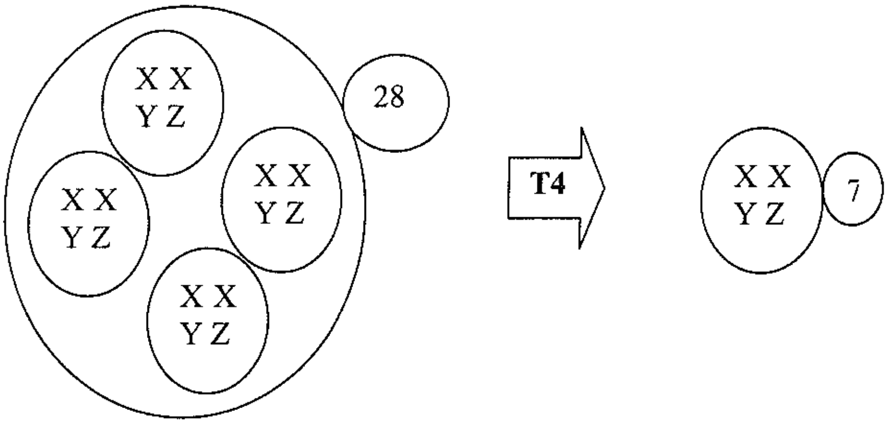
Exemple :



Remarque : les deux premiers ensembles sont bien disjoints dans la mesure où l'on considère chaque élément comme unique.

T4 : si la valeur associée à l'union de k ensembles isomorphes est égale à v, alors la valeur d'un ensemble est égale à v/k.

Exemple :



- **des connaissances explicites**

  Les quatre opérations arithmétiques

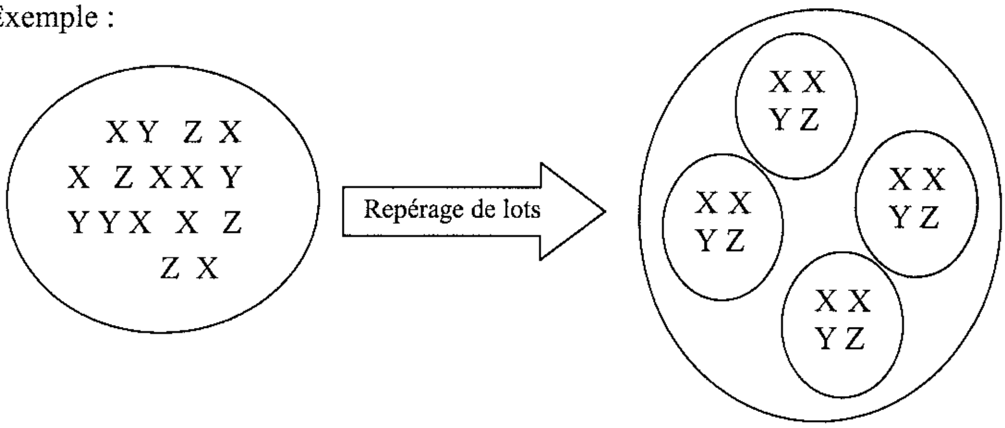
- des processus cognitifs :

  -comparaisons de dessins

  -repérage de lots ou de sous collections

  -construction de représentations

Exemple :



Les différentes méthodes de résolution que nous allons présenter utilisent certains de ces savoirs dans un ordre différent.

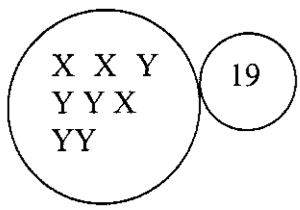
Exemples de résolutions arithmétiques de systèmes d'équations à deux inconnues

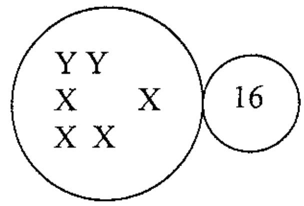
Exercice 1 : Résoudre

$3x+5y = 19$

$4x+2y = 16$

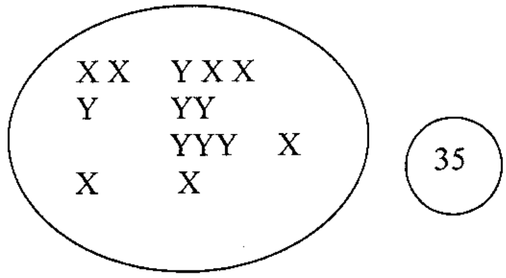
Nous proposons une nouvelle représentation sémiotique de cet exercice, mieux adaptée à une résolution de type arithmétique et plus proche de ce qui sera utilisé avec les adultes :



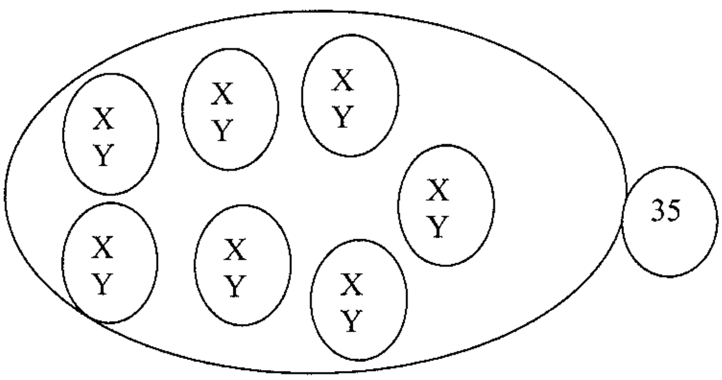


Voici une méthode arithmétique pour résoudre ce système, c'est-à-dire trouver les valeurs de X et Y :

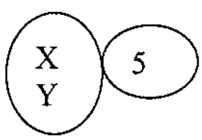
- Faire l'union des deux ensembles et utiliser T3 :



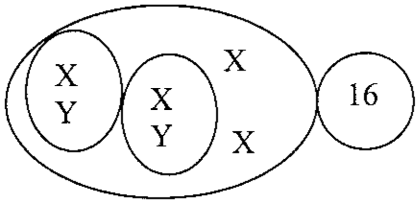
- Partager un ensemble en sous collections identiques



- Utiliser T4 :



- Chercher où intervient ce nouvel ensemble dans les ensembles de départ



-Utiliser T2 pour en déduire la valeur de X.

X X = 16-10 = 6

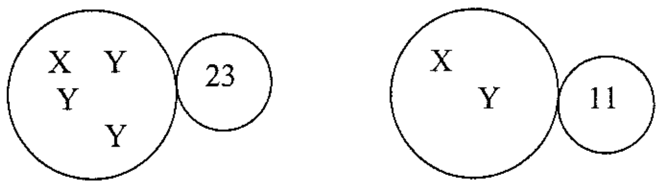
X = 3

- Utiliser T2 pour en déduire la valeur de Y

Y Y = 16 – 12 = 4
Y = 2

Exercice 2 : Résoudre
x+3y = 23
x+y = 11

Problème arithmétique



Résolution arithmétique

- Comparer les ensembles

Dans le premier ensemble, il y a Y Y de plus que dans le deuxième.

- Utiliser T1 pour en déduire la valeur de cette différence

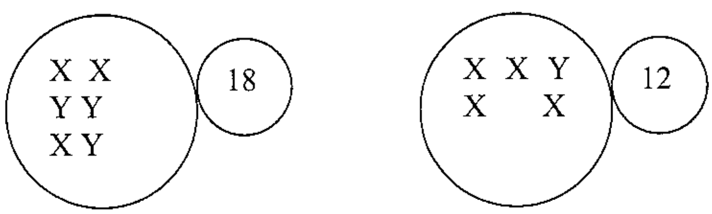
Ainsi, Y Y= 23-11 = 12.
Donc Y = 6

- Utiliser T2 pour déduire la valeur de l'autre objet

X = 11-6 = 5

Exercice 3 : Résoudre
3x+3y = 18
4x+y = 12

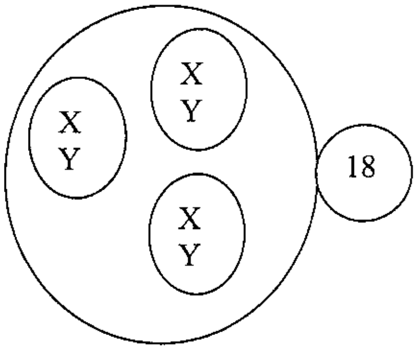
Problème arithmétique



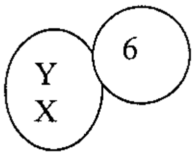
Résolution arithmétique

L'union des ensembles ou leur comparaison ne permettent pas ici a priori de déduire des informations pertinentes. Il s'agit ici de :

- Partager le premier ensemble en sous collections



- Utiliser T4 pour en déduire la valeur d'une sous-collection



- Comparer cette nouvelle collection avec le second ensemble

Il y a X X X en plus dans le second ensemble

- Utiliser T1 pour en déduire la valeur de X

X X X = 12-6 = 6

Donc X = 2

- Utiliser T2 pour en déduire la valeur de Y

X X X X =8

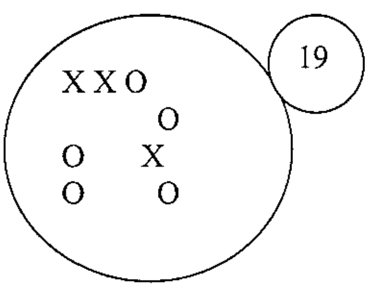
Donc Y = 12-8 = 4

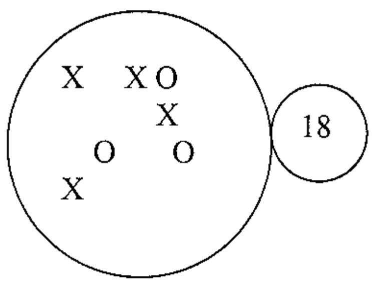
Exercice 4 : Résoudre

$3x+5y = 19$

$4x+3y = 18$

Problème arithmétique (on note ici Y avec O pour mieux distinguer les deux objets)





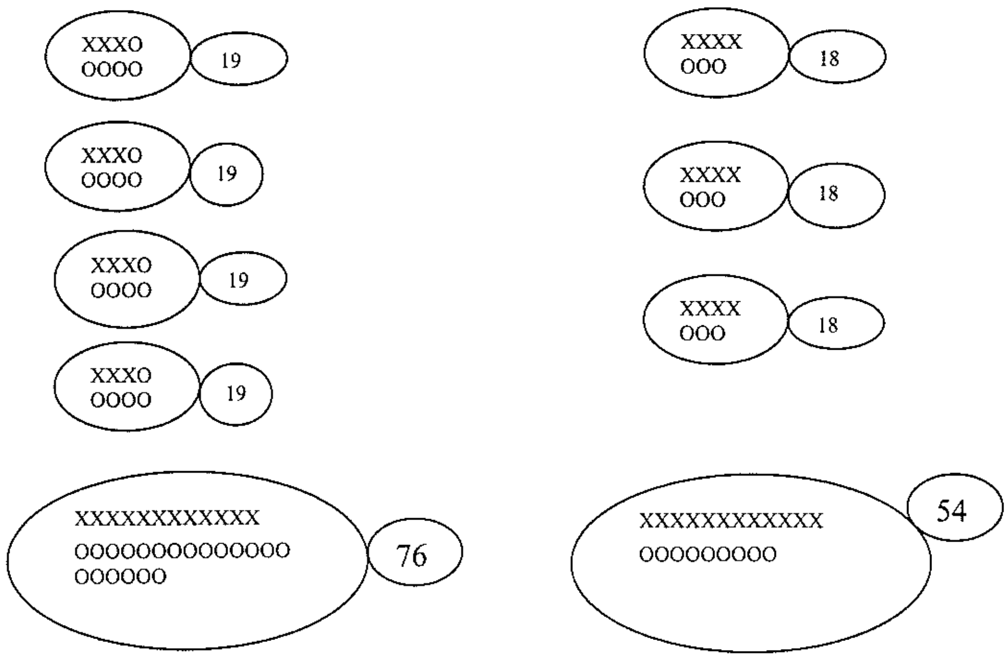
Résolution arithmétique

Le but est de trouver les valeurs des croix et des ronds.

Quand la comparaison directe entre les deux ensembles de départ, l'union de deux ensembles et le partage en sous collections ne donnent pas d'informations pertinentes, une stratégie marche toujours ; celle qui est basée sur la méthode algébrique des combinaisons.

Voici donc une version arithmétique de la méthode des combinaisons :

- Construire de nouveaux ensembles « comparables »



On part des deux ensembles de A 

et B 

que l'on considère séparément.

Il s'agit de trouver le nombre d'union n de A et m de B à effectuer pour que les ensembles $\underbrace{A \cup A ... \cup A}_{\text{n fois}}$ et $\underbrace{B \cup B ... \cup B}_{\text{m fois}}$ soient comparables.

Plus précisément, il s'agit d'obtenir de nouveaux ensembles contenant le même nombre de croix ou de ronds.

Puis, à partir de ces deux ensembles, on peut engager une procédure de résolution analogue à celle présentée dans l'exercice 2 :

- Comparer les deux ensembles
- Utiliser T1 pour en déduire la valeur de l'objet O
- Utiliser T2 pour en déduire la valeur de l'objet X

La difficulté de cet exercice est de trouver le nombre d'ensembles qu'il faut unir de chaque côté pour obtenir deux ensembles contenant le même nombre de croix. Derrière cette difficulté se cache la notion de PPCM ; pour trouver le nombre d'ensembles à unir, il s'agit de trouver le PPCM des deux nombres de croix contenus dans les deux ensembles de départ. Dans ce cas, PPCM (3,4) = 12, il faut donc unir quatre fois le premier ensemble et trois fois le second de façon à obtenir deux ensembles à 12 croix et ainsi comparables.

Cette stratégie de résolution est théoriquement toujours possible puisque le PPCM de deux nombres entiers naturels existe toujours. Elle peut néanmoins rester hors de portée lors d'un fonctionnement artisanal dès que les nombres ne sont pas bien choisis.

NB : il n'est toutefois pas obligatoire de passer par la valeur du PPCM ; on peut tout simplement unir d fois le premier ensemble et a fois le second quand le système est de la forme :

$ax + by = c,$ mais cette stratégie peut s'avérer beaucoup plus lourde en calculs.
$dx + ey = f$

Exemples de résolutions arithmétiques de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues

Dans les systèmes à trois inconnues, les raisonnements arithmétiques sont souvent bien plus compliqués. Le passage de deux à trois inconnues augmente fortement la complexité du problème, nous allons illustrer ce fait à travers le système suivant :

$2x + 3y = 13$ (1)
$3x + 2z = 14$ (2)
$y + 3z = 15$ (3)

Résolvons tout d'abord ce système de façon algébrique par la méthode des combinaisons :

$3 \times (1) - 2 \times (2) : 9y - 4z = 11$ (4) *On combine la première et la deuxième équation*
$y + 3z = 15$ (3) *de façon à supprimer la variable x et obtenir un système à deux inconnues*

$3 \times (4) + 4 \times (3) : 27y + 4y = 93$ *On supprime la variable z par la méthode de combinaison*

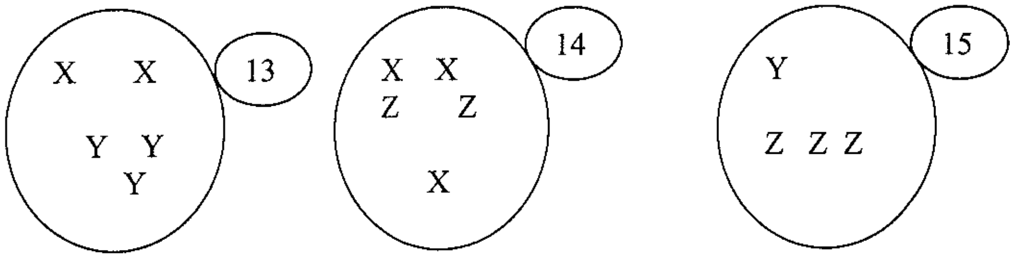
Donc $y = 3$ *On en déduit y*
(3) : $z = 4$ *Puis z*
(2) : $x = 2$ *Et enfin x*

Lorsque que l'on travaille dans les entiers naturels, la méthode algébrique ne « s'arithmétise » pas forcément : les équations 3 (1) et 2 (2) dont on a fait la différence dans la méthode algébrique ne sont pas comparables en arithmétique. L'équation (4) obtenue par différence de ces deux équations ne se représente alors pas de manière ensembliste (on ne peut pas dessiner « moins quatre objets ») et avec des mots, cela reviendrait à « neuf ronds moins quatre étoiles valent 11 » que l'on peut guère utiliser pour recommencer un raisonnement par combinaison arithmétique.

La méthode algébrique présentée ne fonctionne pas dans le cas arithmétique car elle met en jeu des entiers négatifs.

Existe-t-il une méthode arithmétique générale permettant de trouver les solutions des systèmes linéaires à trois inconnues ?

Problème arithmétique



(2, 3, 0)[16] (3, 0, 2) (0, 1, 3)

Comment résoudre ce problème de manière arithmétique ?

Les ensembles de départ ne sont pas comparables il est a priori difficile de percevoir quelles unions pourraient nous fournir des informations pertinentes.

De plus, la méthode des combinaisons ne fonctionne pas directement dans le cas où il y a trois variables. Par exemple, si l'on essaie tout d'abord d'éliminer la variable X en transformant deux ensembles de manière à ce qu'il y ait le même nombre de X dans chaque ensemble :

$3 \times (2, 3, 0) = (6, 9, 0)$

$2 \times (3, 0, 2) = (6, 0, 4)$

Les deux ensembles obtenus ne sont pas nécessairement comparables : en égalisant la première coordonnée, on obtient deux ensembles (9, 0) et (0, 4) à deux types d'objets, qui ne sont pas nécessairement comparables, contrairement à ce qui se passait avec des systèmes d'équations à deux inconnues (les ensembles à un seul type d'objet sont nécessairement comparables).

Pour résoudre les systèmes d'équations à trois inconnues, nous n'avons pas de méthode générale s'appliquant à n'importe quel système ; il faudrait combiner les trois ensembles de façon à avoir de nouvelles informations et peu à peu arriver au résultat. Mais cela peut être très long…

Nous proposons une résolution possible de cet exercice :

$2 \times (2, 3, 0) = (4, 6, 0)$

$9 \times (3, 0, 2) = (27, 0, 18)$

$6 \times (0, 1, 3) = (0, 6, 18)$

$(31, 6, 18) = (4, 6, 0) + (27, 0, 18)$ et $(0, 6, 18)$ sont comparables et permettent de déduire la valeur de 31 X, puis de X. On en déduit ensuite la valeur de Y en se plongeant dans le premier ensemble, puis la valeur de Z à partir du deuxième ou du troisième ensemble.

Nous exposons maintenant deux systèmes à trois inconnues dont la résolution arithmétique fait intervenir des raisonnements similaires à ceux présentés pour les systèmes à deux équations :

Exercice 5 : Résoudre

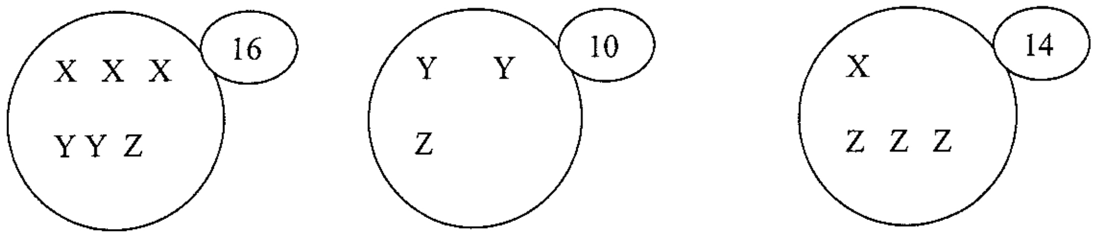
$3x + 2y + z = 16$

$2y + z = 10$

$x + 3z = 14$

[16] (2, 3, 0) représente $2x + 3y + 0z$ ou encore XX YYY

Problème arithmétique



Résolution arithmétique

- Chercher deux ensembles « comparables » et appliquer T1
Dans le premier ensemble, il y a trois X de plus que dans le deuxième.
Donc XXX = 16-10 = 6
Donc X = 2

- Chercher où X intervient et utiliser T2 pour en déduire la valeur d'un autre objet
ZZZ = 14-2
Z = 4

- Chercher où Z intervient et utiliser T2 pour en déduire la valeur d'un autre objet
YY = 10-4
Y = 3

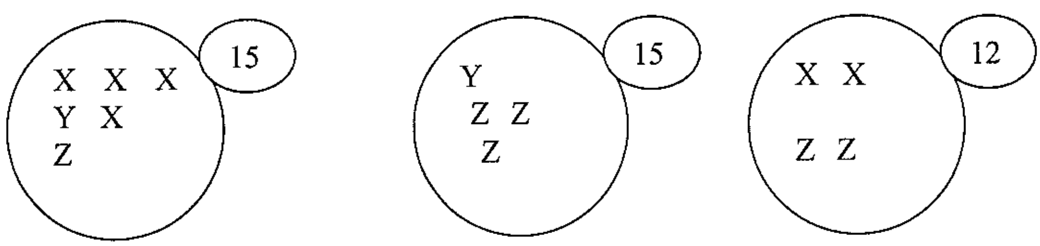
Exercice 9: Résoudre

$4x + y + z = 15$

$y + 3z = 15$

$2x + 2z = 10$

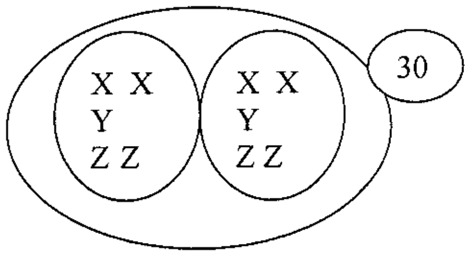
Problème arithmétique



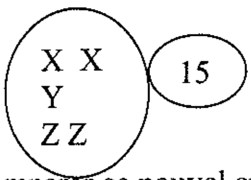
Résolution arithmétique

- Trouver deux ensembles dont l'union permet un partage en sous collection

Nous faisons l'union du premier et le deuxième ensemble



- Déduire la valeur d'une sous collection



- Comparer ce nouvel ensemble avec le troisième ensemble et utiliser T1

Il y a un Y de plus dans le nouvel ensemble donc

Y = 15-12 = 3

- Chercher où Y intervient et utiliser T2 pour en déduire la valeur d'un autre objet

ZZZ = 15-3

Z = 4

- Chercher où Z et Y interviennent et utiliser T2 pour en déduire la valeur d'un autre objet

XX = 12-8

X = 2

Ces résolutions arithmétiques mettent en jeu les mêmes connaissances que celles utilisées lors de la résolution des systèmes à deux inconnues. La difficulté supplémentaire des systèmes à trois inconnues est qu'il s'agit de chercher les ensembles dont la comparaison ou l'union donne des informations pertinentes.

Il existe d'autres stratégies pour résoudre les exercices que nous venons de proposer :

- la méthode par essais ou par tâtonnements : on donne des valeurs aux croix et ronds, et on teste si ces valeurs sont cohérentes. Cette méthode est conceptuellement économique et risque d'être largement employée par des personnes non mathématiciennes mais la combinatoire explose avec le nombre d'inconnues même si le nombre d'essais est borné.
- la résolution algébrique par mise en équations : cette méthode serait plus naturellement employée par des mathématiciens.

Les méthodes que nous avons présentées sont pédagogiquement intéressantes dans la mesure où elles permettent de développer certains processus cognitifs comme l'analyse d'un problème et la comparaison d'ensembles et reposent sur des théorèmes en acte à la portée de tous.

Un travail sur ces méthodes arithmétiques peut de plus s'avérer très bénéfique à plus long terme dans l'apprentissage des méthodes algébriques. Les méthodes algébriques et arithmétiques font intervenir des connaissances différentes ; les méthodes algébriques s'appuient sur le formalisme mathématique et plus précisément utilisent les règles de calculs algébriques tandis que les méthodes arithmétiques font intervenir des connaissances plus « naturelles » et plus intuitives (théorèmes en acte, combinaisons d'ensembles, etc.). Pourtant, la stratégie générale de ces deux modes de résolution est souvent la même ; on cherche à se ramener à des cas où l'on n'a qu'une seule variable en jeu pour pouvoir en déduire sa valeur et ensuite calculer aisément la valeur de la deuxième puis éventuellement de la troisième.

Afin d'étudier précisément l'influence des variables numériques, des représentations et des contextes dans la résolution de problèmes, nous avons choisi de faire travailler les adultes sur un même type d'exercices, analogues aux exercices 2 et 5. Nous allons en analyser la structure et expliciter les raisons de ce choix.

C. Analyse a priori des problèmes proposés en séance

Dans cette partie, nous présentons les problèmes que nous avons choisis de travailler avec les stagiaires du CUEEP. Nous précisons tout d'abord la structure mathématique de ces problèmes, puis présentons les connaissances requises pour pouvoir les résoudre arithmétiquement par un raisonnement, en détaillant alors plus particulièrement les théorèmes en acte T1 et T2.

Structure mathématique des problèmes proposés

Voici les deux types de problèmes que nous proposons :

Problème de type I :

type I-A	type I-B	
$ax + by = c$	$ax + by = c$	avec $\|e-b\|>1$
$ax + (b-1)y = d$	$ax + ey = d$	et $sg(b-e) = sg(c-d)$
$kx = ?$	$kx = ?$	

où a, b, c, d, e, k sont des entiers naturels non nuls et x, y sont les inconnues.

Problème de type II :

type II-A		type II-B	
$ax + by + cz = d$		$ax + by + cz = d$	
$ey + fz = g$	avec $d-h>0$	$ey + fz = g$	avec $sg(c-i) = sg(d-h)$
$ax + by = h$		$ax + by + iz = h$	
$kx = ?$		$kx = ?$	

où a, b, c, d, e, f, g, k, i sont des entiers naturels non nuls et x, y, z sont les inconnues.

Dans les problèmes proposés, les inconnues ont un statut d'objet et les données sont des grandeurs : masse, longueur, prix.

Choix de ce type d'exercice

Nous avons choisi de travailler avec les adultes du CUEEP sur ces exercices particuliers car ils nous ont paru simples à résoudre de façon arithmétique, tout en faisant intervenir un certain nombre de compétences : le raisonnement visé comporte au moins deux étapes (trouver la valeur du premier objet, puis du deuxième et éventuellement du troisième), des processus cognitifs tels que la comparaison et la déduction et deux théorèmes en acte. Nous allons présenter une méthode type de résolution à travers un problème que nous avons proposé en séance.

Un exemple de résolution d'une de nos situations

Nous allons montrer une procédure de résolution arithmétique sur un problème de type I-B : « Au marchand de glaces » (cf. annexe).

Après être « rentré » dans le problème, c'est-à-dire avoir compris le contexte dans lequel s'inscrit la situation problème et les différentes formes d'implicite et de codage indiquant les données du problème, il s'agit de :

- Comparer les lignes/ensembles :

  « Sur le premier dessin, il y a deux glaces de plus que sur le deuxième ».

  Il y a e-b objets y de différence entre la 1ère et la 2ème ligne.

- Déduire de cette comparaison la valeur associée à l'ensemble des objets constituant cette différence (référence à T1) :

  « Ainsi, le prix de deux glaces est égal à 67 F – 37 F, c'est à dire 30 F »

  $(e-b)y = d-c$

- Déduire la valeur associée à un seul objet :

  « Donc le prix d'une glace est la moitié de 30 F, c'est à dire 15 F »

  $y = (d-c) : (e-b)$

- Utiliser la valeur d'un objet pour trouver la valeur de l'autre objet (référence à T2) :

  « Sur le premier dessin, deux boissons et une glace coûtent 37F donc le prix de deux boissons, c'est 37 F moins le prix d'une glace, c'est à dire 22 F ».

  $ax = c-by$

- Trouver la valeur associée au deuxième objet :

  « Donc le prix d'une boisson est la moitié de 22 F, c'est à dire 11F ».

  $x = (c-by) :a$

- Conclure sur la valeur des objets demandés :

  « Ainsi le prix de trois boissons est 11 F × 3 (ou 11 F +11 F+ 11 F), c'est à dire 33 F.

  $x+x+x$

En jouant sur les valeurs numériques, nous souhaitons montrer aux adultes l'efficacité de la méthode générale présentée ci-dessus par rapport aux méthodes essais-erreurs. Cette première stratégie de résolution met en jeu les théorèmes en acte T1 et T2 qu'il convient d'étudier plus précisément.

Analyse des théorèmes en acte T1 et T2 intervenant dans la méthode de résolution visée

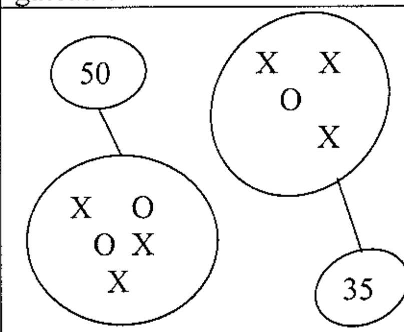
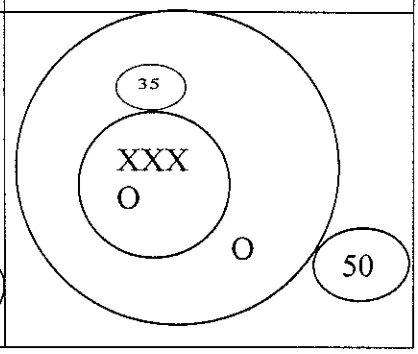
Lors de ce que nous allons appeler la première étape, nous utilisons le théorème en acte T1 suivant : la valeur associée à la différence de deux ensembles « séparés » et comparables est la différence des valeurs associées à ces deux ensembles.

Plus concrètement, nous faisons utilisons T1 lorsque nous procédons comme ceci : « Sur le premier dessin, il y a deux glaces de plus que sur le deuxième », « Ainsi, le prix de deux glaces est égale à 67 F – 37 F, c'est à dire 30 F ».

La deuxième étape met en jeu T2 : « sur le premier dessin, deux boissons et une glace coûtent 37F donc le prix de deux boissons, c'est 37 F moins le prix d'une glace, c'est à dire 22 F ».

Il existe quelques étapes intermédiaires entre la première étape et la seconde comme de trouver la valeur d'un objet à partir de la valeur de plusieurs objets ou la valeur de plusieurs objets à partir de la valeur d'un seul objet. Ces étapes nous semblent moins difficiles du point de vue conceptuel et c'est pour cela que nous n'insistons pas dessus pour le moment.

Bien que mathématiquement équivalents, les deux théorèmes en acte T1 et T2 ne le sont pas au niveau de la représentation mentale qu'ils demandent :

	T1	T2
Type d'exercice écrit où le concept intervient	« Hier, j'ai acheté 3 bouteilles et 2 gâteaux. J'ai payé 50F.Aujourd'hui, j'ai acheté 3 bouteilles et 1 gâteau. J'ai payé 35F. Combien vais-je payer pour 1 gâteau ? »	« J'ai acheté 3 bouteilles et 2 gâteaux pour 50F, je sais que 3 bouteilles et 1 gâteau m'ont coûtés 35F. Combien coûte 1 gâteau ? »
Intervention du concept en représentation ensembliste		

Si l'on considère une bouteille comme un objet unique, le premier problème fait intervenir six bouteilles différentes alors que le second en fait intervenir trois. Dans le premier exercice, on parle d'ensembles « séparés » alors que le second contient la notion d'inclusion.

Les exercices relatifs à T2 pourraient être classés dans les problèmes de combinaisons (voir page 20) : *« Connaissant la composée [des mesures] et l'une des élémentaires, trouver l'autre. »* (Vergnaud, 1981)

Les exercices relatifs à T1 pourraient être classés dans les problèmes de comparaison.

Nous pourrions étudier dans la vie quotidienne auquel des deux théorèmes en acte nous sommes le plus souvent confrontés et évaluer ainsi la relation entre la fréquence quotidienne d'inférence à un certain théorème et la faculté à l'utiliser dans d'autres contextes.

Nous avons toutefois la conviction que T2 est plus utilisé que T1.

Dans les exercices proposés, les stagiaires vont-ils utiliser naturellement ces deux théorèmes en acte ? Et après les avoir mis en jeu lors de la correction ?

L'utilisation de ces théorèmes en acte dépend-t-elle de certaines variables didactiques ? Si oui, lesquelles ?

Les problèmes que nous proposons aux stagiaires sont de même type mathématique : ils peuvent se résoudre par une méthode générale arithmétique mettant en jeu les théorèmes en acte T1 et T2 ainsi que des processus cognitifs tels que la comparaison et la déduction.

Ces problèmes peuvent aussi se résoudre par la méthode par essais ; nous allons jouer sur le nombre d'inconnues en jeu et sur les valeurs numériques en jeu pour accroître la difficulté de ce problème lorsque l'on utilise ces stratégies et ainsi tenter de montrer l'efficacité de la méthode générale visée.

Nous avons aussi choisi d'autres variables didactiques concernant la façon dont nous représentons et contextualisons nos problèmes, que nous allons maintenant présenter.

D. Organisation de la succession des tâches

Nos problèmes, comme nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, sont mathématiquement de même type. Ce que nous varions essentiellement sont les modes de représentation et leur contextualisation ; il convient donc tout d'abord de les présenter.

Ces variables didactiques ont guidé la manière dont nous avons organisé le cheminement de nos séances, que nous allons présenter dans un deuxième temps.

Enfin, nous allons exposer brièvement comment se déroule une séance et en particulier les raisonnements que nous utilisons lors de la correction.

Choix des modes de représentation

A la vue des difficultés observées (cf. chapitre1, page 32), **la façon dont on présente les exercices** paraît très importante chez un public illettré. Nous avons ainsi proposé des problèmes basés sur les critères suivants :

- Rester dans le même thème mathématique, et plus précisément construire des exercices de même type ;
- Représenter les problèmes de manière ludique, pour renforcer la motivation des adultes : *« dès qu'ils accrochent un peu, on a des chances qu'ils rentrent dans le sujet »* (J.P. Leclere lors d'un entretien) ;
- Utiliser les dessins pour représenter les données. Ce système de représentation permet de supprimer l'obstacle de la lecture d'un texte et de laisser les adultes en plus grande autonomie. L'implicite étant très présent dans ces problèmes, cela nous permet d'analyser comment ils décodent ces exercices, de repérer des « interprétations inadéquates » comme celles présentées dans le rapport de Richard (voir page 11).

Ainsi, nous avons présenté chaque exercice de manière différente (le contexte change pratiquement à chaque fois et le support varie) de manière à créer d'une part une situation nouvelle pour l'adulte et ainsi pouvoir travailler les mêmes connaissances, et d'autre part à analyser les liens qu'ils peuvent établir entre les différentes situations.

Nous allons maintenant exposer comment nous avons fait varier les contextes et les supports dans les problèmes proposés lors des différentes séances.

Séance du 21.02.02 : découverte de nos problèmes de situation

- Problèmes proposés en séance : *« Au village », « A Franprix »* (cf. annexe)
- L'objectif de la séance est de faire une première rencontre ou re-rencontre avec ce type de problèmes.

Contextes

- Les objets en jeu dans les problèmes sont familiers (maisons et jardins, aliments) ;

- Nous varions les grandeurs : dans « Au village », il s'agit de longueur, dans « A Franprix », de prix. Dans « A Franprix », l'unité n'est pas inscrite ; il s'agit en plus de découvrir si les nombres sont en euros ou en francs et établir ainsi un rapport avec le réel.

Représentations

- La représentation est imagée dans les deux problèmes ;

- La représentation de « Au Village » de type flèches associées à des longueurs est chargée d'implicite, celle de « A Franprix » est plus simple à comprendre.

Caractéristiques mathématiques

« Au village » est mathématiquement simple (type I-A), « A Franprix » est plus difficile (type II-A).

A l'issue de la séance, nous avons proposé un devoir à faire en tutorat ou seul : *« les immeubles »* (cf. annexe). Nous avons construit cet exercice en utilisant les caractéristiques des exercices effectués pendant la séance ;

- même support que « Au village » ;

- système à trois inconnues (comme dans « A Franprix »).

Notre objectif est alors d'évaluer la compréhension des codages de données figurant dans les représentations (flèches associées à des longueurs), d'enrichir leurs connaissances relatives à ce type de problème et d'évaluer ce qu'ils ont retenu de la séance.

Séance du 18.03.02 : apprentissage à travers des contextes privilégiés, influence des variables numériques

- Problèmes proposés en séance : *« Au marchand de glaces », « Paris-Lille en train »* (cf. annexe)
- L'objectif de cette séance est d'introduire un nouveau type de représentation (tableau) et de mettre en place une procédure de résolution arithmétique dans des problèmes à contextes supposés privilégiés (l'argent).

Contextes

- Les objets en jeu sont familiers dans les deux problèmes (glaces, personnes) ;

- les grandeurs utilisées sont privilégiées dans les deux problèmes (prix). Dans « Paris-Lille en train », nous n'avons pas inscrit l'unité des données (francs ou euros) pour les mêmes raisons que dans « A Franprix ».

Représentations

Nous avons adopté dans les deux exercices une représentation imagée dans laquelle les données sont présentées en ligne dans un tableau.

Le support du tableau nous paraît intéressant car il permet de présenter les données en ligne (comme pour les systèmes d'équations), tout en restant clair au niveau de la compréhension.

Caractéristiques mathématiques

- « Au marchand de glaces », de type I-B, permet de « se remettre dans le bain » et « Paris-Lille en train » de type II-A permet d'approfondir.

- Jeu sur les variables numériques : dans « au marchand de glaces », les données 67 et 37, grâce au chiffre commun en unité, incitent plus à effectuer la soustraction qu'une addition. Ces valeurs influenceront-elles leur démarche et pour ceux qui calculeront 67-37, vont-ils percevoir le sens qu'il y a derrière cette opération ? Dans « Paris-Lille en train », toutes les premières soustractions sont faciles à faire puisque les valeurs numériques sont des nombres unitaires de dizaine. De plus, les données 170 et 70 « frappent l'œil » par le chiffre commun des dizaines ; vont-elles influer sur leur procédure ?

A l'issue de cette séance, nous avons donné en devoir un exercice de type I-B « les fruits », avec le même type de représentation (tableau) et avec le même jeu sur les variables numériques (320 et 220). Ce que nous testons ici est le passage des situations dans lesquelles les grandeurs sont privilégiées (prix) à une situation dans laquelle la grandeur l'est a priori moins (poids).

Séance du 21.03.02 : changement de représentation : symboles et texte-dessins

- Problèmes proposés en séance : *« Des étoiles et des rectangles I», «Des étoiles et des rectangles II », « Au cinéma »* (cf. annexe)
- Le but de cette séance est d'analyser les capacités de transfert des connaissances à travers des situations très différentes et d'introduire un contexte plus abstrait.

Contextes

- Dans les deux premiers exercices, les objets en jeu sont plus abstraits : figures géométriques (étoiles, rectangles, spirales). Vont-ils donner du sens à ce nouveau contexte non lié au quotidien ? Les objets en jeu dans « Au cinéma » sont en revanche très familiers (personnes allant au cinéma).

- Dans les deux premiers exercices, aucune grandeur n'est mentionnée, dans « Au cinéma », nous avons utilisé une grandeur privilégiée (prix).

Représentations

Les informations sont imagées dans les deux premiers exercices.

Dans le troisième, nous utilisons le support texte pour fournir les données du problème, et nous avons ajouté des dessins, à titre d'illustrations ou bien pouvant servir à représenter le problème de façon imagée par analogie. Cette nouvelle représentation (texte-dessins) fait-elle obstacle dans la résolution de l'exercice ?

Caractéristiques mathématiques

- Le premier exercice, de type I-B a pour but de se familiariser avec le nouveau symbolisme utilisé. Le second exercice, de niveau mathématique plus élevé (type II-A), permet de travailler un raisonnement plus élaboré. Nous avons choisi « Au cinéma » mathématiquement facile (type I-A) afin d'analyser les difficultés relatives à sa représentation.

Séance du 25.04.02 : vers une écriture abstraite et le texte

- Problèmes proposés en séance : « Exercice 1 », « Exercice 2 », « Au snack »
- Il s'agit ici de tester leurs capacités de compréhension et de résolution dans des situations à contextes abstraits ou à supports plus complexes.

Contextes

- Dans les deux premiers exercices, les objets en jeu sont représentés par des formes géométriques (triangles et rectangles). Dans « Au snack », les objets en jeu sont familiers (frites et sandwiches).

- Dans les deux premiers exercices, aucune grandeur n'est mentionnée, dans « Au snack », nous avons utilisé une grandeur privilégiée (prix).

Représentations

Dans les deux premiers exercices, les données sont représentées en ligne, sur un support composé de figures géométriques et de symboles mathématiques (=, +). L'exercice 2 est de plus représenté de manière plus abstraite (nous notons par exemple 4□ à la place de □+□+□+□) afin d'étudier les questions relatives au décodage des données et d'analyser le rôle de la représentation dans le raisonnement. Cet implicite va-t-il être compris ? Va-t-il poser des difficultés dans la résolution ou au contraire faciliter la comparaison entre les deux premières lignes ?

Dans « Au snack », nous avons utilisé le support texte. Nous avons écrit les valeurs numériques en chiffres et les avons alignées verticalement afin de permettre aux adultes de se repérer plus facilement dans l'exercice. Nous voulons observer la manière dont ils s'y prennent pour résoudre des problèmes de ce type sans représentation imagée ; vont-ils en construire une eux-mêmes ? Arriveront-ils à résoudre le problème sans l'aide de représentations imagées ? Quel raisonnement vont-ils utiliser ?

Caractéristiques mathématiques

Les trois exercices sont de type I-B, c'est le niveau qui semble le mieux adapté pour pouvoir analyser leur capacités de raisonnement dans des situations a priori plus complexes.

Séance du 30.05.02 : test sur des exercices à texte et bilan

- Problèmes proposés en séance : *« A la boulangerie », « A Auchan »* (cf. annexe)
- Au cours de la séance précédente, nous avions remarqué que les exercices avec texte posaient des difficultés aux adultes. Nous avons donc construit un test, que les adultes doivent résoudre seuls, visant à analyser plus précisément les difficultés liées au passage de la représentation imagée au texte.

Contextes

- Les objets en jeu sont familiers dans les deux problèmes (croissants et éclairs, fromages et bouteilles) ;

- Les grandeurs utilisées sont privilégiées dans les deux problèmes (prix).

Représentations

- Les deux exercices sont à texte.

- Dans le premier problème, nous avons détaillé toutes les questions pour les aider dans le raisonnement ; cela fait alors un mois que nous n'avons pas travaillé ce type d'exercices et nous pensons qu'il est nécessaire de les guider. La première question consiste à « faire un dessin pour représenter l'exercice », afin d'étudier la façon dont ils effectuent le passage du texte à la représentation imagée ; quelles représentations vont-ils effectuer ? Vont-ils représenter toutes les données ? Vont-ils utiliser ces représentations dans la résolution de l'exercice ?

Dans le deuxième problème, nous voulons observer d'une part s'ils voient la nécessité de construire une représentation de l'exercice et d'autre part, nous voulons mieux évaluer leur raisonnement. Pour cela, nous ne leur demandons pas explicitement de construire une représentation de l'exercice (mais nous laissons toutefois la place sur la feuille pour le faire) et nous réduisons le nombre de questions intermédiaires (nous laissons uniquement les questions correspondant aux deux grandes étapes).

Précisons que la dernière question de chaque exercice peut se résoudre directement, en utilisant T4 (voir page 58).

Caractéristiques mathématiques

Nous avons des exercices de type I-B pour deux raisons principales :

- Un système à trois inconnues nous paraît trop complexe compte tenu des conditions dans lesquelles ils doivent résoudre le problème (seuls et support texte difficile)

- Par rapport au type I-A, le type I-B introduit une difficulté supplémentaire (problèmes de partage que nous expliquerons chapitre 3) qu'il est intéressant d'analyser avec ce support.

- Après ce test, nous leur distribuerons une feuille où seront inscrits quatre problèmes que nous avons travaillé ensemble : « Au village », « A Franprix », « Au marchand de glaces », « Des étoiles et des rectangles », « Au snack ».

Nous avons donc choisi des exercices à deux inconnues, à représentations et contextes différents de façon à bien mettre en évidence leur structure commune :

- Il y a deux objets ; on ne connaît que des valeurs d'association de ces deux objets et on doit trouver la valeur d'un de ces objets.

- Pour trouver la valeur de l'objet demandé, il faut d'abord trouver la valeur de l'autre objet.

- Pour trouver la valeur de ce dernier, il faut comparer les lignes ou les ensembles.

- Nous leur demanderons ensuite de construire chez eux des exercices du même type que ceux fait en séance mais en les personnalisant eux-mêmes.

Nous avons construit nos séances de manière à essayer de répondre aux questions que nous nous posions et non dans un objectif pédagogique (nous aurions alors diversifié nos problèmes du point de vue mathématique). Après avoir résumé dans un tableau la structure des problèmes proposés en fonction des variables didactiques utilisées, il convient de présenter la manière dont nous faisons travailler les stagiaires pendant les séances et en particulier les raisonnements que nous utilisons lors de la correction.

Fiches Maths de Base

	Type de problème	Systèmes d'équations	supports	Rôles des dessins	Types d'objets en jeu	Grandeurs
Au village	I-A	x+y = 11 y+x+y = 14 2x = ?	schéma	-symboles des inconnues	maisons et jardins	longueurs (mètres)
A Franprix	II-A	x+y+2z = 81 y+3z = 51 x+y = 59 3x = ?	schéma	-symboles des inconnues -support (panier)	'aliments	Prix (franc ou euro...à trouver !)
Les immeubles	II-B	y+3z+x = 54 3y+z = 45 x+z+y = 36 3x = ?	schéma	-symboles des inconnues	Immeubles et garages	longueurs (mètres)
Au marchand de glaces	I-B	3y+2x = 67 2x+y = 37 3x = ?	tableau	-symbole des inconnues	glaces boissons	Prix (franc)
Paris-Lille en train	II-A	y+2z = 90 3x+y = 70 y+4z+3x = 170 2x = ?	tableau	-symboles des inconnues - illustrations et aide à comprendre la situation	«une femme prend le train avec enfants et chiens »	Prix (franc ou euro...à trouver !)
Les fruits	I-B	4y+x = 320 y+x+y = 220 3x = ?	tableau	-symbole des inconnues	fraises et raisins	poids (gramme)
Des étoiles et des rectangles I	I-B	y+x = 20 x+3y = 48 3x = ?	schéma	-symboles des inconnues	formes géométriques (étoiles, rectangles)	nombre
Des étoiles et des rectangles II	II-A	2y+2z=20 y+3z+2x=31 3x= ?	schéma	-symboles des inconnues	formes géométriques	nombre
Au cinéma	I-A	x+y = 55 x+2y = 70 2x = ?	Texte et dessins	-illustrations et aide à comprendre la situation	cinéma	Prix (franc)
Exercice 1 symboles	I-B	2x+3y=59 2x+y=37 3x= ?	Notation algébrique	-symboles des inconnues	formes géométriques	nombre
Exercice 2 symboles	I-B	5y+4x=68 2y+4x=56 2x= ?	Notation algébrique	-symboles des inconnues	formes géométriques	nombre
Au snack	I-B	5y+x=57 3y+x=41 3x= ?	texte	pas de dessins	Frites et sandwiches	Prix (franc)
A la boulangerie	I-B	2x+5y=46 2x+2y=34 3y ? y ? 2x ? x ? x+y ?	texte	pas de dessin	éclairs au chocolat et croissants	Prix (francs)
A Auchan	I-B	3x+3y=45 3x+y=21 y ? x ? x+y ?	texte	pas dessin	bouteilles et fromages	Prix (francs)

Déroulement d'une séance

Nous intervenons environ une heure dans une séance de deux heures. Durant la séance, nous laissons les adultes chercher seuls ou en groupe en écoutant leur démarche et en y faisant éventuellement des remarques, puis nous corrigeons ou nous envoyons une personne au tableau. Nous allons ainsi exposer à travers des exemples la manière dont nous procédons lors de la correction.

Méthode employée dans la correction des problèmes en séance.

Lors de la correction des problèmes, nous présentons deux manières d'effectuer la première étape[17], l'une faisant référence à T1, l'autre à T2. Illustrons cela à travers l'exemple d'une correction faite dans « A Franprix » :

- Nous commençons par expliquer la première étape en faisant intervenir le théorème en acte T1 :

« Pourquoi le panier à 81 F est-il plus cher que celui à 59 F ? Parce que dans le premier, il y a plus de choses... Quand on compare ces deux paniers, on voit que dans le premier il y a deux paquets de pâtes en plus et c'est pour cela qu'il est plus cher. Donc, le prix des deux paquets de pâtes correspond à ce que l'on paye en plus dans le premier panier, c'est-à-dire correspond à la différence de prix entre le premier et le deuxième panier. On fait donc 81-59 = 22 F pour deux paquets de pâtes ».

- Ensuite, nous expliquons en général cette étape une deuxième fois en faisant intervenir le théorème en acte T2. Dans le premier panier, nous entourons le poulet et le fromage et nous inscrivons 59 à côté :

« Regardez dans le premier panier, un poulet, un fromage et deux paquets de pâtes valent 81 F. Mais on sait déjà que un poulet et un fromage valent 59 F. Donc deux paquets de pâtes c'est l'argent qu'il faut ajouter à 59 pour faire 81, c'est donc la différence entre 81 et 59. On fait 81-59 = 22F pour deux paquets de pâtes. »

- Puis, nous terminons la correction en effectuant les autres étapes consistant à trouver les valeurs des autres objets en faisant intervenir T2.

Il existe d'autres façons de procéder pour effectuer ces autres étapes, que nous exposons éventuellement lors de la correction si un des stagiaire en a employé une.

Autres méthodes possibles

Voici un exemple d'une autre stratégie possible avec « Les fruits » :

« Entre la première et la deuxième ligne, il y a deux fraises de différences, donc le poids de deux fraises vaut 320-220 = 100 g (première étape). D'après la seconde ligne, une grappe de raisins et deux fraises pèsent 220g, donc deux grappes et quatre fraises pèsent 440 g. Ainsi, trois grappes de raisins et huit fraises pèsent 760 g. Donc trois grappes de raisins pèsent 760-400 = 360 g. ».

Cette stratégie met en jeu les théorèmes en acte T2, T3 et T4. Elle permet d'obtenir le poids des trois grappes de raisins sans passer par le poids d'une seule grappe.

Nous n'avons pas insisté en séance sur cette méthode car elle nous paraît plus difficile à comprendre et à mettre en œuvre. Nous nous sommes principalement basés sur une seule méthode générale pour ne pas les perturber avec trop de renseignements et pouvoir analyser plus précisément s'il leur était possible de construire une procédure mettant en jeu T1 et T2.

Il existe aussi la stratégie par essais qui consiste à donner des valeurs aux objets en jeu et à ensuite tester si ces valeurs conviennent et à les ajuster alors.

D'autres méthodes mettent en jeu des variantes des méthodes par raisonnement et par essais : par exemple, supposer que tel objet vaut tant et déduire par le raisonnement quelle serait alors la valeur des autres objets.

Après une analyse théorique concernant la construction de nos problèmes et de nos séances, nous allons analyser les résultats que nous avons recueillis dans la pratique.

[17] Une étape consiste à trouver la valeur d'un objet.

CHAPITRE 3

ANALYSE DES RÉSULTATS

I. Introduction

L'objet de ce chapitre est d'analyser les données que nous avons recueillies pendant les entretiens individuels et les séances collectives.

Nous proposons tout d'abord de présenter l'analyse du rapport au nombre que nous avons établie à la suite des entretiens passés avec Véronique et Claude.

Puis, nous avons suivi Véronique, Claude et les autres adultes du groupe Math de Base sur des problèmes portant sur le thème des systèmes d'équations. Nous allons dégager ce que nous avons retenu de ces séances, en particulier en ce qui concerne l'influence des représentations et des contextes dans les différentes étapes du problème, ainsi que les compétences et les difficultés des adultes que nous avons notées.

Nous établirons enfin un bilan global sur les deux études que nous avons menées.

II. Rapport des entretiens individuels

Dans cette partie, nous présentons les comptes-rendus issus des deux entretiens (datant de février et d'avril 2002) passés avec Véronique et Claude. Nous retraçons ensuite leur « histoire de vie » et présentons un bilan de leur rapport au nombre.

A. Rapport du questionnaire sur les nombres avec Véronique

Les nombres

La connaissance des nombres : désignations écrites et orales (1er entretien)

Ecrire : 13, 25, 70, 92, 101, 353, 675, 1024, 100 003.

Véronique écrit tous les nombres correctement sauf 100 003. Elle fait plusieurs essais mais ne parvient pas à la forme correcte ; elle ne rajoute pas assez ou trop de zéros.

Lire : 7, 214, 03, 78, 1001, 1111, 372 000.

Véronique lit le nombre 1001 « cent un ».

Elle ne parvient pas à lire 1111. L'effet de répétition du 1 semble provoquer une perturbation.

Cependant, elle lit 372 000. Le zéro n'induit donc pas la même difficulté selon la place qu'il occupe.

Véronique sait lire et écrire les nombres inférieurs à mille mais n'est pas à l'aise au delà. Elle fait en effet quelques erreurs au niveau syntaxique (en particulier quand le zéro est placé de façon intercalaire au niveau du nombre) et n'automatise pas forcément les propriétés connues au delà de mille (par exemple avec 1111 qui ne comporte pas priori pas de difficulté particulière). En revanche, elle n'a apparemment pas de problèmes au niveau des irrégularités du système français.

Structure du système de numération (1er entretien)

Compter une collection d'objets :

Nous éparpillons tout d'abord une cinquantaine de dés de couleurs différentes sur la table et nous demandons à l'adulte de nous dire combien il y en a.

Véronique compte les dés deux par deux. Dans ce cas, c'est l'aspect ordinal de la numération qui entre en jeu dans le processus de comptage chez Véronique.

Ensuite nous disposons une quarantaine de dés de couleurs en deux rangées et nous leur demandons le nombre de dés sur la table.

Véronique utilise la structure de rangement des dés et les compte alors 10 par 10 ; elle passe ainsi à la numération en base 10.

Ainsi, Véronique peut utiliser la structure du système de numération en base 10 pour compter un ensemble d'objets (notamment si la disposition des dés la favorise) mais cette méthode ne s'impose pas d'emblée.

Calcul mental : utiliser la structure du système de numération :

Calculer : (exercice écrit et résolution orale, 1er entretien)

10+20 ; 23+10 ; 10+47 ; 30+7 ; 50+41 ; (écrit)

Dans ces opérations, Véronique ne réfléchit pas et donne le résultat instantanément.

25+25 ; 15+25 ; 45+5 ;

Elle sépare unités et dizaines : « 5 et 5, 10, 20 et 20, 40, 50 ! ».

53+12 ; 23+42 ; 17+21 ; 9+23 ; 38+4 ; 48+12.

Véronique sépare unités et dizaines : « je regroupe par paquets de dix ; 50 et 10, 60, 3 et 2, 5, ça fait 65 ». De plus, elle n'a pas de problème avec les retenues.

Véronique utilise donc clairement le système de numération pour les calculs simples.

Utilisation du système de numération dans des situations plus complexes

« On vous donne 160 F en pièces de 10F, combien vous donne t-on de pièces de 10F ? » (oral, 1er entretien)

Voici un extrait d'entretien (V : Véronique, I : intervenant)

V : « 10F et 10F, 20F...40F. Donc dix pièces de 10F c'est 100F. Euh, c'est combien déjà ? ».

I : « 160F »

V : « attends, attends... ».

Véronique commence à s'embrouiller et reprend son raisonnement depuis le début.

V : « 10 et 10, 20, 20 et 20, 40, dix pièces, ça fait 100... ».

Elle utilise ses doigts et nous répond finalement : « seize pièces de 10F pour faire 160 F ».

« Vous allez au restaurant et vous payez l'addition de 123 €[18]. Combien de billets de 10 € devez-vous donner ? » (oral, 1er entretien)

Nous n'avons même pas besoin de poser la question, Véronique la devine toute seule !

V : « dix billets, ça fait 100 €. J'en donne deux de plus et je donne trois pièces ».

I : « Et si tu n'as que des billets de 10 € ?».

V : « Alors, j'en donne un de plus »

I : « Combien de billets donnes tu finalement ? »

Après un petit moment, Véronique répond : *« j'en donne treize et on me rendra 10-3 = 7, 7 € ! ».*

« J'achète douze stylos à 10 F pièce. Combien devrai-je payer ? » (oral, 1er entretien)

Là encore, Véronique ne nous laisse pas le temps de finir notre phrase...

Elle effectue le raisonnement : *« un stylo, 10F, deux stylos, 20F, quatre stylos 40F, dix stylos, 100F »,* recommence deux ou trois fois le même raisonnement et finit par trouver la solution sans intervention de notre part.

---

[18] Ce chiffre peut paraître inadapté ; initialement, nous avions prévu de le mettre en francs mais à la demande des adultes interrogés, nous les avons mis en euros...

Analysons tout d'abord la façon dont procède Véronique pour résoudre le premier et le troisième exercice.

Dans l'exercice 1, il s'agit de trouver un nombre d'objets de même valeur (nombre de pièces de 10F) connaissant le prix de l'ensemble de ces objets.

Dans l'exercice 3, il s'agit de trouver le prix d'un nombre déterminé d'objets (douze stylos), connaissant le prix unitaire de chaque objet.

Pour résoudre ces deux exercices, a priori de type différent (l'un est un problème dit de division, l'autre est un problème dit de soustraction), Véronique adopte un comportement similaire : elle compte les objets en établissant une correspondance avec le prix de ceux-ci jusqu'à atteindre une valeur clé (prix ou nombre d'objets à atteindre).

Pour cela, elle utilise les doubles : « 10 et 10, 20, 20 et 20, 40 » (pour l'exercice 1), « un stylo, 10F, deux stylos, 20F, quatre stylos 40F » (pour l'exercice 3). Dans les deux exercices, quand elle prend conscience que quatre objets correspondent à 40F, elle a un déclic et réalise alors que dix objets (stylo ou pièce) à 10F valent 100F. Dans les deux cas, elle se perd à ce moment là et est contrainte à reprendre son raisonnement depuis le début.

Ces situations, en mettant Véronique au centre de l'action, la conduisent à dérouler des stratégies proches de la réalité et de ses activités de calcul quotidiennes. Ainsi, deux problèmes a priori différents peuvent conduire à une même activité et c'est la projection dans l'action qui semble guider celle-ci :

- dans le 1er exercice, elle compte les pièces comme si elle les avait reçues : « 10 et 10, 20… »

- dans le 3ème exercice, elle commence par calculer le prix des douze stylos un par un comme si elle devait les acheter : « un stylo 10F, deux stylos 20F,… »

Le rôle du contexte et la projection dans l'action qu'il provoque est révélé de manière encore plus frappante par le langage utilisé par Véronique lors de la résolution de l'exercice 2 : « je donne », « on me rend ». Dans cette situation, Véronique s'imagine en train de payer et effectue de manière automatique le passage « 10 billets de 10 € font 100 € ». Est-ce la résolution de l'exercice précédent qui a favorisée cette prise de conscience directe ? Ce ne serait en tout cas pas la raison essentielle car dans le troisième exercice effectué ensuite, ce passage n'est pas immédiat. Nous pensons que cette raison essentielle est le lien très étroit qu'elle a fait entre la situation proposée et son activité de payer dans la vie courante.

> Pour résoudre ces exercices, Véronique ne fait pas de liens avec la structure de notre système de numération (extraire les dizaines d'un nombre à centaine, associer x dizaines au nombre qui s'écrit « x0 »). Elle déploie des stratégies qui traduisent une projection dans l'action, propre à chaque exercice. Les difficultés observées relèvent plus des mises en situations que suggèrent ces exercices que de leur aspect mathématique.

Relations entre les nombres

Comparer :

Quel est le plus grand nombre des deux : 7 et 48 ; 16 et 21 ; 82 et 78 ; 1003 et 3000 ; 1114 et 2110 ; 1 403 749 et 800 479 ; (écrit, 1er entretien)

Quand elle aperçoit la première comparaison « 7 et 48 », elle rigole : « quand même, c'est trop facile ».

Nous lui demandons de lire les nombres et de les comparer.

Seule la dernière série lui pose des problèmes (les nombres contiennent trop de chiffres).

La règle selon laquelle les nombres les plus grands sont les nombres qui contiennent le plus de chiffres n'est pas généralisée aux « grands » nombres. Comme dans le cas de l'écriture ou de la lecture des nombres, certaines règles restent locales.

Ordre et connaissance symbolique du nombre

Compter de 10 en 10 en partant de 2. (oral, 1er entretien)

V : « 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 12 ! »

I : « et ensuite ? »

V : « 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 22 ! », « ah oui et ensuite, c'est 32, 42, 52,... ».

Pour Véronique, compter de dix en dix n'est pas équivalent à rajouter une dizaine. Quand il s'agit d'effectuer l'opération 10+2, Véronique trouve instantanément la solution. En revanche, compter de dix en dix fait intervenir l'aspect ordinal, plus dynamique, de la numération : elle compte avec ses doigts et répète le nombre correspondant au résultat. Cette réaction est aussi observée chez les enfants (Vergnaud, 1981).

Au bout de deux coups, elle automatise ses réponses : effectue t-elle l'équivalence entre les deux gestes mentaux (compter de dix en dix et ajouter 10) ou déduit-elle simplement la suite par induction logique ?

Compter de 5 en 5 en partant de 3. (oral, 1er entretien)

Véronique ne perçoit pas la logique de la suite « 3, 8, 13, 18, 23,... » et compte à chaque étape. Son temps de calcul est en effet trop lent pour repérer l'alternance de la suite et le fait que l'on rajoute dix tous les deux coups. Le caractère oral de cet exercice ne favorise pas non plus la distinction des propriétés de la suite.

Compter à reculons de 2 en 2 en partant de 18. (oral, 1er entretien)

Véronique n'a pas de difficultés et automatise ses réponses au bout de quelques étapes.

Ce type de comptage projette Véronique dans la dynamique, c'est-à-dire dans l'action de compter. Elle montre en outre dans ces exercices une assez bonne connaissance du nombre du point de vue de l'ordre. Dans ce cadre, elle a néanmoins plus de difficultés à faire intervenir les propriétés de la numération.

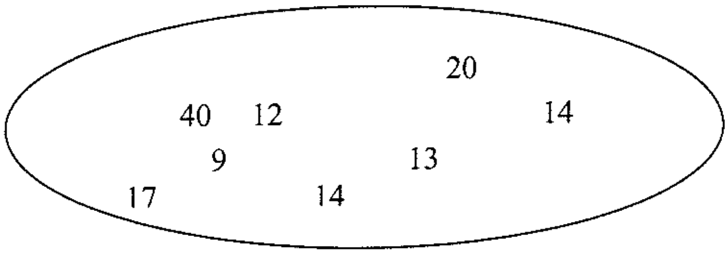
Décomposition arithmétique :

« Trouvez quatre nombres qui se terminent par 5 pour faire 60 » (oral, 1er entretien)

Véronique trouve rapidement : « 60 divisé par 5, ça fait, euh, attends, 15, c'est 15, 15, 15 et 15 ! ».

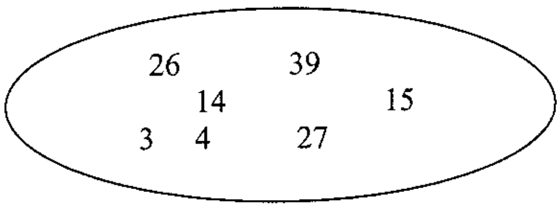
Véronique fait une relation avec la division. A cette date, Véronique commence à apprendre les divisions (algorithme et sens) et nous supposons qu'elle cherche à l'utiliser.

« Faites 40 avec trois nombres se trouvant dans la bulle » (écrit, 1^er^ entretien)



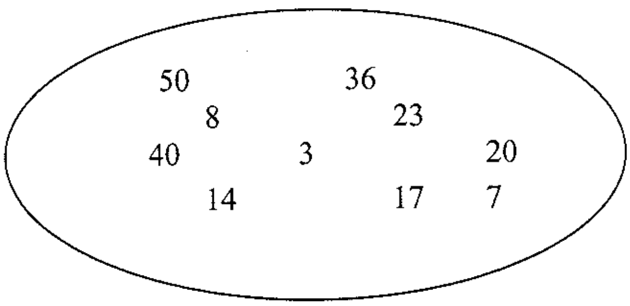
Véronique commence à fatiguer... Elle cherche mais a des difficultés ; « je ne me rappelle plus ». Nous l'encourageons à chercher davantage et elle trouve finalement une solution : (12, 14, 14).

« Faites 41 avec deux nombres se trouvant dans la bulle » (écrit, 1^er^ entretien)



Véronique à la même réaction de fatigue. Elle cherche mais ne trouve pas. Nous l'aidons pour ne pas la mettre en échec pendant trop longtemps en lui montrant le nombre 26. Elle essaie alors d'y ajouter le nombre 15 : « 26 et 15, 20 et 10, 30 et 5 et 6, 11, ça fait 41. On fait des paquets de 10 ».

« Faites 53 avec 2, 3, 4 nombres se trouvant dans la bulle » (écrit, 1^er^ entretien)



Véronique en a assez... Nous arrêtons ce style d'exercice.

Ces exercices ont été difficiles pour Véronique car elle n'a pas su établir de stratégie de résolution. La quantité de nombres en jeu et la disposition des nombres en vrac ont sans doute contribué à un sentiment de trop grand choix et de hasard, qui accroît l'impression de fatigue.

« Vous vous achetez une radio à 49 €. Combien de pièces de 10 €, de 5 €, de 2 € allez vous donner ? » (oral, 2ème entretien)

Pour cet exercice, Véronique reste très pragmatique : « il n'y a pas de pièces de 10 €, c'est des billets » ce qui est étonnant car elle prête souvent beaucoup moins d'importance au rapport à la réalité dans les exercices de mathématiques en général. Quand il s'agit d'argent, Véronique est plus vigilante !

V : « 2 ça fait 20, 4 ça fait 40. Ok, donc je vais lui donner quatre billets de 10 €, ..., un billet de 5 € et, les pièces de 4 € ça n'existe pas, euh, ..., deux pièces de 2 € ».

Véronique utilise une fois de plus la technique des doubles pour calculer. La numération est portée implicitement par l'habitude de payer ; quand on achète un objet à 49 €, on sait (du moins les personnes qui manipulent l'argent) que l'on doit donner quatre billets de 10 € et des pièces pour faire 9 €. Le rapport au réel a de plus une grande importance quand il s'agit d'argent chez Véronique.

« Nous sommes maintenant dans un pays imaginaire où les pièces de 6 € et de 7 € existent. Vous devez donner 33 €. Combien de pièces de 6 € et de 7 € allez vous donner ? » (oral, 2ème entretien)

Elle commence par calculer la valeur de quatre pièces de 7 € puis de cinq pièces. Elle constate que cinq pièces est « trop grand » et revient sur ses quatre pièces. Puis, elle s'aperçoit qu'elle ne peut pas faire l'appoint avec des pièces de 6 €. Elle reste dubitative pendant quelques instants et calcule la valeur de 3 pièces de 7 €. Elle trouve ensuite le résultat rapidement.

Véronique n'a pas de difficultés quand il s'agit de décomposer des nombres avec des nombres référents, mais en a plus quand les décompositions sont très ouvertes. Cependant, en jouant sur le contexte de l'argent, nous avons pu constater que Véronique est capable de décomposer un nombre avec d'autres nombres spécifiés : dans une situation où elle peut utiliser son habitude de compter et dans une autre a priori moins évidente (sans référence réel avec notre quotidien et ne permettant pas l'utilisation de la base 10) mais où elle déploie alors une recherche organisée.

Le Calcul

Le calcul mental : utiliser les connaissances structurelles des nombres

Combien font ? (écrit, 2ème entretien)

3+3+3+3+3 ;

V : « 6, 12, 13, 14, 15 »

Véronique utilise les doubles et termine son calcul avec ses doigts.

258+242 ;

Véronique a des difficultés pour calculer de tête cette addition. Contrairement à Claude, elle ne pose pas l'addition dans sa tête.

Dans son premier essai, elle commence par ajouter les centaines : « 400, 450, ... » et se perd. Dans son second essai, elle effectue un jeu d'aller-retour entre les deux nombres : elle commence par additionner les unités, puis les centaines et se trompe dans l'ajout des dizaines : « 260, 460, 464 ! ».

Elle ne parvient pas à obtenir le résultat.

21+33+54 ;

Elle réussit cette opération sans difficultés : « 54 et 54, 108 », en se ramenant à un doublement.

1030+3140 ;

Elle n'a pas de difficultés pour cette opération non plus et effectue un jeu d'aller-retour entre les deux nombres : « 3000 et 1000, 4000, 4100, 4140, 4150, 4160, 4170 ». Nous pouvons noter le dernier ajout effectué via un comptage de 10 en 10 et non par addition.

12+17+31+43+28 ;

Elle utilise le calcul réfléchi (cf. chapitre 1, page 18) pour effectuer cette dernière opération : « 28 et 12, 40, 57, et 31, 68 et 3, 81...non 71, 80, 90, 100,110, 101 ! ».

Il semble qu'il y ait trop d'étapes de calcul, Véronique fait une erreur dans l'addition des dizaines : « 57 et 31, 68 » et fait une erreur de type syntaxique à la fin de son calcul : « 110, 101 » au lieu de « 110, 111 ».

« Vous invitez votre famille au restaurant ; le garçon apporte l'addition. Vous vérifiez la note car le prix vous parait suspect. Bien sûr, vous n'avez pas de stylo et devez compter de tête...» (écrit, 1er entretien)

43
43
30
12
——
134 F

Véronique procède par étapes ; elle commence par calculer la somme des deux premiers nombres, puis ajoute les autres successivement : « 40 et 40, 80. 3 et 3, 6. Ça fait 86 et 30, euh, 80 et 30, ça fait 110, et 6, 116. ». A ce stade, elle ne sait plus où elle en est.

Elle reprend tout depuis le début et rebloque au même endroit. Il y a probablement trop d'étapes. Nous l'aidons en lui expliquant ce qu'elle a calculé. Elle termine en faisant tout d'abord une erreur de calcul qu'elle rectifie du fait de notre intervention et calcule immédiatement la différence entre les deux prix.

Malgré la disposition des nombres en colonne, Véronique n'utilise pas l'algorithme de l'addition pour calculer la note du restaurant.

Pour calculer, Véronique utilise la structure de numération et arithmétique du nombre : calculer par centaines, dizaines, unités et repérer les doubles ainsi que les nombres qui « s'emboîtent » (dont la somme des unités vaut 10). Sa méthode est variable et sa capacité à calculer mentalement est encore assez limitée : elle dépend du nombre d'opérations, des nombres en jeu et de la présence ou non de retenue.

Problèmes « de soustraction » suivant les différentes catégories de problèmes

« Vous avez 35 € en poche. Pour l'anniversaire de votre fils, vous achetez un tee shirt à 25 €. Combien vous reste-il ? » (oral, 1er entretien)

Sa première réaction est de poser la soustraction 35-25. Elle trouve ainsi le résultat.

« Nous décidons de partager nos économies. Vous avez mis 22 €. A nous deux, nous avons 45 €. Combien ai-je mis dans la cagnotte ? » (oral, 1er entretien)

Nous demandons à Véronique de faire les calculs de tête.

Elle s'approprie le problème et résout : « 22 pour aller à 45. Je fais 40-20, 20 et 5-2, 3. Ça fait 23 €. Il faut faire des paquets de 10 comme dit Jean Pierre. C'est facile quand on fait des paquets de 10. »

Véronique utilise une procédure de 3ème niveau ; elle associe au geste mental « x pour aller à y » l'opération de soustraction qu'elle effectue dans sa tête en utilisant la structure de numération (elle soustrait d'abord les dizaines puis les unités).

« Vous en avez marre d'arriver en retard et vous décidez donc de vous acheter une montre. Vous hésitez entre une montre à 70 € et une autre à 96 €. La dernière montre coûte combien de plus que la première ? (oral, 1er entretien)

Pour cet exercice, Véronique a plus de difficultés. Elle trouve « 16 € » au début et fatigue. Elle trouve finalement, après encouragement.

Nous lui reposons le même exercice dans un contexte différent lors du second entretien de façon à saisir la procédure qu'elle utilise :

« Vous décidez de vous acheter une belle robe. Vous en avez repéré deux ; la première coûte 70 € et la seconde 96 €. La dernière coûte combien de plus ? » (oral, 2ème entretien)

Elle commence par écrire les deux valeurs et demande la question. Elle prend du temps pour réfléchir puis pose la soustraction et trouve la solution.

Véronique utilise encore une procédure de 3ème niveau mais pose l'opération et ne met pas à profit la structure de numération pour effectuer le calcul de tête.

Véronique parvient à résoudre les différentes catégories de problèmes en utilisant l'opération de soustraction (3ème niveau) et en calculant soit de tête, soit en posant la soustraction.

Niveaux des procédures

Recherche de la valeur d'un ajout

« Vous avez 24 € en poche. Vous allez à la banque, au marché,..., et vous revenez finalement chez vous avec 66 €. Combien avez vous en plus à la fin de la journée ? » (oral, 2ème entretien)

Véronique a des difficultés à s'approprier le problème. Elle comprend la situation mais ne voit pas directement de stratégie. Elle commence par calculer avec ses doigts : « 25, 26, 27,...31 » et perd le fil des comptes. Elle s'embrouille et prend conscience qu'il sera difficile d'aller jusqu'à 66 avec ses doigts. Nous lui répétons le problème en insistant sur le « plus » dans la question. Nous lui inscrivons les données. Puis elle nous demande : « Je peux faire 66 moins 24 ? ». Nous lui indiquons qu'elle peut utiliser la méthode qu'elle désire. Finalement, elle pose la soustraction et trouve le résultat.

A la vue de cet exercice et des trois exercices précédents, il semble que Véronique soit très proche du 3ème niveau de résolution pour les problèmes dits de soustraction.

Problème de groupement réitéré

« **Nous avons 235 paquets de gâteaux. On veut faire des lots de 4 paquets avec ces gâteaux. Combien de lots peut-on former ? Y aura t-il des paquets de gâteaux en rabe ?** » **(oral, 2ème entretien)**

Cet exercice est posé durant le second entretien ; ils ont passé deux à trois mois en Math de base où ils ont appris les algorithmes des quatre opérations et le sens de celles-ci.

Véronique utilise une procédure de 2ème niveau pour résoudre cet exercice : elle utilise cependant une technique très mathématique.

Elle commence par écrire le nombre de lots et le nombre de paquets associés : « 1 = 4, 2 = 8, 3 = 12, 4 = 16, 5 = 20 ». Ensuite elle combine ses résultats pour obtenir des valeurs plus grandes : « si je fais 5 lots, ça fait 20. 20 plus 20 égale 40. Donc 10 lots ça fait 40. 20 lots ça fait 80. 40 lots, c'est 80 et 80,160. Il faut faire 200 ». Elle cherche ensuite le nombre de lots pour faire 200 paquets de gâteaux, fait une petite erreur (au niveau des correspondances entre lots et paquets de gâteaux) et finalement trouve que 50 lots font 200 paquets. Ensuite elle affirme : « il me reste 35 » et trouve le nombre de paquets correspondants. Nous l'aidons au niveau du reste.

Nous lui posons ensuite le problème : « **vous devez partager 235 F entre quatre personnes. Combien vont-elles recevoir chacune ?** » **(oral, 2ème entretien)**

Véronique pose la division et après notre accord utilise sa calculette.

Véronique utilise une procédure de résolution de 2ème niveau très intéressante pour résoudre le premier problème. Elle fait preuve de beaucoup de rigueur et de logique lors de la résolution de celui-ci et met en œuvre ses techniques usuelles de calcul comme l'utilisation de doubles, et la recherche du nombre de lots associé à un nombre de référence (200).

Sa procédure est donc similaire à celle utilisée dans des exercices précédents (voir page 83) : elle établit une correspondance entre le nombre de lots et le nombres de gâteaux associés, en partant du « début » (c'est-à-dire de un lot) jusqu'à atteindre une valeur clé.

Véronique a donc mis en place une procédure très organisée (mettant en jeu l'utilisation des doubles) pour résoudre une partie des problèmes dits de division, cette stratégie ne dépendant apparemment pas des contextes des problèmes.
Le deuxième exercice montre qu'elle commence à associer un sens à la division.

Conclusion

Une histoire de vie

Véronique est sénégalaise, mariée à un français, chimiste, et n'a pas d'enfants pour le moment. Elle parle français correctement et apprend à lire et à écrire depuis septembre 2001.

Véronique vient d'un petit village du Sénégal dans la région de Siné-Saloum. Elle appartient à la tribu des Sérères : « *Par ordre d'importance, le deuxième groupe ethnique du Sénégal et de Gambie est constitué par les Sérères, à la peau très noire, qui sont concentrés* *dans les régions de Thiès et du Siné-Saloum, où ils vivent dans les zones boisées et cultivent la terre. A l'image des Diolas, ils sont nombreux à avoir embrassé la foi chrétienne, encore que leur vie courante demeure marquée par la tradition animiste. Leur cérémonie du pangal, au cours de laquelle ils vénèrent les âmes des ancêtres, et une des fêtes animistes les plus pérennes. Le président Senghor est issu de cette tribu.* » (d'après documents internet, texte confirmé par Véronique).

Elle est fille unique d'une grande famille et devait par conséquent rester avec sa mère s'occuper des tâches ménagères. Elle n'a donc suivi aucune scolarisation en Afrique et ne parlait pas français avant son départ.

Elle est arrivée en France il y a douze ans et a travaillé dans une usine de confection pendant 10 ans.

Véronique est au CUEEP depuis septembre 2001 (c'est donc sa première année de formation au CUEEP) et touche l'ARE (allocation retour emploi). Elle a suivi le module Math Départ avec J.P. Leclere, où elle a notamment appris les connaissances de base sur les nombres (écrire et lire les nombres, regrouper par paquets de dix, décomposer un nombre avec d'autres nombres spécifiés, etc.). Elle est passée en Math de base, avec M.C. Liefooghe, en février 2002.

C'est une personne très vive, très active, qui veut sans cesse apprendre et écoute les conseils qu'on lui donne. Selon elle, elle a développé son rapport aux nombres grâce à la manipulation de l'argent.

Son projet, c'est de devenir styliste modéliste (elle confectionne elle-même la plupart de ses vêtements).

Son rapport au nombre

Nous dressons un bilan du rapport au nombre de Véronique, issu des différents entretiens que nous avons effectués avec elle.

Tout d'abord, le système de numération sérère est différent du système français ; dans le dialecte sérère, la communication des nombres se fait par voie orale et présente les régularités d'un système en base 5 (correspondant aux doigts de la main). D'autres dialectes africains sont basés sur des systèmes équivalents.

Système de numération sérère (établi en faisant compter Véronique)

1	lin	11	halbaï fo lin
2	ik	12	halbaï fo ik
3	tadik	13	halbaï fo tadik
4	nahik	14	halbaï fo nahik
5	pedik	15	halbaï fo pedik
6	beta afa lin	16	halbaï beta afa lin
7	beta adar	17	halbaï beta adar
8	beta atadar	18	halbaï beta atadar
9	beta anahar	19	halbaï beta anahar
10	halbaï		

Véronique, en arrivant en France a dû s'adapter à un nouveau système de numération et à l'écriture des chiffres qu'elle ne connaissait pas.

Le nombre

Véronique sait lire et écrire les nombres inférieurs à 1000, et a quelques difficultés au-delà.

Elle a bien compris le système de numération (« on regroupe par paquets de 10 »). Elle l'utilise notamment pour effectuer des calculs mentaux simples (elle sépare unités et dizaines) et pour comparer les nombres. En revanche, elle n'est pas encore capable d'extraire les dizaines d'un nombre à centaine, ni d'associer directement x dizaines à l'écriture « x0 » dans des exercices contextualisés.

Véronique a une assez bonne connaissance de la structuration arithmétique des nombres. Elle sait décomposer un nombre à l'aide de nombres référents ou de deux ou trois nombres spécifiés mais a plus de difficultés quand il s'agit de choisir parmi un ensemble les nombres permettant la décomposition d'un autre.

Le calcul

La capacité de Véronique à calculer de tête est encore assez limitée et dépend du nombre d'opérations, des nombres en jeu et de la présence ou non de retenue. Pour calculer, elle utilise la structure de numération et arithmétique du nombre : calculer par centaines, dizaines, unités, repérer les nombres qui s'emboîtent, utiliser les doubles.

La résolution de problème

Véronique parvient à résoudre les différentes catégories de problèmes dits de soustraction proposés, en utilisant l'opération de soustraction (de tête ou en posant l'opération).

Elle a pratiquement atteint le 3ème niveau en ce qui concerne la soustraction mais est encore au 2ème niveau pour la division.

Véronique montre, à travers ses démarches de calcul et la façon dont elle se représente les problèmes, un raisonnement très rigoureux. Ses procédures de résolution ne sont pas empiriques comme celles de Claude mais au contraire très mathématiques. Elle ne considère essentiellement que l'aspect mathématique du problème et ne se laisse pas perturber par les données contextuelles.

Elle affiche beaucoup d'intérêt pour les problèmes où il s'agit de trouver une procédure de résolution. Le raisonnement est son point fort. Elle présente des facultés assez spectaculaires compte tenu de son passé scolaire.

Nous allons maintenant présenter le rapport issu des entretiens passés avec Claude.

B. Rapport du questionnaire sur les nombres avec Claude

Les nombres

La connaissance des nombres : désignations écrites et orales (1er entretien)

Ecrire : 13, 25, 70, 92, 101, 353, 675, 1024, 100 003.

Claude écrit tous les nombres correctement sauf le dernier (il met un nombre insuffisant de zéros) qu'il corrige après notre intervention (nous lui disons juste qu'il n'a pas écrit le bon nombre).

Lire : 7, 214, 03, 78, 1001, 1111, 372 000.

Claude a des difficultés à lire le chiffre 1111. Nous lui expliquons en lui montrant les chiffres qu'il faut décomposer le nombre pour pouvoir le lire : « 1111 c'est un mille, qui se lit mille, un cent, qui se lit cent, et onze, mille cent onze » ; il parvient alors à lire le nombre 2222.

Il a aussi des difficultés à lire le nombre 372 000.

Claude sait globalement lire et écrire les nombres inférieurs à 9000, mais a des problèmes de type syntaxique, notamment avec les difficultés des zéros intermédiaires.

Structure du système de numération (1er entretien)

Compter une collection d'objets :

Nous éparpillons tout d'abord une cinquantaine de dés de couleurs différentes sur la table et nous demandons à l'adulte de nous dire combien il y en a.

La main gauche prend un paquet de 5, puis la main droite prend un autre paquet de 5. Il rassemble le tout en un paquet de 10 qu'il met de côté.

Il compte à la fin ses paquets de 10 et les dés restants.

Sa méthode, utilisant la numération en base 10, est très rapide et efficace.

Calcul mental : utiliser la structure du système de numération

Calculer : (exercice écrit et résolution orale, 1er entretien)

10+20 ; 23+10 ; 10+47 ; 30+7 ; 50+41 ;

Dans ces opérations, Claude ne réfléchit pas et calcule automatiquement.

25+25 ; 15+25 ; 45+5 ;

Il sépare unités et dizaines : « 5 et 5,10, 20 et 20, 40, 50 ! ».

53+12 ; 23+42 ; 17+21 ; 9+23 ; 38+4 ; 48+12.

Claude utilise plusieurs techniques :

- en séparant unités et dizaines : « 3 et 2, 5, 20 et 40, 60, 65 » (2ème addition)
- avec les doigts : « 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31,32 » (4ème addition)
- en mélangeant les deux méthodes précédentes : « 53, 63, 64, 65 » (1ère addition)

Claude utilise donc les propriétés du système de numération (il sépare unités et dizaines) pour calculer mais a recours à ses doigts pour les ajustements.

Utilisation du système de numération dans des situations plus complexes

« On vous donne 160 F en pièces de 10 F, combien vous donne t-on de pièces de 10 F ? » (oral, 1er entretien)

Extrait de l'entretien (C : Claude, I : intervenant) :

C : « Dix pièces de 10 F, ça fait 100 F. Combien déjà ? »

I : « 160F »

C : « Ah…euh, dix pièces de 10 F, ça fait 100 F.160 F…c'est 16 ! »

« Vous allez au restaurant et vous payez l'addition de 123 €. Combien de billets de 10 € devez-vous donner ? ». (oral, 1er entretien)

C : « Dix billets de 10 €, c'est 100 €. Combien c'est déjà ? »

I : « 123 €»

C : « C'est 120 € et trois pièces »

I : « Oui mais vous ne disposez que de billets de 10 €, combien en donnez vous ? »

Claude s'embrouille...nous l'aidons :

I : « Vous avez dit que dix billets de 10 €, ça faisait.. »

C : « 100 €. Deux billets, ça fait 20 €. »

I : « Ca suffit ? »

C : « Non, il en faut un de plus »

I : « Donc en tout ?»

C : « 10 et 2 et 1, 13 billets et on me rendra 130-123, euh...7 €».

« J'achète douze stylos à 10 F pièce. Combien devrai-je payer ? » (oral, 1er entretien)

C : « dix stylos, ça me coûte 100 F. Deux de plus, 20 F. Donc je paie 120 F ».

Claude utilise la même technique pour résoudre les trois exercices. Il commence par établir les correspondances « dix objets à 10 F (ou €) valent 100 F (ou €) » : « dix pièces de 10 F, ça fait 100 F », « dix billets de 10 €, c'est 100 € », « dix stylos, ça me coûte 100F ». Puis, il ajuste son résultat en fonction du prix à payer ou du nombre d'objets à trouver.

Comme Véronique, Claude établit une projection dans l'action pour résoudre ces exercices ; c'est son habitude de payer qui semble diriger le fil de ses calculs. Nous pouvons de plus remarquer que c'est le deuxième exercice qui pose le plus de difficultés à Claude alors que c'est celui qui en a posé le moins à Véronique. Claude semble avoir plus de mal à se projeter dans l'action de cet exercice ; ceci est peut être dû au fait qu'il est peu courant de payer l'addition avec uniquement des billets de 10 €.

Il parvient néanmoins plus rapidement au résultat que Véronique car il a su utiliser directement le fait que dix dizaines font une centaine.

Claude n'a pas utilisé les opérations de multiplication et de division mais sa stratégie de résolution résulte de la façon dont il se projette dans l'action. Néanmoins, il a partiellement utilisé le système de numération : il sait que dix dizaines font une centaine mais ne semble pas conscient que x dizaines fait le nombre « x0 ».

Relations entre les nombres

Comparer

Quel est le plus grand nombre des deux : 7 et 48 ; 16 et 21 ; 82 et 78 ; 1003 et 3000 ; 1114 et 2110 ; 1 403 749 et 800 479 ; (écrit, 1er entretien)

Claude n'a pas de difficultés dans cet exercice. Il a un peu de difficultés pour la dernière comparaison et rassemble les chiffres par paquets de trois. Il n'arrive pas à lire complètement les chiffres mais en saisit la différence : « entre un million et 800 000, je prend le million ! C'est des euros ou des francs ? »

Ordre et connaissance symbolique du nombre :

Compter de 10 en 10 en partant de 2. (oral, 1er entretien)

C : « 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 13 ! »

I : « non ».

Claude recompte avec ses doigts et trouve 12. Il continue alors la suite automatiquement : « 22, 32, 42,... ».

Comme pour Véronique, compter enclenche dans un premier temps le processus d'énumération ordinale des nombres et non d'addition. Claude repère vite les régularités et continue la suite rapidement.

Compter de 5 en 5 en partant de 3. (oral, 1er entretien)

Claude ne perçoit pas la logique de la suite « 3, 8, 13, 18, 23, ... » et effectue les opérations dans sa tête à chaque étape.

Compter à reculons de 2 en 2 en partant de 18. (oral, 1er entretien)

Claude n'a pas de difficultés et la suite devient automatique au bout de quelques étapes.

> Au niveau de l'ordre, Claude a une assez bonne connaissance des nombres. Cependant, il ne fait pas d'emblée de lien entre l'action de compter et l'action de calculer.

Décomposition arithmétique :

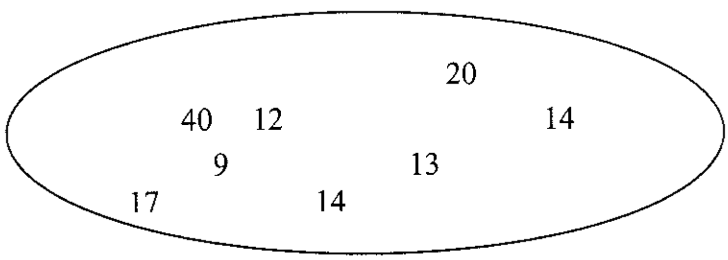
« Trouvez quatre nombres qui se terminent par 5 pour faire 60 » (oral, 1er entretien)

Cet exercice a posé des difficultés à Claude. Il se bloque sur l'opération $8 \times 3 = 24$ puis essaie quelques opérations qui ne correspondent pas au but de l'exercice.

Au bout d'un certain temps, nous lui répétons la consigne de l'exercice ; il se la redit plusieurs fois et finit par trouver : « 15 et 15, 30. Ah, c'est 15 quatre fois !».

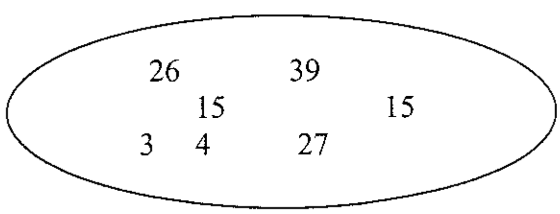
Claude n'a pas su comment s'y prendre pour résoudre cet exercice ; il ne dispose pas de technique immédiate pour le résoudre et n'a pas pu non plus le rapprocher d'une situation du réel.

« Faites 40 avec trois nombres se trouvant dans la bulle » (écrit, 1er entretien)



Il cherche pendant assez longtemps et reste bloqué sur « $17 + 13 = 30$, il me faut 10 ». Il a des difficultés à se détacher de ces deux nombres qui « s'emboîtent » si bien. Nous lui suggérons d'utiliser d'autres nombres comme 14 ; il parvient au résultat.

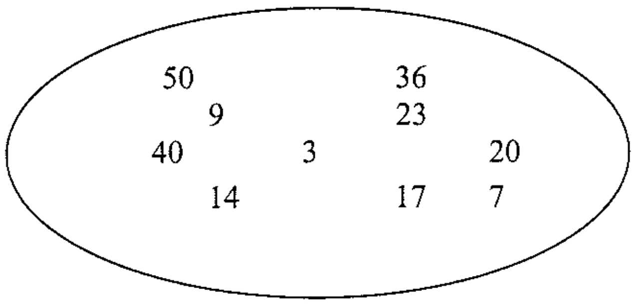
« Faites 41 avec deux nombres se trouvant dans la bulle » (écrit, 1er entretien)



Il éprouve plus de difficultés pour cet exercice. Il a utilisé une stratégie consistant à chercher les nombres les plus proches de 41 et à tester si leur somme avec un autre nombre de la bulle convient ; il reste bloqué sur le nombre 39, puis sur le nombre 27.

Au bout de quelques temps, nous lui suggérons d'utiliser le nombre 26 ; il trouve alors le résultat.

« Faites 53 avec 2, 3, 4 nombres se trouvant dans la bulle » (écrit, 1er entretien)



Claude parvient à trouver :

50+3=53

20+23+7+3=53

Claude semble plus à l'aise avec les décompositions du type 7 + 3 =10 que 4 + 6 = 10.

« Vous vous achetez une radio à 49 €. Combien de pièces de 10 €, de 5 €, de 2 € allez vous donner ? » (oral, 2ème entretien)

Claude tient tout d'abord à utiliser des pièces de 20 €. Puis il résout cet exercice assez facilement.

Nous nous rendons compte à la fin qu'il parle de centimes d'euros et non d'euros car les pièces de 10 € n'existent pas.

« Nous sommes maintenant dans un pays imaginaire où les pièces de 6 € et de 7 € existent. Vous devez donner 33 €. Combien de pièces de 6 € et de 7 € allez vous donner ? » (exercice oral et résolution écrite, 2ème entretien)

Claude a plus de mal dans cet exercice. Tout d'abord, il éprouve des difficultés à s'approprier le problème. Puis, il a du mal à changer les choix de pièces qu'il propose : il commence par trouver qu'il faut donner quatre pièces de 7 € (ce qui ne marche pas) et se trouve déconcerté par le fait que cette solution ne convienne pas. Nous l'avons aidé en lui disant qu'il pouvait essayer avec un nombre différent de pièce de 7 €.

Il parvient finalement à trouver la solution.

Claude a une assez bonne connaissance de la structure arithmétique des nombres. Il repère les nombres qui s'emboîtent et peut décomposer un nombre avec d'autres nombres spécifiés. Il a cependant tendance à rester bloqué sur un seul mode de décomposition ou sur un point de départ et a du mal à agir quand les problèmes sont trop ouverts ou trop loin de la réalité.

Le Calcul

Le calcul mental : utiliser les connaissances structurelles des nombres

Combien fait ? (écrit, 2ème entretien)

3+3+3+3+3 ;

C : « 9 et 9, 18, 21 »

Claude regroupe par paquets pour compter mais fait une erreur, vraisemblablement due à sa volonté d'aller vite.

258+242 ;

Il résout cette opération très rapidement : « ça fait 8, ça fait 10 et je retiens 1, ça fait 10 et je retiens 1, euh 500 ». Claude pose l'opération dans sa tête. Il nous dit d'ailleurs qu'il préfèrerait que les calculs soient mis en colonnes.

21+33+54 ;

C : « 3 et 4, 7, 7 et 1, 8. 5, 6, 7, 8, 9, 10. Bah ...118 »

L'erreur commise par Claude consiste à associer dix dizaines au nombre 110.

Nous lui demandons s'il est sûr de son résultat ; il refait alors exactement le même calcul et la même erreur. Pourtant, il avait associé dix dizaines à une centaine lors des exercices avec contexte (voir page 83). Ce ne sont donc clairement pas les mêmes circuits qui fonctionnent lors de la résolution de problèmes avec ou sans contexte.

14+102+6 ;

Il résout cette opération très rapidement en calculant les unités, puis les dizaines et les centaines.

1030+3140 ;

Il commence par répondre « quatre soixante dix », puis « quarante et un soixante dix ». Nous lui demandons de dire son résultat en nombre ; il dit alors « quatre cent soixante dix ». Peut être l'aurait il écrit correctement si nous lui avions demandé.

Nous lui demandons alors de lire les nombres en jeu ; il lit « cent trente », puis « mille trente » et « trois cent quatorze », « trois mille cent quatorze». Nous lui demandons une dernière fois le résultat ; il dit alors « quarante et un mille sept cent ».

Il semble qu'il sait calculer cette somme mais a des problèmes de type syntaxique pour la dire.

12+17+31+43+28.

« 8, 11, 12, 17, 19, 21. 13, 132 ».

Claude a bien calculé de tête vingt et une unités et treize dizaines mais s'est trompé quand il a fallu les rassembler.

Sa procédure de calcul mental est de compter comme s'il posait l'addition, en séparant unités, dizaines, centaines, etc., en commençant par calculer les unités, puis les dizaines, et en commençant chaque fois par le chiffre le plus grand. La lecture du résultat ou la recombinaison peut toutefois poser problème.

« Vous invitez votre famille au restaurant ; le garçon apporte l'addition. Vous vérifiez la note car le prix vous parait suspect. Bien sûr, vous n'avez pas de stylo et devez compter de tête.» (exercice écrit et résolution orale, 2ème entretien)

56
40
23
32
11
——
173 F

Claude a plus de facilités à calculer dans cette configuration ; il calcule rapidement le résultat de cette addition ainsi que la différence avec le prix inscrit. L'écriture en colonne est mieux adaptée à sa procédure.

Problèmes « de soustraction » suivant les différentes catégories de problèmes

« Vous avez 35 € en poche. Pour l'anniversaire de votre fils, vous achetez un tee shirt à 25 €. Combien vous reste-il ? » (oral, 1er entretien)

Sa première réaction est d'écrire les données 35 et 25. Puis, il répond très rapidement «5€». Nous lui demandons de réfléchir un peu plus ; il regarde ses données et nous donne la bonne réponse.

Son problème ici était, semble t-il, qu'il voulait répondre trop vite.

Nous lui reposons le même exercice dans un contexte différent lors du second entretien de façon à saisir la procédure qu'il utilise :

« Vous avez 31 €. Vous vous achetez un tournevis à 6 €. Combien vous reste t-il ? » (oral, 2ème entretien)

Claude utilise la soustraction à l'oral : « 31 moins 6, ça fait déjà 30, j'enlève encore 5, 25 ! ».

Ce type de problème est familier et il n'a aucun mal à les résoudre. Il a de plus recours au calcul pensé pour effectuer sa soustraction.

D'autre part, il discute le prix du tournevis, qui, selon lui, est très cher.

« Nous décidons de partager nos économies. Vous avez mis 22 €. A nous deux, nous avons 45 €. Combien ai-je mis dans la cagnotte ? » (oral, 1er entretien)

Nous lui demandons de ne pas écrire. Nous lui disons plusieurs fois le problème et il se le récite plusieurs fois dans sa tête. Il est un peu plus long à comprendre l'exercice et à trouver une stratégie de résolution mais parvient finalement au résultat. La question qu'il se pose est alors du type : « combien faut-il rajouter à 22 pour avoir 45 ? ».

« Vous en avez marre d'arriver en retard et vous décidez donc de vous acheter une montre. Vous hésitez entre une montre à 70 € et une autre à 96 €. La dernière montre coûte combien de plus que la première ? (oral, 1er entretien)

Il répond « 16 € », puis après intervention, il trouve « 26 € » et affirme : « Ca fait presque 200F de différence ! ».

Nous lui reposons le même exercice dans un contexte différent lors du second entretien de façon à saisir la procédure qu'il utilise :

« Vous voulez vous achetez des gants de moto. Vous hésitez entre une paire à 70 € et une autre à 96 €. La dernière coûte combien de plus que la première ? » (oral, 2ème entretien)

Tout d'abord, Claude commence par discuter le prix des gants qui, selon lui, sont beaucoup trop chers. Nous changeons les gants pour un casque.

Il commence alors à répondre que le deuxième casque coûte 16 € de plus. Nous lui répétons les valeurs en lui faisant comprendre qu'il a tort et Claude affirme alors : « 70, 80, 90, ah non 26 € en plus ».

Claude parvient à résoudre l'exercice sans utiliser la soustraction et met en route une procédure de 2ème niveau (cf. l'apprentissage du nombre).

Nous pensons que l'erreur des 16 €, commises deux fois, est liée à la désignation orale du nombre 96, dans lequel on peut entendre « seize ».

Claude parvient à résoudre les différentes catégories de problèmes, mais rencontre des difficultés de différentes natures : - de mise en situation ; - dues aux nombres en jeu. Son rapport au réel est de plus très présent lors de la résolution des problèmes. Il utilise la soustraction uniquement dans le premier exercice (dans lequel la mise en situation semble la plus évidente) et des procédures de 2ème niveau dans les deux autres. A part dans le premier exercice où il utilise le calcul pensé, Claude ne fait pas vraiment intervenir les propriétés du système de numération dans ces exercices.

Niveaux des procédures

Recherche de la valeur d'un ajout

« Vous avez 24 € en poche. Vous allez à la banque, au marché,..., et vous revenez finalement chez vous avec 66 €. Combien avez vous en plus à la fin de la journée ? » (exercice oral et résolution écrite, 2ème entretien)

Cet exercice a été difficile pour Claude au niveau de la compréhension.

Il commence par additionner les valeurs en jeu, probablement à cause de l'emploi du mot « plus » dans la question.

Nous lui disons une nouvelle fois l'exercice. Il utilise alors une procédure de 2ème niveau de type *combien faut t'il rajouter à 24 pour arriver à 66* : « 4, 64, 65 ,66 ». Puis, après un petit temps, s'embrouillant, il affirme : « oh, j'ai dû dépensé dans les 17-18 euros ».

Nous lui demandons alors de nous expliquer comment il a fait pour trouver cela.

C : « Bah voila, j'avais 66 € et je suis parti avec 24 €. J'ai fait 66 moins 24. 4, 5, 6, ça fait 2. 2, 3, 4, 5, 6, ça fait 4. 42 ».

Le fait de l'interroger sur sa façon de faire lui permet de trouver la solution ; il utilise le mot « moins » correspondant à la soustraction et donc à une procédure de troisième niveau mais son calcul met en jeu l'addition : « 4, 5, 6, ça fait 2. 2, 3, 4, 5, 6, ça fait 4. 42 » et traduit donc une procédure de deuxième niveau.

Nous lui demandons ensuite à quoi correspond le nombre 42 et il s'embrouille encore une fois.

Ces confusions semblent être dues au fait que Claude a de grandes difficultés à se projeter dans l'action dans ce problème. En effet, celui ci est en contradiction avec les habitudes de la vie courante : en général, lorsque l'on va faire des courses, on revient avec moins d'argent ce qui n'est pas le cas dans ce problème.

Claude se situe entre le 2ème niveau et le 3ème niveau dans le cas des problèmes dits de soustraction ; ses démarches dépendent vraisemblablement du contexte choisi et des nombres en jeu.

Problème de groupement réitéré

« Nous avons 235 paquets de gâteaux. On veut faire des lots de 4 paquets avec ces gâteaux. Combien de lots peut-on former ? Y aura t-il des paquets de gâteaux en rabe ? » (exercice oral et résolution écrite, 2ème entretien)

Après quelques essais maladroits, Claude utilise une procédure de 2ème niveau.

Il procède par essais : « si je fait 32 lots, ça me fait 32 plus 32, 64, plus 64, 128 paquets. Ce n'est pas assez. J'essaie avec 64 lots, 64 et 64, 128, 128 et 128, 256, c'est trop... ».

Il essaie ensuite par la même technique avec 62, 60, 55 et 57 lots puis tombe enfin sur 58 lots.

Dans cet exercice, Claude met en place une technique essais-erreurs, différente de celles utilisées dans les exercices précédents. Cette technique consiste à effectuer ses calculs en utilisant le doublement sans tenir compte de ses calculs précédents: par exemple, pour trouver le nombre de paquets correspondant à 64 lots, il aurait pu utiliser la valeur du nombre de paquets correspondant à 32 lots et ainsi directement doubler 128, pour calculer le nombre de paquets correspondant à 62 lots, il aurait pu utiliser la résultat précédemment établi concernant le nombre de paquets correspondant à 64 lots et ainsi effectuer l'opération 256-8 = 248 paquets (il y a deux lots soit huit paquets de différence entre 62 et 64 lots), ce qu'il ne fait pas. Dans chacun de ses calculs, Claude ne repart pas des résultats précédents et refait ses calculs en utilisant les doublements.

Notons que Claude a demandé à un moment : « il faut pas faire une sorte de division ? Mais la division je sais pas trop... ». Il ne pouvait certainement pas utiliser la division, étant donné qu'il ne maîtrise pas parfaitement l'algorithme de la division. Il semble néanmoins commencer à lui attribuer un sens.

Conclusion

Une histoire de vie

Claude a 48 ans, vit seul et a six enfants. Il ne sait pas lire, ou très peu. C'est un passionné de moto. Il attache une grande importance à l'argent.

Dès l'âge de 7 ans, il est envoyé dans un hospice de bonnes sœurs puis on l'envoie dans les Vosges, chez les curés, vers 15 ans. Il vit alors avec une trentaine d'autres jeunes dans une ferme, où il s'occupe des animaux. Ce sont ces personnes qui ont éduqué Claude mais il n'a pas de souvenir d'une véritable scolarisation, de cours formels de la part des bonnes sœurs et des curés.

Il est « libéré » vers 18 ans et commence alors toutes sortes de travail : éboueur pendant 9 ans, soudeur (de cages d'oiseaux), garçon de café pendant un an, marchand de ferrailles chez Bonn pendant 3 ans, teinturier de tapis chez Jules Flippo pendant 6 ans et travaille à l'abattoir de Lille. Il a fait un an de prison.

Il changeait de travail pour obtenir une meilleure rémunération.

Il est resté 6 mois au chômage en 1980 et l'est depuis 1996, date à laquelle il a eu un accident de moto et est resté 2 ans et demi dans le coma.

Claude est au CUEEP depuis fin 1999, où il est resté en Math départ jusqu'en février 2002 et est alors monté en Math de base.

Pour lui, le CUEEP lui permet d'être rémunéré (il touche l'ARE, Allocation de Retour à l'Emploi) ; c'est la raison première qui le mène ici. Il a aussi appris un peu à lire, ce qui est considérable selon lui, bien qu'il s'interroge sur l'utilité de lire arrivé à 50 ans.

Claude est quelqu'un de sûr de lui et cela est perceptible dans sa façon d'apprendre et son attitude pendant les séances : il a du mal à remettre sa façon de faire en question et accepte difficilement de la changer, il « impose » quelquefois sa méthode aux personnes se trouvant à côté de lui.

Son projet, c'est de trouver un travail le plus rapidement possible, quel qu'il soit. Il pense ne pouvoir rien faire d'autre que de la manutention.

Son rapport aux nombres

Nous dressons un bilan du rapport au nombre de Claude, issu des différents entretiens que nous avons effectués avec lui.

Le nombre

Claude sait globalement lire et écrire les nombres réguliers inférieurs à 9000, mais a des problèmes avec ceux comportant des zéros intermédiaires.

Il a une connaissance relativement bonne de la structure de numération : il utilise ces connaissances dans le comptage (il regroupe les éléments par paquets de dix), le calcul mental (il calcule en séparant unités, dizaines, centaines), la comparaison (il observe le nombre de chiffres puis compare en commençant par la plus grande unité), pour lesquels il n'a pas de difficultés. Il ne l'utilise en revanche que partiellement dans des situations plus complexes ; il est conscient que dix dizaines font une centaine mais ne l'est pas sur le fait que x dizaines fait le nombre écrit « x0 ».

Claude a une assez bonne connaissance de la structure arithmétique des nombres. Il repère les nombres dont les unités sont complémentaires à 10 et peut décomposer un nombre avec d'autres nombres spécifiés. Il a cependant tendance à rester bloqué sur un seul mode de décomposition.

Le calcul

Claude est bon en calcul mental. Il utilise la technique de poser l'opération dans sa tête et n'utilise pas vraiment les propriétés arithmétiques des nombres. Sa technique a des limites et il éprouve des difficultés quand le nombre d'opérations est trop grand.

La résolution de problèmes

Claude parvient à résoudre des problèmes dits de soustraction de différentes catégories, mais en utilisant des procédures distinctes.

La façon dont il tient compte du rapport à la réalité lorsqu'il se représente un exercice, les procédures qu'il met en place pour le résoudre, montre qu'il tient un raisonnement essentiellement basé sur son expérience. Il développe des stratégies « qui marchent », longues quelquefois, mais dont il est sûr de la validité.

Quand les problèmes ne sont pas « naturels », c'est-à-dire n'apparaissent pas dans la vie quotidienne sous le contexte décrit, Claude a plus de difficultés à se le représenter mentalement. Mais en règle générale, il a beaucoup plus de facilités à résoudre des problèmes avec contexte.

Claude n'a pas encore atteint le 3ème niveau de résolution dans les problèmes de soustraction et de division, il n'associe pas systématiquement le geste mental de résolution (par exemple « x pour aller à y ») à l'opération arithmétique associée (y-x).

Claude est d'une manière générale motivé à résoudre les problèmes et n'hésite pas à s'engager dans des démarches plus ou moins longues pour arriver à ses fins.

Nous allons maintenant analyser ses compétences en groupe ainsi que celles des autres stagiaires de « Math de Base » sur des problèmes portant plus sur le raisonnement.

III. Analyse des observations en séance

Dans cette partie, nous présentons et analysons les stratégies utilisées par les adultes ainsi que les comportements et les réactions que nos problèmes ont suscités dans le groupe Math de Base.

Nous avons observé, lors des différentes séances que nous avons passées au CUEEP, que les difficultés des stagiaires provenaient du fait qu'ils occultaient ou n'effectuaient pas correctement certaines des étapes décrites ci-dessous :

- Compréhension du problème : première perception de l'exercice, représentation mentale de la situation décrite (contextes), décodage des symboles (support).
- Analyse du problème : sélection des données pertinentes, relations entre les données.
- Résolution : calculs, mise en jeu des connaissances…
- Validation : on vérifie que ce que l'on a trouvé convient au problème.

Ainsi, après avoir explicité le contrat didactique établi implicitement avec les stagiaires, nous allons étudier l'influence des représentations, des contextes et des valeurs numériques dans les différentes étapes de résolution décrites ci-dessus.

Les problèmes que nous avons travaillés faisant intervenir des raisonnements particuliers, nous précisons ensuite comment les théorèmes en acte T1 et T2 ont été mis en jeu par les stagiaires.

Enfin, nous proposons un compte-rendu du test du 30.05.02, qui nous permet de reprendre différents points d'analyse de cette partie.

A. Apprentissage et contrat didactique

1. Le contrat didactique

Selon Brousseau (Brousseau, 1986), le contrat didactique est la « règle du jeu » établie essentiellement implicitement en mathématiques entre l'enseignant et les apprenants dans une situation.

En effectuant systématiquement les corrections de nos situations problèmes et en mettant en valeur le rôle du raisonnement et son efficacité par rapport aux stratégies par essais-erreurs, nous avons établi implicitement un contrat didactique avec les stagiaires : il s'agissait de résoudre les problèmes en analysant la situation décrite et en raisonnant.

Lors de la première séance, un grand nombre de personnes ont utilisé des méthodes par essais-erreurs pour résoudre les problèmes. Ceci était prévisible dans la mesure où la méthode générale visée nécessite des compétences d'analyse et de raisonnement, ce qui est justement une des difficultés de ce public. En outre, les méthodes par essais-erreurs sont conceptuellement beaucoup plus économiques et s'appuient sur le concret et l'immédiat : on n'a pas besoin de réfléchir beaucoup pour supposer des valeurs et vérifier ensuite si celles-ci conviennent. Dès la fin de la première séance, après les corrections et les commentaires sur les façons de procéder qui les accompagnaient (nous affirmions par exemple que la méthode par essais-erreurs ne fournissait pas toujours les moyens de résoudre les problèmes), nous avons sans doute établi implicitement avec les stagiaires un contrat didactique sur la manière de résoudre ces problèmes.

Evidemment, tous les stagiaires n'ont pas suivi les règles de ce contrat. Quels sont les facteurs qui les ont « empêchés » de suivre les procédures attendues ?

2. Apprentissages des adultes et premières hypothèses

A la fin des séances, tous les adultes n'en sont pas au même point. En effet, certains affichent de grandes capacités à raisonner dans n'importe quel contexte et d'autres au contraire ont beaucoup de mal : Gilbert a utilisé à chaque séance la méthode par essais-erreurs, Véronique et Fatma adoptent très vite la méthode générale visée, Claude adapte les raisonnements proposés à ses propres méthodes, Tahar et Elisa essaient de mettre en œuvre le raisonnement mais n'y parviennent pas toujours à cause de la représentation du problème, les stratégies de Françoise varient jusqu'à la fin ; elle n'a pas encore opté pour une méthode personnelle.

Même au bout de quelques séances, lorsque nous affirmons clairement qu'il faut comparer pour aboutir au résultat, quelques adultes n'effectuent pas cette étape et cherchent directement à répondre à la question posée. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu'ils ne prennent pas le temps de le faire dans le but d'accéder le plus rapidement au résultat, ou bien que les processus cognitifs requis pour cette analyse sont trop loin de leur façon de penser (ce qui semble être le cas de Gilbert), ou bien comme Claude qu'ils se situent hors contrat. Précisons cela à travers l'analyse des comportements de ces personnes.

Claude

Claude n'a pas vraiment de difficultés au niveau de la mise en route de raisonnements (il nous a déjà montré des facultés à raisonner au cours des séances quand nous lui demandions de justifier certains résultats) mais présente une grande rigidité dans la remise en question de ses méthodes ; il a du mal à entrer dans le contrat.

Dans la plupart des exercices, il se situe entre le raisonnement et sa méthode par essais-erreurs : il est conscient que le fait de faire la différence entre des valeurs va pouvoir lui apporter des renseignements pertinents, donc effectue quelques calculs et utilise les valeurs obtenues pour élaborer sa stratégie par essais-erreurs.

Toutefois, il lui arrive, quand sa méthode par essais « ne marche pas » de commencer à raisonner. Par exemple, dans les exercices abstraits, quand il est assez difficile pour lui d'évaluer les valeurs des objets en jeu car ces objets n'ont pas de valeur réelle dans la vie courante. Il est alors « contraint » à suivre un raisonnement. Notons que les exercices abstraits produisent des effets inverses selon les individus : Françoise utilise une méthode par essais pour les résoudre et Claude utilise la stratégie visée.

Gilbert

Gilbert a utilisé pratiquement à chaque problème la méthode par essais-erreurs. Le problème de Gilbert n'est pas à proprement dit de rigidité car il ne refuse pas nos méthodes et écoute attentivement ce que l'on dit. Ce type de raisonnement est simplement très difficile pour lui à effectuer. Il est cependant tout à fait capable de mettre en jeu T2, si nous l'aidons. Dans le problème « Au marchand de glaces » avec les nouvelles données[19], il trouve, en interaction avec Marie Christine, que deux glaces valent 34F. Puis qu'une glace vaut 17F.

MC : « une glace coûte 17F. Donc deux verres ça fait combien ? »

G : « il faut arriver à 38 ! ».

Cet extrait d'entretien montre que Gilbert peut mettre en oeuvre les théorèmes en acte T1 et T2 : il nécessite beaucoup d'accompagnement pour suivre un raisonnement et activer ces théorèmes.

[19] Après la correction de ce problème, nous avons demandé aux adultes de résoudre ce problème avec les données 72 F et 38F au lieu de 67 F et 37F.

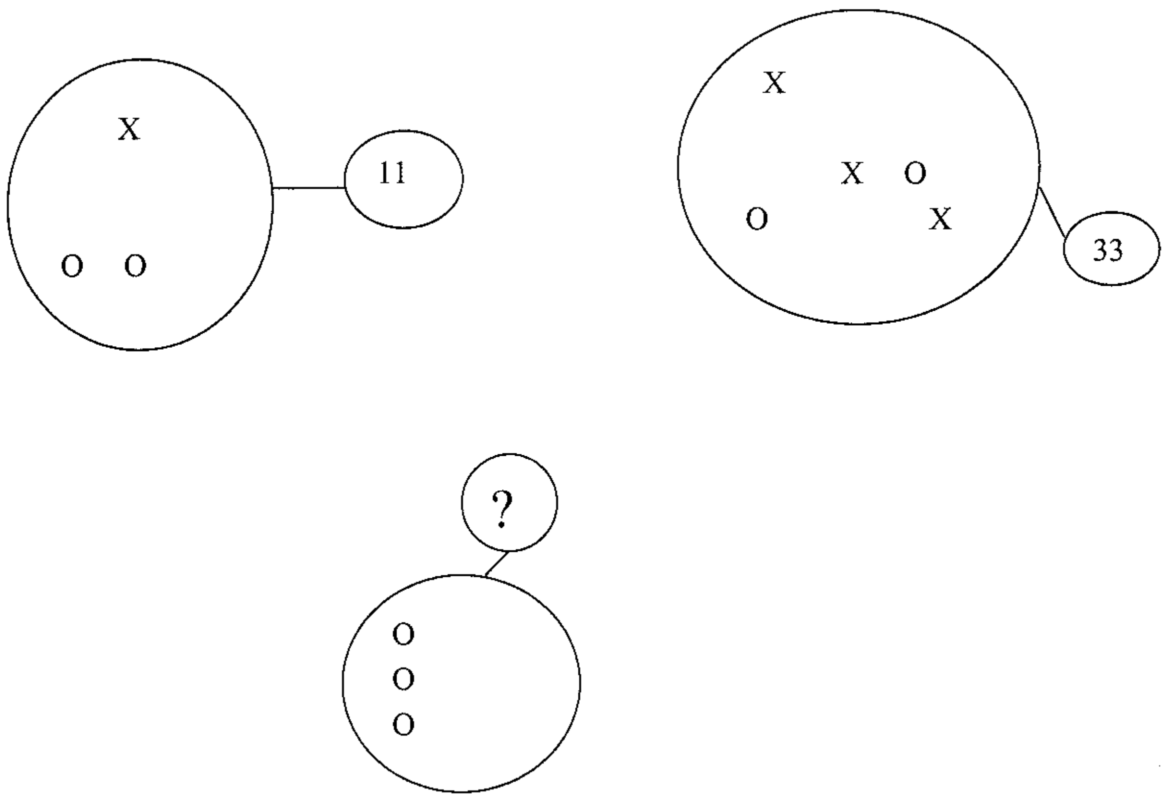
D'autres personnes de ce groupe peuvent effectuer des raisonnements avec d'autres types d'aide : pour certains, il suffit quelquefois d'être à côté et de leur dire de bien comparer et d'analyser la situation, pour d'autres, il suffit de valider leur raisonnement à chaque étape car ceux-ci manquent de confiance en leur travail.

Ce type de raisonnement peut être très loin de leur façon de penser. C'est semble t-il le cas de Gilbert qui a beaucoup de difficultés à suivre seul un raisonnement ; l'environnement de Gilbert n'a sans doute pas favorisé ce mode de pensée de même que le fait de ne pas avoir fréquenté l'école ou du moins pas assez longtemps. En effet, déduction, classification, comparaison et autres processus logiques se retrouvent dans toutes les disciplines scolaires et pas seulement dans les mathématiques. Nous supposons que si ce travail avait été fait avec des personnes ayant beaucoup plus fréquenté l'école, ils auraient employé plus rapidement le raisonnement. Ceci reste toutefois à vérifier.

Etudions maintenant le cas de Véronique, qui n'a jamais fréquenté l'école et qui affiche des facultés surprenantes.

Véronique

Chez Véronique, les raisonnements permettant de résoudre les problèmes ont tout de suite parus clairs à son esprit. Lors de l'entretien du 25.04.02, nous avons choisi d'étudier la solidité de sa procédure à travers une situation originale mathématiquement par rapport aux précédentes:



Ce problème, construit comme les précédents, est de type I-B, et admet pour solutions X = 11 et O = 0. Nous supposions que la valeur nulle de O engendrerait des confusions chez Véronique et nous permettrait de tester la solidité de son raisonnement.

Véronique reconnaît bien sûr le type d'exercice et le support rencontré déjà quelques fois et commence ainsi à trouver la valeur d'une croix : 33-11 = 22 :2 = 11. Elle cherche ensuite la valeur d'un rond en se plaçant dans la première bulle et s'exprime alors : « Ca va pas. C'est pas possible » puis essaie alors dans la deuxième bulle : $11\times3 = 33$ et s'exprime alors : « mais c'est pas possible ton exercice ! Il ne marche pas ! », puis elle refait la même procédure et effectue les calculs à l'aide de sa calculatrice : « non, non, ça marche pas... ». Ce qui est surprenant est qu'à aucun moment elle ne met sa procédure en doute et accuse l'énoncé plutôt que sa méthode ! Sa procédure semble donc solide. Nous l'aidons ensuite à terminer l'exercice (« marque la valeur 11 sous la croix, alors quelle valeur faut-il donner au rond pour que ça marche ? ») et elle trouve le résultat.

Si Véronique et Fatma ont eu tant de facilités à effectuer des raisonnements pour résoudre nos problèmes, c'est qu'elles ont vraisemblablement déjà mis en jeu les compétences cognitives requises pour effectuer nos problèmes dans d'autres situations. La façon de penser, de raisonner se développe dans les familles, selon les cultures et dans les activités de la vie quotidienne. Nous pouvons supposer que c'est leur environnement général qui leur a permis de développer des compétences cognitives.

Les premières difficultés observées relèvent de problèmes de contrat et de mise en jeu de processus cognitifs. En étudiant les stratégies de résolution des stagiaires à chaque problème, nous avons noté que celles-ci variaient selon les problèmes. Les procédures résultent en grande partie de la façon dont ils interprètent et analysent les problèmes. La représentation des exercices joue à ce niveau un très grand rôle : certains supports ou contextes peuvent engendrer des erreurs d'interprétation ou influencer des méthodes de résolutions.

B. Influence des représentations dans la compréhension et l'analyse des problèmes

Nous étudions dans cette partie comment les contextes et les représentations peuvent agir au niveau de la compréhension, de la dévolution et de l'analyse d'un problème.

1. Perception immédiate

La façon dont les stagiaires perçoivent dans l'immédiat le problème peut jouer sur la procédure qu'ils vont utiliser : un exercice avec des formes géométriques aura plus l'apparence d'un exercice de logique pour certains d'où la nécessité de raisonner. Pour d'autres, cela leur apparaîtra comme un casse tête, un problème difficile à résoudre en raisonnant, d'où une méthode par essais. Par exemple, Françoise résout les problèmes avec des symboles géométriques en utilisant la méthode par essais, et effectue des opérations dans les exercices contextualisés.

Ainsi, dans un exercice paraissant hors d'atteinte, le contrat est rompu et l'on passe directement à la phase de résolution sans analyser le problème ou chercher à faire des liens avec les autres problèmes que l'on aurait résolus auparavant. C'est ce qui s'est passé avec l'exercice 2 effectué durant la séance du 25.04.02 ; devant la représentation non familière et pas forcément compréhensible du problème, au lieu de demander quelques explications, certains adultes effectuent cet exercice avec une méthode sans rapport avec la situation.

2. Interprétations inadéquates liées à l'implicite des situations

Nous avons observé des erreurs d'interprétation ou de décodage de nos problèmes, liées à l'implicite des supports et au rapport au réel que les adultes peuvent entretenir.

L'implicite du jardin dans « Au Village »

Les premières réactions, à la découverte de cet exercice, furent de prendre la règle et de mesurer le jardin :

- Véronique compte les brins d'herbe.

- Sur le brouillon de Françoise, on peut lire :

11 + 2c = 1 (sur la feuille, le jardin mesure 2 centimètres)

14 + 4c = 1

Françoise additionne les données qu'elle a recueillies, elle a mesuré les jardins avec sa règle : 2c (2 centimètres) et 4c (4 centimètres) correspondent à la largeur des jardins du premier et du deuxième dessin.

Françoise traduit l'énoncé avec des symboles mathématiques. Nous avons deux hypothèses concernant la façon dont a raisonné Françoise :

H1 : Elle désigne par 11 la largeur de la première maison, par 14 celle de la deuxième maison : 11 + 2c et 14 + 4c sont les largeurs des pavillons correspondant au premier et deuxième dessin. Ainsi, « 11 + 2c = 1 » signifie « la largeur du pavillon représentée par le premier dessin vaut 11+2c ».

H2 : Elle a compris que 11 et 14 sont les largeurs des maisons avec les jardins. Pour avoir la largeur de la première maison, il faut retrancher la largeur d'un jardin ; elle utilise le signe « + » à la place du signe « - » pour noter ce fait. Le signe « =1 » correspond alors à la largeur d'une maison.

Dans ces deux hypothèses Françoise fait une confusion dans l'interprétation des flèches : elle confond les largeurs réelles et les largeurs mesurées sur la feuille.

Selon la première hypothèse, elle fait encore une erreur au niveau de l'interprétation des flèches : les flèches désignent les largeurs des ensembles maison-jardin et jardin-maison-jardin et non uniquement la largeur des maisons.

Selon la seconde hypothèse, elle met en jeu T2 : « connaissant la largeur du jardin, je peux déduire les largeurs des première et deuxième maisons ».

D'autres stagiaires raisonnent de cette manière : ils trouvent la largueur de la maison en effectuant l'opération 11-2 = 9. Ces adultes ont compris que la première flèche désigne la largeur maison-jardin et ont mis T2 en jeu. La grande confusion, comme chez Françoise, est de confondre les données symboliques et les largeurs mesurées sur la feuille.

Le fait d'observer les stagiaires mesurer le jardin et non la maison nous a conduit à penser que c'est la façon dont est représenté le jardin (symbolisant en fait les graduations d'une règle) qui a focalisé l'attention des stagiaires : l'implicite de la graduation a engendré une mauvaise interprétation et analyse du problème.

L'implicite du panier dans « A Franprix »

Françoise prend en compte le panier parmi les variables du problème ; elle attribue une valeur au panier comme elle en attribue une au fromage. Sur sa feuille, on peut lire : « un painier 3 poulet », « 1 painier 1 poulet et un fromage ».

L'implicite dans « Les immeubles »

« Les immeubles » est un problème que nous avions distribué aux stagiaires comme un devoir à faire seuls ou en tutorat, dans le but d'analyser la compréhension du support de mesure avec les flèches et d'analyser ce qu'ils ont retenu de la séance.

Dans cet exercice, nous avions dessiné des bâtiments de hauteurs et de largeurs différentes de manière à les associer à deux objets différents. Christelle résout cet exercice en ne différenciant pas les largeurs de ces bâtiments.

Nous avons deux hypothèses expliquant son interprétation de l'exercice.

Tout d'abord, Christelle a pu être influencée par le caractère symétrique des deux premiers dessins : sur le premier dessin, on peut voir *trois grands bâtiments et un petit bâtiment* et un garage (dont le tout mesure 54 m), sur le deuxième, *trois petits bâtiments et un grand bâtiment* (dont le tout mesure 45 m).

Cette représentation est trompeuse ; elle note d'ailleurs au dessus du deuxième dessin « la deuxième maison sans les garages » et déduit alors la longueur du garage : « de 45 à 54 manque 9. J'ai déduit 9m pour les voitures. ».

Puis, au dessus des trois garages, elle note : « sa mesure 9m par 3 ça fait 27 ».

Cette interprétation peut être aussi due au lien que Christelle a essayé d'établir avec le problème résolu lors de la première séance « au village ». Elle aurait reconnu le support utilisé dans « Au village » et aurait alors essayé de résoudre ce problème par analogie.

Nous pouvons néanmoins noter un transfert de la procédure ; elle commence par comparer deux dessins et à en déduire la valeur d'une inconnue puis elle procède par substitution (mais le calcul ne lui sert pas). Elle a commencé à acquérir des outils de résolution qu'il reste encore à travailler.

3. Interprétations liées au rapport au réel

Pour résoudre les problèmes, les adultes essaient de leur donner du sens en faisant référence à la réalité mais ceci peut entraîner des interprétations inadéquates du problème mathématique en jeu.

Dans « Paris-Lille en train », quelques adultes n'ont pas compris que les chiens payaient. Ceci était prévisible dans la mesure où les chiens ne paient pas dans la vie courante, mais en analysant le problème, il est tout à fait remarquable que les chiens occupent le même statut que les enfants ou les adultes. Le fait que les chiens paient était implicite au problème, et a suscité des réactions lors de l'explicitation de ce fait : « Pourquoi les animaux doivent payer ? », « Oui, mais si c'est une famille nombreuse » (Claude).

Mais ce rapport avec la réalité permet toutefois de vérifier la validité des résultats: « 300F, ça fait cher pour les chiens, ça ne doit pas être ça ! » (Claude).

De manière générale, ils désirent créer un lien avec le réel, ils convertissent par exemple en francs pour se faire une idée du prix : « oula 60 balles le chien, dans ces conditions, il reste à la maison » (Gilbert)

Dans « Au snack », Claude fait de grandes confusions au niveau de l'interprétation des données. Sa première réaction consiste à compter le nombre de personnes qui vont manger pour essayer de calculer le prix à payer par personne et non par aliment. Le contexte interagit avec ses expériences : dans la vie courante, lorsque l'on va déjeuner et que l'on reçoit l'addition pour tout le monde, chaque personne calcule le montant de sa part. C'est ce que fait Claude dans cet exercice. Son rapport au réel et ses difficultés à s'en détacher engendrent des erreurs d'analyse du problème.

4. Les stagiaires reformulent les représentations

Quelquefois, les symboles utilisés pour « coder » les informations ne sont pas explicites pour les adultes. Ils ont alors besoin de changer de représentation pour comprendre le problème.

Par exemple, dans le problème « Au village », quelques personnes ont eu besoin d'écrire avec des mots les données du problème : « une maison et un jardin fait 11 m, une maison et deux jardins fait 14m » (Nicolas). Ils ont besoin d'écrire ce que signifient les flèches, même s'ils ne sont a priori pas à l'aise avec l'écriture, car ce sont des signes avec lesquels ils ne sont pas du tout habitués.

Dans « A Franprix », Françoise marque à coté des paniers le contenu de ceux-ci.

Ce sont durant les premiers problèmes effectués en séance que nous avons observé ces phénomènes de changement de registre du dessin au texte. Nous supposons que les stagiaires ne sont pas habitués à ce type de problème et essaient de rendre la situation plus familière.

Après une ou deux séances, les adultes prennent leurs repères, saisissent rapidement les informations fournies dans le problème et ne ressentent plus le besoin de les écrire en toutes lettres : lors de la seconde séance, le tableau ne pose a priori pas de problèmes de compréhension, lors de la troisième séance, le contexte des formes géométriques ne posent pas de difficultés dans la compréhension et la dévolution des deux problèmes proposés.

Lors de la séance du 25.04.02, nous avons de nouveau observé ce phénomène de reformulation. L'exercice 2 a un support très symbolique que nous avons expliqué à haute voix : « 5□, c'est un carré plus un carré… ».

Les adultes du groupe ont alors créé de nouvelles représentations :

- Voici la représentation effectuée par Françoise, avant que la signification des symboles ait été précisée :

□ □ □ □ □
Δ Δ Δ Δ

□ □
Δ Δ Δ Δ

Françoise a compris toute seule le formalisme utilisé et reformule le problème ; notons que contrairement aux séances précédentes, Françoise n'utilise pas le texte pour reformuler l'exercice mais la représentation imagée. Elle utilise ensuite cette représentation pour mener une stratégie par essais-erreurs.

- Véronique écrit en toutes lettres la signification des symboles à côté de ceux-ci : « cinq carré », « quatre triangles », etc. Elle a juste besoin de connaître la signification du symbolisme et est capable de raisonner à partir de là.

- Touatia inscrit sur la feuille d'exercice les objets en plus petit. Elle n'a pas la place de dessiner sur la feuille tous les objets et refuse de changer totalement de représentation.

Les stagiaires créent de nouvelles représentations des problèmes afin de :

- traduire l'énoncé sous une forme plus familière pour prendre des repères ;
- construire une représentation permettant d'agir sur le problème.

Si les supports et les contextes peuvent créer des difficultés au niveau de la compréhension et de la dévolution d'un problème mathématique, ils peuvent aussi dans l'autre sens permettre de faciliter cette étape.

5. Des situations favorisant la dévolution

Nous avons remarqué que quelques problèmes ont suscité plus d'intérêt que d'autres. Tout d'abord, les contextes concernant la nourriture sont très bien accueillis !

Par exemple, dans « Au marchand de glaces », le contexte des glaces leur plait beaucoup : « moi je les mange les glaces » (Gilbert). Ils entrent dans la situation avec beaucoup d'enthousiasme. De plus, tout le monde a compris le problème sans aide ; le nouveau support (tableau) n'a pas créé d'obstacle dans la compréhension.

Dans « A Franprix » qui est seulement le deuxième exercice de ce type travaillé en séance, la situation est comprise par la majorité des adultes sans aide (à part Amina qui déplace les poulets d'un panier à l'autre).

Le problème « Au cinéma » a de même suscité beaucoup d'intérêt de la part des adultes. Ce problème a d'ailleurs été résolu de manière correcte par tous les adultes présents. Nous avons plusieurs hypothèses expliquant, cette motivation générale :

- le contexte du cinéma et son rapport à la réalité : « au fait les enfants, ça paie pas moitié prix ? »

- le caractère ludique de cette situation né du jeu entre le texte et les dessins des personnages. C'est un exercice facile mathématiquement, à contexte privilégié et à support très bien accepté par ce public. Les stagiaires travaillaient par groupe : par exemple dans le groupe de Claude, Patricia lisait le problème à voix haute et Claude inscrivait alors les informations à côté des personnages. La recherche des correspondances entre le texte et les personnages a été très bien effectuée par les adultes : ils entourent, mettent des couleurs, des prix, etc. Ces dessins ont permis aux adultes de faire des analogies avec les problèmes précédents et de construire alors un raisonnement.

Les contextes et les représentations ont donc une grande influence au niveau de la dévolution et de l'analyse des problèmes chez ce public. Il convient maintenant d'analyser les difficultés rencontrées par les adultes lors de la résolution des problèmes.

C. Les difficultés rencontrées dans la résolution des problèmes

Nous exposons dans cette partie les erreurs et les difficultés que nous avons observées lors des différentes séances.

1. Savoir saisir un problème dans sa globalité

Lors de la première séance, nous avons remarqué que les adultes ne saisissaient pas les problèmes dans leur ensemble. Illustrons ce fait avec l'exemple de Claude dans « A Franprix ». Claude se place dans le deuxième panier :

C : « je prends une boite 16F, un fromage 3F ; pour que ça fasse 51F, je prends un poulet 31F » (note : il voit un poulet dans le deuxième panier et fait une erreur de calcul)

I : « mais si tu prends ces valeurs, est-ce que ça convient dans le premier panier ? »

Claude calcule.

C : « Non, donc ça doit pas être ça »

Claude a calculé la valeur des aliments en considérant uniquement le deuxième panier. Quand nous lui faisons remarquer que les prix des objets doivent être tout le temps les mêmes et que la somme des valeurs doit partout correspondre au prix indiqué, Claude réessaie avec de nouvelles valeurs, toujours par tâtonnement ; « je donne des valeurs pour que ça fasse 51 ». Cette fois ci, il vérifie ses valeurs dans les autres paniers et se décourage assez rapidement devant la difficulté du problème. Finalement, il observe les résultats corrects de ses voisins, et les confirme par le calcul dans les trois paniers. Il nous montre sa solution en justifiant par : « ça marche partout donc c'est ça ».

A partir de la fin de la première séance, Claude prendra pratiquement à chaque fois garde de vérifier ses calculs dans tous les ensembles.

Les stagiaires ont compris assez rapidement l'implicite selon lequel les valeurs des objets doivent être partout les mêmes et satisfaire toutes les conditions. Toutefois, certains ne la respectaient pas tout le temps. Par exemple, Bruno, qui quelquefois affichait de bonnes capacités à raisonner, revenait périodiquement à des méthodes par essais-erreurs, ne prenant en compte qu'une partie des informations ou bien effectuait des calculs sans rapport avec la situation. Les calculs interviennent dans toutes les stratégies de résolution et une analyse de ceux-ci peut permettre de nous éclairer sur la manière de penser des adultes.

2. L'étape des calculs

Nous avons remarqué que les calculs effectués par les stagiaires sont souvent basés sur ce qu'ils voient. En effet, les nombres en jeu, les objets dessinés sur la feuille ainsi que la disposition des différentes données semblent influencer les adultes dans leur procédure de résolution.

La signification des calculs

Dans « A Franprix », Gilbert effectue les deux opérations 81-51 = 30 et 81 + 59 = 140. Quand nous lui demandons de nous expliquer ce qu'il fait, il est incapable de donner un sens à ses opérations et se contente de dire : « 81 moins 51 ça fait 30... ». Il effectue les opérations les plus simples et se laisse donc piéger par les valeurs numériques en jeu. Puis, il reçoit des informations extérieures sur le prix du paquet de pâtes et du fromage ; il effectue alors des opérations sans rapport avec la situation à partir de celle-ci ; par exemple « 51 + 18 = 69 ».

Lors de la séance suivante, dans le problème « Au marchand de glaces », Gilbert effectue l'opération 67-37 mais n'attribue pas de sens correct au résultat de cette opération. Quand on lui demande la raison pour laquelle il a effectué ce calcul, Gilbert ne fournit pas d'explications. D'autres personnes ont le même réflexe de calculer 67-37 mais réussissent à donner du sens au résultat lorsque nous les interrogeons.

Il semble donc que les valeurs numériques en jeu dirigent les adultes vers des calculs « faciles », sans pour autant y attribuer un sens.

De même, dans « Paris-Lille en train », les valeurs numériques en jeu (90, 70, 170) ne comportant pas d'unités, beaucoup de stagiaires effectuent toutes sortes d'opérations avec ces nombres : 170-90 = 80, 170-70 = 100, 70 + 80 =150, etc. Le progrès par rapport à la première séance est que la plupart essaient d'attribuer un sens à leurs opérations même si celui ci est erroné quelquefois : « 170-90 = 80, 80 pour les trois chiens » (Elisa).

Cet exercice, mathématiquement difficile, a posé des difficultés aux stagiaires mais la moitié d'entre eux ont tout de même réussi à le résoudre. Voici la stratégie de Patricia, Anita :

« 170-70=100 F pour 4 enfants

pour 1 enfant, coûte 100 : 4 = soit 25 F

170-90 = 80-70 = 10

pour 1 chien coûte 80-70 = soit 10F

2 chiens coûte 10+10 = 20F ».

Patricia et Anita se trouvent à la table de Claude. Elles ont trouvé le prix du billet pour un enfant avec la procédure de comparaison, ce qui semble être l'étape la plus difficile. Puis (y a-t-il eu échange avec Claude ?), elles trouvent le prix du billet du chien mais de manière non correcte.

Hypothèse : après concertation et essais, ils ont trouvé la valeur du prix du billet du chien et de la dame, et pour justifier leurs résultats ont fourni une opération « qui donne 10 ».

Des calculs freinant la résolution

Nous avons observé à plusieurs reprises comment l'étape des calculs peut freiner la résolution du problème.

Dans le problème « Les immeubles », voici la stratégie mise en œuvre par Bruno :

54-36 = 18m *Bruno calcule la largeur de deux grands bâtiments en comparant le premier et le troisième dessin.*

45-9 = 37m *Bruno calcule la largeur des trois petits bâtiments en utilisant T2 et fait une erreur de calcul.*

37 :3 = 12,33m *Bruno calcule la largeur d'un petit bâtiment, obtient un résultat ne correspondant pas à ses attentes et arrête sa procédure.*

Bruno a commencé son raisonnement de manière correcte mais la valeur qu'il trouve (liée à une erreur de calcul) le trouble. Il ne continue pas son raisonnement. Sa procédure de résolution n'est à ce stade (fin de première séance) pas encore assez solide.

Après correction du problème « Au marchand de glaces », nous avons remplacé les prix des deux lots par 78 et 38 et avons demandé aux adultes de résoudre ce problème avec les nouvelles données en essayant de raisonner. L'opération 72-38 a alors posé des difficultés à certains adultes et les a embrouillés sur le sens de l'opération qu'ils venaient de faire.

Des calculs exacts mais non pertinents

Dans « A Franprix », après avoir trouvé par un raisonnement juste le prix d'un fromage, Anita effectue l'opération 18 + 18 + 18, calculant alors la valeur des trois fromages figurant sur la feuille. Ceci a perturbé pendant un moment son raisonnement, qui pourtant était bien mené. Elle réussit tout de même par la suite à trouver la solution.

Nous avons aussi observé cette attitude à deux reprises chez Françoise : dans « Au cinéma », Françoise calcule le prix à payer pour les trois enfants, dans « Les immeubles », elle calcule la largeur de trois grandes tours dessinées sur le premier dessin.

Nous pensons que c'est le fait de voir des objets sur la feuille de même type que celles qu'elles viennent de calculer la valeur qui les poussent à effectuer ce calcul. De plus, en calculant la valeur d'un nouvel objet, il semble que Anita et Françoise cherchent à le faire intervenir dans leurs calculs ; celui paraissant le plus naturel pourrait être de calculer la valeur de l'ensemble des objets du même type.

Peut-être cette attitude est-elle aussi liée aux habitudes du quotidien. En effet, dans la vie courante, nous avons tendance à rassembler les objets de même type pour les payer, les compter, etc.

Influence des supports : disposition des données

Dans « Au marchand de glaces », le support du tableau présente les valeurs numériques les unes en dessous des autres : 67
37

Un bon nombre d'adultes de Math Départ et de Math de Base donnent directement la solution : 30 (correspondant au résultat de 67-37) ou 104 (correspondant au résultat de 67+37). La disposition des valeurs numériques peut implicitement relier à une opération arithmétique, ce qui expliquerait l'attitude de certains adultes quand on leur demande des explications sur leur calcul (I : intervenant, S : stagiaire) :

I : « C'est ta réponse ?»

S : « Oui, c'est ça »

I : « Peux tu m'expliquer ? »

S : « Bah regarde... ».

Nous ne savons pas de manière précise si la disposition des données en ligne (comme dans les tableaux ou dans les exercices abstraits de la séance du 25.04.02) ou en vrac (comme dans « A Franprix », « Des étoiles et des rectangles ») différencie nettement les procédures de résolution : l'une des deux est-elle plus favorable à l'analyse des données, à la comparaison ?

En revanche, la place des inconnues à une grande importance dans l'analyse et la résolution des problèmes. La grande difficulté rencontrée par les adultes dans « Paris-Lille en train » était de pouvoir saisir les similitudes et les différences des deuxième et troisième ligne ; notons que cette comparaison était trop difficile à percevoir par certains adultes du groupe surtout qu'il s'agissait en plus de trouver les deux bonnes lignes à comparer. Dans les exercices abstraits de la séance du 25.04.02, la comparaison était au contraire plus visible et les adultes s'engageaient plus facilement dans un raisonnement. Une erreur particulière de raisonnement est apparue à plusieurs reprises et il convient maintenant de l'analyser.

3. Erreur de partage

Nous avons observé une erreur mathématique, que nous appelons erreur de partage, apparaissant chez les adultes tout au long des séances.

Illustrons la à travers un exemple :

5y + 3x = a
3y + 3x = b
2x = ?

Les erreurs observées sont alors :

y = a-b
x = b-3y

Ces erreurs sont de même type et correspondent à un oubli de partage (ou oubli de division).

Dans « Au marchand de glaces », quelques stagiaires (dont Véronique) trouvent la valeur correcte de la glace (15F) puis utilisent T2 pour calculer la valeur d'un verre. Ils effectuent la soustraction 37-15 = 22 ou l'addition à trou 15+□ = 37 et affectent la valeur trouvée à un verre au lieu de deux. Dans la plupart des cas, ils ne vérifient pas si cette valeur convient.

Après la correction de « Au marchand de glaces », nous avons proposé aux adultes de refaire cet exercice en utilisant la méthode que nous venions d'exposer avec de nouvelles données[20] (les valeurs des objets sont alors plus difficiles à trouver avec la méthode par essais-erreurs). Le contrat didactique était alors très fort et la plupart des adultes ont tenté de suivre un raisonnement. Nous avons alors remarqué les mêmes erreurs : les personnes attribuaient la valeur de 21 F à un seul verre au lieu de deux.

Dans les deux cas, les stagiaires ont fait des erreurs au niveau de la deuxième étape et non au niveau de la première. Plusieurs hypothèses peuvent expliquer ce fait :

- la première étape insiste bien sur la comparaison, et donc sur le nombre d'objet en plus ou en moins ;

- le rapport au réel : 34 F pour un glace est cher alors que 21 F pour un verre est raisonnable.

Notons cependant que dans « Des étoiles et des rectangles II », Rachid effectue cette erreur lors de la première étape : il pose l'opération 40-31 = 9 et inscrit la valeur 9 à côté de chaque rectangle.

Ces erreurs montrent que l'apprentissage d'un raisonnement ne se fait pas en une seule étape mais est constitué de sous étapes. Ils ont compris que les théorèmes T1 et T2 pouvaient être utilisés dans des situations particulières : la différence entre deux ensembles doit être constituée d'un même type d'objet, quand on a la valeur d'un objet on peut calculer la valeur d'un autre objet. Leur attention est dirigée vers le type d'objet à considérer et non sur la quantité d'objets en jeu.

Véronique fait rarement des erreurs et les seules erreurs relevées sont de ce type. Cette erreur de partage peut être aussi due au support en jeu.

Lors du second entretien avec Véronique (le 25.04.02), nous avons testé sa capacité d'abstraction à travers les exercices suivants :

Exercice 1
A+B+B = 16
A+B = 10
A+A+A = ?

Exercice 2
3A + 3B = 78
1A+3B = 36
2B = ?

Nous avions résolu le matin même des exercices semblables où des formes géométriques remplaçaient les lettres. Néanmoins, c'est la première fois que l'exercice est posé avec des lettres. Le deuxième exercice a une écriture plus algébrique et est mathématiquement plus difficile (type I-B).

La première réaction de Véronique fut de s'écrier de stupéfaction. Nous la laissons seule et ne lui fournissons par conséquent aucune indication. Elle retrouve finalement ses repères et résout alors l'exercice 1 correctement. Sa procédure de résolution est la suivante : 16-10 = 6 ; 10-6 = 4 ; 4 + 4 + 4 = 12. Elle écrit les valeurs correspondant à A et B sous les lettres et aucune autre trace n'est inscrite.

---

[20] Nous avons remplacé 67F par 72F et 37F par 38F ; la valeur d'une glace est alors de 17F et d'un verre de 10F50.

Elle rencontre une difficulté dans le second exercice ; elle trouve la valeur de A : « 78-36 = 42 : 2 = 21 ». *Puis, elle effectue l'opération 36-21 = 15, assigne cette valeur à B et s'embrouille alors.* En la faisant réfléchir sur le sens de son opération, elle réalise la signification du « 15 » et termine son raisonnement : 15 : 3 = 5 ; 2B = 10.

Le fait que les trois lettres B ne soient pas inscrites participe vraisemblablement à l'erreur de partage commise par Véronique.

La dernière étape lors de la résolution d'un problème est celle de valider ses résultats. Nous allons présenter la manière dont les adultes effectuent cette étape.

4. La validation

La vérification de leurs résultats n'est pas systématiquement effectuée par le calcul, même lorsqu'ils utilisent un raisonnement. Ceci est notamment remarquable :

- quand ils n'ont rien compris au problème ; ils donnent une réponse sans chercher à savoir par eux même si elle est correcte.

- quand ils ne saisissent pas le problème dans sa globalité ; par exemple, ils trouvent les valeurs d'objets satisfaisant les conditions du premier ensemble mais ne vérifient pas si ces valeurs satisfont le ou les autres ensembles.

Quand ils ne valident pas leur résultat par leur calcul, ils demandent à l'enseignant de le confirmer ou ils comparent leur résultat avec les autres stagiaires. Dans ce dernier cas, l'influence d'autrui peut remettre en question la validité du résultat établi. Par exemple, dans « Au village », Françoise parvient à effectuer une procédure originale par rapport aux autres adultes :

11 + 14 = 25 *Françoise calcule la largeur de deux maisons et trois jardins*

14-11 = 3 *Françoise calcule la largeur d'un jardin*

3 × 3 = 9 *Françoise calcule la largeur de trois jardins*

25-9 = 16 *Françoise enlève ces trois jardins à l'ensemble obtenu par union et trouve alors la largeur des deux maisons.*

Cependant, après avoir exécuté cette procédure et eu confirmation de son résultat par l'enseignant, elle a adopté une autre technique, observant ce qui se déroulait autour d'elle (l'enseignant affirmait alors que la largueur d'une maison s'obtenait en enlevant la largeur d'un jardin sur le premier dessin). Elle écrit alors : « deux maisons : 8+11=19 » et raye son résultat précédent. Les informations qu'elle obtient déstabilisent totalement son raisonnement ; quand nous lui demandons de nous expliquer ce qu'elle a fait, elle s'embrouille et ne comprend pas son erreur alors que l'explication de son premier raisonnement était claire.

Le rapport au réel permet aussi de valider ou de remettre en question les résultats obtenus : « 300 francs, le chien, ça fait cher… ça doit pas être ça » (Claude dans « Paris-Lille en train »)

D'une manière générale, les adultes vérifient leur résultat en regardant à côté ou en demandant à l'enseignant.

Dans cette partie, nous avons exposé les différents phénomènes intervenant pendant la résolution de problèmes. Nous avons en particulier constaté quelques erreurs de raisonnements que nous allons continuer d'étudier en analysant plus précisément les théorèmes en acte T1 et T2.

D. Relation entre T1 et T2

1. Les opérations associées à T1 et à T2

Les théorèmes en acte T1 et T2 mettent en jeu l'opération de soustraction. Comme le montre Brissiaud (voir page 23), il est tout à fait possible de résoudre un problème dit de soustraction en utilisant l'addition.

Par exemple, dans « A Franprix », pour déduire le prix du fromage, une partie des adultes pose l'opération 51-33 = 18 et une autre partie cherche (de tête ou en posant l'addition à trou) ce qu'il faut rajouter à 33 pour obtenir 51. Dans le premier cas, cela revient à résoudre une équation type x=51-33 et dans le second cas une équation du type 33 + x = 51. Selon Brissiaud, le premier cas est plus « avancé » conceptuellement, il donne du sens à la soustraction.

Dans la résolution d'un même problème, nous avons observé ces deux types de calculs. Par exemple, dans les « Les immeubles », Françoise a utilisé la soustraction dans la première étape : « 54-36 = 18m » et l'addition dans la seconde étape : « 12+12+12 = 36 +9 = 45 ».

Lors de la première étape de chaque problème, nous avons vu qu'il est possible de mettre en jeu T1 ou T2 pour calculer la valeur du premier objet. Il est frappant de constater que les adultes mettant en jeu T1 utilisent systématiquement la soustraction, ce qui est loin d'être le cas pour les adultes utilisant T2.

Pour utiliser T1, il faut considérer deux ensembles en jeu de manière séparée et les comparer ; cette comparaison implique une différence entre deux ensembles. Or, l'idée de différence est naturellement reliée à la soustraction, ce qui pourrait expliquer ce geste. T1 intervenant en première étape de chaque problème, nous pouvons aussi supposer que les adultes ont mémorisé que la première opération à effectuer dans ces problèmes est la soustraction et l'appliquent en conséquence. Enfin, une autre hypothèse proposée par François Colmez est que, T1 étant conceptuellement plus difficile, les adultes capables de le mettre en jeu devraient être à même d'utiliser la soustraction.

Dans les problèmes faisant intervenir T2, il n'y a pas de comparaison : il s'agit de trouver combien il faut rajouter à une valeur donnée pour obtenir une autre valeur donnée. Or c'est justement l'association du geste mental « recherche de la valeur d'un ajout » à l'opération de la soustraction qui pose des difficultés à l'apprenant (voir page 24).

Résoudre ces problèmes en utilisant la soustraction peut poser des problèmes à ces adultes ; Christelle en est un exemple intéressant qu'il convient d'analyser.

2. Le cas de Christelle

Le parcours de Christelle est intéressant dans le cheminement de ses opérations : elle utilise d'abord des opérations à trou lors de la première séance dans « A Franprix » et dans « Les immeubles » (elle reformule le problème à sa façon mais exécute un raisonnement tout à fait convenable) avec un sens exact. Lors de la deuxième séance, elle tente d'utiliser la soustraction mais commet des erreurs relatives au sens de ses opérations. Dans « les fruits », elle lie pour la première fois les opérations arithmétiques et leur sens correct. Elle est absente lors de la troisième séance. Lors de la quatrième séance, elle reconnaît la fiche des exercices abstraits comme étant « les exercices de Julie ». Elle effectue le premier exercice à l'aide d'essais et d'opérations dont le sens n'est pas associé correctement. Pour les deux autres exercices, elle arrive directement au résultat (qui est alors non correct) en effectuant une soustraction.

Au fil des séances, l'apprentissage de Christelle a régressé. Quand elle résolvait les problèmes en utilisant les opérations à trou, elle parvenait à effectuer le bon raisonnement. Est-ce la volonté d'utiliser les opérations arithmétiques mises en valeur lors des différentes corrections sans les avoir assimilées qui l'a induite en erreur? Ou la représentation des exercices ? Ou encore d'avoir changé de place et d'avoir manqué quelques séances ?

Pourquoi n'utilise t-elle plus le raisonnement au bout de quelques séances ? Quels théorèmes en acte mettait t-elle en jeu ?

3. Comment reconnaître si un stagiaire utilise T2 plutôt que T1 ?

- Par l'explication fournie par le stagiaire : « ici, il y a deux objets en plus, donc le prix de ces deux objets vaut tant » fait allusion à T1, « tout cela coûte 20F, cette partie coûte 13 F, donc le reste est à 7 F » fait allusion à T2.
- Par les représentations graphiques effectuées par les adultes : dans « Des rectangles et des étoiles », nous conseillons aux adultes de s'aider de couleurs pour résoudre le problème. La plupart des stagiaires colorient de la même couleur les mêmes objets (par exemple toutes les étoiles en jaune et tous les rectangles en bleu), d'autres utilisent des couleurs par but esthétique. Véronique identifie les objets en commun à deux ensembles par une même couleur : dans « des étoiles et des rectangles II », elle colorie en jaune les deux spirales et l'étoile du deuxième et du troisième ensemble. Elle identifie en fait les objets en commun du deuxième et du troisième ensemble de façon à mettre en évidence leur différence. Elle utilise alors T1 pour calculer la valeur de cette différence.

  Pour effectuer cette première étape, Tahar se place dans le deuxième ensemble : il entoure les deux spirales et l'étoile et inscrit la valeur 31 à côté. Cette disposition fait référence àT2.
- Par l'opération mise en jeu : l'addition à trou fait clairement allusion à T2.

En analysant les stratégies utilisées par les stagiaires lors de la première étape, nous nous sommes aperçus que la plupart d'entre eux mettaient en jeu T2 pour l'effectuer. Ceci expliquerait les difficultés rencontrées par les adultes dans certains exercices dans lesquels la représentation ne permet pas directement d'appliquer T2.

4. L'échec de T2 dans le texte et dans l'écriture algébrique

L'analyse des travaux effectués par Tahar montre que celui-ci a uniquement utilisé T2 dans la résolution des problèmes. Tahar, qui affichait de bonnes performances dans les exercices où tous les objets étaient représentés, est incapable de résoudre des exercices tels que l'exercice 2 abstrait ou « Au snack ».

Les représentations des problèmes effectués durant les trois premières séances permettent d'utiliser T2 en première étape. En revanche, la représentation des problèmes travaillés lors de la quatrième séance ne le permet pas. Et c'est cela qui a mis Tahar en échec.

Analysons les représentations de ces exercices :

Exercice 2

$5 \square + 4 \Delta = 68$

$2 \square + 4 \Delta = 56$

$2 \Delta = ?$

Au snack

A midi, mes collègues et moi allons déjeuner dans un Snack.

La semaine dernière, nous avons pris 5 frites et 1 sandwich. Nous avons payé 57F.

Le lendemain, nous avons pris 3 frites et 1 sandwich. Nous avons payé 41F.

Aujourd'hui, nous avons pris 3 sandwiches. Combien allons nous payer ?

Nous constatons que les supports utilisés dans l'exercice 2 et le problème à texte (écriture algébrique et texte) peuvent fournir une représentation mentale différente du problème. Le fait que les objets ne soient pas tous dessinés « empêche » d'agir sur le problème : les adultes ne peuvent plus se représenter le problème comme ils l'avaient fait dans les autres cas et utiliser ainsi T2. Le théorème en acte T2 ne peut alors se concevoir que si une nouvelle représentation du problème est construite. En revanche T1 peut s'appliquer dans ces situations.

Dans ces exercices, Tahar n'a fourni aucune nouvelle représentation et n'a pas utilisé T1. Voici les stratégies qu'il a utilisées :

- Stratégie utilisée dans l'exercice 2 :

68-56 = 12

12+12 = 24

- Stratégie utilisée dans l'exercice « Au snack » :

57-41 = 16

16×3 = 48

Dans un premier temps, Tahar pose une soustraction : il a retenu que la résolution de tous nos problèmes commence par une soustraction. Puis il attribue au résultat de cette opération la valeur de l'objet demandé. Ce type d'erreur marque une volonté d'accéder rapidement au résultat. De plus, il ne calcule pas la valeur de l'autre objet et ne vérifie par le calcul si la valeur de l'objet trouvée est exacte. Il n'a pas su dans ce contexte établir de liens corrects entre ces situations et les autres rencontrées dans les séances précédentes.

Comme Tahar, beaucoup de stagiaires ont eu des difficultés à résoudre ces problèmes car T2 ne pouvait s'appliquer en première étape s'ils ne représentaient pas autrement les problèmes.

Le texte handicape en plus les stagiaires car la plupart d'entre eux ont des difficultés à lire et à comprendre ce qu'ils lisent. Ils perdent les informations et ont du mal à les retrouver même si la disposition du texte aide dans cette tâche.

D'autre part, la notation algébrique n'a pas beaucoup de sens pour les adultes et ne leur permet donc pas de se référer aux connaissances du quotidien.

Si les stagiaires utilisent préférentiellement T2, il semble qu'ils préfèrent encore plus T3.

5. La préférence pour T3

Dans « Au village », nous lisons sur le brouillon de Nicolas : « 11m+14m =25, c'est deux maisons et trois jardins ». Plus loin, il effectue « 14m-11m = 03 » mais ne donne pas de sens à cette opération.

Comme Nicolas, d'autres adultes peuvent mettre en jeu T3 et non T1 ; ils donnent au bout de quelques temps du sens à leur addition mais la plupart ne donnent pas de sens à leur soustraction dans ce premier exercice. La stratégie de Françoise dans ce problème utilise d'ailleurs aussi T3 (voir page 115).

La méthode générale de résolution que nous avons utilisé durant les corrections ne mettait pas en jeu ce théorème. De plus, pour les orienter vers T1 et T2, nous avions par la suite choisi des situations telles que l'utilisation de T3 soit plus complexe[21]. Malgré tout cela, T3 « résiste » jusqu'à la fin : dans le premier exercice du test « A la boulangerie », Claude représente (au brouillon) l'union des deux ensembles et le prix qui leur est associé (80 F).

Il semble donc que le théorème en acte T3 soit beaucoup plus naturel à mettre en jeu que T1 et T2. Ceci peut s'expliquer par le fait que T3 intervient plus fréquemment dans la vie de tous les jours : les exemples sont nombreux (dans les achats, dans les calculs de distance, etc.). D'autre part, T3 fait intervenir l'addition, conceptuellement plus facile que la soustraction.

Il convient maintenant de présenter et d'analyser les résultats des adultes au test que nous leur avons proposé en dernière séance.

E. Bilan du test du 30.05.02

Nous allons présenter les résultats, les stratégies et les représentations imagées effectuées par les adultes dans les problèmes « A la boulangerie » et « A Auchan » (cf. annexe) posés dans le test.

1. Résultats du test et stratégies utilisées

Après avoir interrogé les adultes sur le premier problème « A la boulangerie » et observé leurs résultats, nous avons décidé de corriger ce problème (en représentant le problème de façon imagée et en suivant le raisonnement habituel) avant de les tester sur « A Auchan ».

Nous exposons les résultats des adultes dans le tableau ci-dessous

		A la boulangerie	A Auchan
Résultats justes	1ère étape	Rachid (R), Touatia (R)	
	2ème étape		
	tout	Véronique (R), Fatma (R), Tahar (R),	Tout le monde (R, RE)
Résultats faux	tout	Elisa (E), Gilbert (RF), Bruno (E), Françoise (RF), Anita (A), Claude (E), Jean-Pierre (E), Nicolas (RF)	
	2ème étape	Rachid (RF), Touatia (RF)	

R : méthode par raisonnement ; E : méthode par essais ; RF : raisonnement faux ; A : absence de résultat ; RE : méthode de raisonnement et d'essais

[21] Nous avions choisi dans les exercices de type I-B les paramètres b, e et k tels que $b+e \neq k$ de façon à ce que le nombre k d'objets x de la question ne corresponde pas au nombre b+e d'objets x figurant dans les deux ensembles de départ.

L'ensemble des adultes a utilisé lors du premier exercice l'ensemble des stratégies que nous avions déjà observé lors des séances précédentes. Seulement trois personnes sont parvenues à résoudre totalement « A la boulangerie », tandis que la totalité du groupe (qu'il convient de nuancer à cause des copiages !) parvient à résoudre « A Auchan ». Cette différence ne peut pas s'expliquer par des raisons mathématiques ou contextuelles car les deux problèmes sont de ce point de vue similaires. Ce fait confirme ce que nous avions constaté dans les séances précédentes ; après une correction, les adultes affichent de grandes capacités à raisonner. Le fait de corriger a peut être tout simplement permis aux adultes de comprendre ce qu'il fallait faire, ou bien d'actionner les processus cognitifs à mettre en jeu dans la résolution des problèmes. Ou encore, la correction a permis d'éclairer les stagiaires sur le passage du texte au dessin et l'utilisation de la représentation imagée dans le raisonnement.

Dans « A Auchan », notons de plus que les adultes ont tous utilisé l'opération de soustraction pour calculer la valeur du premier objet et ont calculé la valeur du second objet en utilisant la soustraction ou l'addition à trou ou encore les essais. Nous présentons dans ce tableau les stratégies que certains des adultes[22] ont utilisées pour la deuxième étape.

soustraction	Opération à trou	essais
Fatma, Véronique, Rachid, Tahar, Elisa.	Gilbert, Claude, Anita	Jean-Pierre

Leurs procédures de résolutions ont-elles été dirigées par les représentations imagées qu'ils ont construites du problème ?

2. Type de représentations construites

Très peu de stagiaires ont représenté intégralement toutes les données, et omettent en particulier les valeurs numériques correspondant à la valeur de l'association des objets ou bien l'une des deux lignes.

Nous présentons ci-dessous les tableaux résumant la façon dont les stagiaires ont effectué le passage du texte au dessin.

A la boulangerie	Pas de représentation	Représentation de la première ligne uniquement	Représentation des deux lignes
Pas d'inscription des valeurs associées aux lignes	Fatma, Véronique, Amina	Touatia, Elisa	Rachid, Gilbert, Bruno, Françoise, Anita, Jean-Pierre, Claude
Inscription des valeurs associées aux lignes			Tahar, Nicolas

[22] Nous n'avons pas pu reconnaître les stratégies des autres adultes faute du manque d'informations sur leur feuille.

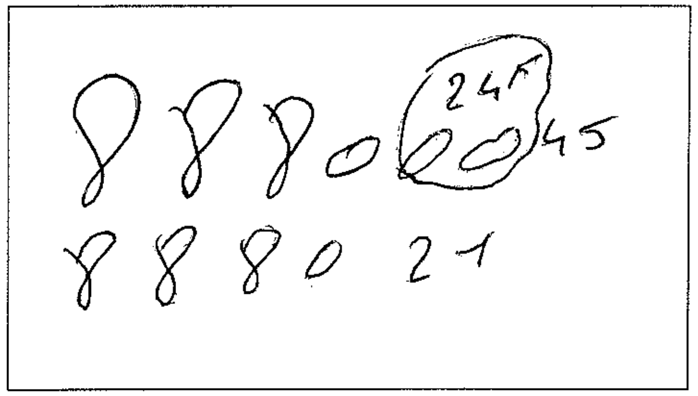
A Auchan	Pas de représentation	Représentation de la première ligne uniquement	Représentation des deux lignes
Pas d'inscription des valeurs associées aux lignes	Fatma, Amina	Anita, Bruno	Véronique, Gilbert, Touatia, Françoise, Jean-Pierre, Claude
Inscription des valeurs associées aux lignes		Nicolas	Tahar, Elisa, Rachid

Il n'y a globalement pas beaucoup de différence entre les représentations construites dans « A la boulangerie » et dans « A Auchan ».

Notons que Véronique et Fatma n'ont pas besoin de construire de représentations pour résoudre le problème.

Tahar a construit des représentations en ligne assez abstraites qu'il a utilisées pour résoudre les problèmes. Ces représentations traduisent la mise en jeu de T2.

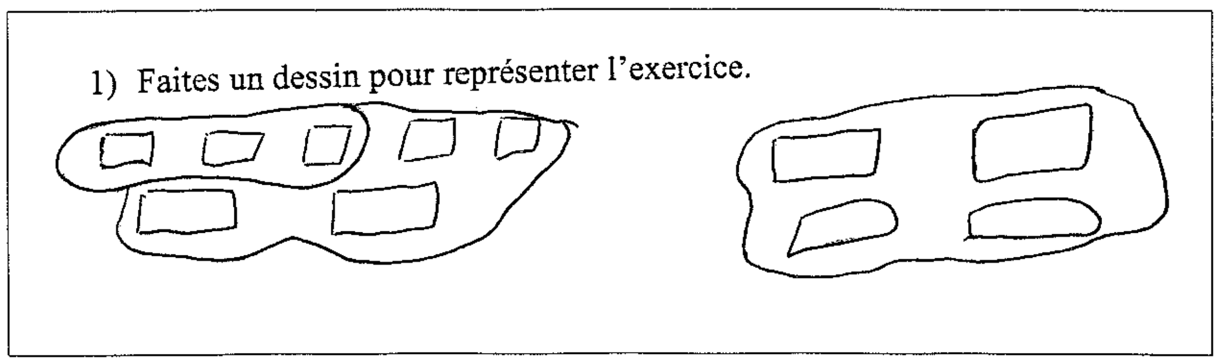
Voici la représentation qu'il a construite dans « A Auchan » :



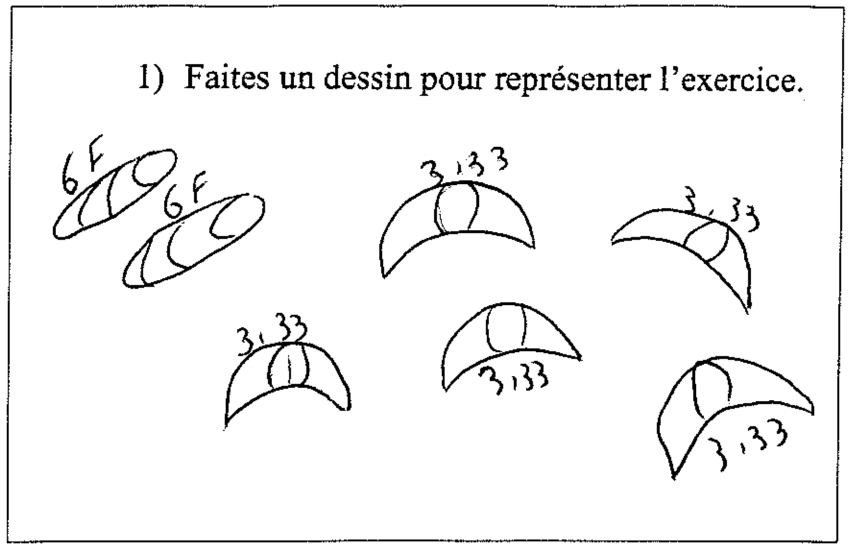
Les représentations effectuées par les adultes se sont de plus distinguées les unes de autres en fonction de :

- la disposition des données (en ligne ou non) ;
- la façon dont sont représentés les objets (de façon abstraite ou suivant leur forme réelle).

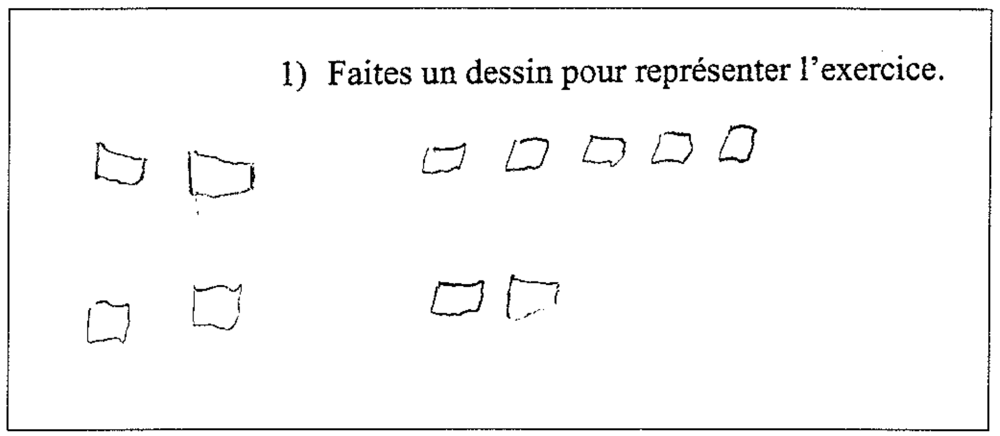
Anita a fait une représentation très abstraite et a mis en valeur la différence des deux lignes dans « A la boulangerie » ce qui montre qu'elle est capable d'effectuer le passage du texte au dessin et a compris le sens du problème. Elle ne rend cependant aucune réponse pour ce premier problème.



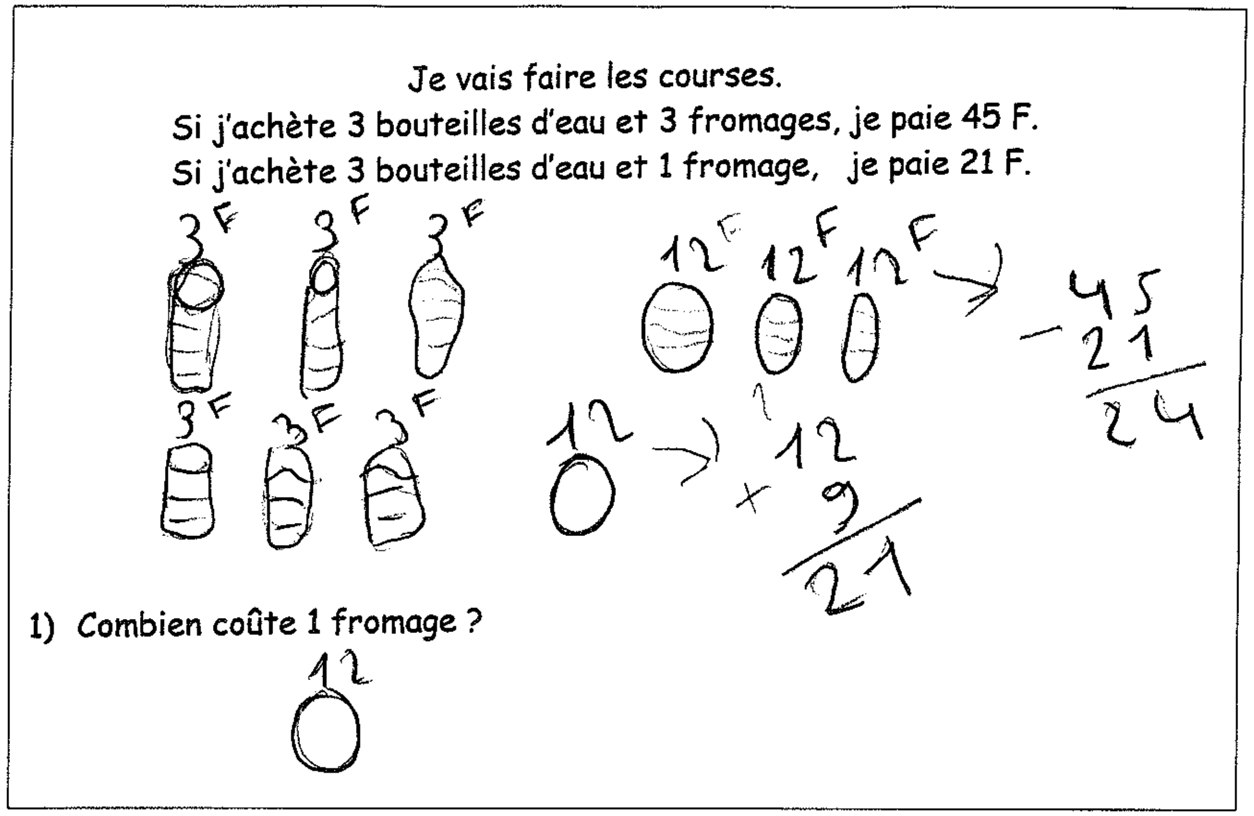
Touatia dessine uniquement la première ligne en dessinant les objets de manière très figurative et de façon non alignée dans « A la boulangerie ».



Jean-Pierre dessine au contraire les objets en ligne de façon abstraite et distingue à peine les croissants et les éclairs.



Gilbert dessine les deux lignes de façon figurée et met en jeu T2 dans « A Auchan » : il utilise l'opération à trou pour effectuer la deuxième étape, ce qui est une bonne surprise compte tenu de ce que nous avons observé dans les séances précédentes.


Je vais faire les courses.
Si j'achète 3 bouteilles d'eau et 3 fromages, je paie 45 F.
Si j'achète 3 bouteilles d'eau et 1 fromage, je paie 21 F.

1) Combien coûte 1 fromage ?

Nous voyons à travers ces représentations les capacités d'abstraction de certains adultes ainsi que la capacité à représenter de façon imagée le texte de l'énoncé. Cette représentation s'est effectuée de manière globale ou partielle et nous renvoie donc aux difficultés à saisir un problème dans son ensemble.

3. Saisir un problème dans sa globalité

Jusqu'à la dernière séance, nous observons des difficultés à saisir un problème dans son ensemble. Françoise et Bruno ont tous les deux considéré seulement une des deux lignes pour construire leur stratégie ; pourtant ils ont aussi tous les deux représenté de façon imagée les deux lignes de données du problème.

- Françoise qui a pourtant représenté les deux lignes, ne considère que la deuxième ligne pour calculer le prix des croissants. De plus, elle donne le même prix aux éclairs et aux croissants.

Voici ses réponses :

2) 34 : 4 = 8,50 *Françoise considère que les croissants et les éclairs sont au même prix et calcule la valeur de ceux-ci en utilisant uniquement la seconde ligne*

8,50 × 3 = 25,50 *Françoise a alors le prix des croissants et des éclairs et peut alors répondre à toute les questions*

3) 8, 50 F
4) 8, 50 F+ 8,50 F = 17F
5) 8, 50 F
6) 17 F

- Bruno ne considère que la première ligne.

$6 \times 5 = 30$ *cinq croissants à 6 F coûtent 30 F*

$8 + 8 = 16$ *deux éclairs à 8 F coûtent 16 F*

$30 + 16 = 46$ *cinq croissants et deux éclairs coûtent 46 F*

Il attribue alors la valeur de 6 F au croissant et de 8 F à l'éclair. Ces résultats sont plausibles dans le quotidien. Dans les autres questions, il se contente de dessiner les croissants et les éclairs.

Nous avons de plus décelé une autre erreur pouvant s'apparenter avec l'erreur de partage.

4. Une erreur de même nature que celle du partage

Touatia et Rachid ont commis une erreur que nous n'avions pas remarquée dans les séances précédentes. Décrivons la mathématiquement :

Voici le système en jeu :

$2x + 5y = a$

$2x + 2y = b$

Touatia et Rachid effectuent correctement la première étape du problème :

$3y = a\text{-}b$

$y = (a\text{-}b) : 3$

Puis, ils mettent en jeu T2 afin de trouver la valeur de deux éclairs au chocolat ; leur erreur se situe à ce niveau. Ils attribuent à 2x (deux éclairs au chocolat) la valeur b-3y au lieu de b-2y.

Cette erreur est conceptuellement similaire à l'erreur de partage. Les stagiaires utilisent les bonnes connaissances mais ont des confusions au niveau du nombre d'objets à considérer. Quand ils mettent en jeu les théorèmes en acte, leur attention porte sur les types d'objets en question et en omet la quantité.

5. Conclusion des résultats de ce test

Les résultats du premier problème montrent que pour certains adultes, ce type de problème pose encore des difficultés à la fin de notre étude.

Néanmoins, les résultats de ce test nous ont paru très positifs :

- les adultes ont pu mettre en œuvre un raisonnement a priori non évident ;
- ils ont été capables de représenter plus ou moins globalement le problème de façon imagée.

Nous allons maintenant établir un bilan sur l'ensemble des observations que nous avons menées pour notre étude.

IV. Conclusion des entretiens individuels et des séances

Dans cette partie, nous dégageons une étude comparative entre Véronique et Claude que nous avons suivi plus particulièrement lors des entretiens individuels et des séances collectives. Puis, nous faisons un bilan de séances en demandant aux adultes de s'exprimer.

A. Véronique versus Claude

Dans cette partie, nous allons comparer le rapport au nombre de Claude et Véronique ainsi que les compétences, les difficultés et les progrès que nous avons observés lors des séances en groupe.

Le nombre en tant qu'objet

- Véronique a globalement plus de difficultés que Claude à lire les nombres supérieurs à 1000. Ils semblent tous les deux avoir des difficultés liées aux zéros intermédiaires.
- Ils utilisent automatiquement tous les deux la structure du système de numération (décomposition en unités, dizaines, centaines) lors de calculs mentaux simples et dans le cas de Claude lors du comptage d'une collection. La propriété « x dizaines font le nombre écrit comme « x0 » » n'est pas utilisée dans les exercices contextualisés ; Claude met néanmoins en jeu « dix dizaines font une centaine », ce qui n'est pas le cas de Véronique.
- Claude n'a pas de difficultés à comparer les nombres entiers positifs, Véronique non plus à condition qu'ils ne soient pas trop grand (supérieur à 100 000).
- Ils relient tous les deux l'action de compter à l'aspect ordinal de la numération mais ne l'associent pas d'emblée à l'action de calculer.
- Ils ont de bonnes capacités à décomposer canoniquement les nombres.

Le calcul

- Véronique et Claude ont beaucoup employé la technique des doubles en calcul écrit comme en calcul mental.
- Claude parvient beaucoup mieux à calculer de tête que Véronique ; sa technique consiste à se poser l'opération dans sa tête alors que Véronique met en jeu des techniques de calcul réfléchi variant d'une opération à l'autre ; elle utilise les doubles, cherche les nombres complémentaires à 10, et comme Claude sépare unités, dizaines, etc.

Si Claude semble a priori plus à l'aise que Véronique dans la connaissance des nombres et dans les calculs, les capacités de Véronique à résoudre les problèmes s'avère plus performantes.

La résolution de problèmes

Analyse relative aux entretiens

Nous avons relevé des comportements similaires lors de la résolution de problèmes :

- La projection dans l'action pour résoudre des problèmes dans lesquels la situation décrite est très proche des habitudes du quotidien ;

- Des difficultés à résoudre des problèmes très ouverts, dans lesquels ils ont du mal à établir une stratégie de résolution ;
- L'utilisation des doubles très fréquente dans leur stratégie de résolution ;
- Il affichent tous les deux une grande importance à la plausibilité des données des problèmes dans la réalité (en particulier lorsqu'il s'agit d'argent) ;
- Tous les deux ont pu résoudre des problèmes de division en utilisant une procédure de $2^{ème}$ niveau. En revanche, Véronique a pratiquement atteint le $3^{ème}$ niveau de résolution pour les problèmes dits de soustraction tandis que Claude est encore au $2^{ème}$ niveau.

Analyse relative aux séances

- Véronique est très attentive et à l'écoute de l'enseignant. Claude est plus rigide, il a du mal à se détacher de ses méthodes.
- Très rapidement, Véronique ne prend en compte que l'aspect mathématique de nos problèmes. A part dans « Au village », les différents contextes et représentations ne la perturbent pas ce qui n'est pas le cas de Claude ; dès qu'il en a l'occasion, Claude rapproche les problèmes à la réalité ce qui peut entraîner des confusions dans la compréhension ou lors de la résolution de problèmes.
- Véronique utilise la déduction et la comparaison et met en jeu naturellement les théorèmes en acte T1 et T2 lors de la résolution. Claude est de même tout à fait capable d'utiliser des raisonnements faisant intervenir ces connaissances mais ne le fait pas d'emblée.
- Claude procède par essais puis combine généralement raisonnement et essais. Véronique utilise un raisonnement dans chacun des problèmes.
- Chez Véronique, nos problèmes furent très vite faciles ; elle a construit un raisonnement qu'elle a pu adapter à divers contextes et représentations. Claude a pu mettre en œuvre des raisonnements et semble avoir pris conscience que ses méthodes n'étaient pas valables tout le temps.

Conclusion

Nous avons présenté deux personnes qui semblent avoir développé dans leur quotidien une connaissance relativement bonne du nombre. Nous avons remarqué des similarités chez Véronique et Claude (projection dans l'action, techniques de calculs, difficultés pour certains exercices) qu'il serait intéressant d'étudier chez d'autres adultes pour pouvoir éventuellement établir des comparaisons sur le rapport au nombre de ces adultes.

En revanche, Véronique et Claude se sont montrés complètement différents lorsqu'il s'agissait de problèmes nécessitant un raisonnement particulier ; Claude a fait preuve de rigidité alors que Véronique au contraire s'est tout de suite appropriée des méthodes de raisonnement.

Nous avons de plus émis des hypothèses reliant leur histoire de vie et leur façon d'apprendre :

- Véronique n'a pas connu d'échec et n'a jamais fréquenté l'école, ce qui peut expliquer en partie sa curiosité et ses bonnes performances par rapports aux autres adultes qui peuvent avoir eu un mauvais rapport à l'enseignement ou avoir connu des échecs.

- Claude a construit ses connaissances sur le terrain et a vécu de nombreuses expériences, il est très sûr de lui et cela pourrait expliquer son refus de changer ses méthodes.

Les deux études (entretiens individuels et observations en séance) que nous avons menées ont été complémentaires et nous ont permis de cerner le rapport au nombre, les façons de raisonner et la souplesse ces deux adultes dans leur façon d'apprendre. Nous pensons qu'une étude élargie à un plus grand nombre d'individus serait utile pour mieux comprendre l'apprentissage des mathématiques chez ce public.

Nous allons tracer brièvement un bilan des séances que nous avons passées avec le groupe.

B. Quand les adultes nous parlent

Nous avons tout d'abord l'impression que ces adultes ont fait des progrès ; ils ont été capables de comprendre et de mettre en œuvre des raisonnements a priori non familiers, d'adapter leurs connaissances à des situations plus abstraites et de construire des représentations imagées plus ou moins partielles d'un problème à texte. Nous avons choisi de conclure sur cette analyse en présentant les réactions que nous avons recueillies en nous entretenant avec le groupe.

A la suite du test effectué lors de la dernière séance, nous avons établi un bilan avec les adultes sur la structure des problèmes proposés et leur avons demandé de construire eux-mêmes des problèmes de ce type, ce qui a suscité diverses réactions :

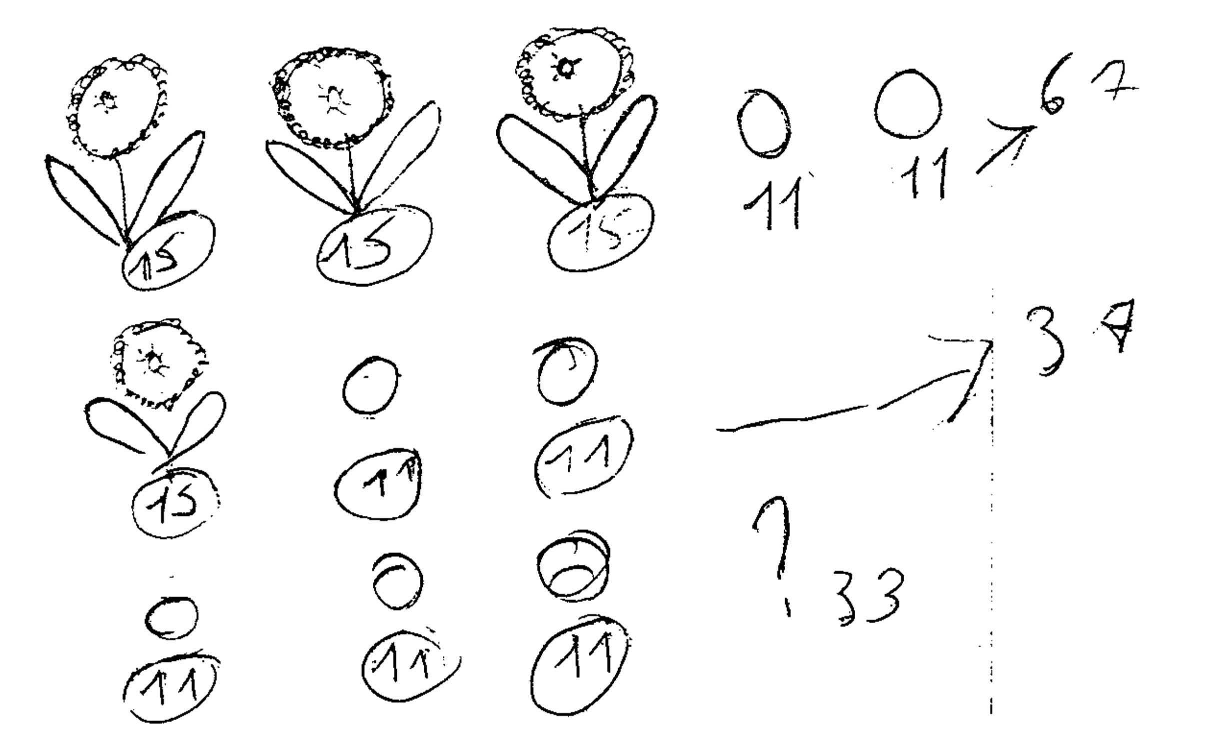
- *« On peut mettre des bouteilles de vin à la place des bouteille d'eau ! »* (Jean-Pierre), *« On n'est pas obligé de mettre des prix... on peut mettre des kilomètres aussi »* (Rachid) : ils ont compris que les connaissances mises en jeu dans nos exercices peuvent s'appliquer à différents contextes...

- *« On peut dessiner des papillons aussi ! »* (Touatia) : ces contextes peuvent être d'ailleurs plus abstraits et s'appliquer à des objets n'ayant a priori pas de valeur.

- *« on n'est pas obligé de mettre des chiffres ronds. En euros, les chiffres ne sont jamais ronds... »* (Claude) : ils peuvent ouvrir nos exercices aux décimaux.

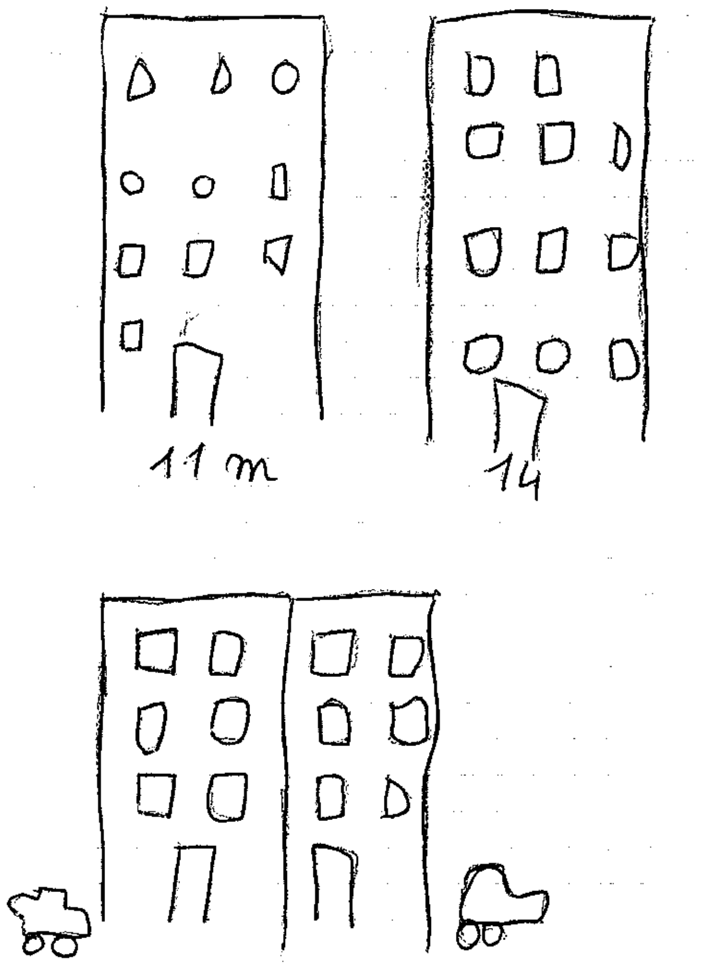
Seulement deux stagiaires ont effectué cet exercice, Françoise et Nicolas, que nous exposons.

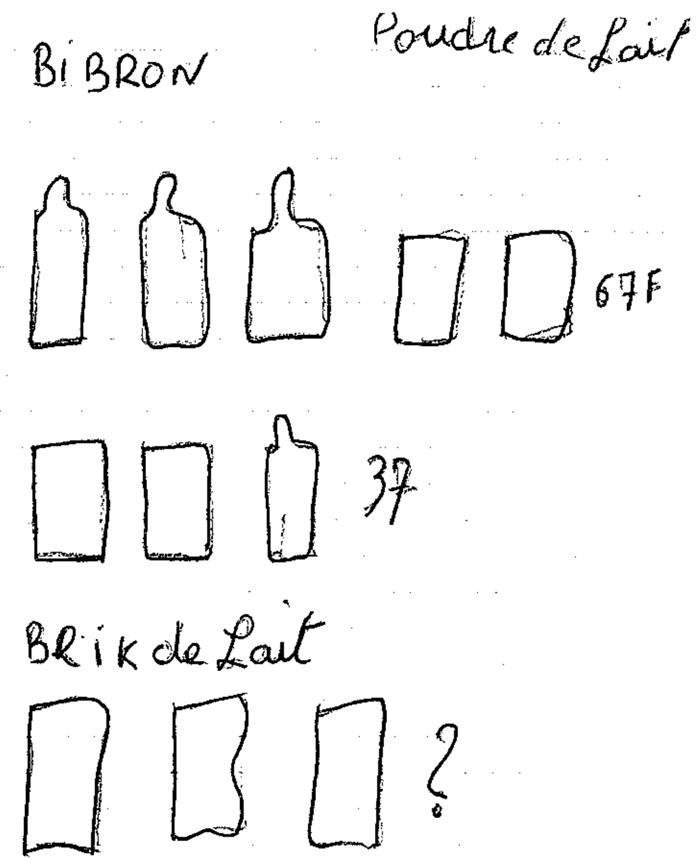
Exercice de Françoise

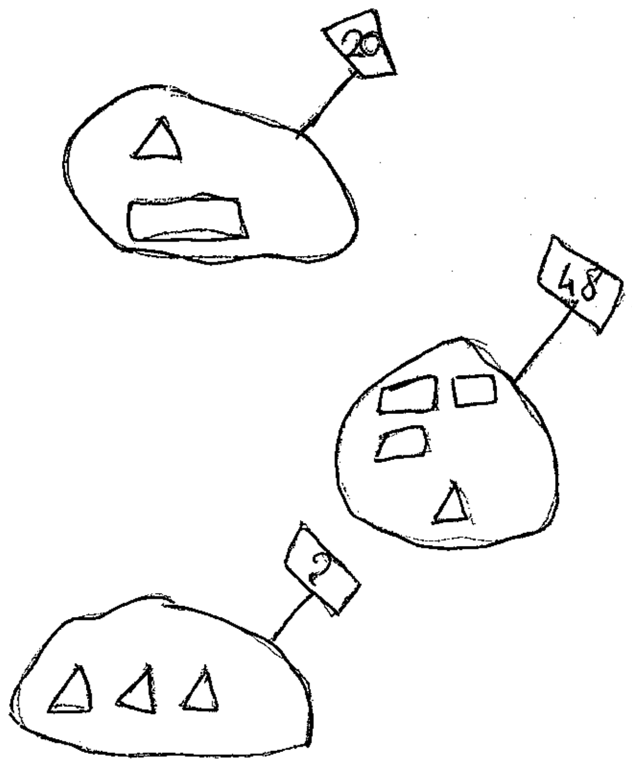


Françoise a construit son exercice par analogie avec le problème « Au marchand de glaces » et a seulement changé le type d'objet en jeu : elle dessine des fleurs et des ronds. Elle ne tient pas compte de la signification de son problème dans le réel.

Exercices de Nicolas







Nicolas a construit ses trois exercices par analogie avec les exercices présentés sur la feuille (cf. annexe) avec laquelle nous avons établi avec les stagiaires le bilan sur la structure commune de nos problèmes. Précisons qu'il n'a pas construit d'exercices à texte par analogie avec « Au snack ». Dans le premier problème qu'il a construit, il fait une confusion en voulant adapter son problème à la fois au problème « Les immeubles » et à « Au Village » ; notons qu'il ne dessine pas les flèches pour indiquer les largeurs. Les deux autres exercices ont été construits en changeant uniquement le type d'objet en jeu comme l'a fait Françoise.

Ce type d'exercice, nécessitant de comprendre la structure du problème pour les constructions non directement analogues à celles présentées en séances, est, semble t-il trop difficile à faire pour eux pour le moment, ce qui expliquerait le faible nombre de constructions relevées (une autre raison étant que les adultes n'effectuent pas toujours le travail demandé).

Terminons ce bilan en exposant leurs réactions face à la question : « que pensez-vous de nos problèmes ? »

- ils ont classé ce type de problème : *« Moi j'aime bien, je trouve que c'est de la logique »* (Fatma).

- ils ont parlé de l'utilité de s'exercer sur ces problèmes : *« C'est bien, ça fait travailler le raisonnement »* (Elisa), *« Moi, j'ai eu, l'impression que ça m'a servi dans les magasins »* (Touatia) *« Ah bah moi pas du tout. Quand je paye je peux me faire avoir »* (Fatma).

- tous ont clairement dit qu'ils préféraient la représentation imagée au texte : *« Quand c'est du texte, on a du mal à lire et à comprendre tandis que quand il y a des dessins, tout est là devant nous, on voit mieux »* (Amina) et ont établi des liens entre ces deux représentations : *« Les deux, c'est les mêmes »* (Claude)

Leurs réactions montrent qu'ils ont compris que derrière tous ces contextes se cachent un même problème mathématique et qu'ils sont prêts à ouvrir et à diversifier ces exercices.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette expérience au CUEEP de Tourcoing m'a énormément enrichie. Elle m'a tout d'abord permis de faire un premier pas dans la formation pour adultes, domaine dans lequel je souhaiterais travailler à plus long terme et de réaliser que tout public peut apprendre à condition que l'on adapte l'enseignement qu'on lui propose. Grâce à cette expérience, j'ai pu comprendre l'intérêt d'une pédagogie différente pour les adultes de ce niveau. Enfin, cela m'a permis de donner du sens aux notions didactiques reçues durant ma formation, étant donné ma faible expérience dans l'enseignement.

Le groupe avec lequel j'ai travaillé s'est révélé très intéressant. Les stagiaires étaient très agréables et dans l'ensemble très motivés. La plupart d'entre eux ont de bonnes capacités de raisonnement et d'abstraction, et même quelquefois surprenantes. Ce public m'a permis de comprendre que des raisonnements qui me semblaient a priori équivalents peuvent en fait êtres très différents conceptuellement.

J'ai pu aussi entrevoir le poids des habitudes quotidiennes dans la façon de résoudre les exercices :

- il me semble que la facilité de mettre en jeu les théorèmes en acte T1, T2 ou T3 est en relation avec leur utilisation quotidienne ;

- le lien qu'ils établissent entre les objets représentés dans l'exercice avec le réel influence leur interprétation du problème ;

- ils résolvent leur problème en se projetant dans l'action lorsque l'exercice est très proche d'une situation quotidienne.

Les limites de cette étude

La durée de notre étude est trop courte pour pouvoir apprécier les progrès de ces adultes ; un apprentissage avec ces adultes se fait dans le temps. De plus, nous avons eu affaire à un groupe d'une quinzaine de personnes, venant d'une région déterminée, et qui toutes avaient choisi de s'inscrire au CUEEP.

Le travail que nous leur avons proposé est limité ; nous ne leur avons offert qu'un seul type d'exercice, qui ne se prêtait pas à des variations dans la résolution.

Synthétisons maintenant les différents points de notre étude.

Les stagiaires ont adhéré aux problèmes que nous leur avons proposés et sont plus ou moins rentrés dans le contrat didactique. Nous avons cependant observé une grande dissemblance en ce qui concerne leurs facultés : pour certains les raisonnements proposés ont été tout de suite évidents alors que pour d'autres, ils ont semblé difficiles à mettre en œuvre.

Notre étude nous a permis de préciser l'influence des contextes et des représentations dans les différentes étapes de résolution des problèmes.

A propos des contextes

La façon dont on contextualise les problèmes semble agir sur la compréhension et la dévolution des problèmes mais peut aussi créer des erreurs d'interprétation liées au rapport qu'ils entretiennent avec le réel. Le jeu sur les contextes a permis de faire travailler les adultes sur des problèmes similaires mathématiquement et les a amené à utiliser leurs connaissances dans des contextes plus abstraits ;

A propos des représentations

En travaillant sur des problèmes à représentation imagée, il semble que les adultes se soient construits des repères pour comprendre et résoudre les problèmes. Même si chaque situation est différente et demande un effort d'analyse, la représentation des problèmes est dans les trois premières séances globalement la même ; les questions sont posées de telle façon, tous les objets sont dessinés, etc. Cela explique le passage relativement facile vers les formes géométriques ; le problème « Des étoiles et des rectangles » est globalement représenté comme les précédents et les stagiaires n'ont pas de difficultés à le comprendre.

Il semble que la façon dont on représente les problèmes a un effet au niveau de la compréhension et de l'analyse du problème, des supports non familiers ou trop implicites peuvent engendrer des erreurs d'interprétation et de raisonnement.

La grande difficulté observée est le passage de la représentation imagée dans laquelle tous les objets sont dessinés (Δ Δ Δ Δ) aux représentations semi-imagées ou à texte (4Δ ou bien 4 triangles). Plusieurs hypothèses expliquent ce fait :

- la perte de leurs repères avec les deuxièmes représentations : les notations algébriques (représentations semi-imagées) ne sont pas familières aux adultes, les exercices à textes posent des difficultés liées à la lecture.
- l'échec de T2 dans les représentations semi imagées ou à texte.

A propos de T1 et de T2

A première vue, T1 et T2 semblent équivalents. L'expérience montre avec les adultes que T2 est conceptuellement plus facile à mettre en jeu que T1. Nous nous sommes aperçus, lorsque nous avons voulu expliquer ces théorèmes en acte, que T1 demandait un grand travail de formalisation par rapport à T2 : il a fallu introduire des notions comme les ensembles semblables et comparables (voir page 57). La difficulté que nous avons eu à expliciter mathématiquement T1 venait du fait que T1 met en jeu des notions plus complexes telles que l'identification d'objets et cela peut expliquer pourquoi les adultes ont eu plus de facilités à utiliser T2 plutôt que T1.

Ouvertures

Une suite évidente à ce travail serait de le prolonger dans le temps, avec un public plus nombreux et plus varié et des problèmes plus diversifiés. Il me semble important d'affiner les conclusions notamment en ce qui concerne l'importance de la manière dont les problèmes sont posés dans la façon d'interpréter et de résoudre les problèmes. Il serait de plus intéressant d'effectuer ce travail chez les enfants des cours élémentaires et de comparer leurs performances et leurs difficultés avec celles des adultes.

La représentation imagée de nos problèmes, même si elle a suscité quelques difficultés au départ, a été adoptée par l'ensemble des adultes à la fin de nos séances. Nous pensons qu'un travail sur des problèmes avec ce type de représentations est très porteur car constitue un support de raisonnement et enlève l'obstacle de la lecture. Ces représentations permettent de plus d'utiliser des contextes plus abstraits, ce qui serait plus difficile avec des supports à texte. Il me semble donc intéressant de les faire travailler sur les changements de registres :

- savoir passer du concret à l'abstrait et inversement ;
- savoir passer du mode oral au mode écrit ou au mode imagé ;
- savoir passer du texte au mode imagé ou semi-imagé.

Idéalement, il faudrait leur faire prendre conscience de l'équivalence de ces points de vue, et qu'il leur appartient de choisir celle qui leur convient le mieux. Savoir passer d'un point de vue à un autre est une difficulté mentionnée dans le rapport de Richard (voir page 11). Les mathématiques semblent se prêter particulièrement bien à ce genre d'exercice. Est-ce qu'une familiarisation avec ces changements de registres en mathématiques peut s'étendre à d'autres situations ? Plus généralement, existe-t-il un processus mental universel correspondant au changement de registres, ou, au contraire ces processus se limitent-ils à un environnent donné ?

Bibiographie

- Avice J., Bonnal-Lordon V., Jean-Montcier G., *Point de vue sur la formation des adultes en « difficulté » d'insertion professionnelle*, Education permanente n°111, 1992.

- Brissiaud R., *Comment les enfants apprennent à calculer*, 1989.

- Brissiaud R., Clerc P., Ouzoulias A., *J'apprends les maths CE2 : livre du maître*, Paris : Retz, 2001.

- Brousseau G., *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, RDM 7/2, 33-115, 1986.

- Butlen D., Pezard M., *calcul mental, calcul rapide*, Irem, université Paris 7, 1989.

- Douady R., *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, RDM 7/2, 5-33, 1986.

- Duval R., *« Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? »,* RDM 16/3, 349-382, 1996.

- Ermel, *Apprentissages numériques et résolutions de problèmes : CE1*. INRP. Hatier, 2001.

- Ermel, *Apprentissages numériques et résolutions de problèmes : CE2*. INRP, Hatier, 2001.

- Fayol M., *L'enfant et le nombre : du comptage à la résolution de problèmes*, éd Lausanne ; Delachaux et Niestlé, 1990.

- Fuson K., *Research on whole number, Addition and Subtraction*, DA. Grows (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, 243-275, 1992.

- Ginsbourger F., Merle V., Vergnaud G. *Formation et apprentissage des adultes peu qualifiés*. Paris : La Documentation française, 1992.

- Girodet M.A. *Influence des cultures sur les pratiques quotidiennes du calcul*, Didier, 1996.

- Ifrah.G, *Histoire universelle des chiffres*, tome 1, 1990.

- Kahane J.P., *L'enseignement des sciences mathématiques*. Rapport au ministre de l'éducation nationale, 2002.

- Leclere J.P., Faire faire des mathématiques à un public en situation d'illettrisme : le contraire d'une utopie, Thèse Lille 1, 2000.

- Nunes T., et al. *Streets Mathematics and School Mathematics*. New York, NY : Cambridge University Press, 1993.

- Nunes T., *Ethnomathematics and everyday cognition*. DA. Grows (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, 557-574, 1992.

- Pailhous J. & Vergnaud G., dir. *Adultes en reconversion : faible qualification, insuffisance de la formation ou difficultés d'apprentissage ?* La Documentation française, 1989.

- Pastré P., *Requalification des ouvriers spécialisés et didactique professionnelle*. Education permanente, n°111, 1992.

- Vergnaud G., *La didactique a-t-elle un sens pour la formation des personnes peu qualifiées et peu motivées ?*, Migrants-Formation n°100, 1995.

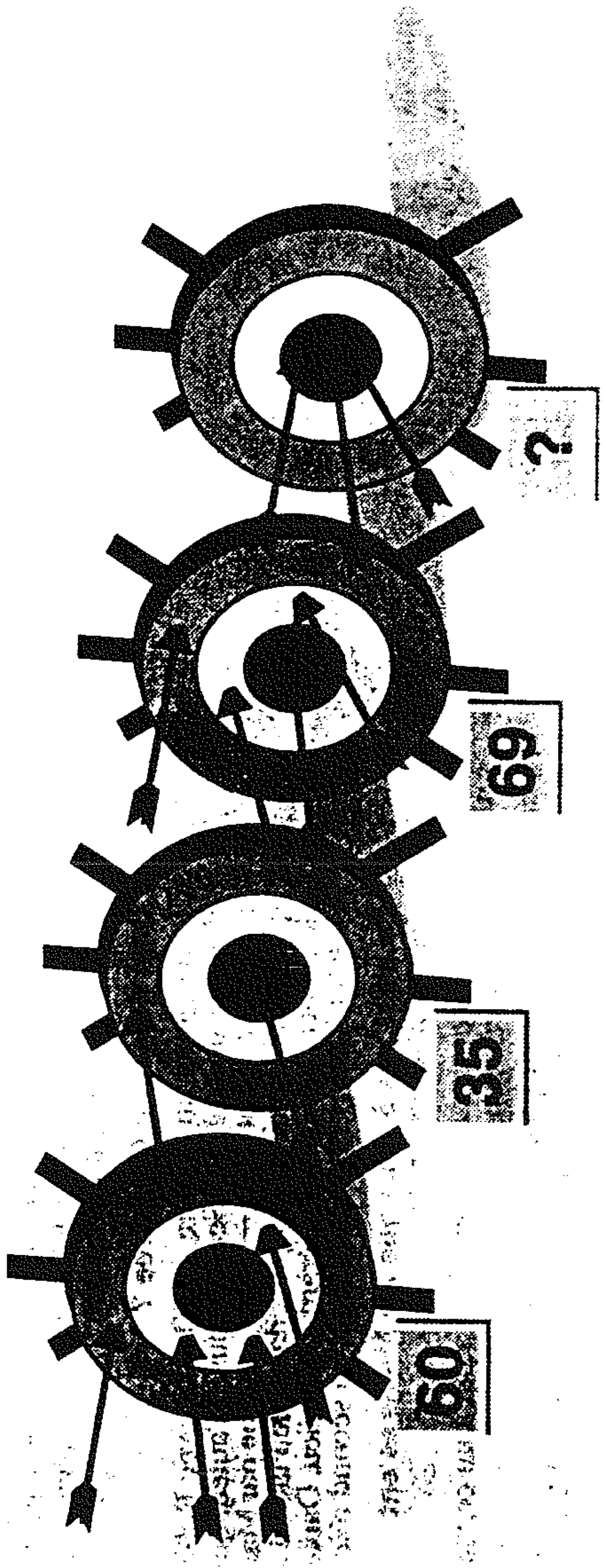
- Vergnaud G., *La théorie des champs conceptuels*, RDM 10/1.2, 133-170, 1990.

- Verschaffel L. et De Corte E., *Number and Arithmetic*. International Handbook of Mathematics Education, 99-137, 1996.

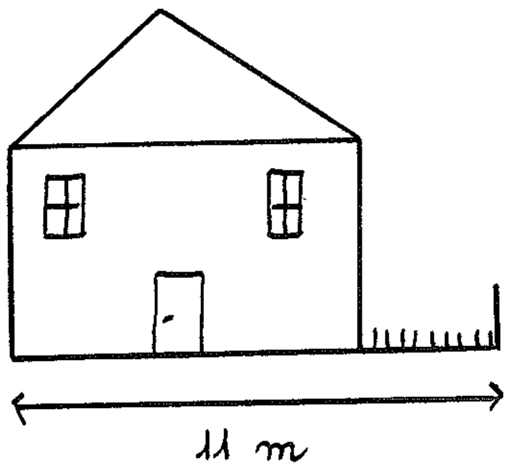
- Vygotsky L. *Langage et pensée*, Paris, Editions Sociales Messidor, 1986.

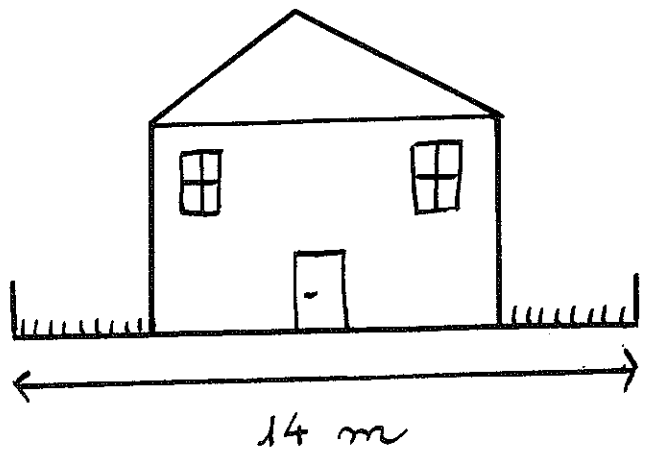
ANNEXE

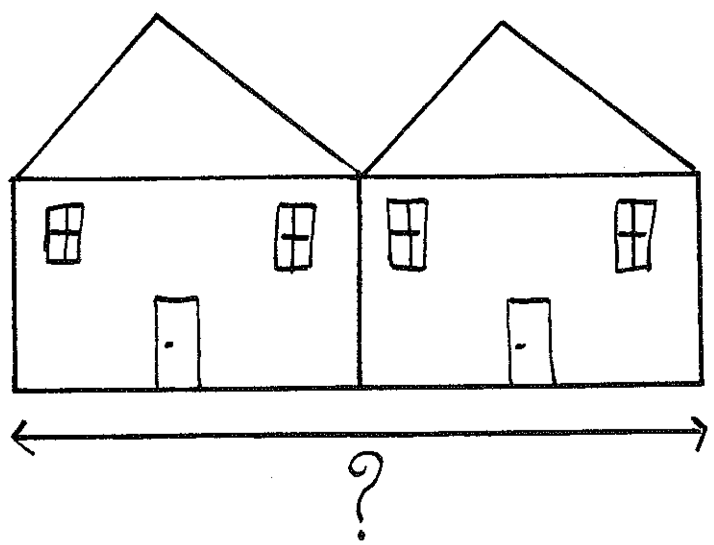
LES CIBLES



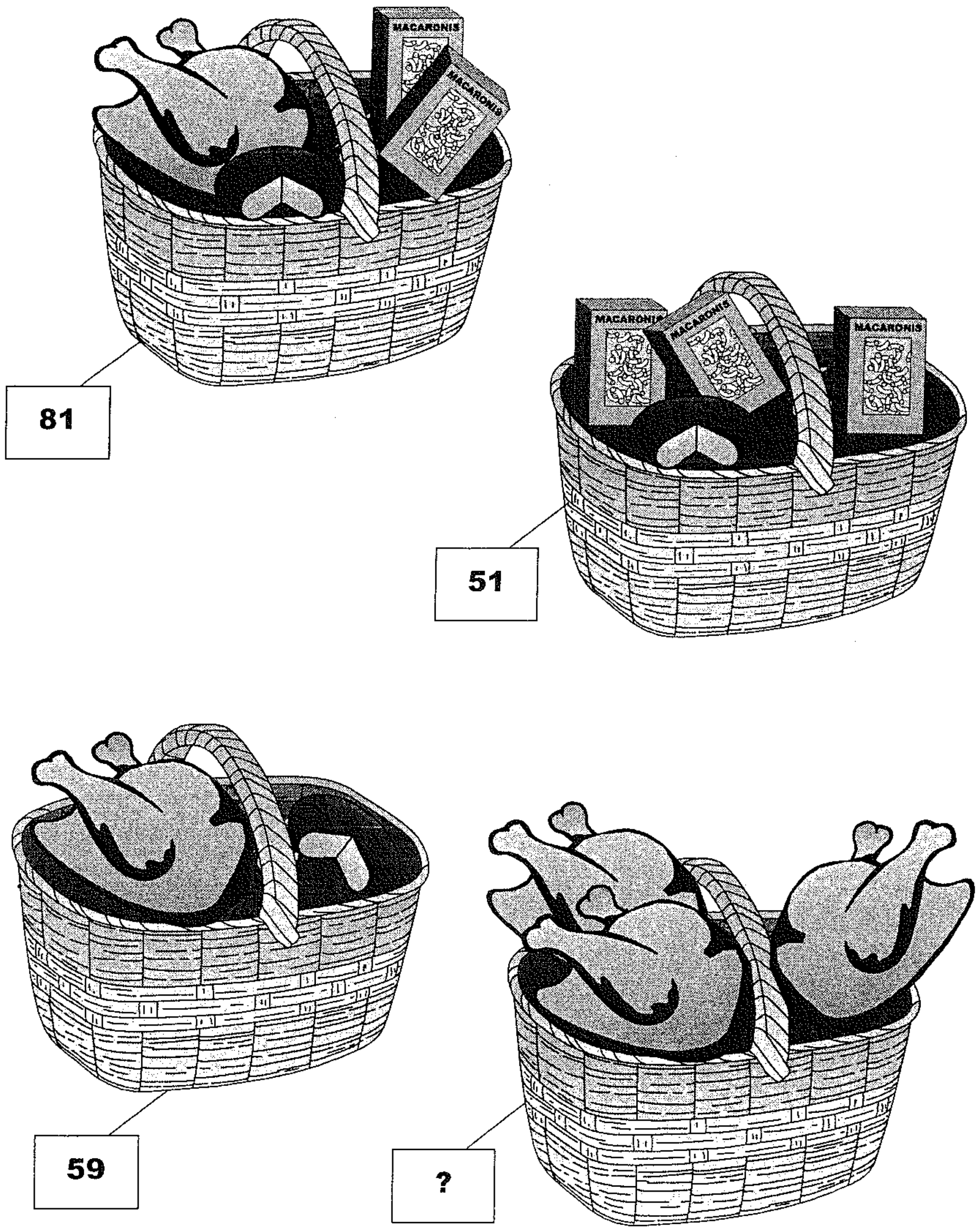
AU VILLAGE !



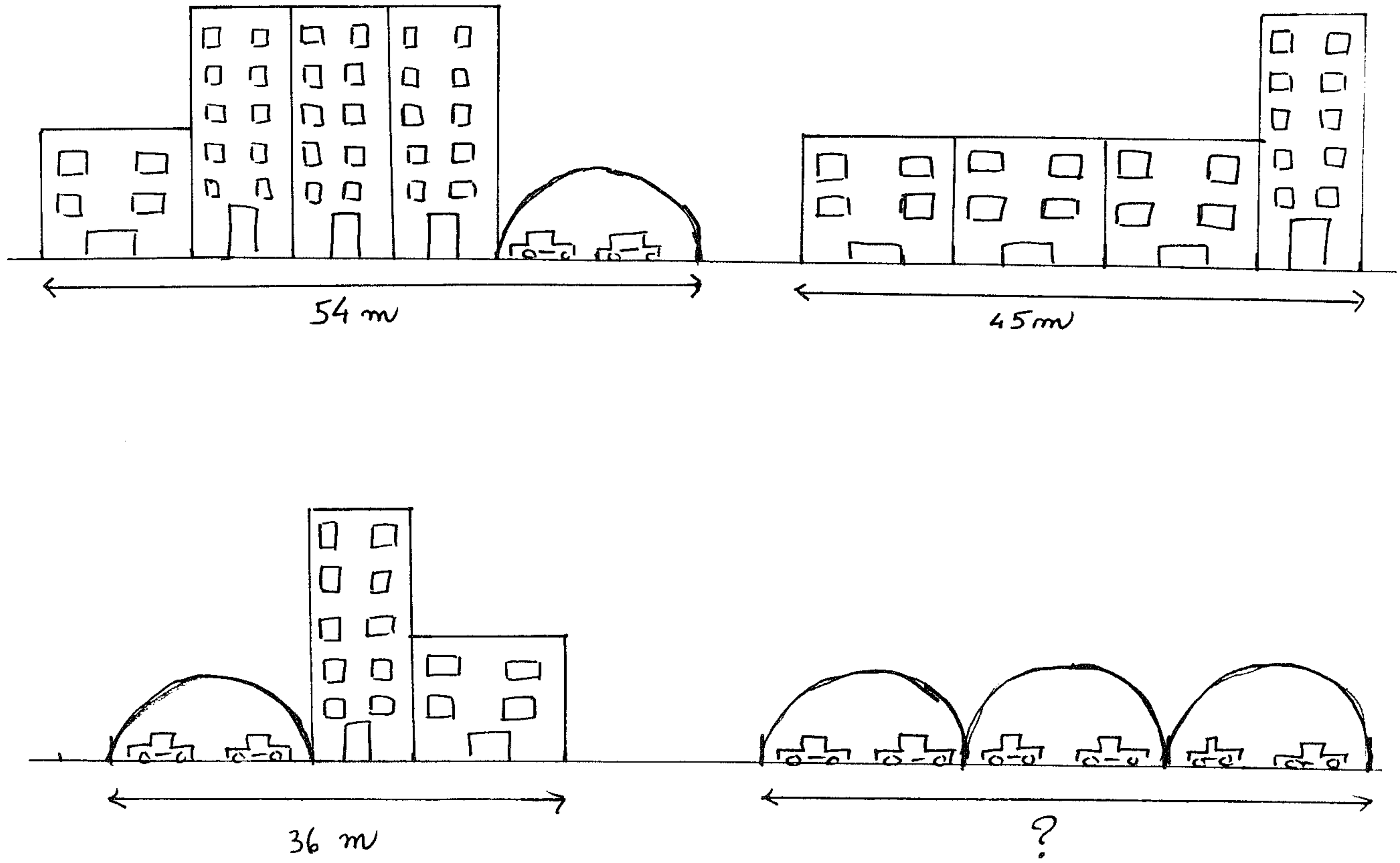




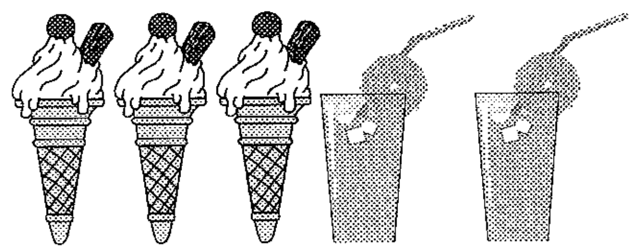
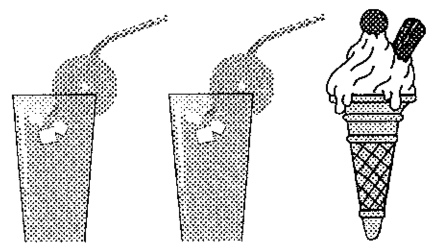
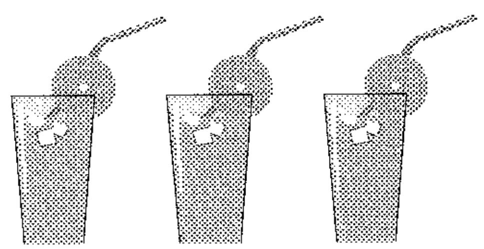
A FRANPRIX



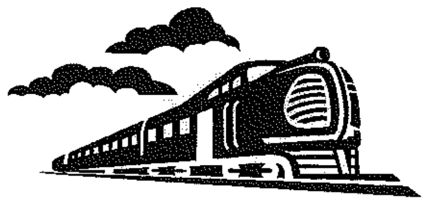
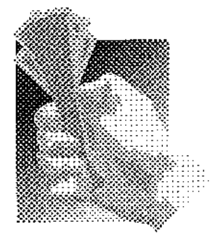
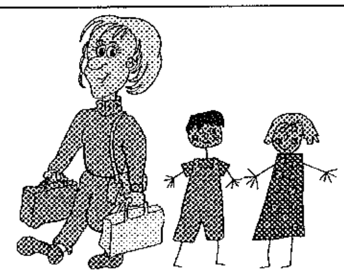
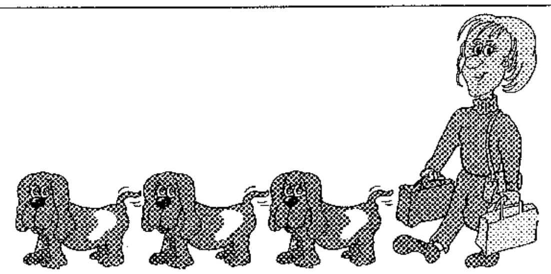
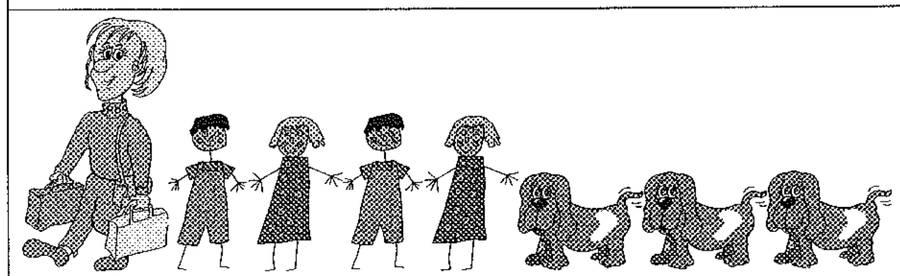
LES IMMEUBLES



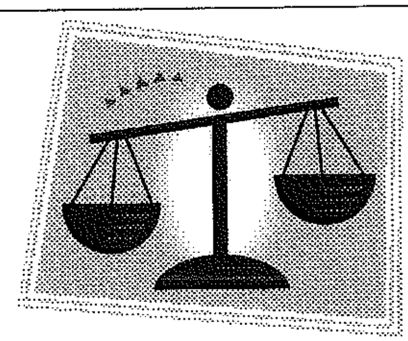
AU MARCHAND DE GLACES

	67 F
	37 F
	?

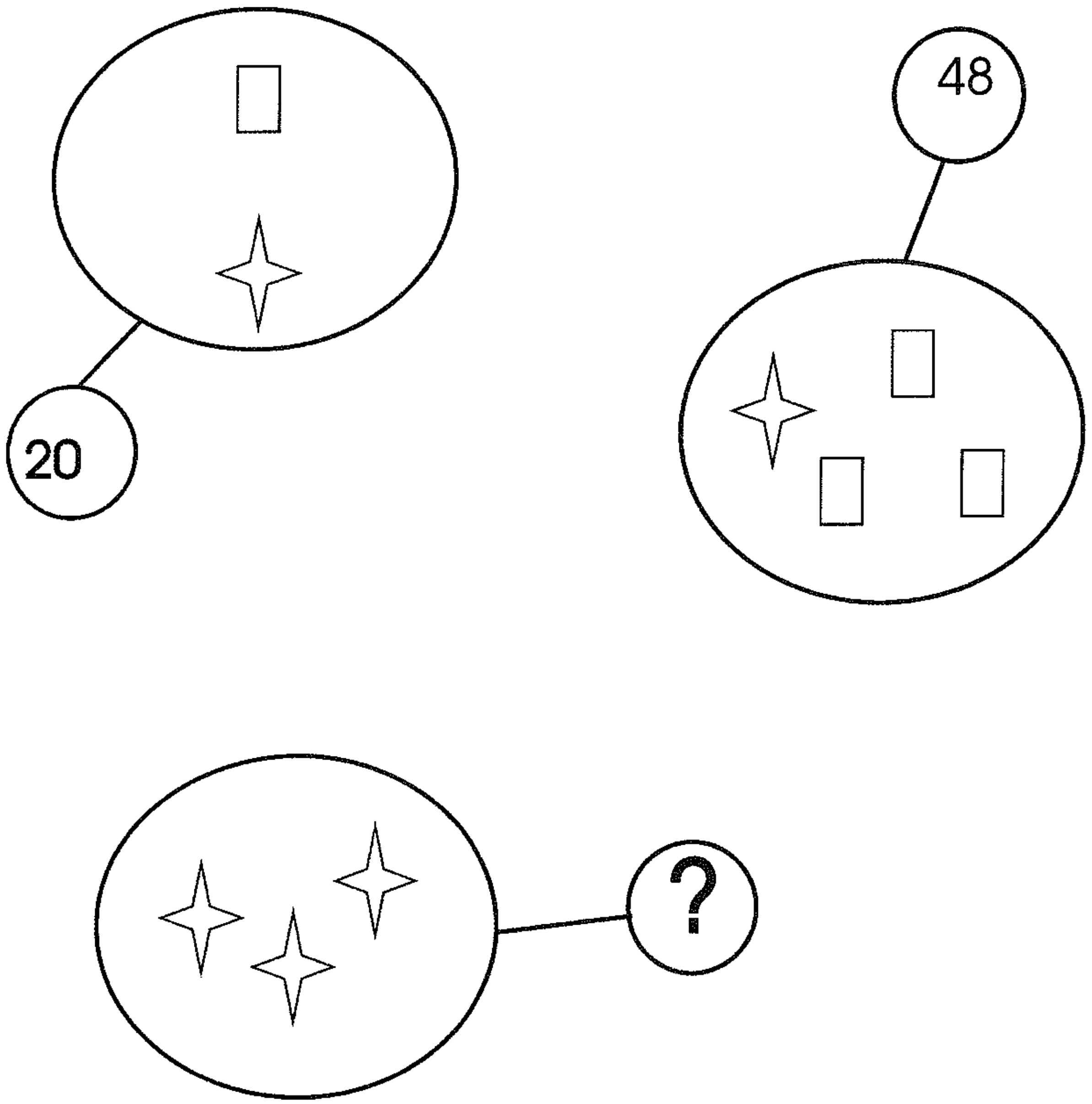
PARIS-LILLE EN TRAIN

	
	90
	70
	170
	?

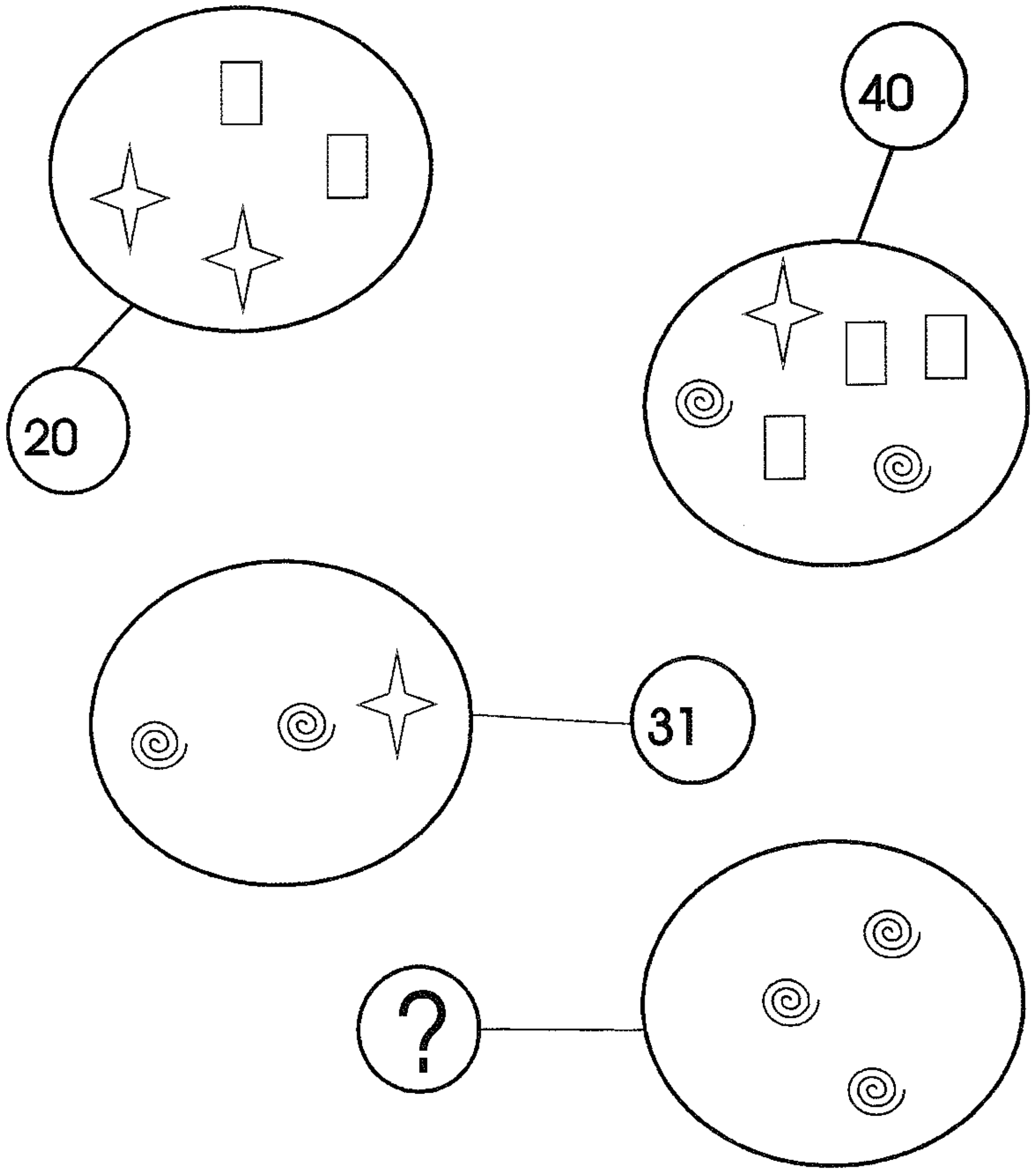
LES FRUITS

	
	320 Grammes
	220 Grammes
	?

DES ETOILES ET DES RECTANGLES

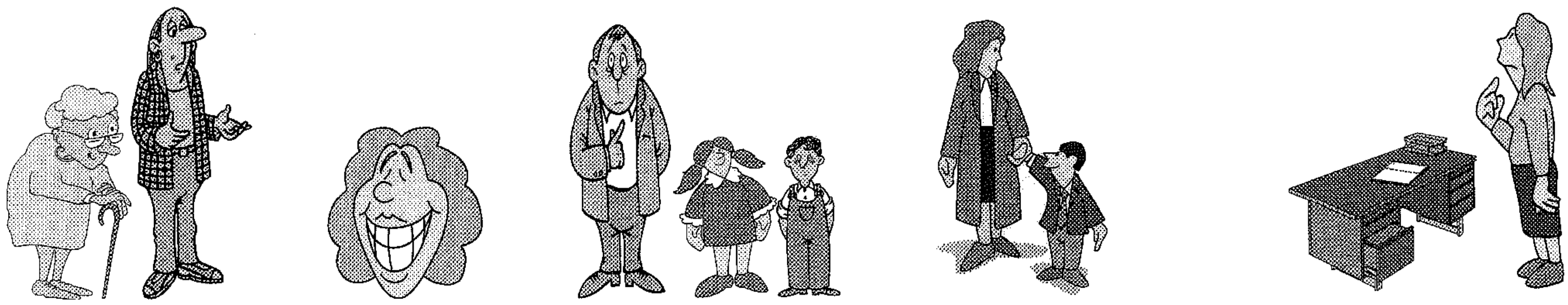


DES ETOILES ET DES RECTANGLES II



AU CINEMA

Au cinéma, il y a un tarif adulte et un tarif enfant.
Devant moi, il y a un adulte et un enfant qui paient 55 F.
Puis, un adulte et deux enfants paient 70 F.
Combien vont payer les deux adultes qui sont derrière moi ?



Exercice 1

$$\star + \star + \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc = 59$$

$$\star + \star + \bigcirc = 37$$

$$\star + \star + \star = ?$$

Exercice 2

$$5\,\square + 4\,\triangle = 68$$

$$2\,\square + 4\,\triangle = 56$$

$$2\,\triangle = ?$$

Comparaison, déduction...

A midi, mes collègues et moi allons déjeuner dans un snack.

La semaine dernière, nous avons pris 5 frites et 1 sandwich. Nous avons payé 57 F.
Le lendemain, nous avons pris 3 frites et 1 sandwich. Nous avons payé 41 F.

Aujourd'hui, nous avons pris 3 sandwiches.

Combien allons-nous payer ?

A LA BOULANGERIE

Je vais à la boulangerie. J'achète 2 éclairs au chocolat et 5 croissants. Je paie 46 F.

Le lendemain, j'achète 2 éclairs au chocolat et 2 croissants. Je paie 34 F.

1) Faites un dessin pour représenter l'exercice.

2) Combien coûtent 3 croissants ?

3) Combien coûte 1 croissant ?

4) Combien coûtent 2 éclairs au chocolat ?

5) Combien coûte 1 éclair au chocolat ?

6) Combien coûtent 1 éclair au chocolat et 1 croissant ?

A AUCHAN

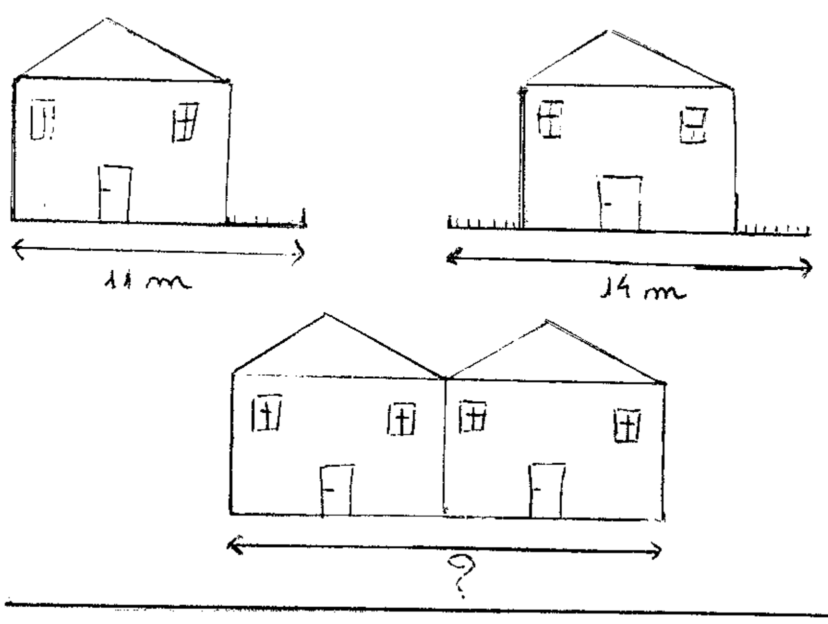
Je vais faire les courses.
Si j'achète 3 bouteilles d'eau et 3 fromages, je paie 45 F.
Si j'achète 3 bouteilles d'eau et 1 fromage, je paie 21 F.

1) Combien coûte 1 fromage ?

2) Combien coûte 1 bouteille d'eau ?

3) Combien coûtent 1 fromage et 1 bouteille d'eau ?

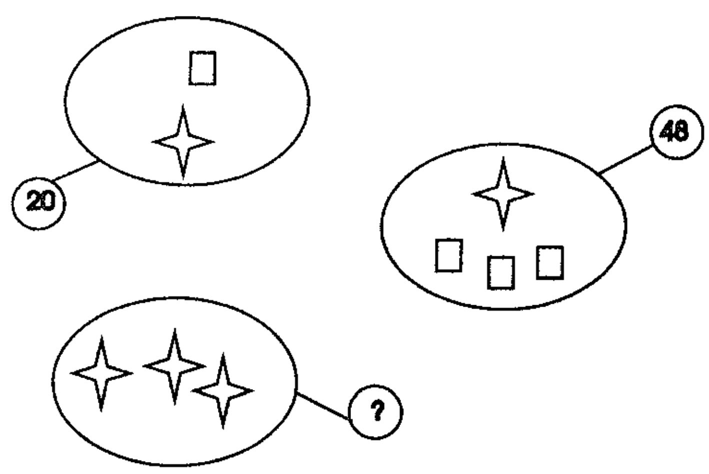
AU VILLAGE !



AU MARCHAND DE GLACES

	67 F
	37 F
	?

DES ETOILES ET DES RECTANGLES



AU SNACK

A midi, mes collègues et moi allons déjeuner dans un Snack.

La semaine dernière, nous avons pris 5 frites et 1 sandwich. Nous avons payé 57F.
Le lendemain, nous avons pris 3 frites et 1 sandwich. Nous avons payé 41F.

Aujourd'hui, nous avons pris 3 sandwiches.

Combien allons nous payer ?

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Etude exploratoire des capacités mathématiques chez des adultes illettrés

AUTEUR :

Julie LASCAR

RESUME :

En France, peu de travaux en didactique des mathématiques ont été effectués sur un public d'adultes en situation d'illettrisme. L'objectif de cette étude est, en s'appuyant sur des travaux de recherche en didactique, de préciser quelques spécificités de ce public en ce qui concerne leurs capacités et leurs difficultés dans la résolution de problèmes mathématiques.
Ce travail est mené dans le cadre d'un centre de formation pour adultes (CUEEP) et présente deux thèmes de recherche :
- dégager quelques caractéristiques sur le rapport au nombre de ces adultes ;
- étudier le rôle des contextes et des représentations sémiotiques dans la compréhension et la résolution d'un problème mathématique chez ce public.

MOTS CLES :

Formation d'adultes, illettrisme, numération, systèmes d'équations, théorie des champs conceptuels, représentations sémiotiques, ethno-mathématiques.

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : septembre 2002
ISBN : 2-86612-230-5